H U M B E R T O   D E   C A M P O S

Engenheiro - Agrônomo

Instrutor da 16ª Cadeira (Matemática)

E. S. A. "Luiz de Queiroz" - U. S. P.

ESTUDO SÔBRE A ANÁLISE DE EXPERIMENTOS COM PARCELAS PERDIDAS

Tese de Doutoramento

Apresentada à Escola Superior de Agricultura

"Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo

PIRACICABA

= 1964 =

D E D I C O

a minha espôsa,

a meus filhos,

e a meus pais.

A G R A D E C I M E N T O S

Desejo expressar os meus sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Frederico Pimentel Gomes e ao Dr. Izaias Rangel Nogueira, respectivamente Catedrático e Professor Assistente-Docente, da 16ª Cadeira (Matemática) da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, pelas valiosas sugestões apresentadas durante a elaboração dêste trabalho.

Í N D I C E

Página

Página

1 - INTRODUÇÃO

Em trabalhos experimentais não raro acontece que uma ou mais parcelas do experimento são prejudicadas, ou por causas acidentais, alheias ao contrôle do experimentador, ou mesmo, em casos mais raros, por causas decorrentes do próprio experimentador. Tais parcelas são consideradas "perdidas", e vêm dificultar o bom andamento das análises estatísticas.

Observa-se pois, que o conceito estatístico de "parcela perdida" nem sempre corresponde a uma perda real; basta que, por causas não ligadas ao experimento, um ou mais dados discrepem muito do razoável para que os ponhamos em dúvida e cheguemos mesmo a considerá-los como "parcelas perdidas".

Uma solução, embora um tanto drástica, que possibilitaria a análise estatística dêsses experimentos seria abandonar os blocos (se fôr o caso) onde figuram as parcelas perdidas, o que seria razoável se o número de parcelas componentes dos blocos restantes fôsse suficiente para levar a bom têrmo a análise.

Devemos entretanto salientar que todo experimento bem planejado é passível de ser analisado estatìsticamente, mesmo ocorrendo a perda de uma ou de algumas parcelas, desde que não se anule o número de graus de liberdade do resíduo. O mais acertado é, pois, analisar os dados restantes levando-se em conta a perda ocorrida. Isto em nada afetaria as conclusões obtidas através da análise. Embora seja essa a solução mais acertada, êsse processo é pouco utilizado, devido à sua complexidade.

A solução mais comum é proceder à determinação das parcelas perdidas, através de cálculos estimativos. Uma vez calculadas, procedemos à análise como num caso normal em que todos os dados são conhecidos. Devemos no entanto frizar que nada poderia substituir o verdadeiro valor da parcela perdida, que nos é desconhecido.

Existem atualmente vários métodos para calcular as parcelas perdidas, alguns mais outros menos empregados, mas de um modo geral todos êles oferecendo-nos boas estimativas dos dados ausentes. Um dêsses métodos, e que será objeto principal do nosso trabalho, é uma aplicação do processo iterativo, ou das aproximações sucessivas, e foi introduzido por YATES (20).

Pretendemos discutir um novo aspecto da aplicação do método iterativo no cálculo de parcelas perdidas em experimentos, aspecto êste baseado na teoria matemática das Sucessões. Acreditamos que com isto, traremos a baila alguns pontos que não se encontravam bem definidos ou que pelo menos não haviam sido constatados teòricamente, e sim, apenas através de resultados práticos. Sob êsse ponto de vista, abrangemos os casos de duas parcelas perdidas nos delineamentos em blocos casualizados, e em quadrado latino, estendendo êste para os casos de ensaios em períodos sucessivos ("Change-Over" ou "Switch-Over").

Dedicamos um capítulo dêste trabalho às deduções das fórmulas que avaliam as parcelas perdidas nos três tipos de delineamentos citados, para uma e para duas parcelas perdidas, assim como a variância de contrastes entre médias com parcelas perdidas, procurando detalhar ao máximo, cada caso considerado.

Complementando nosso estudo, apresentamos num capítulo a parte, para aquêles que se interessam pelo seu fundamento matemático, o método geral de estimação de parcelas perdidas, baseado no método dos quadrados mínimos e desenvolvido, conforme CHAKRABARTI (5), sob forma matricial. Entretanto, observamos que a omissão dêsse capítulo, por parte do leitor, não interfere na boa compreensão da parte restante do trabalho.

2 - REVISÃO DA LITERATURA

O estudo da análise de experimentos onde ocorrem parcelas perdidas, as estimativas das mesmas sob um aspecto matemático rigoroso, tem sido bastante explorado nestas últimas décadas.

Em geral, a preocupação inicial nas análises estatísticas de experimentos onde ocorrem parcelas perdidas é a sua estimativa sob um ponto de vista relativamente rigoroso, a fim de que seja levada avante a análise.

Os primeiros autores a se preocuparem com a determinação de valores para as parcelas perdidas em experimentos foram ALLAN e WISHART (1). Êstes conceituaram como parcelas perdidas, aquelas cujos dados registrados são imperfeitos, devido a causas além do contrôle do próprio experimentador. Desta forma, uma parcela pode ser completamente perdida, ou pode apresentar-se tão pobre devido a doença ou por outras razões, que o dado registrado não seja comparável com os das outras parcelas.

ANDERSON (2) considera como parcela perdida aquela cujo dado ou é perdido, ou é rejeitado por causa de condições alheias ao contrôle do experimentador. Entretanto, recomenda que uma parcela seja rejeitada na análise dos resultados, sòmente em casos extremos, quando comprovado que o tratamento em questão não é responsável pelas aparentes anomalias de resultados.

Muitos outros autores emitiram conceitos sôbre parcelas perdidas, havendo uma grande concordância de opinião entre êles.

ALLAN e WISHART (1), nos seus estudos para realização de análise estatística de ensaios com parcelas perdidas, chegaram à conclusão de que isto poderia ser feito por meio da determinação de valores estimados para elas, através de um processo aparentemente enquadrado no método dos quadrados mínimos, mas, que, examinado em seus detalhes, foge dos princípios do referido método.

Êstes dois pesquisadores conseguiram por meio do cálculo diferencial, aplicando certos artifícios, fórmulas que estimam o valor de uma parcela perdida em ensaios em blocos casualizados e em quadrado latino, e que, para surprêsa de quem examina minuciosamente o trabalho, são perfeitamente as mesmas a que se chega por aplicação do método dos quadrados mínimos. O que não se depreende do trabalho dêstes autores é como conseguiram, sem muito rigor, as mesmas fórmulas obtidas através de um cálculo matemático rigoroso.

A fórmula a que chegaram no caso de blocos casualizados foi:

$$k = \frac{(r + n - 1)\ S - n\ S_t - r\ S_b}{(r - 1)(n - 1)},$$

onde: k é um valor estimado para a parcela perdida,

r é o número de blocos,

n é o número de tratamentos,

S é a soma dos $(n\ r - 1)$ valores conhecidos,

S_t é a soma dos totais de tratamentos, excluindo o da parcela perdida,

S_b é a soma dos totais de blocos, excluindo o da parcela perdida.

Para o quadrado latino obtiveram

$$k = \frac{1}{r - 1}\ S_1 - \frac{2}{(r - 1)(r - 2)}\ S_2 ,$$

onde S_1 representa a soma dos dados das $3\ (r - 1)$ parcelas relacionadas com a perdida, na linha, coluna e tratamento, e S_2 é a soma das parcelas que não estão relacionadas.

YATES (20), solucionou o problema, baseado no método dos quadrados mínimos, pela substituição de incógnitas para os dados perdidos e procurando tornar mínima a soma de quadrados do resíduo. Para chegar à sua fórmula, que estima uma parcela perdida, supôs uma classificação múltipla da m-ésima ordem, de tal modo que cada parcela é um membro de <u>m</u> classes.

Sejam p , q , r , ... , o número de classes em cada grupo e n o número de parcelas; sejam ainda P , Q , R , ... , as somas dos valores conhecidos dentro de cada classe.

Simbolizando por x o dado da parcela perdida e seguindo o método ordinário de análise da variância, pelo método dos quadrados mínimos, isto é, tornando mínima a soma de quadrados residual, obtém-se:

$$x \left[(n + m - 1) - (p + q + \dots) \right] = (p\,P + q\,Q + \dots) - (m - 1)\,T$$

No caso de um experimento em blocos casualizados, com p tratamentos e q blocos, $n = p\,q$ e $m = 2$, as somas dos dados de tôdas as parcelas que recebem o mesmo tratamento ou que estão no mesmo bloco que a parcela perdida são P e Q , respectivamente. Sendo T o total dos dados conhecidos, o valor de x será:

$$x = \frac{p\,P + q\,Q - T}{(p - 1)(q - 1)} \ .$$

No caso de um quadrado latino, com p tratamentos, $p = q = r$, $n = p^2$ e $m = 3$, se P_r , P_c , P_t representam respectivamente, os totais dos dados conhecidos da linha, coluna e tratamento da parcela perdida, a fórmula torna-se:

$$x = \frac{p\,(P_r + P_c + P_t) - 2\,T}{(p - 1)(p - 2)} \ .$$

Conclui-se pois que o método apresentado por YATES (20) se adapta perfeitamente tanto para blocos casualizados como para quadrado latino.

Observa-se que embora haja uma aparente diferença, devido à notação empregada, as fórmulas de ALLAN e WISHART e as de YATES são exatamente as mesmas.

Se num experimento ocorrem várias parcelas perdidas, a soma de quadrados residual é uma função dos dados x , y , z , ... de tôdas as parcelas desconhecidas. Pelo método dos quadrados mínimos, tornando mínima essa função obtém-se um sistema de equações simultâneas em x, y, z, ...

Se P_x é o total de todos os dados conhecidos numa classe que contém x, P_{yz} o total similar para a classe que contém y e z, e supondo que estas classes contêm sòmente aquelas parcelas desconhecidas, a função proposta por YATES (20) será:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots - \frac{p}{n}\left[(P_x + x)^2 + (P_{yz} + y + z)^2 + \ldots\right] -$$

$$- \frac{q}{n}\left[(Q_x + x)^2 + (Q_y + y)^2 + (Q_z + z)^2 + \ldots\right] - \ldots +$$

$$+ \frac{m-1}{n}\left[T + x + y + z + \ldots\right]^2 .$$

As 3 primeiras equações no caso dado são:

$$x\,(n+m-1-p-q-\ldots) + y(m-1) + z(m-1) + \ldots = p\,P_x + q\,Q_x + \ldots - (m-1)\,T\,,$$

$$x\,(m-1) + y\,(n+m-1-p-q-\ldots) + z\,(m-1-p) + \ldots = p\,P_{yz} + q\,Q_y + \ldots - (m-1)\,T\,,$$

$$x\,(m-1) + y\,(m-1-p) + z\,(n+m-1-p-q-\ldots) + \ldots = p\,P_{yz} + q\,Q_z + \ldots - (m-1)\,T\,.$$

Estas equações são mais fàcilmente resolvidas pelo método iterativo, mas na prática não há necessidade de determiná-las, desde que repetidas aplicações da fórmula que estima uma única parcela perdida, substituindo por valores aproximados tôdas as outras parcelas desconhecidas, é perfeitamente idêntico ao processo iterativo ordinário. A solução converge muito ràpidamente e em circunstâncias ordinárias, a segunda aproximação já é bastante precisa.

ANDERSON (2) nos apresenta uma interessante e completa revisão bibliográfica sôbre parcelas perdidas, considerando vários tipos de delineamentos e as respectivas fórmulas até então deduzidas para a estimativa daquelas. Além dos casos de parcelas perdidas em blocos casualizados e quadrado la tino, seu trabalho apresenta e comenta ainda, várias outras fórmulas para a estimativa de parcelas perdidas em látices, fatoriais 2^n e 3^n, parcelas subdivididas e inclusive uma fórmula para a estimativa de sub-parcelas perdidas.

DAVIES (7) distingue no caso de parcelas perdidas, dois modos diferentes pelos quais a análise pode ser realizada: o 1º é estimar os valores desconhecidos, através dos conhecidos; e o 2º é adaptar constantes para as linhas, colunas e médias. Os dois métodos são equivalentes, pois conduzem ao mesmo resultado. Mas, em certas circunstâncias, um pode ser mais adequado para uso do que o outro. No caso de haver menos parcelas perdidas do que linhas e colunas (ou ainda, blocos e tratamentos), é melhor estimar os valores; mas, se o número de parcelas perdidas fôr superior ao de colunas e linhas (tratamentos e blocos), é melhor usar o método de adaptação de constantes.

PEARCE (15) menciona quatro métodos para estimar parcelas perdidas, ou seja:

a) Método da Pseudo-Variável - Nêste, cada parcela perdida é associada a uma pseudo-variável.

b) Método das Equações Paramétricas - Êste não é recomendável, pois a solução das equações é, algumas vêzes, muito grosseira.

c) Tornando Mínima a Soma de Quadrados Residual - Nêste caso, o resíduo é calculado algèbricamente e tornado mínimo por meio do cálculo diferencial.

d) Por Fórmulas.

Bàsicamente êles são todos variantes de um mesmo método, que é o dos quadrados mínimos.

PANSE e SUKHATME (14) nos sugerem um método prático para a estimativa de duas parcelas, tanto em blocos casualizados como em quadrado latino, baseado nas fórmulas de YATES (20) para o cálculo de uma parcela perdida.

Assim, para blocos casualizados, com n tratamentos e r repetições temos:

$$x = \frac{r\,B_1 + n\,T_1 - (G + y)}{(r - 1)(n - 1)} \quad ,$$

$$y = \frac{r\,B_2 + n\,T_2 - (G + x)}{(r - 1)(n - 1)} \quad ,$$

onde x e y representam as parcelas perdidas; B_1, B_2, T_1 e T_2 os totais das parcelas restantes nos blocos e tratamentos em que figuram x e y respectivamente; G é o total das parcelas disponíveis. Resolvendo o sistema formado pelas duas equações, encontramos diretamente os limites para x e y, sendo desnecessário portanto o emprêgo de iterações.

Para o quadrado latino, o processo é perfeitamente análogo e o sistema de equações é:

$$x = \frac{r\,(C_1 + T_1 + L_1) - 2\,(G + y)}{(r - 1)(r - 2)} \quad ,$$

$$y = \frac{r\,(C_2 + T_2 + L_2) - 2\,(G + x)}{(r - 1)(r - 2)} \quad ,$$

onde C_i, L_i, T_i, $(i = 1, 2)$, se referem às colunas, linhas e tratamentos com as parcelas perdidas.

Ora, fàcilmente se conclui que êste processo é aplicável a qualquer número de parcelas perdidas, obtendo-se naturalmente um sistema cujo número de equações coincide com o número de parcelas a estimar.

Podemos também utilizar, para estimar parcelas perdidas, a análise da covariância, conforme foi utilizada por CHAKRABARTI (5). Tomemos $x = 0$ e y = dado real, para as parcelas existentes, e, $x = -1$ e $y = 0$, para as parcelas perdidas. A melhor estimativa da parcela perdida é simplesmente o resíduo do coeficiente b de regressão. Assim, para blocos casualizados com n tratamentos e r repetições, com uma parcela perdida (x_{ij}) temos:

	Σx^2	$\Sigma x y$	b
Blocos	$\frac{1}{n} - \frac{1}{n r}$	$- \frac{B_j}{n} + \frac{G}{n r}$	
Tratamentos	$\frac{1}{r} - \frac{1}{n r}$	$- \frac{T_i}{r} + \frac{G}{n r}$	
Resíduo	$\frac{(r-1)(n-1)}{n r}$	$\frac{B_j}{n} + \frac{T_i}{r} - \frac{G}{n r}$	$\frac{r B_j + n T_i - G}{(r - 1)(n - 1)}$
Total	$1 - \frac{1}{n r}$	$\frac{G}{n r}$	

Num quadrado latino $r \times r$ com uma parcela perdida na linha $\underline{i}$, coluna $\underline{j}$ e tratamento $\underline{k}$, a análise da covariância com as considerações feitas acima nos dá:

	Σx^2	$\Sigma x y$	b
Linhas	$\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}$	$- \frac{L_i}{r} + \frac{G}{r^2}$	
Colunas	$\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}$	$- \frac{C_j}{r} + \frac{G}{r^2}$	
Tratamentos	$\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}$	$- \frac{T_k}{r} + \frac{G}{r^2}$	
Resíduo	$\frac{(r-1)(r-2)}{r^2}$	$\frac{\left[r\ (L_i + C_j + T_k) - 2\ G\right]}{r^2}$	$\frac{r\ (L_i + C_j + T_k) - 2\ G}{(r - 1)(r - 2)}$
Total	$1 - \frac{1}{r^2}$	$\frac{G}{r^2}$	

Num experimento em que ocorrem parcelas perdidas, para a comparação de médias de tratamentos, deve-se levar em conta se nos tratamentos em aprêço, ocorre a perda de parcelas.

YATES (20) apresenta fórmulas para a variância de contrastes de médias de tratamentos no caso de ensaios com parcelas perdidas. O contraste entre a média de um tratamento com uma parcela perdida e a de um outro onde se conhecem tôdas as parcelas tem, num experimento em blocos casualizados, a variância

$$\frac{1}{r}\left[2 + \frac{n}{(r-1)(n-1)}\right] s^2 ,$$

e num quadrado latino

$$\frac{1}{r}\left[2 + \frac{r}{(r-1)(r-2)}\right] s^2 ,$$

onde <u>n</u> é o número de tratamentos, <u>r</u> é o número de repetições e <u>s</u> é o desvio padrão.

Quando ambos os tratamentos numa comparação envolvem uma ou mais parcelas perdidas, as fórmulas para variância de contrastes entre as médias dêsses tratamentos são mais complexas. YATES (20) apresenta uma regra aproximada para aplicar nêsses casos, ou seja: suponhamos que queremos comparar as médias dos tratamentos <u>a</u> e <u>b</u> de um experimento em blocos casualizados. Cada repetição de <u>a</u> é contada:

1) Como 1 (um) quando <u>a</u> e <u>b</u> ocorrem no mesmo bloco.

2) Como 1/2 (meio) quando <u>a</u> ocorre sem <u>b</u> .

3) Como zero quando <u>a</u> não ocorre no bloco.

O mesmo raciocínio se aplica para <u>b</u> .

A soma nos dá o "número de repetições efetivas" para o cálculo da variância da média.

Para quadrado latino tem-se para <u>a</u> :

1) A repetição é contada como 1 (um), quando os dois tratamentos estão presentes na correspondente linha e coluna.

2) Como 2/3 se <u>b</u> é perdido ou na linha ou na coluna, mas não em ambas.

3) Como 1/3 se <u>b</u> é perdido na linha e na coluna.

4) Como zero se <u>a</u> é perdido.

O mesmo raciocínio aplicamos para <u>b</u> .

No caso de blocos casualizados, TAYLOR (19) introduziu uma nova regra aproximada para o cálculo da variância da média de um tratamento com parcela perdida, também baseada no número efetivo de repetições. Sejam <u>a</u> e <u>b</u> os tratamentos a serem comparados; qualquer repetição de <u>a</u> é contada:

1) Como 1 (um)quando <u>a</u> e <u>b</u> estão presentes no mesmo bloco.

2) Como $\frac{n - 2}{n - 1}$ (<u>n</u> é o número de tratamentos), quando <u>a</u> está presente e <u>b</u> não.

3) Como zero quando <u>a</u> não aparece no bloco.

A mesma regra se aplica para <u>b</u> .

Somando-se os pêsos atribuidos, obtém-se o número de repetições efetivas para cada caso.

O número de repetições efetivas obtido tanto através das regras de Yates com da de Taylor, aproxima-se muito, chegando mesmo, às vêzes, a coincidir com o obtido através de fórmulas exatas, como no caso de duas parcelas perdidas num mesmo bloco.

Embora um tanto exígua a bibliografia sôbre o estudo das parcelas perdidas, procuramos fazer um apanhado sôbre tudo aquilo que julgamos de maior importância sôbre o assunto tratado.

3 - MÉTODO GERAL DE ESTIMAÇÃO DE PARCELAS PERDIDAS

Em Estatística Experimental, as análisesde variância são regidas por modêlos matemáticos algumas vêzes de fácil determinação e outras vêzes bastante complexos. Assim, por exemplo, num experimento em blocos casualizados, cada parcela y_{ij} é regida pelo modêlo

$$y_{ij} = m + t_i + b_j + e_{ij} ,$$

onde m é a média geral dos dados, t_i é o efeito do tratamento i , b_j é o efeito do bloco j e e_{ij} é um êrro.

Num conjunto de n variáveis aleatórias independentes, $y_1 , y_2 , \dots , y_n$, com variância comun σ^2 , podemos tomar a esperança do vetor $Y = (y_1 , y_2 , \dots , y_n)$ para estimar um valor médio não tendencioso ("unbiased") para Y , ou seja:

$$E\,(Y) = E \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot\cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \cdot\cdot \\ \theta_m \end{bmatrix} = A\,\theta ,$$

onde os a_{ij} são elementos conhecidos (coeficientes dos parâmetros do modêlo matemático) e os θ_j $(j = 1 , 2 , \dots , m)$ são os parâmetros do modêlo, a serem determinados. Desta forma, cada variável y_i é uma função linear dos parâmetros θ_j .

Seguindo a exposição de CHAKRABARTI (5), para a análise da variância, tomemos $y_1 , y_2 , \dots , y_n$, como sendo os dados das parcelas existentes num delineamento qualquer, e $x_1 , x_2 , \dots , x_k$, como parcelas perdidas. As esperanças dêstes dados são funções lineares de alguns parâmetros $\theta_1 , \theta_2 , \dots , \theta_m$, conforme já foi dito acima.

Se procedermos à análise de variância apenas com os dados existentes, teremos:

$$E(Y) = A\,\Theta\ .$$

A soma de quadrados residual será:

$$\begin{aligned} e'\,e &= (Y - A\,\Theta)'(Y - A\,\Theta) \\ &= Y'\,Y - Y'\,A\,\Theta - \Theta'\,A'\,Y + \Theta'\,A'\,A\,\Theta \\ &= Y'\,Y - 2\,\Theta'\,A'\,Y + \Theta'\,A'\,A\,\Theta\ . \end{aligned}$$

Aplicando o método dos quadrados mínimos, isto é, procurando tornar mínima a soma de quadrados residual, teremos, diferenciando em relação à Θ,

$$\begin{aligned} d\,(e'\,e) &= -\,2\,d\,\Theta'\,A'\,Y + d\,\Theta'\,A'\,A\,\Theta + \Theta'\,A'\,A\,d\,\Theta \\ &= -\,2\,d\,\Theta'\,A'\,Y + 2\,d\,\Theta'\,A'\,A\,\Theta \\ &= \ 2\,d\,\Theta'\,(-\,A'\,Y + A'\,A\,\Theta)\ . \end{aligned}$$

Mas, uma condição necessária para que tenhamos um mínimo é que a diferencial $d\,(e'\,e)$ seja nula, e, uma condição suficiente para que isto ocorra é que $(-\,A'\,Y + A'\,A\,\Theta)$ seja idênticamente nulo. Logo, virá:

$$-\,A'\,Y + A'\,A\,\hat{\Theta} = \Phi\ ,$$

onde Φ representa uma matriz nula, neste caso, de dimensões $m \times 1$. Daí tiramos o sistema de equações normais

$$A'\,Y = A'\,A\,\hat{\Theta}\ . \qquad \text{(I)}$$

Com o resultado (I) a soma de quadrados residual estimada se reduz a

$$SQR = Y'\,Y - \hat{\Theta}'\,A'\,Y\ . \qquad \text{(II)}$$

Se além das parcelas existentes, computarmos na análise da variância as parcelas perdidas, substituindo-as por $x_1, x_2, \ldots, x_k$, virá:

$$E(Y) = A\,\Theta$$

$$E(X) = E\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ .. \\ \theta_m \end{bmatrix} = B\,\theta .$$

A soma de quadrados residual será:

$$e'\,e = (Y - A\,\theta)'(Y - A\,\theta) + (X - B\,\theta)'(X - B\,\theta) ,$$

que desenvolvida nos dá

$$e'\,e = Y'\,Y + X'\,X - 2\,\theta'\,A'\,Y - 2\,\theta'\,B'\,X + \theta'\,A'\,A\,\theta + \theta'\,B'\,B\,\theta . \quad (III)$$

Diferenciando em relação à θ tem-se:

$$d\,(e'\,e) = 2\,d\,\theta'\,(-\,A'\,Y - B'\,X + A'\,A\,\theta + B'\,B\,\theta) . \qquad (IV)$$

Anulando-a para tornar mínima a soma de quadrados residual, virá:

$$-\,A'\,Y - B'\,X + A'\,A\,\hat{\theta} + B'\,B\,\hat{\theta} = \Phi ,$$

onde Φ é a mesma matriz nula citada anteriormente. Daí tiramos o novo sistema de equações normais

$$A'\,Y + B'\,X = (A'\,A + B'\,B)\,\hat{\theta} , \qquad (V)$$

ou ainda,

$$Y'\,A + X'\,B = \hat{\theta}'\,(A'\,A + B'\,B) .$$

Por diferenciação obtemos:

$$B = \frac{d\,\hat{\theta}'}{d\,X'}\,(A'\,A + B'\,B) . \qquad (VI)$$

Reportando-nos a (III), teremos:

$$SQR = Y'\,Y + X'\,X - \hat{\theta}'\,[2\,(A'\,Y + B'\,X) - (A'\,A + B'\,B)\,\hat{\theta}] ,$$

e, por (V) resulta:

$$SQR = Y'\,Y + X'\,X - \hat{\theta}'\,(A'\,Y + B'\,X). \qquad (VII)$$

Procurando o seu mínimo, virá:

$$2\,X - \frac{d\,\hat{\theta}'}{d\,X'}\,(A'\,Y + B'\,X) - B\,\hat{\theta} = \Phi ,$$

ou ainda, por (IV),

$$2\,X - \frac{d\,\hat{\Theta}'}{d\,X'}\left[(A'\,A + B'\,B)\,\hat{\Theta}\right] - B\,\hat{\Theta} = \Phi \quad ,$$

onde Φ é uma matriz nula de dimensões $k \times 1$. Mas, como, de (VI) se obtém

$$\frac{d\,\hat{\Theta}'}{d\,X'}\,(A'\,A + B'\,B) = B \quad ,$$

virá:

$$2\,X - 2\,B\,\hat{\Theta} = \Phi \quad ,$$

e finalmente,

$$X = B\,\hat{\Theta} \,. \qquad \text{(VIII)}$$

Se substituirmos o resultado (VIII) em (V) e (VII), obtém-se para o sistema de equações normais e soma de quadrados de residuo, respectivamente,

$$A'\,Y = A'\,A\,\hat{\Theta}$$

e

$$SQR = Y'\,Y - \hat{\Theta}'\,A'\,Y \quad ,$$

que são os mesmos resultados obtidos em (I) e (II) respectivamente.

Assim, de um modo geral podemos concluir: "Se num delineamento qualquer foram perdidas $\underline{k}$ parcelas, procedemos como se elas estivessem presentes, atribuindo-lhes os valores x_1, x_2, ..., x_k, que tornam mínima a soma de quadrados residual. O resultado obtido para a SQR é o mesmo que obteríamos se não houvesse parcelas perdidas".

Na prática, quando a análise do delineamento original é conhecida, muitos dos cálculos podem ser simplificados, pois as fórmulas de estimação dos θ_j já estão determinadas. Assim, num delineamento em blocos casualizados com $\underline{n}$ tratamentos e $\underline{r}$ blocos, onde a esperança matemática da parcela x_{ij} é

$$E\,(x_{ij}) = m + t_i + b_j \;,$$

é sabido que as soluções para m, t_i e b_j são respectivamente a média geral, a diferença entre a média do tratamento $\underline{i}$ e a média geral, e, a diferença entre a média do bloco $\underline{j}$ e a média geral. Se, entretanto, esta observação é perdida, representando-a por $\underline{x}$, por T_i o total das parcelas restantes no tratamento $\underline{i}$, por B_j o total das parcelas restantes no bloco $\underline{j}$ e por G o total das parcelas disponíveis, teremos, baseados na fórmula $x = B\,\hat{\theta}$,

$$x = \frac{G + x}{n\,r} + \left(\frac{T_i + x}{r} - \frac{G + x}{n\,r}\right) + \left(\frac{B_j + x}{n} - \frac{G + x}{n\,r}\right) \;,$$

donde tiramos:

$$x = \frac{r\,B_j + n\,T_i - G}{(r - 1)(n - 1)} \;.$$

Por um raciocínio análogo, se tivéssemos duas parcelas perdidas $\underline{x}$ e $\underline{y}$, respectivamente nos tratamentos $\underline{i}$ e i' e nos blocos $\underline{j}$ e j', viria:

$$x = \frac{B_j + x}{n} + \frac{T_i + x}{r} \quad \frac{G + x + y}{n\,r} \;,$$

$$y = \frac{B_{j'} + y}{n} + \frac{T_{i'} + y}{r} - \frac{G + x + y}{n\,r} \;,$$

donde tiraríamos:

$$x = \frac{(r - 1)(n - 1)(r\,B_j + n\,T_i - G) - (r\,B_{j'} + n\,T_{i'} - G)}{(r - 1)^2(n - 1)^2 - 1} \;,$$

$$y = \frac{(r - 1)(n - 1)(r\,B_{j'} + n\,T_{i'} - G) - (r\,B_j + n\,T_i - G)}{(r - 1)^2(n - 1)^2 - 1} \;.$$

Num experimento em quadrado latino $r \times r$, se a parcela da linha $\underline{i}$, coluna $\underline{j}$ e tratamento $\underline{k}$ é perdida e se L_i, C_j e T_k representam respectivamente os totais das parcelas restantes na linha, coluna, e tratamento de $\underline{x}$ e G é o total das parcelas disponíveis, nós temos, também basea dos em $X = B\,\hat{\theta}$, a seguinte estimativa para $\underline{x}$:

$$x = \frac{L_i + x}{r} + \frac{C_j + x}{r} + \frac{T_k + x}{r} - \frac{2\,(G + x)}{r^2} ,$$

donde,

$$x = \frac{r\,(L_i + C_j + T_k) - 2\,G}{(r - 1)(r - 2)} .$$

Seguindo êste raciocínio podemos sem muita delonga, baseados no resultado $X = B\,\hat{\theta}$, estimar qualquer número de parcelas perdidas.

4 - FÓRMULAS PARA O CÁLCULO DE PARCELAS PERDIDAS E VARIÂNCIAS

Trataremos das deduções das fórmulas mais comuns para o cálculo de uma e duas parcelas perdidas, em delineamentos em blocos casualizados, em quadrado latino e também em períodos sucessivos ("change-over").

Procuraremos também apresentar de uma maneira bem simples as deduções das fórmulas de variância de contrastes que incluem médias com parcelas perdidas, para cada caso referido acima.

Não pretendemos com isto introduzir novidades, mas apenas coordenar as fórmulas já existentes e estender as suas aplicações, de uma maneira bem acessível.

4.1 - <u>Ensaios em Blocos Casualizados</u>

4.1.1 - Caso de uma Parcela Perdida

Suponhamos um experimento em blocos casualizados, com <u>n</u> tratamentos e <u>r</u> blocos, conforme o esquema que se segue, onde foi perdida a parcela <u>x</u> .

	x	x + T
	x + B	x + G

Procedendo à análise usual tem-se:

$$C = \frac{(x + G)^2}{n\ r} ,$$

$$S\ Q\ Total = x^2 + K - C ,$$

$$S\ Q\ Tratamentos = \frac{1}{r} \left[(x + T)^2 + M \right] - C ,$$

$$S\ Q\ Blocos = \frac{1}{n} \left[(x + B)^2 + N \right] - C ,$$

onde: K é a soma dos quadrados de cada parcela disponível,

G é o total das parcelas disponíveis,

T é o total das parcelas restantes no tratamento da parcela perdida,

B é o total das parcelas restantes no bloco da parcela perdida,

M é a soma dos quadrados dos totais de cada tratamento, excetuando o da parcela perdida,

N é a soma dos quadrados dos totais de cada bloco, excetuando o da parcela perdida.

A soma de quadrados residual é obtida por exclusão, ou seja:

$$SQR = SQ\ Total - SQ\ Tratamentos - SQ\ Blocos$$

$$= x^2 + K - C - \frac{1}{r}\left[(x + T)^2 + M\right] + C - \frac{1}{n}\left[(x + B)^2 + N\right] + C$$

$$= x^2 + K - \frac{(x + T)^2}{r} - \frac{M}{r} - \frac{(x + B)^2}{n} - \frac{N}{n} + C \ .$$

Como se observa, SQR é uma função de $\underline{x}$; chamando-a de $\underline{z}$ e substituindo C pelo seu valor tem-se:

$$z = SQR = x^2 + K - \frac{(x + T)^2}{r} - \frac{M}{r} - \frac{(x + B)^2}{n} - \frac{N}{n} + \frac{(x + G)^2}{n\,r} \ .$$

O valor de $\underline{x}$ que torna mínima a função $\underline{z}$ é dado pela equação:

$$\frac{dz}{dx} = 2\,x - \frac{2\,(x + T)}{r} - \frac{2\,(x + B)}{n} + \frac{2\,(x + G)}{n\,r} = 0 \ .$$

Portanto,

$$x = \frac{r\,B + n\,T - G}{(r - 1)(n - 1)} \ .$$

A média do tratamento que contém a parcela perdida é:

$$\hat{m}_i = \frac{x + T}{r}$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{r\,B + n\,T - G}{(r - 1)(n - 1)} + T\right]$$

$$\hat{m}_i = \frac{1}{r} \left[\frac{r\,B + n\,T - G + (r - 1)(n - 1)\,T}{(r - 1)(n - 1)} \right] . \qquad (1)$$

Desdobrando o valor de G como se segue

$$G = T + B + R ,$$

onde R representa o total das parcelas disponíveis, excluindo B e T, e substituindo em (1), vem:

$$\hat{m}_i = \frac{1}{r} \left[\frac{r\,B + n\,T - (T + B + R) + (r - 1)(n - 1)\,T}{(r - 1)(n - 1)} \right]$$

$$= \frac{r\,(n - 1)\,T + (r - 1)\,B - R}{r\,(r - 1)(n - 1)} .$$

A estimativa da variância de $\hat{m}_i$ é obtida como se segue:

$$\hat{V}\,(\hat{m}_i) = \hat{V} \left[\frac{r\,(n - 1)\,T + (r - 1)\,B - R}{r\,(r - 1)(n - 1)} \right]$$

$$= \frac{r^2\,(n - 1)^2\,\hat{V}\,(T) + (r - 1)^2\,\hat{V}\,(B) + \hat{V}\,(R)}{r^2\,(r - 1)^2(n - 1)^2} , \qquad (2)$$

onde: $\hat{V}\,(T) = (r - 1)\,s^2$,

$\hat{V}\,(B) = (n - 1)\,s^2$,

$\hat{V}\,(R) = (r - 1)(n - 1)\,s^2$.

Substituindo êstes valores em (2) tem-se:

$$\hat{V}\,(\hat{m}_i) = \frac{r^2\,(n - 1)^2(r - 1) + (r - 1)^2(n - 1) + (r - 1)(n - 1)}{r^2\,(r - 1)^2(n - 1)^2}\,s^2$$

$$= \frac{r\,(n - 1) + 1}{r\,(r - 1)(n - 1)}\,s^2 ,$$

e, substituindo-se o r do numerador por $(r - 1 + 1)$,

$$\hat{V}\,(\hat{m}_i) = \frac{(r - 1 + 1)(n - 1) + 1}{r\,(r - 1)(n - 1)}\,s^2$$

$$= \frac{(r - 1)(n - 1) + (n - 1) + 1}{r\,(r - 1)(n - 1)}\,s^2 .$$

Simplificando e desdobrando, obtém-se:

$$\hat{V}(\hat{m}_i) = \left[\frac{1}{r} + \frac{n}{r(r-1)(n-1)}\right] s^2 .$$

Consideremos o contraste

$$\hat{Y} = \hat{m}_i - \hat{m}_u ,$$

onde $\hat{m}_i$ é a média do tratamento i com uma parcela perdida, e $\hat{m}_u$ é a média do tratamento u. A estimativa da variância do contraste é:

$$\hat{V}(\hat{m}_i - \hat{m}_u) = \hat{V}(\hat{m}_i) + \hat{V}(\hat{m}_u) - 2\,\mathrm{Cov}(\hat{m}_i , \hat{m}_u) .$$

Já vimos atrás que

$$\hat{V}(\hat{m}_i) = \left[\frac{1}{r} + \frac{n}{r(r-1)(n-1)}\right] s^2 .$$

Para a média $\hat{m}_u$ tem-se:

$$\hat{V}(\hat{m}_u) = \frac{s^2}{r} .$$

Daí concluimos fàcilmente que

$$\hat{V}(\hat{m}_i) + \hat{V}(\hat{m}_u) = \left[\frac{2}{r} + \frac{n}{r(r-1)(n-1)}\right] s^2 . \quad (3)$$

Por outro lado,

$$\hat{m}_i - \hat{m}_u = \frac{x + T}{r} - \frac{T_u}{r} ,$$

onde T_u representa a soma de tôdas as parcelas com o tratamento u. Daí obtém-se:

$$\hat{m}_i - \hat{m}_u = \frac{r(n-1)T + (r-1)B - R}{r(r-1)(n-1)} - \frac{T_u}{r}$$

$$= \frac{r(n-1)T + (r-1)B - R - (r-1)(n-1)T_u}{r(r-1)(n-1)} .$$

A estimativa da variância de $\hat{Y}$ é:

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \hat{V}(\hat{m}_i - \hat{m}_u) = \frac{r^2(n-1)^2\hat{V}(T) + (r-1)^2\hat{V}(B) + \hat{V}(R) + (r-1)^2(n-1)^2\hat{V}(T_u)}{r^2(r-1)^2(n-1)^2} .$$

Sendo $\hat{V}(T_u) = r\,s^2$ e as demais já conhecidas, tem-se:

$$\hat{V}\,(\hat{m}_i - \hat{m}_u) = \frac{r^2\,(n-1)^2(r-1) + (r-1)^2(n-1) + (r-1)(n-1) + (r-1)^2(n-1)^2\,r}{r^2\,(r-1)^2(n-1)^2}\,s^2.$$

Simplificando, obtém-se:

$$\hat{V}\,(\hat{m}_i - \hat{m}_u) = \frac{2\,r\,(n-1) - n + 2}{r\,(r-1)(r-1)}\,s^2 .$$

Substituindo no numerador, r por $(r - 1 + 1)$, virá:

$$\hat{V}\,(\hat{m}_i - \hat{m}_u) = \frac{2\,(r - 1 + 1)(n - 1) - n + 2}{r\,(r - 1)(n - 1)}\,s^2$$

$$= \frac{2\,(r-1)(n-1) + 2\,(n-1) - n + 2}{r\,(r-1)(n-1)}\,s^2 ,$$

donde concluimos que

$$\hat{V}\,(\hat{m}_i - \hat{m}_u) = \left[\frac{2}{r} + \frac{n}{r\,(r-1)(n-1)}\right] s^2 . \quad (4)$$

Ora, já vimos que

$$\hat{V}\,(\hat{m}_i - \hat{m}_u) = \hat{V}\,(\hat{m}_i) + \hat{V}\,(\hat{m}_u) - 2\,\mathrm{Cov}\,(\hat{m}_i\,,\,\hat{m}_u) ,$$

e portanto, conforme (3) e (4), concluimos que

$$\mathrm{Cov}\,(\hat{m}_i\,,\,\hat{m}_u) = 0 ,$$

ou seja:

$$\hat{V}\,(\hat{Y}) = \hat{V}\,(\hat{m}_i - \hat{m}_u) = \hat{V}\,(\hat{m}_i) + \hat{V}\,(\hat{m}_u) .$$

4.1.2 - Caso de Duas Parcelas Perdidas em Blocos e Tratamentos Distintos

Suponhamos um experimento em blocos casualizados com n tratamentos e r blocos, no qual foram perdidas as parcelas x e Y, conforme o esquema seguinte

x		$x + T_1$
	y	$y + T_2$
$x + B_1$	$y + B_2$	$x + y + G$

Seguindo a marcha usual de análise da variância, tem-se:

$$C = \frac{(x + y + G)^2}{n\,r} \ ,$$

$$\text{SQ Total} = x^2 + y^2 + K - C \ ,$$

$$\text{SQ Tratamentos} = \frac{1}{r}\left[(x + T_1)^2 + (y + T_2)^2 + M\right] - C \ ,$$

$$\text{SQ Blocos} = \frac{1}{n}\left[(x + B_1)^2 + (y + B_2)^2 + N\right] - C \ ,$$

onde K, G, M, N, têm o mesmo significado de 4.1.1, e T_1, T_2, B_1 e B_2 representam os totais das parcelas restantes respectivamente nos tratamentos e blocos onde figuram $\underline{x}$ e $\underline{y}$.

A soma de quadrados residual é fàcilmente obtida por exclusão, ou seja:

$$\text{SQR} = \text{SQ Total} - \text{SQ Tratamentos} - \text{SQ Blocos},$$

ou ainda, chamando-se de $\underline{z}$ a SQR,

$$z = \text{SQR} = x^2 + y^2 + K - \frac{(x + T_1)^2}{r} - \frac{(y + T_2)^2}{r} - \frac{M}{r} - \frac{(x + B_1)^2}{n} +$$

$$+ \frac{(y + B_2)^2}{n} - \frac{N}{n} + \frac{(x + y + G)^2}{n\,r} \ .$$

Procuramos agora os valores de $\underline{x}$ e $\underline{y}$ que tornam mínima a função $z = SQR$. Para isso derivamos parcialmente em relação a $\underline{x}$ e $\underline{y}$, ou seja:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - \frac{2(x + T_1)}{r} - \frac{2(x + B_1)}{n} + \frac{2(x + y + G)}{n\,r},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - \frac{2(y + T_2)}{r} - \frac{2(y + B_2)}{n} + \frac{2(x + y + G)}{n\,r}.$$

Igualando a zero as derivadas parciais e simplificando-as obtém-se:

$$x - \frac{x + T_1}{r} - \frac{x + B_1}{n} + \frac{x + y + G}{n\,r} = 0,$$

$$y - \frac{y + T_2}{r} - \frac{y + B_2}{n} + \frac{x + y + G}{n\,r} = 0,$$

Resolvendo o sistema, temos finalmente:

$$x = \frac{(r-1)(n-1)(r\,B_1 + n\,T_1 - G) - (r\,B_2 + n\,T_2 - G)}{(r-1)^2(n-1)^2 - 1},$$

$$y = \frac{(r-1)(n-1)(r\,B_2 + n\,T_2 - G) - (r\,B_1 + n\,T_1 - G)}{(r-1)^2(n-1)^2 - 1}.$$

Consideremos os tratamentos que contêm $\underline{x}$ e $\underline{y}$ e calculemos as suas médias; chamemos de $\hat{m}_x$ a média que contém $\underline{x}$ e $\hat{m}_y$ a que contém $\underline{y}$. Assim,

$$\hat{m}_x = \frac{x + T_1}{r},$$

$$\hat{m}_y = \frac{y + T_2}{r}.$$

Consideremos o esquema abaixo, representativo de um delineamento em blocos casualizados com $\underline{n}$ tratamentos e $\underline{r}$ blocos, com as parcelas perdidas $\underline{x}$ e $\underline{y}$.

x	a	$T_1 + x$
b	y	$T_2 + y$
$B_1 + x$	$B_2 + y$	

O contraste entre as médias dos tratamentos que contêm <u>x</u> e <u>y</u> é:

$$\hat{Y} = \hat{m}_x - \hat{m}_y$$

$$= \frac{x + T_1}{r} - \frac{y + T_2}{r}$$

$$= \frac{x - y + T_1 - T_2}{r} \; .$$

Mas, o esquema acima nos sugere isolar as parcelas <u>a</u> e <u>b</u> pois <u>a</u> é comum a T_1 e B_2 e <u>b</u> a T_2 e B_1. Assim, teremos:

$$T_1 = a + T' \; ,$$

$$T_2 = b + T'' \; ,$$

$$B_1 = b + B' \; ,$$

$$B_2 = a + B'' \; .$$

Desta maneira, tem-se:

$$\hat{Y} = \frac{x - y + a - b + T' - T''}{r} \; . \qquad (5)$$

Uma vez conhecidas as fórmulas que estimam <u>x</u> e <u>y</u>, calculemos o valor da diferença $(x - y)$. Assim,

$$x - y = \frac{(r-1)(n-1)(r\,B_1 + n\,T_1 - G) - (r\,B_2 + n\,T_2 - G)}{(r-1)^2(n-1)^2 - 1} -$$

$$- \frac{(r-1)(n-1)(r\,B_2 + n\,T_2 - G) - (r\,B_1 + n\,T_1 - G)}{(r-1)^2(n-1)^2 - 1} .$$

Simplificando convenientemente obtém-se:

$$x - y = \frac{r\,(B_1 - B_2) + n\,(T_1 - T_2)}{(r-1)(n-1) - 1} .$$

Levando-se êste resultado em (5) , vem:

$$\hat{Y} = \frac{\dfrac{r\,(B_1 - B_2) + n\,(T_1 - T_2)}{(r-1)(n-1) - 1} + (a - b) + (T' + T'')}{r} ,$$

ou ainda, desdobrando-se T_1 , T_2 , B_1 e B_2 ,

$$\hat{Y} = \frac{r\,(B'+b-B''-a) + n\,(T'+a-T''-b) + (a-b)\left[(r-1)(n-1) - 1\right]}{r\left[(r-1)(n-1) - 1\right]} +$$

$$+ \frac{(T'-T'')\left[(r-1)(n-1) - 1\right]}{r\left[(r-1)(n-1) - 1\right]} .$$

Grupando-se e simplificando, tem-se:

$$\hat{Y} = \frac{(B' - B'') + (n-1)(T' - T'') + (n-2)(a - b)}{(r-1)(n-1) - 1} .$$

A estimativa da variância do contraste é:

$$\hat{V}\,(\hat{Y}) = \hat{V}\left[\frac{(B' - B'') + (n-1)(T' - T'') + (n-2)(a - b)}{(r-1)(n-1) - 1}\right]$$

$$= \frac{\hat{V}\,(B' - B'') + (n-1)^2\,\hat{V}\,(T' - T'') + (n-2)^2\,\hat{V}\,(a - b)}{\left[(r-1)(n-1) - 1\right]^2} ,$$

onde:

$$\hat{V}\,(B' - B'') = \hat{V}\,(B') + \hat{V}\,(B'') = (n - 2)\,s^2 + (n - 2)\,s^2 = 2\,(n - 2)\,s^2,$$

$$\hat{V}\,(T' - T'') = \hat{V}\,(T') + \hat{V}\,(T'') = (r - 2)\,s^2 + (r - 2)\,s^2 = 2\,(r - 2)\,s^2,$$

$$\hat{V}\,(a - b) = \hat{V}\,(a) + \hat{V}\,(b) = s^2 + s^2 = 2\,s^2 .$$

Assim,

$$\hat{V}\,(\hat{Y}) = \frac{2\,(n - 2) + 2\,(n - 1)^2(r - 2) + 2\,(n - 2)^2}{\left[(r - 1)(n - 1) - 1\right]^2}\,s^2 ,$$

donde, após as devidas simplificações, obtém-se:

$$\hat{V}\,(\hat{Y}) = \hat{V}\,(\hat{m}_x - \hat{m}_y) = \frac{2\,(n - 1)}{(r - 1)(n - 1) - 1}\,s^2 .$$

A comparação entre uma das médias com parcela perdida ($\hat{m}_x$ ou $\hat{m}_y$) com outra ($\hat{m}_u$) onde todos os dados são conhecidos, é feita através do contraste

$$\hat{Y} = \hat{m}_x - \hat{m}_u ,$$

cuja variância é dada pela fórmula,

$$\hat{V}\,(\hat{Y}) = \left[\frac{1}{r} + \frac{n - 1}{(r - 1)(n - 1) - 1}\right] s^2,$$

obtida pelo mesmo raciocínio da anterior.

4.1.3 - Caso de Duas Parcelas Perdidas num Mesmo Bloco

Analogamente ao caso anterior, obtemos por dedução:

$$x = \frac{(n - 1)\;T_1 + T_2 + r\,B - G}{(r - 1)(n - 2)} ,$$

$$y = \frac{(n - 1)\;T_2 + T_1 + r\,B - G}{(r - 1)(n - 2)} ,$$

onde B representa o total das parcelas restantes no bloco em que figuram $\underline{x}$ e $\underline{y}$, e, as demais letras têm o mesmo significado anterior.

Consideremos as médias $\hat{m}_x$, $\hat{m}_y$ respectivamente dos tratamentos que contêm $\underline{x}$, $\underline{y}$ e $\hat{m}_u$ de um tratamento qualquer, com todos os dados conhecidos. Formemos os contrastes:

$$\hat{Y} = \hat{m}_x - \hat{m}_y \quad \text{e}$$

$$\hat{Y}_1 = \hat{m}_x - \hat{m}_u \quad .$$

As estimativas das variâncias dêsses contrastes podem ser deduzidas como em 4.1.2 , obtendo-se:

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{2}{r - 1} s^2 \; ,$$

$$\hat{V}(\hat{Y}_1) = \left[\frac{2}{r} + \frac{n - 1}{r(r - 1)(n - 2)} \right] s^2 \; .$$

4.1.4 - Caso de Duas Parcelas Perdidas num Mesmo Tratamento

Deduzindo, obtém-se:

$$x = \frac{(r - 1) B_1 + B_2 + n T - G}{(n - 1)r - 2)} \; ,$$

$$y = \frac{(r - 1) B_2 + B_1 + n T - G}{(n - 1)(r - 2)} \; ,$$

onde T representa o total das parcelas restantes no tratamento em que figuram $\underline{x}$ e $\underline{y}$.

A estimativa da variância do contraste entre a média (m_{xy}) do tratamento que contém $\underline{x}$ e $\underline{y}$ e uma outra de um tratamento qualquer, com todos os dados conhecidos, é fàcilmente deduzida, e obtém-se:

$$V(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{r} + \frac{2\,n}{r(r - 2)(n - 1)} \right] s^2 \; .$$

4.2 - Ensaios em Quadrado Latino

4.2.1 - Caso de uma Parcela Perdida

Consideremos o esquema que se segue, representativo de um delineamento em quadrado latino $r \times r$, no qual uma parcela (x) foi perdida.

x	$x + L_1$
$x + C_1$	$x + G$

Procedendo da maneira usual para a análise da variância, tem-se:

$$C = \frac{(x + G)^2}{r^2} \quad ,$$

$$SQ\ Total = x^2 + K - C \quad ,$$

$$SQ\ Linhas = \frac{1}{r} \left[(x + L_1)^2 + M \right] - C \quad ,$$

$$SQ\ Colunas = \frac{1}{r} \left[(x + C_1)^2 + N \right] - C \quad ,$$

$$SQ\ Tratamentos = \frac{1}{r} \left[(x + T_1)^2 + P \right] - C \quad ,$$

onde: K é a soma dos quadrados de cada parcela disponível,

G é o total das parcelas disponíveis,

L_1 é o total das parcelas restantes na linha de $\underline{x}$,

C_1 é o total das parcelas restantes na coluna de $\underline{x}$,

T_1 é o total das parcelas restantes no tratamento de x,

M é a soma dos quadrados dos totais das demais linhas,

N é a soma dos quadrados dos totais das demais colunas,

P é a soma dos quadrados dos totais dos demais tratamentos.

Por exclusão obtemos SQR, ou seja:

SQR = SQ Total - SQ Linhas - SQ Colunas - SQ Tratamentos.

$$= x^2 + K - C - \frac{1}{r}\left[(x + L_1)^2 + M\right] + C - \frac{1}{r}\left[(x + C_1)^2 + N\right] + C -$$

$$- \frac{1}{r}\left[(x + T_1)^2 + P\right] + C \ .$$

Simplificando e substituindo C pelo seu valor, obtemos uma função z = SQR, de x, ou seja:

$$z = x^2 + K - \frac{(x+L_1)^2}{r} - \frac{M}{r} - \frac{(x+C_1)^2}{r} - \frac{N}{r} - \frac{(x+T_1)^2}{r} - \frac{P}{r} +$$

$$+ \frac{2\,(x+G)^2}{r^2} \ .$$

O valor de x que torna mínima esta função z, será dado por:

$$\frac{dz}{dx} = 2\,x - \frac{2\,(x+L_1)}{r} - \frac{2\,(x+C_1)}{r} - \frac{2\,(x+T_1)}{r} + \frac{4\,(x+G)}{r^2} \ .$$

Anulando e simplificando a derivada, virá:

$$x - \frac{x + L_1}{r} - \frac{x + C_1}{r} - \frac{x + T_1}{r} + \frac{2\,(x + G)}{r^2} = 0 \ .$$

Resolvendo a equação, tem-se:

$$x = \frac{r\,(L_1 + C_1 + T_1) - 2\,G}{(r - 1)(r - 2)} \ .$$

A média do tratamento que contém a parcela perdida é:

$$\hat{m}_i = \frac{x + T_1}{r}$$

$$= \frac{1}{r}\left[T_1 + \frac{r\,(L_1 + C_1 + T_1) - 2\,G}{(r - 1)(r - 2)}\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{(r - 1)(r - 2)\,T_1 + r\,(L_1 + C_1 + T_1) - 2\,G}{(r - 1)(r - 2)}\right]. \qquad (6)$$

Desdobrando o valor de G como se segue

$$G = L_1 + C_1 + T_1 + R \quad ,$$

onde R representa o restante das parcelas, excluindo L_1, C_1 e T_1, e substituindo em (6), tem-se:

$$\hat{m}_i = \frac{(r - 1)(r - 2)\,T_1 + r\,L_1 + r\,C_1 + r\,T_1 - 2\,L_1 - 2\,C_1 - 2\,T_1 - 2\,R}{r\,(r - 1)(r - 2)}$$

$$= \frac{r\,(r - 2)\,T_1 + (r - 2)\,L_1 + (r - 2)\,C_1 - 2\,R}{r\,(r - 1)(r - 2)}.$$

A estimativa da variância de $\hat{m}_i$ é obtida como se segue

$$\hat{V}\,(\hat{m}_i) = \hat{V}\left[\frac{r\,(r - 2)\,T_1 + (r - 2)\,L_1 + (r - 2)\,C_1 - 2\,R}{r\,(r - 1)(r - 2)}\right]$$

$$= \frac{r^2\,(r - 2)^2\,\hat{V}\,(T_1) + (r - 2)^2\,\hat{V}\,(L_1) + (r - 2)^2\,\hat{V}\,(C_1) + 4\,\hat{V}\,(R)}{r^2\,(r - 1)^2(r - 2)^2},$$

onde: $\hat{V}\,(L_1) = \hat{V}\,(C_1) = \hat{V}\,(T_1) = (r - 1)\,s^2$,

$\hat{V}\,(R) = (r - 1)(r - 2)\,s^2$.

Assim,

$$\hat{V}\,(\hat{m}_i) = \frac{r^2\,(r-2)^2(r-1) + (r-2)^2(r-1) + (r-2)^2(r-1) + 4\,(r-1)(r-2)}{r^2\,(r - 1)^2(r - 2)^2}\,s^2 ,$$

ou ainda,

$$\hat{V}\,(\hat{m}_i) = \frac{(r - 1)(r - 2)\,\left[r^2\,(r - 2) + 2\,(r - 2) + 4\right]}{r^2\,(r - 1)^2(r - 2)^2}\,s^2 .$$

Simplificando,

$$\hat{V}(\hat{m}_i) = \frac{r(r-2)+2}{r(r-1)(r-2)}\, s^2 .$$

Se no numerador somarmos e subtrairmos 1 (um) ao fator r, êle não se altera e virá:

$$\hat{V}(\hat{m}_i) = \frac{(r-1+1)(r-2)+2}{r(r-1)(r-2)}\, s^2$$

$$= \frac{(r-1)(r-2)+r-2+2}{r(r-1)(r-2)}\, s^2,$$

donde obtém-se:

$$\hat{V}(\hat{m}_i) = \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{(r-1)(r-2)}\right] s^2 .$$

Consideremos o contraste

$$\hat{Y} = \hat{m}_i - \hat{m}_u ,$$

onde $\hat{m}_i$ representa a média do tratamento i, com uma parcela perdida, e $\hat{m}_u$ representa a média do tratamento u com todos os dados conhecidos. Como em 4.1.1, a estimativa da variância do contraste $\hat{Y}$ é:

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \hat{V}(\hat{m}_i - \hat{m}_u)$$

$$= \hat{V}(\hat{m}_i) + \hat{V}(\hat{m}_u) - 2\,\mathrm{cov}\,(\hat{m}_i, \hat{m}_u) .$$

Já vimos que

$$\hat{V}(\hat{m}_i) = \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{(r-1)(r-2)}\right] s^2 .$$

Fàcilmente obtemos:

$$\hat{V}(\hat{m}_u) = \frac{s^2}{r} ,$$

donde se conclui que

$$\hat{V}(\hat{m}_i) + \hat{V}(\hat{m}_u) = \left[\frac{2}{r} + \frac{1}{(r-1)(r-2)}\right] s^2 . \qquad (7)$$

Por outro lado,

$$\hat{Y} = \hat{m}_i - \hat{m}_u = \frac{x + T_1}{r} - \frac{T_u}{r} ,$$

onde T_u representa o total das parcelas do tratamento u .

$$\hat{Y} = \frac{r\,(r-2)\,T_1 + (r-2)\,L_1 + (r-2)\,C_1 - 2\,R}{r\,(r-1)(r-2)} - \frac{T_u}{r}$$

$$= \frac{r\,(r-2)\,T_1 + (r-2)\,L_1 + (r-2)\,C_1 - 2\,R - (r-1)(r-2)\,T_u}{r\,(r-1)(r-2)} \,.$$

A estimativa da variância de $\hat{Y}$ é:

$$\hat{V}\,(\hat{Y}) = \hat{V}\left[\frac{r\,(r-2)\,T_1 + (r-2)\,L_1 + (r-2)\,C_1 - 2\,R - (r-1)(r-2)\,T_u}{r\,(r-1)(r-2)}\right]$$

$$= \frac{r^2\,(r-2)^2\,\hat{V}\,(T_1) + (r-2)^2\,\hat{V}\,(L_1) + (r-2)^2\,\hat{V}\,(C_1) + 4\,\hat{V}\,(R)}{r^2\,(r-1)^2(r-2)^2} +$$

$$+ \frac{(r-1)^2(r-2)^2\,\hat{V}\,(T_u)}{r^2\,(r-1)^2(r-2)^2} \,,$$

onde $\hat{V}\,(T_u)$ é $r\,s^2$ e as demais já são conhecidas. Assim,

$$\hat{V}\,(\hat{Y}) = \frac{r^2\,(r-2)^2(r-1) + (r-2)^2(r-1) + (r-2)^2(r-1) + 4\,(r-1)(r-2)}{r^2\,(r-1)^2(r-2)^2}\,s^2 +$$

$$+ \frac{(r-1)^2(r-2)^2\,r}{r^2\,(r-1)^2(r-2)^2}\,s^2 \,.$$

Simplificando, virá:

$$\hat{V}\,(\hat{Y}) = \frac{2\,r^2 - 5\,r + 4}{r(r-1)(r-2)}\,s^2 \,.$$

Somando e subtraindo r no numerador, e grupando convenientemente, obtém-se:

$$\hat{V}\,(\hat{Y}) = \frac{2\,(r-1)(r-2) + r}{r\,(r-1)(r-2)}\,s^2$$

$$= \left[\frac{2}{r} + \frac{1}{(r-1)(r-2)}\right] s^2 \,. \qquad (8)$$

Confrontando (7) e (8) , concluimos que

$$\mathrm{Cov}\,(\hat{m}_i\,,\,\hat{m}_u) = 0 \quad ,$$

e portanto,

$$\hat{V}(\hat{m}_i - \hat{m}_u) = \hat{V}(\hat{m}_i) + \hat{V}(\hat{m}_u) .$$

4.2.2 - Caso de Duas Parcelas Perdidas em Linhas, Colunas e Tratamentos Distintos

Consideremos um delineamento em quadrado latino de $r \times r$, no qual foram perdidas as parcelas **x** e **y**, conforme o esquema que se segue.

x		$x + L_1$
	y	$y + L_2$
$x + C_1$	$y + C_2$	$x + y + G$

Seguindo a marcha usual de análise da variância, obtém-se:

$$C = \frac{(x + y + G)^2}{r^2} ,$$

$$SQ\ Total = x^2 + y^2 + K - C ,$$

$$SQ\ Linhas = \frac{1}{r}\left[(x + L_1)^2 + (y + L_2)^2 + M\right] - C ,$$

$$SQ\ Colunas = \frac{1}{r}\left[(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 + N\right] - C ,$$

$$SQ\ Tratamentos = \frac{1}{r}\left[(x + T_1)^2 + (y + T_2)^2 + P\right] - C ,$$

onde L_2, C_2 e T_2 têm significado semelhante ao de L_1, C_1 e T_1, referindo-se a parcela perdida **y**. Assim, temos para SQR :

SQR = SQ Total - SQ Linhas - SQ Colunas - SQ Tratamentos

$$= x^2 + y^2 + K - C - \frac{1}{r}\left[(x + L_1)^2 + (y + L_2)^2 + M\right] + C -$$

$$- \frac{1}{r}\left[(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 + N\right] + C -$$

$$- \frac{1}{r}\left[(x + T_1)^2 + (y + T_2)^2 + P\right] + C .$$

Substituindo C pelo seu valor e simplificando, vem:

$$SQR = x^2 + y^2 + K - \frac{(x + L_1)^2}{r} - \frac{(y + L_2)^2}{r} - \frac{M}{r} - \frac{(x + C_1)^2}{r} -$$

$$- \frac{(y + C_2)^2}{r} - \frac{N}{r} - \frac{(x + T_1)^2}{r} - \frac{(y + T_2)^2}{r} - \frac{P}{r} +$$

$$+ \frac{2\,(x + y + G)^2}{r^2} .$$

Os valores de $\underline{x}$ e de $\underline{y}$ que tornam mínima a função $z = SQR$, são obtidos por derivação, ou seja:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\,x - \frac{2\,(x + L_1)}{r} - \frac{2\,(x + C_1)}{r} - \frac{2\,(x + T_1)}{r} + \frac{4\,(x + y + G)}{r^2} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\,y - \frac{2\,(y + L_2)}{r} - \frac{2\,(y + C_2)}{r} - \frac{2\,(y + T_2)}{r} + \frac{4\,(x + y + G)}{r^2} .$$

Igualando a zero as duas derivadas e simplificando-as obtemos o sistema de equações:

$$\begin{aligned} (r - 1)(r - 2)\,x + 2\,y &= r\,(L_1 + C_1 + T_1) - 2\,G \\ 2\,x + (r - 1)(r - 2)\,y &= r\,(L_2 + C_2 + T_2) - 2\,G , \end{aligned}$$

que resolvido nos dá:

$$x = \frac{(r - 1)(r - 2)\left[r\,(L_1+C_1+T_1) - 2\,G\right] - 2\left[r\,(L_2+C_2+T_2) - 2\,G\right]}{(r - 1)^2(r - 2)^2 - 4} ,$$

$$y = \frac{(r - 1)(r - 2)\left[r\,(L_2+C_2+T_2) - 2\,G\right] - 2\left[r\,(L_1+C_1+T_1) - 2\,G\right]}{(r - 1)^2(r - 2)^2 - 4} \;.$$

Fàcilmente concluimos que a dimensão mínima admissível para um quadrado latino, nestas condições, é de 4×4 $(r = 4)$, pois para r ___ 4 não restam graus de liberdade para o resíduo.

Por outro lado, na fórmula acima, para $r = 3$ o denominador se anula e não podemos portanto aplicá-la (estaríamos admitindo uma divisão por zero).

A estimativa da variância do contraste entre as médias que contêm x e y respectivamente, pode ser determinada fàcilmente; para isso consideremos o esquema que se segue

x	a	c	$L_1 + x$
b	y	d	$L_2 + y$
e	f		
$C_1 + x$	$C_2 + y$		$G + x + y$

representativo de um quadrado latino $r \times r$ onde foram perdidas as parcelas x e y.

O contraste $(\hat{Y})$ entre as médias dos tratamentos que contêm x e y é dado por:

$$\hat{Y} = \hat{m}_x - \hat{m}_y$$

$$= \frac{x + T_1}{r} - \frac{y + T_2}{r}$$

$$\hat{Y} = \frac{x - y + T_1 - T_2}{r} \quad . \qquad (9)$$

Isolando as parcelas comuns a mais de um componente tem-se:

$L_1 = a + c + L'$,

$L_2 = b + d + L''$, $T_1 = d + f + T'$,

$C_1 = b + e + C'$, $T_2 = c + e + T''$.

$C_2 = a + f + C''$,

As fórmulas que estimam $\underline{x}$ e $\underline{y}$ nos permitem determinar a diferença $(x - y)$. Assim,

$$x - y = \frac{(r - 1)(r - 2)\left[r\,(L_1+C_1+T_1) - 2\,G\right] - 2\left[r\,(L_2+C_2+T_2) - 2\,G\right]}{(r - 1)^2(r - 2)^2 - 4} -$$

$$- \frac{(r - 1)(r - 2)\left[r\,(L_2+C_2+T_2) - 2\,G\right] - 2\left[r\,(L_1+C_1+T_1) - 2\,G\right]}{(r - 1)^2(r - 2)^2 - 4} .$$

Simplificando convenientemente, vem:

$$x - y = \frac{r\left[(L_1 - L_2) + (C_1 - C_2) + (T_1 - T_2)\right]}{(r - 1)(r - 2) - 2} .$$

Levando-se êste resultado em (9), tem-se:

$$\hat{Y} = \frac{\dfrac{r\left[(L_1 - L_2) + (C_1 - C_2) + (T_1 - T_2)\right]}{(r - 1)(r - 2) - 2} + T_1 - T_2}{r}$$

$$= \frac{(L_1 - L_2) + (C_1 - C_2) + (r - 2)(T_1 - T_2)}{(r - 1)(r - 2) - 2} ,$$

ou ainda,

$$\hat{Y} = \frac{\left[(a + c + L') - (b + d + L'')\right] + \left[(b + e + C') - (a + f + C'')\right]}{(r - 1)(r - 2) - 2} +$$

$$+ \frac{(r - 2)\left[(d + f + T') - (c + e + T'')\right]}{(r - 1)(r - 2) - 2}$$

$$\hat{Y} = \frac{(L'-L'') + (C'-C'') + (r-2)(T'-T'') - (r-3)\left[(c+e) - (d+f)\right]}{(r-1)(r-2) - 2}.$$

Uma vez estimado o contraste $\hat{Y}$, podemos calcular a estimativa da sua variância como se segue.

$$V(\hat{Y}) = \hat{V}\left[\frac{(L'-L'') + (C'-C'') + (r-2)(T'-T'') - (r-3)\left[(c+e) - (d+f)\right]}{(r-1)(r-2) - 2}\right]$$

$$= \frac{\hat{V}(L'-L'') + \hat{V}(C'-C'') + (r-2)^2\,\hat{V}(T'-T'') + (r-3)^2\,\hat{V}(c+e-d-f)}{\left[(r-1)(r-2) - 2\right]^2}.$$

Mas,

$$\hat{V}(L' - L'') = \hat{V}(L') + \hat{V}(L'') = 2\,(r-3)\,s^2 \;,$$

$$\hat{V}(C' - C'') = \hat{V}(C') + \hat{V}(C'') = 2\,(r-3)\,s^2 \;,$$

$$\hat{V}(T' - T'') = \hat{V}(T') + \hat{V}(T'') = 2\,(r-3)\,s^2 \;,$$

$$\hat{V}(c + e - d - f) = \hat{V}(c) + \hat{V}(d) + \hat{V}(e) + \hat{V}(f) = 4\,s^2 \;.$$

Logo,

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{2\,(r-3) + 2\,(r-3) + 2\,(r-2)^2(r-3) + 4\,(r-3)^2}{\left[(r-1)(r-2) - 2\right]^2}\,s^2 \;,$$

donde obtém-se finalmente:

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{2\,(r-2)}{r\,(r-3)}\,s^2 \;.$$

A estimativa da variância do contraste $(\hat{Y}_1)$ entre a média de um tratamento contendo <u>x</u> ou <u>y</u>, com outra onde se conhecem todos os dados pode ser obtida de maneira análoga e virá:

$$\cancel{\hat{V}(\hat{Y}_1) = \left[\frac{2}{r} + \frac{1}{r(r-3)}\right] s^2}.$$

4.2.3 - Caso de Duas Parcelas Perdidas Numa Mesma Linha

Seguindo um raciocínio análogo ao de 4.2.2 , obtém-se:

$$x = \frac{(r - 1)(L + C_1 + T_1) + (L + C_2 + T_2) - 2\,G}{(r - 2)^2} ,$$

$$y = \frac{(r - 1)(L + C_2 + T_2) + (L + C_1 + T_1) - 2\,G}{(r - 2)^2} .$$

As variâncias dos contrastes $\hat{Y}$ e $\hat{Y}_1$, (onde $\hat{Y}$ representa o contraste entre as médias dos tratamentos que contêm $\underline{x}$ e $\underline{y}$ e $\hat{Y}_1$ o contraste entre a média do tratamento que contém $\underline{x}$ ou $\underline{y}$, com outra média em que todos os dados são conhecidos) são estimadas pelas fórmulas:

$$V\,(\hat{Y}) = \frac{2\,(r - 1)}{r\,(r - 2)}\,s^2 ,$$

$$\hat{V}\,(\hat{Y}_1) = \left[\frac{r - 1}{r\,(r - 2)} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r\,(r - 2)^2} \right] s^2 .$$

4.2.4 - Caso de Duas Parcelas Perdidas Numa Mesma Coluna

$$x = \frac{(r - 1)(L_1 + C + T_1) + (L_2 + C + T_2) - 2\,G}{(r - 2)^2} ,$$

$$y = \frac{(r - 1)(L_2 + C + T_2) + (L_1 + C + T_1) - 2\,G}{(r - 2)^2} .$$

As fórmulas de variância, como era de se esperar, coincidem com as apresentadas em 4.2.3 .

4.2.5 - Caso de Duas Parcelas Perdidas num Mesmo Tratamento

$$x = \frac{(r - 1)(L_1 + C_1 + T) + (L_2 + C_2 + T) - 2\,G}{(r - 2)^2} ,$$

$$y = \frac{(r - 1)(L_2 + C_2 + T) + (L_1 + C_1 + T) - 2\,G}{(r - 2)^2} \; .$$

Como nos casos anteriores, obtém-se por dedução,

$$V\,(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{r} + \frac{2}{(r - 2)^2} \right] s^2 \; ,$$

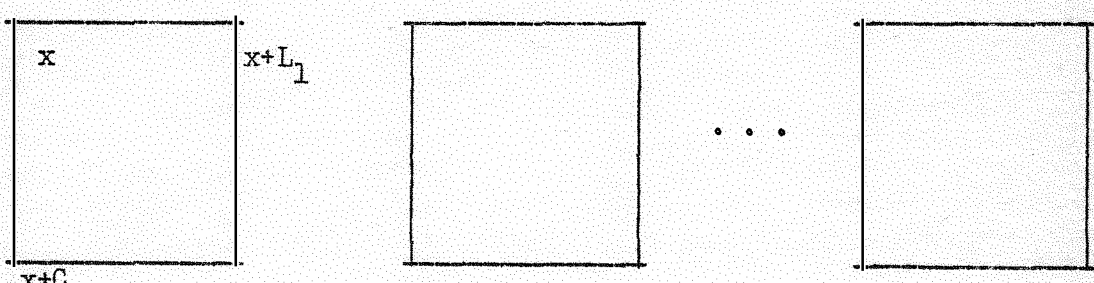
onde $\hat{Y}$ representa o contraste entre a média do tratamento que contém x̲ e y̲ e a de um outro tratamento qualquer, em que todos os dados são conhecidos.

Nos 3 últimos casos, devemos também impor $r \geq 3$, pois se por um lado para $r = 2$ o denominador das fórmulas se anula, por outro lado, com $r \leq 4$ o número de graus de liberdade do resíduo é ≤ 0, o que não é admissível.

4.3 - Ensaios em Períodos Sucessivos

4.3.1 - Caso de uma Parcela Perdida

Suponhamos um delineamento em períodos sucessívos ("change-over"), com n̲ quadrados latinos (grupos) de $r \times r$, em que foi perdida a parcela x̲ num grupo, conforme o esquema que se segue.



Seguindo a marcha de análise apresentada por PIMENTEL GOMES (16), vem:

$$C = \frac{(S + x)^2}{n\, r^2} \; ,$$

$$SQ\ Total = x^2 + K - C \; ,$$

$$\text{SQ Linhas dentro de Grupos} = \frac{1}{r}\left[(L_1 + x)^2 + N\right] - \frac{1}{r^2}\left[(G + x)^2 + M\right],$$

$$\text{SQ Colunas dentro de Grupos} = \frac{1}{r}\left[(C_1 + x)^2 + P\right] - \frac{1}{r^2}\left[(G + x)^2 + M\right],$$

$$\text{SQ Tratamentos} = \frac{1}{n\,r}\left[(T_1 + x)^2 + Q\right] - C \;,$$

$$\text{SQ Tratamentos e Grupos} = \frac{1}{r}\left[(t_1 + x)^2 + R\right] - C \;,$$

$$\text{SQ Tratamentos x Grupos} = \frac{1}{r}\left[(t_1 + x)^2 + R\right] - \frac{1}{n\,r}\left[(T_1 + x)^2 + Q\right] -$$

$$- \frac{1}{r^2}\left[(G + x)^2 + M\right] + C \;,$$

onde: K é a soma dos quadrados das parcelas disponíveis,

G é o total das parcelas disponíveis no grupo de $\underline{x}$,

S é o total das parcelas disponíveis nos $\underline{n}$ grupos,

L_1 é o total das parcelas restantes na linha de $\underline{x}$,

C_1 é o total das parcelas restantes na coluna de $\underline{x}$,

t_1 é o total das parcelas restantes no mesmo tratamento e no mesmo grupo de $\underline{x}$,

T_1 é o total das parcelas que receberam o mesmo tratamento de $\underline{x}$, nos $\underline{n}$ grupos,

M é a soma dos quadrados dos totais de cada grupo, exceto o da parcela perdida,

N é a soma dos quadrados dos totais de cada linha, exceto a da parcela perdida,

P é a soma dos quadrados dos totais de cada coluna, exceto a da parcela perdida, Q é a soma dos quadrados dos totais de cada tratamento, exceto o da parcela perdida, nos n grupos,

R é a soma dos quadrados dos totais de cada tratamento, grupo por grupo, excetuando o tratamento da parcela perdida, no grupo em que ela figura.

A soma de quadrados residual é obtida por exclusão, ou seja:

SQR = SQ Total - SQ Grupos - SQ Linhas dentro de Grupos -

- SQ Colunas dentro de Grupos - SQ Tratamentos -

- SQ Tratamentos x Grupos.

Definimos uma função z = SQR de x como se segue.

$$z = x^2 + K - C - \frac{1}{r^2}\left[(G + x)^2 + M\right] + C - \frac{1}{r}\left[(L_1 + x)^2 + N\right] +$$

$$+ \frac{1}{r^2}\left[(G + x)^2 + M\right] - \frac{1}{r}\left[(C_1 + x)^2 + P\right] +$$

$$+ \frac{1}{r^2}\left[(G + x)^2 + M\right] - \frac{1}{n\,r}\left[(T_1 + x)^2 + Q\right] + C -$$

$$- \frac{1}{r}\left[(t_1 + x)^2 + R\right] + \frac{1}{n\,r}\left[(T_1 + x)^2 + Q\right] +$$

$$+ \frac{1}{r^2}\left[(G + x)^2 + M\right] - C \;.$$

Simplificando,

$$z = x^2 + K - \frac{1}{r}\left[(L_1 + x)^2 + N\right] - \frac{1}{r}\left[(C_1 + x)^2 + P\right] +$$

$$+ \frac{2}{r^2}\left[(G + x)^2 + M\right] - \frac{1}{r}\left[(t_1 + x)^2 + R\right]$$

$$z = x^2 + k - \frac{(L_1 + x)^2}{r} - \frac{N}{r} - \frac{(C_1 + x)^2}{r} - \frac{P}{r} + \frac{2\,(G + x)^2}{r^2} +$$

$$+ \frac{2\,M}{r^2} - \frac{(t_1 + x)^2}{r} - \frac{R}{r} .$$

Procurando o mínimo da função z , virá:

$$\frac{dz}{dx} = 2\,x - \frac{2(L_1 + x)}{r} - \frac{2(C_1 + x)}{r} + \frac{4(G + x)}{r^2} - \frac{2(t_1 + x)}{r} ,$$

e, anulando e simplificando a derivada, virá:

$$x - \frac{L_1 + x}{r} - \frac{C_1 + x}{r} + \frac{2\,(G + x)}{r^2} - \frac{t_1 + x}{r} = 0 ,$$

donde, resolvendo a equação, obtém-se:

$$x = \frac{r\,(L_1 + C_1 + t_1) - 2\,G}{(r - 1)(r - 2)} .$$

Observa-se uma perfeita semelhança com a fórmula a que chegamos em 4.2.1 , o que nos leva a concluir que a estimativa de uma parcela perda num grupo, independe dos $n - 1$ grupos restantes.

Frequentemente se usa juntar ao resíduo a interação Tratamentos x Grupos. Nêste caso, por um processo análogo ao estudado, obtemos para a parcela perdida a seguinte fórmula:

$$x = \frac{r\,[n\,(L_1 + C_1) + T_1] - (n\,G + S)}{(r - 1)\,[n\,(r - 1) - 1]} .$$

A média do tratamento com a parcela perdida é:

$$m_x = \frac{x + T_1}{n\,r}$$

$$= \frac{1}{n\,r}\left[\frac{r\,(L_1+C_1+t_1) - 2\,G}{(r - 1)(r - 2)} + T_1\right] , \qquad (10)$$

onde:

$T_1 = t_1 + U$,

U = total das parcelas que receberam o mesmo tratamento de $\underline{x}$, nos demais grupos,

$G = L_1 + C_1 + t_1 + W$,

W = restante das parcelas disponíveis, excetuando-se L_1 , C_1 e t_1 , no grupo da parcela perdida.

Fazendo as substituições em (10) , obtém-se:

$$\hat{m}_x = \frac{1}{n\,r}\left[\frac{r\,(L_1 + C_1 + t_1) - 2\,(L_1 + C_1 + t_1 + W)}{(r-1)(r-2)} + t_1 + U\right]$$

$$= \frac{r\,(r-2)\,t_1 + (r-2)\,L_1 + (r-2)\,C_1 - 2\,W + (r-1)(r-2)\,U}{n\,r\,(r-1)(r-2)} .$$

A estimativa da variância da média $(\hat{m}_x)$ é:

$$\hat{V}\,(\hat{m}_x) = \frac{r^2\,(r-2)^2\,\hat{V}\,(t_1) + (r-2)^2\,\hat{V}\,(L_1) + (r-2)^2\,\hat{V}\,(C_1)}{n^2\,r^2\,(r-1)^2(r-2)^2} +$$

$$+ \frac{4\,\hat{V}\,(W) + (r-1)^2(r-2)^2\,\hat{V}\,(U)}{n^2\,r^2\,(r-1)^2(r-2)^2} .$$

Mas, $\hat{V}\,(t_1) = \hat{V}\,(L_1) = \hat{V}\,(C_1) = (r-1)\,s^2$,

$\hat{V}\,(W) = (r-1)(r-2)\,s^2$,

$\hat{V}\,(U) = r\,(n-1)\,s^2$.

Logo,

$$\hat{V}\,(\hat{m}_x) = \frac{r^2\,(r-2)^2(r-1) + 2\,(r-2)^2(r-1) + 4\,(r-2)(r-1)}{n^2\,r^2\,(r-1)^2(r-2)^2}\,s^2 +$$

$$+ \frac{r\,(r-2)^2(r-1)^2(n-1)}{n^2\,r^2\,(r-1)^2(r-2)^2}\,s^2 .$$

Simplificando, vem:

$$\hat{V}\,(\hat{m}_x) = \frac{n\,r^3 - 3\,n\,r^2 + 2\,n\,r + r^2}{n^2\,r^2\,(r-1)(r-2)}\,s^2 ,$$

e, por desdobramento e simplificação, vem:

$$\hat{V}\ (\hat{m}_x) = \left[\frac{1}{n\ r} + \frac{1}{n^2\ (r - 1)(r - 2)} \right] s^2 .$$

Consideremos o contraste,

$$\hat{Y} = \hat{m}_x - \hat{m}_u \ ,$$

onde $\hat{m}_u$ representa a média do tratamento $\underline{u}$, com todos os dados conhecidos. A estimativa da variância do contraste é:

$$\hat{V}\ (\hat{Y}) = \hat{V}\ (\hat{m}_x) + \hat{V}\ (\hat{m}_u) - 2\ \mathrm{Cov}\ (\hat{m}_x\ ,\ \hat{m}_u) .$$

Já vimos que

$$\hat{V}\ (\hat{m}_x) = \left[\frac{1}{n\ r} + \frac{1}{n^2\ (r - 1)(r - 2)} \right] s^2 ,$$

e, fàcilmente obtemos:

$$\hat{V}\ (\hat{m}_u) = \frac{1}{n\ r}\ s^2 .$$

Logo,

$$\hat{V}\ (\hat{m}_x) + \hat{V}\ (\hat{m}_u) = \left[\frac{2}{n\ r} + \frac{1}{n^2\ (r - 1)(r - 2)} \right] s^2 . \qquad (11)$$

Por outro lado,

$$\hat{Y} = \hat{m}_x - \hat{m}_u = \frac{x + T_1}{n\ r} - \frac{T_u}{n\ r}$$

$$= \frac{r\ (r-2)\ t_1 + (r-2)\ L_1 + (r-2)\ C_1 - 2\ W + (r - 1)(r - 2)\ U}{n\ r\ (r - 1)(r - 2)} - \frac{T_u}{n\ r} .$$

$$= \frac{r\ (r-2)\ t_1 + (r-2)(L_1 + C_1) - 2\ W + (r-1)(r-2)\ U - (r-1)(r-2)\ T_u}{n\ r\ (r - 1)(r - 2)} .$$

A estimativa da variância de $\hat{Y}$ é:

$$\hat{V}\ (\hat{Y}) = \frac{r^2\ (r - 2)^2\ \hat{V}\ (t_1) + (r - 2)^2\ \hat{V}\ (L_1 + C_1) + 4\ \hat{V}\ (W)}{n^2\ r^2\ (r - 1)^2 (r - 2)^2} +$$

$$+ \frac{(r - 1)^2 (r - 2)^2\ \hat{V}\ (U) + (r - 1)^2 (r - 2)^2\ \hat{V}\ (T_u)}{n^2\ r^2\ (r - 1)^2 (r - 2)^2} ,$$

onde $\hat{V}(T_u) = n\,r\,s^2$ e as demais já são conhecidas.

Assim,

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{r^2(r-2)^2(r-1) + 2(r-2)^2(r-1) + 4(r-1)(r-2)}{n^2 r^2 (r-1)^2(r-2)^2}\, s^2 +$$

$$+ \frac{r(r-1)^2(r-2)^2(n-1) + n\,r\,(r-1)^2(r-2)^2}{n^2 r^2 (r-1)^2(r-2)^2}\, s^2 .$$

Desenvolvendo e simplificando, virá:

$$V(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{n\,r} + \frac{1}{n^2 (r-1)(r-2)}\right] s^2 . \qquad (12)$$

Confrontando (11) e (12) concluimos

$$\mathrm{Cov}\,(\hat{m}_x , \hat{m}_u) = 0 .$$

4.3.2 - Caso de Duas Parcelas Perdidas num Mesmo Grûpo

As estimativas das parcelas perdidas $\underline{x}$ e $\underline{y}$, podem ser obtidas através das mesma fórmulas de 4.2.2 a 4.2.5. Entretanto, devemos admitir que a restrição feita ao valor de $\underline{r}$ é um pouco menos rígida, pois as fórmulas são válidas também para $r = 3$, ou seja, para quadrado latino de dimensões mínimas 3×3.

As fórmulas que estimam a variância dos contrastes entre médias, nos casos em aprêço, são dadas abaixo.

4.3.2.1 - Tratamentos, Linhas e Colunas Distintos

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{n\,r} + \frac{2}{n^2 r (r-3)}\right] s^2 ,$$

$$\hat{V}(\hat{Y}_1) = \left[\frac{2}{n\,r} + \frac{1}{n^2 r (r-3)}\right] s^2 ,$$

onde $\hat{Y}$ representa o contraste entre as médias dos tratamentos que contêm $\underline{x}$ e $\underline{y}$ respectivamente, e $\hat{Y}_1$ o contraste entre a média do tratamento que contém $\underline{x}$ ou $\underline{y}$ com outra onde todos os dados são conhecidos.

4.3.2.2 - Mesma Linha ou Coluna

$$V\,(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{n\,r} + \frac{2}{n^2\,r\,(r-2)}\right] s^2 ,$$

$$V\,(\hat{Y}_1) = \left[\frac{2}{n\,r} + \frac{1}{n^2\,r\,(r-2)}\right] s^2 ,$$

onde $\hat{Y}$ e $\hat{Y}_1$ têm o mesmo significado do caso anterior.

4.3.2.3 - Mesmo Tratamento

$$\hat{V}\,(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{n\,r} + \frac{2}{n^2\,(r-2)^2}\right] s^2 ,$$

onde $\hat{Y}$ representa o contraste entre a média do tratamento que contém $\underline{x}$ e $\underline{y}$ e a de outro tratamento qualquer em que todos os dados são conhecidos.

4.3.3 - Caso de Duas Parcelas Perdidas em Grupos Distintos

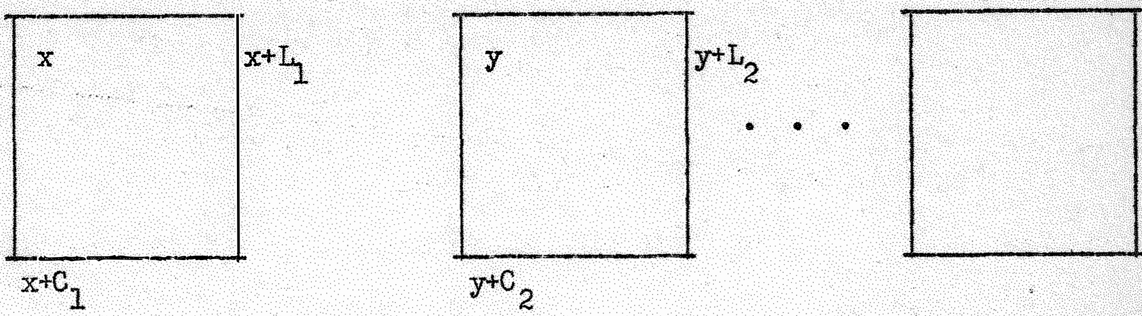
Distinguimos aqui dois casos, a saber:

4.3.3.1 - Em Tratamentos Distintos

4.3.3.2 - No Mesmo Tratamento

4.3.3.1 - Caso de Duas Parcelas Perdidas em Grupos e Tratamentos Distintos

Consideremos um delineamento em períodos sucessivos, com $\underline{n}$ quadrados latinos de $r \times r$, em que se perdeu uma parcela (x) num grupo e outra (y) em outro grupo, conforme o esquema que se segue.



Seguindo a marcha de análise dos casos anteriores, tem-se:

$$C = \frac{(x + y + S)^2}{n\, r^2} \, ,$$

$$SQ\ Total = x^2 + y^2 + K - C \, ,$$

$$SQ\ Grupos = \frac{1}{r^2}\left[(x + G_1)^2 + (y + G_2)^2 + M\right] - C \, ,$$

$$SQ\ Linhas\ dentro\ de\ Grupos = \frac{1}{r}\left[(x+L_1)^2+(y+L_2)^2+N\right] - \frac{1}{r^2}\left[(x+G_1)^2+(y+G_2)^2+M\right] ,$$

$$SQ\ Colunas\ dentro\ de\ Grupos = \frac{1}{r}\left[(x+C_1)^2+(y+C_2)^2+P\right] - \frac{1}{r^2}\left[(x+G_1)^2+(y+G_2)^2+M\right] ,$$

$$SQ\ Tratamentos = \frac{1}{n\, r}\left[(x + T_1)^2 + (y + T_2)^2 + Q\right] - C \, ,$$

$$SQ\ Tratamentos\ e\ Grupos = \frac{1}{r}\left[(x + t_1)^2 + (y + t_2)^2 + R\right] - C \, ,$$

$$SQ\ Tratamentos\ x\ Grupos = \frac{1}{r}\left[(x + t_1)^2 + (y + t_2)^2 + R\right] -$$

$$- \frac{1}{n\, r}\left[(x + T_1)^2 + (y + T_2)^2 + Q\right] -$$

$$- \frac{1}{r^2}\left[(x + G_1)^2 + (y + G_2)^2 + M\right] + C \, ,$$

onde o significado das letras é o mesmo de 4.3.1 .

Por exclusão obtemos z = SQR , ou seja:

z = SQR = SQ Total - SQ Grupos - SQ Linhas dentro de Grupos -

- SQ Colunas dentro de Grupos - SQ Tratamentos -

- SQ Tratamentos x Grupos

$$z = x^2+y^2+K - \frac{1}{r}\left[(x+L_1)^2 + (y+L_2)^2 + N\right] - \frac{1}{r}\left[(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2 + P\right] +$$

$$+ \frac{2}{r^2}\left[(x+G_1)^2 + (y+G_2)^2 + M\right] - \frac{1}{r}\left[(x+t_1)^2 + (y+t_2)^2 + R\right]$$

$$z = x^2 + y^2 + K - \frac{(x + L_1)^2}{r} - \frac{(y + L_2)^2}{r} - \frac{N}{r} - \frac{(x + C_1)^2}{r} -$$

$$- \frac{(y + C_2)^2}{r} - \frac{P}{r} + \frac{2\,(x + G_1)^2}{r^2} + \frac{2\,(y + G_2)^2}{r^2} +$$

$$+ \frac{2\,M}{r^2} - \frac{(x + t_1)^2}{r} - \frac{(y + t_2)^2}{r} - \frac{R}{r} .$$

Derivando parcialmente em relação a $\underline{x}$ e $\underline{y}$, vem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\,x - \frac{2\,(x + L_1)}{r} - \frac{2\,(x + C_1)}{r} + \frac{4\,(x + G_1)}{r^2} \quad \frac{2\,(x + t_1)}{r} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\,y - \frac{2\,(y + L_2)}{r} - \frac{2\,(y + C_2)}{r} + \frac{4\,(y + G_2)}{r^2} - \frac{2\,(y + t_2)}{r} .$$

Anulando as derivadas, simplificando-as e grupando convenientemente, obtém-se:

$$x = \frac{r\,(L_1 + C_1 + t_1) - 2\,G_1}{(r - 1)(r - 2)} ,$$

$$y = \frac{r\,(L_2 + C_2 + t_2) - 2\,G_2}{(r - 1)(r - 2)} .$$

Concluimos portanto que no caso de perda de duas ou mais parcelas, uma em cada grupo, fàcilmente as estimamos, por repetição do emprêgo da fórmula que estima uma parcela perdida nos ensaios em quadrado latino.

Consideremos o contraste

$$\hat{Y} = \hat{m}_x - \hat{m}_y$$

$$= \frac{x + t_1 + U_1}{n\,r} - \frac{y + t_2 + U_2}{n\,r}$$

$$= \frac{x - y + t_1 - t_2 + U_1 - U_2}{n\,r} \,,$$

onde: t_1 é o total das parcelas restantes no mesmo tratamento e no mesmo grupo de $\underline{x}$,

t_2 é o total das parcelas restantes no mesmo tratamento e no mesmo grupo de $\underline{y}$,

U_1 é o total das parcelas que receberam o mesmo tratamento de $\underline{x}$, nos demais grupos,

U_2 é o total das parcelas que receberam o mesmo tratamento de $\underline{y}$, nos demais grupos.

Assim,

$$\hat{Y} = \frac{\dfrac{r\,(L_1+C_1+t_1) - 2\,G_1}{(r-1)(r-2)} - \dfrac{r\,(L_2+C_2+t_2) - 2\,G_2}{(r-1)(r-2)} + t_1 - t_2 + U_1 - U_2}{n\,r} \,.$$

Tomando-se $G_1 = L_1 + C_1 + t_1 + W_1$,

$G_2 = L_2 + C_2 + t_2 + W_2$,

W_1 = total das parcelas disponíveis, excetuando L_1 , C_1 e t_1 , no grupo onde figura $\underline{x}$,

W_2 = total das parcelas disponíveis, excetuando L_2 , C_2 e t_2 , no grupo onde figura $\underline{y}$, tem-se, após desenvolvimento:

$$\hat{Y} = \frac{(r-2)(L_1-L_2+C_1-C_2) + r\,(r-2)(t_1-t_2) - 2\,(W_1-W_2) + (r-1)(r-2)(U_1-U_2)}{n\,r\,(r-1)(r-2)} .$$

A estimativa da variância de $\hat{Y}$ será:

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{(r-2)^2\,\hat{V}(L_1 - L_2 + C_1 - C_2) + r^2\,(r-2)^2\,\hat{V}(t_1 - t_2)}{n^2\,r^2\,(r-1)^2\,(r-2)^2} +$$

$$+ \frac{4\,\hat{V}(W_1 - W_2) + (r-1)^2(r-2)^2\,\hat{V}(U_1 - U_2)}{n^2\,r^2\,(r-1)^2(r-2)^2} .$$

Mas,

$$\hat{V}(L_1 - L_2 + C_1 - C_2) = \hat{V}(L_1) + \hat{V}(L_2) + \hat{V}(C_1) + \hat{V}(C_2) = 4\,(r-1)\,s^2 ,$$

$$\hat{V}(t_1 - t_2) = \hat{V}(t_1) + \hat{V}(t_2) = 2\,(r-1)\,s^2 ,$$

$$\hat{V}(W_1 - W_2) = \hat{V}(W_1) + \hat{V}(W_2) = 2\,(r-1)(r-2)\,s^2 ,$$

$$\hat{V}(U_1 - U_2) = \hat{V}(U_1) + \hat{V}(U_2) = 2\,(n-1)\,r\,s^2 .$$

Assim,

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{4\,(r-1)(r-2)^2 + 2\,r^2\,(r-1)(r-2)^2 + 8\,(r-1)(r-2)}{n^2\,r^2\,(r-1)^2(r-2)^2}\,s^2 +$$

$$+ \frac{2\,r\,(n-1)(r-1)^2(r-2)^2}{n^2\,r^2\,(r-1)^2(r-2)^2}\,s^2 ,$$

e, com as devidas simplificações obtém-se:

$$\hat{V}(\hat{Y}) = 2\left[\frac{1}{n\,r} + \frac{1}{n^2\,(r-1)(r-2)}\right] s^2 . \qquad (13)$$

Provaremos agora que a covariância do referido contraste é nula e que existe completa independência de comportamento entre os grupos de quadrados-latinos do delineamento em apreço.

Ora, é sabido que se

$$\hat{Y} = \hat{m}_x - \hat{m}_y$$

tem-se:

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \hat{V}(\hat{m}_x - \hat{m}_y)$$
$$= \hat{V}(\hat{m}_x) + \hat{V}(\hat{m}_y) - 2 \operatorname{Cov}(\hat{m}_x , \hat{m}_y). \qquad (14)$$

Consideremos $\hat{m}_x$ e $\hat{m}_y$ como médias completamente independentes e teremos, baseados em 4.3.1 :

$$\hat{V}(\hat{m}_x) = \left[\frac{1}{n\,r} + \frac{1}{n^2 (r-1)(r-2)} \right] s^2 ,$$

$$\hat{V}(\hat{m}_y) = \left[\frac{1}{n\,r} + \frac{1}{n^2 (r-1)(r-2)} \right] s^2 .$$

Logo,

$$\hat{V}(\hat{m}_x) + \hat{V}(\hat{m}_y) = 2 \left[\frac{1}{n\,r} + \frac{1}{n^2 (r-1)(r-2)} \right] s^2 . \qquad (15)$$

Conclui-se pois que a consideração feita acima sôbre a independência das médias é válida, e, portanto, existe a independência de comportamento entre os grupos de quadrados latinos.

Além disso, pelo simples confrônto de (13) , (14) e (15), verifica-se que a covariância é nula.

4.3.3.2 - Caso de Duas Parcelas Perdidas no Mesmo Tratamento e em Grupos Distintos

As fórmulas que estimam as parcelas $\underline{x}$ e $\underline{y}$ e a da estimativa da variância do contraste $\hat{Y}$, entre a média do tratamento que contém $\underline{x}$ e $\underline{y}$ e outra média qualquer onde todos os valores são conhecidos, são as mesmas do caso anterior (4.3.3.1), ou seja:

$$x = \frac{r\,(L_1 + C_1 + t_1) - 2\,G_1}{(r-1)(r-2)} ,$$

$$y = \frac{r\ (L_2 + C_2 + t_2) - 2\ G_2}{(r - 1)(r - 2)}\ ,$$

$$\hat{V}\ (\hat{Y}) = 2 \left[\frac{1}{n\ r} + \frac{1}{n^2\ (r - 1)(r - 2)} \right] s^2\ . \qquad (16)$$

Aplicando o mesmo raciocínio podemos deduzir uma fórmula que estima a variância da média $(\hat{m}_{x,y})$ do tratamento que contém $\underline{x}$ e $\underline{y}$, ou seja:

$$\hat{V}\ (\hat{m}_{x,y}) = \left[\frac{1}{n\ r} + \frac{2}{n^2\ (r - 1)(r - 2)} \right] s^2\ .$$

Por outro lado, a estimativa da variância de uma média de tratamento onde todos os dados são conhecido é:

$$\hat{V}\ (\hat{m}) = \frac{s^2}{n\ r}\ .$$

Assim,

$$\hat{V}\ (\hat{m}_{x,y}) + \hat{V}\ (\hat{m}_1) = \left[\frac{2}{n\ r} + \frac{2}{n^2\ (r - 1)(r - 2)} \right] s^2\ . \qquad (17)$$

Confrontando (16) e (17), concluimos que também nêste caso, a covariância é nula.

5 - MÉTODO ITERATIVO OU DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Êste método, conforme já afirmamos, foi aplicado por YATES (20), para a determinação de valores para as parcelas perdidas.

Quando temos uma única parcela perdida, num experimento em blocos casualizados, esta pode ser fàcilmente estimada pela fórmula:

$$x = \frac{r\,B + n\,T - G}{(r - 1)(n - 1)} \quad . \qquad (18)$$

conforme já foi demonstrado.

Quando várias parcelas são perdidas, x , y , z , w , ... , primeiramente damos valores arbitrários para tôdas as unidades perdidas, exceto uma, que vamos supor ser a parcela $\underline{x}$. Usamos então a fórmula (18) para determinar uma estimativa para $\underline{x}$. Com esta estimativa e os valores pròviamente assumidos por z , w , ... , tornamos a empregar a fórmula (18) para inserir uma iteração para $\underline{y}$. Assim fazemos sucessivamente para tôdas as parcelas perdidas, sempre considerando como se fôsse uma única parcela a estimar. Depois de um ciclo completo destas operações, determinamos uma segunda iteração para cada uma das parcelas perdidas. Em cada estágio subsequente os valores aproximados estimados anteriormente são substituidos pelos novos valores que vão sendo determinados. O processo é continuado até que as iterações para uma mesma parcela sejam convergentes.

No caso de um experimento em quadrado latino, procedemos da mesma forma, apenas lembrando que a fórmula que estima uma parcela é:

$$x = \frac{r\,(L_1 + C_1 + T_1) - 2\,G}{(r - 1)(r - 2)} \quad .$$

Consideremos um exemplo de PIMENTEL GOMES (16) onde supomos perdidas duas parcelas num experimento com adubos verdes e milho, em blocos casualizados, em que as produções obtidas em quilos de matéria verde por parcela foram as seguintes

	1º Bloco	2º Bloco	3º Bloco	4º Bloco	
Mucuna Preta	x	76,8	88,6	81,6	247,0 +x
Feijão de Porco	44,0	y	52,4	52,2	148,6 +y
Crotalária juncea	102,4	90,8	92,0	84,8	370,0
Guandú	68,4	55,2	49,0	61,2	233,8
Tephrosia Candida	34,0	32,4	24,4	30,0	120,8
Soja	33,0	34,8	32,0	33,6	133,4
Crotalaria Gratiana	25,8	21,6	19,2	21,0	87,6
Milho	138,8	106,4	108,0	81,8	435,6
	446,4 +x	418,0 +y	465,6	446,2	1776,2+x+y

De acôrdo com as convenções adotadas nêste trabalho temos:

B_1 = 446,4 ,

B_2 = 418,0 ,

T_1 = 247,0 ,

T_2 = 148,6 ,

G = 1776,2 ,

r = 4 ,

n = 8 ,

x e y = parcelas perdidas.

Dando-se um valor arbitrário para $\underline{y}$ podemos calcular x_1 ; façamos $y_0 = 50,0$. Assim, virá:

$$x_1 = \frac{4 \times 446,4 + 8 \times 247,0 - (1776,2 + 50,0)}{(4 - 1)(8 - 1)} = 92,16 .$$

Com êste valor, calculamos y_1 , ou seja:

$$y_1 = \frac{4 \times 418,0 + 8 \times 148,6 - (1776,2 + 92,16)}{(4 - 1)(8 - 1)} = 47,26 .$$

Passamos agora ao segundo ciclo de iterações, ou seja:

$$x_2 = \frac{4 \times 446,4 + 8 \times 247,0 - (1776,2 + 47,26)}{(4 - 1)(8 - 1)} = 92,29 ,$$

$$y_2 = \frac{4 \times 418,0 + 8 \times 148,6 - (1776,2 + 92,29)}{(4 - 1)(8 - 1)} = 47,25 .$$

Pelo mesmo raciocínio, obteríamos o terceiro ciclo:

$$x_3 = 92,29 ,$$

$$y_3 = 47,25 .$$

Observa-se pois que é desnecessário estender mais o cálculo, uma vez que os valores de x_i e y_i $(i = 1 , 2 , 3)$ já são convergentes. Temos pois, como estimativas:

$$x = 92,3 ,$$

$$y = 47,3 .$$

Geralmente, como já afirmamos, dois ciclos são suficientes para estimar os valores perdidos.

6 - O MÉTODO ITERATIVO SOB O PONTO DE VISTA DE SUCESSÕES

Como já foi exposto, a estimativa das parcelas perdidas, pelo método iterativo, se baseia em dar um valor arbitrário inicial à $(n - 1)$ parcelas perdidas e proceder os cálculos como se uma única parcela fôsse perdida.

Geralmente considera-se como um bom valor arbitrário inicial, a média aritmética dos valores conhecidos; outros preferem tirar a média do bloco ou da coluna em que a parcela perdida se encontra. Embora haja preferência por esta ou aquela maneira, provaremos que êste valor pode ser qualquer, uma vez que os valores limites (obtidos com infinitas iterações) para as estimativas das parcelas perdidas independem dêle.

Procuraremos fazer um estudo detalhado dos diversos casos de duas parcelas perdidas em blocos casualizados, quadrado latino, estendendo êste para os casos de ensaios em períodos sucessivos ("change-over"), que, conforme vimos, se enquadram perfeitamente nos casos comuns de quadrado latino.

6.1 - Ensaios em Blocos Casualizados

6.1.1 - Caso de Duas Parcelas Perdidas em Blocos e Tratamentos Distintos

A fórmula que nos permite avaliar uma parcela perdida é:

$$x = \frac{r\,B + n\,T - G}{(r - 1)(n - 1)} ,$$

conforme foi deduzida em 4.1.1 . No nosso caso temos duas parcelas perdidas; dando-se um valor arbitrário (y_0) a uma delas, podemos fàcilmente estimar a outra, ou seja:

$$x_1 = \frac{r\ B_1 + n\ T_1 - (G + y_o)}{(r - 1)(n - 1)}\ .$$

Com o valor x_1 , obtemos uma primeira estimativa para $\underline{y}$:

$$y_1 = \frac{r\ B_2 + n\ T_2 - (G + x_1)}{(r - 1)(n - 1)}\ ,$$

completando assim o primeiro ciclo de iterações. Com o valor y_1 calculamos x_2 e com êste, y_2 , e assim sucessivamente.

Ora, fàcilmente concluimos que nas fórmulas que estimam $\underline{x}$ e $\underline{y}$ respectivamente, o que varia são os sucessivos valores dessas incógnitas, permanecendo o resto imutável. Portanto, se fizermos

$$r\ B_1 + n\ T_1 - G = \alpha\ ,$$
$$r\ B_2 + n\ T_2 - G = \beta\ ,$$
$$(r - 1)(n - 1) = D\ ,$$

teremos:

$$x_1 = \frac{\alpha}{D} - \frac{y_o}{D}\ ,$$

$$y_1 = \frac{\beta}{D} - \frac{x_1}{D}\ .$$

Substituindo x_1 pelo seu valor em y_1 , virá:

$$y_1 = \frac{\beta}{D} - \frac{\alpha}{D^2} + \frac{y_o}{D^2}\ .$$

Para os demais ciclos de iterações, teremos:

$$x_2 = \frac{\alpha}{D} - \frac{\beta}{D^2} + \frac{\alpha}{D^3} - \frac{y_o}{D^3}\ ,$$

$$y_2 = \frac{\beta}{D} - \frac{\alpha}{D^2} + \frac{\beta}{D^3} - \frac{\alpha}{D^4} + \frac{y_o}{D^4}\ ,$$

$$x_3 = \frac{\alpha}{D} - \frac{\beta}{D^2} + \frac{\alpha}{D^3} - \frac{\beta}{D^4} + \frac{\alpha}{D^5} - \frac{y_o}{D^5}\ .$$

Prosseguindo, obtemos por indução:

$$x_N = \frac{\alpha}{D} - \frac{\beta}{D^2} + \frac{\alpha}{D^3} - \frac{\beta}{D^4} + \dots - \frac{\beta}{D^{2N-2}} + \frac{\alpha}{D^{2N-1}} - \frac{y_o}{D^{2N-1}} .$$

Como se observa, a influência do valor arbitrário y_o, na formação de cada novo valor, decresce numa progressão geométrica de razão $q = - \frac{1}{D}$.

Se considerarmos os sucessivos valores assumidos por x_i, $(i = 1 , \dots , N)$, teremos, como vimos acima:

$$x_1 = \frac{\alpha}{D} - \frac{y_o}{D} ,$$

$$x_2 = \frac{\alpha}{D} - \frac{\beta}{D^2} + \frac{\alpha}{D^3} - \frac{y_o}{D^3} ,$$

$$x_3 = \frac{\alpha}{D} - \frac{\beta}{D^2} + \frac{\alpha}{D^3} - \frac{\beta}{D^4} + \frac{\alpha}{D^5} - \frac{y_o}{D^5} ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$x_N = \frac{\alpha}{D} - \frac{\beta}{D^2} + \frac{\alpha}{D^3} - \dots - \frac{\beta}{D^{2N-2}} + \frac{\alpha}{D^{2N-1}} \quad \frac{y_o}{D^{2N-1}} .$$

Calculando as diferenças entre cada dois valores consecutivos de x_i, tem-se:

$$d_1 = x_2 - x_1 = \frac{\alpha - D\,\beta + y_o\,(D^2 - 1)}{D^3} ,$$

$$d_2 = x_3 - x_2 = \frac{\alpha - D\,\beta + y_o\,(D^2 - 1)}{D^5} ,$$

$$d_3 = x_4 - x_3 = \frac{\alpha - D\,\beta + y_o\,(D^2 - 1)}{D^7} ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$d_N = x_{N+1} - x_N = \frac{\alpha - D\,\beta + y_o\,(D^2 - 1)}{D^{2N+1}} .$$

Nota-se que as diferenças consecutivas formam uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{D^2}$, portanto convergente (para $D > 1$) e cujo têrmo geral tende a zero. Isto explica a convergência dos sucessivos valores de x_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

Voltando-se ao valor de x_N

$$x_N = \frac{\alpha}{D} - \frac{\beta}{D^2} + \frac{\alpha}{D^3} - \ldots - \frac{\beta}{D^{2N-2}} + \frac{\alpha}{D^{2N-1}} - \frac{y_o}{D^{2N-1}} .$$

Somando e subtraindo $\frac{\beta}{D^{2N}}$ à expressão acima, ela não se altera e teremos:

$$x_N = \frac{\alpha}{D} - \frac{\beta}{D^2} + \frac{\alpha}{D^3} - \ldots - \frac{\beta}{D^{2N-2}} + \frac{\alpha}{D^{2N-1}} - \frac{\beta}{D^{2N}} + \frac{\beta}{D^{2N}} - \frac{y_o}{D^{2N-1}} .$$

Grupando, virá:

$$x_N = \frac{\alpha}{D}\left[1 + \frac{1}{D^2} + \ldots + \frac{1}{D^{2N-2}}\right] - \frac{\beta}{D^2}\left[1 + \frac{1}{D^2} + \ldots + \frac{1}{D^{2N-2}}\right] + \frac{\beta}{D^{2N}} - \frac{y_o}{D^{2N-1}}$$

$$x_N = \left[\frac{\alpha}{D} - \frac{\beta}{D^2}\right]\left[1 + \frac{1}{D^2} + \ldots + \frac{1}{D^{2N-2}}\right] + \frac{\beta}{D^{2N}} - \frac{y_o}{D^{2N-1}} .$$

Passando-se ao limite, com N tendendo a infinito, tem-se:

$$\lim_{N \to \infty} x_N = x = \lim_{N \to \infty}\left[\left(\frac{\alpha}{D} - \frac{\beta}{D^2}\right)\left(1 + \frac{1}{D^2} + \ldots + \frac{1}{D^{2N-2}}\right) + \frac{\beta}{D^{2N}} - \frac{y_o}{D^{2N-1}}\right].$$

Mas, a expressão $1 + \frac{1}{D^2} + \ldots + \frac{1}{D^{2N-2}}$ é uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{D^2} < 1$.

Para $q = \frac{1}{D^2} = 1$ tem-se:

$$D = (r - 1)(n - 1) = 1 \quad ,$$

e, consequentemente $r = n = 2$, o que corresponde a um ensaio com 2 tratamentos e 2 repetições. Neste caso, a perda de duas parcelas corresponde a perda de metade do experimento, não havendo interêsse algum na estimativa das mesmas. Por outro lado, o quadro de análise da variância não tem significado, pois temos apenas um grau de liberdade para todo o ensaio, ou seja:

Causa da variação	G. L.
Blocos (repetições)	1
Tratamentos	0 (?)
Resíduo	0 (?)
TOTAL	1

Resta considerarmos $q = \frac{1}{D^2} \angle 1$ ($D \searrow 1$). Neste caso, pela teoria das sucessões virá:

$$\lim_{N \to \infty} \left(1 + \frac{1}{D^2} + \ldots + \frac{1}{D^{2N-2}}\right) = \frac{D^2}{D^2 - 1} \quad .$$

Considerando ainda que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\beta}{D^{2N}} = 0 \quad ,$$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{y_o}{D^{2N-1}} = 0 \quad ,$$

concluimos:

$$x = \left(\frac{\alpha}{D} - \frac{\beta}{D^2}\right)\left(\frac{D^2}{D^2 - 1}\right) = \frac{D\,\alpha - \beta}{D^2 - 1} \quad .$$

Como era de se esperar, o valor de x, obtido com infinitas iterações, é o mesmo a que chegamos em 4.1.2 .

Uma outra observação interessante é que, como já haviamos afirmado, $\underline{x}$ independe do valor arbitrário y_o, razão pela qual se pode atribuir a êste, qualquer valor.

A diferença (d) entre o valor $\underline{x}$ e um valor x_N (com N iterações), é:

$$d = x - x_N$$

$$= \frac{D\alpha - \beta}{D^2 - 1} - \left[\left(\frac{\alpha}{D} - \frac{\beta}{D^2}\right)\left(1 + \frac{1}{D^2} + \ldots + \frac{1}{D^{2N-2}}\right) + \frac{\beta}{D^{2N}} - \frac{y_o}{D^{2N-1}} \right]$$

$$= \frac{D\alpha - \beta}{D^2 - 1} - \left[\left(\frac{D\alpha - \beta}{D^2}\right)\left(1 + \frac{1}{D^2} + \ldots + \frac{1}{D^{2N-2}}\right) + \frac{\beta}{D^{2N}} - \frac{y_o}{D^{2N-1}} \right] .$$

Mas, o estudo das sucessões nos permite avaliar a soma dos têrmos da progressão acima, ou seja:

$$S_N = 1 + \frac{1}{D^2} + \ldots + \frac{1}{D^{2N-2}} = \frac{D^{2N} - 1}{D^{2N-2}\,(D^2 - 1)} .$$

Assim,

$$d = \frac{D\alpha - \beta}{D^2 - 1} - \left[\frac{D\alpha - \beta}{D^2} \cdot \frac{D^{2N} - 1}{D^{2N-2}\,(D^2 - 1)} + \frac{\beta}{D^{2N}} - \frac{y_o}{D^{2N-1}} \right]$$

$$= \frac{D\alpha - \beta}{D^2 - 1} - \frac{(D^{2N} - 1)(D\alpha - \beta)}{D^{2N}\,(D^2 - 1)} - \frac{\beta}{D^{2N}} + \frac{y_o}{D^{2N-1}}$$

$$= \frac{D^{2N}(D\alpha - \beta) - (D^{2N} - 1)(D\alpha - \beta) - (D^2 - 1)\,\beta + D\,(D^2 - 1)\,y_o}{D^{2N}\,(D^2 - 1)}$$

$$= \frac{D\alpha - \beta - (D^2 - 1)\,\beta + D\,(D^2 - 1)\,y_o}{D^{2N}\,(D^2 - 1)} ,$$

e finalmente,

$$d = \frac{\alpha - D\beta + (D^2 - 1)\,y_o}{D^{2N-1}\,(D^2 - 1)} .$$

Se relacionarmos <u>d</u> com d_N , podemos avaliar a grandeza do êrro cometido quando se faz apenas $(N + 1)$ iterações para estimar <u>x</u> , ou seja:

$$\frac{d}{d_N} = \frac{x - x_N}{x_{N+1} - x_N} = \frac{\dfrac{\alpha - D\beta + (D^2 - 1)\,y_o}{D^{2N-1}\,(D^2 - 1)}}{\dfrac{\alpha - D\beta + (D^2 - 1)\,y_o}{D^{2N+1}}} = \frac{D^2}{D^2 - 1} \ .$$

De acôrdo com o resultado obtido, concluimos:

a) A relação $\dfrac{d}{d_N} = \dfrac{D^2}{D^2 - 1}$ independe do valor de N e também do valor arbitrário y_o ; ela depende apenas do número de tratamentos e repetições, pois $D = (r - 1)(n - 1)$.

b) Quanto maior o valor de D , mais próxima da unidade estará a relação acima e tanto mais aquele valor x_{N+1} representa <u>x</u> .

c) De um modo geral, para qualquer valor arbitrário dado a <u>y</u> , o cálculo de <u>x</u> pode ser feito com duas iterações apenas, sem incorrermos em êrro grave, pois a relação $\dfrac{d}{d_N}$ sendo na maioria dos casos muito próxima de 1 (um), nos indica que <u>d</u> e d_N pràticamente se equivalem.

Ora, sabemos que

$$d = x - x_N \ , \quad \text{e}$$

$$d_N = x_{N+1} - x_N \ .$$

Como a relação é válida para qualquer valor de N , tomemos $N = 1$ e virá:

$$d = x - x_1 \ ,$$

$$d_1 = x_2 - x_1 \ ,$$

e, como $\dfrac{d}{d_1} \cong 1$, concluimos que

$$d \simeq d_1 \quad ,$$

e portanto,

$$x - x_1 \simeq x_2 - x_1 \ ,$$

onde

$$x \simeq x_2 \ .$$

d) Podemos fàcilmente estimar o valor de $\underline{x}$ (com infinitas iterações), ou seja:

$$\frac{x - x_N}{x_{N+1} - x_N} = \frac{D^2}{D^2 - 1} \ ,$$

e portanto,

$$x = \frac{D^2 \ x_{N+1} - x_N}{D^2 - 1} \ .$$

<u>Exemplo</u> - Consideremos o exemplo citado no capítulo anterior, onde $\underline{x}$ e $\underline{y}$ representam as parcelas perdidas. A fim de provarmos que o valor de $\underline{x}$ independe de y_0 , apresentaremos os cálculos feitos com 3 valores distintos de y_0 (45 , 50 e 55) .

No citado exemplo temos:

$$B_1 = 446{,}4 \ ,$$
$$B_2 = 418{,}0 \ ,$$
$$T_1 = 247{,}0 \ ,$$
$$T_2 = 148{,}6 \ ,$$
$$G = 1776{,}2 \ ,$$
$$r = 4 \ ,$$
$$n = 8 \ ,$$

donde tiramos:

$$\alpha = r\,B_1 + n\,T_1 - G = 1985{,}4 \quad ,$$

$$\beta = r\,B_2 + n\,T_2 - G = 1084{,}6 \quad ,$$

$$D = (r - 1)(n - 1) = 21 \quad .$$

<u>1º Caso</u>: $y_0 = 45{,}0$

$$x_1 = \frac{r\,B_1 + n\,T_1 - (G + y_0)}{(r - 1)(n - 1)} = \frac{\alpha - y_0}{D} = \frac{1985{,}4 - 45{,}0}{21} = 92{,}400.000 \quad ,$$

$$y_1 = \frac{r\,B_2 + n\,T_2 - (G + x_1)}{(r - 1)(n - 1)} = \frac{\beta - x_1}{D} = \frac{1084{,}6 - 92{,}400.000}{21} = 47{,}247.619 \quad ,$$

$$x_2 = \frac{\alpha - y_1}{D} = \frac{1985{,}4 - 47{,}247.619}{21} = 92{,}292.970 \quad .$$

Por outro lado,

$$x = \frac{D\,\alpha - \beta}{D^2 - 1} = \frac{21 \times 1985{,}4 - 1084{,}6}{441 - 1} = 92{,}292.727 \quad .$$

Portanto,

$$d = x - x_1 = -\,0{,}107.273 \quad ,$$

$$d_1 = x_2 - x_1 = -\,0{,}107.030 \quad ,$$

donde,

$$\frac{d}{d_1} = 1{,}002.270 \quad .$$

<u>2º Caso</u>: $y_0 = 50{,}0$

$$x_1 = \frac{\alpha - y_0}{D} = \frac{1985{,}4 - 50{,}0}{21} = 92{,}161.905 \quad ,$$

$$y_1 = \frac{\beta - x_1}{D} = \frac{1084{,}6 - 92{,}161.905}{21} = 47{,}258.957 \quad ,$$

$$x_2 = \frac{\alpha - y_1}{D} = \frac{1985{,}4 - 47{,}258.957}{21} = 92{,}292.431 \quad ,$$

donde,

$$d = x - x_1 = 0{,}130.822 \ ,$$

$$d_1 = x_2 - x_1 = 0{,}130.526 \ .$$

Portanto,

$$\frac{d}{d_1} = 1{,}002.268 \ .$$

3.º Caso: $y_o = 55{,}0$

$$x_1 = \frac{\alpha - y_o}{D} = \frac{1985{,}4 - 55{,}0}{21} = 91{,}923.810 \ ,$$

$$y_1 = \frac{\beta - x_1}{D} = \frac{1084{,}6 - 91{,}923.810}{21} = 47{,}270.295 \ ,$$

$$x_2 = \frac{\alpha - y_1}{D} = \frac{1985{,}4 - 47{,}270.295}{21} = 92{,}291.891 \ ,$$

donde,

$$d = x - x_1 = 0{,}368.917 \ ,$$

$$d_1 = x_2 - x_1 = 0{,}368.081 \ .$$

Portanto,

$$\frac{d}{d_1} = 1{,}002.271 \ .$$

Por outro lado, pelo desenvolvimento teórico exposto temos:

$$\frac{d}{d_1} = \frac{D^2}{D^2 - 1} = \frac{441}{440} = 1{,}002.273 \ .$$

Como se observa, há uma ótima concordância entre os valores determinados e o valor obtido através do desenvolvimento teórico para a relação $\frac{d}{d_1}$, pois as discrepâncias observadas entre os diversos valores da relação são perfeitamente desprezíveis. Além disso, em todos os casos estudados, a relação é muito próxima de 1 (um) .

Observa-se também que nos 3 casos considerados, a 2ª iteração (x_2) recebe o mesmo valor, ou seja, 92,3 , o que vem confirmar que podemos tomar qualquer valor arbitrário para $\underline{y}$, sem afetar a convergência dos sucessivos valores de x_i .

Podemos acrescentar ainda que vários outros exemplos foram também estudados com resultados satisfatórios.

6.1.2 - Caso de Duas Parcelas Perdidas num Mesmo Bloco

Se temos duas parcelas perdidas num mesmo bloco, dando-se um valor arbitrário (y_o) a uma delas, a fórmula que nos permite estimar a outra é:

$$x = \frac{r\,(B + y_o) + n\,T_1 - (G + y_o)}{(r - 1)(n - 1)} ,$$

ou, grupando de outra forma,

$$x = \frac{r\,B + n\,T_1 - G}{(r - 1)(n - 1)} - \frac{y_o}{n - 1} .$$

Para y_1 obteríamos:

$$y_1 = \frac{r\,B + n\,T_2 - G}{(r - 1)(n - 1)} - \frac{x_1}{n - 1} .$$

Se fizermos

$$r\,B + n\,T_1 - G = \alpha ,$$

$$r\,B + n\,T_2 - G = \beta ,$$

$$r - 1 = P ,$$

$$n - 1 = Q ,$$

Seguindo o mesmo raciocínio de 6.1.1 , teremos:

$$x = \frac{Q\,\alpha + \beta}{P\,(Q^2 - 1)} ,$$

$$\frac{d}{d_N} = \frac{Q^2}{Q^2 - 1} .$$

O resultado obtido se assemelha bastante ao que chegamos em 6.1.1 , o que nos permite portanto tirar conclusões análogas, ou seja:

a) A relação $\frac{d}{d_N}$ possibilita-nos avaliar a grandeza do êrro cometido quando tomamos x_{N+1} para estimar $\underline{x}$.

b) Essa relação depende apenas do número de tratamentos do experimento.

c) Quanto mais próxima de 1 (um) for a relação tanto mais o valor x_{N+1} representa $\underline{x}$.

d) De um modo geral, para qualquer valor arbitrário dado a $\underline{y}$, o cálculo de $\underline{x}$ pode ser feito com duas iterações apenas, sem incorrermos em êrro grave, uma vez que $\frac{d}{d_N}$ é na maioria dos casos próxima da unidade, o que nos indica que $\underline{d}$ e d_N pràticamente se equivalem.

Com efeito,

$$d = x - x_N ,$$

$$d_N = x_{N+1} - x_N .$$

Sendo $\frac{d}{d_N} \simeq 1$ e válida para qualquer valor de N , podemos escrever:

$$\frac{d}{d_1} \simeq 1 .$$

Portanto,

$$d \simeq d_1 ,$$

ou ainda,

$$x - x_1 \simeq x_2 - x_1$$

donde concluimos que

$$x \simeq x_2 .$$

Exemplo: Num experimento de competição de variedades de batatinha, feito pelo Eng.º-Agr.º Oscar A. Garay, em Balcare, Argentina, em blocos casualizados, cujos dados são reproduzidos de PIMENTEL GOMES (16), em que foram por nós omitidas as parcelas $\underline{x}$ e $\underline{y}$, as produções obtidas, em t/ha, constam do quadro seguinte

	1.º Bloco	2.º Bloco	3.º Bloco	4.º Bloco	TOTAIS
Kennebec	x	13,4	11,0	9,2	33,6 + x
Huinkul	y	27,0	26,4	25,7	79,1 + y
S. Rafaela	22,6	29,9	24,2	25,1	101,8
Buena Vista	15,4	11,9	10,1	12,3	49,7
B 25 - 50 E	12,7	18,0	18,2	17,1	66,0
B 1 - 52	20,0	21,1	20,0	28,0	89,1
B 116 - 51	23,1	24,2	26,4	16,3	90,0
B 72 - 53 A	18,0	24,6	24,0	24,6	91,2
TOTAIS	111,8 +x+y	170,1	160,3	158,3	600,5 +x+y

Daí tiramos:

$$B = 111{,}8 \quad ,$$

$$T_1 = 33{,}6 \quad ,$$

$$T_2 = 79{,}1 \quad ,$$

$$G = 600{,}5 \quad ,$$

$$r = 4 \quad ,$$

$$n = 8 \quad ,$$

$$\alpha = r\,B + n\,T_1 - G = 115{,}5 \quad ,$$

$$\beta = r\,B + n\,T_2 - G = 479{,}5 \quad ,$$

$$P = r - 1 = 3 \quad ,$$

$$Q = n - 1 = 7 \quad .$$

Façamos $y_0 = 25,0$. Assim,

$$x_1 = \frac{\alpha}{P\ Q} - \frac{y_0}{Q} = \frac{115,5}{21} - \frac{25}{7} = 9,071.428 \ ,$$

$$y_1 = \frac{\beta}{P\ Q} - \frac{x_1}{Q} = \frac{479,5}{21} - \frac{9,071.428}{7} = 24,129.252 \ ,$$

$$x_2 = \frac{115}{21} - \frac{24,129.252}{7} = 8,947.036 \ .$$

Por outro lado,

$$x = \frac{Q\ \alpha + \beta}{P\ (Q^2 - 1)} = \frac{7 \times 115,5 + 479,5}{3 \times 48} = 8,944.444 \ .$$

Portanto,

$$d = x - x_1 = -\ 0,126.984 \ ,$$

$$d_1 = x_2 - x_1 = -\ 0,124.392 \ ,$$

donde,

$$\frac{d}{d_1} = 1,020.837 \ .$$

Pelo desenvolvimento teórico obtemos:

$$\frac{d}{d_1} = \frac{Q^2}{Q^2 - 1} = \frac{49}{48} = 1,020.833 \ .$$

A diferença entre os dois valores determinados para a relação $\frac{d}{d_1}$ é pràticamente nula, e ambos são muito próximos de 1 (um).

6.1.3 - Caso de Duas Parcelas Perdidas num Mesmo Tratamento

Considerando:

$$\alpha = r\ B_1 + n\ T - G \ ,$$

$$\beta = r\ B_2 + n\ T - G \ ,$$

$$P = r - 1 \quad ,$$

$$Q = n - 1 \quad ,$$

obtemos por analogia com os casos anteriores,

$$x = \frac{P\,\alpha + \beta}{Q\,(P^2 - 1)} \quad ,$$

$$\frac{d}{d_N} = \frac{P^2}{P^2 - 1} \quad .$$

Podemos estender também para êste caso, as conclusões tiradas para seus análogos, com a ressalva de que neste caso a relação é dependente do número de blocos do experimento; quanto maior o número de blocos, tanto mais o valor x_2 se aproxima de $\underline{x}$.

6.2 - Ensaios em Quadrado Latino

O desenvolvimento teórico que daremos aos casos de ensaios em quadrado latino se enquadra também nos delineamentos em períodos sucessivos, desde que já provamos a existência de uma concordância nas fórmulas que estimam parcelas perdidas nêstes dois tipos de delineamentos.

6.2.1 - Caso de Duas Parcelas Perdidas em Tratamentos, Linhas e Colunas Distintos

Consideremos um quadrado latino $r \times r$ no qual foram perdidas duas parcelas (x e y). Conforme já foi visto, a fórmula que nos permite estimar uma parcela perdida é:

$$x = \frac{r\,(L_1 + C_1 + T_1) - 2\,G}{(r - 1)(r - 2)} \quad .$$

No nosso caso, se dermos um valor arbitrário (y_o) para $\underline{y}$ podemos estimar x_1 ou seja:

$$x_1 = \frac{r\,(L_1 + C_1 + T_1) - 2\,(G + y_o)}{(r - 1)(r - 2)}$$

$$= \frac{r\,(L_1 + C_1 + T_1) - 2\,G - 2\,y_o}{(r - 1)(r - 2)} \;.$$

Com o valor estimado x_1 podemos agora estimar y_1, ou seja:

$$y_1 = \frac{r\,(L_2 + C_2 + T_2) - 2\,(G + x_1)}{(r - 1)(r - 2)}$$

$$= \frac{r\,(L_2 + C_2 + T_2) - 2\,G - 2\,x_1}{(r - 1)(r - 2)} \;.$$

Façamos

$$r\,(L_1 + C_1 + T_1) - 2\,G = \gamma \;,$$

$$r\,(L_2 + C_2 + T_2) - 2\,G = \delta \;,$$

$$(r - 1)(r - 2) = E \;.$$

Com êstes valores, aplicando o método iterativo obtemos:

$$x_1 = \frac{\gamma}{E} - \frac{2\,y_o}{E} \;,$$

$$y_1 = \frac{\delta}{E} - \frac{2\,x_1}{E} = \frac{\delta}{E} - \frac{2\,\gamma}{E^2} + \frac{4\,y_o}{E^2} \;,$$

$$x_2 = \frac{\gamma}{E} - \frac{2\,\delta}{E^2} + \frac{4\,\gamma}{E^3} - \frac{8\,y_o}{E^3} \;,$$

$$y_2 = \frac{\delta}{E} - \frac{2\,\gamma}{E^2} + \frac{4\,\delta}{E^3} - \frac{8\,\gamma}{E^4} + \frac{16\,y_o}{E^4} \;.$$

O têrmo geral x_N é:

$$x_N = \frac{\gamma}{E} - \frac{2\,\delta}{E^2} + \frac{4\,\gamma}{E^3} - \dots - \frac{2^{2N-3}\,\delta}{E^{2N-2}} + \frac{2^{2N-2}\,\gamma}{E^{2N-1}} - \frac{2^{2N-1}\,y_o}{E^{2N-1}} \;.$$

A influência do valor arbitrário y_o, decresce numa progressão cuja razão é $q = -\frac{2}{E}$.

Considerando os sucessivos valores assumidos por x_i $(i = 1, \ldots, N)$, nos $\underline{n}$ ciclos de iterações, obtemos:

$$x_1 = \frac{\gamma}{E} - \frac{2\,y_o}{E},$$

$$x_2 = \frac{\gamma}{E} - \frac{2\delta}{E^2} + \frac{4\gamma}{E^3} - \frac{8\,y_o}{E^3},$$

$$x_3 = \frac{\gamma}{E} - \frac{2\delta}{E^2} + \frac{4\gamma}{E^3} - \frac{8\delta}{E^4} + \frac{16\gamma}{E^5} - \frac{32\,y_o}{E^5},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_N = \frac{\gamma}{E} - \frac{2\delta}{E^2} + \frac{4\gamma}{E^3} - \cdots - \frac{2^{2N-3}\delta}{E^{2N-2}} + \frac{2^{2N-2}\gamma}{E^{2N-1}} - \frac{2^{2N-1}\,y_o}{E^{2N-1}}.$$

As diferenças entre os valores consecutivos de x_i podem ser obtidas como se segue

$$d_1 = x_2 - x_1 = 2\,\frac{-E\delta + 2\gamma + (E^2 - 4)\,y_o}{E^3},$$

$$d_2 = x_3 - x_2 = 2^3\,\frac{-E\delta + 2\gamma + (E^2 - 4)\,y_o}{E^5},$$

$$d_3 = x_4 - x_3 = 2^5\,\frac{-E\delta + 2\gamma + (E^2 - 4)\,y_o}{E^7},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$d_N = x_{N+1} - x_N = 2^{2N-1}\,\frac{-E\delta + 2\gamma + (E^2 - 4)\,y_o}{E^{2N+1}}.$$

Voltando-se ao valor de x_N temos:

$$x_N = \frac{\gamma}{E} - \frac{2\delta}{E^2} + \frac{4\gamma}{E^3} - \cdots - \frac{2^{2N-3}\delta}{E^{2N-2}} + \frac{2^{2N-2}\gamma}{E^{2N-1}} - \frac{2^{2N-1}\,y_o}{E^{2N-1}}.$$

Somando e subtraindo $\dfrac{2^{2N-1}\delta}{E^{2N}}$ à expressão acima ela não se altera e virá:

$$x_N = \frac{\gamma}{E} - \frac{2\delta}{E^2} + \frac{4\gamma}{E^3} - \dots - \frac{2^{2N-3}\delta}{E^{2N-2}} + \frac{2^{2N-2}\gamma}{E^{2N-1}} -$$

$$- \frac{2^{2N-1}\delta}{E^{2N}} + \frac{2^{2N-1}\delta}{E^{2N}} - \frac{2^{2N-1}\,y_o}{E^{2N-1}} .$$

Grupando, teremos:

$$x_N = \frac{\gamma}{E}\left(1 + \frac{2^2}{E^2} + \dots + \frac{2^{2N-2}}{E^{2N-2}}\right) - \frac{2\delta}{E^2}\left(1 + \frac{2^2}{E^2} + \dots + \frac{E^{2N-2}}{E^{2N-2}}\right) +$$

$$+ \frac{2^{2N-1}\delta}{E^{2N}} - \frac{2^{2N-1}\,y_o}{E^{2N-1}}$$

$$x_N = \left(\frac{\gamma}{E} - \frac{2\delta}{E^2}\right)\left(1 + \frac{2^2}{E^2} + \dots + \frac{2^{2N-2}}{E^{2N-2}}\right) + \frac{2^{2N-1}\delta}{E^{2N}} - \frac{2^{2N-1}\,y_o}{E^{2N-1}} .$$

Passando-se ao limite, com N tendendo a infinito, virá:

$$x = \lim_{N \to \infty} x_N = \lim_{N \to \infty} \left[\left(\frac{\gamma}{E} - \frac{2\delta}{E^2}\right)\left(1 + \frac{2^2}{E^2} + \dots + \frac{2^{2N-2}}{E^{2N-2}}\right) + \frac{2^{2N-1}\delta}{E^{2N}} - \frac{2^{2N-1}\,y_o}{E^{2N-1}} \right] .$$

Discutindo cada têrmo separadamente, teremos:

$$\lim_{N \to \infty} \left(1 + \frac{2^2}{E^2} + \dots + \frac{2^{2N-2}}{E^{2N-2}}\right) = \frac{E^2}{E^2 - 2^2} ,$$

pela teoria das sucessões.

$$\lim_{N \to \infty} \frac{2^{2N-1}\delta}{E^{2N}} = \lim_{N \to \infty} \frac{\delta}{2\left(\frac{E}{2}\right)^{2N}} = 0 \qquad \text{para } E > 2 .$$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{2^{2N-1}\,y_o}{E^{2N-1}} = \lim_{N \to \infty} \frac{y_o}{\left(\frac{E}{2}\right)^{2N-1}} = 0 \qquad \text{para } E > 2 .$$

Nestas condições teremos:

$$\lim_{N \to \infty} x_N = x = \left(\frac{\gamma}{E} - \frac{2\delta}{E^2}\right)\left(\frac{E^2}{E^2 - 2^2}\right) = \frac{E\gamma - 2\delta}{E^2 - 2^2} .$$

Observa-se que esta fórmula coincide exatamente com a deduzida em 4.2.2 .

Confirmamos aqui, mais uma vez, as restrições impostas em 4.2.2 , ou seja, $E > 2$ e consequentemente $r > 3$.

Determinemos a diferença entre o valor do limite $\underline{x}$ e um valor x_N (com N iterações).

$$d = x - x_N$$

$$= \frac{E\gamma - 2\delta}{E^2 - 2^2} - \left[\left(\frac{\gamma}{E} - \frac{2\delta}{E^2}\right)\left(1 + \frac{2^2}{E^2} + \ldots + \frac{2^{2N-2}}{E^{2N-2}}\right) + \frac{2^{2N-1}\delta}{E^{2N}} - \frac{2^{2N-1} y_0}{E^{2N-1}} \right] .$$

Mas, o estudo das sucessões nos dá:

$$S_n = 1 + \frac{2^2}{E^2} + \ldots + \frac{2^{2N-2}}{E^{2N-2}} = \frac{E^{2N} - 2^{2N}}{E^{2N-2}(E^2 - 2^2)} .$$

Substituindo êste valor na expressão acima, virá:

$$d = x - x_N = \frac{E\gamma - 2\delta}{E^2 - 2^2} - \left[\frac{E\gamma - 2\delta}{E^2} \cdot \frac{E^{2N} - 2^{2N}}{E^{2N-2}(E^2 - 2^2)} + \frac{2^{2N-1}\delta}{E^{2N}} - \frac{2^{2N-1} y_0}{E^{2N-1}} \right]$$

$$= \frac{E\gamma - 2\delta}{E^2 - 2^2} - \frac{(E\gamma - 2\delta)(E^{2N} - 2^{2N})}{E^{2N}(E^2 - 2^2)} - \frac{2^{2N-1}\delta}{E^{2N}} + \frac{2^{2N-1} y_0}{E^{2N-1}}$$

$$= \frac{(E\gamma - 2\delta)E^{2N} - (E\gamma - 2\delta)(E^{2N} - 2^{2N}) - 2^{2N-1}(E^2 - 2^2)\delta}{E^{2N}(E^2 - 2^2)} +$$

$$+ \frac{2^{2N-1} E (E^2 - 2^2) y_0}{E^{2N}(E^2 - 2^2)}$$

$$d = \frac{2^{2N}(E\,\gamma - 2\,\delta) - 2^{2N-1}(E^2 - 2^2)\delta + 2^{2N-1}E(E^2 - 2^2)\,y_o}{E^{2N}(E^2 - 2^2)},$$

ou ainda,

$$d = 2^{2N-1}\,\frac{2(E\,\gamma - 2\,\delta) - (E^2 - 2^2)\delta + E(E^2 - 2^2)\,y_o}{E^{2N}(E^2 - 2^2)}.$$

Grupando convenientemente obtemos:

$$d = 2^{2N-1}\,\frac{2\,E\,\gamma - E^2\delta + E(E^2 - 2^2)\,y_o}{E^{2N}(E^2 - 2^2)},$$

e finalmente,

$$d = 2^{2N-1}\,\frac{2\,\gamma - E\,\delta + (E^2 - 2^2)\,y_o}{E^{2N-1}(E^2 - 2^2)}.$$

Relacionando $\underline{d}$ com d_N teremos:

$$\frac{d}{d_N} = \frac{x - x_N}{x_{N+1} - x_N} = \frac{2^{2N-1}\,\dfrac{2\,\gamma - E\,\delta + (D^2 - 2^2)\,y_o}{E^{2N-1}(E^2 - 2^2)}}{2^{2N-1}\,\dfrac{2\,\gamma - E\,\delta + (D^2 - 2^2)\,y_o}{E^{2N+1}}} = \frac{E^2}{E^2 - 2^2}.$$

De conformidade com o resultado a que chegamos podemos concluir:

a) A relação $\dfrac{d}{d_N}$ possibilita-nos avaliar a grandeza do êrro cometido quando determinamos o valor de $\underline{x}$ com $(N + 1)$ iterações, comparado com aquele que obteríamos se fizéssemos infinitas iterações.

b) Esta relação está na dependência sòmente das dimensões do quadrado latino, que deverá ser no mínimo de 4×4, pois $E = (r - 1)(r - 2)$, e para dimensões de $r < 4$ acarreta $E < 3$, contrariando assim, a restrição imposta na dedução da própria relação, que é $E > 2$. Ela independe do valor y_o inicial.

c) Quanto mais próxima de 1 (um) fôr a relação, tanto mais o valor x_{N+1} se aproxima do limite x.

d) Na maioria dos casos podemos estimar x com duas iterações apenas, sem incorrermos em êrro grave, desde que o valor de r seja relativamente grande, a fim de que a relação seja próxima da unidade. Ora, já vimos que

$$d = x - x_N \; ,$$

$$d_N = x_{N+1} - x_N \; ,$$

portanto,

$$\frac{d}{d_N} \cong 1 \; ,$$

implica em

$$x \cong x_{N+1} \; .$$

Como a relação é válida para qualquer valor de N, basta tomarmos $N = 1$ e virá:

$$x \cong x_2 \; .$$

Podemos daí estimar o valor limite de x, ou seja:

$$\frac{x - x_N}{x_{N+1} - x_N} = \frac{E^2}{E^2 - 4} \; ,$$

donde,

$$x = \frac{E^2 \, x_{N+1} - 4 \, x_N}{E^2 - 4} \; .$$

Exemplo: Num experimento de competição de variedades de cana, em quadrado latino de 5 x 5 cujos dados são reproduzidos de PIMENTEL GOMES (16), com produções de cana-planta em quilos por parcela, em que foram omitidas as parcelas x e y, os resultados foram os seguintes

D x	A 518	B 458	C 583	E 331	1890 + x
C 724	E y	A 524	B 550	D 400	2198 + y
E 489	B 384	C 556	D 297	A 420	2146
B 494	D 500	E 313	A 486	C 501	2294
A 515	C 660	D 438	E 394	B 318	2325
2222 + x	2062 + y	2289	2310	1970	10853 + x + y

onde:

$$L_1 = 1890 \,,$$
$$L_2 = 2198 \,,$$
$$C_1 = 2222 \,,$$
$$C_2 = 2062 \,,$$
$$T_1 = 1635 \,,$$
$$T_2 = 1527 \,,$$
$$G = 10853 \,,$$
$$r = 5 \,.$$

Daí tiramos:

$$\gamma = r\,(L_1 + C_1 + T_1) - 2\,G = 7029 \,,$$
$$\delta = r\,(L_2 + C_2 + T_2) - 2\,G = 7229 \,,$$
$$E = (r - 1)(r - 2) = 12 \,.$$

Suponhamos $y_o = 400$ e teremos:

$$x_1 = \frac{\gamma - 2\,y_o}{E} = \frac{7029 - 2 \times 400}{12} = 519 \,,$$

$$y_1 = \frac{\delta - 2\,x_1}{E} = \frac{7229 - 2 \times 519}{12} = 516 \; ,$$

$$x_2 = \frac{\gamma - 2\,y_1}{E} = \frac{7029 - 2 \times 516}{12} = 500 \; .$$

O valor de $\underline{x}$ obtido pela fórmula é:

$$x = \frac{E\,\gamma - 2\,\delta}{E^2 - 4} = \frac{12 \times 7029 - 2 \times 7229}{144 - 4} = 499 \; .$$

Portanto,

$$d = x - x_1 = -\,20 \; ,$$

$$d_1 = x_2 - x_1 = -\,19 \; ,$$

donde,

$$\frac{d}{d_1} = \frac{-\,20}{-\,19} = 1{,}05263 \; .$$

Por outro lado, teòricamente obtemos:

$$\frac{d}{d_1} = \frac{E^2}{E^2 - 4} = \frac{144}{140} = 1{,}02857 \; .$$

Nota-se uma pequena discordância entre os dois valores da relação $\frac{d}{d_1}$ que é ocasionada pela aproximação feita nos cálculos de x_1 e x_2.

Observa-se ainda que o valor x_2 difere muito pouco do limite $\underline{x}$.

6.2.2 - Caso de Duas Parcelas Perdidas numa Mesma Linha

Supondo um valor y_o para uma das parcelas perdidas, obteríamos uma fórmula para estimar a outra, ou seja:

$$x = \frac{r\,[(L + y_o) + C_1 + T_1] - 2\,[G + y_o]}{(r - 1)(r - 2)} \; .$$

Fazendo:

$$\gamma = r\,(L + C_1 + T_1) - 2\,G \; ,$$

$$\delta = r\,(L + C_2 + T_2) - 2\,G \; ,$$

$$P = r - 1 \; ,$$

$$R = r - 2 \; ,$$

pelo método iterativo e por um raciocínio análogo ao de 6.2.1 , obtemos:

$$x = \frac{P\,\gamma + \delta}{R\,(P^2 - 1)} \; ,$$

e,

$$\frac{d}{d_N} = \frac{P^2}{P^2 - 1} \; .$$

6.2.3 - Caso de Duas Parcelas Perdidas numa Mesma Coluna ou num Mesmo Tratamento

Seguindo a mesma marcha do caso anterior, resulta:

$$x = \frac{P\,\gamma' + \delta}{R\,(P^2 - 1)} \; ,$$

e,

$$\frac{d}{d_N} = \frac{P^2}{P^2 - 1} \; .$$

Concluimos portanto que há uma semelhança entre os casos 6.2.2 e 6.2.3 .

7 - CONCLUSÕES

De um modo geral concluimos:

7.1 - O método utilizado por ALLAN e WISHART (1) para a determinação de uma parcela perdida foge ao método dos quadrados mínimos. Entretanto a fórmula por êles determinada é a mesma a que se chega por um processo matemático rigoroso, aplicando-se o método dos quadrados mínimos.

7.2 - A obtenção de fórmulas para o cálculo de mais de duas parcelas perdidas torna-se muito complexa e enfadonha, devido ao tamanho aberrante das mesmas, sendo portanto muito mais viável o cálculo direto, sem fórmulas, substituindo-se os dados perdidos por incógnitas e procurando-se através do método dos quadrados mínimos aplicados à soma de quadrados residual, determinar o valor das mesmas.

7.3 - O número de repetições efetivas, para o cálculo da variância de contrastes entre médias, obtido tanto através das regras de YATES como da de TAYLOR, aproxima-se muito, chegando mesmo em certos casos a coincidir com o obtido através de fórmulas exatas.

7.4 - Aplicando-se o estudo de sucessões ao método iterativo utilizado por YATES (20) consegue-se estabelecer uma relação $\frac{d}{d_N}$, onde

$$d = x - x_N ,$$

$$d_N = x_{N+1} - x_N ,$$

x_N = valor da parcela perdida, obtido com N iterações.

x = limite (valor obtido com infinitas iterações).

Esta relação possibilita-nos em todos os casos estudados avaliar a grandeza do êrro cometido quando tomamos x_{N+1} como representativo de $\underline{x}$.

7.4 - Observa-se que $\frac{d}{d_N}$ depende apenas do número de repetições e de tratamentos, variando conforme o caso considerado.

7.5 - Na maioria dos casos obtém-se uma boa estimativa para a parcela perdida, com duas iterações apenas, pois $\frac{x - x_N}{x_{N+1} - x_N}$ é muito próximo de 1 (um) o que nos leva a concluir que as duas diferenças pràticamente se equivalem, tornando portanto viável, se tomarmos $N = 1$, a substituição de $\underline{x}$ por x_2 .

7.6 - Usualmente costuma-se tomar como um valor inicial para (n - 1) parcelas perdidas a média dos valores conhecidos. Entretanto, está comprovado que o valor de $\underline{x}$ (com infinitas iterações) independe do valor arbitrário inicial, donde se conclui que se pode fugir desta praxe usual, e atribuir às (n - 1) parcelas perdidas qualquer valor.

7.7 - A dimensão mínima para um quadrado latino onde foram perdidas duas parcelas, é de 4 x 4 , pois para uma dimensão menor, não restam graus de liberdade para o resíduo.

7.8 - Um experimento em períodos sucessivos ("change-over"), com parcelas perdidas admite as mesmas fórmulas de um quadrado latino simples para a estimativa das mesmas. Entretanto, o mesmo não ocorre para as fórmulas de variância de contraste entre médias de tratamentos.

Quando se perde uma parcela num dos $\underline{n}$ grupos, o seu cálculo independe das parcelas dos (n - 1) grupos restantes.

8 - BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

1 - ALLAN, F. E. and WISHART, J. - 1930 - "A Method of Estimating the Yield of a Missing Plot in Field Experimental Work" - Jour. Agr. Sci. 20: 399-406 .

2 - ANDERSON, R. L. - 1946 - "Missing-Plot Techniques" - Biometrics 2: 41-46 .

3 - BARTLETT, M. S. - 1937 - "Some Examples of Statistical Methods of Research in Agriculture and Applied Biology" - Jour. of Royal Statistical Soc. , Supplement 4: 137-170 .

4 - CALZADA BENZA, J. - 1954 - "Experimentación Agrícola" - Lima - Ediciones Agro-Ganaderas S. A. - 360 pp.

5 - CHAKRABARTI, M. C. - 1962 - "Mathematics of Design and Analysis of Experiments".- London - Asia Publishing House - 117 pp.

6 - COCHRAN, W. G. and COX, G. M. - 1957 - "Experimental Designs" - 2.ª edição - New York - John Wiley & Sons Inc. - 611 pp.

7 - DAVIES, O. L. - 1956 - "Design and Analysis of Industrial Experiments" New York - Hafner Publishing Company - 636 pp.

8 - FEDERER, W. T. - 1955 - "Experimental Design" - New York - The Mac Millan Company - 544 pp.

9 - GOULDEN, C. H. - 1952 - "Methods of Statistical Analysis - 2.ª ed. - New York - John Wiley & Sons Inc. - 467 pp.

10 - KEMPTHORNE, O. - 1952 - "The Design and Analysis of Experiments" - New York - John Wiley & Sons Inc. - 631 pp.

11 - KENDALL, M. A. - 1948 - "The Advanced Theory of Statistics" - Vol. II , 2.ª ed. - London - Charles Griffin & Comp. Ltda. 521 pp.

12 - NELDER, J. A. - 1954 - "A Note on Missing Plot Values" - Biometrics 10: 400-401 .

13 - OSTLE, B. - 1956 - "Statistics in Research" - Iowa - The Iowa State College. Press-Ames - 487 pp.

14 - PANSE, V. G. and SUKHATAME, P. V. - 1957 - "Statistical Methods of Agricultural Workes" - New Delhi - Indians Council of Agricultural Research. 361 pp.

15 - PEARCE, S. C. - 1953 - "Field Experimentacion With Fruit Trees and Other Perennial Plants - England Common Wealth Agricultural Bureaux - 131 pp.

16 - PIMENTEL GOMES, F. - 1963 - "Curso de Estatística Experimental" - 2ª ed. - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" Piracicaba - São Paulo - 384 pp. + 15 tabelas.

17 - SMITH, H. F. - 1957 - "Missing-Plot Estimates" - Biometrics 13: 115-118 .

18 - STEEL, R. G. and TORRIE, J. H. - 1960 - "Principles and Procedures of Statistics" - London - Mc Graw - Hill Book Company Inc. 481 pp.

19 - TAYLOR, J. - 1948 - "Errors of Treatment Comparisons When Observations are Missing" - Nature 162: 262-263 .

20 - YATES, F. - 1933 - "The Analysis of Replicated Experiments When the Fields Results are Incomplete" - Emp. Jour. Exp. Agr. 1: 129-142 .

..*.*
. .
.
*