

# PROPOSTA DE UM MÉTODO PARA O CÁLCULO DO COEFICIENTE DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO AUXILIADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

ENG. WLADIMIR ALEX MAGALHÃES BARCHA

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Lirani

DEDALUS - Acervo - EESC



31100016921

São Carlos  
1994



Class.	TESE SC
Cutt.	0646
Tombo	041/95

31.000.16921

Eng. Mecânica

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Este trabalho foi aprovado e defendido pelo Conselho de Engenharia de São Carlos em 15/04/1994

741326

*[Signature]*

Prof. Dr. JOÃO LIRANI (Orientador)  
 Depto. de Engenharia de São Carlos - USP

Prof. Dr. EDUARDO MARRAS (Examinador)  
 Depto. de São Carlos - USP

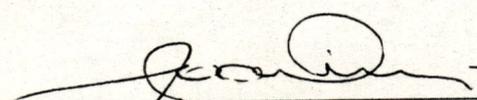
Prof. Dr. JURANDI (Presidente da Banca)  
 Presidente da Banca

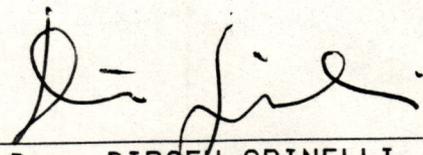
*[Signature]*

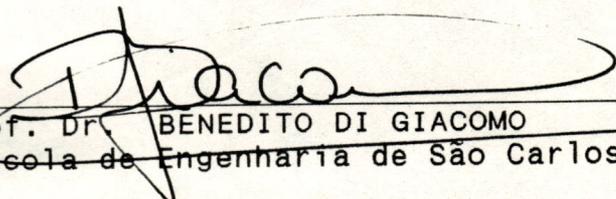
Prof. Dr. EDUARDO MARRAS (Examinador)  
 Examinador da Banca

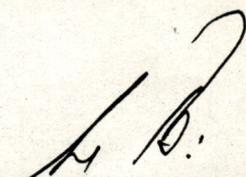
FOLHA DE APROVAÇÃO

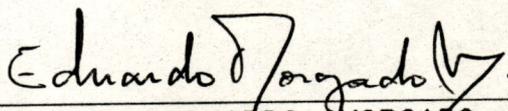
Dissertação defendida e aprovada em 15/12/1994  
pela Comissão Julgadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. JOÃO LIRANI (Orientador)  
(Escola de Engenharia de São Carlos - USP)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. DIRCEU SPINELLI  
(Escola de Engenharia de São Carlos - USP)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. BENEDITO DI GIACOMO  
(Escola de Engenharia de São Carlos - USP)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. JURANDYR POVINELLI  
Presidente da CPG

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. EDUARDO MORGADO BELO  
Coordenador da Area

Mas nada há encoberto que não  
haja de ser descoberto; nem oculto,  
que não haja de ser sabido.

Lucas 12:2

Aos meus pais, irmãos  
e à minha esposa, pelo apoio e pelas  
horas de convivência roubadas.

## AGRADECIMENTOS

Aos professores João Lirani e Ernesto Massaroppi Jr. pela orientação e colaboração na elaboração deste trabalho e pela amizade.

Ao amigo Eng. Luiz Henrique, pela amizade e apoio técnico nas horas difíceis.

Ao amigo Marcão e amigos do grupo de CAD/CAE:, Chico, Mário e Mtsuo, pela força sempre dada.

Aos amigos e colegas de todo o laboratório de CAD/CAM: Suga, Geraldo, Hugo, Tiberti, Edilson, Orides, Lobão, Osvaldo entre tantos outros.

Aos professores do departamento de Engenharia Mecânica.

Ao Iberê pela ajuda e paciência.

Ao Bacharelado em Ciência da Computação Adauto, pela parte de programação.

Ao Maragno, Dona Tereza, Carmen e às secretárias e funcionários do departamento de Engenharia Mecânica.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pela concessão de uma bolsa de estudo para desenvolvimento de programa de mestrado junto a área de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da EESC - USP

E, agradeço acima de tudo à DEUS que sempre me iluminou, mostrando-me os caminhos a serem seguidos a fim de superar os obstáculos e conquistar os meus objetivos.

## RESUMO

BARCHA, W.A.M. Proposta de um método para o cálculo do coeficiente de concentração de tensão auxiliado pelo método dos elementos finitos. São Carlos, 1994. 92p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Este trabalho apresenta uma metodologia para o cálculo do coeficiente de concentração de tensão que não faz uso da relação básica, relação entre a tensão máxima e a tensão nominal que ocorre em um componente com descontinuidade geométrica, encontrada na literatura. O método baseia-se em uma média das tensões que ocorrem na região de descontinuidade geométrica do componente. Para a validação do método proposto foram estudados casos já existentes na literatura para posterior cálculo do erro. Tubos com flanges bem como flanges furadas também foram analisadas, apresentando resultados em boa concordância com outros já publicados. Foram obtidos valores do coeficiente de concentração de tensão para o caso de uniões forçadas eixo-cubo.

Palavras chave: Concentração de tensão; Método dos elementos finitos

## ABSTRACT

BARCHA, W.A.M. Proposal of a method to evaluate the stress concentration factor using finite element method. São Carlos, 1994. 92p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This work presents a methodology to evaluate the stress concentration factor which doesn't use the ratio between the maximum and the nominal stresses, found in the literature. The method uses the average stress that occurs in the region of geometrical discontinuity of the component. The validity of proposed method were studied cases already existent in the bibliography for evaluating the error. External projections on hollow tubes as well as perforated flanges are also analysed, presenting results in good agreement with previously published data. The stress concentration factor was also calculated to the problem of press-fitted shafts.

Keywords: Stress concentration; Finite element method

## SUMÁRIO

DEDICATÓRIA.....	iii
AGRADECIMENTOS .....	iv
RESUMO.....	v
ABSTRACT.....	vi
SUMÁRIO .....	vii
LISTA DE FIGURAS .....	ix
LISTA DE TABELAS.....	xi
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Considerações iniciais .....	1
1.2 Objetivos deste trabalho .....	2
1.3 Conteúdo do trabalho .....	3
2 ESTADO DA ARTE .....	5
2.1 Método dos Elementos Finitos.....	5
2.1.1 Origens.....	5
2.1.2 Descrição do método .....	9
2.2 Determinação do coeficiente de concentração de tensão.....	15
2.2.1 Origens.....	15
2.2.2 Estudos teóricos .....	17
2.2.3 Estudos experimentais.....	20
3 METODOLOGIA UTILIZADA.....	24
3.1 Introdução .....	24
3.2 Alguns métodos para o cálculo do $K_t$ .....	25
3.2.1 Método analítico .....	25
3.2.2 Fotoelasticidade .....	26

3.2.3 Método dos Elementos Finitos .....	27
3.2.4 Outros métodos.....	27
3.2.5 Métodos intuitivos .....	28
3.3 Concentração de tensões em componentes submetidos à fadiga.....	29
3.3.1 Dimensionamento à fadiga .....	31
3.4 Método proposto para o cálculo de $K_t$ .....	32
3.4.1 Descrição do método proposto .....	33
3.4.2 Validação do método proposto .....	37
3.4.2.1 Placa finita com furo circular central submetida à tração.....	38
3.4.2.2 Placa finita com variação de seção submetida à tração .....	41
3.4.2.3 Placa finita com entalhe circular submetida à tração.....	44
3.5 Considerações finais .....	48
4 APLICAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO E ESTUDO DE CASO .....	49
4.1 Aplicação do método proposto .....	49
4.1.1 Tubo com flange .....	50
4.1.2 Flange furada .....	53
4.2 Estudo de caso: União eixo-cubo.....	56
4.2.1 Considerações iniciais.....	56
4.2.2 Estudo teórico .....	59
4.2.3 Estudo prático .....	64
5 SISTEMA PARA A GERAÇÃO DE ÁBACOS.....	69
5.1 Características do sistema.....	69
5.2 Exemplos de aplicação do sistema.....	71
6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES P/ TRABALHOS FUTUROS .....	72
6.1 Conclusões .....	72
6.2 Sugestões p/ trabalhos futuros .....	73
BIBLIOGRAFIA .....	75
ANEXO A: Procedimento utilizado pelo Método dos Elementos .....	83
Finitos para determinação de tensões.	
ANEXO B: Exemplo de arquivo utilizado no método proposto. ....	91

## LISTA DE FIGURAS

- FIGURA 2.1 - Exemplo da malha de uma placa com entalhe.
- FIGURA 2.2 - Relação entre número de nós e qualidade de resultado.
- FIGURA 3.1 - Placa infinita com um furo elíptico.
- FIGURA 3.2 - Dente de engrenagem analisado por Fotoelasticidade.
- FIGURA 3.3 - Modelo de um dente de engrenagem.
- FIGURA 3.4 - Linhas de fluxo em componentes tracionados.
- FIGURA 3.5 - Eixos escalonados e suas linhas de fluxo.
- FIGURA 3.6 - Ábaco para obtenção de  $q$ .
- FIGURA 3.7 - Pontos utilizados para o cálculo do  $K'_t$ .
- FIGURA 3.8 - Procedimento para o cálculo do  $K'_t$ .
- FIGURA 3.9 - Modelo de elementos finitos de uma placa com furo circular.
- FIGURA 3.10 - Nós selecionados para o cálculo de  $K'_t$ .
- FIGURA 3.11 - Ábaco gerado pelo método proposto.
- FIGURA 3.12 - Modelo de elementos finitos de uma placa com variação de seção.
- FIGURA 3.13 - Nós selecionados para o cálculo de  $K'_t$ .
- FIGURA 3.14 - Ângulo que posiciona o ponto de tensão máxima.
- FIGURA 3.15 - Ábaco gerado pelo método proposto.
- FIGURA 3.16 - Modelo de elementos finitos de uma placa com entalhe circular.
- FIGURA 3.17 - Nós selecionados para o cálculo de  $K'_t$ .
- FIGURA 3.18 - Ábaco gerado pelo método proposto.
- FIGURA 4.1 - Geometria do tubo com flange.
- FIGURA 4.2 - Modelo de Elementos Finitos para o caso de tubo com flange.
- FIGURA 4.3 - Nós selecionados para o cálculo de  $K'_t$ .
- FIGURA 4.4 - Modelo de Elementos Finitos para flange furada.
- FIGURA 4.5 - Nós selecionados para o cálculo de  $K'_t$ .

FIGURA 4.6 - Geometria da flange furada.

FIGURA 4.7 - Ajuste longitudinal.

FIGURA 4.8 - Ajuste transversal por contração.

FIGURA 4.9 - Ajuste transversal por dilatação.

FIGURA 4.10 - Montagem forçada de duas peças cilíndricas.

FIGURA 4.11 - Tensão ao longo do eixo: comprimentos do eixo e cubo iguais.

FIGURA 4.12 - Tensão ao longo do eixo: comprimentos do eixo e cubo diferentes.

FIGURA 4.13 - Geometria da união eixo-cubo.

FIGURA 4.14 - Modelo de elementos finitos para união eixo cubo.

FIGURA 4.15 - Ábaco proposto para o caso de união eixo-cubo.

FIGURA A.1 - Exemplo de elemento para cálculo das tensões.

## LISTA DE TABELAS

- TABELA 2.1 - Áreas de aplicação do Método dos Elementos Finitos.
- TABELA 2.2 - Equações para o cálculo de  $K_t$ .
- TABELA 3.1 - Resultados obtidos através do método proposto.
- TABELA 3.2 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $D/d=2$ .
- TABELA 3.3 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $D/d=1,5$ .
- TABELA 3.4 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $D/d=1,3$ .
- TABELA 3.5 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $D/d=1,2$ .
- TABELA 3.6 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $D/d=2$ .
- TABELA 3.7 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $D/d=1,5$ .
- TABELA 3.8 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $D/d=1,3$ .
- TABELA 3.9 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $D/d=1,2$ .
- TABELA 4.1 - Resultados obtidos pelo Método Proposto para  $r/t=0,25$ ;  $T/t=2,5$ ;  
 $h/t=2,5$ .
- TABELA 4.2 - Resultados obtidos pelo Método Proposto para  $r/t=0,25$ ;  $T/t=2,5$ ;  
 $h/t=1,5$ .
- TABELA 4.3 - Resultados obtidos pelo Método Proposto para  $r/t=0,25$ ;  $T/t=2$ ;  
 $h/t=2,5$ .
- TABELA 4.4 - Resultados obtidos pelo Método Proposto para flange com 8 furos.
- TABELA 4.5 - Resultados obtidos pelo Método Proposto para flange com 16 furos.
- TABELA 4.6 - Valores de  $K_t$  para a relação  $L_c/d_e = 0,5$ .
- TABELA 4.7 - Valores de  $K_t$  para a relação  $L_c/d_e = 1$ .
- TABELA 4.8 - Valores de  $K_t$  para a relação  $L_c/d_e = 1,5$ .

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1. Considerações iniciais

O desenvolvimento dos computadores nas últimas décadas tem trazido muitas mudanças em diversas áreas do conhecimento. Com o computador, diversas técnicas surgiram e ainda estão surgindo com o intuito de auxiliar e incrementar as tarefas do dia a dia de diversas empresas. Nas áreas tecnológicas, o computador vem sendo maciçamente utilizado nas tarefas, por exemplo, de projeto e produção de produtos.

Nos dias de hoje a Engenharia Auxiliada por Computador (Computer Aided Engineering - CAE), o Projeto Auxiliado por Computador (Computer Aided Design - CAD), a Fabricação Auxiliada por Computador (Computer Aided Manufacturing - CAM), o Planejamento do Processo Auxiliado por Computador (Computer Aided Process Planing - CAPP) e o Controle de Qualidade Auxiliado por Computador (Computer Aided Quality Control - CAQC) são exaustivamente utilizados no mundo todo. No Brasil estes conceitos estão cada vez mais sendo utilizados nas indústrias de vários setores, devido principalmente ao crescente desenvolvimento dos computadores aliado à redução de custos.

Mais especificamente para a Engenharia do Produto, o Método dos Elementos Finitos (Finite Element Method - FEM) é o método mais utilizado no auxílio ao desenvolvimento (parte de cálculo) do produto.

Métodos para análise por Elementos Finitos são hoje disponíveis em pacotes comerciais para micro computadores do tipo IBM-PC bem como para estações de trabalho e computadores de grande porte.

Inicialmente o Método dos Elementos Finitos foi utilizado como uma ferramenta para mostrar porque um produto falhou e que mudanças eram necessárias a fim de se evitar novas falhas. Recentemente, ele passou a ser utilizado para confirmar se um projeto inicial iria ou não atender as necessidades antes que o produto fosse posto em serviço. Hoje em dia o Método dos Elementos Finitos é muito utilizado para a determinação de tensões atuantes em estruturas, sejam elas mecânicas ou não, sendo que os resultados que podem ser obtidos são de grande acuracidade e confiabilidade.

Deste modo, entende-se o porque da grande utilização deste método no auxílio à determinação do Coeficiente de Concentração de Tensão. Com ele pode-se modelar as mais diversas configurações de descontinuidade geométrica bem como obter-se os valores de tensão necessários ao cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão.

Por outro lado, nem sempre se pode contar com os recursos oferecidos por pacotes de análises por Elementos Finitos, e desta maneira, o valor do Coeficiente de Concentração de Tensão pode ser obtido através de ábacos, equações empíricas ou por ensaios experimentais. Os ábacos e equações experimentais nem sempre são disponíveis para certas configurações de descontinuidade geométrica, e os ensaios experimentais são caros e limitados.

Assim, nota-se a necessidade de trabalhos que visem a obtenção de ábacos de valores do Coeficiente de Concentração de Tensão para problemas muito freqüentes na Engenharia e ainda não disponíveis na literatura.

## **1.2. Objetivos deste trabalho**

O objetivo principal deste trabalho é propor um método para o cálculo do Coeficiente Teórico de Concentração de Tensão ( $K_t$ ) auxiliado pelo Método dos Elementos Finitos.

O método proposto não faz uso da relação entre a tensão máxima e a tensão nominal (aquela obtida através de fórmulas da Teoria de Elasticidade) para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão. No lugar da tensão nominal o método faz uso da média das tensões que ocorrem na região de descontinuidade geométrica, para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão.

É importante citar que os valores do Coeficiente de Concentração de Tensão são de grande valia na obtenção do Coeficiente de Concentração de Tensão à Fadiga ( $K_f$ ), que por sua vez é de fundamental importância no estudo do comportamento à fadiga de componentes mecânicos, conforme apresentado na seção 3.3.

Um estudo para a obtenção de valores do Coeficiente de Concentração de Tensão para casos já conhecidos na literatura tem o intuito de validar o método proposto através da comparação dos resultados obtidos com os já existentes na literatura.

Um outro estudo visa a aplicação do método proposto à outros casos de interesse da Engenharia Mecânica a fim de obter-se valores do Coeficiente de Concentração de Tensão.

O estudo do caso de união forçada eixo-cubo (caso em que não foram encontrados valores precisos do valor de  $K_t$  na literatura) tem a finalidade de oferecer valores do Coeficiente Teórico de Concentração de Tensão.

Outro objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um sistema computacional para a geração automática de ábacos de valores de  $K_t$ . Deste modo poder-se-á deixar disponível ábacos para diversas configurações de descontinuidades geométricas. Estes ábacos, por sua vez, poderão ser utilizados por projetistas que necessitam do valor da máxima tensão que ocorre em uma certa descontinuidade geométrica, e que não dispõe, por exemplo, dos recursos oferecidos pelo Método dos Elementos Finitos.

### **1.3. Conteúdo do trabalho**

Este trabalho é composto pelos seguintes capítulos:

#### **CAPÍTULO 2 - ESTADO DA ARTE**

Este capítulo apresenta um breve histórico do desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos bem como da sistemática para a obtenção do Coeficiente de Concentração de Tensão.

#### **CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA UTILIZADA**

Este capítulo apresenta alguns métodos conhecidos para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão e apresenta também a metodologia proposta para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão.

Encontra-se também neste capítulo a validação do método proposto através da determinação do Coeficiente de Concentração de Tensão, utilizando-se deste método, para os casos de Placa Finita com Furo Circular Central Submetida à tração; Placa Finita com Variação de Seção Submetida à tração e Placa Finita com Entalhe Circular Submetida à tração.

#### **CAPÍTULO 4 - APLICAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO E ESTUDO DE CASO**

Este capítulo apresenta algumas aplicações do método proposto na determinação do Coeficiente de Concentração de Tensão para os casos de eixo com flange bem como para flange furada. Neste capítulo encontra-se também um estudo para a determinação do Coeficiente de Concentração de Tensão para o caso de união forçada eixo-cubo.

Encontra-se neste capítulo a descrição destes estudos bem como os resultados obtidos.

#### **CAPÍTULO 5 - SISTEMA PARA A GERAÇÃO DE ÁBACOS**

Este capítulo apresenta a descrição do desenvolvimento de um sistema para a geração automática de ábacos do Coeficiente de Concentração de Tensão através de dados oriundos do método proposto.

#### **CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES**

Este capítulo apresenta as principais conclusões do trabalho juntamente com sugestões para futuros trabalhos, com base nos resultados obtidos.

#### **BIBLIOGRAFIA**

**Anexo A (Exemplo de cálculo de tensões pelo Método dos Elementos Finitos)**

**Anexo B (Exemplo de arquivo utilizado no método proposto)**

# CAPÍTULO 2

## ESTADO DA ARTE

### 2.1 Método dos Elementos Finitos

#### 2.1.1 Origens

Desde a introdução do Método dos Elementos Finitos, há mais de trinta anos atrás, aplicações deste procedimento analítico tem passado por desenvolvimentos. A diversificação nas áreas de aplicação e o aumento na complexidade dos problemas aos quais o método tem sido aplicado, não poderiam ter sido imaginados no tempo em que os conceitos básicos foram primeiramente promulgados. Uma consequência deste rápido crescimento é que não se pode firmar uma única definição do Método dos Elementos Finitos.

Um grupo de pesquisadores consideram o Método dos Elementos Finitos ser meramente uma extensão de métodos de análise estrutural no qual a estrutura é tratada como uma montagem de elementos estruturais discretos (CLOUGH, 1965).

Uma outra opinião, defendida por outros engenheiros e cientistas, é que o Método dos Elementos Finitos é um procedimento utilizado para obter-se soluções aproximadas de problemas do contínuo baseado na aplicação de deformações em regiões discretas do sistema (ZIENKIEWICZ, 1977).

Contudo, é importante notar que, segundo CLOUGH (1990), na descrição da formulação original do Método dos Elementos Finitos o primeiro destes conceitos guiaram o desenvolvimento, isto é, o método foi considerado ser meramente como uma extensão de procedimentos de análise estrutural.

Data de 1943 a primeira vez que se propôs um método nos moldes dos Elementos Finitos para a resolução de equações diferenciais (COURANT, 1943).

COURANT (1943) utilizou a técnica de subdividir a seção de uma barra em elementos triangulares, com funções de deflexão interna para cada elemento, a fim de solucionar o problema torcional de Saint Venant.

Podemos relacionar o surgimento e desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos com o desenvolvimento da análise estrutural da indústria aeronáutica.

Segundo CLOUGH (1990), no fim da Segunda Grande Guerra Mundial os conceitos utilizados no projeto de aeronaves eram os mesmos utilizados pelos Engenheiros Civis na construção de prédios e pontes. Em ambos os campos, a estrutura era definida como uma montagem de elementos estruturais discretos e a análise consistia em determinar os deslocamentos e forças devido a carregamentos no sistema.

Nos anos após a Segunda Grande Guerra Mundial a engenharia aeronáutica iniciou avanços, em relação à engenharia civil, na teoria de análise estrutural devido a crescente complexidade das configurações e devido a necessidade da redução de peso. Deste modo, um importante avanço conseguido pela engenharia aeronáutica foi a introdução da notação matricial na formulação da análise.

Um fator que contribuiu para este passo foi o fácil acesso que as grandes indústrias aeronáuticas possuíam aos melhores computadores disponíveis naquela época, sendo que a formulação matricial facilitou enormemente o uso dos mesmos.

Um resultado da formulação matricial da análise estrutural foi que ela tornou claro que o método da força ou deslocamento poderia ser reconhecido como uma transformação de coordenadas. Assim, as propriedades dos elementos expressas em coordenadas locais foram transformadas para expressar as propriedades de uma estrutura montada (com vários elementos) em coordenadas globais.

FALKENHEIMER (1951) e LANGEFORS (1952) foram os primeiros a reconhecerem que a análise estrutural é essencialmente um procedimento de transformação de coordenadas.

Deste modo, por volta do ano de 1952, a análise estrutural aeronáutica avançou ao ponto de uma estrutura complexa modelada como uma montagem de elementos estruturais, poderia ser analisada pelo método do deslocamento, por

exemplo, formulado como uma série de operações matriciais e pelo uso de um computador digital para efetuar os cálculos.

No ano de 1953 um trabalho realizado no "Boeing Summer Faculty Program" (TURNER et alli, 1956) é reconhecido ter introduzido o ainda não denominado Método dos Elementos Finitos como uma ferramenta para análises estruturais.

Este trabalho fazia uso de elementos bi-dimensionais para incluir a rigidez na análise de estruturas de asas, e não pretendia calcular precisamente tensões em estruturas contínuas.

Em 1958 CLOUGH (1958) desenvolveu um programa de álgebra matricial a fim de auxiliar o uso de elementos triangulares (desenvolvido por TURNER et alli (1956) ) para a resolução de problemas de tensão plana.

Devido aos ótimos resultados obtidos em análises de casos clássicos, CLOUGH (1960) publicou um artigo relatando os resultados, dando assim o nome ao Método dos Elementos Finitos.

Em 1962 a denominação Método dos Elementos Finitos apareceu pela segunda vez no título de um artigo (CLOUGH & WILSON, 1962). Este artigo relatava o primeiro programa computacional para análise de tensão plana pelo Método dos Elementos Finitos. O programa calculava as propriedades de rigidez para qualquer malha de elementos triangulares, e então usava a iteração de Gauss-Seidel para resolver as equações de equilíbrio.

Contudo, muitos pesquisadores ainda usavam a terminologia "Método da Rigidez Direta" para referenciar seus trabalhos. Isto aconteceu até a aplicação do Método dos Elementos Finitos na solução de problemas de transferência de calor (ZIENKIEWICZ & CHEUNG, 1965), quando o Método dos Elementos Finitos foi aceito como a melhor terminologia para o método.

Como foi dito anteriormente, o primeiro campo de utilização do Método dos Elementos Finitos foi o da engenharia aeronáutica (análise estrutural). Hoje em dia, devido a grande abrangência do método, a utilização se expandiu para várias áreas, sendo utilizadas para a resolução de vários outros problemas reais que possam ser representados por equações diferenciais parciais, tais como: Estruturas civis e mecânicas, engenharia espacial, mecânica dos solos e rochas, condução de calor, mecânica dos fluidos, fluxo elétrico, e outras áreas conforme a tabela 2.1.

TABELA 2.1 - Áreas de aplicação do Método dos Elementos Finitos.

Fonte RAO (1989)

Área de Estudo	Problemas de equilíbrio	Problemas de autovalores	Problemas de propagação
Engenharia civil estrutural	Análise estática de estruturas civis.	Frequências naturais e modos de vibrar de estruturas.	Propagação de ondas de tensão.
Estruturas aeronáuticas	Análise estática de estruturas de aviões, foguetes e espaçonaves.	Frequências naturais e estabilidade de estruturas.	Cargas aperiódicas. Resposta de estruturas de aviões a cargas aleatórias e aperiódicas.
Condução de calor	Estado de distribuição de temperatura em sólidos e fluidos.	-----	Transientes de fluxo de calor em bocais de foguetes e turbinas.
Geomecânica	Análises de escavações, muros de arrimo, túneis.	Frequências naturais e modos de vibrar de sistemas de reservatório.	Transientes de problemas de interação solo-estrutura.
Engenharia hidráulica	Análise de fluxos viscosos, problemas aerodinâmicos transônicos.	Movimentos de líquidos em reservatórios rígidos e flexíveis.	Transientes em meios porosos. Propagação de ondas.
Engenharia nuclear	Análise de níveis de pressão nuclear e estruturas de contenção.	Frequências naturais e estabilidade de estruturas de contenção.	Resposta de estruturas de contenção a cargas dinâmicas.
Engenharia biomédica	Análise de tensões em ossos e dentes. Mecanismos das válvulas do coração.	-----	Análise de impactos em articulações. Dinâmica de estruturas anatómicas.
Projeto mecânico	Problemas de concentração de tensões. Análise de tensões em pistões, e engrenagens.	Frequências naturais e estabilidade de máquinas ferramentas.	Problemas de quebras e fraturas sob cargas dinâmicas.

Hoje em dia, na área da matemática o principal desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos está no desenvolvimento de elementos mais complexos, tais como os elementos parametrizados que permitem a modelagem de contornos não lineares (KOKO & OLSON, 1991). Esforços também são gastos na área de refinamento de malha (KITUR & HUSTON, 1990), e na aplicação de Inteligência Artificial no Método dos Elementos Finitos (NAKAJIMA et alli, 1992).

Devido ao crescente desenvolvimento dos equipamentos computacionais com a diminuição dos custos e a evolução nos programas de Elementos Finitos,

torna-se cada vez mais viável o uso deste método como uma ferramenta para a Engenharia Auxiliada por Computador.

### 2.1.2 Descrição do método

Para a solução dos problemas de sistemas contínuos, o projetista dispõe de três alternativas:

- a solução analítica;
- a confecção de modelos e uso da teoria da semelhança;
- a solução por métodos numéricos de discretização.

As soluções analíticas geralmente cobrem somente os casos mais simples, sendo que algumas exigem hipóteses de difícil ocorrência como por exemplo completa homogeneidade, isotropia, linearidade de resposta, de forma que mesmo sendo soluções analíticas elas não são completamente exatas.

As soluções por confecção de modelos apresentam como grandes desvantagens o alto custo e baixa versatilidade, visto que novas versões ou novas opções construtivas exigem novos modelos.

Por outro lado, os métodos de discretização ganharam grande impulso ultimamente com o uso dos computadores. A idéia central neste caso é que uma grandeza como deslocamento ou temperatura em um meio contínuo não precisa ser especificada em cada um de seus infinitos pontos, mas sim em um número finito deles.

Os métodos de discretização trabalham com um grande número de equações, semelhantes em cada parte da estrutura original discretizada, que geram também um grande número de valores da grandeza estudada, um para cada parte discreta. Deste modo apresentam grande volume de dados a serem manipulados e algoritmos de cálculo repetitivos, ideal para uso em computadores e uso de análise matricial.

Segundo LIRANI (1985a) a análise matricial apresenta as seguintes vantagens:

- a solução do problema é substituída por um algoritmo ou rotina mais simples;
- todas as operações são feitas em blocos pelo algoritmo matricial;
- a maior complexidade do problema real não aumenta a complexidade da solução, mas só o tempo de processamento.

Deste modo, surgem vários métodos numéricos de discretização para o uso em computadores, tais como o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno. De acordo com LIVESLEY (1983) que diz "que o Método dos Elementos Finitos é simplesmente um método numérico para se obter a solução aproximada de equações diferenciais. Ele converte as equações diferenciais que governam o processo em um conjunto de equações algébricas lineares, e o motivo de sua grande popularidade é a facilidade com que estas equações podem ser montadas e resolvidas pelo computador".

Segundo ZIENKIEWICZ (1977) as fases envolvidas no Método dos Elementos Finitos são:

- i) O contínuo é separado por linhas ou superfícies imaginárias num certo número de elementos finitos;
- ii) Assume-se que os elementos são interconectados por um número discreto de pontos nodais, os nós, situados nos contornos dos elementos. Os deslocamentos destes nós serão as incógnitas do problema;
- iii) Um conjunto de funções é escolhido para definir univocamente os deslocamentos internos dos elementos em função dos deslocamentos dos nós, transferindo para qualquer ponto interno do elemento a grandeza nodal;
- iv) Estas funções de deslocamento ou funções de forma definem univocamente o estado de deformação dentro de um elemento como relação dos deslocamentos dos nós. Estas deformações, junto com as deformações iniciais e as propriedades do material definem o estado de tensão através do elemento e também no seu contorno;
- v) Determina-se um sistemas de forças concentradas nos nós que equilibrem as tensões do contorno e as cargas distribuídas, resultando numa relação de rigidez da estrutura.

Na fase i, chamada de modelagem da estrutura, simplifica-se e posteriormente discretiza-se a estrutura, figura 2.1. O modelo criado não deve desprezar detalhes necessários à uma boa solução e em contrapartida não deve considerar pormenores em demasia.

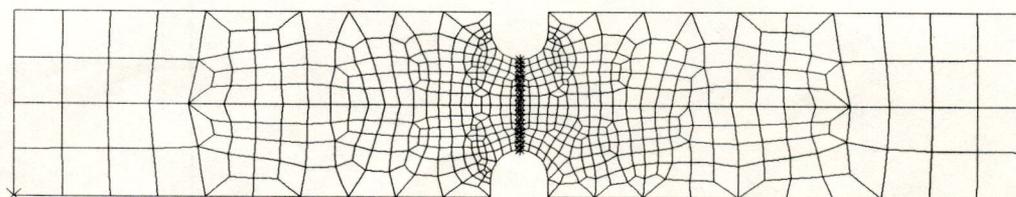


FIGURA 2.1 - Exemplo da malha de uma placa com entalhe.

Na fase **ii**, existem três modelos básicos utilizados no Método dos Elementos Finitos;

- aquele em que as incógnitas são os deslocamentos nodais, também conhecido como método da rigidez;
- aquele em que as incógnitas são as forças nos nós, também conhecido como método da flexibilidade;
- aquele que mescla como incógnitas os deslocamentos de alguns nós com forças em outros nós, conhecidos como modelos mistos.

O modelo mais utilizado é o modelo misto, pois podemos aplicar deslocamento zero em alguns nós, como se estivessem engastados, e forças nodais em outros nós.

Na fase **iii**, determina-se como serão as formas possíveis do elemento se deformar, pois são as funções de forma que ditam esse comportamento. Deste modo, as funções de forma influem diretamente na qualidade obtida na fase **iv**, e quanto maior o grau dessas funções, melhor serão expressas as deformações da estrutura.

Ainda em relação ao grau da função de forma, podemos dizer que quanto maior esse grau, maior será o número de nós do elemento, aumentando assim o número de nós do modelo. Em contrapartida pode-se utilizar de elementos maiores, com menor número de elementos, com ordem superior e obter-se a mesma precisão de resposta. Deste modo, cabe ao projetista definir, de acordo com o problema, quanto ao uso de elementos de ordem superior ou não.

Finalizando, na fase **v** é necessário que a estrutura modelada não apresente características de corpo rígido, isto é, a estrutura deve ser fixa à terra (deve-se remover algum ou alguns graus de liberdade), a fim de tornar-se estaticamente determinada.

Segundo LIRANI (1985b) um roteiro para utilização de um sistema de Elementos Finitos pode ser estabelecido em quatro etapas: definição do problema, modelagem, processamento e análise dos resultados.

A primeira etapa é a definição do problema, onde devem ser considerados todos os fatores componentes da situação:

- a) reconhecimento do fenômeno que gera o problema;
- b) definição da estrutura ou componente estrutural que deve ser estudado, ou seja, a localização da ocorrência do fenômeno;
- c) definição da complexidade da idealização requerida para analisar o fenômeno;

- d) definição dos estados de solicitação que geraram a ocorrência do fenômeno;
- e) estabelecimento da compatibilidade da situação problema para com o programa disponível, tanto em relação às opções de criação do modelo quanto às análises requeridas;
- f) definição dos custos da análise, que são decorrentes do tipo e quantidade de análises requeridas.

A segunda etapa é a modelagem, que tem ligação direta com a eficiência da utilização de um Sistema de Elementos Finitos e com a qualidade dos resultados.

Deverão ser fornecidos ao sistema os dados referentes à geometria da estrutura, as propriedades dos materiais, as vinculações e as condições de contorno.

O primeiro passo da modelagem é a criação do modelo. A referência inicial é um projeto ou situação real, que necessariamente deverá ser transformada em um modelo. A criação do modelo pode ser feita de duas maneiras:

- criação do modelo a partir dos elementos estruturais definidos no Sistema de Elementos Finitos (vigas, placas, sólidos, tubos, etc.).
- criação do modelo através de pré-processador gráfico interativo que utiliza, por exemplo, as técnicas de um programa de Projeto Auxiliado por Computador (CAD). No modelo assim criado é aplicado um gerador de malha para a transformação da idealização em um corpo geométrico composto de elementos estruturais.

Nos dois casos, a idealização gerada na forma de uma complexa malha de elementos, deverá observar os seguintes pontos:

- compatibilidade dos elementos envolvidos, isto é, os elementos de uma mesma malha devem ser da mesma ordem;
- a construção e detalhamento da malha deve ser em função do objetivo da análise e da precisão que se deseja obter.

Para melhor representar um estado de tensão complexo é necessário usar-se uma malha mais fina. Tome-se o caso simples de um elemento triangular a tensão plana. A tensão no seu interior é constante e então, se modelarmos uma região onde haja um forte gradiente de tensão com esse elemento vai se obter um valor médio de tensão em vez do gradiente. Portanto, refina-se a malha, e vários valores locais de tensão serão conseguidos, obtendo-se assim o gradiente com maior fidelidade.

Observa-se assim, que refinar a malha é mais ou menos equivalente a usar-se elementos de ordem superior, do mesmo tamanho figura 2.2.

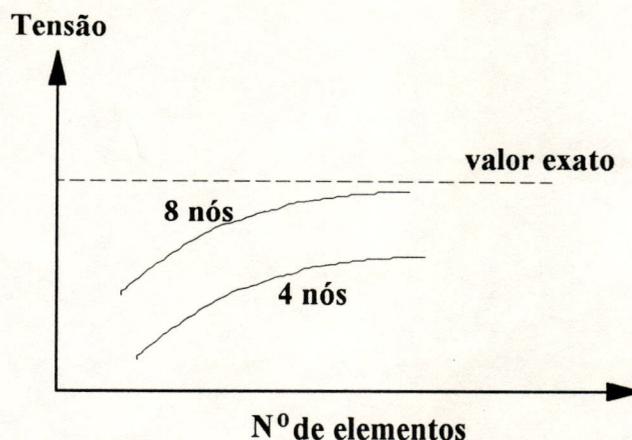


FIGURA 2.2 - Relação entre número de nós e qualidade de resultado.

Deste modo a idéia intuitiva que se forma é que para se obter bons resultados é necessário adotar-se elementos infinitesimais. Isto não é uma verdade absoluta, pois embora o refinamento da malha melhore os resultados, existem casos onde elementos de várias dezenas de centímetros são aceitáveis em estruturas mecânicas. Portanto, a discretização da malha sempre será estabelecida em função do tipo de análise e precisão requerida para os resultados.

Os dados referentes às propriedades dos materiais utilizados no modelo, devem constar da lista de materiais do banco de dados do Sistema ou devem ser fornecidos separadamente, e são os seguintes:

- Módulo de Young;
- Coeficiente de Poisson;
- Densidade;
- Coeficiente de dilatação térmica;
- Coeficiente de amortecimento.

Uma vez construída a malha, é necessário que se modele os vínculos, ou seja, a compatibilização da vinculação dos elementos e da estrutura, em função da análise proposta.

A maior dificuldade é identificar em uma estrutura real, quais vínculos estão presentes e em quais nós, bem como o comportamento do carregamento real.

A qualidade de uma modelagem depende muito de quanto o usuário conhece o problema e da sua experiência na atividade de modelar, pois é difícil encontrar referências técnicas desta natureza.

A terceira etapa é o processamento, que é uma atividade que depende quase que unicamente do equipamento utilizado. Uma análise pelo Método dos Elementos Finitos normalmente utiliza muita CPU e muito espaço em disco. O tempo de processamento requerido depende do número total de graus de liberdade do modelo e do tipo de análise requerida. As análises dinâmicas são as mais demoradas.

A quarta etapa é a análise dos resultados, que deve ser, obrigatoriamente, realizada por engenheiros projetistas, pois é o coroamento de uma utilização bem sucedida de um Sistema de Elementos Finitos. A interpretação correta de um modelo correto é que deverá decidir pela necessidade da continuação das análises, e em tal caso deverá indicar quais alterações deverão ser feitas na modelagem.

Por ser um método de solução aproximada, o Método dos Elementos Finitos apresenta uma certa divergência entre os seus resultados e o comportamento real da estrutura. Segundo ZIENKIEWICZ (1977) pode-se classificar os erros do Método dos Elementos Finitos em dois tipos:

- a) Devido ao truncamento dos valores pelo computador;
- b) Devido à aproximação da situação real através da discretização.

Assim a qualidade da resposta de uma análise pelo Método dos Elementos Finitos é diretamente proporcional à capacidade do projetista efetuar uma boa modelagem da estrutura real. Deste modo, realça-se a necessidade do projetista "julgar" os resultados obtidos utilizando-se da sua experiência e comparando-os com outros dados já confirmados ou provenientes de sua sensibilidade de projeto.

Pode-se encontrar no anexo A um exemplo do procedimento utilizado pelo Método dos Elementos Finitos para a determinação de tensões.

## 2.2 Determinação do coeficiente de concentração de tensão

### 2.2.1 Origens

As fórmulas elementares utilizadas em projeto são baseadas em componentes contendo seções constantes ou com mudanças de seção graduais. Tais condições, contudo, são difíceis de conseguir principalmente nas regiões tensionadas de componentes estruturais ou de máquinas.

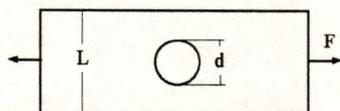
A presença de entalhes, furos, chanfros, rasgos de chaveta e outras discontinuidades geométricas, resultam em uma modificação da distribuição de tensões. Essa modificação resulta em picos de tensão localizados na raiz da discontinuidade geométrica.

Esse fenômeno é conhecido como concentração de tensão, medido pelo Coeficiente de Concentração de Tensão, definido como:

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} \quad (2.1)$$

onde:

- $K_t$  = coeficiente de concentração de tensão;
- $\sigma_{\max}$  = tensão máxima que ocorre na raiz da discontinuidade geométrica;
- $\sigma_{\text{nom}}$  = tensão nominal que ocorreria na peça levando-se em conta a seção crítica da peça e distribuição uniforme de tensão. Conforme exemplo abaixo



$$\sigma_{\text{nom}} = F/(L - d)t$$

Desde as primeiras investigações de problemas de concentração de tensão durante o último século, uma grande quantidade de pesquisas teóricas e trabalhos experimentais tem sido feitas até hoje. Durante esse período, o fenômeno de concentração de tensão tem se tornado não somente uma importante regra em problemas elásticos, mas também imprescindível para importantes questões de engenharia tais como fadiga e fratura dos materiais.

Segundo NEUBER (1966), as primeiras soluções para problemas de concentração de tensão ocorreram durante a segunda metade do século XIX e início do século XX, quando métodos experimentais e soluções analíticas foram desenvolvidos (WINKLER, 1878; LARMOR, 1892)<sup>1</sup>. Poucos anos depois, foram dados os primeiros passos nos principais métodos experimentais tais como fotoelasticidade e medida de deformação através de extensômetros (COKER, 1910; PREUSS, 1913)<sup>2</sup>.

Um dos primeiros estudos sobre o Coeficiente de Concentração de Tensão com o auxílio do Método dos Elementos Finitos foi realizado por SLOT & MOWBRAY(1969). Neste trabalho foram estudadas placas com entalhes na forma de "U" submetidas a tração, obtendo-se a distribuição de tensões na placa através do Método dos Elementos Finitos. Deste modo foi possível a determinação da tensão máxima atuante na raiz do entalhe e, conseqüentemente, a determinação do Coeficiente de Concentração de Tensão da peça.

Em comparação com resultados obtidos através de fotoelasticidade e medida de deformação, os valores obtidos foram considerados perfeitamente compatíveis com outros previamente publicados.

A ligação entre concentração de tensões e falhas por fadiga foi primeiramente reconhecida no último século, quando WOHLER detectou a influência de mudanças bruscas de seção transversal na resistência do componente, principalmente para cargas alternadas e repetidas.

Como resultados de um grande número de experimentos com fadiga, onde a concentração de tensões era incluída, chegou-se à conclusão que o efeito da concentração de tensões na fadiga é geralmente menos severo do que aquele prescrito

---

<sup>1</sup>WINKLER, E. Deformationsversuche mit Kautschuk-Modellen. Civilingenieur, v.24, p.81-100, 1878.

LARMOR, J. The influence of flaws and air cavities on the strength of materials. Phil Mag, v.33, p.70-78, 1892

<sup>2</sup>COKER, E.G. The optical determination of stress. Phil Mag, v.6, p.740-760, 1910.

PREUSS, E. Versuche über die Spannungsverteilung in gelochten und gekerbten Zugstäben. Z VDI, p. 1780-1782, 1912; p. 664-667, 1913.

pelo Coeficiente de Concentração de Tensão para os casos elásticos. A influência de entalhes sobre a resistência à fadiga pode ser caracterizada como um coeficiente de concentração de tensão à fadiga, definido como a relação entre o limite de resistência à fadiga para um componente sem entalhe e o limite de resistência à fadiga para um componente com entalhe.

Em 1953, Peterson publicou um livro relatando diversos casos estudados, livro este que foi ampliado e reeditado posteriormente 1974 (PETERSON, 1974), sendo uma das obras mais completas até hoje no assunto.

Nos últimos anos, vários trabalhos foram desenvolvidos visando a obtenção do Coeficiente de Concentração de Tensão para diversos casos. Na maioria desses trabalhos, o Coeficiente de Concentração de Tensão é obtido pela relação entre a tensão máxima ocorrida na raiz da descontinuidade geométrica e a tensão nominal, sendo esta obtida diretamente da Teoria da Elasticidade, utilizando-se da seção crítica resistente da peça.

Nesses trabalhos, a tensão máxima ocorrida na raiz da descontinuidade geométrica é determinada por diversas formas, como através da fotoelasticidade, medida de deformação e pelo Método dos Elementos Finitos.

Outros trabalhos trazem fórmulas empíricas ou teóricas ou, ainda, apresentam métodos experimentais para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão.

Deste modo, podemos dividir os estudos desenvolvidos na área de concentração de tensões em dois tipos: teóricos e experimentais.

### **2.2.2 Estudos teóricos**

Devido à infinidade de trabalhos realizados até hoje, restringir-nos-emos a citar alguns resultados significativos de trabalhos recentes.

São vários os métodos teóricos utilizados no estudo da concentração de tensões, sendo a fórmula proposta por NEUBER (1961) um método antigo e que foi muito utilizado. Este método consiste na interpolação entre os casos limites de entalhes rasos e profundos. Hoje em dia este método é criticado por vários autores (PETERSON, 1974; KATO, 1991; SLOT & MOWBRAY, 1969; KATO & MIZUNO, 1985; LING, 1968) como sendo uma ingênua interpolação que dá valores abaixo do real.

SCHIJVE (1986), em seu trabalho desenvolveu fórmulas para cálculos do Coeficiente de Concentração de Tensão através de dados baseados em placas infinitas com furos elípticos e outras expressões que se baseiam em fórmulas para o cálculo em componentes com trincas.

Os mesmos casos estudados por SCHIJVE (1986) foram estudados por SHIN (1986) através do Método dos Elementos Finitos, obtendo a tensão máxima e utilizando-se da relação entre esta e a tensão nominal, com uma excelente concordância nos resultados.

Outras soluções analíticas, para placas finas com furo quadrado, dão uma estimativa do Coeficiente de Concentração de Tensão, de acordo com IIDA et al. (1987).

Vários trabalhos (HASEBE et al., 1986a; HASEBE et al., 1986b e HASEBE et al., 1987) trazem soluções para o Coeficiente de Concentração de Tensão através de séries, para placas finas submetidas à flexão, tração e torção, respectivamente.

Alguns trabalhos lidam com a minimização do Coeficiente de Concentração de Tensão (DYBBRO & HOLM, 1986 e MEGUID, 1986), através da otimização do furo em uma placa, bem como pela adição de pequenos furos auxiliares na região do furo principal para diminuir a concentração de tensões.

Muitos trabalhos desenvolvidos lidam com trincas de fadiga que, usualmente iniciam em entalhes, furos e outras descontinuidades geométricas, devido à concentração local de tensões. Assim, é importante deixar disponível para engenheiros e projetistas, valores do fator de intensidade de tensão ( $K_I$ ) para predizer a resistência e vida à fadiga de componentes com trincas.

Alguns exemplos de trabalhos desta natureza são: LUKAS (1987) que apresenta fórmulas analíticas para o cálculo do  $K_I$  para pequenas trincas, e DODDS & READ (1987), que calculam o  $K_I$  pelo Método dos Elementos Finitos para um painel contendo furos igualmente espaçados que contendo trincas.

NG & FENNER (1988) calcularam o  $K_I$  pelo Método dos Elementos Finitos para o caso de vigas de seção circular contendo uma trinca, submetidas à tração e flexão.

HUANG & HANCOCK (1988) determinaram o  $K_I$  também através do Método dos Elementos Finitos, para trincas que ocorrem em juntas tubulares soldadas.

BELL et al. (1989) determinaram o  $K_I$  pelo Método dos Elementos Finitos para discos de turbinas submetidos a diversos tipos de carregamento.

Projeções axissimétricas externas e internas em tubos, que servem para transmissão de cargas e fixação entre tubos, foram estudadas por EVANS et al. (1987) e por HARDY & GOWHARI-ANARAK (1989). Nestes trabalhos, foi calculado, através do Método dos Elementos Finitos, a tensão máxima que ocorre no raio de arredondamento da mudança de seção, e através da relação básica o Coeficiente de Concentração de Tensão.

Muitas estruturas utilizadas para exploração de petróleo em oceanos são construídas com elementos tubulares. A segurança destas estruturas dependem da vida à fadiga que, por sua vez, depende muito do Coeficiente de Concentração de Tensão que ocorre na interseção das juntas tubulares. Diversos trabalhos, tais como, SUNDARAVADIVELU et al. (1988), DIJKSTRA et al. (1988), CONNOLLY et al. (1990), HELLIER et al. (1990a), HELLIER et al. (1990b) e SOH & SOH (1992) trazem estudos a respeito do Coeficiente de Concentração de Tensão em juntas tubulares na forma de "Y", "T", "K-T" e "T-Y". Nesses trabalhos, o Coeficiente de Concentração de Tensão é determinado através do Método dos Elementos Finitos e de fórmulas empíricas provenientes de dados experimentais e analíticos.

Em ROBERTS (1989), encontram-se soluções analíticas para a distribuição de tensões em uma variedade de juntas entre placas. Os resultados são validados através do Método dos Elementos Finitos.

MENTRASTI (1989) traz um estudo analítico para a obtenção do Coeficiente de Concentração de Tensão de vigas caixão de parede fina submetidas à torção.

Com relação ao estudo de placas com entalhes, podemos citar NAMESTNIKOV (1990) que determina o Coeficiente de Concentração de Tensão pela relação entre a tensão máxima ocorrida na raiz do entalhe e a tensão nominal, sendo que a tensão máxima é determinada pelo Método dos Elementos de Contorno.

Em KOSMATKA et al. (1990) encontramos um estudo para calcular o Coeficiente de Concentração de Tensão em placas com entalhes na forma de "U" e "V", bem como em placas com entalhes "U" e "V" opostos um ao outro. O cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão foi realizado através da relação entre a máxima tensão ocorrida na raiz do entalhe e a tensão nominal, sendo que a tensão máxima foi obtida pelo Método dos Elementos Finitos.

KATO (1991) apresenta em seu trabalho equações empíricas, baseadas em resultados teóricos e numéricos, para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão, considerando placas com entalhes em "U" submetidas à tração e flexão, bem como eixos com entalhes submetidos à flexão e torção

Em GOOYER & OVERBEEKE (1991) encontramos valores do Coeficiente de Concentração de Tensão calculados pelo Método dos Elementos Finitos para diversas configurações de placas com variação de seção, submetidas à tração e torção, bem como para eixos com variação de seção submetidos à tração. Neste estudo o Método dos Elementos Finitos foi utilizado para a obtenção da tensão máxima que ocorria na descontinuidade geométrica.

Um estudo com placas de material ortotrópico foi realizado por WEIXING & XINLU (1991). Neste trabalho, foi realizada uma análise pelo Método dos Elementos Finitos para prever o Coeficiente de Concentração de Tensão de placas com entalhes elípticos.

Em WANG & DUAN (1992) encontramos um estudo analítico que relaciona o Coeficiente de Concentração de Tensão com a distribuição de defeitos em materiais frágeis.

Grande contribuição na área de determinação de concentração de tensões através do Método dos Elementos Finitos foi dada por CHEN (1993). Neste trabalho é apresentado um tipo especial de elemento finito, o elemento finito com um furo central que já prevê os efeitos do furo na distribuição das tensões. Deste modo, pode-se modelar regiões críticas que ficam em torno de furos com apenas um elemento deste tipo.

### **2.2.3 Estudos experimentais**

Como já citado anteriormente, os primeiros trabalhos experimentais no estudo da concentração de tensões datam do início do século 20.

Com relação aos trabalhos realizados nos últimos anos podemos citar, AL-RUBEYE (1984) que realizou ensaios através de extensômetros para determinar o Coeficiente de Concentração de Tensão em componentes de máquinas com formas complexas.

Em RUBAYI & NANA (1985), encontramos estudos tridimensionais através de fotoelasticidade para determinar valores do Coeficiente de Concentração de Tensão em torno de furos elípticos em placas submetidas à compressão.

Em KATO & MIZUNO (1985) e em KATO (1987), encontramos um procedimento para cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão. Nestes trabalhos, o Coeficiente de Concentração de Tensão é determinado pela relação entre a tensão máxima que ocorre na região do entalhe e a tensão nominal do componente. Em ambos os trabalhos, a tensão máxima é determinada pelo método de galvanização de cobre. Neste método, quando um componente galvanizado é ciclicamente tensionado, ocorre um crescimento de grãos na região galvanizada. A densidade de grãos é proporcional à amplitude da tensão na região galvanizada. Deste modo, foram galvanizadas regiões de entalhes circulares de eixos submetidos à torção, possibilitando assim a obtenção da tensão máxima e, conseqüentemente, do Coeficiente de Concentração de Tensão para esses componentes.

Um outro estudo para determinar o Coeficiente de Concentração de Tensão em eixos com entalhes submetidos à alta temperatura foi realizado por UMEDA et al. (1987). Neste trabalho, foi determinada a deformação máxima que ocorria na raiz da descontinuidade geométrica através de extensômetros. Assim, obteve-se a tensão máxima que ocorria na raiz da descontinuidade geométrica multiplicando-se a deformação máxima pelo módulo de elasticidade do material utilizado. O Coeficiente de Concentração de Tensão, por sua vez, foi calculado pela relação entre a tensão máxima e a tensão nominal do eixo. Os resultados obtidos foram comparados com outros obtidos pelo Método dos Elementos Finitos, obtendo-se uma boa concordância.

Em THOMPSON & DHILLON (1988) encontramos um método simples para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão em placas com entalhes através de dados experimentais.

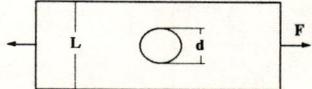
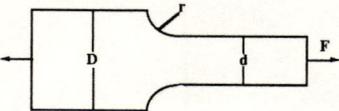
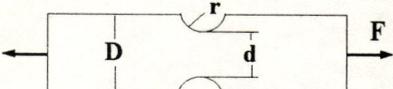
YU et al. (1988) em seu trabalho estudou a influência do entalhe no comportamento à fadiga de um componente. O coeficiente de entalhe à fadiga ( $K_f$ ) foi calculado pela relação entre a resistência à fadiga de um componente sem entalhe e a resistência à fadiga de um componente com entalhe. O autor diz que "na maioria das vezes o  $K_f$  é menor do que o  $K_t$  para um mesmo entalhe, e que pode variar de um valor máximo igual ao  $K_t$  até um valor mínimo igual à unidade".

Outros trabalhos do efeito do entalhe sobre a fadiga, tais como NISITANI et al. (1989) e SINCLAIR (1993), foram realizados para determinar a resistência à fadiga de componentes com entalhes.

A predição da vida à fadiga de juntas de estruturas tubulares também foi estudada por BHUYAN (1988).

Podemos encontrar em DIMAROGONAS (1989) diversas equações obtidas através de dados experimentais para os casos mais comuns, conforme a tabela 2.1 abaixo.

TABELA 2.2 - Equações para o cálculo de  $K_t$  - Fonte DIMAROGONAS (1989)

CASO	$\sigma_{nom}$	$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$
	$F/(L - d)t$	$1 + \frac{(d/L)^{-0.179}}{0.9}$
	$F/dt$	$1 + \frac{(r/d)^{-0.63+(D/d-1)0.1}}{4 + 0.22/(D/d - 1)^{0.945}}$
	$F/(D - d)t$	$(0.78 + 2.243(t/r)^{1/2})[0.993 + 1.8(2t/D) - 1.06(2t/D)^2 + 1.71(2t/D)^3](1 - 2t/D)$

Em KOSMATKA et al. (1990) foram calculados valores do Coeficiente de Concentração de Tensão para placas com entalhes em "V", "U" e "U e V" opostos, submetidas à tração e flexão. O procedimento utilizado foi o de medição de deformação na raiz do entalhe através de extensômetros. Deste modo, o Coeficiente de Concentração de Tensão era obtido usando-se da relação entre a máxima deformação multiplicada pelo módulo de elasticidade (tensão máxima) e a tensão nominal da peça.

Podemos observar, deste modo, que a concentração de tensões é uma área de estudo de fundamental importância no projeto mecânico. Seja para casos elásticos, ou seja para casos onde exista o problema de fadiga ou trincas, o coeficiente que mede a concentração de tensões nestes casos é de grande importância, e por isso deve

sempre estar disponível a projetistas, seja qual for a configuração da descontinuidade geométrica utilizada.

Limitando-se a problemas de concentração de tensões para casos elásticos, podemos observar que na grande maioria dos trabalhos citados anteriormente o cálculo/obtenção do Coeficiente de Concentração de Tensão depende da tensão nominal do componente (o Coeficiente de Concentração de Tensão é dado pela relação entre a tensão máxima que ocorre na raiz da descontinuidade geométrica e a tensão nominal). Nestes casos a tensão nominal é dada pela Teoria da Elasticidade, dependendo assim da geometria da seção transversal resistente do componente (para o caso de tração, dependeria da área da seção transversal resistente do componente, já que a tensão nominal seria dada pela relação entre a força aplicada e esta área).

Deste modo, a aplicação deste método de cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão fica limitado a componentes cuja geometria da seção transversal resistente seja de fácil determinação, limitando assim o seu uso. Contudo, no projeto mecânico não podemos ficar limitados a configurações simples de peças, bem como não podemos ficar desamparados de valores precisos do valor do Coeficiente de Concentração de Tensão para configurações mais complexas. Assim, olhando por esse prisma é que este trabalho pretende dar sua humilde contribuição na área de concentração de tensões.

# CAPÍTULO 3

## METODOLOGIA UTILIZADA

### 3.1 Introdução

No desenvolvimento das equações básicas para o cálculo de tensões, seja para tração, compressão, flexão ou torção, assume-se que não existem irregularidades na geometria do componente em estudo. Contudo é muito difícil projetar uma máquina sem permitir algumas mudanças, por exemplo, na seção transversal de seus componentes.

Os eixos devem possuir, por exemplo, rasgos de chaveta para a fixação de engrenagens. Outras partes devem possuir furos, sulcos para óleo, e outros tipos de entalhes.

Qualquer descontinuidade em um componente altera a distribuição de tensões em sua vizinhança, de modo que as equações elementares não mais descrevem o estado de tensão nesse componente. Tais descontinuidades são chamadas de descontinuidades geométricas, e a região na qual ela ocorre, de área de concentração de tensões.

Um coeficiente teórico, ou geométrico, de concentração de tensão ( $K_t$ ) é utilizado para relatar a tensão máxima que ocorre na descontinuidade geométrica, dado por:

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} \quad (3.1)$$

onde:

- $K_t$  = coeficiente de concentração de tensão;  
 $\sigma_{\max}$  = tensão máxima que ocorre na raiz da descontinuidade geométrica;  
 $\sigma_{\text{nom}}$  = tensão nominal que ocorreria na peça levando-se em conta a seção crítica da peça e distribuição uniforme de tensão.

A tensão nominal ( $\sigma_{\text{nom}}$ ) é mais difícil para se definir. Geralmente ela é a tensão calculada pelo uso das equações elementares da Teoria de Elasticidade e da seção transversal resistente.

O índice "t" em  $K_t$  significa que esse coeficiente depende somente da geometria do componente. Assim, o material utilizado não tem efeito sobre o valor de  $K_t$ . Devido a isso é que ele, às vezes é chamado de coeficiente teórico de concentração de tensão.

## 3.2 Alguns métodos para o cálculo do $K_t$

### 3.2.1 Método analítico

É possível analisar certas formas geométricas pelo uso da Teoria de Elasticidade e determinar os valores do Coeficiente de Concentração de Tensão. A figura 3.1, por exemplo, apresenta uma placa infinita tensionada uniformemente, através de  $\sigma_0$ .

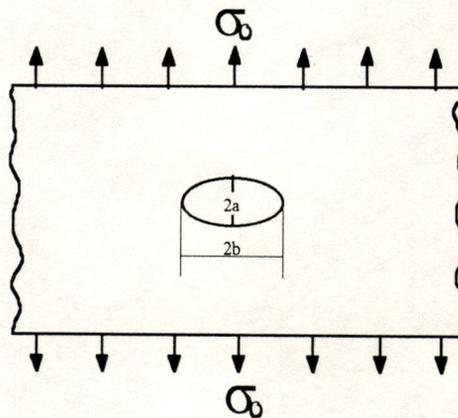


FIGURA 3.1 - Placa infinita com um furo elíptico.

Deste modo, segundo SHIGLEY (1986), um pequeno furo elíptico na placa terá uma tensão na aresta de:

$$\sigma_{max} = \sigma_0 \left( 1 + \frac{2b}{a} \right) \quad (3.2)$$

### 3.2.2 Fotoelasticidade

Um método muito utilizado para a obtenção de tensões é o método de fotoelasticidade. Um material transparente com propriedades de refração é modelado com as mesmas formas do componente do qual se deseja obter as tensões. O modelo é fixado em um dispositivo e sobre ele é direcionado um feixe de luz polarizada. Deste modo, quando o modelo é solicitado mecanicamente, aparecem sobre ele franjas coloridas originadas nos pontos de tensão máxima.

Uma certa tensão é associada com cada franja, de acordo com as equações da Teoria de Fotoelasticidade, e assim pode-se obter as tensões que ocorrem no componente.

A figura 3.2 mostra os resultados, através de fotoelasticidade, de um dente de engrenagem solicitado por uma força  $w_r$ . Pode-se verificar que existe concentração de tensão no ponto de aplicação da força e também na raiz do dente.

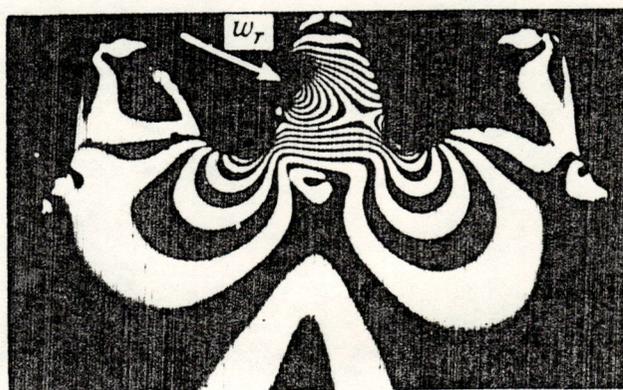


FIGURA 3.2 - Dente de engrenagem analisado por fotoelasticidade.

(Fonte: Shigley 1986).

### 3.2.3 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos é hoje um poderoso método para a obtenção de tensões, graças aos avanços em computação que ocorreram nos últimos anos. Os elementos finitos podem ser linhas, triângulos, ou qualquer forma geométrica conveniente, como já dito anteriormente. A figura 3.3 mostra como o método pode ser utilizado para a obtenção de tensões, também de um dente de engrenagens.

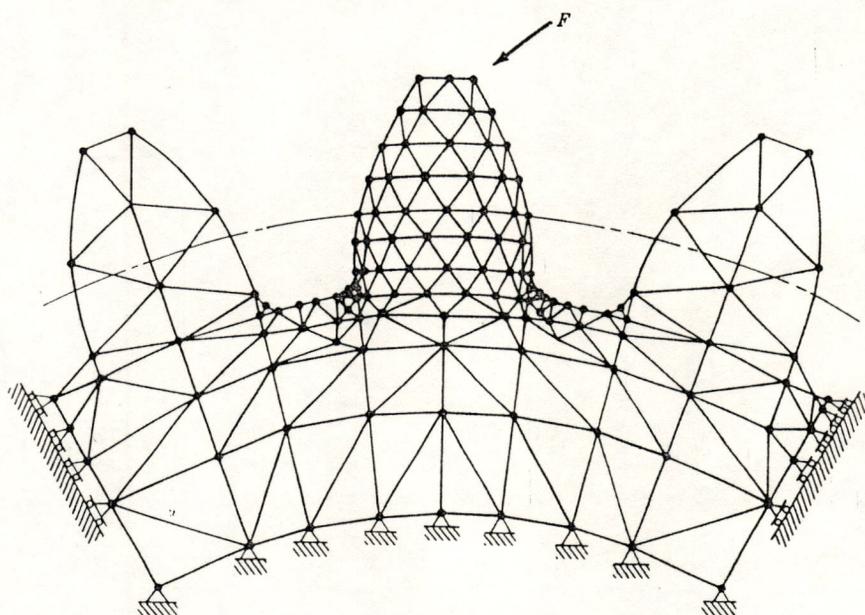


FIGURA 3.3 - Modelo de um dente de engrenagem. (Fonte: Shigley (1986)).

### 3.2.4 Outros métodos

Outros métodos também são utilizados para a determinação do Coeficiente de Concentração de Tensão, tais como o método da grade, revestimento frágil e o método de medida de deformação.

No método da grade, linhas são desenhadas sobre o modelo e este por sua vez é solicitado por uma carga conhecida. Deste modo, através do deslocamento das linhas pode-se obter as deformações que ocorrem no modelo, e conseqüentemente as tensões ocorridas.

O método do revestimento frágil emprega um verniz desenvolvido pela Magnaflux Corporation. Uma camada uniforme desse verniz é distribuído sobre o componente e, após a sua secagem o componente é solicitado, causando trincas nas áreas de alta tensão. Uma grande vantagem desse método é que ele pode ser aplicado em componentes bastantes irregulares.

O método de medida de deformação utiliza-se de extensômetros que são fixados em determinados pontos de um componente. Esses extensômetros determinam as deformações do componente, e assim, pode-se determinar as tensões que ocorrem no mesmo.

### 3.2.5 Métodos intuitivos

É muito importante para o projetista desenvolver uma certa "sensibilidade" para o problema de concentração de tensões e, deste modo, saber intuitivamente quando ela existe e o que fazer a respeito dela. Tal senso pode auxiliar muito na extrapolação de valores de  $K_t$  através de ábacos ou na estimação do Coeficiente de Concentração de Tensão quando ensaios experimentais não podem ser utilizados.

A analogia de fluxo, provavelmente, é o mais simples e eficiente meio de visualizar a concentração de tensões. A figura 3.4a mostra uma barra uniforme tracionada, e pode-se visualizar a força como que fluindo através da barra. Assim cada linha de fluxo na figura 3.4a representa uma certa quantidade de força, e como a barra é uniforme, as linhas de fluxo são uniformemente espaçadas.

Já na figura 3.4b existem entalhes na barra. Podemos assim observar que nas seções distantes dos entalhes, as linhas de fluxo são igualmente espaçadas, como na figura 3.4a. Quanto mais estas linhas se aproximam do entalhe, mais elas começam a se curvar a fim de passarem pela restrição formada pelos entalhes. A severidade da concentração de tensões é proporcional à quantidade de curvatura das linhas de fluxo.

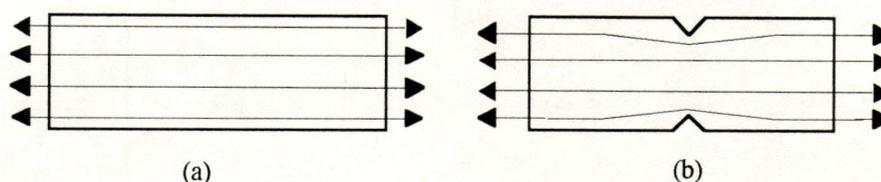


FIGURA 3.4 - Linhas de fluxos em componentes tracionados.

A analogia do fluxo é importante, pois dá uma imagem física do porque a concentração de tensões existe. A analogia do fluxo também pode ser utilizada como uma ferramenta para aprender como diminuir a concentração de tensões. Para exemplificar podemos citar o caso de eixos que devem possuir escalonamentos para fixar, por exemplo, engrenagens e rolamentos, e é justamente na base desses escalonamentos que as falhas ocorrem.

A figura 3.5 mostra alguns exemplos com suas linhas de fluxo. Para baixos valores de  $K_t$  o raio de arredondamento  $r$  deve ser o maior possível, mas usualmente o valor de  $r$  é limitado pelo projeto. Um pequeno arredondamento pode ser utilizado e um baixo  $K_t$  obtido pelo corte do escalonamento, como na figura 3.5b.

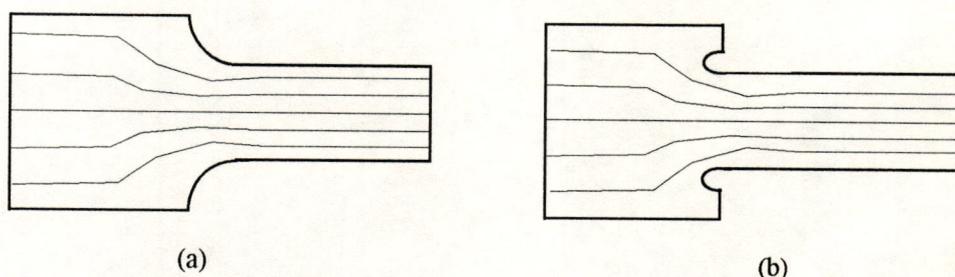


FIGURA 3.5 - Eixos escalonados e suas linhas de fluxo.

Surpreendentemente, a adição de outros entalhes é muitas vezes um caminho efetivo para a redução da concentração de tensões. Muitos problemas envolvendo concentração de tensões foram solucionados pela remoção de material ao invés de adicioná-lo.

Porém, uma grande quantidade de discontinuidades encontradas na prática não podem ser evitadas, e assim, um bom projetista deve, sempre que possível, esforçar-se em localizar a discontinuidade em uma região de baixa tensão nominal.

### 3.3 Concentração de tensões em componentes submetidos à fadiga

Desde o século XIX já se conhecia a fadiga, mas ainda assim, hoje o conhecimento sobre esse assunto não é completo. Wohler em 1862 disse: "A tensão com que rompiam alguns eixos de vagões ferroviários (em serviço), estava bem abaixo da tensão que o eixo suportava estaticamente". Era a fadiga que causava essa falha.

As falhas por fadiga em componentes mecânicos se iniciam na superfície ou logo abaixo, e normalmente em descontinuidades geométricas que levam a pontos de concentração de tensões (furos, rasgos de chaveta, mudanças de diâmetros, entalhes, defeitos superficiais, etc.). Ainda hoje há muito interesse no estudo dos efeitos destas descontinuidades geométricas, pois estes efeitos são de grande influência no dimensionamento à fadiga.

Na maioria da literatura disponível encontra-se o coeficiente de concentração de tensão como sendo a relação entre a tensão máxima que ocorre na raiz da descontinuidade geométrica e a tensão nominal que ocorreria no componente caso não houvesse descontinuidade. Nesse caso a tensão nominal é dada pela teoria de resistência dos materiais, dependendo assim da geometria da seção transversal resistente do componente. O maior problema deste enfoque é que somente pode ser utilizado se a geometria é bem simples, caso contrário tem-se que recorrer a exaustivos testes experimentais para a determinação do  $K_t$ .

Deste modo, para um perfeito dimensionamento à fadiga de um componente que possua algum tipo de descontinuidade geométrica, é necessário que se obtenha o valor exato deste coeficiente.

A concentração de tensão tem sido considerada quando os componentes são feitos de materiais frágeis ou quando são submetidos à fadiga. Contudo, alguns materiais, nestas condições, não são muito sensíveis à existência de entalhes ou descontinuidades, e por esta razão o valor total do coeficiente teórico de concentração de tensão não necessita ser utilizado. Para estes materiais é conveniente utilizar um valor reduzido de  $K_t$ . O coeficiente resultante é definido pela relação:

$$K_f = \frac{\text{resistência à fadiga de um componente sem entalhe}}{\text{resistência à fadiga de um componente com entalhe}}$$

Este fator é usualmente denominado de coeficiente de entalhe a fadiga.

Assim, a sensibilidade ao entalhe pode ser definida como:

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad (3.3)$$

onde  $q$  está usualmente entre zero e a unidade. A equação acima mostra que se  $q = 0$ ,  $K_f = 1$ , e o material não possui sensibilidade ao entalhe. Por outro lado, se  $q = 1$ ,  $K_f = K_t$ , e o material possui total sensibilidade ao entalhe. Deste modo, na tarefa de projeto, primeiramente determina-se o valor de  $K_t$  através da geometria do componente. Então, com o material especificado,  $q$  pode ser encontrado, de acordo com a figura 3.6, e a equação pode ser resolvida para  $K_f$ .

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \quad (3.4)$$

A sensibilidade ao entalhe de ferros fundidos é muito baixa, variando entre 0 e 0.20, dependendo da resistência à tração do material.

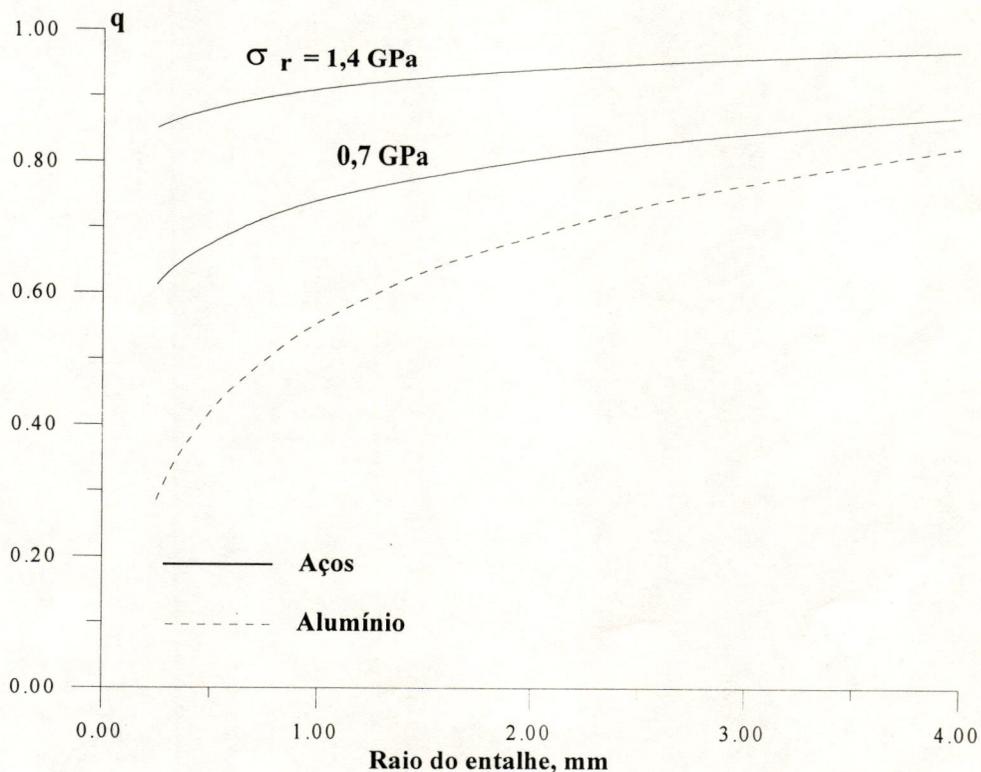


FIGURA 3.6 Ábaco para obtenção de  $q$ . (Fonte: Shigley 1986).

### 3.3.1 Dimensionamento à fadiga

Quando uma peça está submetida às solicitações alternadas simples, ou seja solicitação axial ou de flexão ou de cisalhamento, esta resistirá à fadiga desde que:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{fadm}}$$

onde:

$\sigma_{\max}$  = é a tensão máxima na seção da peça que está sendo verificada

$\sigma_{\text{fadm}}$  = é a tensão admissível à fadiga

Vários são os fatores que influenciam a resistência à fadiga dos materiais e estes devem ser levados em conta quando da determinação da expressão da tensão admissível de fadiga:

$$\sigma_{\text{fadm}} = \frac{\sigma_f b_1 b_2 b_3}{K_f \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5}$$

onde:

$b_1, b_2, b_3$  = fatores de influência

$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5$  = coeficientes de segurança

$K_f$  = coeficiente de concentração de tensão à fadiga

$\sigma_f$  = limite de resistência à fadiga, obtido através de tabelas

Deste modo, podemos observar a importância de se obter valores de  $K_f$  para um perfeito dimensionamento à fadiga de componentes mecânicos. Hoje em dia são poucos os ábacos que dão valores de  $K_f$ , e os que existem são para geometrias simples e pouco utilizadas na engenharia. Deste modo podemos recorrer à equação 3.4 que nos permite obter o valor de  $K_f$  em função do valor de  $K_t$ , que é mais simples e fácil de se obter, ressaltando assim a importância do método proposto, que auxilia na obtenção destes para formas mais complexas.

### 3.4 Método proposto para o cálculo de $K_t$

Como já relatado anteriormente, a maioria dos métodos hoje conhecidos, para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão de componentes que possuam descontinuidade geométrica utiliza-se da relação entre a tensão máxima que ocorre na raiz da descontinuidade e a tensão nominal que ocorreria no componente, caso ele não possuísse a descontinuidade geométrica.

Para a obtenção da tensão máxima, dispõe-se hoje de diversas técnicas que permitem esse cálculo. Já para o cálculo da tensão nominal pode-se recorrer às fórmulas existentes na Teoria de Elasticidade. Essas fórmulas, por sua vez, necessitam de dados referentes à geometria da seção transversal resistente do componente (por exemplo, para o caso de tração, necessita-se da área da seção transversal) e do tipo de sollicitação que o componente sofre.

Deste modo, podemos concluir que fica inviável a utilização desta metodologia para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão de componentes com geometria complicada, isto é, de componentes cuja geometria da seção transversal resistente não é conhecida.

Assim este trabalho visa contribuir, através da proposta de um método para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão, para a solução deste problema.

### 3.4.1 Descrição do método proposto

Ao contrário da maioria dos métodos para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão, o método proposto não faz uso da tensão nominal (aquela calculada através de fórmulas da Teoria de Elasticidade) para a determinação do  $K_t$  e, deste modo, pode ser aplicado a qualquer componente, sendo conhecida ou não a geometria de sua seção transversal resistente.

O método proposto utiliza da seguinte relação para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão:

$$K'_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{med}}} \quad (3.5)$$

onde:

- $K'_t$  = coeficiente de concentração de tensão obtido pelo método proposto;
- $\sigma_{\max}$  = tensão máxima que ocorre na raiz da descontinuidade geométrica;
- $\sigma_{\text{med}}$  = média das tensões que ocorrem em pontos (nós) que estão sobre uma linha na direção do maior gradiente de tensões e que passa sobre o ponto de tensão máxima da descontinuidade geométrica.

Assim, podemos observar que, através deste método, o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão não depende de fórmulas da Teoria de

Elasticidade e nem da geometria da seção transversal resistente. Por outro lado, o método necessita de vários valores de tensão para o cálculo de  $\sigma_{med}$  e conseqüentemente do Coeficiente de Concentração de Tensão.

Para o caso em estudo foi utilizado o Método dos Elementos Finitos como uma ferramenta para a obtenção das tensões que ocorrem em pontos (nós) que estão sobre uma linha da seção transversal que passa sobre o ponto de tensão máxima da descontinuidade geométrica, bem como para a obtenção do valor da tensão máxima.

A figura 3.7 mostra um exemplo de quais pontos deve-se obter as tensões para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão.

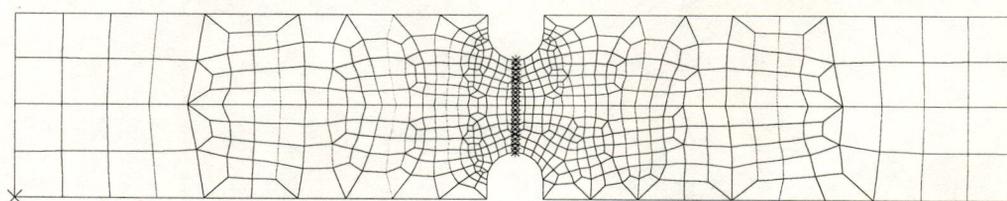


FIGURA 3.7 - Pontos utilizados para o cálculo do  $K'_t$ .

No presente trabalho foi utilizado o programa, para análises por Elementos Finitos, CAEDS que é um produto comercializado pela IBM.

Deste modo, o procedimento necessário para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão através do método proposto é mostrado na figura 3.8 abaixo.

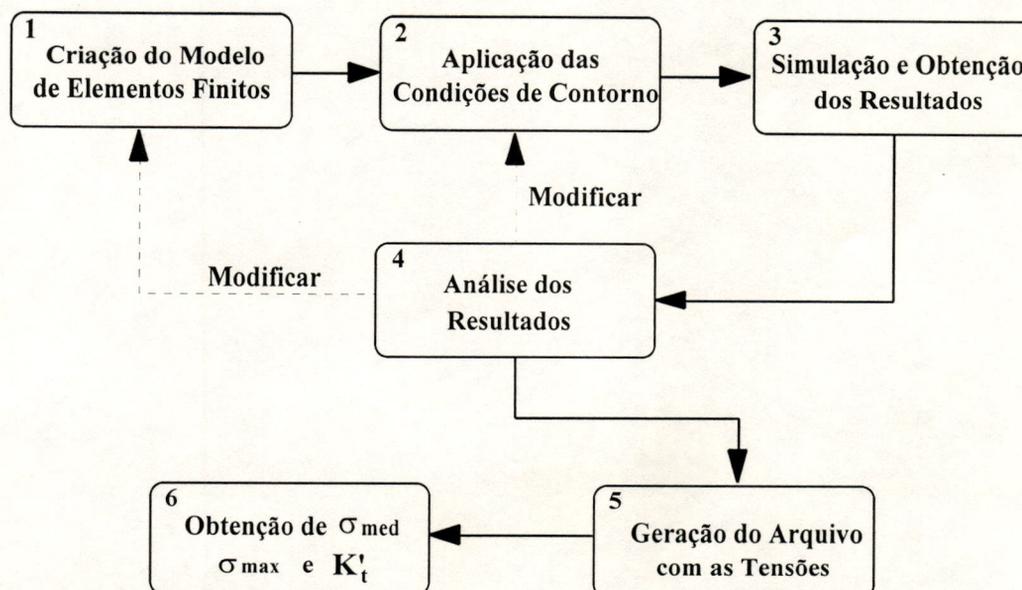


FIGURA 3.8 - Procedimento para o cálculo do  $K'_t$ .

De acordo com a figura 3.8. temos as seguintes etapas para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão:

- i) Preparação do modelo de elementos finitos;
- ii) Aplicação das condições de contorno;
- iii) Simulação e obtenção dos resultados (tensões no caso específico);
- iv) Análise dos resultados;
- v) Geração do arquivo com os valores de tensão;
- vi) Obtenção de  $\sigma_{med}$ ,  $\sigma_{max}$  e cálculo de  $K'_t$ .

A seguir são dados uma descrição de cada etapa do método proposto.

#### **i) Preparação do modelo de elementos finitos**

Nesta etapa deve-se definir a geometria do componente do qual se deseja obter o valor do Coeficiente de Concentração de Tensão. Durante essa definição deve-se prever a localização de nós que estão sobre uma linha da seção transversal que passa sobre o ponto de tensão máxima.

Quando se tratar de um componente que não se sabe exatamente onde ocorre o ponto de tensão máxima, e conseqüentemente a posição dessa linha, deve-se construir a geometria desprezando-se a localização dos nós.

Deste modo, após a obtenção e análise dos resultados deve-se voltar a essa etapa e providenciar a localização de nós sobre uma linha da seção transversal que passa sobre o ponto de tensão máxima.

Após esta tarefa deve-se gerar a malha de elementos finitos sobre a geometria já definida. Os elementos finitos dessa malha devem ser tais que possam expressar, o mais próximo do real, o comportamento do componente. Por exemplo, pode-se utilizar elementos do tipo casca, sólido, axissimétrico-sólido, de tensão plana, entre outros.

#### **ii) Aplicação das condições de contorno**

Nesta etapa devem ser definidas as vinculações que o modelo deve possuir, bem como a que tipo de solicitação estará sujeito.

Aqui deve-se tomar o cuidado de aplicar as condições de contorno a uma distância tal da região de concentração de tensões, de maneira que as perturbações pontuais causadas pelas condições de contorno não afetem o gradiente de tensões causado pela descontinuidade geométrica.

Em outras palavras, o componente deve possuir áreas de tensão homogênea em torno da área de alto gradiente de tensões.

### **iii) Simulação e obtenção dos resultados**

Nesse passo é que serão informados o tipo de análise pelo Método dos Elementos Finitos que será executada, bem como quais resultados são desejados. Para o caso em estudo deve-se executar análise do tipo estática, e os resultados necessários são as tensões e deformações.

### **iv) Análise dos resultados**

É nessa etapa que poderá estar o sucesso ou não da aplicação do método proposto. Afinal é nesse momento, através da análise dos resultados, que se deve decidir por mudanças ou não no modelo de elementos finitos. Se o modelo foi construído sem se saber a localização da linha sobre a qual devem existir nós, o modelo deve ser refeito a fim de se posicionar a linha. Esse posicionamento deve ser feito com base nos resultados obtidos.

Deve-se também verificar a homogeneidade das tensões em torno da área de gradiente de tensões, a fim de verificar-se se há ou não influência das condições de contorno nos resultados. Caso haja deve-se alterar as condições de contorno.

Outro ponto de grande importância para o sucesso do método proposto é quantidade de nós que devem existir sobre uma linha da seção transversal que passa pelo ponto de tensão máxima. O número de nós deve ser tal que possa expressar o gradiente de tensões que ocorre abaixo da descontinuidade geométrica. Se o número de nós for insuficiente para isso, deve-se executar uma modificação no modelo com um refinamento da malha na região da descontinuidade geométrica.

Se após a análise dos resultados houver a necessidade de mudanças no modelo ou nas condições de contorno, estas devem ser feitas e a simulação deve ser executada novamente. Esses passos devem ser repetidos até que todas as condições anteriores sejam satisfeitas.

### **v) Geração do arquivo com os valores de tensão**

O programa utilizado (CAEDS) oferece a opção de criar arquivos em formato ASCII que contém informações sobre nós de interesse do usuário.

Para o método proposto é interessante gerar arquivos que contenham informações dos nós que estão sobre uma linha da seção transversal que passa sobre o

ponto de tensão máxima de uma descontinuidade geométrica. Nesses arquivos constam o número de cada nó bem como a tensão relacionada a esse nó.

Deste modo, deve-se selecionar os nós de interesse e criar o arquivo, que posteriormente será utilizado no cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão. Os valores de tensão que são armazenados no arquivo podem ser obtidos por diversos métodos, tais como pelo critério de Von Mises, tensão na direção X, Y ou Z, conforme o problema em estudo.

Uma vez selecionados os nós de interesse e qual o tipo de tensão, é pedido um nome e o arquivo é gerado, com a terminação ".dat". Um exemplo de um arquivo pode ser encontrado no anexo B.

#### vi) Obtenção de $\sigma_{med}$ , $\sigma_{max}$ e cálculo de $K'_t$

Para o cálculo de  $K'_t$  foi desenvolvido um programa que abre o arquivo gerado e determina o máximo valor dentre aqueles que estão no arquivo, obtendo assim o valor de  $\sigma_{max}$ . Para a obtenção do valor de  $\sigma_{med}$  o programa determina a média aritmética de todos os valores listados no arquivo. Feito isto, o programa determina o valor de  $K'_t$  pela relação entre  $\sigma_{max}$  e  $\sigma_{med}$ .

Podemos assim verificar que o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão através do método proposto é uma tarefa simples, bastando ao usuário ter algum conhecimento de como utilizar um programa para análises por elementos finitos. Verificamos também que pode ser utilizado para qualquer componente submetido a solicitações mecânicas quaisquer, desde que possam ser modelados em concordância com a realidade.

### 3.4.2 Validação do método proposto

Para a validação do método proposto foram calculados diversos valores de  $K'_t$  para alguns casos conhecidos e cujos valores do Coeficiente de Concentração de Tensão se encontram na bibliografia.

O objetivo principal desta validação é a determinação do erro ou diferença entre os valores do Coeficiente de Concentração de Tensão calculados pelo método proposto e os valores encontrados na bibliografia.

Deste modo, encontra-se a seguir a descrição dos estudos de alguns casos, bem como os resultados obtidos.

### 3.4.2.1 Placa finita com furo circular central submetida à tração

Este tipo de problema é um caso clássico, e podemos encontrar diversos trabalhos a esse respeito na bibliografia.

O modelo de elementos finitos foi desenvolvido utilizando-se de elementos quadriláteros parabólicos (8 nós) do tipo tensão plana. Esse tipo de elemento foi utilizado devido a habilidade que ele possui em modelar a curvatura do furo e por se tratar de um caso de tensão plana. Aliás a utilização de elementos do tipo tensão plana reduz consideravelmente o tempo de processamento, já que ele possui apenas três graus de liberdade.

Um estudo inicial foi feito para determinar-se qual seria a densidade da malha na região do furo. O refinamento da malha foi executado até que se obtivesse um número ideal de nós que estão sobre uma linha da seção transversal que passa pelo ponto de tensão máxima.

Um exemplo da malha obtida para esse tipo de problema é apresentado na figura 3.9.

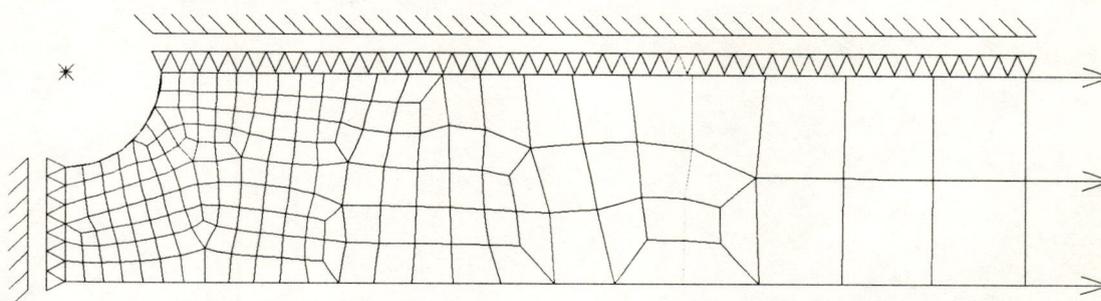


FIGURA 3.9 - Modelo de elementos finitos de uma placa com furo circular.

Devido a simetria, somente um quarto do modelo foi analisado para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão em placas com furo submetida à tração.

As condições de contorno impostas ao modelo restringem os nós que estão sobre o plano de simetria, de terem movimento na direção normal ao plano de simetria.

As solicitações, nesse caso, foram aplicadas a uma distância significativa (no mínimo  $5d$ ) da região do furo. Isto foi feito a fim de obter-se tensões uniformes e linearmente distribuídas através da região sem o furo. As solicitações foram aplicadas na forma de tensão.

Deste modo, para o cálculo do  $K'_t$  foram tomados os valores de tensão Von Mises dos nós que estão sobre uma linha da seção transversal que passa pelo ponto de tensão máxima, conforme a figura 3.10.

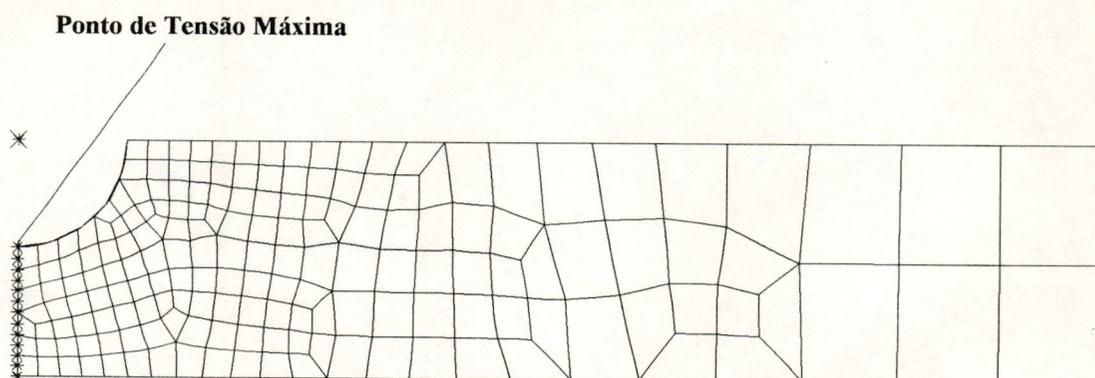


FIGURA 3.10 - Nós selecionados para o cálculo do  $K'_t$ .

Podemos observar que os nós que estão sobre uma linha da seção transversal que passa pelo ponto de tensão máxima são igualmente espaçados para um melhor cálculo de  $\sigma_{med}$ .

Foram analisadas diversas configurações para este tipo de problema, e os resultados obtidos foram então comparados com resultados obtidos na bibliografia (PETERSON, 1974).

Os resultados obtidos pelas análises encontram-se na tabela 3.1 e na figura 3.11.

TABELA 3.1 - Resultados obtidos através do método proposto.

$d/L$	$K'_t$	$K_t(\text{PETERSON})$	erro %
0,1	2,607	2,735	-4,68
0,2	2,441	2,52	-3,13
0,3	2,328	2,35	-0,94
0,4	2,255	2,24	0,67
0,5	2,158	2,16	-0,09
0,6	2,104	2,10	0,19
0,7	2,062	2,065	-0,15

A relação  $d/L$  pode ser obtida de acordo com a figura 3.11, e para o cálculo do erro utilizou-se da relação abaixo:

$$\text{erro} = \frac{K'_t - K_t(\text{PETERSON})}{K_t(\text{PETERSON})} * 100 \quad (3.6)$$

Assim, de acordo com os valores listados na tabela 3.1, pode-se concluir que os resultados obtidos estão em excelente concordância com aqueles publicados por PETERSON (1974). Para o caso de  $d/L=0,2$  e  $d/L=0,1$  o erro encontrado foi de 3,13% e 4,68% respectivamente e, apesar disto, pode ser considerado um bom resultado já que para o Método dos Elementos Finitos um erro que fique em torno de 8% é considerado aceitável.

Através da análise da figura 3.11, que dá a comparação dos ábacos gerados pelo método proposto (através da extrapolação da curva) e por PETERSON (1974), pode-se concluir a ótima concordância dos resultados na faixa de  $d/L=0,3$  até  $d/L=0,7$ . Na faixa de  $d/L < 0,3$  notamos que o método proposto tende a subestimar o valor do Coeficiente de Concentração de Tensão. Uma razão para isto pode ser a baixa densidade da malha para estes dois casos, já que o tamanho dos elementos na região do entalhe deve ser, no máximo igual a 20% do raio do entalhe. Para estes dois casos isto não foi possível devido a enorme quantidade de elementos que seriam necessários para modelar o problema.

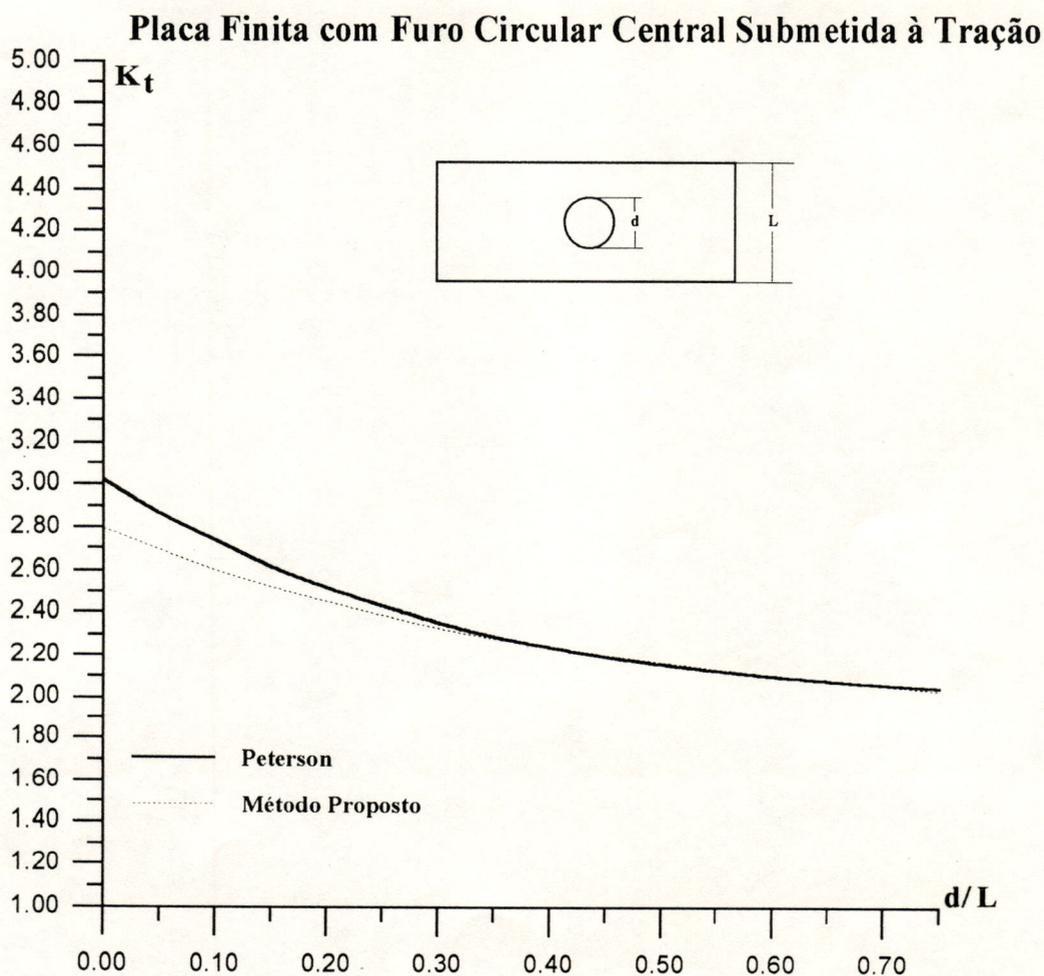


FIGURA 3.11 - Ábaco gerado pelo método proposto.

### 3.4.2.2 Placa finita com variação de seção submetida à tração

Neste caso, foram estudados os casos de placas com variação de seção e com arredondamento circular.

Mais uma vez, utilizou-se de elementos parabólicos do tipo tensão plana para a construção do modelo de elementos finitos, devido à sua habilidade em modelar curvaturas e devido à condição de tensão plana do problema.

Um estudo inicial foi realizado para a determinação da densidade da malha na região da descontinuidade geométrica. O refinamento da malha foi executado até a obtenção do número ideal de nós que estão sobre uma linha da seção transversal que passa pelo ponto de tensão máxima.

Um exemplo da malha obtida para esse tipo de problema é mostrado na figura 3.12.

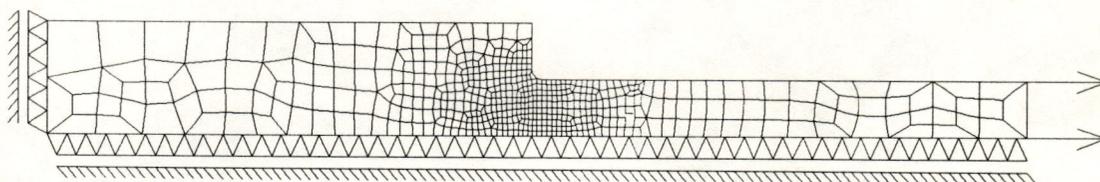


FIGURA 3.12 - Modelo de elementos finitos de uma placa com variação de seção.

Devido à simetria, somente metade do modelo foi analisada para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão em placas com variação de seção submetida à tração.

As condições de contorno impostas ao modelo engastam os nós do lado de maior seção e, restringem os nós que estão sobre o plano de simetria de terem movimento na direção normal ao plano de simetria.

As solicitações foram aplicadas, através de tensão, a uma distância significativa (no mínimo  $5d$ ) da região do entalhe, a fim de se evitar distúrbios nessa região.

Deste modo, para o cálculo do  $K'_t$  foram tomados os valores de tensão Von Mises dos nós que estão sobre uma linha da seção transversal que passa pelo ponto de tensão máxima, conforme a figura 3.13 abaixo.

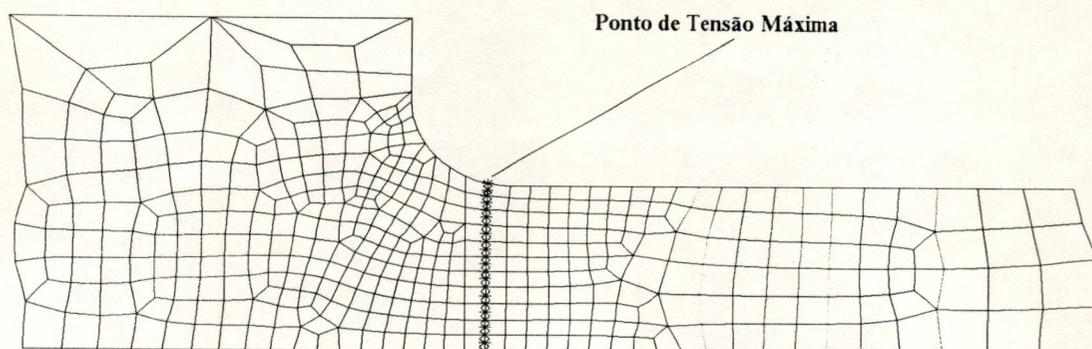


FIGURA 3.13 - Nós selecionados para o cálculo de  $K'_t$ .

Podemos observar que os nós que estão sobre uma linha da seção transversal que passa pelo ponto de tensão máxima são igualmente espaçados, isto é, pertencem a elementos de tamanhos iguais, para um melhor cálculo de  $\sigma_{med}$ .

Para a obtenção da posição do ponto de tensão máxima, utilizou-se de dados experimentais (TIMOSHENKO, 1970) que diz que o ponto de tensão máxima ocorre a um ângulo em torno de  $75^\circ$ , conforme a figura 3.14 abaixo.

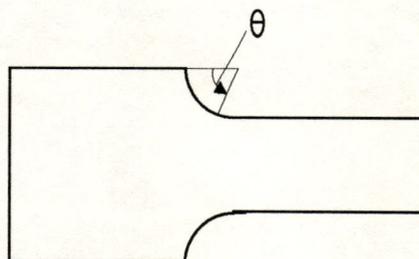


FIGURA 3.14 - Ângulo que posiciona o ponto de tensão máxima.

Foram analisadas diversas configurações para este tipo de problema, e os resultados obtidos foram então comparados com resultados obtidos na bibliografia (PETERSON, 1974).

Os resultados obtidos estão listados nas tabela 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5.

TABELA 3.2 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $D/d=2$ .

$r/d$	$\sigma_{max}$ (MPa)	$\sigma_{med}$ (MPa)	$K'_t$	$K_t$ (PETERSON)	erro %
0,10	23,14	9,524	2,430	2,44	-0,41
0,15	20,49	9,487	2,160	2,13	1,41
0,20	18,25	9,357	1,950	1,95	0
0,25	17,36	9,293	1,868	1,84	1,52
0,30	16,09	9,190	1,751	1,75	0,06

TABELA 3.3 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $D/d=1,5$ .

r/d	$\sigma_{\max}$ (MPa)	$\sigma_{\text{med}}$ (MPa)	$K'_t$	$K_t(\text{PETERSON})$	erro %
0,10	21,80	9,604	2,270	2,24	1,34
0,15	18,56	9,443	1,965	1,99	-1,26
0,20	17,94	9,646	1,86	1,84	1,09
0,25	16,91	9,519	1,776	1,74	2,07
0,30	16,19	9,515	1,702	1,67	1,92

TABELA 3.4 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $D/d=1,3$ .

r/d	$\sigma_{\max}$ (MPa)	$\sigma_{\text{med}}$ (MPa)	$K'_t$	$K_t(\text{PETERSON})$	erro %
0,10	19,68	9,764	2,016	2,06	-2,14
0,15	17,94	9,705	1,849	1,86	-0,59
0,20	17,11	9,699	1,764	1,73	1,97
0,25	16,25	9,680	1,679	1,64	2,38
0,30	15,78	9,685	1,629	1,59	2,45

TABELA 3.5 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $D/d=1,2$ .

r/d	$\sigma_{\max}$ (MPa)	$\sigma_{\text{med}}$ (MPa)	$K'_t$	$K_t(\text{PETERSON})$	erro %
0,10	18,14	9,815	1,848	1,89	-2,22
0,15	17,00	9,801	1,734	1,73	0,23
0,20	16,00	9,767	1,638	1,63	0,49
0,25	15,43	9,775	1,578	1,56	1,15
0,30	14,96	9,771	1,531	1,52	0,72

As relações  $D/d$  e  $r/d$  podem ser obtidas de acordo com a figura 3.15, e para o cálculo do erro utilizou-se da mesma relação, como para o caso de Placa Finita com Furo Circular Central Submetida à Tração.

De acordo com os valores listados nas tabelas acima, podemos concluir que os resultados estão em ótima concordância com aqueles publicados por PETERSON (1974), com um erro médio de 1,27%. Para os casos  $D/d=1,3$  com  $r/d=0,25$  e  $r/d=0,30$  foram encontrados os maiores erros, 2,38% e 2,45% respectivamente, ficando abaixo dos 8% de erro aceitável pelo Método dos Elementos Finitos.

Observamos também, através destas tabelas, que o valor de  $\sigma_{\text{med}}$  para cada caso de  $D/d$  fica praticamente constante, com variação máxima de 1,04%, mostrando assim a acuracidade no cálculo de  $\sigma_{\text{med}}$ .

Através da análise da figura 3.15, que apresenta a comparação entre os ábacos gerados pelo método proposto (através da extrapolação da curva) e por

PETERSON (1974), podemos também observar a ótima concordância das curvas, mesmo para valores que estão na faixa  $r/d < 0.10$  (sendo que foram obtidos valores de  $K_t$  apenas para a faixa  $0.10 \leq r/d \leq 0.30$ ).

### Placa Finita com Variação de Seção Submetida à Tração

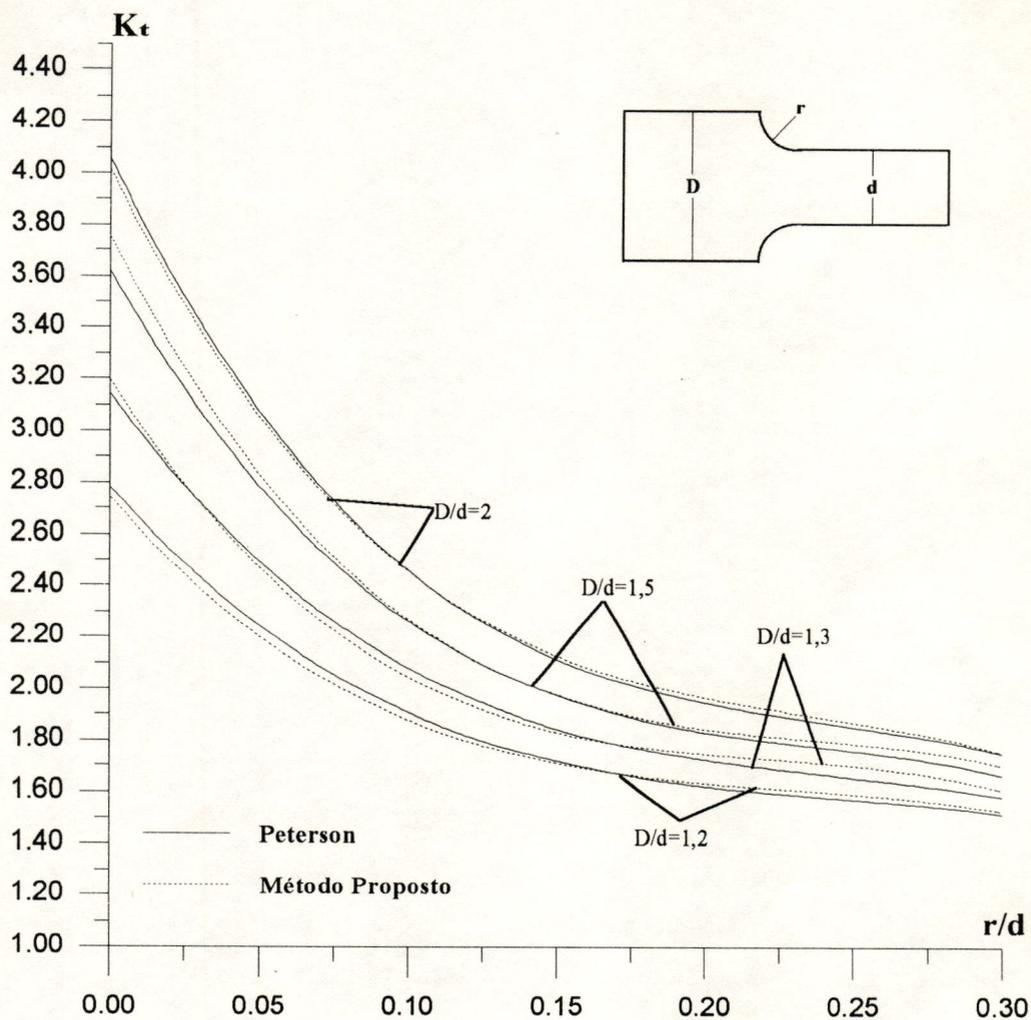


FIGURA 3.15 - Ábaco gerado pelo método proposto.

#### 3.4.2.3 Placa finita com entalhe circular submetida à tração

Para este tipo de problema foram estudados os casos de placas com entalhes profundos (entalhe na forma de "U") e com entalhes rasos. Para ambos os casos havia dois entalhes iguais e opostos entre si.

Utilizou-se de elementos quadriláteros parabólicos do tipo tensão plana para a construção do modelo de elementos finitos. Mais uma vez esse tipo de elemento foi

utilizado devido à sua habilidade em modelar curvaturas e devido à condição de tensão plana do problema.

Um estudo inicial foi realizado para a determinação da densidade da malha na região dos entalhes. O refinamento da malha foi executado até a obtenção do número ideal de nós que estão sobre uma linha da seção transversal que passa pelo ponto de tensão máxima.

Um exemplo da malha obtida para esse tipo de problema é mostrado na figura 3.16

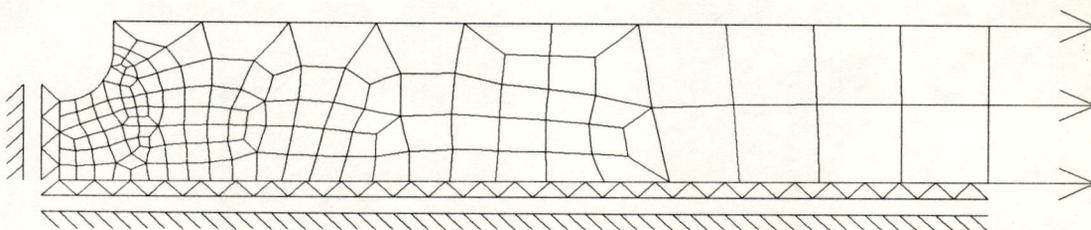


FIGURA 3.16 - Modelo de elementos finitos de uma placa com entalhe circular.

Devido à simetria, somente um quarto do modelo foi analisado para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão em placas com entalhe circular submetida à tração.

As condições de contorno impostas ao modelo restringem os nós que estão sobre o plano de simetria, de terem movimento na direção normal ao plano de simetria.

As solicitações foram aplicadas, através de tensão, a uma distância significativa (no mínimo  $5d$ ) da região dos entalhes, a fim de se evitar distúrbios nessa região.

Deste modo, para o cálculo do  $K'_t$  foram tomados os valores de tensão Von Mises dos nós que estão sobre uma linha da seção transversal que passa pelo ponto de tensão máxima, conforme a figura 3.17.

**Ponto de Tensão Máxima**

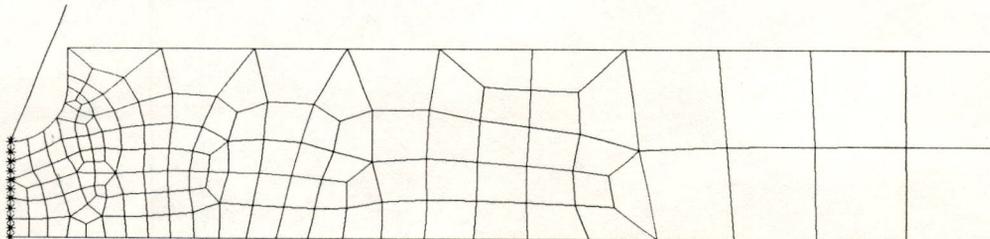


FIGURA 3.17 - Nós selecionados para o cálculo de  $K'_t$ .

Podemos observar que os nós que estão sobre uma linha da seção transversal que passa pelo ponto de tensão máxima são igualmente espaçados, isto é, pertencem a elementos de tamanhos iguais, para um melhor cálculo de  $\sigma_{med}$ .

Foram analisadas diversas configurações para este tipo de problema, e os resultados obtidos foram então comparados com aqueles obtidos na bibliografia (PETERSON, 1974).

Os resultados obtidos pelas análises estão listados nas tabelas de 3.6 a 3.9.

TABELA 3.6 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $D/d=2$ .

r/d	$\sigma_{max}$ (MPa)	$\sigma_{med}$ (MPa)	$K'_t$	$K_t$ (PETERSON)	erro %
0,10	-	-	-	-	-
0,15	50,84	19,744	2,575	2,58	-0,19
0,20	45,01	19,489	2,310	2,29	0,87
0,25	41,07	19,252	2,133	2,11	1,09
0,30	38,21	19,118	1,999	1,96	1,99

TABELA 3.7 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $D/d=1,5$ .

r/d	$\sigma_{max}$ (MPa)	$\sigma_{med}$ (MPa)	$K'_t$	$K_t$ (PETERSON)	erro %
0,10	42,49	14,516	2,927	2,92	0,24
0,15	36,38	14,872	2,446	2,47	-0,97
0,20	32,48	14,676	2,213	2,21	0,14
0,25	29,90	14,564	2,053	2,04	0,64
0,30	28,14	14,502	1,940	1,92	1,04

TABELA 3.8 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $D/d=1,3$ .

r/d	$\sigma_{max}$ (MPa)	$\sigma_{med}$ (MPa)	$K'_t$	$K_t$ (PETERSON)	erro %
0,10	34,80	12,744	2,73	2,73	0
0,15	29,72	12,490	2,38	2,34	1,71
0,20	26,99	12,650	2,134	2,10	1,62
0,25	24,76	12,737	1,944	1,95	-0,31
0,30	23,57	12,714	1,854	1,84	0,77

TABELA 3.9 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $D/d=1,2$ .

r/d	$\sigma_{max}$ (MPa)	$\sigma_{med}$ (MPa)	$K'_t$	$K_t$ (PETERSON)	erro %
0,10	29,94	11,651	2,570	2,55	0,78
0,15	25,26	11,507	2,195	2,19	0,23
0,20	23,28	11,948	1,948	1,99	-2,11
0,25	22,08	11,940	1,849	1,86	-0,59
0,30	20,54	11,786	1,743	1,76	-0,97

As relações  $D/d$  e  $r/d$  podem ser obtidas de acordo com a figura 3.18, e para o cálculo do erro utilizou-se da mesma relação, como para o caso de Placa Finita com Furo Circular Central Submetida à Tração.

De acordo com os valores listados nas tabelas acima, podemos concluir que os resultados estão em ótima concordância com aqueles publicados por PETERSON (1974), com um erro médio de 0,86%. Para os casos  $D/d=2$  com  $r/d=0,30$  e  $D/d=1,2$  com  $r/d=0,20$  foram encontrados os maiores erros, 1,99% e 2,11% respectivamente, ficando abaixo dos 8% de erro aceitável pelo Método dos Elementos Finitos.

Observamos também, através destas tabelas, que o valor de  $\sigma_{med}$  para cada caso de  $D/d$  também fica praticamente constante, com variação máxima de 1,04%, mostrando assim a acuracidade no cálculo de  $\sigma_{med}$ .

### Placa Finita com Entalhe Circular Submetida à Tração

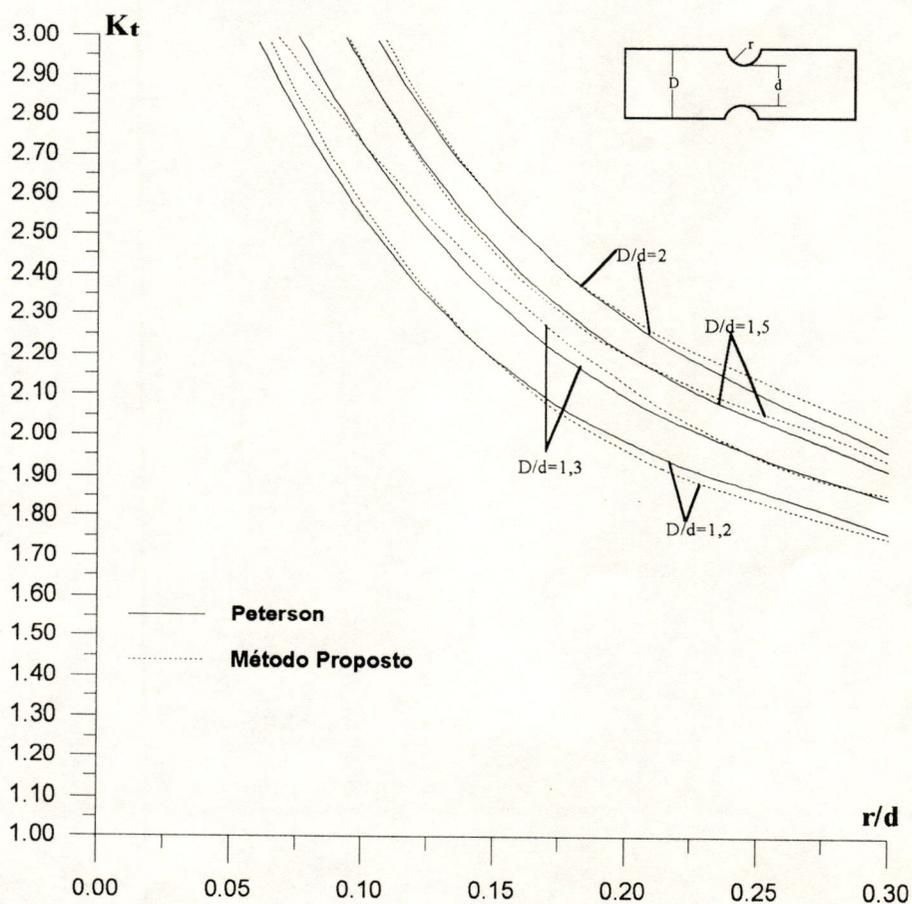


FIGURA 3.18 - Ábaco gerado pelo método proposto.

Através da análise da figura 3.18, que apresenta a comparação entre os ábacos gerados pelo método proposto (através da extrapolação da curva) e por PETERSON (1974), pode-se também observar a ótima concordância das curvas.

Nota-se que as maiores discordâncias das curvas se dão justamente nos pontos de maiores erros ( $D/d=2$  com  $r/d=0,30$ ,  $D/d=1,3$  com  $r/d=0,15$  e  $r/d=0,20$ , e  $D/d=1,2$  com  $r/d=0,20$ ), e que mesmo extrapolando-se as curvas de  $K'_t$ , elas estão em muito boa concordância na faixa de  $r/d < 0,10$ .

### 3.5 Considerações finais

De acordo com os resultados obtidos para os três casos estudados: **Placa Finita com Furo Circular Central Submetida à tração; Placa Finita com Variação de Seção Submetida à tração; Placa Finita com Entalhe Circular Submetida à tração**, pode-se afirmar que o Método Proposto é válido e pode ser utilizado para um cálculo acurado do Coeficiente de Concentração de Tensão.

Deste modo, o método será aplicado a outros tipos de problema, a fim de se obter o valor de  $K'_t$ , e assim, possibilitar a construção de ábacos para esses problemas.

A aplicação do método proposto será para os casos abaixo:

- eixo com flange;
- flange furada;

A descrição dos estudos dos casos acima bem como os resultados obtidos encontram-se no capítulo seguinte.

# CAPÍTULO 4

## APLICAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO E ESTUDO DE CASO

Neste capítulo serão apresentados dois estudos; no primeiro serão estudados dois casos (tubos com flange e flange furada) onde é aplicado o método proposto, e no segundo será estudado o problema de concentração de tensão que ocorre em uniões forçadas eixo-cubo.

### 4.1 Aplicação do método proposto

Tubos são condutos fechados destinados principalmente ao transporte de fluidos. Todos os tubos são de seção circular, apresentando-se como cilindros ocos. A grande maioria dos tubos funciona como condutos forçados, isto é, sem superfície livre, com o fluido tomando toda área da seção transversal.

Chama-se "tubulação" a um conjunto de tubos e de seus diversos acessórios.

Usam-se tubos para o transporte de todos os materiais capazes de escoar, isto é, todos os fluidos conhecidos, líquidos ou gasosos, assim como materiais pastosos e fluidos com sólidos em suspensão, todos em toda faixa de variação de pressão e temperatura usuais na indústria.

A importância das tubulações na indústria é enorme, sendo dos equipamentos industriais de uso mais generalizado.

Os diversos meios usados para conectar tubos, servem não só para ligar as varas de tubos entre si, como também para ligar os tubos à válvulas, aos diversos acessórios, e aos equipamentos (tanques, bombas, vasos, etc.).

Os principais meios de ligação de tubos são os seguintes:

- ligações rosqueadas;
- ligações soldadas;
- ligações flangeadas;
- ligações de ponta e bolsa.

As ligações flangeadas são empregadas em dois casos:

- a) Para ligar os tubos à válvulas e à equipamentos, e também em determinados pontos, no correr da tubulação, onde seja necessário facilidade de desmontagem, nas tubulações em que, para ligar uma vara na outra, sejam utilizados outros tipos de ligação;
- b) Para a ligação corrente de uma vara na outra, em tubulações de aço que possuam revestimento interno anticorrosivo. Neste caso a ligação flangeada é a melhor solução, porque permite a perfeita continuidade do revestimento, desde que este se estenda também sobre as faces dos flanges.

Para este estudo serão analisados dois tipos de flanges: aquelas que são incorporadas ao tubo e aquelas que se constituem de uma peça única. Para o caso de flanges incorporadas ao tubo, tubo com flange, foram estudados a concentração de tensão que ocorre na interface da flange com o tubo. Já para o caso de flange como sendo uma peça única, foram estudados os efeitos dos furos da flange na distribuição das tensões.

Estes estudos visam fornecer valores do Coeficiente de Concentração de Tensão, bem como comparar os valores obtidos com aqueles já publicados.

#### 4.1.1 Tubo com flange

De acordo com EVANS et al. (1987), para este caso, o Coeficiente de Concentração de Tensão pode ser obtido através da relação entre a tensão máxima que ocorre na descontinuidade geométrica e a tensão nominal axial do tubo. Esta tensão nominal axial pode ser obtida, conforme a figura 4.1, através da equação (4.1).

$$\sigma_{nom} = \frac{p(d_1^2 - d_2^2)}{4t(D + t)} \quad (4.1)$$



Neste caso a tensão nominal dada pela equação (4.1) foi substituída pela tensão média obtida pelo Método Proposto.

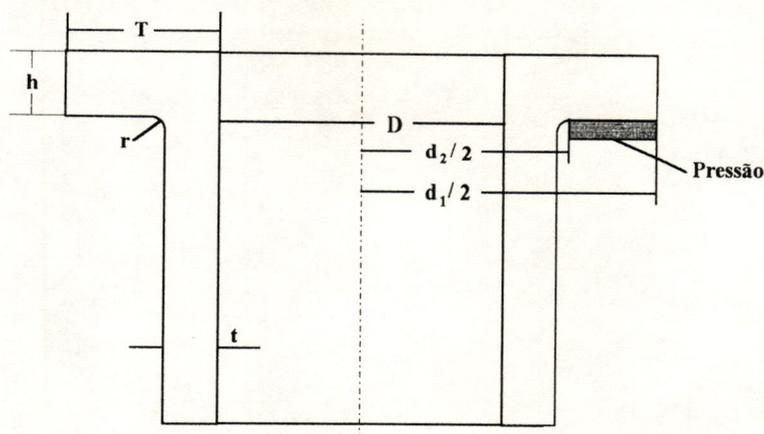


FIGURA 4.1 - Geometria do tubo com flange.

Para a realização do estudo deste tipo de problema utilizou-se de elementos quadriláteros parabólicos do tipo axissimétrico sólido para a construção do modelo de elementos finitos. Esse tipo de elemento foi utilizado devido à sua habilidade em modelar curvaturas e devido à condição de simetria axial do problema. Devido à axissimetria, somente a seção transversal do modelo foi analisado para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão em tubos com flanges. Um exemplo do modelo de Elementos Finitos utilizado é mostrado na figura 4.2.

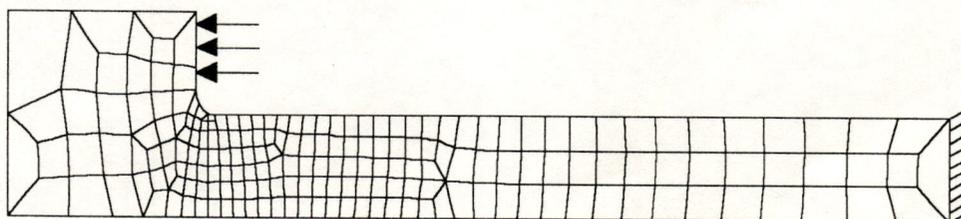


FIGURA 4.2 - Modelo de elementos finitos para o caso de tubo com flange.

As condições de contorno impostas ao modelo restringem os nós que estão na extremidade sem flange do tubo, de terem qualquer movimento. As solicitações foram aplicadas, através de pressão uniformemente distribuída, sobre a flange do tubo (conforme a figura 4.1). O tubo foi construído suficientemente longo a fim de se obter uma distribuição homogênea de tensões nas regiões distantes da descontinuidade geométrica.

Deste modo, para o cálculo do  $K'_t$  foram tomados os valores de tensão axial dos nós que estão sobre a linha abaixo do ponto de tensão máxima, conforme a figura 4.3.

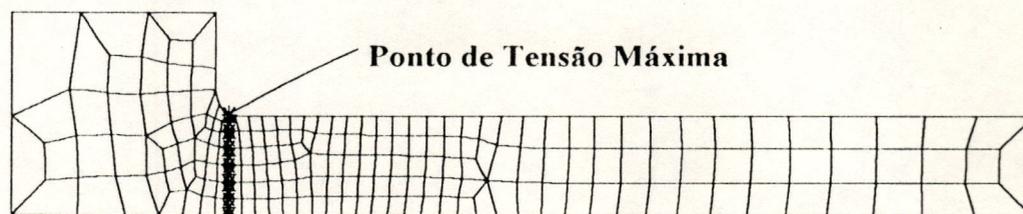


FIGURA 4.3 - Nós selecionados para o cálculo de  $K'_t$ .

Foram analisadas diversas configurações para este tipo de problema, sendo que as dimensões do componente foram normalizadas com relação à espessura da parede do tubo (vide figura 4.1) e os resultados obtidos pelas análises estão listados nas tabelas 4.1, 4.2 e 4.3.

TABELA 4.1 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $r/t=0,25$ ;  $T/t=2,5$ ;  $h/t=2,5$ .

D/t	$\sigma_{nom}$ (MPa)	$\sigma_{med}$ (MPa)	$\sigma_{max}$ (MPa)	$K'_t$	erro %
5	18,229	17,760	68,210	3,841	2,57
10	15,625	15,711	79,730	5,075	0,55
20	14,137	14,496	94,360	6,509	2,54
30	13,609	13,887	107,500	7,741	2,04

TABELA 4.2 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $r/t=0,25$ ;  $T/t=2,5$ ;  $h/t=1,5$ .

D/t	$\sigma_{nom}$ (MPa)	$\sigma_{med}$ (MPa)	$\sigma_{max}$ (MPa)	$K'_t$	erro %
5	18,229	17,401	102,500	5,890	4,54
10	15,625	15,848	118,800	7,496	1,43
20	14,137	14,273	137,700	9,648	0,96
30	13,609	13,817	147,200	10,654	1,53

TABELA 4.3 - Resultados obtidos pelo método proposto para  $r/t=0,25$ ;  $T/t=2$ ;  $h/t=2,5$ .

D/t	$\sigma_{\text{nom}}$ (MPa)	$\sigma_{\text{med}}$ (MPa)	$\sigma_{\text{max}}$ (MPa)	$K'_t$	erro %
5	10,313	10,019	36,100	3,603	2,85
10	9,034	9,004	41,430	4,601	0,33
20	8,304	8,525	49,460	5,802	2,66
30	8,044	8,223	58,050	7,059	2,23

De acordo com os resultados expostos acima, podemos observar que o maior erro encontrado foi para o caso  $r/t=0,25$ ;  $T/t=2,5$ ;  $h/t=1,5$  e  $D/t=5$ , com 4,54%, ficando assim abaixo dos 8% de erro aceitável para o método dos elementos finitos.

#### 4.1.2 Flange furada

Para a realização do estudo deste tipo de problema utilizou-se elementos quadriláteros parabólicos do tipo tensão plana para a construção do modelo de elementos finitos. Esse tipo de elemento foi utilizado devido à sua habilidade em modelar curvaturas e devido ao estado bidimensional de tensões do problema. Devido à simetria, somente um quarto do modelo foi analisado para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão em flanges furadas. Um exemplo do modelo de Elementos Finitos utilizado para a análise é mostrado na figura 4.4.

As condições de contorno impostas ao modelo restringem os nós que estão sobre o plano de simetria, de terem movimento na direção normal ao plano de simetria. As solicitações foram aplicadas, através de pressão interna uniformemente distribuída, sobre a flange. Para efeito de comparação com resultados obtidos por PETERSON (1974), foram estudados os casos de flanges com 8 e 16 furos. Deste modo, para o cálculo do  $K'_t$  foram tomados os valores de tensão Von Mises dos nós que estão sobre a linha de uma seção transversal passando pelo ponto de tensão máxima, conforme a figura 4.5. Foram analisadas diversas configurações, conforme figura 4.6, para este tipo de problema, e os resultados obtidos foram então comparados com aqueles obtidos da literatura (PETERSON, 1974).

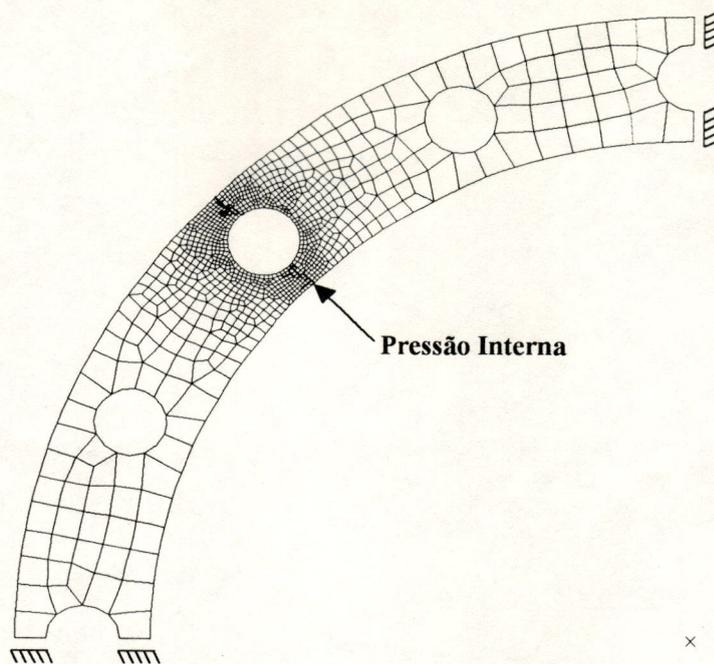


FIGURA 4.4 - Modelo de elementos finitos para flange furada.

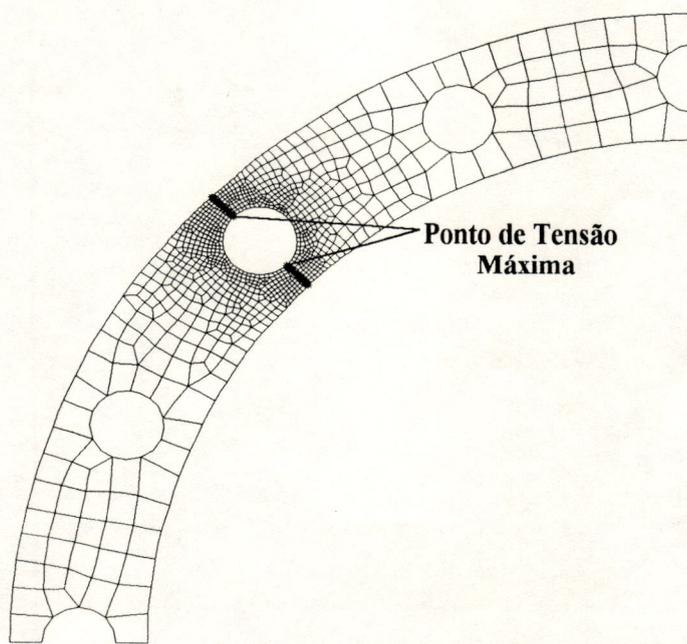


FIGURA 4.5 - Nós selecionados para o cálculo de  $K'_t$ .

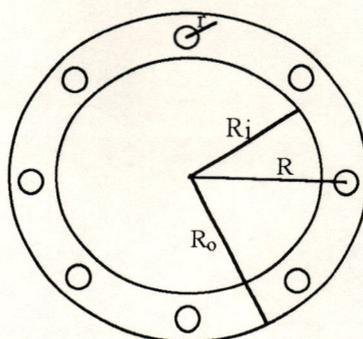


FIGURA 4.6 - Geometria da flange furada.

Para este estudo utilizou-se das relações:  $R_i/R_o=0,8$  e  $R/R_o=0,9$ . Os resultados obtidos pelas análises estão listados nas tabelas 4.4 e 4.5.

TABELA 4.4 - Resultados obtidos pelo método proposto para flange com 8 furos.

$r/R$	$\sigma_{\max}$ (MPa)	$\sigma_{\text{med}}$ (MPa)	$K'_t$	$K_t$ (PETERSON)	erro %
0,02	129,3	49,37	2,619	2,76	-5,10
0,03	139,6	54,47	2,563	2,64	-2,92
0,04	154,2	61,69	2,500	2,55	-1,96
0,05	175,3	71,70	2,445	2,49	-1,81
0,06	207,4	85,95	2,413	2,48	-2,70

TABELA 4.5 - Resultados obtidos pelo método proposto para flange com 16 furos.

$r/R$	$\sigma_{\max}$ (MPa)	$\sigma_{\text{med}}$ (MPa)	$K'_t$	$K_t$ (PETERSON)	erro %
0,02	129,9	49,37	2,631	2,69	-2,19
0,03	139,0	54,74	2,539	2,56	-0,82
0,04	154,2	61,91	2,491	2,48	0,44
0,05	175,7	71,97	2,441	2,42	0,87
0,06	209,2	86,16	2,428	2,40	1,17

Para o caso de flanges furadas os resultados obtidos pelo método proposto estão em boa concordância com os existentes (PETERSON, 1974), estando o maior erro, para o caso de 8 furos com  $r/R=0,02$ , com 5,10%, ainda abaixo dos 8% de erro. Para este caso em especial, o erro poderia ser reduzido com um maior refinamento da

malha na região da descontinuidade geométrica, o que implicaria em um aumento do número de elementos nesta região, bem como no crescimento do tempo de processamento.

## 4.2 Estudo de caso: União eixo-cubo

### 4.2.1 Considerações iniciais

Os ajustes prensados são todos aqueles nos quais os diâmetros dos eixos são sempre maiores do que os dos furos, não havendo qualquer possibilidade de folga. Por esse motivo, necessita-se sempre de um esforço exterior mais ou menos intenso para sua efetivação.

Quanto maior for a diferença entre os diâmetros, maior deverá ser o esforço para o ajuste entre os dois componentes. Em casos de grandes interferências, isto é, para casos onde a diferença de diâmetros é grande, pode-se utilizar uma prensa hidráulica.

Dentro de uma classificação mais detalhada, pode-se classificar como "forçados" os ajustes que são realizados sem auxílio de equipamentos especiais, e como "prensados" os ajustes que necessitam desses para sua efetivação.

Deste modo, pode-se conseguir um ajuste por:

- prensagem de um componente contra o outro;
- aquecimento da peça exterior (cubo);
- resfriamento da peça interior (eixo);
- aplicação simultânea dos casos anteriores, para ajustes interferentes.

Assim pode-se distinguir dois tipos de ajustes:

a) Ajuste longitudinal: é aquele onde o eixo é introduzido, sob pressão, no furo, no sentido axial do eixo, conforme a figura 4.7. Nota-se que neste caso não existe nenhuma folga inicial entre as peças exterior e interior, sendo que o acoplamento é realizado à temperatura ambiente, através de esforço externo, no sentido longitudinal, obtido por prensa ou por outro meio.

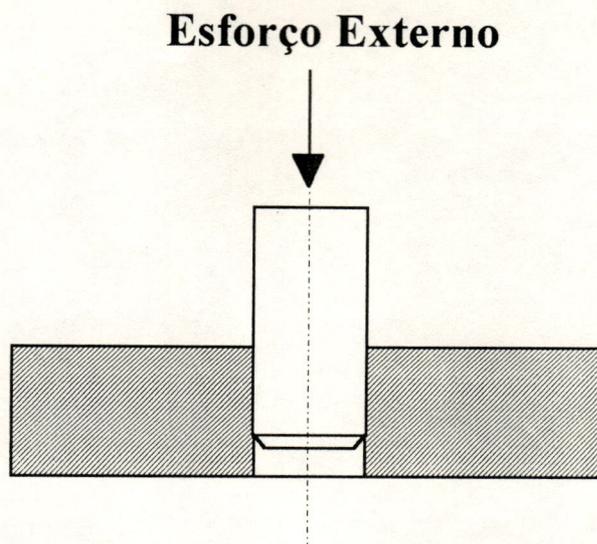


FIGURA 4.7 - Ajuste longitudinal.

b) Ajuste transversal: é aquele no qual o ajuste entre o eixo e o furo é obtido sem esforço, sendo que o esforço de prensagem é conseguido por:

i) por resfriamento e contração da peça externa, previamente aquecida. Este é o tipo denominado de ajuste por contração, figura 4.8. É um processo bastante utilizado na montagem de anéis externos em rodas de vagões ferroviários. O aquecimento da peça externa pode ser feito em óleo quente ou em forno de aquecimento.

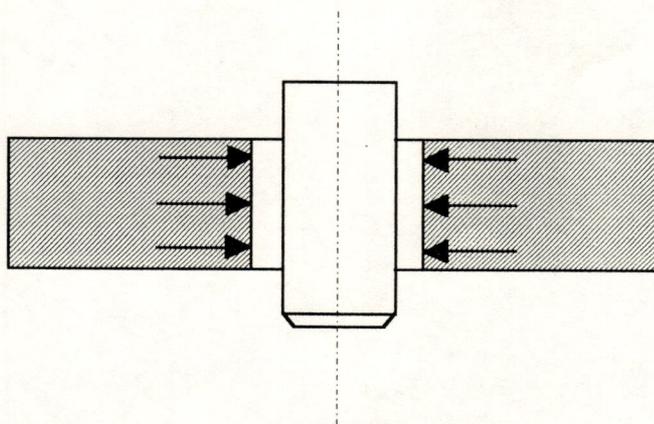


FIGURA 4.8 - Ajuste transversal por contração.

ii) por aquecimento e dilatação da peça previamente resfriada. Este tipo é denominado ajuste por dilatação. O resfriamento da peça interna pode ser realizado

pela imersão da peça em gelo seco. A figura 4.9 mostra o esquema de um ajuste por dilatação.

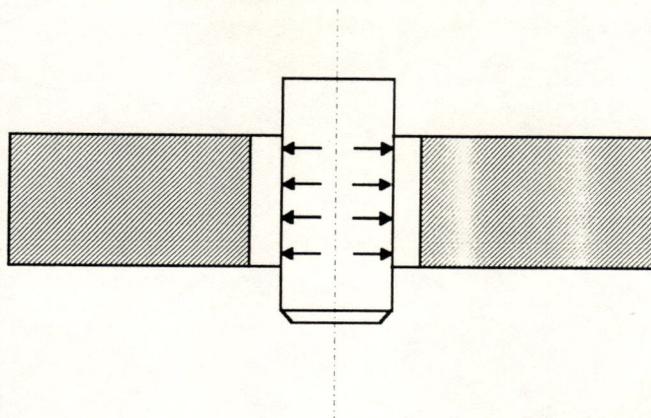


FIGURA 4.9 - Ajuste transversal por dilatação.

O ajuste por contração tem certas vantagens com relação ao ajuste por dilatação, tais como economia de operação, uniformidade, facilidade de introdução da peça interior na exterior (por esta estar na temperatura ambiente), sendo mais fácil sua manipulação.

A montagem com interferência de elementos de transmissão de potência, como por exemplo eixo-engrenagem, é um procedimento usual e dos mais antigos. Estas montagens são simples e usualmente mais econômicas, quando comparadas ao uso de chavetas, pinos e estrias.

Em uma montagem eixo-cubo com interferência ocorre um aumento das tensões, causado pelo pequeno comprimento do cubo em relação ao eixo. Este aumento é considerado através do Coeficiente de Concentração de Tensão. Este coeficiente, segundo SULLIVAN (1977), varia entre os valores de 1 a 3. Na literatura é difícil encontrar valores precisos do  $K_t$  para este tipo de problema.

Aliás o que pode ser encontrado na literatura são equacionamentos que dão valores de tensão atuantes para o caso onde o comprimento do cubo é igual ao do eixo, o que não ocorre na realidade.

Como já citado na seção 3.3 os valores de  $K_t$  são de grande importância no estudo do comportamento à fadiga de componentes mecânicos. No caso de eixos este estudo é fundamental para um projeto eficiente.

## 4.2.2 Estudo teórico

Quando duas peças cilíndricas são montadas, através de interferência, uma sobre a outra, uma pressão de contato é gerada entre elas. As tensões resultantes desta pressão podem ser facilmente determinadas, de acordo com SHIGLEY (1986).

A figura 4.10 - mostra duas peças cilíndricas que foram montadas com ajuste forçado. Uma pressão de contato "p" existe entre as duas peças, no raio b, causando uma tensão radial  $\sigma_r = -p$  em cada peça, na superfície de contato.

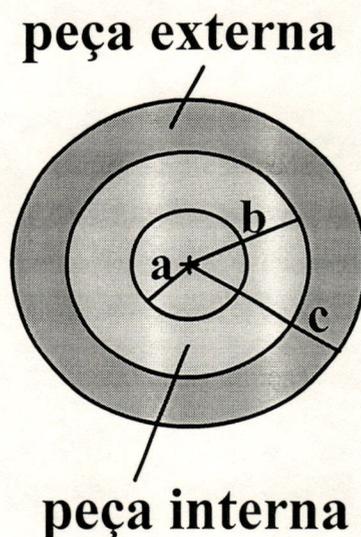


FIGURA 4.10 - Montagem forçada de duas peças cilíndricas.

Deste modo, a tensão tangencial na superfície externa da peça interna (eixo) é:

$$\sigma_{te} = -p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \quad (4.2)$$

onde:

$\sigma_{te}$  = tensão tangencial no eixo

p = pressão gerada pelo ajuste forçado

b = raio externo do eixo

a = raio interno do eixo

Do mesmo modo temos que a tensão tangencial na superfície interna da peça externa (cubo) é:

$$\sigma_{tc} = p \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} \quad (4.3)$$

onde:

$\sigma_{tc}$  = tensão tangencial no cubo

$p$  = pressão gerada pelo ajuste forçado

$c$  = raio externo do cubo

$b$  = raio interno do cubo

Estas equações (4.2) e (4.3) não podem ser solucionadas sem o conhecimento da pressão de contato "p". Na obtenção do ajuste forçado, o diâmetro interno do cubo é menor do que o diâmetro externo do eixo, sendo que a diferença entre estas dimensões é chamada de interferência. Esta diferença é a deformação que as peças devem sofrer a fim de se conseguir o ajuste.

Como estas dimensões são conhecidas pode-se afirmar que:

$$\delta_c = \frac{bp}{E_c} \left( \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \nu \right) \quad (4.4)$$

e

$$\delta_e = -\frac{bp}{E_e} \left( \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \nu \right) \quad (4.5)$$

onde:

$\delta_c$  = aumento no raio interno do cubo

$\delta_e$  = decréscimo no raio externo do eixo

$c$  = raio externo do cubo

$b$  = raio interno do cubo

$a$  = raio interno do eixo

$E_c, E_e$  = módulo de elasticidade do cubo e do eixo

$\nu$  = coeficiente de Poisson

Assim, a deformação total  $\delta$ , que é igual a interferência é:

$$\delta = \delta_c - \delta_e \quad (4.6)$$

Deste modo, pode-se obter a pressão de contato "p", quando a interferência  $\delta$  é conhecida. Se as duas peças são do mesmo material, isto é,  $E_c = E_e = E$ , tem-se "p" de maneira simplificada:

$$p = \frac{E\delta}{b} \left[ \frac{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}{2b^2(c^2 - a^2)} \right] \quad (4.7)$$

Finalmente pode-se obter os valores das tensões substituindo-se o valor de "p" nas equações (4.2) e (4.3).

É importante ressaltar que as equações dadas acima são válidas apenas para os casos onde o comprimento do cubo seja igual ao comprimento do eixo, condição esta de difícil aplicação dentro da engenharia mecânica. O que se encontra hoje, para o caso de ajuste forçado, são casos onde o comprimento do eixo sobre o qual é montada uma engrenagem, por exemplo, é muito maior do que o comprimento desta engrenagem. Deste modo, a diferença entre estes comprimentos gera picos de tensão no eixo, impossibilitando assim as equações básicas de medirem estas tensões, já que estas fornecem valores de tensão como sendo constantes ao longo do comprimento.

As figuras 4.11 e 4.12 mostram como se comporta a tensão (Von Mises) ao longo do comprimento do eixo para os casos onde os comprimentos do eixo e do cubo são iguais e diferentes, respectivamente.

Nota-se que na figura 4.11 a tensão é constante ao longo do comprimento do eixo e do cubo. Já na figura 4.12 pode-se notar um pico de tensão, que ocorre no meio do comprimento do cubo. Observa-se também que a partir do fim do cubo ( $3E-02$  e  $-3E-02$  no eixo x do gráfico) a tensão cai bastante, sendo que no fim do eixo chega a valores perto de zero.

Para estes exemplos ressalta-se que os diâmetros do eixo e do cubo foram mantidos, para ambos os casos.

CAEDS V4R2M0: FE\_Modeling\_& Analysis

18-JAN-94 17:34:33

Database: sixo-cubo  
View : No stored View  
Task: Post Processing  
Model: 6-MODEL6  
Units : SI  
Display : No stored Option  
Model Bin: 1-MAIN  
Associated Worksheet: 5-WORKING\_SET6

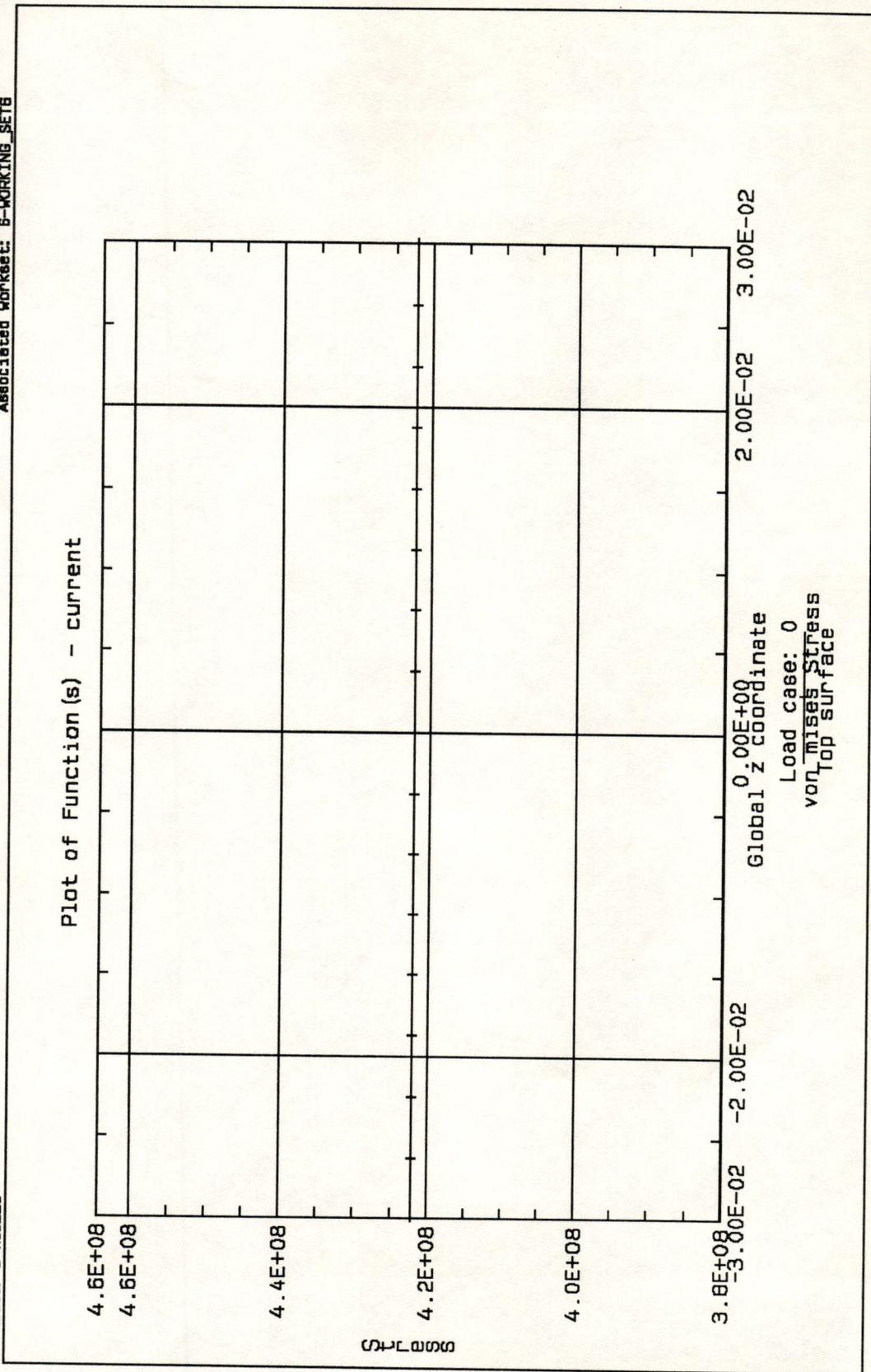


FIGURA 4.11 - Tensão ao longo do eixo: comprimentos do eixo e cubo iguais.

Database: sixa-cubo  
 View : No stored View  
 Task: Post Processing  
 Model: 5-MODELS

Units : SI  
 Display : No stored Option  
 Model Bin: 1-MAIN  
 Associated Workset: 5-WORKING\_SETS

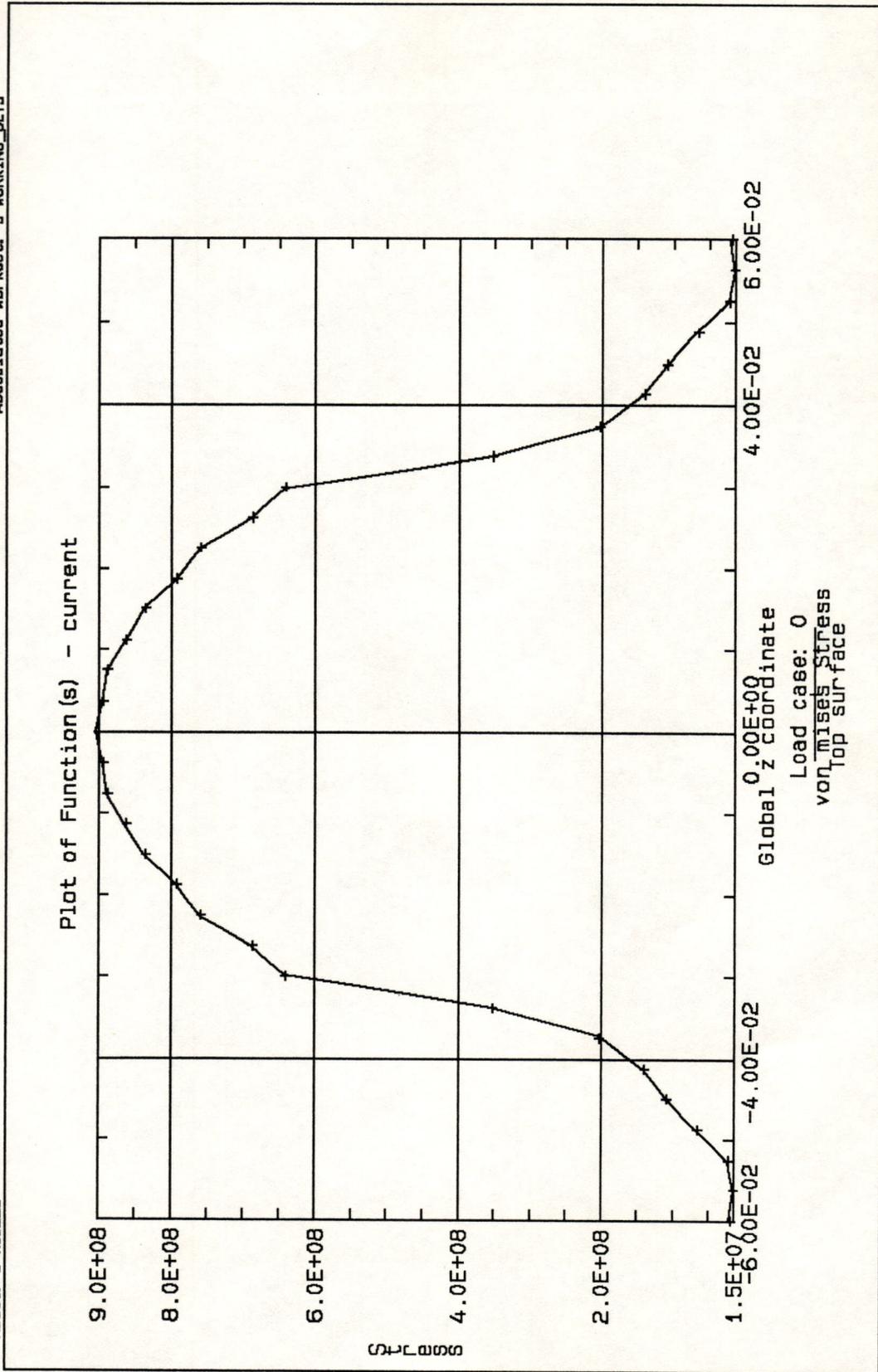


FIGURA 4.12 - Tensão ao longo do eixo: comprimentos do eixo e cubo diferentes.

Assim, para os casos onde o comprimento do eixo é maior do que o do cubo, é necessário saber qual o valor da tensão máxima que atua no eixo. Esta tensão máxima pode ser obtida através da aplicação do Coeficiente de Concentração de Tensão:

$$\sigma_{\max} = K_t \cdot \sigma_{\text{nom}} \quad (4.8)$$

onde:

$\sigma_{\max}$  = tensão máxima que ocorre no eixo, quando o comprimento deste é maior do que o do cubo.

$K_t$  = Coeficiente de Concentração de Tensão.

$\sigma_{\text{nom}}$  = tensão obtida das equações básicas, quando os comprimentos do eixo e do cubo são iguais, e com os mesmos valores dos diâmetros utilizados no caso de comprimento diferentes.

O grande problema aqui é a obtenção de valores precisos de  $K_t$  para casos de união forçada eixo-cubo, já que a literatura não traz valores a este respeito. Por este motivo desenvolveu-se um estudo deste caso a fim de obter-se e deixar disponível valores para  $K_t$ , bem como quais variáveis influenciam no comportamento do Coeficiente de Concentração de Tensão.

### 4.2.3 Estudo prático

Para este caso, eixo com comprimento maior que o do cubo, o Coeficiente de Concentração de Tensão foi obtido pela relação entre a tensão máxima que ocorre no eixo com comprimento maior do que o do cubo e a tensão que ocorre no eixo com comprimento igual ao do cubo. Utilizou-se do Método dos Elementos Finitos como ferramenta para a obtenção destes valores de tensão.

A figura 4.13 mostra a geometria bem como a nomenclatura utilizada para este estudo.

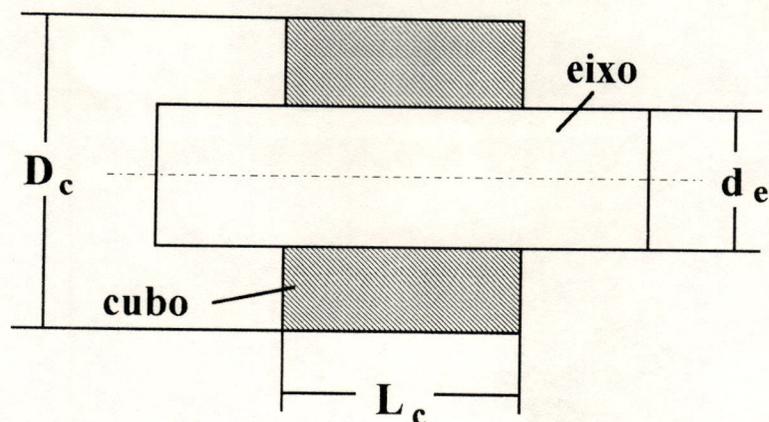


FIGURA 4.13 - Geometria da união eixo-cubo.

A figura 4.14 mostra um exemplo de modelo de elementos finitos utilizado para este estudo.



FIGURA 4.14 - Modelo de elementos finitos para união eixo cubo.

Utilizou-se de elementos quadriláteros parabólicos do tipo axissimétrico sólido para a construção do modelo, e para calcular o Coeficiente de Concentração de Tensão utilizou-se dos valores de tensão Von Mises.

Simulou-se o ajuste forçado através do deslocamento prescrito dos nós do cubo e do eixo que se encontram na interface da união. Esta interdependência deu-se através da seguinte equação:

$$x_c - x_e = \delta \quad (4.9)$$

onde:

$x_c$  = deslocamento do nó do cubo na direção radial.

$x_e$  = deslocamento do nó do eixo na direção radial.

$\delta$  = interferência utilizada.

Para este estudo utilizou-se de uma interferência de  $\delta = 0.2\text{mm}$ .

Um primeiro estudo revelou que o refinamento da malha do modelo utilizado não era necessário, já que com a densidade utilizada (vide figura 4.14) os resultados convergiam.

Outro estudo revelou que, para valores constantes de  $L_c$ ,  $d_e$  e  $D_c$ , a variação do comprimento do eixo (sempre maior que  $L_c$ ) não altera o valor de  $\sigma_{\text{max}}$  que ocorre no eixo e conseqüentemente o valor de  $K_t$ .

Notou-se também que o valor de  $K_t$  obtido não é função do valor da interferência utilizada.

Deste modo, as dimensões foram normalizadas com relação ao diâmetro do eixo ( $d_e$ ) e utilizou-se das relações  $L_c/d_e$  e  $D_c/d_e$  para o estudo em questão. Foram fixados alguns valores de  $L_c/d_e$ , e para cada valor desta relação variou-se o valor de  $D_c/d_e$  para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão.

Alguns valores obtidos encontram-se listados nas tabelas 4.6, 4.7 e 4.8.

TABELA 4.6 - Valores de  $K_t$  para a relação  $L_c/d_e = 0,5$ .

$D_c/d_e$	$\sigma_{\text{max}}$ (MPa)	$\sigma_{\text{nom}}$ (MPa)	$K_t$
2	546,09	355,84	1,535
2,5	617,43	398,37	1,550
3	655,66	421,57	1,555
3,5	678,81	435,57	1,558

TABELA 4.7 - Valores de  $K_t$  para a relação  $L_c/d_e = 1$ .

$D_c/d_e$	$\sigma_{\text{max}}$ (MPa)	$\sigma_{\text{nom}}$ (MPa)	$K_t$
2	707,42	355,84	1,988
2,5	789,85	398,37	1,983
3	831,21	421,57	1,972
3,5	865,42	435,57	1,987

TABELA 4.8 - Valores de  $K_t$  para a relação  $L_c/d_e = 1,5$ .

$D_c/d_e$	$\sigma_{\max}$ (MPa)	$\sigma_{\text{nom}}$ (MPa)	$K_t$
2	762,26	355,84	2,142
2,5	848,10	398,37	2,129
3	899,76	421,57	2,134
3,5	930,66	435,57	2,137

De acordo com os valores listados nas tabelas 4.6, 4.7 e 4.8 pode-se notar que a variação da relação  $D_c/d_e$  não influi, para cada caso de  $L_c/d_e$ , no valor de  $K_t$ . O aumento no diâmetro externo do cubo acarreta um aumento tanto de  $\sigma_{\max}$  como de  $\sigma_{\text{nom}}$ , mas não afeta a relação entre estes valores, que dá justamente o valor de  $K_t$ .

Assim de acordo com os resultados e conclusões obtidas a respeito deste problema, pode-se propor um ábaco que dá valores de  $K_t$  para o caso de união forçada eixo-cubo, conforme a figura 4.15. Este ábaco dá valores de  $K_t$  em função da relação  $L_c/d_e$ . Isto foi feito devido às conclusões que foram obtidas de que somente esta relação influi no comportamento do coeficiente de concentração de tensão.

Com relação ao ábaco obtido, nota-se que para  $L_c/d_e > 2$  a curva tende a ficar constante, o que pode significar que para valores acima de 2 a influência no coeficiente de concentração de tensão tende a minimizar. Nota-se também que na faixa  $0,25 < L_c/d_e < 1$ , a influência desta relação é bastante acentuada.

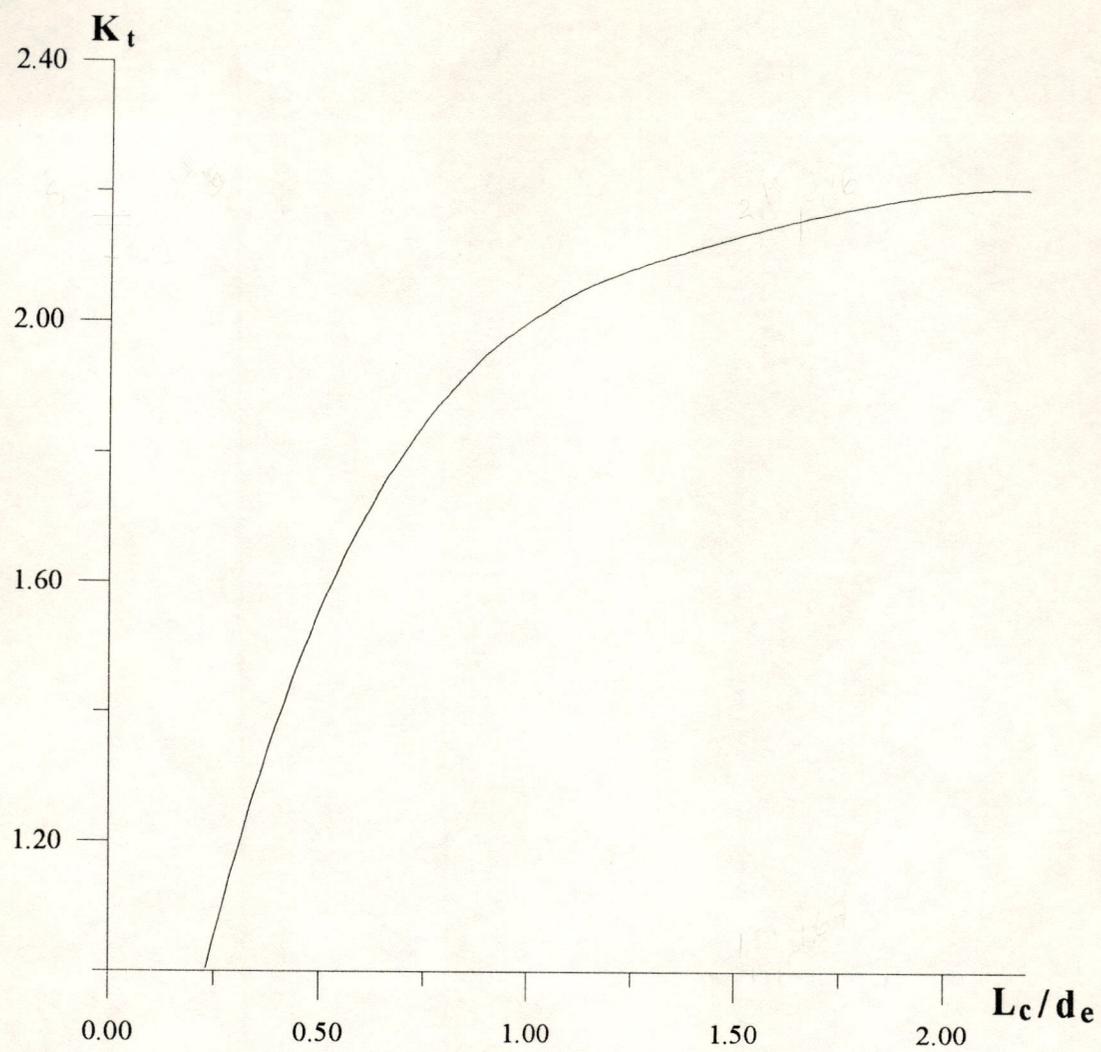


FIGURA 4.15 - Ábaco proposto para o caso de união eixo-cubo.

# CAPÍTULO 5

## SISTEMA PARA GERAÇÃO DE ÁBACOS

### 5.1 Características do sistema

O sistema foi desenvolvido através da linguagem "C", e atualmente pode ser executado em microcomputadores do tipo IBM-PC com sistema operacional DOS.

Este sistema utiliza, para trabalhar, os arquivos com os valores de tensão gerado pelo programa de elementos finitos CAEDS, arquivos estes que tem a terminação ".dat".

Desta forma, no início, o sistema oferece um menu com as seguintes opções:

- 1 - Abrir arquivos
- 2 - Tabelas existentes na memória
- 3 - arquivos existentes na memória
- 4 - Tabelas armazenadas em arquivos
- 5 - Remover arquivos com tabelas
- 6 - Geração dos ábacos
- 7 - Fim.

Na opção 1 é que se fornece os arquivos obtidos no CAEDS para que o sistema possa calcular o valor de  $K_t$ , através do método proposto, e também possa gerar ábacos através destes valores. Uma vez fornecidos os arquivos ao sistema, este determina o valor de  $K_t$  para cada caso e armazena estes valores, bem como os valores das variáveis de cada caso (para o caso de placa com entalhe, armazena os valores de  $D/d$  e  $r/d$ , conforme a figura 3.18) em tabelas distintas, reconhecendo cada

arquivo através do início do seu nome. Estas tabelas por sua vez são armazenadas em arquivos e ficam disponíveis na memória do computador. Por exemplo, se tivermos os arquivos:

- placa-furo1.dat
- placa-furo2.dat
- placa-ent3.dat

Os dados dos arquivos placa-furo1.dat e placa-furo2.dat serão armazenados em uma tabela que irá servir para gerar o ábaco para o caso de placa com furo. Já os dados do arquivo placa-ent3.dat irão para outra tabela, a tabela que será utilizada para gerar o ábaco para o caso de placa com entalhe.

A opção 2 mostra as tabelas geradas de acordo com os arquivos abertos em uma seção. Ao sair do sistema estas tabelas são apagadas.

A opção 3 mostra uma listagem dos arquivos abertos em uma seção. Assim como na opção 2 estas listagens são apagadas ao sair-se do sistema.

Na opção 4 pode-se verificar quais tabelas existem em arquivos, e são com estas tabelas/arquivos que serão gerados os ábacos. Se para uma tabela já existente, por exemplo para o caso de placa com furo, for fornecido mais um arquivo, o sistema verificará se os dados oriundos deste arquivo já foram armazenados. Caso já tenha sido fornecido, o sistema simplesmente desprezará estes dados, caso contrário estes serão incorporados à tabela já existente.

Nestas tabelas já estão as informações de quantas curvas será composto um ábaco, bem como quais são as variáveis do problema e do ábaco. Por exemplo, para o caso de placa com furo o sistema reconhece que o ábaco é composto de apenas uma curva (vide figura 3.11) e que a variável do problema/ábaco é a relação  $d/L$ . Já para o caso de placa com variação de seção, em específico o caso estudado anteriormente, o sistema reconhece que o ábaco é composto de quatro curvas (vide figura 3.15) e que as variáveis do problema/ábaco são as relações  $D/d$  e  $r/d$ , isto é, será traçada uma curva para cada relação  $D/d$ , sendo que os pontos para cada curva serão dados pela relação  $r/d$  com seu respectivo valor de  $K_t$ .

Este "reconhecimento" do sistema é possível graças às informações contidas nos arquivos, que são previamente armazenadas nos arquivos ".dat". Isto é feito quando o arquivo é gerado no programa CAEDS.

A opção 5 serve para apagar algum arquivo que contenha uma tabela para determinado caso.

Na opção 6 é que pode-se visualizar os ábacos gerados com os arquivos fornecidos ao sistema. Nesta opção pode-se escolher o ábaco de cada tabela armazenada bem como as escalas dos eixos para melhor visualização. Para traçar-se as curvas dos ábacos a partir dos pontos obtidos, utilizou-se do método dos mínimos quadrados para se conseguir a interpolação destes pontos. Está sendo implementada uma função para imprimir o ábaco gerado.

A opção 7 é utilizada para sair do sistema.

## **5.2 Exemplos de aplicação do sistema**

A fim de utilizar o sistema desenvolvido para a geração automática de ábacos, foram gerados alguns ábacos para os casos estudados anteriormente. Para isto utilizou-se dos arquivos criados para estes estudos.

De acordo com os resultados/ábacos obtidos pode-se notar uma boa concordância entre os ábacos gerados automaticamente e aqueles previamente gerados (vide seção 3).

Deste modo, percebe-se a comodidade da utilização deste sistema no estudo do Coeficiente de Concentração de Tensão, já que uma vez realizadas as análises através do Método dos Elementos Finitos e gerados os arquivos ".dat", é só fornecer estes arquivos ao sistema que ele já determina os valores de  $K_t$  (através do método proposto) e traça o ábaco para o caso em estudo.

# CAPÍTULO 6

## CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 6.1 Conclusões

No início deste trabalho a idéia era estudar a concentração de tensão através do Método dos Elementos Finitos. Pensou-se em utilizar-se da relação entre a tensão máxima e a tensão nominal para calcular o Coeficiente de Concentração de Tensão, sendo que o trabalho seria apenas obter o valor da tensão máxima através do MEF. Mas isto não daria nenhum tipo de contribuição, e então partiu-se para outra metodologia. A outra idéia era substituir a tensão nominal por uma tensão média que ocorresse na região da descontinuidade geométrica.

A princípio, no cálculo da tensão média foram tomados os valores de tensão dos nós que estavam na região de gradiente de tensão, mas verificou-se que este procedimento não era confiável, já que o valor da tensão média era muito sensível ao número de nós utilizados para este cálculo.

Deste modo optou-se por calcular a tensão média como sendo a média das tensões dos nós que estão sobre uma linha na direção do maior gradiente de tensão e que passa pelo ponto de tensão máxima.

Com esta metodologia pode-se dizer que os resultados obtidos são confiáveis já que, para o caso de tração, as tensões que ocorrem em uma seção transversal "tendem a igualar" o esforço aplicado, o que ocorre justamente com a tensão nominal. Desta forma pode-se dizer que a tensão média é uma estimativa da tensão nominal, e diga-se de passagem, uma estimativa confiável.

Com relação aos resultados obtidos, tanto para os estudos de validação do método quanto para os estudos de aplicação, pôde-se observar que estes estão em

muito boa concordância com os já publicados. Notou-se que na grande maioria dos casos o erro/diferença entre os valores ficou abaixo dos 2% e que o maior erro encontrado foi de 5,1%, devido à densidade da malha na região de descontinuidade geométrica. Diante destes resultados pode-se afirmar com certeza que o método proposto é válido para o cálculo do Coeficiente de Concentração de Tensão para casos onde a sollicitação seja tração.

O estudo de união forçada eixo-cubo revelou quais variáveis devem ser levadas em conta na determinação do Coeficiente de Concentração de Tensão para este tipo de problema. Uma outra contribuição deste estudo foi a apresentação de valores concretos de  $K_t$ , bem como um ábaco deste valor para o caso de união forçada eixo-cubo. Também é válido citar que não é fácil encontrar na literatura trabalhos que relatem o valor de  $K_t$  para este tipo de problema.

O sistema para geração de ábacos foi desenvolvido a fim de facilitar a obtenção de ábacos de problemas estudados através do método proposto. Este sistema permite também a obtenção apenas dos valores do Coeficiente de Concentração de Tensão sem que seja necessário a geração de ábacos, facilitando assim a aplicação do método proposto.

## 6.2 Sugestões p/ trabalhos futuros

Uma primeira sugestão para trabalhos futuros é um estudo da aplicação do método proposto para casos onde a sollicitação seja de flexão e também de torção.

Neste estudo deve-se verificar a validade ou não da metodologia de substituir-se  $\sigma_{nom}$  por  $\sigma_{med}$  nestas condições de sollicitação, e caso comprove-se a não validação deve-se propor uma adequação deste método para estes casos.

Outra sugestão seria tornar o método proposto aplicável à outros programas de análise por elementos finitos, principalmente para microcomputadores. Para isto seria necessário um estudo de como conseguir os arquivos com os valores de tensão necessários ao método, de outros programas.

Uma outra sugestão seria a de transportar o sistema desenvolvido para a geração automática ábacos, que atualmente roda em sistema operacional DOS, para o ambiente UNIX (estações de Trabalho), onde roda o programa utilizado CAEDS. Isto facilitaria o fornecimento dos arquivos ".dat".

Finalmente, um estudo de geração de malha adaptativa, isto é, um refinamento automático da malha na região de descontinuidade geométrica seria interessante, já que a densidade da malha nesta região tem influência sobre os resultados obtidos.

## BIBLIOGRAFIA

- AGOSTINHO, O.L.; RODRIGUES, A.C.S.; LIRANI, J. *Tolerâncias, ajustes, desvios e análise de dimensões*. São Paulo, Edgard Blücher, 1981.
- ALMEIDA, F.J. *Projeto e implementação de pré/pós processador gráfico para exibir tensões calculadas pelo método dos elementos finitos*. São Carlos, Março 1992. 251p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- AL-RUBEYE, H.S. Stress concentration in machine components with complex shape. *Exp Mech*, v.24, n.4, p.308-315, Dec 1984.
- ARABSHAHI, S.; BARTON, D.C.; SHAW, N.K. Steps towards CAD-FEA integration. *Engineering with computers*, v.9, p.17-26, 1993.
- BARÇA, W.A.M.; MASSAROPPI Jr., E.; LIRANI, J. Proposta de um método para cálculo do coeficiente de concentração de tensão: Um caso de aplicação à tubulações industriais. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO SOBRE TUBULAÇÕES E VASOS DE PRESSÃO, VIII; SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO SOBRE TUBULAÇÕES E VASOS DE PRESSÃO, II. Gramado, R.S., Set. 1994. *Anais*.
- BELL, R.; PAGOTTO, I.A.; KIRKHOPE, J. Evaluation of stress intensity factors for corner cracked turbine discs under arbitrary loading using finite element methods. *Engineering Fracture Mechanics*, v.32, n.1, p.65-79, 1989.
- BHUYAN, G.S. Fatigue life prediction of offshore tubular joints using a linear elastic fracture mechanics approach. *Int J Fatigue*, v.10, n.1, p.117-120, april 1988.
- CHAUDHURI, R.A. Stress Concentration Around a part-through hole weakening a laminated plate. *Computers and Structures*, v.27, n.5, p.601-609, 1987.
- CHEN, H.C. Special finite elements including stress concentration effects of a hole. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.13, p.249-258, 1993.
- CLOUGH, R.W. Structural analysis by means of a matrix algebra program. In: A.S.C.E. CONF. ON ELECTRONIC COMPUTATION, Kansas City, 1958. *Proceedings*. p.109-132.
- CLOUGH, R.W. The finite element method in plane stress analysis. In: A.S.C.E. CONF. ON ELECTRONIC COMPUTATION, 2nd., Pittsburg, Pa., Sept. 1960. *Proceedings*.

- CLOUGH, R.W.; WILSON, E.L. Stress analysis of a gravity dam by the finite element method. In: SYMPOSIUM ON THE USE OF CIVIL ENGINEERING, Laboratorio de Engenharia Civil, Lisboa, Portugal, 1962. *Proceedings*.
- CLOUGH, R.W. The finite element method in structural mechanics. In: ZIENKIEWICZ, O.C.; HOLISTER, G.S. *Stress Analysis*. John Wiley and Sons, Ltd., 1965. Cap.7, p.85-87.
- CLOUGH, R.W. Original formulation of the finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.7, p.89-101, 1990.
- CONNOLLY, M.P.; HELLIER, A.K.; DOVER, W.D.; SUTOMO, J. A parametric study of the ratio of bending to membrane stress in tubular Y - and T - joints. *Int J Fatigue*, v.12, p.3-11, 1990.
- COURANT, R. Variational methods for the solution of equilibrium and vibrations. *Bulletin of American Mathematic Society*, v.43, p.1-23, 1943.
- DE LIMA Jr., J.J.; SCHWARZ, V.A.; DIAS, J.C. Comportamento das tensões de montagem e de solicitação em uma montagem eixo-cubo com interferência. In: Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, XI, São Paulo, 1991. *Anais*. p.655-658.
- DHILLON, S.S.; THOMPSON, J.C.; NEGUS, K.J. A simplified method for predicting the stress concentration in notches from experimental stress data. *Strain*, p.95-98, August 1988.
- DIJKSTRA, O.D.; PUTHLI, R.S.; SNIJDER, H.H. Stress concentration factors in T and K-T tubular joints using finite element analysis. *Journal of Energy Resources Technology Trans ASME*, v.110, n.4, p.246-254, 1988.
- DIMAROGONAS, A.D. *Computer aided machine design*. Cambridge, Cambridge University Press, 1989.
- DODDS, R.H.; READ, D.T. Stress intensity factors for cracks in panels with uniformly spaced holes. *Engineering Fracture Mechanics*, v.26, n.2, p.267-277, 1987.
- DYBBRO, J.D.; HOLM, N.C. On minimization of stress concentration for three-dimensional models. *Computers and Structures*, v.24, n.4, p.637-643, 1986.
- ETEMAD, M.R. Estimates of regions of stress concentrations in 'T' butt weld geometries. *Journal of Strain Analysis*, v.26, n.2, p.77-83, 1991.

- EVANS, R.A.; HARDY, S.J.; HYDE, T.H. Stress concentration factors due to axial loading of axisymmetric external projections on hollow tubes. *Journal of Strain Analysis*, v.22, n.1, p.1-6, 1987.
- FALKENHEIMER. Systematic calculation of the elastic characteristics of hyperstatic systems. *La Recherche Aeronautique*, v.23, Sept-Oct. 1951.
- GALLAGHER, R.H. Thirty years of finite element analysis - Are there issues yet to be resolved?. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.6, p.1-8, 1989.
- GOOYER, L.E.; OVERBEEKE, J.L. The stress distributions in shouldered shafts under axisymmetric loading. *Journal of Strain Analysis*, v.26, n.3, p.181-184, 1991.
- GROOVER, M.P.; ZIMMERS, Jr E.W. *CAD/CAM computer-aided design and manufacturing*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc, 1984.
- HARDY, S.J.; GOWHARI-ANARAKI, A.R. Stress concentration factors and elastic-plastic stress and strain predictions for axisymmetric internal projections on hollow tubes subjected to axial loading. *Journal of Strain Analysis*, v.24, n.1, p.45-54, 1989.
- HARDY, S.J.; MALIK, N.H. A survey of post-Peterson stress concentration factor data. *Int J Fatigue*, v.14, n.3, p.147-153, 1992.
- HASEBE, N.; SUGIMOTO, T.; NAKAMURA, T. Stress analysis of a blunted notch in a clamped edge. *ASCE J Eng Mech*, v.112, p.142-144, 1986a.
- HASEBE, N.; SUGIMOTO, T.; NAKAMURA, T. Stress concentration in clamped edge of thin plate. *ASCE J Eng Mech*, v.112, p.642-649, 1986b.
- HASEBE, N.; SUGIMOTO, T.; NAKAMURA, T. Stress concentration of a longitudinal shear problems. *ASCE J Eng Mech*, v.113, p.1358-1367, 1987.
- HELLIER, A.K.; CONNOLLY, M.P.; DOVER, W.D. Stress concentration factors for tubular Y - and T - joints. *Int J Fatigue*, v.12, p.13-23, 1990a.
- HELLIER, A.K.; CONNOLLY, M.P.; KARE, R.F.; DOVER, W.D. Prediction of the stress distribution in tubular Y - and T - joints. *Int J Fatigue*, v.12, p.25-33, 1990b.
- HUANG, X.; HANCOCK, J.W. The stress intensity factors of semi-elliptical cracks in a tubular welded T-joint under axial loading. *Engineering Fracture Mechanics*, v.30, n.1, p.25-35, 1988.

- IBRAHIM, R.N.; STARK, H.I. Validity requirements for fracture toughness measurements obtained from small circumferentially notched cylindrical specimens. *Engineering Fracture Mechanics*, v.28, n.4, p.455-460, 1987.
- IIDA, J.; HASEBE, N.; NAKAMURA, T. Intensity of corner in fixed edge of thin plate. *ASCE J Eng Mech*, v.113, p.1138-1146, 1987.
- IYENGAR, K.T.S.R.; RAGHUPRASAD, B.K.; ANANTHANS, H. Effect of interaction of macrocracks on the stress intensity factor in a beam. *Engineering Fracture Mechanics*, v.32, n.3, p.379-386, 1989.
- KASEMI, A.D.A.; MURTHY, N.S.; RAJU, N.G. Stress intensity factor determination of radially cracked circular rings subjected to tension using photoelastic technique. *Engineering Fracture Mechanics*, v.32, n.3, p.403-408, 1989.
- KATO, A.; MIZUNO, T. Stress concentration factors of grooved shafts in torsion. *Journal of Strain Analysis*, v.20, n.3, p.173-177, 1985.
- KATO, A. Stress Measurement by Copper Electroplating aided by a personal computer. *Exp Mech*, p.132-137, June 1987.
- KATO, A. Design equation for stress concentration factors of notched strips and grooved shafts. *Journal of Strain Analysis*, v.26, n.0, p.21-28, 1991.
- KITTUR, M.G.; HUSTON, R.L. Finite element mesh refinement criteria for stress analysis. *Computers and Structures*, v.34, n.2, p.251-255, 1990.
- KOKO, T.S.; OLSON, M.D. Non-linear analysis of stiffened plates using super elements. *Int J of Numerical Methods in Engineering*, v.31, n.2, p.319-343, 1991.
- KOSMATKA, J.B.; FRIES, R.H.; REINHOLTZ, C.F. Tension and bending stress concentration factors in 'U', 'V', and opposed 'U'-'V' notches. *Journal of Strain Analysis*, v.25, n.4, p.233-240, 1990.
- LAI, J.; ZHANG, X.; SCHIJVE, J. An investigation of a hole-edge crack problem by a combined complex variable and least square method. *Engineering Fracture Mechanics*, v.39, n.4, p.713-737, 1991.
- LANGFORS, B. Analysis of elastic structures by matrix transformation, with special regard to semi-monocoque structures. *J. Aeronaut. Sci.*, v.19, n.7, 1952.
- LING, C.B. On stress concentration factor in a notched strip. *Journal of Applied Mechanics Trans ASME*, v.35, p.833-835, 1968.

- LIRANI, J. *Determinação da estabilidade teórica contra trepidação de máquinas ferramentas com auxílio de computador*. São Carlos, Março 1985a. 219p. Tese (Livre Docência) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- LIRANI, J. *Introdução ao método dos elementos finitos*. São Carlos, FIPAI, 1985b.
- LIVESLEY, R.K. *Finite elements: An introduction for engineers*. Cambridge, Cambridge University Press, 1983.
- LUKÁS, P. Technical note: stress intensity factor for small notch-emanated cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, v.26, n.3, p.471-473, 1987.
- MEGUID, S.A. Finite element analysis of defence hole systems for the reduction of stress concentration in a uniaxially-loaded plate with two coaxial holes. *Engineering Fracture Mechanics*, v.25, n.4, p.403-413, 1986.
- MENTRASTI, L. Torsional stress concentration in thin-walled beams. *ASCE J Eng Mech*, v.115, p.1882-1891, 1989.
- NAKAJIMA, N.; TOKUMASU, S.; KUNITOMO, Y. Feature-based heuristics for finite element meshing using quadtrees and octrees. *Computer-Aided Design*, v.24, n.12, 1992.
- NAMESTNIKOV, V.S. On stress concentrations in strengthened elements. *Soviet Engineering Research*, v.10, n.2, p.8-10, 1990.
- NEUBER, H. *Theory of notch stress*. 1961. (AEC - Tr 4547).
- NEUBER, H.; HAHN, H.G. Stress concentration in scientific research and engineering. *Applied Mechanics Reviews*, v.19, n.3, p.187-199, 1966.
- NG, C.K.; FENNER, D.N. Stress intensity factors for an edge cracked circular bar in tension and bending. *Int J Fracture*, v.36, p.291-303, 1988.
- NIEMAMM, G. *Elementos de máquinas*. Trad. de Carlos Van Langendonck & Otto Alfred Rehder. São Paulo, Edgard Blücher Ltda, 1971.
- NISITANI, H. Method of approximate calculation for interference of notch effects and its application. *Bulletin of JSME*, v.11, n.7, p.725-738, 1968.
- NISITANI, H.; NOGUCHI, H.; UCHIHORI, H.; NAKAE, H. An examination of the notch effect in fatigue of carbon steels based on linear notch mechanics. *JSME International Journal Series 1*, v.32, n.3, p.439-443, 1989.

- NOOR, A.K. Bibliography of books and monographs on finite element technology. *Appl Mech Rev*, v.44, n.6, June 1991.
- NORRIE, D.H.; DE VRIES, G. *An introduction to finite element analysis*. New York, Academic Press, 1978.
- ORLOV, P. *Ingenieria de diseño*. Moscou, Mir, 1974.
- PETERSON, R.E. *Stress concentration design factors*. 2 ed. New York, Wiley, 1974.
- RAO, S.S. *The finite element method in engineering*. Oxford, Pergamon Press, 1989.
- ROBERTS, T.M. Shear and normal stresses in adhesive joints. *ASCE J Eng Mech*, v.115, p.2460-2471, 1989.
- RUBAYI, N.A.; NANA, A.D. Photoelastic stress analysis of an alliptical hole in a thick plate subjected to uniform in-plane compressive loading. *Exp Mech*, v.25, p.105-114, 1985.
- RUDD, B.W. Impacting the design process using solid modelling and automated finite element mesh generation. *Computer-Aided Design*, v.20, n.4, 1988.
- SATO, T.; SANO, S.; ISHIKAWA, K.; NAKANO, T. Finite element analysis and fatigue evaluation of the threaded marine riser connector. *Journal of Energy Resources Technology Trans ASME*, v.110, n.2, p.85-92, 1988.
- SCHIJVE, J. A brief note on the estimation of stress concentration factors of edge notches. *Int J Fatigue*, v.8, n.2, p.95-97, April 1986.
- SHIGLEY, J.E. *Mechanical engineering design*. Singapore, McGraw-Hill Inc, 1986.
- SHIN, C.S.; SMITH, R.A. Fatigue crack growth from sharp notches. *Int J Fatigue*, v.7, n.2, p.87-93, 1985.
- SHIN, C.S. A discussion on various estimations of elastic stress distributions and stress concentration factors for sharp edge notches. *Int J Fatigue*, v.8, n.4, p.235-237, October 1986.
- SHIN, C.S. The stress intensity of corner cracks emanating from holes. *Engineering Fracture Mechanics*, v.37, n.2, p.423-436, 1990.
- SINCLAIR, G. Structural reliability through fracture mechanics. *Mechanical Engineering*, p.79-84, June 1993.

- SLOT, T.; MOWBRAY, D.F. A note on stress concentration factors for symmetric U-shaped notches in tension strips. *Journal of Applied Mechanics Trans ASME*, v.91, p.882-884, 1969.
- SOH, A.K.; SOH, C.K. Stress concentration in T/Y and Square-to-Square and Square-to-Round tubular joints. *J Offshore Mech Artic Eng Trans ASME*, v.114, p.220-230, 1992.
- SULLIVAN, J.L. Guarding against fatigue failure in press-fitted shafts. *Machine Design*, v.9, p.102-106, June 1977.
- SUNDARAVADIVELU, R.; HARIHARAN, M.; GANAPATHY, C. Formulas for variation of stress concentration around intersection in tubular joints. *Journal of Energy Resources Technology Trans ASME*, v.110, n.4, p.237-245, 1988.
- TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. *Theory of elasticity*. Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha Ltda, 1970.
- TURNER, M.; CLOUGH, R.W.; MARTIN, H.C.; TOPP, L.J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeronaut. Sci.*, v.23, n.9, p.805-823, Sept. 1956.
- UMEDA, H.; SAKANE, M.; OHNAMI, M. Comparison of local strain at the notch root between FEM analysis and experimental strain measurement under creep-fatigue conditions. *JSME International Journal*, v.30, n.8, p.1543-1550, 1987.
- UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Escola de Engenharia de São Carlos (1993). *Diretrizes para elaboração de dissertações e teses na EESC-USP*. São Carlos.
- UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" (1987). *Normas para elaboração de dissertações e teses*. Piracicaba.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; CHEUNG, Y.K. Finite element method in the solution of field problems. *The Engineer*, p.507-510, September 1965.
- ZIENKIEWICZ, O.C. *The finite element method*. London, McGraw-Hill Book Co., 1977.
- ZWERNEMAN, F.J.; FRANK, K.H. Stress intensity factor for a tee-shaped weldment. *Engineering Fracture Mechanics*, v.32, n.4, p.561-572, 1989.
- WANG, B.; DUAN, Z. The strength distribution of brittle materials with a high concentration of cavities. *Engineering Fracture Mechanics*, v.43, n.1, p.25-31, 1992.

- WEIXING, Y.; XINLU, Y. Stress concentration factor for an orthotropic finite-width plate containing elliptical edge notches. *Composites Sci Technol*, v.41, p.47-53, 1991.
- WILSON, E.L. Automation of the finite element method - A personal historical view. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.13, p.91-104, 1993.
- YOUNG, W.C. *Roark's formulas for stress and strain*. 6ed., New York, McGraw-Hill, 1989.
- YU, M.T.; DUQUESNAY, D.L.; TOPPER, T.H. Notch fatigue behaviour of SAE1045 steel. *Int J Fatigue*, v.10, n.2, p.109-116, 1988.

### Anexo A: Procedimento utilizado pelo Método dos Elementos Finitos para determinação de tensões.

Como dito anteriormente, pode-se utilizar o Método dos Elementos Finitos para a análise estrutural, por exemplo, para a determinação de deformações e tensões atuantes em estruturas. O procedimento de cálculo do Método dos Elementos Finitos para a determinação das deformações e tensões em estruturas, utilizando de princípios variacionais é de fácil entendimento, utilizando um equacionamento bastante conhecido, baseado na Teoria da Elasticidade. Devido a grande importância do método no desenvolvimento do trabalho atual, cabe aqui uma explicação deste procedimento.

Partiremos do pressuposto que já se conhecem os deslocamentos nodais. Estes deslocamentos nodais são obtidos através da inversão da matriz de rigidez do modelo, utilizando-se das condições de contorno, e considerando-se as solicitações estáticas aplicadas sobre o mesmo.

O primeiro passo para se determinar as tensões internas aos elementos é transferir-se os deslocamentos nodais para um ponto interno qualquer do elemento. Para isso, utilizaremos as funções de deslocamento:

$$\{u\} = [N] \{u\}_n \quad (A.1)$$

onde:

$\{u\}$  = vetor deslocamento interno ao elemento

$[N]$  = matriz de deslocamento

$\{u\}_n$  = vetor dos deslocamentos nodais

Para melhor entendimento, faremos o desenvolvimento para um triângulo linear a tensão plana. Consideremos o triângulo da figura A.1, com o respectivo sistema de coordenadas.

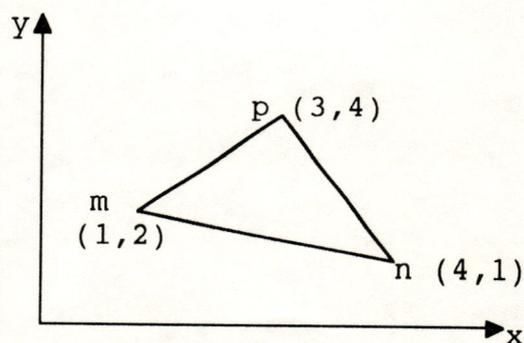


FIGURA A.1 - Exemplo de elemento para cálculo das tensões

As funções de deslocamento para esse elemento são do tipo:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (\text{A.2})$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

Determinam-se os coeficientes  $\alpha_i$  utilizando-se seguidamente das condições de contorno:

$$u = u_i \quad e \quad v = v_i$$

Assim podemos escrever, para a coordenada  $u$ :

$$\begin{aligned} u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 1 + \alpha_3 2 & (x = x_m, y = y_m) \\ u_n &= \alpha_1 + \alpha_2 4 + \alpha_3 1 & (x = x_n, y = y_n) \\ u_p &= \alpha_1 + \alpha_2 3 + \alpha_3 4 & (x = x_p, y = y_p) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Resolvendo este sistema de equações:

a) cálculo do determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (1 \cdot 4 \cdot 4) + (1 \cdot 1 \cdot 1) + (2 \cdot 1 \cdot 3) - (2 \cdot 4 \cdot 1) - (1 \cdot 1 \cdot 4) - (1 \cdot 1 \cdot 3) \Rightarrow \Delta = 8$$

b) cálculo de cada  $\alpha_i$  (substitui-se a coluna respectiva ao  $\alpha_i$  pelo vetor  $\{u\}$  e divide-se pelo determinante):

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\begin{vmatrix} u_m & 1 & 2 \\ u_n & 4 & 1 \\ u_p & 3 & 4 \end{vmatrix}}{8} \\ \alpha_1 &= \frac{(u_m \cdot 4 \cdot 4) + (1 \cdot 1 \cdot u_p) + (2 \cdot u_n \cdot 3) - (2 \cdot 4 \cdot u_p) - (1 \cdot u_n \cdot 4) - (u_m \cdot 1 \cdot 3)}{8} \\ \alpha_1 &= (1/8) \cdot (16u_m + 1u_p + 6u_n - 8u_p - 4u_n - 3u_m) = \\ \alpha_1 &= (1/8) \cdot (13u_m + 2u_n - 7u_p) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Com o mesmo procedimento, obtém-se as relações para  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ :

$$\alpha_2 = (1/8) \cdot (-3u_n + 2u_n + 1u_p) \quad (\text{A.5})$$

$$\alpha_3 = (1/8) \cdot (-1u_m - 2u_n + 3u_p) \quad (\text{A.6})$$

Substituindo-se os valores dos  $\alpha_i$  (equações [A.4] a [A.6]) na função deslocamento dada pela equação [A.2], tem-se:

$$u = \frac{(13u_m + 2u_n - 7u_p) + (-3u_m + 2u_n + 1u_p) \cdot x + (-1u_m - 2u_n + 3u_p) \cdot y}{8}$$

Rearranjando a equação, em função de  $u_m$ ,  $u_n$  e  $u_p$ , temos:

$$u(x,y) = \frac{(13-3x-1y)*u_m + (2+2x-2y)*u_n + (-7+1x+3y)*u_p}{8} \quad (\text{A.7})$$

De forma análoga, obtém-se  $v(x,y)$ :

$$v(x,y) = \frac{(13-3x-1y)*v_m + (2+2x-2y)*v_n + (-7+1x+3y)*v_p}{8} \quad (\text{A.8})$$

Chamando:

$$N_m = (1/8)*[(13-3x-1y)]$$

$$N_n = (1/8)*[(2+2x-2y)]$$

$$N_p = (1/8)*[(-7+1x+3y)]$$

(A.9)

e colocando-se em forma matricial, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_m & 0 & N_n & 0 & N_p & 0 \\ 0 & N_m & 0 & N_n & 0 & N_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \\ u_n \\ v_n \\ u_p \\ v_p \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Finalmente temos a equação [A.1] com:

$$\begin{aligned} \{u\} &= \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \\ [N] &= \begin{bmatrix} N_m & 0 & N_n & 0 & N_p & 0 \\ 0 & N_m & 0 & N_n & 0 & N_p \end{bmatrix} e, \\ \{u\}_n &= \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \\ u_n \\ v_n \\ u_p \\ v_p \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Assim, dados os deslocamentos nodais quaisquer, pode-se obter o deslocamento de qualquer ponto interno do elemento.

Para outros tipos de elementos, estados de solitação e outras geometrias de elementos, é óbvio que tais equações de deslocamento seriam diferentes. O procedimento, porém, para a obtenção destas equações é análogo.

Seguindo nosso desenvolvimento, devemos agora obter as deformações de um ponto interno do elemento. Da Teoria da Elasticidade, vem que:

$$\{\varepsilon\} = [L] * \{u\} \quad (\text{A.11})$$

onde [L] é um operador.

As deformações  $\{\varepsilon\}$  podem ser relacionadas com os deslocamentos  $\{u\}$  através das relações vindas da Teoria da Elasticidade:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \delta_u / \delta_x & \varepsilon_y &= \delta_v / \delta_y & \varepsilon_z &= \delta_w / \delta_z \\ \gamma_{xy} &= \frac{\delta_u}{\delta_y} + \frac{\delta_v}{\delta_x} & \gamma_{xz} &= \frac{\delta_u}{\delta_z} + \frac{\delta_w}{\delta_x} & \gamma_{yz} &= \frac{\delta_v}{\delta_z} + \frac{\delta_w}{\delta_y} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

No nosso caso, para o caso de tensão plana têm-se:

$$\varepsilon_x = \delta_u / \delta_x \quad \varepsilon_y = \delta_v / \delta_y \quad \gamma_{xy} = \frac{\delta_u}{\delta_y} + \frac{\delta_v}{\delta_x} \quad (\text{A.13})$$

Em notação matricial têm-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta / \delta_x & 0 \\ 0 & \delta / \delta_y \\ \delta / \delta_y & \delta / \delta_x \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

onde:

$$\{\varepsilon_x\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{Bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \delta / \delta_x & 0 \\ 0 & \delta / \delta_y \\ \delta / \delta_y & \delta / \delta_x \end{bmatrix}$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$$

Substituindo-se a equação [A.1] em [A.11], têm-se:

$$\{\varepsilon\} = [L] * [N] * \{u\}_n \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta / \delta_x & 0 \\ 0 & \delta / \delta_y \\ \delta / \delta_y & \delta / \delta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_m & 0 & N_n & 0 & N_p & 0 \\ 0 & N_m & 0 & N_n & 0 & N_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \\ u_n \\ v_n \\ u_p \\ v_p \end{Bmatrix}$$

Chamando  $[B] = [L]*[N]$ , e calculando, para este caso, têm-se:

$$[B] = \begin{bmatrix} (\delta/\delta_x)N_m & 0 & (\delta/\delta_x)N_n & 0 & (\delta/\delta_x)N_p & 0 \\ 0 & (\delta/\delta_y)N_m & 0 & (\delta/\delta_y)N_n & 0 & (\delta/\delta_y)N_p \\ (\delta/\delta_y)N_m & (\delta/\delta_x)N_m & (\delta/\delta_y)N_n & (\delta/\delta_x)N_n & (\delta/\delta_y)N_p & (\delta/\delta_x)N_p \end{bmatrix} \quad (A.16)$$

Lembrando-se dos valores de  $N_m$ ,  $N_n$  e  $N_p$ , substituindo-se e derivando têm-se:

$$[B] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & -2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} m^{-1} \quad (A.17)$$

E, finalmente, temos a equação:

$$\{\varepsilon\} = [B]*\{u\}_n \quad (A.18)$$

Com este equacionamento, dados os deslocamentos nodais, pode-se obter as deformações de qualquer ponto interno do elemento.

Finalmente, para se obter as tensões num ponto qualquer, utiliza-se de relações oriundas da Teoria da Elasticidade. As tensões  $\{\sigma\}$  podem ser relacionadas com as deformações  $\{\varepsilon\}$  através das equações:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (1/E)*[\sigma_x - \nu(\sigma_y - \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= (1/G)*\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= (1/E)*[\sigma_y - \nu(\sigma_x - \sigma_z)] & \gamma_{yz} &= (1/G)*\tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= (1/E)*[\sigma_z - \nu(\sigma_x - \sigma_y)] & \gamma_{zx} &= (1/G)*\tau_{zx} \end{aligned} \quad (A.19)$$

onde:

$E$  = módulo de Young;

$\nu$  = coeficiente de Poisson;

$\sigma$  = tensões normais nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ;

$\tau$  = tensões de cisalhamento nos planos  $xy$ ,  $yz$  e  $xz$ .

Para este caso, e para tensão plana, têm-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (1/E)*[\sigma_x - \nu\sigma_y] \\ \varepsilon_y &= (1/E)*[\sigma_y - \nu\sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= (1/G)*\tau_{xy} \end{aligned} \quad (A.20)$$

Com  $G = E / [2(1+\nu)]$

Colocando as tensões em evidência:

a) tensão de cisalhamento:

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{E}{2(1 + \nu)} * \gamma_{xy}(x, y)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{E}{1 - \nu^2} * \frac{1 - \nu}{2} * \gamma_{xy}(x, y) \quad (\text{A.21})$$

b) tensões normais:

Trabalhando com as equações de tensões normais:

$$E * \epsilon_x = \sigma_x - \nu \sigma_y$$

$$E * \epsilon_y = \sigma_y - \nu \sigma_x \quad \square \quad \sigma_y = E * \epsilon_y + \nu \sigma_x$$

Substituindo na outra equação, obtém-se  $\sigma_x$  em função de  $\epsilon_x$  e de  $\epsilon_y$ :

$$E * \epsilon_x = \sigma_x - \nu(E * \epsilon_y + \nu * \sigma_x)$$

$$E * \epsilon_x = \sigma_x - \nu * E * \epsilon_y - \nu^2 * \sigma_x$$

$$E * \epsilon_x + \nu * E * \epsilon_y = (1 - \nu^2) * \sigma_x$$

$$\sigma_x(x, y) = \frac{E}{1 - \nu^2} * (\epsilon_x(x, y) + \nu \epsilon_y(x, y)) \quad (\text{A.22})$$

De forma análoga, obtém-se  $\sigma_y$  em função de  $\epsilon_x$  e de  $\epsilon_y$ :

$$\sigma_y(x, y) = \frac{E}{1 - \nu^2} * (\nu \epsilon_x(x, y) + \epsilon_y(x, y)) \quad (\text{A.23})$$

Colocando-se estas relações em notação matricial, têm-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y(x, y) \\ \tau_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \epsilon_x(x, y) \\ \epsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Ou:

$$\{\sigma\} = [D] * \{\epsilon\} \quad (\text{A.25})$$

Com:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y(x, y) \\ \tau_{xy}(x, y) \end{Bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{Bmatrix}$$

Considerando um elemento de aço, com coeficiente de Poisson igual a 0,3 e módulo de elasticidade igual a  $2,1E11 \text{ N/m}^2$ , pode-se calcular numericamente a matriz [D], como:

$$[D] = 10^{11} \begin{bmatrix} 2,3077 & 0,6923 & 0 \\ 0,6923 & 2,30770 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8077 \end{bmatrix} \text{ N/m}^2 \quad (\text{A.26})$$

Deste modo, partindo-se dos deslocamentos nodais  $\{u\}_n$  pode-se obter seqüencialmente:

- 1) Os deslocamentos de um ponto qualquer interno ao elemento;
- 2) As deformações de um ponto qualquer interno ao elemento ;
- 3) As tensões de um ponto qualquer interno ao elemento.

Normalmente não se calculam as deformações, obtendo-se diretamente as tensões. Substituindo a equação [A.18] na equação [A.25], tem-se  $\{\sigma\} = [D] * [B] * \{u\}_n$  e, fazendo-se  $[DB] = [D] * [B]$ :

$$\{\sigma\} = [DB] * \{u\}_n \quad (\text{A.27})$$

Continuando com este caso têm-se, utilizando-se das equações [A.17] e [A.26]:

$$[DB] = 10^{11} \begin{bmatrix} 2,3077 & 0,6923 & 0 \\ 0,6923 & 2,30770 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8077 \end{bmatrix} * \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & -2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[DB] = \frac{10^{11}}{8} \begin{bmatrix} -6,9231 & -0,6923 & +4,6154 & -1,3846 & +2,3077 & +2,0769 \\ -2,0769 & -2,3077 & +1,3846 & -4,6154 & +0,6923 & +6,9231 \\ -0,8077 & -2,4231 & -1,6154 & +1,6154 & +2,4231 & +0,8077 \end{bmatrix} \text{ N/m}^2$$

Se considerarmos um vetor deslocamento igual a:

$$\{u\}_n = 10^{-6} * \begin{Bmatrix} -2 \\ -2 \\ +2 \\ -2 \\ +2 \\ +2 \end{Bmatrix} m$$

e substituindo-se [DB] e  $\{u\}_n$  na equação [A.27], obtém-se as tensões internas ao elemento triangular a tensão plana:

$$\{\sigma\} = \frac{10^{11}}{8} \begin{bmatrix} -6,9231 & -0,6923 & +4,6154 & -1,3846 & +2,3077 & +2,0769 \\ -2,0769 & -2,3077 & +1,3846 & -4,6154 & +0,6923 & +6,9231 \\ -0,8077 & -2,4231 & -1,6154 & +1,6154 & +2,4231 & +0,8077 \end{bmatrix} * 10^{-6} * \begin{Bmatrix} -2 \\ -2 \\ +2 \\ -2 \\ +2 \\ +2 \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = 10^5 \begin{Bmatrix} 4,5 \\ 4,5 \\ 0,8 \end{Bmatrix} N / m^2 \quad (A.28)$$

Nota-se que no cálculo destes valores de tensão, não foi preciso indicar a posição do ponto interno ao elemento triangular, já que os termos da matriz de deslocamentos [N] são independentes desta posição. Isto significa que, qualquer que seja a posição do ponto internamente ao elemento triangular, terão os mesmos valores de tensão. Em outras palavras, este equacionamento conduz a um estado de tensão constante internamente ao elemento triangular linear, o que, sem dúvidas, não condiz com a realidade. Este fato, devido à limitação na escolha das funções de deslocamento  $N_i$ , serve para ilustrar e reforçar dois fatos colocados anteriormente: que o Método dos Elementos Finitos é um método de cálculo aproximado, podendo apresentar desvios da solução real (que podem ser minimizados com uma boa modelagem), e o fato de que elementos com maior números de nós, e portanto com funções de deslocamento de maior ordem, apresentam melhores resultados.

## Anexo B: Exemplo de arquivo utilizado no método proposto

1

Page 1

CAEDS V4R2M0: FE\_Modeling\_&amp;\_Analysis

10-AGO-94 14:57:17

/u/caeds/user/barcha/placa\_var-Dd=1,2

D/d=1.2--r/d=0.10

Group ID: No stored PERMANENT GROUP

Analysis Dataset: 2 - CASE 1,LOAD 1,STRESSES

Function Dataset: Current

Report Type: XY - Plot

Units: MM

Dataset Type: Stress

Load Set: 1

Frame of Reference: Global

Data Component: Von Mises

Node

Data	Label	Von Mises
1	1	1.814E+04
2	9	1.352E+04
3	10	9.768E+03
4	11	9.781E+03
5	12	9.415E+03
6	13	9.295E+03
7	14	9.148E+03
8	15	9.119E+03
9	16	9.087E+03
10	17	9.081E+03
11	18	9.070E+03
12	19	9.068E+03
13	20	9.065E+03
14	21	9.066E+03
15	22	9.067E+03
16	23	9.068E+03
17	24	9.070E+03