Cássio Roberto de Melo Godoi
Engenheiro-Agrônomo
Instrutor do Departamento de Matemática e Estatística da E. S. A. "Luiz de Queiroz" da Universidade de São Paulo

MODÊLO MATEMÁTICO DOS ENSAIOS EM DUPLA REVERSÃO ("SWITCHBACK")

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Agronomia.

Orientador: Prof. Isaias Rangel Nogueira

Piracicaba
Estado de São Paulo - Brasil
1971

Aos meus pais

Accacio e Ângela

DEDICO

Agradecimentos

Queremos deixar registrado nossos sinceros agradecimentos a pessoas que contribuiram na execução do presente trabalho.

Ao Prof. Isaias Rangel Nogueira pela orientação geral do trabalho.

Ao Dr. Roland Vencovsky pelas numerosas críticas e sugestões oferecidas.

Ao Prof. Aristeu Mendes Peixoto e Dr. Vidal Pedroso de Faria, orientadores da parte zootécnica da pesquisa.

Ao Prof. Frederico Pimentel Gomes e Dr. Humberto de Campos pelas proveitosas discussões mantidas.

Ao acadêmico Jaime Rossetto, monitor do Departamento de Matemática e Estatística, pelo auxílio na coleta dos dados de produção de leite e cálculos estatísticos.

Aos meus irmãos Carmen Silvia e Plínio José responsáveis pela impressão do trabalho.

Í N D I C E

1 - INTRODUÇÃO

Os experimentos com animais, de um modo geral, dividem-se em dois grandes grupos: ensaios contínuos e ensaios com reversão("change-over")

No primeiro caso cada animal recebe um tratamento e permanece, assim, até o final do ensaio; no segundo caso o animal pode receber uma sequência de dois ou mais tratamentos durante o experimento. Desta maneira verifica-se que nos ensaios contínuos cada animal serve como parcela e nos ensaios com reversão cada animal caracteriza um bloco.

O tema que se discute prende-se especìficamente ao segundo caso; Hoglund (1958) classifica-o em dois sub-grupos:

a) ensaios rotacionais*.

b) ensaios com dupla reversão.("switchback").

Os ensaios rotacionais caracterizam-se pelo fato de cada animal receber tratamentos distintos, isto é, não existe repetição de tratamento durante a época de realização do ensaio.

Os experimentos em dupla reversão, por outro lado, identificam-se por nas sequências de tratamentos apresentarem uma ou mais repetições.

Os esquemas (a) e (b), abaixo, ilustram a diferença fundamental entre ensaios rotacionais e ensaios em "switchback".

Vacas	I	II	III
1	A	B	C
2	B	C	A
3	C	A	B

(a)

Vacas	I	II	III
1	A	B	A
2	B	C	B
3	C	A	C

(b)

Pode-se reparar que o número de vacas utilizadas em ambos os delineamentos é igual, o mesmo acontecendo com o número de repetições.

No caso de experimentos em "change-over", o modêlo matemático usado é,

$$y_{ijk} = m + v_i + p_j + t_k + e_{ijk}$$

onde m: média; v_i: efeito da vaca $\underline{i}$; p_j: efeito do período j; t_k: efeito do tratamento $\underline{k}$ e e_{ijk} com distribuição $N(0, \sigma^2)$.

Apenas para uma caracterização melhor, deve-se ressaltar que a melhor justificativa do emprêgo dos esquemas com reversão é a economia de animais para a comparação do mesmo número de tratamentos.

---

* - Durante o decorrer do texto aparece a denominação ensaios em "change-over". A menos que seja especificado, deve-se entender que se está tratando de ensaios rotacionais.

A interação periodo (efeito linear) X vacas, parte do resíduo da análise da variância, apresenta "bias" (tendenciosidade), decorrente do fato, já discutido por Lucas (1958) e Pimentel Gomes (1960), de que à grandes produções correspondem grandes declíneos, sendo que isso acarreta uma super-estimação de σ^2.

O delineamento em "switchback" vem corrigir o "bias" da variância residual, verificado nos experimentos em "change-over", porém possuem uma restrição séria, decorrente da perda de graus de liberdade do resíduo de (v-1), onde v corresponde ao número de vacas envolvidas.

Os ensaios em "switchback", entretanto, fornecem uma precisão maior que os demais, justificando, assim, a crescente utilização em experimentos zootécnicos.

Pelo fato de não haver, até o presente instante, dedução matemática (como ocorre com os vários delineamentos existentes) que justifique e generalize a análise da variância para ensaios em"switchback", pretende-se com êste trabalho, principalmente, a procura do modêlo matemático adequado, que permita enquadrar o delineamento "switchback" em moldes comuns, nos quais já estão os esquemas em blocos ao acaso, experimentos em parcelas sub-divididas, blocos incompletos e outros.

2 - REVISÃO DA LITERATURA

Em certos experimentos biológicos as parcelas são submetidas a dois tratamentos e a diferença entre os resultados é calculada e analizada.

Student (1908) apresenta pela primeira vez uma prova de significância para a média das diferenças:

Brandt (1938), trabalhando com produção de manteiga, estende o teste de Student a diferenças envolvendo mais de duas observações. São apresentadas as fórmulas para a análise estatística no caso de ensaios em reversão dupla ("switchback"), sempre considerando a comparação de dois tratamentos. Apresenta, ainda, a análise de covariância para uma e duas variáveis concomitantes.

Seath (1944) apresenta o esquema fatorial 2 x 2 aplicável a delineamentos em "swithback".

Patterson (1950) na Inglaterra e Lucas (1951) nos EE.UU. chegam ambos a resultados mostrando o "bias" ou tendenciosidade na estimativa da variância residual dos ensaios em "change-over".

O "bias" verifica-se quando se desdobra a variância nos componentes linear e quadrático.

Lucas (1958) e Pimentel Gomes (1960) explicam o "bias" de uma forma bem simples e clara: a grandes produções de leite correspondem grandes declínios, pois dentro do período de lactação tôdas as vacas devem atingir a produção nula.

Taylor (1953) estende o método de Brandt para mais de dois tratamentos. Nêsse trabalho Taylor indica brevemente o processo de análise da variância; são apresentados esquemas de composição dos ensaios; introduz os delineamentos reduzidos, isto é, delineamentos nos quais cada combinação de tratamentos aparece em uma sequência apenas, ao invéz de duas, como ocorre em delineamentos completos.

Lucas (1956) apresenta, a nosso ver, o trabalho mais completo sôbre o delineamento "switchback", pois discute a extensão do método de Brandt, sucintamente focalizada por Taylor (1953), ilustrando, com detalhes, a análise da variância nos casos comuns e nos com formação de blocos; sugere fórmulas para o cálculo das médias de tratamentos ajustadas; variância do contraste entre duas médias e indica fórmulas para o cálculo de parcela perdida.

Na apresentação das fórmulas de parcela perdida, para os casos simplew e com blocos, Lucas omite um detalhe importante constituido do "bias" geralmente existente no quadrado médio de tratamentos, quando calculada com a estimativa da parcela perdida.

Nos trabalhos específicos sôbre delineamento "switchback"não se nota a preocupação da dedução da análise da variância por algum processo estatístico-matemático. As fórmulas são sempre apresentadas sem demonstração, fazendo crer tratarem-se de derivações intuitivas, frutos da experiên cia do pesquisador.

Existe uma linha de pesquisa que, apesar de não se tratar, especìficamente, sôbre ensaios em "switchback", preocupa-se com o estudo de esquemas que possibilitem a estimação do efeito residual dos tratamentos.

A hipótese admitida, quando se utilizam de ensaios com reversão ("change-over"), é a não perduração do efeito residual por mais de um período. Para diminuir êsse efeito, nos ensaios em "switchback", costuma-se desprezar uma semana de produção no início de cada período experimental.

Cochran e outros (1941), Willians (1949), Willians (1950), Patterson (1951), Patterson (1952) e Lucas (1957) levam, entre outras coisas, à conclusão de que o delineamento em dupla reversão deve ser restrito aos casos em que os efeitos residuais são desprezíveis, pois não dá boa estimativa dêsses efeitos.

Em nosso meio nada se encontra que adicione algum subsídio ao delineamento "switchback", no que se refere à parte teórica.

Em seguida apresentam-se trabalhos de aplicação do delineamento em questão, mostrando a viabilidade do esquema e a tendência atual na substituição dos experimentos contínuos pelos experimentos com reversão.

Assis e outros (1962) utilizam o delineamento em"switchback" para comparar o efeito do farelo de torta de mamona atoxicada com os de algodão e amendoim. Obtém um coeficiente de variação de 5,5%. Nêste ensaio uma vaca é perdida por motivo de doença e calcula-se a parcela perdida. Como os efeitos devido a tratamentos não são estatìsticamente significativos, o ajuste no quadrado médio de tratamentos conserva a conclusão do teste F, porém, em caso contrário, pode-se incorrer em êrro, devido ao "bias" da soma de quadrados de tratamentos, calculada por Lucas (1956), no caso de perda de parcela, como fica demonstrado no presente trabalho.

Naufel e outros (1962) aplicam o delineamento "switchback" a ensaio visando,comparar a administração de farelo de torta de mamona atoxicada com os de soja e algodão. O coeficiente de variação é de 2,5%. Uma particularidade do ensaio é o aumento do período experimental de 21 dias para 28 dias, tendência observada atualmente.

Assis e outros (1962), estudando os efeitos da administração de raízes e tubérculos, como suplemento de inverno, em vacas em lactação,utilizam o delineamento "switchback" com formação de blocos. O coeficiente de variação é de 6,3%.

Lucci (1968), estudando os efeitos de silagens de Napier,de milho e de soja, como volumosos para vacas em lactação obtém um coeficiente de variação de 8%.

Aronovich e outros (1965) usam, para o estudo de concentrados na alimentação de vacas leiteiras, o delineamento "switchback" e obtém um coeficiente de variação de 3,5%.

Dos trabalhos de aplicação citados, tem-se uma idéia da grande precisão do delineamento "switchback", fato pouco frequente em experimentos de campo.

3 - MATERIAL E MÉTODOS

3.1 - Material

Durante o desenvolvimento do presente trabalho há um determinado ponto que se afigura crítico.

É estabelecido um modêlo matemático, convencionado no trabalho como simplificado e que, em parte, resolve a dedução da análise estatística do delineamento "switchback", porém, não possibilita o isolamento da parte de interação linear do resíduo.

Procura-se, então, estudar os componentes citados e verificar se existe determinadas situações em que o modêlo simplificado seja mais adequado, possibilitando a obtenção de maior poder na prova de F.

Com essa idéia, são planejados ensaios em branco, simulando experimentos com tratamentos, visando, com isso, estudar-se os componentes linear e quadrático da variação residual.

A faixa total utilizada nos ensaios é do 61º ao 207º dia de lactação, resultando a formação de 7 períodos de 21 dias, cada.

Os dados de produção diária são fornecidos pelo Departamento de Zootecnia da ESALQ, sob a chefia do Prof. Aristeu Mendes Peixoto que,com o Dr. Vidal Pedroso de Faria, orientam essa parte da pesquisa.

Os dados de produção diária são coletados de vacas da raça Holandeza, no período de 1943 a 1965, período em que tôdas as vacas recebem tratamento homogêneo.

São excluídas,ao máximo, vacas de 1ª lactação, pois, em geral, essa lactação difere daquela produzida durante a vida útil do animal. São excluídas as vacas de mais de 8 lactações, pelo mesmo motivo.

As vacas são classificadas pelo mês em que ocorre o 61º dia de lactação.

O 61º dia de lactação é o começo do decréscimo linear da curva de lactação, justamente a fase em que se recomenda a tomada de dados para os experimentos em "switchback".

Do total de dados coletados são selecionados 21.168, correspondentes a 147 dias de produção diária de 12 vacas, para cada mês do ano.

Os 147 dias de lactação são divididos em 7 períodos de 21 dias cada, sendo que para cada um dêles é desprezada a primeira semana de produção.

As médias de cada período são calculadas com a correção para 4% de graxa, segundo Gaines (1923) e de uso generalizado,

$$L\ (4\%) = 0{,}4\ L + 0{,}15\ L.g$$

onde,

L: produção de leite em quilos.
g: porcentagem de gordura.
L (4%): leite corrigido em quilos.

O quadro seguinte dá idéia da organização das médias corrigidas, que entram para a formação dos ensaios em branco.

Períodos

Nome	Parição	I	II	III	IV	V	VI	VII
1.Xara	5	9,64	9,88	7,96	6,40	6,84	6,12	5,79
2.Ufania	6	13,95	13,13	10,49	10,67	9,64	9,00	8,25
:	:	:	:	:	:	:	:	:
.	.	.	.	.	.	.	.	.
12.								

Um experimento em branco, por exemplo, pode ser constituido com os dados dos 3 primeiros períodos, referentes a 12 vacas, começando a produção durante o mês de janeiro.

É sempre usado, para a análise estatística, o esquema abaixo,

Períodos

Vacas	I	II	III
1	1	2	1
2	2	3	2
3	3	1	3
4	1	2	1
5	2	3	2
6	3	1	3
7	1	2	1
8	2	3	2
9	3	1	3
10	1	2	1
11	2	3	2
12	3	1	3

onde, dentro do quadro, aparecem os números dos tratamentos fictícios atribuidos às parcelas.

As análises estatísticas são efetuadas no computador eletrônico IBM-1130-4K da ESALQ e a programação dêste é baseada nas fórmulas apresentadas por Lucas (1956), com a modificação referente ao cálculo da interação período (linear) x vacas.

Apenas como ilustração, apresentam-se os dados e resultados do primeiro ensaio em branco analisado.

Períodos

Vaca	I	II	III
1	9,64 (1)	9,88 (2)	7,96 (1)
2	13,95 (2)	13,13 (3)	10,49 (2)
3	8,26 (3)	7,65 (1)	7,50 (3)
4	8,75 (1)	8,48 (2)	8,37 (1)
5	9,38 (2)	8,55 (3)	7,43 (2)
6	17,07 (3)	14,61 (1)	14,30 (3)
7	11,94 (1)	10,74 (3)	10,22 (1)
8	10,79 (2)	10,56 (1)	10,00 (2)
9	8,56 (3)	7,32 (2)	7,74 (3)
10	9,01 (1)	9,14 (3)	8,58 (1)
11	10,02 (2)	10,91 (1)	10,22 (2)
12	12,41 (3)	12,38 (2)	12,78 (3)

$F_{sw} = 1,93$ $F_{mod} = 0,99$

$s_q^2 = 0,2482$ (var. quad.)

$s_\ell^2 = 0,6727$ (var. linear)

$s_p^2 = 0,4817$ (média pond.)

F_{sw} = valor de F usando-se s_q^2

F_{mod} = valor de F usando-se s_p^2

3.2 - Métodos

A metodologia usada baseia-se na teoria da análise da variância, encontrada, por exemplo, em Graybill (1961).

Seja, $Y = X\beta + E$

o sistema de equações, na forma matricial, representando as observações ($\underline{Y}$) em função de um modêlo matemático constituido de parâmetros formadores do vator $\underline{\beta}$ adicionado de um vetor de êrros $N(0,\sigma^2)$ e notado por E.

Da minimização da variável $E'E$ estima-se β do sistema:

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

Entretanto, no caso de delineamentos experimentais, o sistema acima não têm solução única, pois a característica de $X'X$ é menor que sua dimensão.

Por ser da conveniência daqueles que se utilizam da computação eletrônica, procura-se obter um sistema de equações normais de solução única, a partir de restrições sôbre os parâmetros constituintes de $\underline{\beta}$.

Seja X a matriz dos coeficientes dos parâmetros de dimensão $(N \times \ell)$, onde,

N: número de observações

ℓ: número de parâmetros

Seja A a matriz de restrições tal que,

$$\text{característica}\left(\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix}\right) = \ell$$

Seja Y o vetor coluna de ordem N das observações e E o vetor, de mesma dimensão, dos êrros $N(0,\sigma^2)$

Forme-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} Y \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix}$$

Pelo método dos quadrados mínimos, obtém-se,

$$\begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ O \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} \beta$$

$$\begin{bmatrix} E' & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} Y \\ O \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} \beta \right\}' \left\{ \begin{bmatrix} Y \\ O \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} \beta \right\}$$

$$E'E = \left\{ \begin{bmatrix} Y' & O \end{bmatrix} - \beta' \begin{bmatrix} X' & A' \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{bmatrix} Y \\ O \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} \beta \right\}$$

$$E'E = Y'Y - Y'X\beta - \beta'X'Y + \beta'(X'X + A'A)\beta$$

$$E'E = Y'Y - Y'X\beta - \beta'X'Y + \beta'X'X\beta + \beta'A'A\beta$$

Diferenciando-se em relação a β resulta,

$$d(E'E) = -Y'Xd\beta - d\beta'X'Y + d\beta'X'X\beta + \beta'X'Xd\beta + d\beta A'A\beta + $$
$$+ \beta'A'Ad\beta$$

Simplificando-se, resulta

$$d(E'E) = d\beta' \left[-2X'Y + 2(X'X + A'A)\beta \right]$$

Igualando-se a zero $d(E'E)$, resulta:

$$(X'X + A'A)\hat{\beta} = X'Y$$

que escrito na forma de partição, fica:

$$\begin{bmatrix} X' \mid A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \hline A \end{bmatrix} \hat{\beta} = X'Y$$

Mas, por hipótese, caract $\left(\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} \right)$ = caract $\left(\begin{bmatrix} X' & A' \end{bmatrix} \right) = \ell$

e, portanto, o sistema $(X'X + A'A)\hat{\beta} = X'Y$ tem solução única, pois a característica de $(X'X + A'A)$ é ℓ, idêntica a sua dimensão. Faça-se $M = X'X + A'A$, donde $\hat{\beta} = M^{-1}X'Y$.

A soma de quadrados devido aos parâmetros de β é calculada por:

$$\hat{\beta}' X' Y$$

e a soma residual por:

$$Y'Y - \hat{\beta}' X' Y$$

Em certos pontos do presente trabalho é necessário o cálculo da soma de quadrados devido a parte de β, ajustada para os demais parâmetros. A Técnica utilizada é a sugerida por Graybill(1961), resumida no seguinte:

seja a equação

$$\begin{bmatrix} X_1' X_1 & X_1' X_2 \\ X_2' X_1 & X_2' X_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1' Y \\ X_2' Y \end{pmatrix}$$

resultante da partição de $M \hat{\beta} = X' Y$

Ignorando-se $\hat{\gamma}_1$, calcule-se

$$X_2' X_2 \tilde{\gamma}_2 = X_2' Y$$

resultando a soma de quadrados devida a $\hat{\gamma}_2$:

$$R(\hat{\gamma}_2) = \tilde{\gamma}_2 X_2' Y$$

A quantidade $\hat{\beta}' X' Y - \tilde{\gamma}_2' X_2' Y$ é chamada redução devida a $\hat{\gamma}_1$, ajustada para $\hat{\gamma}_2$ e é notada pelo símbolo $R(\hat{\gamma}_1 | \hat{\gamma}_2)$. No caso da verificação da hipótese $\hat{\gamma}_1 = 0$, tem-se a análise da variância abaixo:

Fonte de variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	
Total	N	$Y'Y$		
$R(\beta)$	ℓ	$\hat{\beta}' X'Y$		
Resíduo	$N + u - \ell$	$Y'Y - \hat{\beta} X'Y = R_1$	$Q_1 = \dfrac{R_1}{N+u-\ell}$	
$R(\hat{\gamma}_2)$	q	$\tilde{\gamma}_2' X_2' Y$		
Resíduo*	$N + s - q$	$Y'Y - \tilde{\gamma}_2 X'Y = R_2$		
$R(\hat{\gamma}_1 \| \hat{\gamma}_2)$	$(\ell - q)(s-u)$	$R_2 - R_1$	$Q_2 = \dfrac{R_2 - R_1}{(\ell-q)(s-u)}$	$F = \dfrac{Q_2}{Q_1}$

onde,

- N: nº de observações
- ℓ: nº de parâmetros de β
- u: nº de restrições necessária para tornar $X'X$ iversível, correspondente a característica de $A'A$.
- q: nº de parâmetros de $\hat{\gamma}_2$.
- s: nº de restrições necessárias para tornar $X_2' X_2$ inversível, correspondente à característica de $A_2' A_2$ (partição de $A'A$ correspondente a $X_2' X_2$).

Para o estudo das esperanças matemáticas das estimativas calculadas no trabalho, usa-se a metodologia usual.

Sejam, a: constante

$$e_i \frown N(0, \sigma^2) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Então, $E\ (a) = a$

$$E\ (e_i) = 0$$

$$E\ (e_i^2) = \sigma^2$$

$$E\ (\sum_{i=1}^{n} e_i^2) = N\,\sigma^2$$

Como os êrros não são correlacionados, tem-se,

$$E\ (e_i\ e_j) = 0 \qquad i \neq j$$

Donde, $E\left[(\sum_{i=1}^{n} e_i)^2\right] = N\,\sigma^2$

Se $\hat{c}$ é a estimativa de c, tem-se a expressão da variância de $\hat{c}$, ou seja, $V(\hat{c}) = E\left\{\left[\hat{c} - E(\hat{c})\right]^2\right\}$

4 - Resultados e Discussão

4.1 - Modêlo matemático simplificado ou reduzido

O primeiro detalhe que o estatístico-metemático procura quando está interessado no estudo de um delineamento experimental é o modêlo matemático fundamental, que tenha como variável dependente a observação e como variáveis independentes os efeitos fixos que influem na observação, adicionadas de um êrro aleatório, que, na maioria dos casos, deve ser distribuido normalmente, com média zero e variância σ^2.

I - Esquema completo

Para iniciar-se o estudo de um modêlo matemático, considere-se um esquema inicial representando um ensaio em "switchback".

Admita-se o caso do delineamento completo com três tratamentos, cujo esquema está representado abaixo:

	Períodos		
Vacas	P_1	P_2	P_3
V_1	1*	2	1
V_2	2	3	2
V_3	3	1	3
V_4	1	3	1
V_5	2	1	2
V_6	3	2	3

O modêlo matemático mais simples e intuitivo que o esquema sugere é:

$$y_{ijk} = m + v_1 + p_j + t_k + e_{ijk} \qquad (1)$$

---

* - Os número, dentro do quadro acima, referem-se aos tratamentos atribuídos às parcelas.

onde,

m: média

v_i: efeito da vaca $\underline{i}$ $(i=1,2,\ldots\, v)$

p_j: efeito do período $\underline{j}$ $(j=1,2,3)$

t_k: efeito do tratamento $\underline{k}$ $(k=1,2,\ldots,p)$

O primeiro passo é a aplicação do modêlo (1) a cada observação, isto é, a montagem da equação matricial

$$\begin{bmatrix} Y \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix} \qquad \ldots . \; (2)$$

onde $\begin{bmatrix} Y \\ O \end{bmatrix}$ é o vetor coluna de dimensão $(N+3)$, $\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes dos parâmetros e de dimensão $(N+3) \times (v+p+4)$, onde $\underline{N}$ se refere ao número de observações, $\underline{v}$ ao número de vacas, $\underline{p}$ ao número de tratamentos e a constante 4 devido aos 3 parâmetros de períodos mais 1 da média. Para o caso presente, tem-se: $v=6$; $p=3$ e $N=18$. A constante 3 adicionada a $\underline{N}$ corresponde ao número de linhas da matriz $\underline{A}$ definida na parte do trabalho denominada Método.

No caso em estudo, a característica da matriz $\underline{X}$, sem as restrições, é sempre $(v+p+1)$ o que implica que a característica de $\underline{A}$ deve ser 3.

A matriz $\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix}$ estendida, fica:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{122} \\ e_{131} \\ e_{212} \\ e_{223} \\ e_{232} \\ e_{313} \\ e_{321} \\ e_{333} \\ e_{411} \\ e_{423} \\ e_{431} \\ e_{512} \\ e_{521} \\ e_{532} \\ e_{613} \\ e_{622} \\ e_{633} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}}_{\beta} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{122} \\ y_{131} \\ y_{212} \\ y_{223} \\ y_{232} \\ y_{313} \\ y_{321} \\ y_{333} \\ y_{411} \\ y_{423} \\ y_{431} \\ y_{512} \\ y_{521} \\ y_{532} \\ y_{613} \\ y_{622} \\ y_{633} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} Y \\ O \end{bmatrix}}$$

Da minimização de E'E resulta o sistema de equações normais abaixo, que possui uma única solução para β.

Para o caso presente, tem-se:

$$\text{caract}\left(\frac{X}{A}\right) = \text{caract}\,(X'X + A'A) = 13,$$ correspondente ao número de parâmetros, donde,

$$M\,\hat{\beta} = X'Y$$

tem solução única; estendendo-se M, tem-se,

$$\begin{array}{ccc} \underline{M} & \hat{\beta} \; = & \underline{X'Y} \\ \left[\begin{array}{c|cccccc|ccc|ccc} 18 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 6 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 7 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 7 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c} \hat{m} \\ \hline \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \\ \hat{v}_5 \\ \hat{v}_6 \\ \hline \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \\ \hline \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \hat{t}_3 \end{array}\right] = & \left[\begin{array}{c} G \\ \hline V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ \hline P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array}\right] \end{array} \qquad (3)$$

onde, G : total geral
V_i: total correspondente à vaca $\underline{i}$.
P_j: total correspondente ao período $\underline{j}$.
T_k: total correspondente ao tratamento $\underline{k}$.

Levando-se em conta as restrições,

$$\sum_{i=1}^{6} \hat{v}_i = 0 \;;\quad \sum_{j=1}^{3} \hat{p}_j = 0 \;;\quad \sum_{k=1}^{3} \hat{t}_k = 0$$

resultam de (3) as estimativas:

$$\hat{m} = \frac{G}{18} \;;\; \hat{p}_1 = \frac{P_1}{6} - \frac{G}{18} \;;\; \hat{p}_2 = \frac{P_2}{6} - \frac{G}{18} \;;\; \hat{p}_3 = \frac{P_3}{6} - \frac{G}{18}$$

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{3}(V_1 - \frac{3G}{18} - 2\,\hat{t}_1 - \hat{t}_2)$$

$$\hat{v}_2 = \frac{1}{3}(V_2 - \frac{3G}{18} - 2\,\hat{t}_2 - \hat{t}_3)$$

$$\hat{v}_3 = \frac{1}{3}(V_3 - \frac{3G}{18} - \hat{t}_1 - 2\hat{t}_3)$$

$$\hat{v}_4 = \frac{1}{3}(V_4 - \frac{3G}{18} - 2\,\hat{t}_1 - \hat{t}_3)$$

$$\hat{v}_5 = \frac{1}{3}(V_5 - \frac{3G}{18} - \hat{t}_1 - 2\hat{t}_2)$$

$$\hat{v}_6 = \frac{1}{3}(V_5 - \frac{3G}{18} - \hat{t}_2 - 2\hat{t}_3)$$

Conseguidas as estimativas, obtém-se, pois, a soma de quadrados dos parâmetros:

$$\text{SQ Parâmetros} = \hat{t}_1 T_2 + \hat{t}_2 T_2 + \hat{t}_3 T_3 + \hat{v}_1 V_1 + \hat{v}_2 V_2 + \ldots + \hat{v}_6 V_6 + + \hat{p}_1 P_1 + \hat{p}_2 P_2 + \hat{p}_3 P_3$$

Como os parâmetros de tratamentos e vacas não são independentes, a soma de quadrados de parâmetros deve ser rearranjada de forma a ficar ortogonalmente partida. Tem-se, pois,

$$\begin{aligned} \text{SQ Parâmetros} = {} & \hat{t}_1 T_1 + \hat{t}_2 T_2 + \hat{t}_3 T_3 + \\ & + \frac{1}{3}\Big\{ (V_1 - \frac{G}{6} - 2\hat{t}_1 - \hat{t}_2) V_1 + (V_2 - \frac{G}{6} - 2\hat{t}_2 - \hat{t}_3) V_2 + \\ & + (V_3 - \frac{G}{6} - \hat{t}_1 - 2\hat{t}_3) V_3 + (V_4 - \frac{G}{6} - 2\hat{t}_1 - \hat{t}_3) V_4 + \\ & + (V_5 - \frac{G}{6} - \hat{t}_1 - 2\hat{t}_2) V_5 + (V_6 - \frac{G}{6} - \hat{t}_2 - 2\hat{t}_3) V_6 \Big\} + \\ & + \hat{p}_1 P_1 + \hat{p}_2 P_2 + \hat{p}_3 P_3 \end{aligned}$$

Colocando-se em evidência os têrmos em $\hat{t}_k$ $(k=1,2,3)$, resulta:

$$\begin{aligned} \text{SQ Parâmetros} = {} & \hat{t}_1 \Big\{ T_1 - \frac{2}{3}(V_1+V_4) - \frac{1}{3}(V_3+V_5) \Big\} + \\ & + \hat{t}_2 \Big[T_2 - \frac{2}{3}(V_2+V_5) - \frac{1}{3}(V_1+V_6) \Big] + \\ & + \hat{t}_3 \Big[T_3 - \frac{2}{3}(V_3+V_6) - \frac{1}{3}(V_2+V_4) \Big] \\ & + \Big(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{6} V_i^2 - \frac{G^2}{18} \Big) + \Big(\frac{1}{6} \sum_{j=1}^{3} P_j^2 - \frac{G^2}{18} \Big) \end{aligned}$$

Fazendo-se,

$$\begin{aligned} Q_1^* &= T_1 - \frac{2}{3}(V_1+V_4) - \frac{1}{3}(V_3+V_5) \\ Q_2^* &= T_2 - \frac{2}{3}(V_2+V_5) - \frac{1}{3}(V_1+V_6) \qquad \ldots (4) \\ Q_3^* &= T_3 - \frac{2}{3}(V_3+V_6) - \frac{1}{3}(V_2+V_4) \end{aligned}$$

pode-se estabelecer analogia com a fórmula de cálculo da soma de quadrados de tratamentos obtida por Lucas (1956).

O quadro a seguir serve para auxiliar a comparação desejada.

Vacas	I	II	III	Di
V_1	y_{111}	y_{122}	y_{131}	$y_{111}-2y_{122}+y_{131}$
V_2	y_{212}	y_{223}	y_{232}	$y_{212}-2y_{223}+y_{232}$
V_3	y_{313}	y_{321}	y_{333}	$y_{313}-2y_{321}+y_{333}$
V_4	y_{411}	y_{423}	y_{431}	$y_{411}-2y_{423}+y_{431}$
V_5	y_{512}	y_{521}	y_{532}	$y_{512}-2y_{521}+y_{532}$
V_6	y_{613}	y_{622}	y_{633}	$y_{613}-2y_{622}+y_{633}$

Lucas apresenta a fórmula da soma de quadrados de tratamentos,

$$SQT(aj.) = \frac{1}{6np} \sum_{k=1}^{p} Q_k^2 ,$$

onde,

Q_k = soma dos D's em que o tratamento $\underline{k}$ aparece nos 1º e 3º períodos subtraída da soma dos D's em que o tratamento $\underline{k}$ aparece no 2º período.

$$\underline{n}\begin{cases} = r(\text{no caso de experimentos reduzidos}) \\ = 2r(\text{no caso de experimentos completos}) \end{cases}$$

$\underline{r}$ = número de repetições de cada sequência.

Nas equações (4) ao substituir-se os totais de vacas(V_i) e os totais de tratamentos (T_k) em função das observações y_{ijk}, de acôrdo com o quadro acima, resulta,

$$Q_1^* = \frac{1}{3}\left[(D_1+D_4)-(D_3+D_5)\right] = \frac{1}{3} Q_1$$

$$Q_2^* = \frac{1}{3}\left[(D_2+D_5)-(D_1+D_6)\right] = \frac{1}{3} Q_2 \qquad \ldots (6)$$

$$Q_3^* = \frac{1}{3}\left[(D_3+D_6)-(D_2+D_4)\right] = \frac{1}{3} Q_3$$

Do sistema (3), após algumas simplificações, resulta,

$$\hat{t}_1 = \frac{1}{4}\left[T_1 - \frac{2}{3}(V_1+V_4) - \frac{1}{3}(V_3+V_5)\right]$$

$$\hat{t}_2 = \frac{1}{4}\left[T_2 - \frac{2}{3}(V_2+V_5) - \frac{1}{3}(V_1+V_6)\right] \qquad \ldots (7)$$

$$\hat{t}_3 = \frac{1}{4}\left[T_3 - \frac{2}{3}(V_3+V_6) - \frac{1}{3}(V_2+V_4)\right]$$

Portanto, a soma de quadrados de parâmetros, fica:

$$S.Q.Parâmetros = \sum_{k=1}^{3} \hat{t}_k Q_k^* + \left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6} V_i^2 - \frac{G^2}{18}\right) + \left(\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{3} P_j^2 - \frac{G^2}{18}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{4} Q_k^* Q_k^* + \left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6} V_i^2 - \frac{G^2}{18}\right) + \left(\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{3} P_j^2 - \frac{G^2}{18}\right)$$

$$= \frac{1}{36} \sum_{k=1}^{3} Q_k^2 + \left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6} V_i^2 - \frac{G^2}{18}\right) + \left(\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{3} P_j^2 - \frac{G^2}{18}\right)$$

= SQT (aj.) + SQ Vacas (usual) + SQ Períodos (usual).

Verifica-se que existe uma perfeita identidade das somas de quadrados de tratamentos ajustadas, justificando o modêlo simplificado para a derivação dessa parte da soma de quadrados total.

As partes correspondentes a vacas e períodos não são levadas em consideração na análise convencional, apresentadas por Lucas(1956).

Caso II - Esquema reduzido - Admita-se o esquema abaixo:

Períodos

Vacas	I	II	III
V_1	1	2	1
V_2	2	3	2
V_3	3	4	3
V_4	4	5	4
V_5	5	1	5
V_6	1	3	1
V_7	2	4	2
V_8	3	5	3
V_9	4	1	4
V_{10}	5	2	5

Utilizando-se do mesmo processo aplicado ao caso I (esquema completo), tem-se o sistema de equações normais na forma matricial,

$$\underline{M} \qquad\qquad\qquad \hat{\beta} \quad = \underline{X'Y}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccccccc|ccc|ccccc}
30 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 10 & 10 & 10 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
\hline
10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
6 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\
6 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 \\
6 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\hat{m} \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \\ \hat{v}_5 \\ \hat{v}_6 \\ \hat{v}_7 \\ \hat{v}_8 \\ \hat{v}_9 \\ \hat{v}_{10} \\ \hline \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \\ \hline \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \hat{t}_3 \\ \hat{t}_4 \\ \hat{t}_5
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
G \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \\ V_{10} \\ \hline P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5
\end{array}\right]$$

Dêsse sistema resultam as estimativas,

$$\hat{m} = \frac{G}{30}$$

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{3}(V_1 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_1 - \hat{t}_2) \qquad \hat{v}_2 = \frac{1}{3}(V_2 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_2 - \hat{t}_3)$$

$$\hat{v}_3 = \frac{1}{3}(V_3 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_3 - \hat{t}_4) \qquad \hat{v}_4 = \frac{1}{3}(V_4 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_4 - \hat{t}_5)$$

$$\hat{v}_5 = \frac{1}{3}(V_5 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_5 - \hat{t}_1) \qquad \hat{v}_6 = \frac{1}{3}(V_6 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_1 - \hat{t}_3)$$

$$\hat{v}_7 = \frac{1}{3}(V_7 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_2 - \hat{t}_4) \qquad \hat{v}_8 = \frac{1}{3}(V_8 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_3 - \hat{t}_5)$$

$$\hat{v}_9 = \frac{1}{3}(V_9 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_4 - \hat{t}_1) \qquad \hat{v}_{10} = \frac{1}{3}(V_{10} - 3\hat{m} - 2\hat{t}_5 - \hat{t}_2)$$

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{10}(P_1 - 10\hat{m})$$

$$\hat{p}_2 = \frac{1}{10}(P_2 - 10\hat{m}) \qquad \hat{p}_3 = \frac{1}{10}(P_3 - 10\hat{m})$$

Desenvolvendo-se a expressão da soma de quadrados de parâmetros, tem-se,

$$SQ \text{ Parâmetros} = \hat{m}\, G + \hat{t}_1 T_1 + \hat{t}_2 T_2 + \hat{t}_3 T_3 + \hat{v}_1 V_1 + \ldots \hat{v}_{10} V_{10} +$$
$$+ \hat{p}_1 P_1 + \hat{p}_2 P_2 + \hat{p}_3 P_3$$

Reunindo os termos em $\hat{t}_k$ (k=1,2,3), fica,

$$\text{SQParâmetros} = \frac{G^2}{30} + \hat{t}_1\left[T_1 - \frac{2}{3}(V_1+V_6) - \frac{1}{3}(V_5+V_9)\right] +$$

$$+ \hat{t}_2\left[T_2 - \frac{2}{3}(V_2+V_7) - \frac{1}{3}(V_1+V_{10})\right] +$$

$$+ \hat{t}_3\left[T_3 - \frac{2}{3}(V_3+V_8) - \frac{1}{3}(V_2+V_6)\right] +$$

$$+ \hat{t}_4\left[T_4 - \frac{2}{3}(V_4+V_9) - \frac{1}{3}(V_3+V_7)\right] +$$

$$+ \hat{t}_5\left[T_5 - \frac{2}{3}(V_5+V_{10}) - \frac{1}{3}(V_4+V_8)\right] +$$

$$+ \left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{10} V_i^2 - \frac{G^2}{30}\right) + \left(\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{3} P_j^2 - \frac{G^2}{30}\right)$$

Do mesmo modo feito para o primeiro caso, considere-se o quadro abaixo, colocado numa forma adequada para a comparação com os resultados de Lucas (1956).

Vacas	Periodos P_1	P_2	P_3	D_i
V_1	y_{111}	y_{122}	y_{131}	$y_{111} - 2y_{122} + y_{131}$
V_2	y_{212}	y_{223}	y_{232}	$y_{212} - 2y_{223} + y_{232}$
V_3	y_{313}	y_{324}	y_{333}	$y_{313} - 2y_{324} + y_{333}$
V_4	y_{414}	y_{425}	y_{434}	$y_{414} - 2y_{425} + y_{434}$
V_5	y_{515}	y_{521}	y_{535}	$y_{515} - 2y_{521} + y_{535}$
V_6	y_{611}	y_{623}	y_{631}	$y_{611} - 2y_{623} + y_{631}$
V_7	y_{712}	y_{724}	y_{732}	$y_{712} - 2y_{724} + y_{732}$
V_8	y_{813}	y_{825}	y_{833}	$y_{813} - 2y_{825} + y_{833}$
V_9	y_{914}	y_{921}	y_{934}	$y_{914} - 2y_{921} + y_{934}$
V_{10}	$y_{10,1,5}$	$y_{10,2,2}$	$y_{10,3,5}$	$y_{10,1,5} - 2y_{10,2,2} + y_{10,3,5}$

Fazendo-se os coeficientes de $\hat{t}_k$ iguais, respectivamente, a Q_k^* (k = 1,2,..., 5) resulta,

$$Q_1^* = T_1 - \frac{2}{3}(V_1+V_6) - \frac{1}{3}(V_5+V_9) =$$

$$= y_{111} + y_{131} + y_{611} + y_{631} + y_{521} + y_{921} -$$

$$- \frac{2}{3}(y_{111} + y_{122} + y_{131} + y_{611} + y_{623} + y_{631}) -$$

$$- \frac{1}{3}(y_{111} + y_{131} + y_{611} + y_{631} + 2y_{521} + 2y_{921}$$

$$- 2y_{122} - 2y_{623} - y_{515} - y_{535} - y_{914} - y_{934})$$

$$= \frac{1}{3}\left[(D_1+D_6) - (D_5+D_9)\right]$$

e, continuando o mesmo processo, chega-se a

$$Q_k^* = \frac{1}{3} Q_k \qquad (k=1,2,\ldots,5)$$

onde Q_k é a quantidade definida por Lucas (1956).

Das equações normais, tem-se,

$$\hat{t}_1 = \frac{3}{10}\left[T_1 - \frac{2}{3}(V_1+V_6) - \frac{1}{3}(V_5+V_9)\right]$$

$$\hat{t}_2 = \frac{3}{10}\left[T_2 - \frac{2}{3}(V_2+V_7) - \frac{1}{3}(V_1+V_{10})\right]$$

$$\hat{t}_3 = \frac{3}{10}\left[T_3 - \frac{2}{3}(V_3+V_8) - \frac{1}{3}(V_2+V_6)\right]$$

$$\hat{t}_4 = \frac{3}{10}\left[T_4 - \frac{2}{3}(V_4+V_9) - \frac{1}{3}(V_3+V_7)\right]$$

$$\hat{t}_5 = \frac{3}{10}\left[T_5 - \frac{2}{3}(V_5+V_{10}) - \frac{1}{3}(V_4+V_8)\right]$$

Fazendo-se a comparação da soma de quadrados de tratamentos, deduzida do modêlo com a obtida por Lucas (1956), tem-se,

$$SQT_{(aj.)} = \sum_{k=1}^{5} \hat{t}_k Q_k^* = \sum_{k=1}^{5} \frac{3}{10} \left(\frac{1}{3} Q_k\right) \left(\frac{1}{3} Q_k\right) =$$

$$= \frac{1}{30} \sum_{k=1}^{5} Q_k^2$$

que é a quantidade procurada.

Pela estrutura do desenvolvimento, chega-se à generalização,

$$Q_k^* = T_k - \frac{2}{3}\sum_{k} V'_k - \frac{1}{3}\sum_{k} V''_k$$

$$\hat{t}_k = \frac{3}{2np} Q_k^* \qquad \text{onde,}$$

V'_k = total correspondente às vacas que receberam o tratamento $\underline{k}$ nos 1º e 3º períodos.

V''_k = total correspondente às vacas que receberam o tratamento $\underline{k}$ no 2º período.

r = número de repetições de cada sequência.

$$n : \begin{cases} = r, \text{ se for esquema reduzido} \\ = 2r, \text{ se for esquema completo.} \end{cases}$$

Exemplo: Admitam-se os dados abaixo provenientes de um experimento em "switchback" com 2 tratamentos e 5 repetições,

Vaca	Período P_1	P_2	P_3	V_i	D_i	
1	16 (1)	34 (2)	11 (1)	61	- 41	
2	23 (1)	24 (2)	8 (1)	55	- 17	
3	32 (1)	23 (2)	6 (1)	61	- 8	
4	22 (1)	28 (2)	9 (1)	59	- 25	
5	21 (1)	11 (2)	17 (1)	49	16	- 75
6	10 (2)	20 (1)	9 (2)	39	- 21	
7	34 (2)	26 (1)	20 (2)	80	2	
8	4 (2)	27 (1)	32 (2)	63	- 18	
9	15 (2)	25 (1)	26 (2)	66	- 9	
10	24 (2)	28 (1)	15 (2)	67	- 17	- 63
					600	-138

$$Q_1^* = T_1 - \frac{2}{3} V_1' - \frac{1}{3} V_1''$$

$$Q_2^* = T_2 - \frac{2}{3} V_2' - V_2''$$

$T_1 = 16+23+\ldots+25+28 = 291$

$V_1' = 61+55+\ldots+49 = 285$

$V_1'' = 39+80+\ldots+67 = 315$

$Q_1^* = -4$

$\hat{t}_1 = \frac{3}{2(10)2} (-4)$

$\hat{t}_1 = -\frac{3}{10}$

$T_2 = 34+24+\ldots+15 = 309$

$V_2' = 315$

$V_2'' = 285$

$Q_2^* = 4$

$\hat{t}_2 = \frac{3}{2(10)2} (4)$

$\hat{t}_2 = \frac{3}{10}$

$$SQT_{(aj.)} = -\frac{3}{10}(-4) + \frac{3}{10}(4) = 2{,}40$$

O mesmo resultado obtém-se pela fórmula de Lucas; de fato,

$$D_1 = -75 - (-63) = -12$$

$$D_2 = -63 - (-75) = 12$$

$$SQT_{(aj.)} = \frac{1}{6(10)2} \left[(-12)^2 + (12)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{120} (144+144) = 2{,}40$$

A análise de variância completa, pelo modêlo simplificado, fica:

Fonte de variação	G.L.	S.Q.	Q.M	F
Vacas(ñ ajust.)	9	361,13		
Períodos	2	432,60		
Tratamentos	1	2,40	2,40	0,03
Resíduo	17	1.387,84	81,64	
Total	29	2.183,97		

A análise da variância, apresentada por Lucas(1956),fica:

Fonte de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M	F
Tratamentos	1	2,40	2,40	0,05
Resíduo	8	355,87	44,48	
Total:	9	358,27		

$$\text{onde, S.Q.Total} = \frac{1}{6}\sum D_i^2 - \frac{1}{3np(p-1)}\left(\sum D_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{6}\left[(-41)^2 + \ldots + (-17)^2\right] - \frac{1}{60}(-138)^2 =$$

$$= 358{,}27$$

$$\text{SQ.Resíduo} = \text{SQ Total} - \text{SQT}_{(aj.)}.$$

Aqui existe ponto discutível no que se refere às diferenças quanto às estimativas da variação casual.

Examinando-se a composição do resíduo do modêlo reduzido, verifica-se que se pode decompô-lo em 2 partes aditivas, ou sejam:

Interação período (efeito linear) x vacas	v - 1
Interação período (efeito quadrát.) x vacas (eliminado efeito de tratamentos)	v - p

O componente linear é obtido pela diferença entre o resíduo do modêlo simplificado e o resíduo da análise de Lucas, que no caso presente resulta:

Fonte de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.
P'XV	9	1.031,97	114,6633
P"XV(Elim.trat.)	8	355,87	44,4838
Total(Res.Mod.Reduz)	17	1.387,84	81,6376

O passo seguinte é saber-se, com certeza, se os dois componentes estimam σ^2, donde a verificação que se segue dos componentes da variância.

4.2. <u>Componentes da variância</u>

Primeiramente faz-se a esperança matemática dos componentes das fontes de variação da análise de variância proposta por Lucas (1956).

Admita-se o esquema completo abaixo,

Períodos

Vacas	I	II	III	D_i
1	y_{111}	y_{122}	y_{131}	$y_{111} - 2y_{122} + y_{131}$
2	y_{212}	y_{223}	y_{232}	$y_{212} - 2y_{223} + y_{232}$
3	y_{313}	y_{321}	y_{333}	$y_{313} - 2y_{321} + y_{333}$
4	y_{411}	y_{423}	y_{431}	$y_{411} - 2y_{423} + y_{431}$
5	y_{512}	y_{521}	y_{532}	$y_{512} - 2y_{521} + y_{532}$
6	y_{613}	y_{622}	y_{633}	$y_{613} - 2y_{622} + y_{633}$

a) Esperança do quadrado médio de tratamentos

$$Q_1=(y_{111}-2y_{122}+y_{131})+(y_{411}-2y_{423}+y_{431})-(y_{313}-2y_{321}+y_{333})-(y_{512}-2y_{521}+y_{532})$$

$$Q_2=(y_{212}-2y_{223}+y_{232})+(y_{512}-2y_{521}+y_{532})-(y_{111}-2y_{122}+y_{131})-(y_{613}-2y_{622}+y_{633})$$

$$Q_3=(y_{313}-2y_{321}+y_{333})+(y_{613}-2y_{622}+y_{633})-(y_{212}-2y_{223}+y_{232})-(y_{411}-2y_{423}+y_{431})$$

Lembrando o modêlo reduzido: $y_{ijk}= m+v_i+p_j+t_k+e_{ijk}$, tem-se,

$$\begin{aligned}Q_1= &\Big[(m+v_1+p_1+t_1+e_{111})-2(m+v_1+p_2+t_2+e_{122})+(m+v_1+p_3+t_1+e_{131}) +\\ &+(m+v_4+p_1+t_1+e_{411})-2(m+v_4+p_2+t_3+e_{423})+(m+v_4+p_3+t_1+e_{431})\Big]-\\ -&\Big[(m+v_3+p_1+t_3+e_{313})-2(m+v_3+p_2+t_1+e_{321})+(m+v_3+p_3+t_3+e_{333}) +\\ &+(m+v_5+p_1+t_2+e_{512})-2(m+v_5+p_2+t_1+e_{521})+(m+v_5+p_3+t_2+e_{532})\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_2= &\Big[(m+v_2+p_1+t_2+e_{212})-2(m+v_2+p_2+t_3+e_{223})+(m+v_2+p_3+t_2+e_{232}) +\\ &+(m+v_5+p_1+t_2+e_{512})-2(m+v_5+p_2+t_1+e_{521})+(m+v_5+p_3+t_2+e_{532})\Big]-\\ -&\Big[(m+v_1+p_1+t_1+e_{111})-2(m+v_1+p_2+t_2+e_{122})+(m+v_1+p_3+t_1+e_{131}) +\\ &+(m+v_6+p_1+t_3+e_{613})-2(m+v_6+p_2+t_2+e_{622})+(m+v_6+p_3+t_3+e_{633})\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_3= &\Big[(m+v_3+p_1+t_3+e_{313})-2(m+v_3+p_2+t_1+e_{321})+(m+v_3+p_3+t_3+e_{333}) +\\ &+(m+v_6+p_1+t_3+e_{613})-2(m+v_6+p_2+t_2+e_{622})+(m+v_6+p_3+t_3+e_{633})\Big]-\end{aligned}$$

$$-\Big[(m+v_2+p_1+t_2+e_{212})-2(m+v_2+p_2+t_3+e_{223})+(m+v_2+p_3+t_2+e_{232})+$$

$$+(m+v_4+p_1+t_1+e_{411})-2(m+v_4+p_2+t_3+e_{423})+(m+v_4+p_3+t_1+e_{431})\Big]$$

$$E\Big[\text{SQTrat. (aj.)}\Big]=\frac{1}{36}\sum_{k=1}^{3}E(Q_k)^2$$

Simpl ificando-seas expressões para Q_k, resulta,

$$Q_1=8t_1-4t_2-4t_3+\begin{pmatrix}e_{111}-2e_{223}+e_{131}+e_{411}-2e_{423}+e_{431}-\\-e_{313}+2e_{321}-e_{333}-e_{512}+2e_{521}-e_{532}\end{pmatrix}$$

$$Q_2=8t_2-4t_1-4t_3+\begin{pmatrix}e_{212}-2e_{123}-e_{232}-e_{512}+2e_{521}-e_{532}-\\-e_{111}+2e_{122}-e_{131}-e_{613}+2e_{622}-e_{633}\end{pmatrix}$$

$$Q_3=8t_3-4t_1-4t_2+\begin{pmatrix}e_{313}-2e_{321}+e_{333}+e_{613}-2e_{622}+e_{633}-\\-e_{212}+2e_{223}-e_{232}-e_{411}+2e_{423}-e_{431}\end{pmatrix}$$

$$E\Big[\text{SQT(aj.)}\Big]=\frac{1}{36}\Big[72\,\sigma^2+E(8t_1-4t_2-4t_3)^2+E(8t_2-4t_1-4t_3)^2+$$
$$+E(8t_3-4t_1-4t_2)^2\Big]$$

$$E\Big[\text{SQT(aj.)}\Big]=2\,\sigma^2+\frac{1}{36}E(64t_1^2+16t_2^2+16t_3^2-64t_1t_2-64t_1t_3+32t_2t_3+$$
$$+64t_2^2-64t_1t_2-64t_2t_3+32t_1t_3+16t_1^2+16t_3^2+$$
$$+64t_3^2+16t_1^2+16t_2^2-64t_1t_3-64t_2t_3+32t_1t_2)$$

$$E\Big[\text{SQT(aj.)}\Big]=2\,\sigma^2+\frac{1}{36}E(96t_1^2+96t_2^2+96t_3^2-96t_1t_2-96t_1t_3-96t_2t_3)$$
$$=2\,\sigma^2+\frac{1}{36}E\Big[96(t_1^2+t_2^2+t_3^2)+48(-2)\,(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)\Big]$$

Por hipótese $t_1+t_2+t_3=0$ implica,

$(t_1+t_2+t_3)^2=t_1^2+t_2^2+t_3^2+2(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)=0$, donde,

$-2\,(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)=t_1^2+t_2^2+t_3^2$, que substituido na expressão da

$E\Big[\text{SQT(aj.)}\Big]$, resul ta

$$E\Big[\text{SQT(aj.)}\Big]=2\,\sigma^2+\frac{1}{36}E\Big[96\sum_{k=1}^{3}t_k^2+48\sum_{k=1}^{3}t_k^2\Big]=$$
$$=2\,\sigma^2+4\sum_{k=1}^{3}t_k^2$$

Portanto, a esperança do quadrado de tratamentos fica:

$$\boxed{E(\text{QMTaj.})=\sigma^2+2\sum_{k=1}^{3}t_k^2}$$

b) <u>Esperança da Soma de Quadrados Total</u> ("Switchback")

$$S.Q.Total = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} D_i^2 - \frac{1}{36}\left(\sum_{i=1}^{6} D_i\right)^2$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6} D_i^2 = &\left[(m+v_1+p_1+t_1+e_{111})-2(m+v_1+p_2+t_2+e_{122})+(m+v_1+p_3+t_1+e_{131})\right]^2 + \\ &+\left[(m+v_2+p_1+t_2+e_{212})-2(m+v_2+p_2+t_3+e_{223})+(m+v_2+p_3+t_2+e_{232})\right]^2 + \\ &+\left[(m+v_3+p_1+t_3+e_{313})-2(m+v_3+p_2+t_1+e_{321})+(m+v_3+p_3+t_3+e_{333})\right]^2 + \\ &+\left[(m+v_4+p_1+t_1+e_{411})-2(m+v_4+p_2+t_3+e_{423})+(m+v_4+p_3+t_1+e_{431})\right]^2 + \\ &+\left[(m+v_5+p_1+t_2+e_{512})-2(m+v_5+p_2+t_1+e_{521})+(m+v_5+p_3+t_2+e_{532})\right]^2 + \\ &+\left[(m+v_6+p_1+t_3+e_{613})-2(m+v_6+p_2+t_2+e_{622})+(m+v_6+p_3+t_3+e_{633})\right]^2\end{aligned}$$

Simplificando, resulta:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6} D_i^2 = &(p_1-2p_2+p_3+2t_1-2t_2+e_{111}-2e_{122}+e_{131})^2 + \\ &+(p_1-2p_2+p_3+2t_2-2t_3+e_{212}-2e_{223}+e_{232})^2 + \\ &+(p_1-2p_2+p_3+2t_3-2t_1+e_{313}-2e_{321}+e_{333})^2 + \qquad \ldots (8) \\ &+(p_1-2p_2+p_3+2t_1-2t_3+e_{411}-2e_{423}+e_{431})^2 + \\ &+(p_1-2p_2+p_3+2t_2-2t_1+e_{512}-2e_{521}+e_{532})^2 + \\ &+(p_1-2p_2+p_3+2t_3-2t_2+e_{613}-2e_{622}+e_{633})^2\end{aligned}$$

Aplicando-se esperança fica-se com,

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}E\left(\sum_{i=1}^{6} D_i^2\right) = \frac{1}{6}\Big\{36\sigma^2+E\Big[&(p_1-2p_2+p_3)^2+(2t_1-2t_2)^2+2(p_1-2p_2+p_3)(2t_1-2t_2) + \\ &+(p_1-2p_2+p_3)^2+(2t_2-2t_3)^2+2(p_1-2p_2+p_3)(2t_2-2t_3)+ \\ &+(p_1-2p_2+p_3)^2+(2t_3-2t_1)^2+2(p_1-2p_2+p_3)(2t_3-2t_1)+ \\ &+(p_1-2p_2+p_3)^2+(2t_1-2t_3)^2+2(p_1-2p_2+p_3)(2t_1-2t_3)+ \\ &+(p_1-2p_2+p_3)^2+(2t_2-2t_1)^2+2(p_1-2p_2+p_3)(2t_2-2t_1)+ \\ &+(p_1-2p_2+p_3)^2+(2t_3-2t_2)^2+2(p_1-2p_2+p_3)(2t_3-2t_2)\Big]\Big\}\end{aligned}$$

Verifica-se que os produtos se anulam, donde,

$$\frac{1}{6} E\left(\sum_{i=1}^{6} D_i^2\right) = 6\sigma^2 + E(p_1-2p_2+p_3)^2 + \frac{1}{6} E\left[16t_1^2+16t_2^2+16t_3^2-16(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)\right]$$

$$= 6\sigma^2 + (p_1-2p_2+p_3)^2 + \frac{1}{6} E\left[16 \sum_{k=1}^{3} t_k^2 + 8 \sum_{k=1}^{3} t_k^2\right] =$$

$$= 6\sigma^2 + (p_1-2p_2+p_3)^2 + 4 \sum_{k=1}^{3} t_k^2$$

Tirando-se os parêntesis e expoentes da expressão (8), elevando-se ao quadrado a soma resultante e aplicando-se esperança, resulta,

$$\frac{1}{36} E\left(\sum_{i=1}^{6} D_i\right)^2 = \frac{1}{36}\left[36\, E(p_1-2p_2+p_3)^2 + 36\sigma^2\right]$$

$$= (p_1-2p_2+p_3)^2 + \sigma^2$$

$$\therefore \quad \boxed{E\,(SQTotal) = 4 \sum_{k=1}^{3} t_k^2 + 5\sigma^2}$$

c) <u>Esperança do Quadrado Médio do Resíduo</u>

$$E(SQR) = E\,(SQTotal) - E(SQT\ aj.)$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{3} t_k^2 + 5\sigma^2 - (4 \sum_{k=1}^{3} t_k^2 + 2\sigma^2)$$

$$E\,(SQR) = 3\sigma^2$$

$$\boxed{E(QMR) = \sigma^2}$$

Em segundo lugar determina-se as esperanças matemáticas dos quadrados médios dos componentes do modêlo matemático, simplificado.

a) <u>Esperança da soma de quadrados de tratamentos</u>

$$E(SQTaj.) = 4 \sum_{k=1}^{3} t_k^2 + 2\sigma^2,$$

pois a fórmula para o cálculo da soma de quadrados de tratamentos ficou demonstrada que é a mesma para êsse caso.

b) <u>Esperança da Soma de Quadrados total</u>

$$SQTotal(mod) = \sum_{i,j,k} y_{ijk}^2 - \frac{1}{3v}\left(\sum_{i,j,k} y_{ijk}\right)^2 = \sum_{i,j,k} y_{ijk}^2 - C$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k} y_{ijk}^2 &= (m+v_1+p_1+t_1+e_{111})^2+(m+v_1+p_2+t_2+e_{122})^2+(m+v_1+p_3+t_1+e_{131})^2 + \\ &+(m+v_2+p_1+t_2+e_{212})^2+(m+v_2+p_2+t_3+e_{223})^2+(m+v_2+p_3+t_2+e_{232})^2 + \\ &+(m+v_3+p_1+t_3+e_{313})^2+(m+v_3+p_2+t_1+e_{321})^2+(m+v_3+p_3+t_3+e_{333})^2 + \qquad (9) \\ &+(m+v_4+p_1+t_1+e_{411})^2+(m+v_4+p_2+t_3+e_{423})^2+(m+v_4+p_3+t_1+e_{431})^2 +\end{aligned}$$

$$+(m+v_5+p_1+t_2+e_{512})^2+(m+v_5+p_2+t_1+e_{521})^2+(m+v_5+p_3+t_2+e_{532})^2 +$$
$$+(m+v_6+p_1+t_3+e_{613})^2+(m+v_6+p_2+t_2+e_{622})^2+(m+v_6+p_3+t_3+e_{633})^2$$

Aplicando-se esperança, resulta, depois de simplificar-se

$$E(\sum_{i,j,k} y^2) = 18\sigma^2+18m^2+3\sum_{i=1}^{6} v_i^2 +6\sum_{j=1}^{3} p_j^2 + 6\sum_{k=1}^{3} t_k^2 +$$
$$+ 2\left[(t_1-t_2)(v_4-v_2)+(t_1-t_3)(v_1-v_6)+(t_2-t_3)(v_5-v_3)\right]$$

Tirando-se os parêntesis e os expoentes da expressão (9), elevando-se ao quadrado a soma resultante e aplicando-se esperança, resulta,

$$\frac{1}{18} E(\sum_{i,j,k} y_{ijk})^2 = \frac{1}{18}(18^2 m^2+18\sigma^2) = 18m^2+\sigma^2 = E(C)$$

Por subtração, tem-se:

$$\boxed{E(SQTotal_{mod.}) = 17\sigma^2+3\sum_{i=1}^{6} v_i^2+6\sum_{j=1}^{3} p_j^2+6\sum_{k=1}^{3} t_k^2 + +2\left[(t_1-t_2)(v_4-v_2)+(t_1-t_3)(v_1-v_6)+(t_2-t_3)(v_5-v_3)\right]}$$

c) Esperança da Soma de Quadrados de Períodos

$$SQP = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{3} P_j^2 - C$$

$$E(SQP) = E\left\{\frac{1}{6}\left[(6m+6p_1+e_{111}+e_{212}+e_{313}+e_{411}+e_{512}+e_{613})^2 + \right.\right.$$
$$+(6m+6p_2+e_{122}+e_{223}+e_{321}+e_{423}+e_{521}+e_{622})^2 +$$
$$\left.\left.+(6m+6p_3+e_{131}+e_{232}+e_{333}+e_{431}+e_{532}+e_{633})^2\right]-C\right\}$$

$$E(SQP) = \frac{1}{6}\left[(36m^2+36p_1^2+6\sigma^2)+(36m^2+36p_2^2+6\sigma^2)+(36m^2+36p_3^2+6\sigma^2)+\right.$$
$$\left.+(72mp_1+72mp_2+72mp_3)\right] - 18m^2 - \sigma^2$$

$$E(SQP) = 18m^2+6\sum_{j=1}^{3} p_j^2+3\sigma^2 - 18m^2 - \sigma^2 = 2\sigma^2+6\sum_{j=1}^{3} p_j^2$$

Portanto, resulta:

$$\boxed{E(QMP) = \sigma^2+3\sum_{j=1}^{3} p_j^2}$$

d) Esperança da Soma de Quadrados de Vacas

$$SQV = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6} V_i^2 - C$$

$$E(SQV) = \frac{1}{3} E\Big[(3m+3v_1+2t_1+ t_2+e_{111}+e_{122}+e_{131})^2 +$$
$$+(3m+3v_2+2t_2+t_3+e_{212}+e_{223}+e_{232})^2 +$$
$$+(3m+3v_3+2t_3+t_1+e_{313}+e_{321}+e_{333})^2 +$$
$$+(3m+3v_4+2t_1+t_3+e_{411}+e_{423}+e_{431})^2 +$$
$$+(3m+3v_5+2t_2+t_1+e_{512}+e_{521}+e_{532})^2 +$$
$$+(3m+3v_6+2t_3+t_2+e_{613}+e_{622}+e_{633})^2 \Big] - E(C)$$

$$E(SQV) = \frac{1}{3}\Big\{18\sigma^2+E\Big[(3m+3v_1+2t_1+t_2)^2+(3m+3v_2+2t_2+t_3)^2 +$$
$$+(3m+3v_3+2t_3+t_1)^2+(3m+3v_4+2t_1+t_3)^2 +$$
$$+(3m+3v_5+2t_2+t_1)^2+(3m+3v_6+2t_3+t_2)^2 \Big]\Big\} -$$
$$- 18\ m^2 - \sigma^2$$

Desenvolvendo-se, lembrando do artifício $t_1^2+t_2^2+t_3^2=-2(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)$ resulta, depois de algumas simplificações:

$$E(SQV) = 5\sigma^2+3\sum_{i=1}^{6} v_i^2 +2\sum_{k=1}^{3} t_k^2 +2\Big[(t_1-t_2)(v_4-v_2)+(t_1-t_3)(v_1-v_6)+(t_2-t_3)(v_5-v_3)\Big]$$

e) Esperança do Quadrado Médio do Resíduo

$$E(SQR_{mod.}) = E\ (SQ\ Total_{mod.} - SQ\ Trat.aj. - SQ\ Per. - SQV)$$
$$= 17\sigma^2+ 3\sum_{i=1}^{6} v_i^2 + 6\sum_{j=1}^{3} p_j^2 + 6\sum_{k=1}^{3} t_k^2 +$$
$$+2\Big[(t_1-t_2)(v_4-v_2)+(t_1-t_3)(v_1-v_6)+(t_2-t_3)(v_5-v_3)\Big] -$$
$$- (2\sigma^2+4\sum_{k=1}^{3} t_k^2) - (2\sigma^2+6\sum_{j=1}^{3} p_j^2) -$$
$$- \Big\{5\sigma^2+3\sum_{i=1}^{6} v_i^2 +2\sum_{k=1}^{3} t_k^2 +2\Big[(t_1-t_2)(v_4-v_2)+(t_1-t_3)(v_1-v_6)+(t_2-t_3)(v_5-v_3)\Big]\Big\}$$

Portanto, $E(SQR_{mod}) = 8\sigma^2$

e, $\boxed{E(QMR_{mod}) = \sigma^2}$

Neste ponto cabe uma discussão dos resultados da aplicação de esperança matemática.

Fica evidente, na análise dos resultados, que, na hipótese de o modêlo matemático ser o proposto até aqui, não há dúvida de que a análise da variância deva ser aquela que leve em consideração a interação linear do resíduo. Porém, de modo semelhante a Patterson (1950) e Lucas (.. 1951), são analisados ensaios em branco, ùnicamente com a finalidade de conhecer-se, experimentalmente, a composição do resíduo.

A partir dos ensaios em branco, apresenta-se um quadro contendo 60 resultados dos componenetes linear e quadrático do resíduo, referentes a 5 estágios de lactação e 12 meses do ano. São resultados de condições de máxima homogeneidade das vacas, no que se refere a estágio de lactação. Em outras palavras, são resultados de experimentos com vacas no mesmo estágio de lactação.

QUADRO 1. Valores dos componenetes linear e quadrático do Resíduo do Modêlo Matemático Simplificado.

Sequência de Períodos

Meses	1 - 2 - 3		2 - 3 - 4		3 - 4 - 5		4 - 5 - 6		5 - 6 - 7	
JANEIRO	0,67	0,25	0,76	0,20	0,65	0,70	0,44	0,72	0,49	0,21
FEVEREIRO.....	0,43	0,12	1,16	0,18	0,59	0,54	0,68	0,32	0,86	0,16
MARÇO	0,66	0,29	0,42	0,16	0,43	0,17	0,33	0,27	0,42	0,44
ABRIL	0,72	0,65	0,71	0,35	0,79	0,31	0,39	0,14	0,43	0,19
MAIO	0,49	0,58	1,63	0,09	1,05	0,29	0,60	0,47	0,75	0,40
JUNHO.........	0,63	0,66	0,82	0,42	1,03	0,30	0,85	0,34	0,65	0,35
JULHO.........	1,29	0,40	1,10	0,52	0,66	0,25	1,53	0,40	0,75	0,66
AGÔSTO........	1,07	0,28	0,57	0,45	1,46	0,48	1,76	0,44	0,46	0,54
SETEMBRO......	0,96	0,57	0,90	0,54	0,79	0,84	1,07	0,30	1,10	0,31
OUTUBRO	1,66	0,92	1,32	0,63	2,58	0,21	1,32	0,21	0,84	0,37
NOVEMBRO......	1,95	0,92	1,63	0,27	0,91	0,89	1,56	0,57	0,59	0,31
DEZEMBRO......	0,56	0,22	0,74	0,23	0,81	0,26	0,93	0,25	0,70	0,36
M É D I A S:	0,92	0,49	0,98	0,34	0,98	0,44	0,96	0,37	0,67	0,36

Da simples observação do quadro 1, pode-se inferir que o componenete linear do resíduo do modêlo matemático simplificado deve estimar alguma coisa a mais do que a simples variação aleatória.

Os resultados do quadro 1 são apenas a confirmação, para as condições locais, do que Patterson (1950) e Lucas (1951) obtém em ensaios em "change-over".

A seguir, passa-se à introdução do modêlo matemático completo dos ensaios em "switchback", isto é, o modêlo matemático que permita a estimação de parcelas, dedução das somas de quadrados ajustadas e possibilite a aplicação de esperança matemática às estimativas de médias, variâncias, parcelas perdidas, etc...

4.3 - Modêlo matemático completo

Seja o modêlo matemático,

$$y_{ijk} = m+v_i+t_k+b_1x_j+ b_2z_j + c_i\, x_j+ e_{ijk} \quad ,$$

onde m: média

v_i: efeito da vaca i

t_k: efeito do tratamento k

b_1: efeito linear de período

b_2: efeito quadrático de período

c_i: efeito da interação período (linear) x vacas.

e_{ijk}: êrro com distribuição normal com média zero e variância σ^2.

$$x_j: \begin{cases} = -1 & \text{se } j=1 \quad (1^{\text{o}} \text{ período}) \\ = 0 & \text{se } j=2 \quad (2^{\text{o}} \text{ período}) \\ = 1 & \text{se } j=3 \quad (3^{\text{o}} \text{ período}) \end{cases}$$

$$z_j: \begin{cases} = 1 & \text{se } j=1 \quad (1^{\text{o}} \text{ período}) \\ = -2 & \text{se } j=2 \quad (2^{\text{o}} \text{ período}) \\ = 1 & \text{se } j=3 \quad (3^{\text{o}} \text{ período}) \end{cases}$$

Demonstra-se, a seguir, que o modêlo acima corresponde ao desdobramento do resíduo do modêlo reduzido nas duas partes que o compõem: linear e quadrática, conservando o restante, ou sejam, efeitos de vacas, tratamentos e períodos inalterados, a não ser o desmembramento feito dos componenetes linear e quadrático dos períodos.

Na verdade, o que se faz é a aplicação do conceito de polinômios ortogonais no modêlo reduzido.

A exemplo do feito para o modêlo matemático simplificado, admita-se um esquema com dois tratamentos, duas repetições por sequência e 6 vacas. Tem-se, pois, o quadro seguinte

Vacas	P_1	P_2	P_3
1	(1)	(2)	(1)
2	(1)	(2)	(1)
3	(1)	(2)	(1)
4	(2)	(1)	(2)
5	(2)	(1)	(2)
6	(2)	(1)	(2)

Para o caso presente, tem-se as matrizes β', $\left[\frac{X}{A}\right]$ e $\left[\frac{Y}{0}\right]$ abaixo,

$$\begin{bmatrix} m & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & t_1 & t_2 & b_1 & b_2 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{bmatrix}$$

$$(10)\qquad \left[\begin{array}{ccccccc|cc|cc|cccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
\quad
\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{122} \\ y_{131} \\ y_{211} \\ y_{222} \\ y_{231} \\ y_{311} \\ y_{322} \\ y_{331} \\ y_{412} \\ y_{421} \\ y_{432} \\ y_{512} \\ y_{521} \\ y_{532} \\ y_{612} \\ y_{621} \\ y_{632} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De (10) resulta o sistema de equações normais $M\hat{\beta}=X'Y$, cujos componentes, estendidos, ficam,

$$\begin{bmatrix} \hat{m} & \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 & \hat{v}_4 & \hat{v}_5 & \hat{v}_6 & \hat{t}_1 & \hat{t}_2 & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \hat{c}_1 & \hat{c}_2 & \hat{c}_3 & \hat{c}_4 & \hat{c}_5 & \hat{c}_6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|cccccc|cc|cc|cccccc}
18 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 9 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
9 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3
\end{array}\right]
\quad
\begin{bmatrix} G \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ T_1 \\ T_2 \\ -P_1 + P_3 \\ P_1-2P_2+P_3 \\ y_{131}-y_{111} \\ y_{231}-y_{211} \\ y_{331}-y_{311} \\ y_{432}-y_{412} \\ y_{532}-y_{512} \\ y_{632}-y_{612} \end{bmatrix}$$

Por conveniência, coloca-se a matriz $\hat{\beta}$ ao invés de $\hat{\beta}$ e acima de M ao invés de ao lado direito desta, nos dois sistemas. Do sistema de equações normais acima, resulta:

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{12}(P_3 - P_1)$$

$$\hat{b}_2 = \frac{1}{36}(P_1 - 2P_2 + P_3)$$

$$\hat{c}_1 = \frac{1}{2}(y_{131} - y_{111}) - \frac{1}{12}(P_3 - P_1)$$

$$\hat{c}_2 = \frac{1}{2}(y_{231} - y_{211}) - \frac{1}{12}(P_3 - P_1)$$

$$\hat{c}_3 = \frac{1}{2}(y_{331} - y_{311}) - \frac{1}{12}(P_3 - P_1)$$

$$\hat{c}_4 = \frac{1}{2}(y_{432} - y_{412}) - \frac{1}{12}(P_3 - P_1)$$

$$\hat{c}_5 = \frac{1}{2}(y_{532} - y_{512}) - \frac{1}{12}(P_3 - P_1)$$

$$\hat{c}_6 = \frac{1}{2}(y_{632} - y_{612}) - \frac{1}{12}(P_3 - P_1)$$

Pode-se constatar, pelo exame da matriz M, que as estimativas dos parâmetros restantes, ou sejam, $\hat{m}$, $\hat{v}_i$'s e t_k's são calculados da mesma maneira que no caso do modêlo matemático reduzido, sendo, pois, desnecessário a repetição do processo.

Restam apenas a derivação das fórmulas para os componentes linear e quadrático de períodos e a interação período(linear)x vacas; tem-se, pois:

$$SQ(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = \frac{1}{12}(P_1 - P_3)^2 + \frac{1}{36}(P_1 - 2P_2 + P_3)^2$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{3} P_j^2 - \frac{G^2}{18}$$

$$SQ(\hat{c}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i}(y_{i3k} - y_{i1k})^2 - \frac{1}{12}(P_1 - P_3)^2$$

Pela estrutura da matriz M fàcilmente pode-se generalizar,

$$SQ(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = \frac{1}{v}\sum_{j=1}^{3} P_j^2 - \frac{G^2}{3v}$$

$$SQ(\hat{c}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i}(y_{i3k} - y_{i1k})^2 - \frac{1}{2v}(P_1 - P_3)^2$$

Combinando-se os resultados do modêlo matemático reduzido e os do completo, tem-se a análise da variância seguinte:

Análise da Variância

F. Variação	G.L.	S.Q.
Vacas(ign.trat.)	$v - 1$	$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{v} V_i^2 - \frac{G^2}{3v}$
Períodos (lin.)	1	$\frac{1}{2v}(P_1-P_3)^2$
Períodos(quad.)	1	$\frac{1}{6v}(P_1-2P_2+P_3)^2$
Tratamentos(aj.)	$p - 1$	$\frac{3}{2np}\sum_{k=1}^{p}(Q_k^*)^2$
Inter. P'XV	$v - 1$	$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{v}(y_{i3k}-y_{i2k})^2-\frac{1}{2v}(P_1-P_3)^2$
Resíduo	$v - p$	por diferença
Total	$3v - 1$	$\sum_{i,j} y_{ijk}^2 - \frac{G^2}{3v}$

Para o caso particular estudado, tem-se as esperanças dos quadrados médios:

F. Variação	E (QM)
Vacas (ign.trat.)	
Períodos (lin.)	$\sigma^2 + 12\, b_1^2$
Períodos (quad)	$\sigma^2 + 36\, b_2^2$
Tratamentos(aj.)	$\sigma^2 + 2\,(t_1-t_2)^2$
Inter. P'XV	$\sigma^2 + 2/5 \sum_i c_i^2$
Resíduo	σ^2

Aplicação do modêlo matemático completo no estudo de alguns aspectos do delineamento em "switchback": Caso de perda de parcela

Em experimentos com animais, especialmente, existe, em geral, grande probabilidade de perda de parcelas, visto ser o animal uma fonte de dados muito suceptível às condições externas. A perda de uma parcela pode ser proveniente, apenas para citar um exemplo, do aparecimento de mastites, e, devido a êsse fato, a vaca, como um todo, deixa de fornecer dados representativos para a análise.

Lucas (1956) propõe fórmulas para o cálculo de parcela perdida, porém, fica provado logo adiante, que a simples estimação não resolve o problema.

Admita-se o esquema a seguir:

Vacas	Períodos I	II	III	D_i
1	y_{111}	y_{122}	y_{131}	$y_{111}-2y_{122}+y_{131}$
2	y_{211}	y_{222}	y_{231}	$y_{211}-2y_{222}+y_{231}$
3	y_{311}	y_{322}	y_{331}	$y_{311}-2y_{322}+y_{331}$
4	y_{412}	y_{421}	y_{432}	$y_{412}-2y_{421}+y_{432}$
5	y_{512}	y_{521}	y_{532}	$y_{512}-2y_{521}+y_{532}$
6	y_{612}	y_{621}	y_{632}	$y_{612}-2y_{621}+y_{632}$

Lucas (1956) apresenta a fórmula,

$$D' = \frac{2M' + (p-1)\ (Q_1' - Q_2')}{np^2 - (n+2)p}$$

para o cálculo da parcela perdida, onde:

M' : soma dos D's das vacas restantes.

Q_1' : valor de Q para o tratamento ocorrido nos 1º e 3º períodos da parcela perdida, considerando o D, desta, zero.

Q_2' : valor de Q para o tratamento ocorrido no 2º período da parcela perdida, considerando o D, desta, zero.

As outras variáveis têm as mesmas definições já apresentadas.

a) Cálculo de D' em têrmos do modêlo matemático completo

$$
\begin{aligned}
M' = m &+ v_2+t_1-b_1+b_2-c_2+e_{211} - \\
&-2(m + v_2+t_2-2b_2) - 2e_{222} + \\
&+m +v_2+t_1+b_1+b_2+c_2+e_{231} + \\
&+m +v_3+t_1-b_1+b_2-c_3+e_{311} - \\
&-2(m +v_3+t_2-2b_2) - 2e_{322} + \\
&+m +v_3+t_1+b_1+b_2+c_3+e_{331} + \\
&+m +v_4+t_2-b_1+b_2-c_4+e_{412} - \\
&-2(m +v_4+t_1-2b_2) -2e_{421} + \\
&+m +v_4+t_2+b_1+b_2+c_4+e_{432} + \\
&+m +v_5+t_2-b_1+b_2-c_5+e_{512} - \\
&-2(m +v_5+t_1-2b_2) -2e_{521} + \\
&+m +v_5+t_2+b_1+b_2+c_5+e_{532} +
\end{aligned}
$$

$$+m + v_6 + t_2 - b_1 + b_2 - c_6 + e_{612} -$$

$$-2(m + v_6 + t_1 - 2b_2) - 2e_{621} +$$

$$+m + v_6 + t_2 + b_1 + b_2 + c_6 + e_{632}$$

Simplificando-se, resulta:

$$M' = -2(t_1 - t_2) + 30b_2 + \left\{ \begin{array}{l} e_{211} - 2e_{222} + e_{231} + \\ + e_{311} - 2e_{322} + e_{331} + \\ + e_{412} - 2e_{421} + e_{432} + \\ + e_{512} - 2e_{521} + e_{532} + \\ + e_{612} - 2e_{621} + e_{632} \end{array} \right\}$$

Calculando-se os valores de Q_1' e Q_2', tem-se:

$$Q_1' = 10(t_1 - t_2) - 6b_2 + \left\{ \begin{array}{l} e_{211} - 2e_{222} + e_{231} + \\ + e_{311} - 2e_{322} + e_{331} - \\ - e_{412} - 2e_{421} - e_{432} - \\ - e_{512} - 2e_{521} - e_{532} - \\ - e_{612} - 2e_{621} - e_{632} \end{array} \right\} \quad \ldots (11)$$

$$Q_2' = -10(t_1 - t_2) + 6b_2 - \left\{ \begin{array}{l} e_{211} - 2e_{222} + e_{231} + \\ + e_{311} - 2e_{322} + e_{331} - \\ - e_{412} - 2e_{421} - e_{432} - \\ - e_{512} + 2e_{521} - e_{532} - \\ - e_{612} + 2e_{621} - e_{632} \end{array} \right\}$$

Para o caso presente, tem-se:

$$p = 2$$

$$n = 6$$

$$\therefore D' = \frac{1}{8}\left[2M' + (Q_1' - Q_2') \right]$$

Substituindo-se as expressões de M', Q_1' e Q_2' na expressão de D' acima, resulta:

$$D' = \frac{1}{8}\left\{ 16(t_1 - t_2) + 48\ b_2 + 4 \left[\begin{array}{l} e_{211} - 2e_{222} + e_{231} + \\ + e_{311} - 2e_{322} + e_{331} \end{array} \right] \right\}$$

$$D' = 2(t_1 - t_2) + 6\ b_2 + \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} e_{211} - 2e_{222} + e_{231} + \\ + e_{311} - 2e_{322} + e_{331} \end{array} \right)$$

Os valores de Q_1 e Q_2, para o cálculo da soma de quadrados de tratamentos, fica:

$$Q_1 = Q_1' + D' = 12(t_1 - t_2) + \left[\begin{array}{l} 3/2\ (e_{211} - 2e_{222} + e_{231}) + \\ +3/2\ (e_{311} - 2e_{322} + e_{331}) - \\ -\ e_{412} + 2e_{421} - e_{432} - \\ -\ e_{512} + 2e_{521} - e_{532} - \\ -\ e_{612} + 2e_{621} - e_{632} \end{array}\right]$$

$$Q_2 = Q_2' - D' = -12(t_1 - t_2) - \left[\begin{array}{l} 3/2\ (e_{211} - 2e_{222} + e_{231}) + \\ +3/2\ (e_{311} - 2e_{322} + e_{331}) - \\ -\ e_{412} + 2e_{421} - e_{432} - \\ -\ e_{512} + 2e_{521} - e_{532} - \\ -\ e_{612} + 2e_{621} - e_{632} \end{array}\right]$$

$$E(SQT) = \frac{1}{72}\, E(Q_1^2 + Q_2^2) = 1/72 \left[288(t_1 - t_2)^2 + 90\sigma^2\right]$$

$$\therefore \boxed{E(SQT) = E(QMT) = 4\ (t_1 - t_2)^2 + \frac{5}{4}\sigma^2}$$

b) <u>Esperança do Quadrado Médio do Resíduo</u>

Desde que o resíduo do modêlo matemático completo é exatamente o calculado pela análise convencional, para simplificar, faz-se a dedução da esperança matemática, achando-se a soma de quadrados residual pela diferença seguinte:

$$SQR = \left[\frac{1}{6} \sum_i D_i^2 - \frac{1}{36} \left(\sum_i D_i\right)^2\right] - SQTratamentos.$$

Tem-se, pois,

$$E(SQTotal) = \frac{1}{6}\, E\left\{\left[2(t_1 - t_2) + 6\ b_2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e_{211} - 2e_{222} + e_{231} + \\ + e_{311} - 2e_{322} + e_{331} \end{pmatrix}\right]^2 + \right.$$

$$+\left[(m+v_2+t_1-b_1+b_2-c_2+e_{211}) - 2(m+v_2+t_2-2b_2) - 2e_{222} + (m+v_2+t_1+b_1+b_2+c_2+e_{231})\right]^2 +$$

$$+\left[(m+v_3+t_1-b_1+b_2-c_3+e_{311}) - 2(m+v_3+t_2-2b_2) - 2e_{322} + (m+v_3+t_1+b_1+b_2+c_3+e_{331})\right]^2 +$$

$$+\left[(m+v_4+t_2-b_1+b_2-c_4+e_{412}) - 2(m+v_4+t_1-2b_2) - 2e_{421} + (m+v_4+t_2+b_1+b_2+c_4+e_{432})\right]^2 +$$

$$+\left[(m+v_5+t_2-b_1+b_2-c_5+e_{512}) - 2(m+v_5+t_1-2b_2) - 2e_{521} + (m+v_5+t_2+b_1+b_2+c_5+e_{532})\right]^2 +$$

$$+\left[(m+v_6+t_2-b_1+b_2-c_6+e_{612})-2(m+v_6+t_1-2b_2)-2e_{621}+(m+v_6+t_2+b_1+b_2+c_6+e_{632})\right]^2\Big\}-$$

$$-\frac{1}{36}E\left[\left(\sum_i D_i\right)^2\right]$$

$$E(SQTotal)=\frac{1}{6}\left\{\left[4(t_1-t_2)^2+36\,b_2^2+3\sigma^2\right]+5\left[4(t_1-t_2)^2+36\,b_2^2+6\sigma^2\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{36}E\left[36\,b_2+\frac{3}{2}\begin{pmatrix}e_{211}-2e_{222}+e_{231}+\\+e_{311}-2e_{322}+e_{331}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_{412}-2e_{421}+e_{432}+\\+e_{512}-2e_{521}+e_{532}+\\+e_{612}-2e_{621}+e_{632}\end{pmatrix}\right]^2$$

$$=4(t_1-t_2)^2+36\,b_2^2+\frac{33}{6}\sigma^2-36\,b_2^2-\frac{45}{36}\sigma^2$$

$$\boxed{E(SQTotal)=4(t_1-t_2)^2+\frac{153}{36}\sigma^2}$$

$$E(SQR)=E(SQTotal)-E\,(SQTratam.)$$

$$=4\,(t_1-t_2)^2+\frac{153}{36}\sigma^2-4\,(t_1-t_2)^2-\frac{45}{36}\sigma^2$$

$$E(SQR)=3\,\sigma^2$$

$$\therefore\ \boxed{E\,(QMR)=\sigma^2}$$

Dos resultados da aplicação de esperança matemática fica demonstrqdo o "bias" na estimativa do quadrado médio de tratamentos, fato que invalida a aplicação da prova de F.

No caso específico, multiplicando-se por 4/5 o quadrado médio de tratamentos obtém-se uma estimativa, passível de se comparar com o quadrado médio do resíduo pela prova de F, pois,

$$\frac{4}{5}E(QMT)=\sigma^2+\frac{16}{5}(t_1-t_2)^2$$

$$E\,(QMR)=\sigma^2$$

c) <u>Cálculo da variância do contraste entre as médias</u>

O contraste entre as duas médias é dado por

$$\hat{c}=\frac{1}{2np}(Q_1-Q_2)$$

que no caso particular fica

$$\hat{c}=\frac{1}{24}(Q_1-Q_2)$$

A variância da estimativa $\hat{c}$, é

$$V(\hat{c})=E\left\{\left[\hat{c}-E(\hat{c})\right]^2\right\}$$

Substituindo-se Q_1 e Q_2 pelas respectivas expressões, fica,

$$V(\hat{c}) = E\left\{ \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 3/2\ (e_{211}-2e_{222}+e_{231}) + \\ +3/2\ (e_{311}-2e_{322}+e_{331}) - \\ - e_{412}+2e_{421}-e_{432} - \\ - e_{512}+2e_{521}-e_{532} - \\ -e_{612}+2e_{621}-e_{632} \end{bmatrix} \right\}^2$$

$$\therefore\ V(\hat{c}) = \frac{45}{144}\sigma^2 = \frac{5}{16}\sigma^2$$

Substituindo-se σ^2 pela estimativa s^2, resulta,

$$\hat{V}(\hat{c}) = \frac{5}{16}s^2$$

Método Direto:

Uma outra maneira de se desenvolver a soma de quadrados de tratamentos ajustada, quando se perde uma ou mais parcelas, é deduzir-se as fórmulas à partir da matriz $\underline{M}$ original.

Admita-se, por exemplo, o caso anterior. A equação $M\hat{\beta}=X'Y$, modificada pela perda da primeira parcela, fica,

$$\left[\begin{array}{c|ccccc|cc|cc|ccccc}
15 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
7 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 9 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\hat{m} \\ \hline \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \\ \hat{v}_5 \\ \hat{v}_6 \\ \hline \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \hline \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hline \hat{c}_2 \\ \hat{c}_3 \\ \hat{c}_4 \\ \hat{c}_5 \\ \hat{c}_6
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
G \\ \hline V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ \hline T_1 \\ T_2 \\ \hline -P_1 + P_3 \\ P_1 - 2P_2 + P_3 \\ \hline y_{231}-y_{211} \\ y_{331}-y_{311} \\ y_{432}-y_{412} \\ y_{532}-y_{512} \\ y_{632}-y_{612}
\end{array}\right]$$

Como os parâmetros m, v_2, v_3, ... , v_6, t_1, t_2 e b_2 são independentes dos demais, quanto à estimação, pode-se calcular a soma de quadrados devido a êsses parâmetros, buscando ajustar a soma de quadrados devido a tratamentos.

Sabendo-se que,

$$\sum_{i=1}^{6} \hat{v}_i = 0 \quad e \quad \sum_{k=1}^{2} \hat{t}_k = 0,$$

tem-se,

$$SQParâmetros\ (m, v_i, t_k, b_2) = \hat{m}G + \sum_{i=1}^{6} \hat{v}_i V_i + \sum_{k=1}^{2} \hat{t}_k T_k + \hat{b}_2(P_1-2P_2+P_3)$$

$$\hat{v}_2 = \frac{1}{3}(V_2 - 3\hat{m} - 2t_1 - \hat{t}_2) \qquad \hat{v}_4 = \frac{1}{3}(V_4 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_2 - \hat{t}_1)$$

$$\hat{v}_3 = \frac{1}{3}(V_3 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_1 - \hat{t}_2) \qquad \hat{v}_5 = \frac{1}{3}(V_5 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_2 - \hat{t}_1)$$

$$\hat{v}_6 = \frac{1}{3}(V_6 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_2 - \hat{t}_1)$$

$$\hat{m} = \frac{1}{15}(G - \hat{t}_2)$$

$$\hat{b}_2 = \frac{1}{30}\left[(P_1-2P_2+P_3) + 2\hat{t}_1 - 2\hat{t}_2\right]$$

A soma de quadrados de parâmetros fica,

$$SQP(m, v_i, t_k, b_2) = \frac{1}{15}(G-\hat{t}_2)G + \frac{1}{3}\left[V_2 - \frac{1}{5}(G-\hat{t}_2) - 2\hat{t}_1 - \hat{t}_2\right] V_2 +$$

$$+ \frac{1}{3}\left[V_3 - \frac{1}{5}(G-\hat{t}_2) - 2\hat{t}_1 - \hat{t}_2\right] V_3 + \frac{1}{3}\left[V_4 - \frac{1}{5}(G-\hat{t}_2) - 2\hat{t}_2 - \hat{t}_1\right] V_4 +$$

$$+ \frac{1}{3}\left[V_5 - \frac{1}{5}(G-\hat{t}_2) - 2\hat{t}_2 - \hat{t}_1\right] V_5 + \frac{1}{3}\left[V_6 - \frac{1}{5}(G-\hat{t}_2) - 2\hat{t}_2 - \hat{t}_1\right] V_6 +$$

$$+ \frac{1}{30}\left[(P_1-2P_2+P_3) + 2\hat{t}_1 - 2\hat{t}_2\right](P_1-2P_2+P_3) + \hat{t}_1 T_1 + \hat{t}_2 T_2 .$$

Reunindo-se os coeficientes de $\hat{t}_1$ e $\hat{t}_2$, resulta,

$$SQP(m, v_i, t_k, b_2) = \frac{G^2}{15} + \left(\frac{1}{3}\sum_{i=2}^{6} V_i^2 - \frac{G^2}{15}\right) + \frac{1}{30}(P_1-2P_2+P_3)^2 +$$

$$+ \hat{t}_1\left[T_1 - \frac{2}{3}(V_2+V_3) - \frac{1}{3}(V_4+V_5+V_6) + \frac{1}{15}(P_1-2P_2+P_3)\right] + \qquad \ldots (12)$$

$$+ \hat{t}_2\left[T_2 - \frac{G}{15} - \frac{4}{15}(V_2+V_3) - \frac{9}{15}(V_4+V_5+V_6) - \frac{1}{15}(P_1-2P_2+P_3)\right]$$

Calculando-se os efeitos de tratamentos $\hat{t}_k (k=1,2)$, tem-se, após substituir-se $\hat{v}_i$ em função de $\hat{t}_k$,

$$\hat{t}_1 = \frac{1}{7}\left\{T_1 - \frac{7}{5}(G-\hat{t}_2) - \frac{1}{3}\left[(V_2+V_3) - \frac{6}{15}(G-\hat{t}_2) - 4\hat{t}_1 - 2\hat{t}_2\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{15}\left[(P_1-2P_2+P_3) + 2\hat{t}_1 - 2\hat{t}_2\right]\right\}$$

$$\hat{t}_2 = \frac{1}{8}\left\{T_2 - \frac{8}{15}(G-\hat{t}_2) - \frac{1}{3}\left[(V_4+V_5+V_6) - \frac{9}{15}(G-\hat{t}_2) - 6\hat{t}_2 - 3\hat{t}_1\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{15}\left[(P_1-2P_2+P_3) + 2\hat{t}_1 - 2\hat{t}_2\right]\right\}$$

Reunindo-se convenientemente os têrmos e lembrando-se que $\hat{t}_1 + \hat{t}_2 = 0$, tem-se,

$$\hat{t}_1 = \frac{5}{32}\left\{T_1 - \frac{G}{3} - \frac{1}{3}(V_2+V_3) + \frac{1}{15}(P_1-2P_2+P_3)\right\} \quad \ldots \quad (13)$$

$$\hat{t}_2 = \frac{5}{32}\left\{T_2 - \frac{G}{3} - \frac{1}{3}(V_4+V_5+V_6) - \frac{1}{15}(P_1-2P_2+P_3)\right\}$$

Portanto, substituindo-se as expressões de $\hat{t}_1$ e $\hat{t}_2$ em (12) pode-se, resumidamente, escrever,

$$SQP(m, v_i, t_k, b_2) = \frac{G^2}{15} + \text{SQVacas(usual)} + \text{SQTratamentos(ajust.)} + \text{SQPeríodos(quadr.)}.$$

que, somada aos componentes ortogonais restantes, compõe a partição da soma de quadrados total.

Conhecendo-se as expressões de $\hat{t}_1$ e $\hat{t}_2$, é possível derivar-se a fórmula da variância do contraste entre duas médias, deduzida anteriormente a partir da expressão do cálculo de parcela perdida, apresentada por Lucas (1956),

$$V(\hat{m}_1-\hat{m}_2) = V(\hat{t}_1-\hat{t}_2) = E\left\{\left[(\hat{t}_1-\hat{t}_2) - E(\hat{t}_1-\hat{t}_2)\right]^2\right\}$$

Das expressões deduzidas para $\hat{t}_1$ e $\hat{t}_2$ acima, tem-se,

$$V(\hat{t}_1-\hat{t}_2) = \frac{25}{1024} V\left\{(T_1-T_2) - \frac{1}{3}(V_2+V_3) + \frac{1}{3}(V_4+V_5+V_6) + \frac{2}{15}(P_1-2P_2+P_3)\right\}$$

Substituindo-se as funções de observações pelo modêlo matemático completo, resulta,

$$T_1-T_2 = -m + (v_2+v_3)-(v_4+v_5+v_6)-4\,b_2 + \left\{\begin{array}{l} e_{211}+e_{231}+e_{311}+e_{331} + \\ +e_{421}+e_{521}+e_{621}) - \\ -(e_{412}+e_{432}+e_{512}+e_{532}+ \\ +e_{612}+e_{632}+e_{222}+e_{322}) \end{array}\right\}$$

$$V_2+V_3 = 6m + 3(v_2+v_3) + \left\{\begin{array}{l} e_{211}+e_{222}+e_{231}+ \\ +e_{311}+e_{322}+e_{331} \end{array}\right\}$$

$$V_4+V_5+V_6 = 9m + 3(v_4+v_5+v_6) + \left\{\begin{array}{l} e_{412}+e_{421}+e_{432}+ \\ +e_{512}+e_{521}+e_{532}+ \\ +e_{612}+e_{621}+e_{632} \end{array}\right\}$$

$$P_1-2P_2+P_3= 2(t_2-t_1) + 30\ b_2 + \left(\begin{array}{l} e_{211}-2e_{222}+e_{231}+ \\ +e_{311}-2e_{322}+e_{331}+ \\ +e_{412}-2e_{421}+e_{432}+ \\ +e_{512}-2e_{521}+e_{532}+ \\ +e_{612}-2e_{621}+e_{632} \end{array}\right)$$

Substituindo-se na expressão da variância do contraste, tem-se,

$$V\ (\hat{t}_1 - \hat{t}_2) = \frac{25}{1024}\ E\left[\left(\begin{array}{l} (e_{211}+e_{231}+e_{311}+e_{331}+ \\ +e_{421}+e_{521}+e_{621}) - \\ \\ -(e_{412}+e_{432}+e_{512}+e_{532}+ \\ +e_{612}+e_{632}+e_{222}+e_{322}) \end{array}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\left(\begin{array}{l} e_{211}+e_{222}+e_{231}+ \\ +e_{311}+e_{322}+e_{331} \end{array}\right) + \frac{1}{3}\left(\begin{array}{l} e_{412}+e_{421}+e_{432}+ \\ +e_{512}+e_{521}+e_{532}+ \\ +e_{612}+e_{621}+e_{632} \end{array}\right) + \frac{2}{15}\left(\begin{array}{l} e_{211}-2e_{222}+e_{231}+ \\ +e_{311}-2e_{322}+e_{331}+ \\ +e_{412}-2e_{421}+e_{432}+ \\ +e_{512}-2e_{521}+e_{532}+ \\ +e_{612}-2e_{621}+e_{632} \end{array}\right)\right]^2$$

Reunindo-se os têrmos semelhantes, obtem-se,

$$V\ (\hat{t}_1- \hat{t}_2)= \frac{25}{1024}\ E\left[\begin{array}{l} \frac{12}{15}\ (e_{211}+e_{231}+e_{311}+e_{331}) - \\ -\frac{24}{15}\ (e_{222}+e_{322}) - \\ -\frac{8}{15}\ (e_{412}+e_{432}+e_{512}+e_{532}+e_{612}+e_{632}) + \\ +\frac{16}{15}\ (e_{521}+e_{621}+e_{421}) \end{array}\right]^2$$

Portanto, tem-se finalmente,

$$V(\hat{t}_1-\hat{t}_2) = \frac{25}{1024}\left[\frac{144}{225}\ (4\sigma^2)+ \frac{576}{225}\ (2\sigma^2)+ \frac{64}{225}\ (6\sigma^2)+ \frac{256}{225}\ (3\ \sigma^2)\right]$$

$$\boxed{V(\hat{t}_1-\hat{t}_2) = \frac{5}{16}\ \sigma^2}$$

Chegando-se ao mesmo resultado anterior.

Exemplo numérico: Os dados abaixo são simulados, com a finalidade única de ilustração das deduções feitas.

Vacas	Períodos I		II		III		Totais	D(Lucas)
1	(-)	(1)	15	(2)	14	(1)	25	(0,5)
2	17	(1)	13	(2)	10	(1)	40	1
3	16	(1)	15	(2)	14	(1)	45	0
4	10	(2)	9	(1)	8	(2)	27	0
5	11	(2)	12	(1)	9	(2)	32	-4
6	13	(2)	12	(1)	9	(2)	34	-2
Totais	67		61		50		187	

Nota: a) Os números entre parêntesis referem-se aos tratamentos atribuídos às parcelas.

b) O dado referente à primeira parcela, representado por um traço, é considerado perdido.

a) Condução da análise segundo Lucas (1956)

$$Q_1' = \left[1 - (-6)\right] = 7$$

$$Q_2' = \left[-6 - 1\right] = -7$$

$$D' = \frac{2(-5)+(2-1)\ (7+7)}{6(2)^2 - (6+2)2} = \frac{1}{2}$$

$$Q_1' = (1 - 0,5) - (-4 - 2) = 7,5$$

$$Q_2' = (-4 - 2) - (1 + 0,5) = -7,5$$

$$SQT = \frac{1}{72}\ (112,5) = 1,5625 = \text{QMédio Trat.}$$

$$SQTotal = \frac{1}{6}\left[(0,5)^2 + 1^2 + (-4)^2 + (-2)^2\right] - \frac{(-4,5)^2}{36} =$$

$$= 3,5416 - 0,5625 = 2,9791$$

$$SQResíduo = 1,4166$$

Análise da Variância

Fonte de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M	F
Tratamentos	1	1,5625	1,5625	3,31
Resíduo	3	1,4166	0,4722	
Total	4	2,9791		

b) Condução feita por computador com programa fundamentado no modêlo COMPLETO: $y_{ijk} = m + v_i + t_k + b_1 x_j + b_2 z_j + c_i x_j + e_{ijk}$

A sequência dos cálculos é a que se segue:

$$\sum Y^2 = 2641{,}0000$$

$$\text{SQP (mod.completo)} = 2639{,}5833$$

$$\text{SQResíduo} = 1{,}4167$$

$$\text{SQP(mod.s/tratam.)} = 2.638{,}3333$$

$$\therefore \text{SQT(aj.)} = 2.639{,}5833 - 2.638{,}3333 = 1{,}2500$$

$$\therefore \boxed{\text{QMT(aj.)} = 1{,}2500}$$

Baseado nos resultados da esperança matemática do quadrado médio de tratamentos o fator 4/5 deve tornar a estimativa obtida por Lucas imparcial. De fato, 4/5 (1,5625) = 1,25, concordando com o resultado fornecido pelo computador, baseado no modêlo completo.

c) Cálculo da soma de quadrados de tratamentos pelas expressões (12) e (13).

$$\hat{t}_1 = 5/32(90 - 178/3 - 85/3 - 5/15) = 5/16$$

$$\hat{t}_2 = -\hat{t}_1 = -5/16$$

$$Q_1 = (90 - 170/3 - 93/3 - 5/15) = 2$$

$$Q_2 = (88 - 178/3 - 340/15 - 837/15 + 5/15) = -2$$

$$\therefore \text{SQT(aj.)} = \hat{t}_1 Q_1 + \hat{t}_2 Q_2 = 5/16(2+2) = 1{,}2500$$

4.4. Introdução do efeito de blocos.

Seja o modêlo matemático completo acrescido do parâmetro B_n referente ao bloco n.

$$y_{ijk} = m + B_n z_j + v_i + t_k + b_1 x_j + b_2 z_j + c_i x_j + e_{ijk}$$

Sem entrar-se em deduções teóricas repetitivas, restringe-se agora simplesmente à análise dos dados apresentados por Lucas(1956) e Pimentel Gomes (1961). A análise da variância resultante serve para mostrar a adequação do modêlo acima nos casos de formação de blocos.

Vaca	P_1	P_2	P_3
Bloco 1			
1	34,6(1)	32,3(2)	28,5(1)
2	22,8(2)	21,0(3)	18,6(2)
3	32,9(3)	33,1(1)	27,5(3)
4	48,9(1)	46,9(3)	42,0(1)
5	21,8(2)	23,9(1)	21,7(2)
6	25,4(3)	26,0(2)	23,9(3)
Bloco 2			
7	30,4(1)	29,5(3)	26,7(1)
8	35,2(2)	33,5(1)	28,4(2)
9	30,8(3)	29,3(2)	26,4(3)
Bloco 3			
10	38,7(1)	37,4(2)	34,4(1)
11	25,7(2)	26,1(3)	23,4(2)
12	21,4(3)	22,0(1)	19,4(3)

Resultados:

$\sum Y^2$ = 32,524,9300

R_1(mod.completo) = 32.522,9741

Resíduo(diferença) 1,9559

R_2(mod.sem blocos) = 32.522,7937

SQBlocos=R_1-R_2 = 0,1804

R_3(mod.sem vacas) = 31.063,2497

SQVaj.=R_1-R_3 = 1.459,7244

R_4(mod.sem trat.) = 32.521,3956

SQTaj.=R_1-R_4 = 1,5785

R_5(mod.sem período)= 32.440,2043

SQPeríodos=R_1-R_5 = 82,7698

R_6(Mod.sem int.P'XV)= 32.497,3028

SQP'XV=R_6-R_1 = 25,6713

Análise da Variância

Fonte da Variação	GL	SQ	QM	F
Vacas(aj.) (V)	11	1459,7244		
Períodos (P)	2	82,7698		
Blocos	2	0,1804		
Tratamentos(aj.)	2	1,5785	0,7892	2,82
P'XV	11	25,6713	2,3338	8,35 **
Resíduo	7	1,9559	0,2794	

A análise acima difere da de Lucas(1956) pelo fato de conter as fontes de variação não calculadas no trabalho dêste autor. Pode-se perceber então que o componente relativo à interação P'XV é significativo, justificando, mais uma vez, a necessidade do modêlo matemático completo.

4.5. Condução da análise de variância de experimentos em dupla reversão, a partir do modêlo matemático completo, para computador eletrônico.

Os dados de entrada para a solução em computadores são os constituintes das matrizes $\underline{M}$ e $\underline{X}'\underline{Y}$.

O programa é feito em Fortran-1130, adequado ao computador IBM-1130-4k e resume-se na resolução do sistema de equações normais, representado pela equação

$$M\hat{\beta} = X'Y$$

fornecendo como saída as estimativas dos parâmetros e a soma de quadrados dos parâmetros.

Com um cartão guia de dados, o programa faz a eliminação de linhas e colunas da matriz original e, com isso, possibilitando o cálculo de somas de quadrados devidas a partes de β. Na verdade o programa é feito para qualquer delineamento expresso por um modêlo matemático aditivo.

a) Programa Fonte

```
// JOB
// FOR
*EXTENDED PRECISION
*IOCS(CARD,TYPEWRITER,DISK,1132PRINTER)
*ONE WORD INTEGERS
      DIMENSION A (50),B(50),Y(50)
      DEFINE FILE 1 (10.000,3,U,II)
      DEFINE FILE 2 (10.000,3,U,II)
```

```
      DEFINE FILE 3(100,3,U,IM)
      DEFINE FILE 4(100,3,U,IM)
 1001 FORMAT (33F2.0)
 1002 FORMAT (13F6.1)
 1000 FORMAT (2I5)
  100 PAUSE 1111
      CALL DATSW (1,KL)
      GO TO (32,33), KL
   33 READ (2,1000) NN
      IM=1
      II=1
      DO 1 I=1,NN
      READ (2,1001)(A(J),J=1,NN)
    1 WRITE (2'II) (A(J),J=1,NN)
      READ (2,1002) (Y(J),J=1,NN)
      WRITE (4'IM) (Y(J),J=1,NN)
   32 READ (2,1000) NI,NF
      JL=0
      JJ=0
      II=1
      IF(NI) 37,38,37
   38 N=NN
      GO TO 39
   37 N=NN-NF+NI-1
   39 DO 41 I=1,NN
      READ (2'II)(A(J),J=1,NN)
      JO=II
      IF (I-NI) 42,43,43
   43 IF (I-NF) 41,41,42
   42 DO 40 L=1,NN
      IF (L-NI) 47,45,45
   45 IF (L-NF) 40,40,47
   47 JJ=JJ+1
      WRITE (1'JJ) A(L)
      II=JO
   40 CONTINUE
      JL=JL+1
      WRITE (3'JL)Y(J)
   41 CONTINUE
      IM=1
      READ (3'IM) (Y(J),J=1,N)
      T=0
      II=1
      M=N-1
      IM=1
      DO 11 I=1,M
      WRITE (1,1000) I
```

```
      READ (1'II) (A(JJ),JJ=1,N)
      L=I+1
      DO 10 J=L,N
      READ (1'II) (B(JJ),JJ=1,N)
      IF(B(I)) 6,10,6
    6 DO 8 K=L,N
    8 B(K)=B(K)-A(K)*B(I)/A(I)
      Y(J)=Y(J)-Y(I)*B(I)/A(I)
      II=II-N
      WRITE (1,II) (B(JJ),JJ=1,N)
   10 CONTINUE
   11 II=I*N+1
      II=N*N+1
      A(N)=Y(N)/B(N)
      DO 30 I=1,M
      K=N-I
      L=K+1
      II=II-2*N
      READ (1'II) (B(JJ),JJ=1,N)
      DO 20 J=L,N
   20 Y(K)=Y(K)-A(J)*B(J)
   30 A(K)=Y(K)/B(K)
      WRITE (3,1003)(A(JJ),JJ=1,N)
 1003 FORMAT (//' ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS '/(4F20.10))
      READ (3'IM) (Y(J),J=1,N)
      DO 24 J=1,N
   24 T=T+A(J)*Y(J)
      WRITE (3,1005)T
 1005 FORMAT (//' S.Q.PARÂMETROS = ', E18.10)
      GO TO 100
      END
//XEQ
```

b) Dados de entrada: Chave 1 deve estar de início desligada.

1) cartão de dimensão da matriz M (formato 1000)
2) cartões de elementos da matriz M, por linha (formato 1001).
3) cartões de elementos da matriz X'Y (formato 1002).
4) cartão guia: os dois elementos dêsse cartão (formato 1000) definem as variáveis NI e NF que representam, respectivamente, o número de ordem do primeiro parâmetro a ser eliminado e o do último. Por exemplo, se não se quizer eliminar parâmetros, deve-se colocar um cartão em branco. Se, por exemplo, os parâmetros tiverem a ordem abaixo:

$$m\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ t_1\ t_2\ t_3\ b_1\ b_2\ c_1\ c_2\ c_3\ c_4$$

e desejar-se eliminar os parâmetros de tratamentos, deve-se fornecer os números 6 e 8, no referido cartão.

Após o primeiro grupo de dados, existem duas alternativas, que são:

I - Chave 1 ligada: o computador recebe outro cartão guia.
II - Chave 1 desligada: o computador lê novo cartão de dimensão, nova matriz M, etc.

4.6. Análise de Covariância de dados de um delineamento em switchback.

Do exposto até agora, fica evidente que, no caso de ser preferível ou necessário a inclusão de variáveis concomitantes, que possam estar mascarando os efeitos de tratamento, o modêlo matemático, fica,

$$\gamma_{ijk}=m+v_i+t_k+b_1x_j+b_2z_j+c_ix_j+\alpha\, a_{ijk}+e_{ijk}$$

e, no caso de inclusão de blocos, fica:

$$\gamma_{ijk}=m+B_nz_j+v_i+t_k+b_1x_j+b_2z_j+c_ix_j+\alpha\, a_{ijk}+e_{ijk}$$

onde,

α : parâmetros devido à covariância
a_{ijk}: variável concomitante.

Todos os métodos empregados anteriormente podem conduzir a fórmulas simplificadas de análise da covariância e, se for o caso de se dispor de computador eletrônico, o problema fica, desde já, completamente resolvido.

5. CONCLUSÕES

Dos resultados e discussões, pode-se concluir que,

a) O modêlo matemático. chamado no trabalho de simplificado,

$$y_{ijk} = m + v_i + p_j + t_k + e_{ijk}$$

é apropriado para a dedução da soma de quadrados de tratamentos ajustada, no caso de delineamentos em "switchback".

b) O resíduo, decorrente do modêlo matemático simplificado, tem "bias" (vício, tendenciosidade). O vício decorre do efeito de interação período (linear) x vacas, não isolado pelo modêlo.

c) Os modêlos matemáticos, chamados de completos,

$$y_{ijk} = m + v_i + t_k + b_1 x_j + b_2 Z_j + c_i x_j + e_{ijk} \quad ,$$

no caso comum e,

$$y_{ijk} = m + B_n Z_j + v_i + t_k + b_1 x_j + b_2 Z_j + c_i x_j + e_{ijk} \quad ,$$

no caso de formação de blocos, onde,

m = média
v_i = efeito da vaca $\underline{i}$
t_k = efeito do tratamento $\underline{k}$
b_1 = efeito linear de período
b_2 = efeito quadrático de período
c_i = efeito de interação vaca x período (linear)
B_n = efeito do bloco $\underline{n}$
$e_{ijk} \frown N\,(0, \sigma^2)$.

$$x_j = \begin{cases} -1 & (1^{\underline{o}} \text{ período}) \\ 0 & (2^{\underline{o}} \text{ período}) \\ 1 & (3^{\underline{o}} \text{ período} \end{cases} \qquad Z_j = \begin{cases} 1 & (1^{\underline{o}} \text{ período}) \\ -2 & (2^{\underline{o}} \text{ período}) \\ 1 & (3^{\underline{o}} \text{ período}) \end{cases}$$

permitem fazer-se a dedução completa da análise da variância e esperanças dos quadrados médios.

d) No caso de perda de parcelas, a soma de quadrados devido a tratamentos, fica viciada ou tendenciosa, quando calculada com a estimativa da parcela perdida. O modêlo matemático completo permite o conhecimento do fator de ajustamento.

e) Munido-se de computador eletrônico é possível analisar-se, pelo modêlo matemático completo, qualquer caso de ensaios em "switchback", isto é, com qualquer número de parcelas perdidas e com qualquer número de variáveis concomitantes, sendo que, nêsse último caso, os modêlos matemáticos são adicionados do parâmetro de covariância. No caso de uma variável concomitante, tem-se:

$$y_{ijk} = m + v_i + t_k + b_1 x_j + b_2 Z_j + c_i x_j + \alpha a_{ijk} + e_{ijk}$$

no caso comum e,

$$y_{ijk} = m + B_n Z_j + v_i + t_k + b_1 x_j + b_2 Z_j + c_i x_j + \alpha a_{ijk} + e_{ijk}$$

no caso de formação de blocos, onde,

α = parâmetro devido à covariância.

a_{ijk} = variável concomitante.

6. RESUMO

A presente pesquisa visa o estabelecimento do modêlo matemático dos delineamentos em "switchback".

São discutidos dois modêlos, chamados no trabalho de simplificado e completo; o primeiro, cuja expressão é,

$$y_{ijk} = m+v_i+p_j+t_k+e_{ijk} \quad , \qquad (1)$$

onde, m = média; v_i = efeito da vaca i; t_k = efeito do tratamento k e p_j = efeito do período j,

$$e_{ijk} \frown N\ (0, \sigma^2)$$

é utilizado para a derivação da soma de quadrados devido a tratamentos, que se mostra idêntica àquela obtida por Lucas (1956). Demonstra-se, por ensaios em branco, que o resíduo do modêlo matemático simplificado possuiu tendenciosidade ("bias").

O modêlo matemático completo, cuja expressão é,

$$y_{ijk} = m+v_i+t_k+b_1x_j+b_2Z_j+c_ix_j+e_{ijk} \qquad (2)$$

onde, b_1 = efeito linear de período; b_2 = efeito quadrático de período;

c_i = interação vaca i x período (linear)

$$x_j: \begin{cases} = -1 \text{ (para } j=1) \\ = \ \ 0 \text{ (para } j=2) \\ = \ \ 1 \text{ (para } j=3) \end{cases} \quad ; \quad z_j: \begin{cases} = \ \ 1 \text{ (para } j=1) \\ = -2 \text{ (para } j=2) \\ = \ \ 1 \text{ (para } j=3) \end{cases}$$

$$e_{ijk} \frown N\ (0, \sigma^2)$$

mostra-se indicado para o delineamento "switchback". Com base nele, são deduzidas as expressões de somas de quadrados. São deduzidas as esperanças matemáticas dos quadrados médios de alguns casos particulares.

Fundamentado no modêlo matemático (2) prova-se a ocorrência de "bias" ou tendenciosidade na soma de quadrados de tratamentos quando calculada com a estimativa da parcela perdida. Pela esperança do quadrado médio de tratamentos determina-se o fator de ajustamento para um caso particular.

Quando há formação de blocos, o modêlo matemático fica,

$$y_{ijk} = m+B_nZ_j+v_i+t_k+b_1x_j+b_2Z_j+c_ix_j+e_{ijk} \quad , \qquad (3)$$

onde, B_m: parâmetro referente ao bloco m , e as outras variáveis com as mesmas definições já apresentadas.

À partir do modêlo (3) é feita a análise dos dados apresentados por Lucas (1956) ficando evidente, pelos resultados obtidos do exemplo, a adequação do modêlo matemático proposto.

Os modêlos (2) e (3) acrescidos do parâmetro de covariância α associado à variável concomitante a_{ijk} constituem o modêlo matemático nos casos de análise de covariância.

Apresenta-se, ademais, programa para computador eletrônico na linguagem Fortram-1130, útil nos casos em que se perde mais de uma parcela ou, ainda, no caso de se querer fazer análise da covariância com uma ou mais variáveis concomitantes .

7. BIBLIOGRAFIA

Aronovich, S.e outros (1965). Uso de concentrados na alimentação de vacas leiteiras em boas pastagens de capim pangola. Anais do IX Congresso Internacional de Pastagens 2:919.

Assis, F.P. e outros (1962-a). Efeitos da administração de raízes e tubérculos como suplemento de inverno na alimentação de vacas em lactação. Boletim de Indústria Animal 20:55.

Assis, F.P. e outros (1962-b). Valor do farelo de torta de mamona atoxicado na alimentação de vacas leiteiras em comparação com os farelos de torta de algodão e amendoim. Boletim de Indústria Animal, 20:35.

Brandt, A.E. (1938). Tests of significance in reversal or switchback trials. Iowa Agr.Expt. Sta., Research Bulletin 234.

Cochran, W.G. e outros(1941). A double change-over design for dairy cattle feeding experiment. Journal of Dairy Science, 24:937.

Gaines, W.L.& F.A.Davidson (1923). Relation betwen percentage fat content and yield of milk; correction of milk for fat content. Ill.Agric. Exp. Sta. Bull. 245:576.

Graybill, F.A. (1961). An introduction to linear statistical models. Vol. I. Mc Graw-Hill.

Hoglund, C.R. e outros(1958). Nutritional and economics aspects of feed utilization by dairy cows. Iowa State College Press,Ames,Iowa.

Lucas, H.L.(1951). Bias in estimation of error in change-over trials, with dairy cattle. Jour. Agric. Sci., 41:146.

Lucas, H.L.(1958), Designs in Animal Science Research. Inst. of Stat. Univ. N.C. (mimeog).

Lucas, H.L.(1956). Switchback trials for more than two treatments. Jour. Dairy Sci., 39:146.

Lucas, H.L.(1957). Extra-period latin-square change-over designs. Jour. Dairy Sci., 40:225.

Lucci, C.S. e outros(1968). Estudo comparativo das silagens de Napier, milho e sôrgo como únicos volumosos para vacas em lactação. Bol. Ind. Animal, 25:161.

Naufel, F. e outros(1962). Efeitos comparativos de administração de fare los de torta de mamona atoxicado, de soja e de algodão na dieta de vacas em lactação. Bol. Ind. Animal, 20:47.

Patterson, H. D. (1950). The analysis of change-over trials. Jour. Agric. Sci., 40:375.

Patterson, H. D. (1951). Change-over trials. Jour. Roy. Stat. Soc., B,13: 256.

Patterson, H. D. (1952). The construction of balanced designs for experi ments involving sequences of treatments. Biometrika, 39:32

Patterson, H. D. & H.L.Lucas (1959). Extra-period change-over designs. Biometrics, 15:116.

Pimentel Gomes, F. (1966). Curso de Estatistica Experimental. 3ª ed. Graf. Benetti.

Seath, D. M. (1944). A 2x2 factorial design for double-reversal feeding experiments. Jour. Dairy Sci., 27:159

"Student" (1908). The probable error of a mean. Biometrika, 6:1.

MATHEMATICAL MODELS OF SWITCHBACK TRIALS

Cássio Roberto de Melo Godoi

The research presents the derivation of the Variance Analysis from linear statistical models.

Two models are discussed and they are called simplified and complete. The expression of the first is

$$y_{ijk} = m + v_i + p_j + t_k + e_{ijk} \qquad (1)$$

where, m = mean value; v_i = cow effect $\underline{i}$; t_k = treatment effect $\underline{k}$ and p_j = period effect $\underline{j}$ and, e_{ijk} is a normal distributed error with $\underline{0}$ mean and $\underline{\sigma^2}$ variance.

The model (1) proved useful in the derivation of sum of squares due to treatments which shows the same as the one obtained by Lucas (1956). It have been proved, by uniformity data, that the error due to model (1) is biased.

The complete model has as expression:

$$y_{ijk} = m + v_i + t_k + p_j + c_i x_j + e_{ijk} \qquad (2)$$

where, c_i = [interaction cow x period (linear part)] effect $\underline{i}$ and,

$$x_j = \begin{cases} -1 & \text{when } j = 1 \\ 0 & \text{when } j = 2 \\ 1 & \text{when } j = 3 \end{cases}$$

The model (2) proved indicated for the Switchback analysis when blocks are not present. From (2) it could be derived all the variance analysis and the expected values of the estimates.

Based upon the model (2) it was proved the bias of the treatment mean square when data from one cow is lost and was showed the way of calculating adjusted treatment mean square.

When blocks are formed the model (2) turns,

$$y_{ijk} = m + B_n z_j + v_i + t_k + c_i x_j + e_{ijk} \qquad (3)$$

when B_n = parameter due to the $\underline{n}$ block and

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{when } j = 1 \\ -2 & \text{when } j = 2 \\ 1 & \text{when } j = 3 \end{cases}$$

and the others as defined above.

From (3) the analysis of data from Lucas (1956) are presented with the aid of IBM-1130 program. With this program and the model (3) we can analyse Switchback data in any case (even if units are lost).