ALCIDES REIS CONDÉ

Engenheiro Agrônomo

Professor Assistente do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Viçosa - M.G.

ESTUDO DOS COMPONENTES DE VARIÂNCIA NOS EXPERIMENTOS EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS

Prof. Dr. Décio Barbin

- Orientador -

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre.

PIRACICABA

ESTADO DE SÃO PAULO

1974

À minha esposa
e filhos

À minha mãe
e irmãos

AGRADECIMENTOS

Somos particularmente gratos:

À Universidade Federal de Viçosa, pela oportunidade do curso;

Ao Prof. Dr. Décio Barbin, pela orientação segura e valiosa ajuda na realização deste trabalho;

Ao Prof. Dr. Humberto de Campos, pela sugestão do tema e na elaboração do plano;

Aos demais professores do Departamento de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", pelo brilhante empenho demonstrado na condução do curso;

Ao Prof. Dr. Fábio Ribeiro Gomes, pelo apoio dado para que pudéssemos fazer este curso;

À Coordenação do Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela ajuda concedida;

Finalmente, a todos que, de uma forma ou de outra, concorreram para o bom andamento deste trabalho.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO

Do ponto de vista estrutural, no planejamento de um experimento em parcelas subdivididas ("Split plot", em inglês) sempre é cabível um experimento no esquema fatorial, através da combinação dos níveis dos tratamentos T com os níveis dos tratamentos T'. Porém, na experimentação agrícola, o experimento em parcelas subdivididas é bastante usado por causa da maior facilidade de instalação do mesmo no campo, em comparação com o esquema fatorial, apesar da maior perda do número de graus de liberdade, decorrente da existência dos dois resíduos.

Quando a interação entre os tratamentos das parcelas T com os das subparcelas T' for significativa, isso indica que os tratamentos T se comportam de maneira diferente, quando considerados em níveis diferentes de T', ou vice-versa. Nesse caso, o esquema usual de análise da variância deve ser modificado, podendo-se estudar o efeito dos tratamentos T' em cada nível T_i (T'/T_i) ou o efeito dos tratamentos T em cada nível T'_k (T/T'_k).

No estudo de T'/T_i, verifica-se que os graus de liberdade dos tratamentos T' e da interação T x T' são absorvidos. Conseqüentemente, apenas o resíduo (b) está envolvido, ao passo que, no estudo de T/T'_k, os graus de liberdade dos tratamentos T e da interação T x T' são absorvidos, tornando-se mais complexos, pois os dois resíduos estão envolvidos, isto é, o resíduo (a) e o resíduo (b).

O estudo de T'/T_i ou T/T'_k depende, naturalmente, do interesse prático do experimentador. Pretende-se através da reestruturação do modelo matemático:

$$x_{ijk} = m + t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k + tt'_{ik} + e_{ijk}$$

com as parcelas dispostas em blocos ao acaso, com i= 1,2,3, ...,I, j = 1,2,3,...,J e k = 1,2,3,...,K e considerando dois tipos de modelos I e II, deduzir novos componentes de variância para determinar o valor de "F", especialmente para o caso de T/T'_k. Pretende-se, também, deduzir as variâncias dos contrastes entre duas médias para comparações de médias de: T' no mesmo nível de T; T no mesmo nível de T' e T a diferentes níveis de T'.

Será feito, ainda, o estudo comparativo entre os experimentos em parcelas subdivididas e o esquema fatorial com base na eficiência.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O esquema do experimento em parcelas subdivididas é apresentado por ANDERSON e BANCROFT (1952), COCHRAN e COX (1965), KEMPTHORNE (1950), STEEL e TORRIE (1960) e por PIMENTEL GOMES (1973) como sendo uma variação do experimento fatorial em T e T' tratamentos, onde os tratamentos T das parcelas são dispostos em qualquer tipo de delineamento, sendo mais usados os de blocos casualizados ou quadrado latino e os tratamentos T' das subparcelas, dispostos, ao acaso, dentro de cada parcela.

KEMPTHORNE (1950) afirma que, por razões técnicas, o experimentador utiliza o experimento em parcelas subdivididas. Assim, em experimentos agronômicos, um dos tratamentos pode exigir uma área maior para as parcelas e não o tamanho usual, sendo que estas parcelas podem ser divididas para os outros tratamentos.

Quanto à eficiência dos tratamentos das parcelas diz que é proporcional a 1/w e a eficiência dos tratamentos das subparcelas e interação proporcionais a 1/E. Uma estimativa da variância residual é:

$$E' = \frac{(t-1)W + t(s-1)E}{ts-1}$$

onde:

t: nº de tratamentos das parcelas

s: nº de tratamentos das subparcelas

W: erro das parcelas

E: erro das subparcelas

A informação para os tratamentos das parcelas em relação ao bloco casualizado no esquema fatorial é $\frac{E'}{W} < 1$; para os tratamentos das subparcelas e interação é $\frac{E'}{E} > 1$.

PIMENTEL GOMES (1973) aconselha o uso do experimento em parcelas subdivididas em alguns casos em que se pretende estudar dois tipos diferentes de tratamentos. Mostra o esquema de análise de variância, dizendo que, quando a interação entre os tratamentos das parcelas com os das subparcelas for significativa, a análise da variância deve ser modificada, sendo preferível estudar o efeito dos tratamentos das subparcelas em cada nível dos tratamentos das parcelas, separadamente. Mostra, ainda, quatro casos para comparação de médias, como:

a) Diferença entre duas médias dos tratamentos das parcelas (T);

b) Diferença entre duas médias dos tratamentos das subparcelas (T');

c) Diferença entre duas médias dos tratamentos T' no mesmo nível de T;

d) Diferença entre duas médias dos tratamentos T no mesmo nível de T'.

COCHRAN e COX (1965), STEEL e TORRIE(1960), ANDERSON e BANCROFT (1952) incluem, ainda, um quinto caso para comparação de médias, ou seja, diferença entre duas médias dos tratamentos T a diferentes níveis de T'.

COCHRAN e COX (1965) apresentam várias considerações sobre o experimento em parcelas subdivididas e mostram ser vantajoso o seu uso, se:

a) Os efeitos de T' e da interação T x T' são de maior interesse que os efeitos de T;

b) Os efeitos de T não podem ser medidos com pequenas quantidades de material.

E mostram com desvantagens:

a) Algumas vezes o erro das parcelas é muito maior do que os erros das subparcelas;

b) As diferentes comparações entre tratamentos têm variâncias distintas.

Comparando os experimentos em parcelas subdivididas e o fatorial, afirmam que o erro experimental médio é o mesmo para ambos os experimentos, ou seja, o aumento de precisão de T' e da interação T x T' se obtém mediante a redução da precisão de T.

FEDERER (1965) cita a eficiência do experimento em parcelas subdivididas em relação ao fatorial para comparações de T' e da interação T x T' como sendo:

$$E = \frac{(p-1)Ea + p(q-1)Eb}{(pq-1)Eb}$$

e para comparação de T

$$E' = \frac{(p-1)Ea + p(q-1)Eb}{(pq-1)Ea}$$

onde:

p : nº de tratamentos das parcelas (T);

q : nº de tratamentos das subparcelas (T');

Ea: variância residual das parcelas;

Eb: variância residual das subparcelas.

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Embora as deduções dos componentes de variância para o experimento em parcelas subdivididas sejam conhecidas para uma boa compreensão, deve-se deduzi-las, a fim de se dar uma boa seqüência a este trabalho.

3.1. Modelo Matemático

O modelo matemático para o experimento em parcelas subdivididas com as parcelas dispostas em blocos ao acaso é:

$$x_{ijk} = m + t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k + tt'_{ik} + e_{ijk}$$

com $i = 1,2,3,...I$, $j = 1,2,3,...J$ e $k = 1,2,3,...K$, onde:

x_{ijk} = valor observado do ik-ésima subparcela, no j-ésimo bloco;

m = média geral;

t_i = efeito do i-ésimo nível do tratamento T;

b_j = efeito do j-ésimo bloco;

tb_{ij} = efeito associado a ij-ésima observação ou efeito residual das parcelas;

t'_k = efeito do k-ésimo nível do tratamento T';

tt'_{ik} = efeito interado do i-ésimo nível do tratamento T com o k-ésimo nível do tratamento T';

e_{ijk} = efeito associado a ijk-ésima observação ou efeito residual das subparcelas.

São considerados dois tipos de modelo matemático:

a) Modelo Tipo I

São aleatórios apenas tb_{ij} e e_{ijk}, com média zero e variância σ^2_{tb} e σ^2 respectivamente.

São fixos os outros efeitos, ou seja, m, t_i, b_j, t'_k e tt'_{ik}.

b) Modelo Tipo II

São todos os efeitos aleatórios, com exceção da média, isto é, t_i, b_j, tb_{ij}, t'_k, tt'_{ik} e e_{ijk}, com média zero e variância σ^2_t, σ^2_b, σ^2_{tb}, $\sigma^2_{t'}$, $\sigma^2_{tt'}$ e σ^2 respectivamente.

3.2. Componentes de Variância - Modelo Tipo I

A fim de se obterem as fórmulas dos componentes de variância, parte-se das fórmulas que dão as somas de quadrados (SQ), do modelo matemático (3.1.) e suas restrições. Seguindo-se Pimentel Gomes (1966), têm-se:

a) $\text{SQtotal} = \sum_{i,j,k} x^2_{ijk} - C$

3.2.1. $E(\text{SQtotal}) = E(\sum_{i,j,k} x^2_{ijk}) - E(C)$

$$C = \frac{(\sum_{i,j,k} x_{ijk})^2}{IJK} = \frac{(x_{...})^2}{IJK}$$

3.2.2. $E(C) = \frac{1}{IJK} E(x_{...})^2$

Dado que:

$$x_{ijk} = m + t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k + tt'_{ik} + e_{ijk}$$

e pelo fato de que no resultado final das diversas E (S.Q.) m não aparece, pode-se suprimi-la em todos os cálculos, facilitando, assim, as deduções:

$$x_{...} = JK\sum_i t_i + IK\sum_j b_j + K\sum_{i,j} tb_{ij} + IJ\sum_k t'_k + J\sum_{i,k} tt'_{ik} + \sum_{i,j,k} e_{ijk}$$

De acordo com as condições (3.1.a), tem-se:

$$\sum_i t_i = 0, \sum_j b_j = 0, \sum_k t'_k = 0 \text{ e } \sum_i tt'_{ik} = \sum_k tt'_{ik} = 0$$

Então:

$$x_{...} = K\sum_{i,j} tb_{ij} + \sum_{i,j,k} e_{ijk}$$ substituindo em (3.2.2):

$$E(C) = \frac{1}{IJK}\, E(K\sum_{i,j} tb_{ij} + \sum_{i,j,k} e_{ijk})^2$$

Os termos correspondentes a duplos produtos têm esperança matemática nula.

Portanto,

$$E(C) = \frac{1}{IJK}\,(K^2 IJ\,\sigma^2_{tb} + IJK\,\sigma^2)$$

$$E(C) = K\,\sigma^2_{tb} + \sigma^2$$

$$E(\sum_{i,j,k} x^2_{ijk}) = \sum_{i,j,k} \left[E(x_{ijk})^2\right]$$ mas

$$x_{ijk} = t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k + tt'_{ik} + e_{ijk}$$

$$E(\sum_{i,j,k} x^2_{ijk}) = \sum_{i,j,k} \left[E(t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k + tt'_{ik} + e_{ijk})^2\right]$$

desenvolvendo o quadrado e sabendo-se que os termos correspondentes aos duplos produtos têm esperança matemática nula e que $E(t_i^2) = t_i^2$, $E(b_j^2) = b_j^2$, $E(t'^2_k) = t'^2_k$ e $E(tt')^2_{ik} =$

$$(tt')^2_{ik}$$

tem-se:

$$E(x_{ijk})^2 = t_i^2 + b_j^2 + \sigma^2_{tb} + t'^2_k + (tt')^2_{ik} + \sigma^2$$

Então:

$$E(\sum_{i,j,k} x^2_{ijk}) = JK \sum_i t_i^2 + IK \sum_j b_j + IJK\,\sigma^2_{tb} + IJ \sum_k t'^2_k +$$

$$J \sum_{i,k} (tt')^2_{ik} + IJK\,\sigma^2$$

Substituindo os valores em (3.2.1):

$$E(SQtotal) = JK \sum_i t_i^2 + IK \sum_j b_j^2 + IJ \sum_k t'^2_k + J \sum_{i,k} (tt')^2_{ik} +$$

$$K(IJ-1)\,\sigma^2_{tb} + (IJK-1)\,\sigma^2$$

b) $SQblocos = \dfrac{\sum_j B_j^2}{IK} - C$

3.2.3. $E(SQblocos) = \dfrac{1}{IK} E(\sum_j B_j^2) - E(C)$

$$E(\sum_j B_j^2) = \sum_j \left[E(B_j)^2\right]$$

$$B_j = x_{.j.} = K\sum_i t_i + IKb_j + K\sum_i tb_{ij} + I\sum_k t'_k + \sum_{i,k} tt'_{ik} +$$

$$\sum_{i,k} e_{ijk}$$

De acordo com as condições anteriores, tem-se:

$$E(B_j)^2 = I^2K^2b_j^2 + K^2I\,\sigma^2_{tb} + IK\,\sigma^2$$

$$\sum_j \left[E(B_j)^2\right] = I^2K^2\sum_j b_j^2 + IK^2J\sigma^2_{tb} + IJK\sigma^2$$

Substituindo os valores em (3.2.3):

$$E(SQblocos) = IK\sum_j b_j^2 + K(J-1)\sigma^2_{tb} + (J-1)\sigma^2$$

c) $SQtratamentos\ (T) = \dfrac{\sum_i T_i^2}{JK} - C$

3.2.4. $E\left[SQtratamentos(T)\right] = \dfrac{1}{JK}\ E(\sum_i T_i^2) - E(C)$

$$E(\sum_i T_i^2) = \sum_i \left[E(T_i)^2\right]$$

$$T_i = x_{i..} = JKt_i + K\sum_j b_j + K\sum_j tb_{ij} + J\sum_k t'_k + J\sum_k tt'_{ik}$$

$$+ \sum_{j,k} e_{ijk}$$

$$E(T_i)^2 = J^2K^2t_i^2 + K^2J\sigma^2_{tb} + JK\sigma^2$$

$$\sum_i \left[E(T_i)^2\right] = J^2K^2\sum_i t_i^2 + IK^2J\sigma^2_{tb} + IJK\sigma^2$$

Substituindo os valores em (3.2.4):

$$E\left[SQtratamentos(T)\right] = JK\sum_i t_i^2 + K(I-1)\sigma^2_{tb} + (I-1)\sigma^2$$

d) SQresíduo (a) = SQT x B = SQParcelas-SQT-SQB

$$SQT \times B = \frac{\sum_{i,j} P_{ij}^2}{K} - C - SQT - SQB$$

3.2.5. $E(SQT \times B) = \dfrac{1}{K}\ E(\sum_{i,j} P_{ij}^2) - E(C) - E(SQT) - E(SQB)$

$$\frac{1}{K} E(\sum_{i,j} P_{ij}^2) = \frac{1}{K} \sum_{i,j} \left[E(P_{ij})^2\right]$$

$$P_{ij} = x_{ij.} = Kt_i + Kb_j + Ktb_{ij} + \sum_k t'_k + \sum_k tt'_{ik} + \sum_k e_{ijk}$$

$$E(P_{ij})^2 = K^2 t_i^2 + K^2 b_j^2 + K^2 \sigma_{tb}^2 + K\sigma^2$$

$$\sum_{i,j} \left[E(P_{ij})^2\right] = JK^2 \sum_i t_i^2 + IK^2 \sum_j b_j^2 + IJK^2 \sigma_{tb}^2 + IJK\sigma^2$$

Substituindo todos os valores em (3.2.5):

$$E(SQresíduo\ (a) = E(SQT \times B) = K(I-1)(J-1)\sigma_{tb}^2 + (I-1)(J-1)\sigma^2$$

e) $SQtratamentos\ (T') = \dfrac{\sum_k T'^2_k}{IJ} - C$

3.2.6. $E\left[SQtratamentos(T')\right] = \dfrac{1}{IJ} E(\sum_k T'^2_k) - E(C)$

$$E(\sum_k T'^2_k) = \sum_k \left[E(T'_k)^2\right]$$

$$T'_k = x_{..k} = J\sum_i t_i + I\sum_j b_j + \sum_{i,j} tb_{ij} + IJt'_k + J\sum_i tt'_{ik} + \sum_{i,j} e_{ijk}$$

$$E(T'_k)^2 = IJ\sigma_{tb}^2 + I^2J^2 t'^2_k + IJ\sigma^2$$

$$\sum_k \left[E(T'_k)^2\right] = IJK\sigma_{tb}^2 + I^2J^2 \sum_k t'^2_k + IJK\sigma^2$$

Substituindo os valores em (3.2.6):

$$E\left[SQtratamentos(T')\right] = IJ\sum_k t'^2_k + (K-1)\sigma^2$$

f) $SQInt.T \times T' = \dfrac{\sum_{i,k} P_{ik}^2}{J} - C - SQT - SQT'$

3.2.7. $E(SQInt.T \times T') = \dfrac{1}{J} E(\sum_{i,k} P_{ik}^2) - E(C) - E(SQT) - E(SQT')$

$$\frac{1}{J} E(\sum_{i,k} P_{ik}^2) = \frac{1}{J} \sum_{i,k} \left[E(P_{ik})^2\right]$$

$$P_{ik} = x_{i.k} = Jt_i + \sum_j b_j + \sum_j tb_{ij} + Jt'_k + Jtt'_{ik} + \sum_j e_{ijk}$$

$$E(P_{ik})^2 = J^2 t_i^2 + J\sigma_{tb}^2 + J^2 t'^2_k + J^2 (tt')^2_{ik} + J\sigma^2$$

$$\frac{1}{J} \sum_{i,k} \left[E(P_{ik})^2\right] = JK\sum_i t_i^2 + IK\sigma_{tb}^2 + IJ\sum_k t'^2_k + J\sum_{i,k}(tt')^2_{ik}$$

$$+ IK\sigma^2$$

Substituindo todos os valores em (3.2.7):

$$E(SQInt.T \times T') = J\sum_{i,k}(tt')^2_{ik} + (I-1)(K-1)\sigma^2$$

g) $SQresíduo(b) = SQtotal - SQB - SQT - SQT \times B - SQT' - SQTxT'$

3.2.8. $E\left[SQresíduo(b)\right] = E(SQtotal) - E(SQB) - E(SQT) - E(SQTxB)$

$$- E(SQT') - (SQT \times T')$$

Substituindo todos os valores em (3.2.8):

$$E\left[SQresíduo(b)\right] = I\ (K-1)\ (J-1)\ \sigma^2$$

3.3. Componentes de Variância - Modelo Tipo II

De acordo com o modelo matemático, (3.1) tem-se:

$$x_{\cdot\cdot\cdot} = JK\sum_{i} t_i + IK\sum_{j} b_j + K\sum_{i,j} tb_{ij} + IJ\sum_{k} t'_k + J\sum_{i,k} tt'_{ik}$$

$$+ \sum_{i,j,k} e_{ijk}$$

Com as condições em (3.1.b) e como os termos cor - respondentes a duplos produtos têm esperança matemática nula, então:

$$E(x_{\cdot\cdot\cdot})^2 = J^2K^2I\,\sigma_t^2 + I^2K^2J\,\sigma_b^2 + K^2IJ\,\sigma_{tb}^2 + I^2J^2K\,\sigma_{t'}^2$$

$$+ J^2IK\,\sigma_{tt'}^2 + IJK\,\sigma^2$$

Substituindo em (3.2.2):

$$E(C) = JK\sigma_t^2 + IK\sigma_b^2 + K\sigma_{tb}^2 + IJ\sigma_{t'}^2 + J\sigma_{tt'}^2 + \sigma^2$$

$$x_{ijk} = t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k + tt'_{ik} + e_{ijk}$$

$$E(x_{ijk})^2 = \sigma_t^2 + \sigma_b^2 + \sigma_{tb}^2 + \sigma_{t'}^2 + \sigma_{tt'}^2 + \sigma^2$$

$$\sum_{i,j,k}\left[E(x_{ijk})^2\right] = IJK\,\sigma_t^2 + IJK\,\sigma_b^2 + IJK\,\sigma_{tb}^2 + IJK\,\sigma_{t'}^2$$

$$+ IJK\,\sigma_{tt'}^2 + IJK\,\sigma^2$$

Substituindo os valores em (3.2.1):

$$E(SQtotal) = JK(I-1)\,\sigma_t^2 + IK(J-1)\,\sigma_b^2 + K(IJ-1)\,\sigma_{tb}^2$$

$$+ IJ(K-1)\,\sigma_{t'}^2 + J(IK-1)\,\sigma_{tt'}^2 + (IJK-1)\,\sigma^2$$

$$B_j = x_{\cdot j \cdot} = K\sum_{i} t_i + IKb_j + K\sum_{i} tb_{ij} + I\sum_{k} t'_k + \sum_{i,k} tt'_{ik}$$

$$+ \sum_{i,k} e_{ijk}$$

$$E(B_j)^2 = K^2 I \sigma_t^2 + I^2K^2 \sigma_b^2 + K^2 I \sigma_{tb}^2 + I^2 K \sigma_{t'}^2 + IK \sigma_{tt'}^2$$
$$+ IK \sigma^2$$

$$\sum_j \left[E(B_j)^2\right] = K^2 IJ \sigma_t^2 + I^2K^2 J \sigma_b^2 + K^2 IJ \sigma_{tb}^2 + I^2 KJ \sigma_{t'}^2$$
$$+ IJK \sigma_{tt'}^2 + IJK \sigma^2$$

Substituindo os valores em (3.2.3):

$$E(SQblocos) = IK(J-1) \sigma_b^2 + K(J-1) \sigma_{tb}^2 + (J-1) \sigma^2$$

$$T_i = x_{i..} = JKt_i + K\sum_j b_j + K\sum_j tb_{ij} + J\sum_k t'_k + J\sum_k tt'_{ik}$$
$$+ \sum_{j,k} e_{ijk}$$

$$E(T_i)^2 = J^2K^2 \sigma_t^2 + K^2 J \sigma_b^2 + K^2 J \sigma_{tb}^2 + J^2 K \sigma_{t'}^2 + J^2 K \sigma_{tt'}^2$$
$$+ JK \sigma^2$$

$$\sum_i \left[E(T_i)^2\right] = IJ^2K^2 \sigma_t^2 + IK^2 J \sigma_b^2 + IK^2 J \sigma_{tb}^2 + IJ^2 K \sigma_{t'}^2$$
$$+ IJ^2 K \sigma_{tt'}^2 + IJK \sigma^2$$

Substituindo os valores em (3.2.4):

$$E\left[SQtratamentos(T)\right] = JK(I-1) \sigma_t^2 + K(I-1) \sigma_{tb}^2 + J(I-1) \sigma_{tt'}^2$$
$$+ (I-1) \sigma^2$$

$$P_{ij} = x_{ij.} = Kt_i + Kb_j + Ktb_{ij} + \sum_k t'_k + \sum_k tt'_{ik} + \sum_k e_{ijk}$$

$$E(P_{ij})^2 = K^2 \sigma_t^2 + K^2 \sigma_b^2 + K^2 \sigma_{tb}^2 + K \sigma_{t'}^2 + K \sigma_{tt'}^2 + K \sigma^2$$

$$\sum_{i,j}\left[E(P_{ij})^2\right] = IJK^2\sigma_t^2 + IJK^2\sigma_b^2 + IJK^2\sigma_{tb}^2 + IJK\sigma_{t'}^2$$

$$+ IJK\sigma_{tt'}^2 + IJK\sigma^2$$

Substituindo todos os valores em (3.2.5):

$$E\left[SQresíduo(a)\right] = E(SQT \times B) = K(I-1)(J-1)\sigma_{tb}^2 + (I-1)(J-1)\sigma^2$$

$$T'_k = x_{..k} = J\sum_i t_i + I\sum_j b_j + \sum_{i,j} tb_{ij} + IJt'_k + J\sum_i tt'_{ik}$$

$$+ \sum_{i,j} e_{ijk}$$

$$E(T'_k)^2 = J^2I\sigma_t^2 + I^2J\sigma_b^2 + IJ\sigma_{tb}^2 + I^2J^2\sigma_{t'}^2 + J^2I\sigma_{tt'}^2 + IJ\sigma^2$$

$$\sum_k\left[E(T_k)^2\right] = IJ^2K\sigma_t^2 + I^2JK\sigma_b^2 + IJK\sigma_{tb}^2 + I^2J^2K\sigma_{t'}^2$$

$$+ IJ^2K\sigma_{tt'}^2 + IJK\sigma^2$$

Substituindo todos os valores em (3.2.6):

$$E\left[SQtratamentos(T')\right] = IJ(K-1)\sigma_{t'}^2 + J(K-1)\sigma_{tt'}^2 + (K-1)\sigma^2$$

$$P_{ik} = x_{i.k} = Jt_i + \sum_j b_j + \sum_j tb_{ij} + Jt'_k + Jtt'_{ik} + \sum_j e_{ijk}$$

$$E(P_{ik})^2 = J^2\sigma_t^2 + J\sigma_b^2 + J\sigma_{tb}^2 + J^2\sigma_{t'}^2 + J^2\sigma_{tt'}^2 + J\sigma^2$$

$$\sum_{i,k}\left[E(P_{ik})^2\right] = IJ^2K\sigma_t^2 + IJK\sigma_b^2 + IJK\sigma_{tb}^2 + IJ^2K\sigma_{t'}^2$$

$$+ IJ^2K\sigma_{tt'}^2 + IJK\sigma^2$$

Substituindo todos os valores em (3.2.7):

$$E(SQInt.T \times T') = J(I-1)(K-1)\sigma_{tt'}^2 + (I-1)(K-1)\sigma^2$$

Substituindo todos os valores em (3.2.8):

$$E\left[SQresíduo(b)\right] = I\ (J-1)\ (K-1)\sigma^2$$

QUADRO I - Componentes de Variância para o Modelo Tipo I

Causa de Variação	G.L	E(SQ)	E(QM)
Blocos	J-1	$(J-1)\sigma^2 + K(J-1)\sigma^2_{tb} + IK\sum_j b_j^2$	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + IK\sum_j b_j^2/(J-1)$
Tratamentos(T)	I-1	$(I-1)\sigma^2 + K(I-1)\sigma^2_{tb} + JK\sum_i t_i^2$	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + JK\sum_i t_i^2/(I-1)$
Resíduo(a)	(I-1)(J-1)	$(I-1)(J-1)\sigma^2 + K(I-1)(J-1)\sigma^2_{tb}$	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb}$
Tratamentos(T')	K-1	$(K-1)\sigma^2 + IJ\sum_k t'^2_k$	$\sigma^2 + IJ\sum_k t'_k/(K-1)$
Int. T x T'	(I-1)(K-1)	$(I-1)(K-1)\sigma^2 + J\sum_{i,k}(tt')^2_{ik}$	$\sigma^2 + J\sum_{i,k}(tt')^2_{ik}/(I-1)(K-1)$
Resíduo(b)	I(J-1)(K-1)	$I(J-1)(K-1)\sigma^2$	σ^2
Total	IJK-1		

Quadro II - Componentes de Variância para o Modelo Tipo II

Causa de Variação	G.L	E(S.Q)	E(Q.M)
Blocos	J-1	$(J-1)\sigma^2 + K(J-1)\sigma^2_{tb} + IK(J-1)\sigma^2_b$	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + IK\sigma^2_b$
Tratamentos(T)	I-1	$(I-1)\sigma^2 + K(I-1)\sigma^2_{tb} + J(I-1)\sigma^2_{tt'} + JK(I-1)\sigma^2_t$	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + J\sigma^2_{tt'} + JK\sigma^2_t$
Resíduo(a)	(I-1)(J-1)	$(I-1)(J-1)\sigma^2 + K(I-1)(J-1)\sigma^2_{tb}$	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb}$
Tratamentos(T')	K-1	$(K-1)\sigma^2 + J(K-1)\sigma^2_{tt'} + IJ(K-1)\sigma^2_{t'}$	$\sigma^2 + J\sigma^2_{tt'} + IJ\sigma^2_{t'}$
Int. T x T'	(I-1)(K-1)	$(I-1)(K-1)\sigma^2 + J(I-1)(K-1)\sigma^2_{tt'}$	$\sigma^2 + J\sigma^2_{tt'}$
Resíduo(b)	I(J-1)(K-1)	$I(J-1)(K-1)\sigma^2$	σ^2
Total	IJK-1		

3.4. Testes de Significância (Teste F)

A partir dos quadros I e II dos componentes de variância obtidos nos itens anteriores, obtêm-se os seguintes valores de "F":

Modelo Tipo I

a) Blocos $B = \dfrac{QMB}{QMRes(a)}$ com (J-1) e (I-1)(J-1) G.L.

b) Tratamentos $T = \dfrac{QMT}{QMRes(a)}$ com (I-1) e (I-1)(J-1) G.L.

c) Tratamentos $T' = \dfrac{QMT'}{QMRes(b)}$ com (K-1) e I(J-1)(K-1)G.L.

d) $Int.T \times T' = \dfrac{QMT \times T'}{QMRes(b)}$ com (I-1)(K-1) e I(J-1)(K-1) G.L.

Modelo Tipo II

a) Blocos $B = \dfrac{QMB}{QMRes(a)}$ com (J-1) e (I-1)(J-1) G.L.

b) Tratamentos $T = \dfrac{QMRes(b) + QMT}{QMRes(a) + QMInt.TxT'}$ com n_1 e n_2 G.L.

sendo:

$$n_1 = \frac{\left[QMRes(b) + QMT\right]^2}{\dfrac{\left[QMRes(b)\right]^2}{I(J-1)(K-1)} + \dfrac{(QMT)^2}{I-1}}$$

$$n_2 = \frac{\left[QMRes(a) + QMInt.TxT'\right]^2}{\dfrac{\left[QMRes(a)\right]^2}{(I-1)(J-1)} + \dfrac{(QMInt.TxT')^2}{(I-1)(K-1)}}$$

c) Tratamentos $T' = \dfrac{QMT'}{QMInt.TxT'}$ com (K-1) e (I-1)(K-1)G.L.

d) $Int.T \times T' = \dfrac{QMInt.TxT'}{QMRes(b)}$ com (I-1)(K-1) e I(J-1)(K-1)G.L.

4. REESTRUTURAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

4.1. Comportamento dos tratamentos (T') em cada nível dos tratamentos (T)

O desdobramento do número de graus de liberdade, segue o esquema:

	G.L
T' dentro do nível T_1 ou T'/T_1	K-1
T' dentro do nível T_2 ou T'/T_2	K-1
T' dentro do nível T_3 ou T'/T_3	K-1
....	...
T' dentro do nível T_I ou T'/T_I	K-1
	I(K-1)

4.1.1. Modelo Matemático

$$x_{ijk} = m + t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k/t_1 + t'_k/t_2 + t'_k/t_3$$

$$+\ldots+ t'_k/t_I + e_{ijk}$$

onde:

m, t_i, b_j, tb_{ij} e e_{ijk} foram definidos em (3.1);

t'_k/t_1 = efeito dos tratamentos T' dentro do nível 1 dos tra tamentos T;

t'_k/t_2 = efeito dos tratamentos T' dentro do nível 2 dos tratamentos T etc.

Esquema (1)

Níveis dos Tratamentos T	Níveis dos Tratamentos T'					Totais dos Trat. T
	1	2	3	...	K	
1	$x_{1.1}$	$x_{1.2}$	$x_{1.3}$	...	$x_{1.K}$	$x_{1..}$
2	$x_{2.1}$	$x_{2.2}$	$x_{2.3}$	...	$x_{2.K}$	$x_{2..}$
3	$x_{3.1}$	$x_{3.2}$	$x_{3.3}$	...	$x_{3.K}$	$x_{3..}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
I	$x_{I.1}$	$x_{I.2}$	$x_{I.3}$	...	$x_{I.K}$	$x_{I..}$
Totais dos Tratamentos T'	$x_{..1}$	$x_{..2}$	$x_{..3}$	...	$x_{..K}$	$x_{...}$

Modelo Tipo I

São considerados aleatórios:

tb_{ij} e e_{ijk}, com média zero e variância σ^2_{tb} e σ^2 respectivamente.

São considerados fixos:

m, t_i, b_j, t'_k/t_1, t'_k/t_2, t'_k/t_3, ..., t'_k/t_I

Conhecendo-se as diversas somas de quadrados (S.Q) pelo Esquema (1) e de acordo com o modelo matemático(4.1.1), têm-se:

a) SQT' dentro $T_1 = \frac{1}{J} (x^2_{1.1} + x^2_{1.2} + x^2_{1.3} + \ldots + x^2_{1.K})$

$$- \frac{1}{JK} (x_{1..})^2$$

4.1.2. $E(\text{SQT'dentro } T_1) = \frac{1}{J}\left[E(x^2_{1.1}) + E(x^2_{1.2}) + E(x^2_{1.3})\right.$

$$\left. + \ldots + E(x^2_{1.K})\right] - \frac{1}{JK} E(x_{1..})^2$$

$$x_{1..} = JKt_1 + K\sum_j b_j + K\sum_j tb_{1j} + J\sum_k t'_k/t_1 + \sum_{j,k} e_{1jk}$$

De acordo com as condições anteriores, tem-se

$$\sum_i t_i = 0, \quad \sum_j b_j = 0, \quad \sum_k t'_k/t_1 = \sum_k t'_k/t_2 = \sum_k t'_k/t_3$$

$$= \ldots = \sum_k t'_k/t_I = 0$$

então:

$$x_{1..} = JKt_1 + K\sum_j tb_{1j} + \sum_{j,k} e_{1jk}$$

$$E(x_{1..})^2 = J^2K^2t_1^2 + K^2J\sigma^2_{tb} + JK\sigma^2$$

$$\frac{1}{JK} E(x_{1..})^2 = JKt_1^2 + K\sigma^2_{tb} + \sigma^2$$

ou para o caso geral, tem-se:

$$\frac{1}{JK} E(x_{i..})^2 = JKt_i^2 + K\sigma^2_{tb} + \sigma^2$$

$$x_{1.1} = Jt_1 + \sum_j b_j + \sum_j tb_{1j} + Jt'_1/t_1 + \sum_j e_{1j1}$$

$$E(x^2_{1.1}) = J^2t_1^2 + J\sigma^2_{tb} + J^2(t'_1/t_1)^2 + J\sigma^2$$

Por analogia:

$$E(x^2_{1.2}) = J^2t_1^2 + J\sigma^2_{tb} + J^2(t'_2/t_1)^2 + J\sigma^2$$

$$E(x_{1.3}^2) = J^2 t_1^2 + J\sigma_{tb}^2 + J^2(t_3'/t_1)^2 + J\sigma^2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$E(x_{1.k}^2) = J^2 t_1^2 + J\sigma_{tb}^2 + J^2(t_k'/t_1)^2 + J\sigma^2$$

Substituindo os valores em (4.1.2):

$$E(SQT'\text{dentro } T_1) = (K-1)\sigma^2 + J\sum_k (t_k'/t_1)^2$$

b) $SQT'\text{dentro } T_2 = \frac{1}{J}(x_{2.1}^2 + x_{2.2}^2 + x_{2.3}^2 + \ldots + x_{2.k}^2)$

$$- \frac{1}{JK}(x_{2..})^2$$

4.1.3. $E(SQT'\text{dentro } T_2) = \frac{1}{J}\left[E(x_{2.1}^2) + E(x_{2.2}^2) + E(x_{2.3}^2)\right.$

$$\left. + \ldots + E(x_{2.k}^2)\right] - \frac{1}{JK} E(x_{2..})^2$$

$$x_{2.1} = Jt_2 + \sum_j b_j + \sum_j tb_{2j} + Jt_1'/t_2 + \sum_j e_{2j1}$$

$$E(x_{2.1}^2) = J^2 t_2^2 + J\sigma_{tb}^2 + J^2(t_1'/t_2)^2 + J\sigma^2$$

Por analogia:

$$E(x_{2.2}^2) = J^2 t_2^2 + J\sigma_{tb}^2 + J^2(t_2'/t_2)^2 + J\sigma^2$$

$$E(x_{2.3}^2) = J^2 t_2^2 + J\sigma_{tb}^2 + J^2(t_3'/t_2)^2 + J\sigma^2$$

....

$$E(x_{2.k}^2) = J^2 t_2^2 + J\sigma_{tb}^2 + J^2(t_k'/t_2)^2 + J\sigma^2$$

Substituindo os valores em (4.1.3):

$$E(SQT'\text{dentro } T_2) = (K-1)\sigma^2 + J\sum_k (t_k'/t_2)^2$$

Seguindo-se o mesmo processo, chega-se a:

$$E(\text{SQT'dentro } T_3) = (K-1)\,\sigma^2 + J\sum_k (t'_k/t_3)^2$$

. . . .

$$E(\text{SQT'dentro } T_I) = (K-1)\,\sigma^2 + J\sum_k (t'_k/t_I)^2$$

Modelo Tipo II

São considerados todos aleatórios, com exceção da média, isto é, t_i, b_j, tb_{ij}, t'_k/t_1, t'_k/t_2, t'_k/t_3, ..., t'_k/t_I e e_{ijk}, com média zero e variância σ^2_t, σ^2_b, σ^2_{tb}, σ^2_{t'/t_1}, σ^2_{t'/t_2}, σ^2_{t'/t_3}, ..., σ^2_{t'/t_I} e σ^2 respectivamente.

$$x_{1..} = JKt_1 + K\sum_j b_j + K\sum_j tb_{1j} + J\sum_k t'_k/t_1 + \sum_{j,k} e_{1jk}$$

$$E(x_{1..})^2 = J^2K^2\sigma^2_t + K^2J\sigma^2_b + K^2J\,\sigma^2_{tb} + J^2K\,\sigma^2_{t'/t_1} + JK\sigma^2$$

$$\frac{1}{JK}\,E(x_{1..})^2 = JK\,\sigma^2_t + K\sigma^2_b + K\sigma^2_{tb} + J\sigma^2_{t'/t_1} + \sigma^2$$

ou para o caso geral, tem-se:

$$\frac{1}{JK}\,E(x_{i..})^2 = JK\,\sigma^2_t + K\,\sigma^2_b + K\,\sigma^2_{tb} + J\,\sigma^2_{t'/t_i} + \sigma^2$$

$$x_{1.1} = Jt_1 + \sum_j b_j + \sum_j tb_{1j} + Jt'_1/t_1 + \sum_j e_{1j1}$$

$$E(x^2_{1.1}) = J^2\sigma^2_t + J\sigma^2_b + J\sigma^2_{tb} + J^2\sigma^2_{t'/t_1} + J\sigma^2$$

Por analogia:

$$E(x^2_{1.2}) = J^2\sigma^2_t + J\sigma^2_b + J\sigma^2_{tb} + J^2\sigma^2_{t'/t_1} + J\sigma^2$$

$$E(x^2_{1.3}) = J^2\sigma^2_t + J\sigma^2_b + J\sigma^2_{tb} + J^2\sigma^2_{t'/t_1} + J\sigma^2$$

....

$$E(x^2_{1.k}) = J^2\sigma^2_t + J\sigma^2_b + J\sigma^2_{tb} + J^2\sigma^2_{t'/t_1} + J\sigma^2$$

Substituindo os valores em (4.1.2):

$$E(SQT'\text{dentro } T_1) = (K-1)\sigma^2 + J(K-1)\sigma^2_{t'/t_1}$$

$$x_{2.1} = Jt_2 + \sum_j b_j + \sum_j tb_{2j} + Jt'_1/t_2 + \sum_j e_{2j1}$$

$$E(x^2_{2.1}) = J^2\sigma^2_t + J\sigma^2_b + J\sigma^2_{tb} + J^2\sigma^2_{t'/t_2} + J\sigma^2$$

$$E(x^2_{2.2}) = J^2\sigma^2_t + J\sigma^2_b + J\sigma^2_{tb} + J^2\sigma^2_{t'/t_2} + J\sigma^2$$

$$E(x^2_{2.3}) = J^2\sigma^2_t + J\sigma^2_b + J\sigma^2_{tb} + J^2\sigma^2_{t'/t_2} + J\sigma^2$$

....

$$E(x^2_{2.k}) = J^2\sigma^2_t + J\sigma^2_b + J\sigma^2_{tb} + J^2\sigma^2_{t'/t_2} + J\sigma^2$$

Substituindo os valores em (4.1.3):

$$E(SQT'\text{dentro } T_2) = (K-1)\sigma^2 + J(K-1)\sigma^2_{t'/t_2}$$

Pelo mesmo processo chega-se a:

$$E(SQT'\text{dentro } T_3) = (K-1)\sigma^2 + J(K-1)\sigma^2_{t'/t_3}$$

....

$$E(SQT'\text{dentro } T_I) = (K-1)\sigma^2 + J(K-1)\sigma^2_{t'/t_I}$$

QUADRO III - Componentes de Variância para o Modelo Tipo I

Causa de Variação	G.L	E(S.Q)	E(Q.M)
Blocos	J-1	$(J-1)\sigma^2 + K(J-1)\sigma^2_{tb} + IK\sum_j b_j^2$	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + IK\sum_j b_j^2/(J-1)$
Tratamentos(T)	I-1	$(I-1)\sigma^2 + K(I-1)\sigma^2_{tb} + JK\sum_i t_i^2$	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + JK\sum_i t_i^2/(I-1)$
Resíduo(a)	(I-1)(J-1)	$(I-1)(J-1)\sigma^2 + K(I-1)(J-1)\sigma^2_{tb}$	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb}$
T'dentro T_1	K-1	$(K-1)\sigma^2 + J\sum_k (t'_k/t_1)^2$	$\sigma^2 + J\sum_k (t'_k/t_1)^2/(K-1)$
T'/T_2	K-1	$(K-1)\sigma^2 + J\sum_k (t'_k/t_2)^2$	$\sigma^2 + J\sum_k (t'_k/t_2)^2/(K-1)$
T'/T_3	K-1	$(K-1)\sigma^2 + J\sum_k (t'_k/t_3)^2$	$\sigma^2 + J\sum_k (t'_k/t_3)^2/(K-1)$
⋮	⋮	⋮	⋮
T'/T_I	K-1	$(K-1)\sigma^2 + J\sum_k (t'_k/t_I)^2$	$\sigma^2 + J\sum_k (t'_k/t_I)^2/(K-1)$
Resíduo(b)	I(J-1)(K-1)	$I(J-1)(K-1)\sigma^2$	σ^2
Total	IJK-1		

QUADRO IV - Componentes de Variância para o Modelo Tipo II

Causa de Variação		E(S.Q)	E(Q.M)
Blocos	J-1	$(J-1)\sigma^2 + K(J-1)\sigma^2_{tb} + IK(J-1)\sigma^2_b$	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + IK\sigma^2_b$
Tratamentos(T)	I-1	$(I-1)\sigma^2+K(I-1)\sigma^2_{tb}+J(I-1)\sigma^2_{tt'}+JK(I-1)\sigma^2_t$	$\sigma^2+K\sigma^2_{tb}+J\sigma^2_{tt'}+JK\sigma^2_t$
Resíduo(a)	(I-1)(J-1)	$(I-1)(J-1)\sigma^2 + K(I-1)(J-1)\sigma^2_{tb}$	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb}$
T'dentro T_1	K-1	$(K-1)\sigma^2 + J(K-1)\sigma^2_{t'/t_1}$	$\sigma^2 + J\sigma^2_{t'/t_1}$
T'/T_2	K-1	$(K-1)\sigma^2 + J(K-1)\sigma^2_{t'/t_2}$	$\sigma^2 + J\sigma^2_{t'/t_2}$
T'/T_3	K-1	$(K-1)\sigma^2 + J(K-1)\sigma^2_{t'/t_3}$	$\sigma^2 + J\sigma^2_{t'/t_3}$
⋮	⋮	⋮	⋮
T'/T_I	K-1	$(K-1)\sigma^2 + J(K-1)\sigma^2_{t'/t_I}$	$\sigma^2 + J\sigma^2_{t'/t_I}$
Resíduo(b)	I(J-1)(K-1)	$I(J-1)(K-1)\sigma^2$	σ^2
Total	IJK-1		

4.2. Comportamento dos tratamentos (T) em cada nível dos tratamentos (T')

O desdobramento do número de graus de liberdade segue o esquema:

	G.L
T dentro do nível T'_1 ou T/T'_1	I-1
T dentro do nível T'_2 ou T/T'_2	I-1
T dentro do nível T'_3 ou T/T'_3	I-1
....	...
T dentro do nível T'_k ou T/T'_k	I-1
	K(I-1)

4.2.1. Modelo Matemático:

$$x_{ijk} = m + b_j + tb_{ij} + t'_k + t_i/t'_1 + t_i/t'_2 + t_i/t'_3 + \ldots + t_i/t'_k + e_{ijk}$$

onde:

m, b_j, tb_{ij}, t'_k e e_{ijk} foram definidos em (3.1);

t_i/t'_1 = efeito dos tratamentos T dentro do nível 1 dos tratamentos T';

t_i/t'_2 = efeito dos tratamentos T dentro do nível 2 dos tratamentos T' etc.

Modelo Tipo I

São considerados aleatórios:

tb_{ij} e e_{ijk}, com média zero e variância σ^2_{tb} e σ^2 respectivamente.

São considerados fixos:

$m,\ b_j,\ t'_k,\ t_i/t'_1,\ t_i/t'_2,\ t_i/t'_3,\ \ldots,\ t_i/t'_k$

De acordo com o esquema (1), têm-se as diversas somas de quadrados (S.Q) e de acordo com o modelo matemático 4.2.1 têm-se:

a) $\text{SQT dentro } T'_1 = \frac{1}{J}\left(x^2_{1.1} + x^2_{2.1} + x^2_{3.1} + \ldots + x^2_{I.1}\right)$

$$- \frac{1}{IJ}\left(x_{..1}\right)^2$$

4.2.2 $E(\text{SQT dentro } T'_1) = \frac{1}{J}\left[E(x^2_{1.1}) + E(x^2_{2.1}) + E(x^2_{3.1})\right.$

$$\left. + \ldots + E(x^2_{I.1})\right] - \frac{1}{IJ} E(x_{..1})^2$$

$$x_{..1} = I\sum_j b_j + \sum_{i,j} tb_{ij} + IJt'_1 + J\sum_i t_i/t'_1 + \sum_{i,j} e_{ij1}$$

De acordo com as condições, têm-se:

$$\sum_j b_j = 0,\ \sum_k t'_k = 0,\ \sum_i t_i/t'_1 = \sum_i t_i/t'_2 = \sum_i t_i/t'_3$$

$$= \ldots = \sum_i t_i/t'_k = 0$$

então:

$$x_{..1} = \sum_{i,j} tb_{ij} + IJt'_1 + \sum_{i,j} e_{ij1}$$

$$E(x_{..1})^2 = IJ\sigma^2_{tb} + I^2J^2t'^2_1 + IJ\sigma^2$$

$$\frac{1}{IJ} E(x_{..1})^2 = \sigma^2_{tb} + IJt'^2_1 + \sigma^2$$

ou para o caso geral, têm-se:

$$\frac{1}{IJ} E(x_{..k})^2 = \sigma^2_{tb} + IJt'^2_k + \sigma^2$$

$$x_{1.1} = \sum_j b_j + \sum_j tb_{1j} + Jt'_1 + Jt_1/t'_1 + \sum_j e_{1j1}$$

$$E(x^2_{1.1}) = J\sigma^2_{tb} + J^2t'^2_1 + J^2(t_1/t'_1)^2 + J\sigma^2$$

Por analogia:

$$E(x^2_{2.1}) = J\sigma^2_{tb} + J^2t'^2_1 + J^2(t_2/t'_1)^2 + J\sigma^2$$

$$E(x^2_{3.1}) = J\sigma^2_{tb} + J^2t'^2_1 + J^2(t_3/t'_1)^2 + J\sigma^2$$

....

$$E(x^2_{I.1}) = J\sigma^2_{tb} + J^2t'^2_1 + J^2(t_I/t'_1)^2 + J\sigma^2$$

Substituindo os valores em (4.2.2):

$$E(\text{SQT dentro } T'_1) = (I-1)\sigma^2 + (I-1)\sigma^2_{tb} + J\sum_i(t_i/t'_1)^2$$

b) $\text{SQT dentro } T'_2 = \frac{1}{J}(x^2_{1.2} + x^2_{2.2} + x^2_{3.2} + \dots + x^2_{I.2})$

$$- \frac{1}{IJ}(x_{..2})^2$$

4.2.3. $E(\text{SQT dentro } T'_2) = \frac{1}{J}\Big[E(x^2_{1.2}) + E(x^2_{2.2}) + E(x^2_{3.2})$

$$+ \dots + E(x^2_{I.2})\Big] - \frac{1}{IJ}E(x_{..2})^2$$

$$x_{1.2} = \sum_j b_j + \sum_j tb_{1j} + Jt'_2 + Jt_1/t'_2 + \sum_j e_{1j2}$$

$$E(x^2_{1.2}) = J\sigma^2_{tb} + J^2t'^2_2 + J^2(t_1/t'_2)^2 + J\sigma^2$$

Por analogia:

$$E(x^2_{2.2}) = J\sigma^2_{tb} + J^2t'^2_2 + J^2(t_2/t'_2)^2 + J\sigma^2$$

$$E(x_{3.2}^2) = J\sigma_{tb}^2 + J^2t'^2_2 + J^2(t_3/t'_2)^2 + J\sigma^2$$

. . . .

$$E(x_{I.2}^2) = J\sigma_{tb}^2 + J^2t'^2_2 + J^2(t_I/t'_2)^2 + J\sigma^2$$

Substituindo os valores em (4.2.3):

$$E(\text{SQT dentro } T'_2) = (I-1)\sigma^2 + (I-1)\sigma_{tb}^2 + J\sum_i (t_i/t'_2)^2$$

Seguindo o mesmo processo chega-se a:

$$E(\text{SQT dentro } T'_3) = (I-1)\sigma^2 + (I-1)\sigma_{tb}^2 + J\sum_i (t_i/t'_3)^2$$

. . . .

$$E(\text{SQT dentro } T'_k) = (I-1)\sigma^2 + (I-1)\sigma_{tb}^2 + J\sum_i (t_i/t'_k)^2$$

Modelo Tipo II

São considerados todos aleatórios, com exceção da média, isto é, b_j, tb_{ij}, t'_k, t_i/t'_1, t_i/t'_2, $t_i/t'_3, \ldots, t_i/t'_k$ e e_{ijk}, com média zero e variância, σ_b^2, σ_{tb}^2, $\sigma_{t'}^2$, σ_{t/t'_1}^2, σ_{t/t'_2}^2, σ_{t/t'_3}^2, ..., σ_{t/t'_k}^2 e σ^2 respectivamente.

$$x_{..1} = I\sum_j b_j + \sum_{i,j} tb_{ij} + IJt'_1 + J\sum_i t_i/t'_1 + \sum_{i,j} e_{ij1}$$

$$E(x_{..1})^2 = I^2J\sigma_b^2 + IJ\sigma_{tb}^2 + I^2J^2\sigma_{t'}^2 + J^2I\sigma_{t/t'_1}^2 + IJ\sigma^2$$

$$\frac{1}{IJ}E(x_{..1})^2 = I\sigma_b^2 + \sigma_{tb}^2 + IJ\sigma_{t'}^2 + J\sigma_{t/t'_1}^2 + \sigma^2$$

ou para o caso geral, tem-se:

$$\frac{1}{IJ}\, E(x_{..k})^2 = I\sigma_b^2 + \sigma_{tb}^2 + IJ\sigma_{t'}^2 + J\sigma_{t/t_k'}^2 + \sigma^2$$

$$x_{1.1} = \sum_j b_j + \sum_j tb_{1j} + Jt_1' + Jt_1/t_1' + \sum_j e_{1j1}$$

$$E(x_{1.1}^2) = J\sigma_b^2 + J\sigma_{tb}^2 + J^2\sigma_{t'}^2 + J^2\sigma_{t/t_1'}^2 + J\sigma^2$$

Por analogia:

$$E(x_{2.1}^2) = J\sigma_b^2 + J\sigma_{tb}^2 + J^2\sigma_{t'}^2 + J^2\sigma_{t/t_1'}^2 + J\sigma^2$$

$$E(x_{3.1}^2) = J\sigma_b^2 + J\sigma_{tb}^2 + J^2\sigma_{t'}^2 + J^2\sigma_{t/t_1'}^2 + J\sigma^2$$

....

$$E(x_{I.1}^2) = J\sigma_b^2 + J\sigma_{tb}^2 + J^2\sigma_{t'}^2 + J^2\sigma_{t/t_1'}^2 + J\sigma^2$$

Substituindo os valores em (4.2.2):

$$E(\text{SQT dentro } T_1') = (I-1)\sigma^2 + (I-1)\sigma_{tb}^2 + J(I-1)\sigma_{t/t_1'}^2$$

$$x_{1.2} = \sum_j b_j + \sum_j tb_{1j} + Jt_2' + Jt_1/t_2' + \sum_j e_{1j2}$$

$$E(x_{1.2}^2) = J\sigma_b^2 + J\sigma_{tb}^2 + J^2\sigma_{t'}^2 + J^2\sigma_{t/t_2'}^2 + J\sigma^2$$

Por analogia:

$$E(x_{2.2}^2) = J\sigma_b^2 + J\sigma_{tb}^2 + J^2\sigma_{t'}^2 + J^2\sigma_{t/t_2'}^2 + J\sigma^2$$

$$E(x_{3.2}^2) = J\sigma_b^2 + J\sigma_{tb}^2 + J^2\sigma_{t'}^2 + J^2\sigma_{t/t_2'}^2 + J\sigma^2$$

....

Substituindo os valores em (4.2.3):

$$E(\text{SQT dentro } T_2') = (I-1)\sigma^2 + (I-1)\sigma_{tb}^2 + J(I-1)\sigma_{t/t_2'}^2$$

Pelo mesmo processo chega-se a:

$$E(\text{SQT dentro } T'_3) = (I-1)\sigma^2 + (I-1)\sigma^2_{tb} + J(I-1)\sigma^2_{t/t'_3}$$

....

$$E(\text{SQT dentro } T'_k) = (I-1)\sigma^2 + (I-1)\sigma^2_{tb} + J(I-1)\sigma^2_{t/t'_k}$$

QUADRO V - Componentes de Variância para o Modelo Tipo I

Causa de Variação	G.L	E(S.Q)	E(Q.M)
Blocos	J-1	$(J-1)\sigma^2 + K(J-1)\sigma^2_{tb} + IK\sum_j b_j^2$	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + IK\sum_j b_j^2/(J-1)$
T dentro T'_1	I-1	$(I-1)\sigma^2 + (I-1)\sigma^2_{tb} + J\sum_i (t_i/t'_1)^2$	$\sigma^2 + \sigma^2_{tb} + J\sum_i (t_i/t'_1)^2/(I-1)$
T/T'_2	I-1	$(I-1)\sigma^2 + (I-1)\sigma^2_{tb} + J\sum_i (t_i/t'_2)^2$	$\sigma^2 + \sigma^2_{tb} + J\sum_i (t_i/t'_2)^2/(I-1)$
T/T'_3	I-1	$(I-1)\sigma^2 + (I-1)\sigma^2_{tb} + J\sum_i (t_i/t'_3)^2$	$\sigma^2 + \sigma^2_{tb} + J\sum_i (t_i/t'_3)^2/(I-1)$
⋮	⋮	⋮	⋮
T/T'_k	I-1	$(I-1)\sigma^2 + (I-1)\sigma^2_{tb} + J\sum_i (t_i/t'_k)^2$	$\sigma^2 + \sigma^2_{tb} + J\sum_i (t_i/t'_k)^2/(I-1)$
Resíduo(a)	(I-1)(J-1)	$(I-1)(J-1)\sigma^2 + K(I-1)(J-1)\sigma^2_{tb}$	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb}$
Tratamentos(T')	K-1	$(K-1)\sigma^2 + IJ\sum_k t'^2_k$	$\sigma^2 + IJ\sum_k t'^2_k/(K-1)$
Resíduo(b)	I(J-1)(K-1)	$I(J-1)(K-1)\sigma^2$	σ^2
Total	IJK-1		

mas:

$$\sigma^2 + \sigma^2_{tb} = \frac{1}{K} \left\{ \sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + (K-1)\sigma^2 \right\} , \quad \text{então:}$$

Causa de Variação	G.L	E(Q.M)
Blocos	J-1	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + IK\sum_j b_j^2/(J-1)$
T dentro T'_1	I-1	$1/K\left[\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + (K-1)\sigma^2\right] + J\sum_i (t_i/t'_1)^2/(I-1)$
T/T'_2	I-1	$1/K\left[\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + (K-1)\sigma^2\right] + J\sum_i (t_i/t'_2)^2/(I-1)$
T/T'_3	I-1	$1/K\left[\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + (K-1)\sigma^2\right] + J\sum_i (t_i/t'_3)^2/(I-1)$
....		
T/T'_k	I-1	$1/K\left[\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + (K-1)\sigma^2\right] + J\sum_i (t_i/t'_k)^2/(I-1)$
Resíduo(a)	(I-1)(J-1)	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb}$
Tratamentos(T')	K-1	$\sigma^2 + IJ\sum_k t'^2_k/(K-1)$
Resíduo(b)	I(J-1)(K-1)	σ^2
Total	IJK-1	

QUADRO VI - Componentes de Variância para o Modelo Tipo II

Causa de Variação	G.L	E(Q.M)
Blocos	J-1	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + IK\sigma^2_b$
T dentro T'_1	I-1	$1/K\left[\sigma^2+K\sigma^2_{tb}+(K-1)\sigma^2\right]+J\sigma^2_{t/t'_1}$
T/T'_2	I-1	$1/K\left[\sigma^2+K\sigma^2_{tb}+(K-1)\sigma^2\right]+J\sigma^2_{t/t'_2}$
T/T'_3	I-1	$1/K\left[\sigma^2+K\sigma^2_{tb}+(K-1)\sigma^2\right]+J\sigma^2_{t/t'_3}$
....		
T/T'_k	I-1	$1/K\left[\sigma^2+K\sigma^2_{tb}+(K-1)\sigma^2\right]+J\sigma^2_{t/t'_K}$
Resíduo(a)	(I-1)(J-1)	$\sigma^2 + K\sigma^2_{tb}$
Tratamentos(T')	K-1	$\sigma^2 + J\sigma^2_{tt'} + IJ\sigma^2_{t'}$
Resíduo(b)	I(J-1)(K-1)	σ^2
Total	IJK-1	

De acordo com os quadros III, IV, V e VII dos componentes de variância obtêm-se os seguintes valores de "F" para os Modelos Tipo I e II:

$$T' \text{ dentro } T_i = \frac{QMT'/T_i}{QMRes(b)} \quad \text{com } (K-1) \text{ e } I(J-1)(K-1) \text{ G.L}$$

onde $i = 1,2,3,\ldots,I$

$$T \text{ dentro } T'_k = \frac{QMT/T'_k}{\frac{1}{K}\left[QMRes(a) + (K-1)QMRes(b)\right]} \quad \text{com } (I-1) \text{ e } n_2$$

G.L onde $k = 1,2,3,\ldots,K$ e

$$n_2 = \frac{\left[QMRes(a) + (K-1)QMRes(b)\right]^2}{\frac{\left[QMRes(a)\right]^2}{(I-1)(J-1)} + \frac{\left[(K-1)QMRes(b)\right]^2}{I(J-1)(K-1)}}$$

5. COMPARAÇÃO DE MÉDIAS

Há cinco casos para comparações de médias, como:

a) Diferença entre duas médias dos tratamentos (T);

b) Diferença entre duas médias dos tratamentos (T');

c) Diferença entre duas médias de T' no mesmo nível de T;

d) Diferença entre duas médias de T no mesmo nível de T';

e) Diferença entre duas médias de T a diferentes níveis de T'.

Para os casos (a) e (b) as variâncias e suas estimativas para contrastes entre duas médias serão deduzidas a partir do modelo matemático apresentado em 3.1, ao passo que os outros três casos serão deduzidos a partir dos modelos matemáticos reestruturados, apresentados em 4.1.1 e 4.2.1.

a) Diferença entre duas médias dos tratamentos (T):

$$T_i = x_{i..} = JKt_i + K\sum_j b_j + K\sum_j tb_{ij} + J\sum_k t'_k + J\sum_k tt'_{ik} + \sum_{j,k} e_{ijk}$$

Como os contrastes são estabelecidos a priori, todos os efeitos passam a ser fixos, com exceção de tb_{ij} e

e_{ijk}, portanto, modelo tipo I.

Então:

$$T_i = JKt_i + K\sum_j tb_{ij} + \sum_{j,k} e_{ijk}$$

$$\frac{T_i}{JK} = \bar{T}_i = t_i + \frac{1}{J}\sum_j tb_{ij} + \frac{1}{JK}\sum_{j,k} e_{ijk}$$

Por analogia:

$$\bar{T}_{i'} = t_{i'} + \frac{1}{J}\sum_j tb_{i'j} + \frac{1}{JK}\sum_{j,k} e_{i'jk}$$

$$\hat{Y}_i = \bar{T}_i - \bar{T}_{i'}$$

$$\hat{Y}_i = t_i - t_{i'} + \frac{1}{J}\sum_j (tb_{ij}-tb_{i'j}) + \frac{1}{JK}\sum_{j,k}(e_{ijk}-e_{i'jk})$$

$$E(\hat{Y}_i) = t_i - t_{i'}$$

Por definição:

$$V(\hat{Y}_i) = E\left[\hat{Y}_i - E(\hat{Y}_i)\right]^2 \quad \text{substituindo, têm-se}$$

$$V(\hat{Y}_i) = E\left[\frac{1}{J}\sum_j (tb_{ij} - tb_{i'j}) + \frac{1}{JK}\sum_{j,k}(e_{ijk}-e_{i'jk})\right]^2$$

$$V(\hat{Y}_i) = \frac{1}{J^2}\, 2\, J\sigma^2_{tb} + \frac{1}{J^2K^2}\, 2\, JK\sigma^2$$

$$V(\hat{Y}_i) = \frac{2}{JK}\,(\sigma^2 + K\sigma^2_{tb})$$

$$\hat{V}(\hat{Y}_i) = \frac{2}{JK}\,\text{QMRes(a)}$$

b) Diferença entre duas médias dos tratamentos (T'):

$$T'_k = x_{..k} = J\sum_i t_i + I\sum_j b_j + \sum_{i,j} tb_{ij} + IJt'_k + J\sum_i tt'_{ik}$$
$$+ \sum_{i,j} e_{ijk}$$

ou de acordo com as condições anteriores:

$$T'_k = \sum_{i,j} tb_{ij} + IJt'_k + \sum_{i,j} e_{ijk}$$

$$\frac{T'_k}{IJ} = \bar{T}'_k = \frac{1}{IJ} \sum_{i,j} tb_{ij} + t'_k + \frac{1}{IJ} \sum_{i,j} e_{ijk}$$

$$\bar{T}'_{k'} = \frac{1}{IJ} \sum_{i,j} tb_{ij} + t'_{k'} + \frac{1}{IJ} \sum_{i,j} e_{ijk'}$$

$$\hat{Y}_k = \bar{T}'_k - \bar{T}'_{k'}$$

$$\hat{Y}_k = t'_k - t'_{k'} + \frac{1}{IJ} \sum_{i,j} (e_{ijk} - e_{ijk'})$$

$$E(\hat{Y}_k) = t'_k - t'_{k'}$$

$$V(\hat{Y}_k) = E\left[\frac{1}{IJ} \sum_{i,j} (e_{ijk} - e_{ijk'})\right]^2$$

$$V(\hat{Y}_k) = \frac{1}{I^2J^2}\, 2\, IJ\sigma^2 = \frac{2}{IJ} \sigma^2$$

$$\hat{V}(\hat{Y}_k) = \frac{2}{IJ} \text{ QMRes (b)}$$

c) Diferença entre duas médias de T' ao mesmo nível de T.

De acordo com o modelo matemático 4.1.1, tem-se:

$$T'_{k/i} = x_{i.k} = Jt_i + \sum_j b_j + {}_j\, tb_{ij} + Jt'_k/t_i + \sum_j e_{ijk}$$

$$\frac{T'_{k/i}}{J} = t_i + \frac{1}{J} \sum_j tb_{ij} + t'_k/t_i + \frac{1}{J} \sum_j e_{ijk}$$

e

$$\frac{T'_{k'/i}}{J} = t_i + \frac{1}{J} \sum_j tb_{ij} + t'_{k'}/t_i + \frac{1}{J} \sum_j e_{ijk'}$$

$$\hat{Y}_{k/i} = \frac{T'_{k/i}}{J} - \frac{T'_{k'/i}}{J}$$

$$\hat{Y}_{k/i} = t'_k/t_i - t'_{k'}/t_i + \frac{1}{J}\sum_j (e_{ijk} - e_{ijk'})$$

$$E(\hat{Y}_{k/i}) = t'_k/t_i - t'_{k'}/t_i$$

$$V(\hat{Y}_{k/i}) = E\left[\frac{1}{J}\sum_j (e_{ijk} - e_{ijk'})\right]^2$$

$$V(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{1}{J^2}\, 2\, J\sigma^2$$

$$V(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{J}\sigma^2$$

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{J}\ \text{QMRes (b)}$$

d) Diferença entre duas médias de T num mesmo nível de T'.

De acordo com o modelo matemático 4.2.1, tem-se:

$$T_{i/k} = x_{i.k} = \sum_j b_j + \sum_j tb_{ij} + Jt_i/t'_k + \sum_j e_{ijk}$$

$$\frac{T_{i/k}}{J} = \frac{1}{J}\sum_j tb_{ij} + t_i/t'_k + \frac{1}{J}\sum_j e_{ijk}$$

e

$$\frac{T_{i'/k}}{J} = \frac{1}{J}\sum_j tb_{i'j} + t_{i'}/t'_k + \frac{1}{J}\sum_j e_{i'jk}$$

$$\hat{Y}_{i/k} = \frac{T_{i/k}}{J} - \frac{T_{i'/k}}{J}$$

$$\hat{Y}_{i/k} = \frac{1}{J}\sum_j (tb_{ij} - tb_{i'j}) + t_i/t'_k - t_{i'}/t'_k + \frac{1}{J}\sum_j (e_{ijk} - e_{i'jk})$$

$$E(\hat{Y}_{i/k}) = t_i/t'_k - t_{i'}/t'_k$$

$$V(\hat{Y}_{i/k}) = E\left[\frac{1}{J}\sum_j (tb_{ij} - tb_{i'j}) + \frac{1}{J}\sum_j (e_{ijk} - e_{i'jk})\right]^2$$

$$V(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{1}{J^2}\, 2\, J\sigma^2_{tb} + \frac{1}{J^2}\, 2\, J\sigma^2$$

$$V(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{J}\, (\sigma^2 + \sigma^2_{tb})$$

mas,

$$\sigma^2 + \sigma^2_{tb} = \frac{1}{K}\left[\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + (K-1)\sigma^2\right]$$

Então:

$$V(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{JK}\left[\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + (K-1)\sigma^2\right]$$

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{JK}\left[QMRes(a) + (K-1)QMRes(b)\right]$$

e) Diferença entre duas médias de T a diferentes níveis de T'.

Ainda de acordo com o modelo matemático 4.2.1., tem-se:

$$\frac{T_{i/k}}{J} = \frac{1}{J}\sum_j tb_{ij} + t_i/t'_k + \frac{1}{J}\sum_j e_{ijk}$$

e

$$\frac{T_{i'/k'}}{J} = \frac{1}{J}\sum_j tb_{i'j} + t_{i'}/t'_{k'} + \frac{1}{J}\sum_j e_{i'jk'}$$

$$\hat{Y}_{i'/k'} = \frac{T_{i/k}}{J} - \frac{T_{i'/k'}}{J}$$

$$\hat{Y}_{i'/k'} = \frac{1}{J}\sum_j (tb_{ij} - tb_{i'j}) + t_i/t'_k - t_{i'}/t'_{k'}$$

$$+ \frac{1}{J}\sum_j (e_{ijk} - e_{i'jk'})$$

$$E(\hat{Y}_{i'/k'}) = t_i/t'_k - t_{i'}/t'_{k'}$$

$$V(\hat{Y}_{i'/k'}) = E\left[\frac{1}{J}\sum_j (tb_{ij} - tb_{i'j}) + \frac{1}{J}\sum_j (e_{ijk} - e_{i'jk'})\right]^2$$

$$V(\hat{Y}_{i'/k'}) = \frac{1}{J^2}\, 2\, J\sigma^2_{tb} + \frac{1}{J^2}\, 2\, J\sigma^2$$

$$V(\hat{Y}_{i'/k'}) = \frac{2}{J}(\sigma^2 + \sigma^2_{tb})$$

ou

$$V(\hat{Y}_{i'/k'}) = \frac{2}{JK}\left[\sigma^2 + K\sigma^2_{tb} + (K-1)\,\sigma^2\right]$$

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i'/k'}) = \frac{2}{JK}\left[QMRes(a) + (K-1)QMRes(b)\right]$$

Para estas duas últimas fórmulas (d) e (e) não se sabem quantos graus de liberdade usar, pois os dois resíduos estão envolvidos. Uma boa aproximação é dada por SATTERTHWAITE (1946), como:

$$n' = \frac{\left[QMRes)a) + (K-1)QMRes(b)\right]^2}{\frac{\left[QMRes(a)\right]^2}{(I-1)(J-1)} + \frac{\left[(K-1)QMRes(b)\right]^2}{I(J-1)(K-1)}}$$

6. ESTUDO COMPARATIVO DO EXPERIMENTO EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS COM O ESQUEMA FATORIAL

Fatorial

Causa de Variação	G.L
Blocos (B)	J-1
Tratamentos(T)	I-1
Tratamentos(T')	K-1
Int.T x T'	(I-1)(K-1)
Resíduo	(IK-1)(J-1)
Total	IJK-1

Parcelas Subdivididas

Causa de Variação	G.L
Blocos (B)	J-1
Tratamentos(T)	I-1)
Resíduo(a)	(I-1)(J-1)
Tratamentos(T')	K-1
Int. T x T'	(I-1)(K-1)
Resíduo(b)	I(J-1)(K-1)
Total	IJK-1

Portanto, no fatorial:

$$SQRes\acute{\imath}duo = SQT \times B + SQT' \times B + SQT \times T' \times B$$

$$E(SQRes\acute{\imath}duo) = E(SQT \times B) + E(SQT' \times B + SQT \times T' \times B)$$

Sabe-se por 3.2 que:

$$E(SQT' \times B + SQT \times T' \times B) = E\left[SQRes(b)\right] = I(J-1)(K-1)\,\sigma^2$$

e que:

$$E(SQT \times B) = E\left[SQRes(a)\right] = (I-1)(J-1)\sigma^2 + K(I-1)(J-1)\sigma^2_{tb}$$

Então:

$$E(SQResíduo) = (I-1)(J-1)\sigma^2 + K(I-1)(J-1)\sigma^2_{tb} + I(J-1)(K-1)\sigma^2$$

$$E(SQResíduo) = (I-1)(J-1)(\sigma^2 + K\sigma^2_{tb}) + I(J-1)(K-1)\sigma^2$$

$$SQResíduo = (I-1)(J-1)\left[QMRes(a)\right] + I(J-1)(K-1)\left[QMRes(b)\right]$$

fazendo: $QMRes(a) = Va$ e $QMRes(b) = Vb$, tem-se

$$SQResíduo = (I-1)(J-1)Va + I(J-1)(K-1)Vb$$

$$QMResíduo = \frac{(I-1)(J-1)Va + I(J-1)(K-1)Vb}{(IK-1)(J-1)}$$

$$QMResíduo = \frac{(I-1)Va + I(K-1)Vb}{IK-1}$$

Nas parcelas subdivididas:

$$SQResíduo(b) = SQT' \times B + SQT \times T' \times B$$

$$E\left[SQResíduo(b)\right] = I(J-1)(K-1)\sigma^2$$

$$E\left[QMResíduo(b)\right] = \sigma^2$$

$$QMResíduo(b) = Vb$$

Para o caso de comparações de T', têm-se:

$$\hat{V}(t'_i - t'_{i'}) = \frac{2\ QMResíduo}{IJ}$$

mas,

$$QMResíduo = \frac{(I-1)Va + I(K-1)Vb}{IK-1}$$

Então:

$$\hat{V}(t_i - t'_{i'}) = \frac{2(I-1)Va + I(K-1)Vb}{IJ(IK-1)}$$ para o fatorial

e

$$\hat{V}(t'_i - t'_{i'}) = \frac{2\ QMResíduo(b)}{IJ}$$

mas,

$$QMResíduo(b) = Vb$$

Então:

$$\hat{V}(t'_i - t'_{i'}) = \frac{2\ Vb}{IJ}$$ para as parcelas subdivididas

A eficiência (E) do experimento em parcelas subdivididas relativo ao bloco casualizado, no esquema fatorial para comparações de T' é:

$$E = \frac{2\ \dfrac{(I-1)Va + I(K-1)Vb}{IJ(IK-1)}}{2\ \dfrac{Vb}{IJ}}$$

$$E = \frac{(I-1)Va + I(K-1)Vb}{(IK-1)Vb}$$ fazendo $$W = \frac{(I-1)Va + I(K-1)Vb}{IK-1}$$

tem-se

$$E = \frac{W}{V\,b} \quad \text{ou} \quad E\% = \frac{W}{Vb} \times 100$$

Para comparações de T, tem-se

$$\hat{V}(t_i - t_{i'}) = \frac{2\ QMResíduo}{JK}$$

ou

$$\hat{V}(t_i - t_{i'}) = \frac{2(I-1)Va + I(K-1)Vb}{JK(IK-1)}$$ para o fatorial

e

$$\hat{V}(t_i - t_{i'}) = \frac{2\ QMResíduo(a)}{JK}$$

ou

$$\hat{V}(t_i - t_{i'}) = \frac{2\ Va}{JK}$$ para as parcelas subdivididas.

A eficiência (E') para comparações de T é:

$$E' = \frac{2\,\dfrac{(I-1)Va + I(K-1)Vb}{JK(IK-1)}}{2\,\dfrac{Va}{JK}}$$

$$E' = \frac{(I-1)Va + I(K-1)Vb}{(IK-1)Va} \qquad \text{ou}$$

$$E' = \frac{W}{Va} \quad \text{ou} \quad E'\% = \frac{W}{Va} \times 100$$

Para comparações da interação T x T', têm-se

$$\hat{V}(tt'_{ij} - tt'_{i'j'}) = \frac{2\ \text{QMResíduo}}{J} \qquad \text{ou}$$

$$\hat{V}(tt'_{ij} - tt'_{i'j'}) = \frac{2(I-1)Va + I(K-1)Vb}{J(IK-1)} \text{ para o fatorial e}$$

$$\hat{V}(tt'_{ij} - tt'_{i'j'}) = \frac{2\ \text{QMResíduo(b)}}{J} \qquad \text{ou}$$

$$\hat{V}(tt'_{ij} - tt'_{i'j'}) = \frac{2\ Vb}{J} \text{ para as parcelas subdivididas.}$$

A eficiência (E'') para comparações de T x T' é:

$$E'' = \frac{2\,\dfrac{(I-1)Va + I(K-1)Vb}{J(IK-1)}}{2\,\dfrac{Vb}{J}} = \frac{(I-1)Va + I(K-1)Vb}{(IK-1)Vb} = \frac{W}{Vb}$$

ou

$$E''\% = \frac{W}{Vb} \times 100$$

7. EXEMPLO NUMÉRICO

Um experimento com 3 variedades de cana-de-açúcar(V) e 3 níveis de nitrogênio (N), conduzido em Havaí, em 1942, com 4 repetições, adaptado de ANDERSON e BANCROFT(1952). Os níveis de nitrogênio foram, respectivamente, 168,135; 235, 389 e 302,643 kg/ha.

Os rendimentos em toneladas por hectare estão na página seguinte.

Análise de Variância

Causa de Variação	G.L	S.Q	Q.M	F
Blocos	3	2.006.822,22	668.940,74	
Variedades(V)	2	3.193.738,89	1.596.869,44	2,54NS
Resíduo(a)	6	3.764.994,44	627.499,07	
Nitrogênio(N)	2	565.405,55	282.702,77	0,75NS
Int. V x N	4	5.597.877,78	1.399.469,44	3,72 *
Resíduo(b)	18	6.772.783,34	376.265,74	
Total	35	21.901.622,22		

Desdobrando segundo 4.1, tem-se:

Rendimentos em toneladas por hectare:

Blocos	V_1N_1	V_1N_2	V_1N_3	V_2N_1	V_2N_2	V_2N_3	V_3N_1	V_3N_2	V_3N_3	Totais de Blocos
1	7.050	6.730	7.990	5.860	6.430	6.440	6.580	6.410	5.630	59.120
2	6.750	7.590	7.280	6.520	4.830	6.730	6.830	6.480	5.470	58.480
3	6.390	7.220	6.480	7.020	7.400	7.800	7.270	7.090	6.620	63.290
4	6.420	6.050	8.630	5.180	6.360	7.200	6.760	5.830	5.440	57.870
Totais de Tratamentos	26.610	27.590	30.380	24.580	25.020	28.170	27.440	25.810	23.160	238.760

Causa de Variação	G.L	S.Q	Q.M	F
Blocos	3	2.006.822,22	668.940,74	
Variedades(V)	2	3.193.738,89	1.596.869,44	2,54 N.S
Resíduo(a)	6	3.764.994,44	627.499,07	
N/V_1	2	1.913.116,67	956.550,34	2,54 N.S
N/V_2	2	1.917.016,66	958.508,33	2,55 N.S
N/V_3	2	2.333.150,00	1.166.575,00	3,10 N.S
Resíduo(b)	18	6.772.783,34	376.265,74	
Total	35	21.901.622,22		

Desdobrando segundo 4.2, têm-se:

Causa de Variação	G.L	S.Q	Q.M.	F
Blocos	3	2.006.822,22	668.940,74	
V/N_1	2	1.082.450,00	541.225,00	1,18 N.S
V/N_2	2	866.450,00	433.225,00	0,94 N.S
V/N_3	2	6.842.716,67	3.421.358,34	7,44 **
Resíduo(a)	6	3.764.994,44	627.499,07	
Nitrogênio(N)	2	565.405,55	282.702,77	0,75 N.S
Resíduo(b)	18	6.772.783,34	376.265,74	
Total	35	21.901.622,22		

Teste de "F"

$$V/N_1 = \frac{QM\ V/N_1}{\frac{1}{K}\left[QMRes(a) + (K-1)QMRes(b)\right]} \quad \text{com } (I-1) \text{ e}$$

n_2G.L, onde:

$$n_2 = \frac{\left[QMRes(a) + (K-1)QMRes(b)\right]^2}{\frac{\left[QMRes(a)\right]^2}{(I-1)(J-1)} + \frac{\left[(K-1)QMRes(b)\right]^2}{I(J-1)(K-1)}}$$

$$\frac{1}{K}\left[QMRes(a) + (K-1)QMRes(b)\right] = \frac{1}{3}\left[627.499,07 + 2 \times 376.265,74\right] = 460.010,18$$

$$n_2 = \frac{\left[627.499,07 + 2 \times 376.265,74\right]^2}{\frac{(627.499,07)^2}{6} + \frac{(2 \times 376.265,74)^2}{18}} = 19,62 \simeq 20$$

O mesmo para V/N_2 e V/N_3.

Comparações de médias (Teste de Tukey a 5%):

a) Para N/V_i

$$\Delta = 1107,19$$

b) Para V/N_i

$$\Delta = 1214,05$$

A eficiência (E) para comparações de N e V x N do experimento em parcelas subdivididas, em relação ao fatorial, é:

$$E = \frac{W}{Vb}$$

$$W = \frac{2 \times 627.499,07 + 3 \times 2 \times 376.265,74}{3 \times 3 - 1} = 439.074,07$$

$$E = \frac{439.074,07}{376.265,74} = 1,167 \text{ ou } 116,7\%$$

Para comparação de V a eficiência (E') é:

$$E' = \frac{W}{Va}$$

$$E' = \frac{439.074,07}{627.499,07} = 0,70 \text{ ou } 70\%$$

Vê-se que a interação V x N é significativa e quando se desdobra em N/V_i com i = 1,2,3, não aparecem diferenças significativas ao nível de 5% de probabilidade. Já quando se desdobra em V/N_k com k = 1,2,3, aparecem diferenças significativas a 1% para V/N_3, não sendo significativas a 5% para V/N_1 e V/N_2.

Comparando níveis de nitrogênio dentro de cada variedade, Δ= 1107,19.

Com as médias:

V_1N_1	V_1N_2	V_1N_3	V_2N_1	V_2N_2	V_2N_3
6.652,5	6.897,5	7.595,0	6.145,0	6.255,0	7.042,5

V_3N_1	V_3N_2	V_3N_3
6.860,0	6.452,5	5.790,0

Comparando variedades dentro de cada nível de nitrogênio, Δ= 1214,05.

Com as médias:

N_1V_1	N_1V_2	N_1V_3	N_2V_1	N_2V_2	N_2V_3
6.652,5	6.145,0	6.860,0	6.897,5	6.255,0	6.452,5

N_3V_1	N_3V_2	N_3V_3
7.595,0	7.042,5	5.790,0

A eficiência para N e Interação V x N é de 116,7 % contra 70% para V. Portanto, os tratamentos das parcelas(V) têm menor precisão do que os tratamentos das subparcelas(N) e a interação V x N.

8. CONCLUSÕES

De acordo com a reestruturação do modelo matemático, tem-se:

1) O resíduo apropriado para o teste de "F" em T' dentro de um mesmo nível de T é o Resíduo(b), tanto para o modelo I como para o modelo II.

2) O resíduo apropriado para o teste de "F" em T dentro de um mesmo nível de T' é $\frac{1}{K}$ $\left[\text{QMResíduo(a)} + (K-1)\text{QMResíduo(b)}\right]$, tanto para o modelo I como para o modelo II, onde K é o número de tratamentos (T') das subparcelas.

3) Para se comparar a diferença entre duas médias de T' num mesmo nível de T, a estimativa da variância do contraste é $\frac{2}{J}$ QMResíduo(b), onde J é o número de repetições.

4) Para se comparar a diferença entre duas médias de T num mesmo nível de T' ou a diferentes níveis de T', a estimativa da variância do contraste é $\frac{2}{JK}$ $\left[\text{QMResíduo(a)} + (K-1)\text{QMResíduo(b)}\right]$.

5) A eficiência (E) do experimento em parcelas subdivididas em relação ao bloco casualizado, no esquema fatorial, para comparações de T' e de T x T', é:

$$E = \frac{W}{\text{QMResíduo(b)}} \quad \text{onde:}$$

$$W = \frac{(I-1)QMResíduo(a) + I(K-1)QMResíduo(b)}{IK-1} \quad e$$

I é o número de tratamentos (T) das parcelas.

A eficiência (E') para comparação de T é:

$$E' = \frac{W}{QMResíduo(c)}$$

6) Se um experimentador julgar que, na execução de seu experimento, um tipo de tratamento é mais importante que o outro, deve usar o experimento em parcelas subdivididas, colocando-os nas subparcelas, pelo fato de a eficiência desse ser maior do que no esquema fatorial para os tratamentos colocados nas subparcelas (T') e para a interação T x T'.

9. RESUMO

Propôs-se, no presente trabalho, através da reestruturação do modelo matemático:

$$x_{ijk} = m + t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k + tt'_{ik} + e_{ijk} \quad \text{em:}$$

$$x_{ijk} = m + t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k/t_1 + t'_k/t_2 + t'_k/t_3 + \ldots + t'_k/t_I + e_{ijk} \qquad (1)$$

e

$$x_{ijk} = m + b_j + tb_{ij} + t'_k + t_i/t'_1 + t_i/t'_2 + t_i/t'_3 + \ldots + t_i/t'_k + e_{ijk} \qquad (2)$$

onde:

x_{ijk} = valor observado da ik-ésima subparcela, no j-ésimo bloco;

m = média geral;

t_i = efeito do i-ésimo tratamento T;

b_j = efeito do j-ésimo bloco;

tb_{ij} = efeito associado a ij-ésima observação ou efeito residual das parcelas;

t'_k = efeito do k-ésimo tratamento T';

tt'_{ik} = efeito interado do i-ésimo tratamento T com o k -

ésimo tratamento T';

t'_k/t_i = efeito do k-ésimo tratamento T' dentro do nível i do tratamento T com i = 1,2,3,...,I;

t_i/t'_k = efeito do i-ésimo tratamento T dentro do nível k do tratamento T' com k = 1,2,3,...,K.

Deduzir os novos componentes de variância para verificar qual o denominador apropriado para o teste de "F". Fundamentado no modelo matemático (1), prova-se que o denominador é o Resíduo (b), quando se desdobram os tratamentos das subparcelas (T') em cada nível dos tratamentos das parcelas (T).

Fundamentado no modelo matemático (2) prova-se que o denominador é $\frac{1}{K}$ $\left[\text{QMResíduo(a)} + (K-1)\text{QMResíduo(b)}\right]$ quando se desdobram os tratamentos das parcelas (T) em cada nível dos tratamentos das subparcelas (T'), sendo K nº de tratamentos das subparcelas.

Para as comparações entre duas médias de T' no mesmo nível de T, T no mesmo nível de T' e T a diferentes níveis de T' foram deduzidas as variâncias de contrastes entre duas médias, bem como suas estimativas, baseando-se nos modelos matemáticos (1) e (2), prova-se que:

$$\hat{V}\left(\frac{T'_{k/i}}{J} - \frac{T'_{k'/i}}{J}\right) = \frac{2}{J}\ \text{QMResíduo(b)}$$

$$\hat{V}\left(\frac{T_{i/k}}{J} - \frac{T_{i'/k}}{J}\right) = \frac{2}{JK}\left[\text{QMResíduo(a)} + (K-1)\text{QMResíduo(b)}\right]$$

$$= \hat{V}\left(\frac{T_{i/k}}{J} - \frac{T_{i'/k'}}{J}\right)$$

onde:

$\hat{V}$ = estimativa de variância;

$\frac{T'_{k/i}}{J} - \frac{T'_{k'/i}}{J}$ = diferença entre duas médias de T' ao mesmo nível de T;

$\frac{T_{i/k}}{J} - \frac{T_{i'/k}}{J}$ = diferença entre duas médias de T ao mesmo nível de T';

$\frac{T_{i/k}}{J} - \frac{T_{i'/k'}}{J}$ = diferença entre duas médias de T a diferentes níveis de T';

J = número de repetições.

Finalmente, propôs-se comparar a eficiência dos experimentos: parcelas subdivididas e bloco casualizado, no esquema fatorial. Esta eficiência foi calculada através da relação entre a variância de um contraste entre efeitos de tratamentos no esquema fatorial para a variância do mesmo contraste no experimento em parcelas subdivididas, concluindo-se que a eficiência para comparações de T' e T x T' é:

$$\frac{W}{\text{QMResíduo(b)}}$$

e para comparação de T é

$$\frac{W}{\text{QMResíduo(a)}}$$

onde,

$$W = \frac{(I-1)\text{QMResíduo(a)} + I(K-1)\text{QMResíduo(b)}}{IK}$$

sendo I o número de tratamentos das parcelas.

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ANDERSON, R.L. e BANCROFT, T.A. 1952. Statistical Theory in Research. McGraw-Hill. Bock Company. Nova Iorque.

2. CALZADA BENZA, J. 1946. Métodos Estadisticos para la Investigacion, 2ª edição, Lima, Peru, S.A.

3. COCHRAN, W.C. e COX, G.M. 1965. Diseños Experimentales (traduação). Editorial F. Trillas, S.A., México, D.F.

4. CRUMP, S. Lee. 1946. The Estimation of Variance Components in the Analysis of Variance. Biometrics 2:7-11.

5. FEDERER, W.T. 1955. Experimental Design, The Macmillan Company. Nova Iorque.

6. KEMPTHORNE, O. 1950. The Design and Analysis of Experiments. John Wiley and Sons. Nova Iorque.

7. PIMENTEL GOMES, F. 1966. Componentes de Variância. Apostila mimeografada. Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz". USP, Piracicaba.

8. PIMENTEL GOMES, F. 1973. Curso de Estatística Experimental. 5ª edição. Livraria Nobel S.A. São Paulo.

9. SATTERTHWAITE, F.E. 1946. An Aproximate Distribution of Estimates of Variance Components. Biometrics 2 : 110-114.

10. STEEL, R.G.D. e TORRIE, J.H. 1960. Principles and Procedures of Statistics. McGraw-Hill Book Company, Nova Iorque.