APLICAÇÃO DO MÉTODO MODIFICADO DE GAUSS-NEWTON PARA ESTIMAR OS PARÂMETROS DA EQUAÇÃO DE MITSCHERLICH

FRANCISCO IVALDO OLIVEIRA MELO
Engenheiro-Agrônomo

Orientador: Prof. Dr. Roberto Simionato Moraes

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Experimentação e Estatística.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Julho, 1 9 7 6

Quando me perguntarem o que aprendi — sei que o farão — não terei dúvidas em responder: tomei conhecimento da minha total ignorância.

O autor

A meus pais,
pela educação
A meus irmãos,
pelo incentivo
A meus sobrinhos
pelo carinho

DEDICO

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Roberto Simionato Moraes, do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelo apoio, estímulo e orientação nos trabalhos.

Aos Professores do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, especialmente aos Doutores Humberto de Campos e Vivaldo Francisco da Cruz, pela amizade, pelos ensinamentos e pelas valiosas sugestões.

Aos colegas, alunos de pós-graduação, pelo ambiente de dedicação e amizade criado e reinante em todos os momentos do decorrer do curso.

À Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA), por sua política de treinamento de pessoal, a qual ensejou esse curso e propiciou a realização deste trabalho.

Ao pessoal da Biblioteca da ESALQ, pela dedicação no atendimento e empenho na recuperação de muitas referências bibliográficas.

Aos funcionários da ESALQ, Maria Izalina Ferreira Alves e Octávio Frassetto, pelos serviços de datilografia e impressão, respectivamente.

Í N D I C E

Pág.

LISTA DAS TABELAS

TABELA		Pág.
15	Análise de Variância Para o Grupo 2.3	50
16	Parâmetros Estimados Para o Modelo Contendo Nitrogênio, Fósforo e Potássio (Grupos 1 e 2.3) e Maior Desvio Encontrado	51
17	Produções, em kg/ha, de Milho em Grão, Referentes aos 50 Ensaios de Adubação NPK, Instalados na Região de Ribeirão Preto	69
18	Produções Médias, em kg/ha, de Milho em Grão, dos Grupos de Ensaios	74

1. INTRODUÇÃO

Em trabalhos de natureza técnico-científica, é comum a adaptação de certas funções às curvas de produção obtidas por meio da experimentação.

Pode-se de maneira geral, representar tais funções, simbolicamente por:

$$(1) \qquad y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n|F_1,F_2,\ldots,F_m|Z_1,Z_2,\ldots,Z_k)$$

onde y representa a quantidade produzida; $x_1,x_2,\ldots,x_n$ são as quantidades dos fatores variáveis; $F_1,F_2,\ldots,F_m$ são as quantidades dos fatores fixos; $Z_1,Z_2,\ldots,Z_k$ são os fatores que não podem ser controlados pelo experimentador.

No caso particular de produção agrícola, como função de nutrientes adicionados ao solo, é usual a adaptação dos dados de produção à equação de Mitscherlich, cuja expressão é:

$$(2) \qquad y_h = A\left[1-10^{-c(x_h+b)}\right]$$

na qual A é uma produção máxima teórica possível quando se aumenta indefinidamente a dose de um nutriente; c, o coeficiente de eficácia, é um parâmetro típico de cada nutriente ou adubo; b corresponderia à fertilidade natural do solo isolada em termos do nutriente em estudo, em forma assimilável pelas plantas; x_i é a quantidade de nutriente adicionado ao solo por unidade de área.

Na realidade, esta função é apenas uma simplificação de um fenômeno realmente muito mais complexo, pois, no caso de fatoriais 3^3 de adubação esta equação poderia ser dada, conforme sugeriu BAULE (1918), como:

$$(3) \qquad y_h = A\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\cdot\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\cdot\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]$$

tornando-se possível, deste modo, o estudo da ação conjunta dos fatores variáveis, mormente nos grupos de experimentos, onde a abundância de dados permite determinar com maior precisão o valor dos efeitos porventura existentes.

A estimação dos parâmetros, quando se considera a equação relativa a apenas um nutriente, é por demais conhecida. Entretanto, quando se toma um modelo mais comple xo, dois ou três nutrientes, a literatura sobre o assunto é escassa.

A estimação dos parâmetros em equações com dois ou três nutrientes, através do método de linearização, introduzido por HARTLEY (1961), constitui a finalidade precípua deste trabalho.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Vários autores têm se preocupado com o estudo de crescimento de organismos, ou procurando estabelecer uma função matemática que represente o fenômeno, ou desenvolvendo métodos para determinação dos parâmetros das funções já estabelecidas, ou ainda, ajustando dados aos modelos existentes. Neste capítulo, far-se-á uma análise dos trabalhos que tratam sobre a função de Mitscherlich, principalmente no que concerne à adubação.

MITSCHERLICH (1909) propôs a função

$$y_h = A \cdot \left[1 - 10^{-c(x_h + b)}\right] \qquad (4)$$

para representar a produção vegetal. BAULE (1918), observando que não é correto medir a ação de um nutriente pelo aumento absoluto de rendimento devido a esse nutriente, após algumas modificações ampliou a equação de Mitscherlich apresentando-a na seguinte expressão:

$$(5) \qquad y_h = A\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right].\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]$$

Segundo D'AULÍSIO (1973), "os trabalhos mais antigos relativos à Lei de Mitscherlich se desenvolveram sem um tratamento estatístico adequado, pois foram quase todos anteriores ao grande avanço da estatística no século XX. Assim sendo, trabalhos clássicos como os de MITSCHERLICH(1909), PFEIFFER et alii (1912), BAULE(1921), SPILLMAN e LANG(1924), RIPPEL e MEYER (1929) e MITSCHERLICH (1930) não discutem os problemas estatísticos relativos ao uso da Lei de Mitscherlich. O estudo estatístico desses problemas realmente só se iniciou de forma mais profunda com os trabalhos de PIMENTEL GOMES e MALAVOLTA (1949), STEVENS (1951) e PIMENTEL GOMES (1951 e 1953)".

PIMENTEL GOMES e MALAVOLTA (1949) estudando alguns aspectos da Lei de Mitscherlich, quando aplicada a ensaios de adubação, observaram que essa função, ao contrário das demais, não é arbitrária, pois é proveniente de considerações teóricas sobre o crescimento dos vegetais. Os autores apresentaram o cálculo dos três parâmetros da equação (4). Em primeiro lugar, pelo método dos quadrados mínimos e, em segundo lugar, pelo método dos momentos, sendo que este último leva a um sistema de equações mais simples. Em ambos os casos o processo conduz a um sistema de três equações, as quais são escritas na forma de um único determinante que tem como incógnita apenas a estimativa do parâmetro c. Essa equação é resolvida por métodos numéricos aproximados, sendo portanto um processo trabalhoso. Após obtido o valor de $\hat{c}$, as estimativas de A e b são imediatas.

Ressaltando o fato de que uma regressão polinomial é incoveniente para o caso em que a variável dependente se aproxima de um valor assintótico quando a variável independente tende a infinito, STEVENS (1951) sugeriu, para esse caso, a fórmula de regressão assintótica:

$$(6) \qquad y=\alpha+\beta\rho^{x} \quad , \qquad x=0,1,2,\ldots \; ; \; 0<\rho<1 \quad ,$$

onde α, β e ρ são parâmetros. As estimativas dos parâmetros α, β e ρ, denominadas a, b e c, respectivamente, foram obtidas pelo método dos quadrados mínimos.

Partindo de uma estimativa preliminar c_o de c, o autor obteve estimativas preliminares dos outros dois parâmetros e o valor de uma correção para c_o. Inicia-se, assim, um processo iterativo, até se obterem as estimativas eficientes a, b e c.

O autor apresentou as estimativas das variâncias das estimativas dos parâmetros. São fornecidas tabelas para o caso de 5, 6 e 7 valores equidistantes de x, para o cálculo da matriz de covariância.

PIMENTEL GOMES (1953) condensou em um único trabalho várias pesquisas sobre a evolução da equação de regressão de Mitscherlich relativas a experimentos com fertilizantes. A equação é dada nas formas (4) e (6).

O autor afirma que: a estimativa dos parâmetros, pelo método dos quadrados mínimos, conduz a uma equação que depende das produções médias e de polinômios em z, sendo z uma variável que depende apenas da estimativa do parâmetro c. Para o cálculo dessa estimativa, os polinômios foram tabelados para um número de níveis de x igual a quatro e cinco. Após obter o valor de $\hat{c}$, os valores de $\hat{A}$ e $\hat{b}$ são obtidos com facilidade. O método não exige que as doses x_i sejam equidistantes. O autor forneceu também as fórmulas para as estimativas das variâncias das estimativas de A, b e c, a partir das fórmulas fornecidas por STEVENS (1951) para o cálculo das estimativas das variâncias e covariâncias das estimativas dos parâmetros α, β e ρ .

PATTERSON (1956) propôs métodos simples para se obterem valores aproximados da estimativa do parâmetro ρ da equação de regressão (6), proposta por STEVENS (1951), para o caso de ordenadas igualmente espaçadas e para valores de n=4,5,6 ou 7 (n = número de níveis de x). As estimativas são dadas por relações de dois contrastes entre os valores de $\underline{y}$. Os contrastes foram escolhidos de modo que a eficiência das estimativas é alta em um intervalo de valores de $\underline{\rho}$ que exclui valores muito baixos ou muito altos. Com esses valores extremos de $\underline{\rho}$, a eficiência das estimativas decresce. O autor comenta que as estimativas propostas podem ser usadas, como estimativas preliminares de $\underline{\rho}$, no método de STEVENS (1951).

FINNEY (1958) discutiu os métodos para estimar $\underline{\rho}$ na equação

$$(7) \qquad E(y)=y=\alpha-\beta\rho^{x} \quad , \qquad 0<\rho<1 \quad ,$$

considerando as eficiências relativas e tendenciosidades dos estimadores de $\underline{\rho}$, no caso de dois modelos: o primeiro, em que os valores de y são independentes e de variância constante, e o segundo, em que os valores de y são correlacionados e a variância é crescente. Estudou os estimadores de PATTERSON (1956), de Taylor, de HARTLEY (1958) e estimadores quadráticos gerais. Todos os métodos são restritos ao caso em que os valores de $\underline{x}$ são igualmente espaçados.

Concluiu o autor que os processos de Patterson e de Taylor são de alta eficiência assintótica, para os dois modelos. O método de Taylor, no entanto, apresenta problemas devido a tendenciosidades elevadas, o que restringe sua aplicação. O processo de Hartley apresenta alta eficiên cia para n=4 (n = número de observações), mas, esta eficiência é muito baixa para valores altos de n. Há objeções quanto à tendenciosidade e, embora o método estime os três parâmetros ao mesmo tempo, os cálculos são mais complicados.

PATTERSON e LIPTON (1959) estudando a eficiência e a tendenciosidade da estimativa de ρ na equação (6), observaram que, se se dispõe de computadores, deve-se usar o método de Stevens, que assegura um bom ajustamento em todos os casos nos quais este é possível.

NOGUEIRA (1960) apresentou, de maneira mais clara, as várias etapas da dedução das fórmulas usadas por Stevens.

BALBA (1960) trabalhando com cebola, utilizou a equação proposta por BAULE (1918) para o caso de dois nutrientes (nitrogênio e fósforo). Primeiro, ajustou duas equações (com três parâmetros cada uma), para nitrogênio e fósforo, separadamente, utilizando o método dos quadrados mínimos. Após esses ajustes, ressaltou que o efeito conjunto poderia ser expresso pela equação

$$(8) \qquad y_{N,P}=A_{N,P}\left[1-10^{-c_N(b_N+x_N)}\right].\left[1-10^{-c_P(b_P+x_P)}\right] \quad ,$$

e que os parâmetros da equação (8), com exceção de $A_{N,P}$, eram os mesmos das equações anteriormente estimadas. O valor de $A_{N,P}$ foi calculado seguindo o método usado por IBACH e MANDUM (1953).

HARTLEY (1961) desenvolveu um novo processo, o método modificado de Gauss-Newton, para estimação de parâmetros em equações não lineares. Partindo de estimativas preliminares para cada um dos parâmetros, o autor obtem estimativas sucessivas para todos eles, estimativas estas que são comparadas com um grau de precisão pré-estabelecido. Inicia-se, assim, um processo iterativo, até se obterem as estimativas eficientes para todos os parâmetros que compõem o modelo.

CORNELL (1962) descreveu o ajustamento de uma combinação linear de exponenciais pelo método dos totais parciais. Forneceu as estimativas dos parâmetros e, para o modelo com um termo exponencial, estimativas das variâncias das estimativas dos parâmetros. No entanto, o método requer que as observações sejam igualmente espaçadas e que o mínimo de observações seja um múltiplo exato do número total de parâmetros.

MESTRE (1965) apresentou de forma resumida os métodos de ajuste da equação de Mitscherlich. O autor comenta os métodos de Pimentel Gomes, Stevens e Patterson, e apresenta exemplos de aplicação.

MISCHAN (1972) determinou a idade ideal de abate de gado bovino a partir de equações de crescimento. As funções utilizadas foram a de Mitscherlich, a de Gompertz e a Logística. As três funções foram ajustadas pelo método desenvolvido por STEVENS (1951), sendo que para cada função foram determinadas as estimativas dos parâmetros, seus desvios padrão e teste t, os respectivos intervalos de confiança e os coeficientes de determinação.

Segundo o autor, o ajustamento da função de Mitscherlich conduziu a um valor negativo para a estimativa do parâmetro b.

CORTARELLI (1973) utilizou o método modificado de Gauss-Newton,introduzido por HARTLEY (1961),para ajustar dados de crescimento ponderal de gado bovino da raça Nelore aos modelos: Logística, Brody, Gompertz e von Bertalanffy.

SILVEIRA JÚNIOR (1976) utilizando o método desenvolvido por HARTLEY (1961) estudou o comportamento de quatro modelos de crescimento, quando ajustados a dados ponderais de bovinos.

Aspectos particulares da estimativa dos parâmetros da Lei de Mitscherlich têm sido estudados por muitos outros autores. Nenhum deles, no entanto, apresenta avanços dignos de nota, pois,apenas utilizaram os métodos propostos por PIMENTEL GOMES e MALAVOLTA (1949), STEVENS (1951), PATTERSON(1956) e HARTLEY (1961) e nenhum deles, também, faz referências à equação proposta por BAULE (1918).

3. MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 - Material

Nos anos agrícolas de 1957/58, 1958/59, 1959/60 e 1960/61, foram instalados pelo Dr. Hermano Vaz de Arruda, Chefe da Seção de Estatística do Instituto Biológico de São Paulo, ensaios fatoriais 3^3 de adubação em milho, na região de Ribeirão Preto (SP), em terra roxa legítima.

As doses utilizadas foram 0,40 e 80 kg/ha para os três nutrientes.

O nitrogênio foi aplicado em cobertura apenas na forma de sulfato de amônio. O fósforo foi aplicado na forma de superfosfato simples e o potássio na forma de cloreto de potássio. Estes foram colocados nos sulcos, por ocasião do plantio.

Os ensaios tinham apenas uma repetição,com 27 parcelas dadas pelas combinações dos diferentes nutrientes nos diferentes níveis e, o delineamento utilizado foi o de blocos casualizados.

Foi feito o confundimento de dois graus de liberdade da interação tripla NxPxK, nos quatro modos designados por Yates, como W, X, Y e Z.

CAMPOS (1967) selecionou e estudou 50 desses ensaios e ajustou os dados a um modelo de regressão polinomial. Posteriormente,VIEIRA (1970) complementou este estudo trabalhando com os mesmos dados selecionados por aquele autor, ajustando a outros três modelos de regressão polinomial e a um modelo de regressão assintótica (Equação de Mitscherlich). Os ensaios escolhidos estavam assim distribuídos:

Ano agrícola 1957/58	......	13 ensaios
Ano agrícola 1958/59	......	14 ensaios
Ano agrícola 1959/60	......	11 ensaios
Ano agrícola 1960/61	......	12 ensaios

CAMPOS (1967) grupou esses ensaios em 5 casos, os quais foram também utilizados por VIEIRA (1970), ou seja :

Caso 1: Grupo dos 50 ensaios

Caso 2: Quatro grupos de ensaios anuais, assim distribuídos:

2.1 - Grupo dos ensaios de números 1 a 13 (ano agrícola de 1957/58)

2.2 - Grupo dos ensaios de números 14 a 27 (ano agrícola de 1958/59)

2.3 - Grupo dos ensaios de números 28 a 38 (ano agrícola de 1959/60)

2.4 - Grupo dos ensaios de números 39 a 50 (ano agrícola de 1960/61)

Caso 3: Cinco grupos de 10 ensaios, reunidos por sorteio, assim distribuídos:

3.1 - Grupo dos ensaios de números 5, 8, 9, 11, 17, 23, 30, 38, 40, 44

3.2 - Grupo dos ensaios de números 7, 10, 12, 19, 22, 25, 32, 43, 47, 50.

3.3 - Grupo dos ensaios de números 2, 4, 15, 18, 21, 29, 35, 36, 41, 45

3.4 - Grupo dos ensaios de números 1, 3, 27, 31, 33, 34, 37, 42, 46, 48

3.5 - Grupo dos ensaios de números 6, 13, 14, 16, 20, 24, 26, 28, 39, 49

Caso 4: Dez grupos de 5 ensaios, reunidos por sorteio, assim distribuídos:

4.1 - Grupo dos ensaios de números 2, 5, 24, 31, 37

4.2 - Grupo dos ensaios de números 1, 3, 4, 42, 46

4.3 - Grupo dos ensaios de números 12, 15, 19, 43, 44

4.4 - Grupo dos ensaios de números 7, 8, 13, 32, 39

4.5 - Grupo dos ensaios de números 10, 17, 18, 28, 38

4.6 - Grupo dos ensaios de números 9, 14, 15, 33, 40

4.7 - Grupo dos ensaios de números 20, 21, 23, 27, 34

4.8 - Grupo dos ensaios de números 11, 25, 47, 48, 50

4.9 - Grupo dos ensaios de números 6, 16, 22, 41, 45

4.10 - Grupo dos ensaios de números 26, 29, 30, 36, 49

Caso 5:Ensaios individuais de números 1 a 50.

Neste trabalho utiliza-se apenas os três primeiros casos, dez grupos, por serem constituídos de um maior número de ensaios, dando evidentemente uma melhor estimativa dos parâmetros (PIMENTEL GOMES, 1976) e por objetivar apenas testar a aplicabilidade do método.

Os dados obtidos para as produções referentes aos 50 ensaios individuais estão na tabela 17 e, os dados para as produções médias dos grupos de ensaios estudados estão na tabela 18 do Apêndice.

3.2 - Métodos

3.2.1 - Modelos selecionados para descrever a produção

Os modelos em estudo são utilizados para determinar a produção em função dos nutrientes adicionados aos solos.

3.2.1.1 - Modelo para um nutriente:

$$y_h = A\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]$$

onde, y_h = produção, em kg/ha;

x_1 = dose do nutriente 1, em kg/ha;

A = valor assintótico, em kg/ha;

c_1 = coeficiente de eficácia do nutriente 1, em ha/kg;

b_1 = teor do nutriente 1 contido no solo, em forma assimilável pelas plantas, em kg/ha.

3.2.1.2 - Modelo para dois nutrientes:

$$y_h = A\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]$$

onde, y_h = produção, em kg/ha;

x_1 = dose do nutriente 1, em kg/ha;

x_2 = dose do nutriente 2, em kg/ha;

A = valor assintótico, em kg/ha;

c_1 = coeficiente de eficácia do nutriente 1, em ha/kg;

c_2 = coeficiente de eficácia do nutriente 2, em ha/kg;

b_1 = teor do nutriente 1 contido no solo,em forma assimilável pelas plantas, em kg/ha;

b_2 = teor do nutriente 2 contido no solo,em forma assimilável pelas plantas, em kg/ha.

3.2.1.3 - Modelo para três nutrientes:

$$y_h = A\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right].\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]$$

onde, y_h = produção, em kg/ha;

x_1 = dose do nutriente 1, em kg/ha;

x_2 = dose do nutriente 2, em kg/ha;

x_3 = dose do nutriente 3, em kg/ha;

A = valor assintótico, em kg/ha;

c_1 = coeficiente de eficácia do nutriente 1, em ha/kg;

c_2 = coeficiente de eficácia do nutriente 2, em ha/kg;

c_3 = coeficiente de eficácia do nutriente 3, em ha/kg;

b_1 = teor do nutriente 1 contido no solo, em forma assimilável pelas plantas, em kg/ha;

b_2 = teor do nutriente 2 contido no solo, em forma assimilável pelas plantas, em kg/ha;

b_3 = teor do nutriente 3 contido no solo, em forma assimilável pelas plantas, em kg/ha.

3.2.2 - Método modificado de Gauss-Newton para o ajuste de funções de regressão não linear pelos quadrados mínimos

Os parâmetros, para cada modelo, foram estimados através do método modificado de Gauss-Newton, desenvolvido por HARTLEY (1961). Uma descrição sucinta deste método é apresentada por SILVEIRA JÚNIOR (1976).

Frequentemente, depara-se com o problema de determinar a relação entre y_h e os $x_{1h}, x_{2h}, x_{3h}, \ldots, x_{ph}$ $(h=1,2,\ldots,n)$, com a ajuda de dados empíricos.

Na maioria das vezes, a relação funcional é conhecida e escrita na forma de uma função de regressão.

$$f(x,\Theta)=f(x_1,x_2,\ldots,x_p;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m) \quad , \tag{9}$$

onde os parâmetros $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m$, devem ser estimados. Nestas circunstâncias é necessário determinar um conjunto de θ_i $(i=1,2,\ldots,m)$, para o qual a soma de quadrados

$$Q(\Theta)=\sum_{h=1}^{n}\left[y_h-f(x_h;\Theta)\right]^2 = \text{Mínima.} \tag{10}$$

Aqui, o símbolo x_h representa um vetor a $\underline{p}$ dimensões, com elementos $x_{1h}, x_{2h}, \ldots, x_{ph}$ e o símbolo Θ um vetor a $\underline{m}$ dimensões, com elementos $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m$. A função $f(x;\Theta)$ deve satisfazer às seguintes condições:

a) As primeiras e segundas derivadas de $f(x;\Theta)$, em relação aos θ_i, como

$$(11)\qquad \frac{\partial f}{\partial \theta_i}=f_i(x;\Theta) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i \partial \theta_j}=f_{ij}(x;\Theta) \quad ,$$

deverão ser funções contínuas de Θ para as p-uplas x_h (h=1, 2,3,...,n). Isto permite as seguintes definições:

$$(12)\qquad \frac{\partial Q}{\partial \theta_i}=Q_i(x;\Theta)=-2\sum_{h=1}^{n}\left[y_h-f(x_h;\Theta)\right]f_i(x_h;\Theta) \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_i \partial \theta_j}=Q_{ij}(x;\Theta)-2\sum_{h=1}^{n}\left[y_i-f(x_h;\Theta)\right]f_{ij}(x_j;\Theta)+2\sum_{h=1}^{n}f_i(x_h;\Theta)f_j(x_h;\Theta).$$

b) Para qualquer conjunto u_i (i=1,2,...,m), com $\sum_{i=1}^{m}u_i^2>0$. deve-se ter:

$$(13)\qquad \sum_{h=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m}u_i f_i(x_h;\Theta)\right]^2>0 \quad ,$$

para os vetores observados x_h e para todo Θ, num conjunto convexo limitado S do espaço dos parâmetros $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$.

c) Definindo-se

$$(14)\qquad Q=\lim_{\bar{S}}\inf Q(x;\Theta) \quad ,$$

onde $\bar{S}$ é o complemento de S.

Então, é possível achar um vetor $_o\Theta$ no interior de S, tal que:

(15) $\qquad Q(x;{}_o\Theta)<Q.$

As equações dos quadrados mínimos correspondem a:

(16) $\qquad Q_i(x;\Theta)=0 \qquad , \qquad i=1,2,\ldots,m \ .$

3.2.2.1 - Descrição do processo iterativo

Inicia-se com o vetor $_o\Theta$, dado na condição c do ítem 2. O primeiro passo é fazer correções aos elementos $_o\theta_i$ do vetor inicial $_o\theta$. Tais correções serão proporcionais às soluções D_i das equações de Gauss-Newton, correspondentes à (10).

As últimas equações são obtidas de uma maneira semelhante, substituindo-se no desenvolvimento de Taylor de $f(x;\Theta)$ para $\Theta={}_o\Theta$ em (10), como segue:

$$f(x_h;\Theta)=f(x_h;{}_o\Theta)+\sum_{j=1}^{m} f_j(x_h;{}_o\Theta)(\theta_j-{}_{oj}\theta) \quad ,$$

$$Q({}_o\Theta)=\sum_{h=1}^{n}\left[y_h-f(x_h;{}_o\Theta)-\sum_{j=1}^{m} f_j(x_h;{}_o\Theta)(\theta_j-{}_{oj}\theta)\right]^2 \quad ,$$

$$\frac{\partial Q({}_o\Theta)}{\partial\theta_j}=2\sum_{h=1}^{n}\left[y_h-f(x_h;{}_o\Theta)-\sum_{j=1}^{m} f_j(x_h;{}_o\Theta)(\theta_j-{}_{oj}\theta)\right]\cdot\left[-f_j(x_h;{}_o\Theta)\right]=0 \quad ,$$

$$2\sum_{h=1}^{n}\left\{-\left[y_h-f(x_h;{}_o\Theta)\right]f_j(x_h;{}_o\Theta)+\sum_{j=1}^{m}f_j(x_h;{}_o\Theta)f_j(x_h;{}_o\Theta)(\theta_j-{}_{oj}\theta)\right\}=0 \;,$$

$$-2\sum_{h=1}^{n}\left[y_h-f(x_h;{}_o\Theta)\right]f_j(x_h;{}_o\Theta)+2\sum_{j=1}^{m}\sum_{h=1}^{n}f_j(x_h;{}_o\Theta)f_j(x_h;{}_o\Theta)(\theta_j-{}_{oj}\theta)=0 \;.$$

Fazendo-se

$$\theta_j-{}_{oj}\theta=D_j$$

e lembrando-se que

$$-2\sum_{h=1}^{n}\left[y_h-f(x_h;{}_o\Theta)\right]f_j(x_h;{}_o\Theta)=Q_i(x_h;{}_o\Theta)$$

ter-se-á:

$$(17)\qquad 2\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{h=1}^{n}f_i(x_h;{}_o\Theta)f_j(x_h;{}_o\Theta)\right]D_j=-Q_i(x_h;{}_o\Theta) \;.$$

Pela condição b, do ítem 2.2, o determinante das equações lineares (17) tem característica m e, desse modo, podem ser sempre revolvidos dando os elementos D_i do vetor D, como solução.

Considerando agora a função

$$(18)\qquad Q(v)=Q(x;{}_o\Theta+vD) \qquad , \qquad \text{para } 0\leq v\leq 1$$

e seja v' o valor de v, para o qual Q(v) é um mínimo no intervalo $0\leq v\leq 1$.

Definindo-se o vetor

(19) $\quad {}_1\Theta = {}_0\Theta + v'D \quad ,$

com elementos ${}_1\theta_i = {}_0\theta_i + v'D_i$, tem-se

(20) $\quad Q(x;{}_1\Theta) \leq Q(x;{}_0\Theta) < Q \quad ,$

de modo que ${}_1\Theta$ permaneça no interior de S.

Agora, o cálculo é repetido para ${}_1\Theta$ e assim por diante. Desse modo, teremos como resultado uma sequência de vetores ${}_t\Theta$, $t=1,2,\ldots,$ todos pertencentes a um conjunto convexo limitado S, com

(21) $\quad \lim\limits_{t\to\infty} Q(x;{}_t\Theta) = Q^* \quad .$

Levando-se em consideração um ponto de acumulação desta sequência limitada e sua subsequência ${}_r\Theta$ com

(22) $\quad \lim\limits_{r\to\infty} {}_r\Theta = \Theta^* \quad .$

Desde que,

(23) $\quad \lim\limits_{r\to\infty} Q(x;{}_r\Theta) = Q(x;\Theta^*) \leq Q(x;{}_0\Theta) < Q \quad ,$

segue-se da condição c, do ítem 2.2, que Θ^* deve ser um ponto inferior de S. Demonstra-se que, nesse ponto limite, as primeiras derivadas parciais são nulas, isto é:

(24) $\quad Q_i(x;\Theta^*) = 0 \qquad , \qquad i=1,2,\ldots,m$

O processo desenvolvido permitirá uma solução $Q_i=0$ e esta solução é um mínimo absoluto de Q.

Se Θ^+ é um vetor para o qual isto ocorre, então $Q_i(x\;\Theta^+)=0$. Mas, o vetor Θ^* pode não ser igual a Θ^+. Supondo-se que Θ^+ é o único vetor que fornece um mínimo absoluto de Q, então a forma quadrática

$$(25) \qquad \sum_{i,j} Q_{ij}(x;\Theta^+)u_i u_j>0 \;,$$

é definida positiva e, continuará definida positiva numa região convexa de Θ^+, ou seja, S^+. Então, tem-se o seguinte: se em qualquer região convexa S^+ do espaço dos parâmetros Θ, no qual a forma quadrática

$$(26) \qquad \sum_{i,j} Q_{ij}(x;\Theta)u_i u_j>0 \;,$$

é definida positiva, então não pode haver mais do que um ponto estacionário de $Q(x;\Theta)$.

Suponha-se dois pontos θ' e θ'' em S^+. Seja a função

$$(27) \qquad F(v)=\sum_i \left\{ Q_i\left[x,\theta'v+\theta''(1-v)\right].\left[\theta_i'-\theta_i''\right]\right\}$$

então, $F(0)=F(1)=0$ e, portanto, pelo Teorema de Rolle $\frac{dF(v)}{dv}=0$ para algum valor de $\bar{v}$ no intervalo $0\leq\bar{v}\leq 1$, de modo que

$$(28) \qquad \sum_{i,j} \left\{ Q_{ij}\left[x,\theta'v+\theta''(1-\bar{v})\right].(\theta_j' -\theta_j'').(\theta_i'-\theta_i'')\right\}=0$$

o que contraria (26).

3.2.2.2 - Aplicação do método modificado de Gauss-Newton aos modelos em estudo

3.2.2.2.1 - Modelo para um nutriente

$$f=y_h=A\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].$$

Esta função contém três parâmetros, a saber: $\theta_1=A$, $\theta_2=c_1$, $\theta_3=b_1$ e uma variável independente x_{1h}.

De acordo com (11), tem-se:

$$f_1=\frac{\partial y}{\partial A}=\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]$$

$$f_2=\frac{\partial y}{\partial c_1}=A.L10.10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.(x_{1h}+b_1)$$

$$f_2=\frac{\partial y}{\partial b_1}=A.L10.c_1.10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.$$

A equação correspondente a (10) é:

$$Q(\Theta)=\sum_{h=1}^{n}\left\{y_h-A\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\right\}^2.$$

Logo, usando-se (17) tem-se:

$$\sum_{j=1}^{3}\left[\sum_{h=1}^{n}f_i(x_{1h};{}_o\Theta)f_j(x_{1h};{}_o\Theta)\right].D_j=\sum_{h=1}^{n}\left[y_h-f(x_{1h};{}_o\Theta)\right]f_i(x_{1h};{}_o\Theta),$$

com $i=1,2,3$ e $j=1,2,3$.

Fixando $\underline{i}$ e variando $\underline{j}$, tem-se:

$i=1$ e $j=1,2,3$

$$\sum_{h=1}^{n} f_1 f_1 D_1 + \sum_{h=1}^{n} f_1 f_2 D_2 + \sum_{h=1}^{n} f_1 f_3 D_3 = \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_1$$

$i=2$ e $j=1,2,3$

$$\sum_{h=1}^{n} f_2 f_1 D_1 + \sum_{h=1}^{n} f_2 f_2 D_2 + \sum_{h=1}^{n} f_2 f_3 D_3 = \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_2$$

$i=3$ e $j=1,2,3$

$$\sum_{h=1}^{n} f_3 f_1 D_1 + \sum_{h=1}^{n} f_3 f_2 D_2 + \sum_{h=1}^{n} f_3 f_3 D_3 = \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_3 \quad .$$

Colocando-se o sistema na forma matricial, obtem-se:

$$\begin{bmatrix} \sum_{h=1}^{n} f_1^2 & \sum_{h=1}^{n} f_1 f_2 & \sum_{h=1}^{n} f_1 f_3 \\ \sum_{h=1}^{n} f_1 f_2 & \sum_{h=1}^{n} f_2^2 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_3 \\ \sum_{h=1}^{n} f_1 f_3 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_3 & \sum_{h=1}^{n} f_3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_1 \\ \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_2 \\ \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_3 \end{bmatrix}$$

onde,

$$f_1^2 = \left[1 - 10^{-c_1 (x_{1h} + b_1)} \right]^2$$

$$f_1 f_2 = A.L10.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.(x_{1h}+b_1)$$

$$f_1 f_3 = c_1.A.L10\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}$$

$$f_2^2 = A^2.(L10)^2.10^{-2c_1(x_{1h}+b_1)}.(x_{1h}+b_1)^2$$

$$f_2 f_3 = A^2.c_1.(L10)^2.10^{-2c_1(x_{1h}+b_1)}.(x_{1h}+b_1)$$

$$f_3^2 = A^2.(L10)^2.c_1^2.10^{-2c_1(x_{1h}+b_1)}$$

$$(y_h-f)f_1 = \left\{y_h - A\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\right\}.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]$$

$$(y_h-f)f_2 = A.L10.\left\{y_h - A\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\right\}.\ 10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.(x_{1h}+b_1)$$

$$(y_h-f)f_3 = A.c_1.L10.\left\{y_h - A\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\right\}.10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}$$

3.2.2.2.2 - Modelo para dois nutrientes

$$f = y_h = A\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]$$

Esta função contém cinco parâmetros, quais sejam: $\theta_1=A$, $\theta_2=c_1$, $\theta_3=b_1$, $\theta_4=c_2$, $\theta_5=b_2$ e duas variáveis independentes, x_1 e x_2 .

De acordo com (11), tem-se:

$$f_1 = \frac{\partial y}{\partial A} = \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]$$

$$f_2 = \frac{\partial y}{\partial c_1} = A.L10.10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.(x_{1h}+b_1).\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]$$

$$f_3 = \frac{\partial y}{\partial b_1} = A.c_1.L10.10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]$$

$$f_4 = \frac{\partial y}{\partial c_2} = A.L10.10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}.(x_{2h}+b_2).\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]$$

$$f_5 = \frac{\partial y}{\partial b_2} = A.c_2.L10.10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \quad .$$

A equação correspondente a (10) é:

$$Q(\Theta) = \sum_{h=1}^{n}\left\{y_h - A\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\right\}^2$$

Logo, usando-se (17), tem-se:

$$\sum_{j=1}^{5}\left[\sum_{h=1}^{n} f_i(x_{1h},x_{2h};{}_o\Theta)f_j(x_{1h},x_{2h};{}_o\Theta)\right]D_j =$$

$$= \sum_{h=1}^{n}\left[y_h - f(x_{1h},x_{2h};{}_o\Theta)\right] f_i(x_{1h},x_{2h};{}_o\Theta) \quad ,$$

com $i=1,2,3,4,5$ e $j=1,2,3,4,5$.

Fixando $\underline{i}$ e variando $\underline{j}$, tem-se:

$i=1$ e $j=1,2,3,4,5$

$$\sum_{h=1}^{n} f_1 f_1 D_1 + \sum_{h=1}^{n} f_1 f_2 D_2 + \sum_{h=1}^{n} f_1 f\ D + \sum_{h=1}^{n} f_1 f_4 D_4 + \sum_{h=1}^{n} f_1 f_5 D_5 = \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_1$$

$i=2$ e $j=1,2,3,4,5$

$$\sum_{h=1}^{n} f_2 f_1 D_1 + \sum_{h=1}^{n} f_2 f_2 D_2 + \sum_{h=1}^{n} f_2 f_3 D_3 + \sum_{h=1}^{n} f_2 f_4 D_4 + \sum_{h=1}^{n} f_2 f_5 D_5 = \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_2$$

$i=3$ e $j=1,2,3,4,5$

$$\sum_{h=1}^{n} f_3 f_1 D_1 + \sum_{h=1}^{n} f_3 f_2 D_2 + \sum_{h=1}^{n} f_3 f_3 D_3 + \sum_{h=1}^{n} f_3 f_4 D_4 + \sum_{h=1}^{n} f_3 f_5 D_5 = \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_3$$

$i=4$ e $j=1,2,3,4,5$

$$\sum_{h=1}^{n} f_4 f_1 D_1 + \sum_{h=1}^{n} f_4 f_2 D_2 + \sum_{h=1}^{n} f_4 f_3 D_3 + \sum_{h=1}^{n} f_4 f_4 D_4 + \sum_{h=1}^{n} f_4 f_5 D_5 + \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_4$$

$i=5$ e $j=1,2,3,4,5$

$$\sum_{h=1}^{n} f_5 f_1 D_1 + \sum_{h=1}^{n} f_5 f_2 D_2 + \sum_{h=1}^{n} f_5 f_3 D_3 + \sum_{h=1}^{n} f_5 f_4 D_4 + \sum_{h=1}^{n} f_5 f_5 D_5 + \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_5$$

Colocando-se o sistema na forma matricial, obtem-se:

$$\begin{bmatrix} \sum_{h=1}^{n} f_1^2 & \sum_{h=1}^{n} f_1 f_2 & \sum_{h=1}^{n} f_1 f_3 & \sum_{h=1}^{n} f_1 f_4 & \sum_{h=1}^{n} f_1 f_5 \\ \sum_{h=1}^{n} f_1 f_2 & \sum_{h=1}^{n} f_2^2 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_3 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_4 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_5 \\ \sum_{h=1}^{n} f_1 f_3 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_3 & \sum_{h=1}^{n} f_3^2 & \sum_{h=1}^{n} f_3 f_4 & \sum_{h=1}^{n} f_3 f_5 \\ \sum_{h=1}^{n} f_1 f_4 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_4 & \sum_{h=1}^{n} f_3 f_4 & \sum_{h=1}^{n} f_4^2 & \sum_{h=1}^{n} f_4 f_5 \\ \sum_{h=1}^{n} f_1 f_5 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_5 & \sum_{h=1}^{n} f_3 f_5 & \sum_{h=1}^{n} f_4 f_5 & \sum_{h=1}^{n} f_5^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_1 \\ \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_2 \\ \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_3 \\ \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_4 \\ \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_5 \end{bmatrix}$$

onde,

$$f_1^2=\left\{\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\right\}^2$$

$$f_1f_2=A\,\mathrm{L10}.\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]^2.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.(x_{1h}+b_1)$$

$$f_1f_3=Ac_1\,\mathrm{L10}\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]^2\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}$$

$$f_1f_4=A\,\mathrm{L10}\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]^2.\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right].10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}.(x_{2h}+b_2)$$

$$f_1f_5=Ac_2\,\mathrm{L10}\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]^2.\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right].10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}$$

$$f_2^2=A^2.(\mathrm{L10})^2.\left\{10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.(x_{1h}+b_1).\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\right\}^2$$

$$f_2f_3=A^2.(\mathrm{L10})^2.c_1.10^{-2c_1(x_{1h}+b_1)}.\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]^2(x_{1h}+b_1)$$

$$f_2f_4=A^2.(\mathrm{L10})^2.10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right](x_{1h}+b_1).(x_{2h}+b_2)$$

$$f_2f_5=A^2.(\mathrm{L10})^2.c_2.10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right](x_{1h}+b_1)$$

$$f_3^2=A^2.c_1^2.(\mathrm{L10})^2.\left\{10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\right\}^2$$

$$f_3f_4=A^2.(\mathrm{L10})^2.c_1.10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right](x_{2h}+b_2)$$

$$f_3f_5=A^2.(\mathrm{L10})^2.c_1.c_2.10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]$$

$$f_4^2=A^2.(\mathrm{L10})^2.\left\{10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}.(x_{2h}+b_2).\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\right\}^2$$

$$f_4f_5=A^2.(\mathrm{L10})^2.c_2.10^{-2c_2(x_{2h}+b_2)}.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]^2.(x_{2h}+b_2)$$

$$f_5^2=A^2.(\mathrm{L10})^2.c_2^2.\left\{10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\right\}^2$$

$$(y_h-f)f_1=\left\{y_h-A\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\right\}.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]$$

$$(y_h-f)f_2=A\,\mathrm{L10}.\left\{y_h-A.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\right\}.10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.(x_{1h}+b_1).\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]$$

$$(y_h-f)f_3=Ac_1\,\mathrm{L10}.\left\{y_h-A.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\right\}.10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]$$

$$(y_h-f)f_4=A\,\mathrm{L10}\left\{y_h-A.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\right\}.10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}.(x_{2h}+b_2).\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]$$

$$(y_h-f)f_5=Ac_2\,\mathrm{L10}.\left\{y_h-A.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\right\}.10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]$$

3.2.2.2.3 - Modelo para três nutrientes

$$f=y_h=A\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\cdot\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\cdot\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]$$

Esta função contém sete parâmetros, a saber: $\theta_1=A$, $\theta_2=c_1$, $\theta_3=b_1$, $\theta_4=c_2$, $\theta_5=b_2$, $\theta_6=c_3$, $\theta_7=b_3$ e três variáveis independentes, x_1, x_2 e x_3 .

De acordo com (11), tem-se:

$$f_1=\frac{\partial y}{\partial A}=\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\cdot\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\cdot\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]$$

$$f_2=\frac{\partial y}{\partial c_1}=AL10\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\cdot\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]\cdot 10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\cdot(x_{1h}+b_1)$$

$$f_3=\frac{\partial y}{\partial b_1}=Ac_1L10\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\cdot\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]\cdot 10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}$$

$$f_4=\frac{\partial y}{\partial c_2}=AL10\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\cdot\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]\cdot 10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\cdot(x_{2h}+b_2)$$

$$f_5=\frac{\partial y}{\partial b_2}=Ac_2L10\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\cdot\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]\cdot 10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}$$

$$f_6=\frac{\partial y}{\partial c_3}=AL10\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\cdot\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\cdot 10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\cdot(x_{3h}+b_3)$$

$$f_7=\frac{\partial y}{\partial b_3}=Ac_3L10\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\cdot\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\cdot 10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}$$

A equação correspondente a (10) é:

$$Q(\Theta)=\sum_{h=1}^{n}\left\{y_h-A\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]\right\}^2 .$$

Logo, usando-se (17), tem-se:

$$\sum_{j=1}^{7}\left[\sum_{h=1}^{n} f_i(x_{1h},x_{2h},x_{3h};{}_o\Theta)f_j(x_{1h},x_{2h},x_{3h};{}_o\Theta)\right]D_j =$$

$$=\sum_{h=1}^{n}\left[y_h-f(x_{1h},x_{2h},x_{3h};{}_o\Theta)\right]f_j(x_{1h},x_{2h},x_{3h};{}_o\Theta) \quad ,$$

com $i=1,2,\ldots,7$ e $j=1,2,\ldots,7$.

Fixando $\underline{i}$ e variando $\underline{j}$, tem-se:

$i=1$ e $j=1,2,\ldots,7$

$$\sum_{h=1}^{n} f_1f_1D_1+\sum_{h=1}^{n} f_1f_2D_2+\sum_{h=1}^{n} f_1f_3D_3+\sum_{h=1}^{n} f_1f_4D_4+\sum_{h=1}^{n} f_1f_5D_5+\sum_{h=1}^{n} f_1f_6D_6+\sum_{h=1}^{n} f_1f_7D_7=\sum_{h=1}^{n}(y_h-f)f_1$$

$i=2$ e $j=1,2,\ldots,7$

$$\sum_{h=1}^{n} f_2f_1D_1+\sum_{h=1}^{n} f_2f_2D_2+\sum_{h=1}^{n} f_2f_3D_3+\sum_{h=1}^{n} f_2f_4D_4+\sum_{h=1}^{n} f_2f_5D_5+\sum_{h=1}^{n} f_2f_6D_6+\sum_{h=1}^{n} f_2f_7D_7=\sum_{h=1}^{n}(y_h-f)f_2$$

$i=3$ e $j=1,2,\ldots,7$

$$\sum_{h=1}^{n} f_3f_1D_1+\sum_{h=1}^{n} f_3f_2D_2+\sum_{h=1}^{n} f_3f_3D_3+\sum_{h=1}^{n} f_3f_4D_4+\sum_{h=1}^{n} f_3f_5D_5+\sum_{h=1}^{n} f_3f_6D_6+\sum_{h=1}^{n} f_3f_7D_7=\sum_{h=1}^{n}(y_h-f)f_3$$

$i=4$ e $j=1,2,\ldots,7$

$$\sum_{h=1}^{n} f_4f_1D_1+\sum_{h=1}^{n} f_4f_2D_2+\sum_{h=1}^{n} f_4f_3D_3+\sum_{h=1}^{n} f_4f_4D_4+\sum_{h=1}^{n} f_4f_5D_5+\sum_{h=1}^{n} f_4f_6D_6+\sum_{h=1}^{n} f_4f_7D_7=\sum_{h=1}^{n}(y_h-f)f_4$$

$i=5$ e $j=1,2,\ldots,7$

$$\sum_{h=1}^{n} f_5 f_1 D_1 + \sum_{h=1}^{n} f_5 f_2 D_2 + \sum_{h=1}^{n} f_5 f_3 D_3 + \sum_{h=1}^{n} f_5 f_4 D_4 + \sum_{h=1}^{n} f_5 f_5 D_5 + \sum_{h=1}^{n} f_5 f_6 D_6 + \sum_{h=1}^{n} f_5 f_7 D_7 = \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_5$$

$i=6$ e $j=1,2,\ldots,7$

$$\sum_{h=1}^{n} f_6 f_1 D_1 + \sum_{h=1}^{n} f_6 f_2 D_2 + \sum_{h=1}^{n} f_6 f_3 D_3 + \sum_{h=1}^{n} f_6 f_4 D_4 + \sum_{h=1}^{n} f_6 f_5 D_5 + \sum_{h=1}^{n} f_6 f_6 D_6 + \sum_{h=1}^{n} f_6 f_7 D_7 = \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_6$$

$i=7$ e $j=1,2,\ldots,7$

$$\sum_{h=1}^{n} f_7 f_1 D_1 + \sum_{h=1}^{n} f_7 f_2 D_2 + \sum_{h=1}^{n} f_7 f_3 D_3 + \sum_{h=1}^{n} f_7 f_4 D_4 + \sum_{h=1}^{n} f_7 f_5 D_5 + \sum_{h=1}^{n} f_7 f_6 D_6 + \sum_{h=1}^{n} f_7 f_7 D_7 = \sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_7$$

Colocando-se o sistema na forma matricial, obtem-se:

$$\begin{bmatrix}
\sum_{h=1}^{n} f_1^2 & \sum_{h=1}^{n} f_1 f_2 & \sum_{h=1}^{n} f_1 f_3 & \sum_{h=1}^{n} f_1 f_4 & \sum_{h=1}^{n} f_1 f_5 & \sum_{h=1}^{n} f_1 f_6 & \sum_{h=1}^{n} f_1 f_7 \\
\sum_{h=1}^{n} f_1 f_2 & \sum_{h=1}^{n} f_2^2 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_3 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_4 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_5 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_6 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_7 \\
\sum_{h=1}^{n} f_1 f_3 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_3 & \sum_{h=1}^{n} f_3^2 & \sum_{h=1}^{n} f_3 f_4 & \sum_{h=1}^{n} f_3 f_5 & \sum_{h=1}^{n} f_3 f_6 & \sum_{h=1}^{n} f_3 f_7 \\
\sum_{h=1}^{n} f_1 f_4 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_4 & \sum_{h=1}^{n} f_3 f_4 & \sum_{h=1}^{n} f_4^2 & \sum_{h=1}^{n} f_4 f_5 & \sum_{h=1}^{n} f_4 f_6 & \sum_{h=1}^{n} f_4 f_7 \\
\sum_{h=1}^{n} f_1 f_5 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_5 & \sum_{h=1}^{n} f_3 f_5 & \sum_{h=1}^{n} f_4 f_5 & \sum_{h=1}^{n} f_5^2 & \sum_{h=1}^{n} f_5 f_6 & \sum_{h=1}^{n} f_5 f_7 \\
\sum_{h=1}^{n} f_1 f_6 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_6 & \sum_{h=1}^{n} f_3 f_6 & \sum_{h=1}^{n} f_4 f_6 & \sum_{h=1}^{n} f_5 f_6 & \sum_{h=1}^{n} f_6^2 & \sum_{h=1}^{n} f_6 f_7 \\
\sum_{h=1}^{n} f_1 f_7 & \sum_{h=1}^{n} f_2 f_7 & \sum_{h=1}^{n} f_3 f_7 & \sum_{h=1}^{n} f_4 f_7 & \sum_{h=1}^{n} f_5 f_7 & \sum_{h=1}^{n} f_6 f_7 & \sum_{h=1}^{n} f_7^2
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_1 \\
\sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_2 \\
\sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_3 \\
\sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_4 \\
\sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_5 \\
\sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_6 \\
\sum_{h=1}^{n} (y_h - f) f_7
\end{bmatrix}$$

onde,

$$f_1^2=\left\{\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right].\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]\right\}^2$$

$$f_1f_2=AL10.\left\{\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right].\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]\right\}^2.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.(x_{1h}+b_1)$$

$$f_1f_3=Ac_1L10.\left\{\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right].\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]\right\}^2.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}$$

$$f_1f_4=AL10.\left\{\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]\right\}^2.\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right].10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}.(x_{2h}+b_2)$$

$$f_1f_5=Ac_2L10.\left\{\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]\right\}^2.\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right].10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}$$

$$f_1f_6=AL10.\left\{\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\right\}^2.\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right].10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}.(x_{3h}+b_3)$$

$$f_1f_7=Ac_3L10.\left\{\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]\right\}^2.\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}$$

$$f_2^2=(AL10)^2\left\{\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right].\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.(x_{1h}+b_1)\right\}^2$$

$$f_2f_3=(AL10)^2.c_1.\left\{\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right].\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right\}^2.(x_{1h}+b_1)$$

$$f_2f_4=(AL10)^2.\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]^2.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}.(x_{1h}+b_1).(x_{2h}+b_2)$$

$$f_2f_5=(AL10)^2.c_2\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]^2.\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right].\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}.(x_{1h}+b_1)$$

$$f_2f_6=(AL10)^2.\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]^2.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}.(x_{1h}+b_1).(x_{3h}+b_3)$$

$$f_2f_7=(AL10)^2.c_3\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]^2.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}.(x_{1h}+b_1)$$

$$f_3^2=(AL10c_1)^2.\left\{\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right].\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right\}^2$$

$$f_3f_4=(AL10)^2c_1\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]^2.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}.(x_{2h}+b_2)$$

$$f_3f_5=(AL10)^2.c_1c_2\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]^2.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}$$

$$f_3f_6=(AL10)^2.c_1\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]^2.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}.(x_{3h}+b_3)$$

$$f_3f_7=(AL10)^2.c_1c_3\left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right]^2.\left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right].\left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right].10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}.10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}$$

$$f_4^2 = (AL10)^2 \cdot \left\{ \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \cdot 10^{-c_2(x_{2h}+b_2)} \cdot (x_{2h}+b_2) \right\}^3$$

$$f_4 f_5 = (AL10)^2 \cdot c_2 \left\{ \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \cdot 10^{-c_2(x_{2h}+b_2)} \right\}^2 \cdot (x_{2h}+b_2)$$

$$f_4 f_6 = (AL10)^2 \cdot \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]^2 \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \cdot 10^{-c_2(x_{2h}+b_2)} \cdot 10^{-c_3(x_{3h}+b_3)} \cdot (x_{2h}+b_2)(x_{3h}+b_3)$$

$$f_4 f_7 = (AL10)^2 \cdot c_3 \cdot \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]^2 \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \cdot 10^{-c_2(x_{2h}+b_2)} \cdot 10^{-c_3(x_{3h}+b_3)} \cdot (x_{2h}+b_2)$$

$$f_5^2 = (AL10c_2)^2 \cdot \left\{ \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \cdot 10^{-c_2(x_{2h}+b_2)} \right\}^2$$

$$f_5 f_6 = (AL10)^2 \cdot c_2 \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]^2 \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \cdot 10^{-c_2(x_{2h}+b_2)} \cdot 10^{-c_3(x_{3h}+b_3)} \cdot (x_{3h}+b_3)$$

$$f_6 f_7 = (AL10)^2 \cdot c_2 \cdot c_3 \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right]^2 \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \cdot 10^{-c_2(x_{2h}+b_2)} \cdot 10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}$$

$$f_6^2 = (AL10)^2 \cdot \left\{ \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot 10^{-c_3(x_{3h}+b_3)} \cdot (x_{3h}+b_3) \right)^2$$

$$f_6 f_7 = (AL10)^2 \cdot c_3 \left\{ \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot 10^{-c_3(x_{3h}+b_3)} \right\}^2 \cdot (x_{3h}+b_3)$$

$$f_7^2 = (AL10c_3)^2 \left\{ \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot 10^{-c_3(x_{3h}+b_3)} \right\}^2$$

$$(y_h - f) f_1 = \left\{ y_h - A \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \right\} \cdot \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right]$$

$$(y_h - f) f_2 = AL10 \cdot \left\{ y_h - A \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \right\} \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \cdot 10^{-c_1(x_{1h}+b_1)} \cdot (x_{1h}+b_1)$$

$$(y_h - f) f_3 = AL10c_1 \left\{ y_h - A \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \right\} \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \cdot 10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}$$

$$(y_h - f) f_4 = AL10 \cdot \left\{ y_h - A \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \right\} \cdot \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \cdot 10^{-c_2(x_{2h}+b_2)} \cdot (x_{2h}+b_2)$$

$$(y_h - f) f_5 = AL10c_2 \cdot \left\{ y_h - A \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \right\} \cdot \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \cdot 10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}$$

$$(y_h - f) f_6 = AL10 \cdot \left\{ y_h - A \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \right\} \cdot \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot 10^{-c_3(x_{3h}+b_3)} \cdot (x_{3h}+b_3)$$

$$(y_h - f) f_7 = AL10c_3 \cdot \left\{ y_h - A \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}\right] \right\} \cdot \left[1-10^{-c_1(x_{1h}+b_1)}\right] \cdot \left[1-10^{-c_2(x_{2h}+b_2)}\right] \cdot 10^{-c_3(x_{3h}+b_3)}$$

Uma vez obtidos os sistemas de equações para cada um dos modelos em estudo, o próximo passo é achar um valor mínimo de Q como função de $\underline{v}$.

Os sistemas de equações obtidos anteriormente podem ser simbolizados por:

$$ZD=Q \quad ,$$

que, pré-multiplicado por Z^{-1}, resulta:

$$Z^{-1}ZD=Z^{-1}W \qquad \therefore \qquad D=Z^{-1}W \quad ,$$

onde D é o vetor das soluções do sistema.

Uma vez obtido D, determina-se o ponto v_{min}. De acordo com (18):

$$Q(v)=Q(x_h;{}_o\Theta+vD) \qquad \text{para} \quad \underline{0}\leq\underline{v}\leq\underline{1}$$

$$Q(v)=\sum_{h=1}^{n}\left[y_h-f(x_h;{}_o\Theta+vD)\right]^2 \quad .$$

Para se achar o ponto v_{min} e, em consequência o mínimo de Q, utiliza-se um método aproximado. Calcula-se Q para v=0, v=1/2 e v=1; em seguida, o nível de $v(v_{min})$ para o qual a parábola que passa por Q(0), Q(1/2) e Q(1) tenha mínimo, isto é:

$$v_{min}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{Q(0)-Q(1)}{Q(1)-2Q(1/2)+Q(0)}$$

onde, $$Q(0)=\sum_{h=1}^{n}\left[y_h-f(x_h;{}_o\Theta)\right]^2$$

$$Q(1/2)=\sum_{h=1}^{n}\left[y_h-f(x_h;{}_o\Theta+(1/2)D)\right]^2$$

$$Q(1)=\sum_{h=1}^{n}\left[y_h-f(x_h;{}_o\Theta+D)\right]^2$$

De posse dos valores do vetor D do ponto $v(v_{min})$, de acordo com (19), tem-se:

$${}_1\theta_i={}_o\theta_i+v_{min}.D_i \qquad i=1,2,3,\ldots,m \quad .$$

Neste ponto já são conhecidos ${}_o\theta_1,{}_o\theta_2,\ldots,{}_o\theta_m$ e ${}_1\theta_1,{}_1\theta_2,\ldots,{}_1\theta_m$; então, aplica-se um teste com a finalidade de identificar a convergência. A convergência deverá ser simultânea para todos os parâmetros. O teste consiste em comparar os valores dos parâmetros obtidos em um ciclo, com os valores dos mesmos parâmetros obtidos no ciclo anterior, através da seguinte expressão:

$$\left[\left|{}_{(j+1)}\theta_i - {}_j\theta_i\right| \Big/ {}_j\theta_i\right] < \delta \qquad ,$$

onde δ é uma precisão pré-estabelecida.

Se para os m parâmetros o teste for menor que δ, então as estimativas dos parâmetros são as deste ciclo iterativo. Caso contrário, o processo iterativo continua até que o teste seja satisfeito.

Na passagem da iteração j=o para a iteração j=1, volta-se aos sistemas de equações, substituindo-se os índices zero por um e assim sucessivamente até a convergências.

3.2.3 - A análise de variância para o teste dos parâmetros

Uma vez estimados os parâmetros, estes são testados através de uma análise de variância que tem o seguinte esquema:

Causas da variação	G.L.
Tratamentos (T)	(t-1)
Regressão	p-1
Desvio da Regressão	t-p
Locais (L)	ℓ-1
Interação T x L	(t-1)(ℓ-1)

onde, t = número de tratamentos;

p = número de parâmetros;

ℓ = número de locais.

A análise de variância é feita da maneira usual. Cumpre ressaltar que, a soma de quadrados de desvios (SQ Desv.) é dada por:

$$SQ\ Desv. = R. \sum_{h=1}^{n} (\bar{y}_h - \hat{y}_h)^2 \quad ,$$

onde R é o número de parcelas de cada tratamento.

A soma de quadrados de regressão é obtida por subtração.

Para o cálculo do coeficiente de determinação, utilizou-se a fórmula:

$$R^2 = \frac{SQ\ Regressão}{SQ\ Tratamentos}$$

que segundo MORAES (1969) é a que deve ser utilizada no caso em que o resíduo não se confunde com o desvio da regressão.

3.2.4 - Programação da Metodologia

Com a finalidade de atingir os objetivos, a metodologia foi programada em linguagem FORTRAN e, o processamento foi realizado no Centro de Processamento de Dados do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, utilizando-se o Computador Eletrônico IBM 1130.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 - Valores iniciais das estimativas dos parâmetros

Um problema fundamental do ajustamento de funções não lineares é aquele que se refere aos valores iniciais das estimativas dos parâmetros. Tais valores, segundo DRAPER e SMITH (1966), deverão ser muito bem calculados ou estimados com base numa informação anterior.

Neste estudo, tomou-se como parâmetros iniciais, aqueles obtidos individualmente para cada nutriente, através das fórmulas apresentadas por PIMENTEL GOMES e MALAVOLTA (1949), ou seja:

$$\hat{A}=\frac{\bar{y}_1^2-\bar{y}_0 \cdot \bar{y}_2}{2\bar{y}_1-(\bar{y}_0+\bar{y}_2)}$$

$$\hat{c}=\frac{1}{q}\log\frac{\bar{y}_1-\bar{y}_0}{\bar{y}_2-\bar{y}_1}$$

$$\hat{b}=\frac{1}{\hat{c}}\log\frac{\hat{A}}{\hat{A}-\bar{y}_0}\ ,$$

onde, $\bar{y}_0$, $\bar{y}_1$ e $\bar{y}_2$ são, respectivamente, as produções médias das parcelas com dose 0, 1 e 2 do nutriente em questão e q a razão incremental.

Na Tabela 1 constam estes valores assim calculados. Cumpre observar que, as lacunas aí existentes se devem ao fato de os dados não seguirem a relação

$$2\bar{y}_1>\bar{y}_0+\bar{y}_2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\bar{y}_1-\bar{y}_0}{\bar{y}_2-\bar{y}_1}>0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\hat{A}}{\hat{A}-\bar{y}_0}>0\ , \tag{29}$$

o que torna impraticável a aplicação destas fórmulas.

Tabela 1 - Valores Iniciais das Estimativas dos Parâmetros.

Grupos	Nitrogênio			Fósforo			Potássio		
	$\hat{A}$	$\hat{c}$	$\hat{b}$	$\hat{A}$	$\hat{c}$	$\hat{b}$	$\hat{A}$	$\hat{c}$	$\hat{b}$
1	5.811,1	0,0077	67,18	5.163,5	0,0048	200,36	4.853,8	0,0400	37,02
2.1	4.702,0	0,0390	64,24	4.640,7	0,0039	169,43	-	-	-
2.2	5.347,9	0,0094	48,48	4.899,3	0,0039	207,14	-	-	-
2.3	6.643,5	0,0085	67,60	5.803,9	0,0089	150,98	6.103,8	0,0068	134,94
24	7.211,2	0,0042	107,61	5.650,8	0,0054	212,56	-	-	-
3.1	8.307,7	0,0016	191,02	-	-	-	-	-	-
3.2	5.625,2	0,0120	45,21	6.864,4	0,0014	340,93	-	-	-
3.3	5.852,5	0,0119	48,62	-	-	-	5.101,3	0,0218	46,73
3.4	14.501,7	0,0007	239,38	-	-	-	5.220,1	0,0261	46,70
3.5	5.330,0	0,0058	46,16	-	-	-	4.397,7	0,0260	58,90

4.2 - Ajustamento dos modelos de produção

O critério para a seleção do modelo a ser aplicado baseou-se na disponibilidade dos parâmetros iniciais apresentados na Tabela 1. Se a aplicação da equação de Mitscherlich, em sua forma mais simples, torna-se impraticável quando aquelas três relações em (29) não são satisfeitas, também é verdade que é inexequível a sua utilização em formas mais complexas (com dois ou mais nutrientes), quando aquelas mesmas relações não acontecem. A aplicação indiscriminada da equação proposta por BAULE (1918), sem levar em consideração aquelas limitações, quando se utiliza a técnica de linearização, conduz a resultados absurdos ou faz com que o processo não convirja.

Também se pôde observar que quanto mais os dados se ajustam ao modelo, ou seja: $\bar{y}_0 < \bar{y}_1 < \ldots < \bar{y}_t$, onde 0,1, 2,...,t são as doses dos tratamentos em ordem crescente, mais rápida é a convergência. A convergência também se dá quando existem ligeiras discrepâncias nesta relação de médias, contanto que, continue satisfazendo aquelas três relações iniciais, citadas em (29), do modelo mais simples.

Satisfeitas as três relações, a convergência sempre acontece. No entanto, ela é função de alguns pontos, tais como:

a) Parâmetros iniciais: se são bem estimados a convergência é mais rápida;

b) Ajuste dos dados aos modelos: é evidente que se a relação de médias, já referida, é satisfeita, mais rápido converge o processo.

c) Precisão pré-estabelecida (δ): quanto menor o grau de precisão exigido, mais rápida se torna a convergência.

Neste trabalho se tomou δ = 0,0000001 e a convergência média dos três modelos foi:

a) Modelo para um nutriente: 2 iterações;

b) Modelo para dois nutrientes:47 iterações;

c) Modelo para três nutrientes:33 iterações.

Faz-se, a seguir, uma discussão para cada modelo individualmente, com a apresentação dos resultados obtidos nos grupos estudados.

4.2.1 - Modelo para um nutriente

Conforme se pode constatar pela Tabela 1, apenas o grupo de dados referenciado como 3.1 está enquadrado neste modelo. Observando a análise de variância apresentada na Tabela 2, verifica-se que existe uma diferença altamente significativa entre tratamentos, como também entre locais.

Tabela 2 - Análise de Variância Para o Grupo 3.1.

Causas da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos (N)	2	61.120.722	30.560.361	24,74**
Locais (L)	9	590.948.666	65.660.963	53,16**
Interação N x L	18	22.233.388	1.235.188	

C.V. = 23,35%

Os parâmetros aqui estimados, como não poderiam deixar de ser, coincidem com os estimados pelas fórmulas apresentadas por PIMENTEL GOMES e MALAVOLTA (1949), que por sua vez geram estimativas coincidentes com os valores observados, conforme se nota na Tabela 3.

Tabela 3 - Médias dos Valores Observados, Valores Estimados e Desvios do Grupo 3.1.

Tratamentos	Valores		Desvios
	Observados	Estimados	
$\bar{y}_0$	4.257,33	4.257,33	zero
$\bar{y}_1$	4.823,00	4.823,00	zero
$\bar{y}_2$	5.309,67	5.309,67	zero

A equação de regressão para este caso é:

$$y_h = 8.307,70 \left[1 - 10^{-0,0016(x_h + 191,02)} \right]$$

4.2.2 - Modelo para dois nutrientes

Em sete grupos, tornou-se possível o emprego deste modelo, pois, os dados seguiam a condição (29). Calculou-se, assim, as estimativas dos parâmetros de nitrogênio e fósforo para os grupos 2.1, 2.2, 2.4 e 3.2; e de nitrogênio e potássio para os grupos 3.3, 3.4 e 3.5. Para estes casos, as análises de variância constam das Tabelas de 4 a 10, onde se observa que houve um efeito altamente significativo para regressão, o mesmo não acontecendo para os desvios de regressão. Isto evidencia que a equação representa bem o fenômeno, ou seja, há um bom ajustamento do modelo aos dados de produção dos grupos aludidos.

Tabela 4 - Análise de Variância Para o Grupo 2.1.

Causas da variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos (NP)	(8)	(76.317.308)		
Regressão	4	73.639.503	18.409.876	29,00**
Desvios de Regressão	4	2.677.805	669.451	1,05
Locais (L)	12	494.364.507	41.197.042	64,89**
Interação NP x L	96	60.950.415	634.90[illegible]	

C.V. = 19,80%

Tabela 5 - Análise de Variância Para o Grupo 2.2.

Causas da variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos (NP)	(8)	(169.514.155)		
Regressão	4	169.028.575	42.257.144	65,93**
Desvios de Regressão	4	485.580	121.395	0,19
Locais (L)	13	311.199.865	23.938.451	37,35**
Interação NP x L	104	66.657.448	640.937	

C.V. = 18,43%

Tabela 6 - Análise de Variância Para o Grupo 2.4.

Causas da variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos (NP)	(8)	(110.495.277)		
Regressão	4	106.694.072	26.673.518	27,92**
Desvios de Regressão	4	3.801.205	950.301	0,99
Locais (L)	11	290.289.652	26.389.968	27,62**
Interação NP x L	88	84.069.167	955.331	

C.V. = 18,17%

Tabela 7 - Análise de Variância Para o Grupo 3.2.

Causas da variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos (NP)	(8)	(114.234.627)		
Regressão	4	113.048.986	28.262.246	42,74**
Desvios de Regressão	4	1.185.641	296.410	0,45
Locais (L)	9	188.115.389	20.901.710	31,61**
Interação NP x L	72	47.613.271	661.295	

C.V. = 16,77%

Tabela 8 - Análise de Variância Para o Grupo 3.3.

Causas da variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos (NK)	(8)	(98.626.417)		
Regressão	4	94.732.225	23.683.056	21,32**
Desvios de Regressão	4	3.894.193	973.548	0,88
Locais (L)	9	339.542.081	37.726.898	33,96**
Interação NK x L	72	79.982.352	1.110.866	

C.V. = 21,37%

Tabela 9 - Análise de Variância Para o Grupo 3.4.

Causas da variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos (NK)	(8)	(69.952.754)		
Regressão	4	67.557.619	16.889.405	14,87**
Desvios de Regressão	4	2.395.135	598.784	0,53
Locais (L)	9	526.900.530	58.544.503	51,55**
Interação NK x L	72	81.764.294	1.135.615	

C.V. = 20,88%

Tabela 10 - Análise de Variância Para o Grupo 3.5.

Causas da variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos (NK)	(8)	(118.863.758)		
Regressão	4	118.308.608	29.577.152	56,51**
Desvios de Regressão	4	555.151	138.788	0,27
Locais (L)	9	341.170.341	37.907.816	72,43**
Interação NK x L	72	37.682.299	523.365	

C.V. = 16,63%

Os coeficientes de determinação, conforme podem ser observados na Tabela 11, apresentam valores altos comprovando, deste modo, que as maiores percentagens das variações de tratamentos são explicadas pelas regressões.

Tabela 11 - Estimativas dos Coeficientes de Determinação dos Grupos 2.1, 2.2, 2.4, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5.

Grupos	Coeficientes de Determinação
2.1	0,931
2.2	0,994
2.4	0,932
3.2	0,979
3.3	0,923
3.4	0,933
3.5	0,991

Para os modelos nos quais se estudou o efeito conjunto de nitrogênio e fósforo, as estimativas dos parâmetros são apresentadas na Tabela 12, enquanto na Tabela 13, constam as estimativas dos parâmetros para o estudo conjunto de nitrogênio e potássio. A última coluna, em ambas as tabelas, representa a percentagem do maior desvio encontrado entre os valores observados e estimados, tomando como base o valor observado. Este valor foi calculado através da relação:

$$(30) \qquad \% \text{ do maior desvio} = \left| \frac{\text{Maior desvio}}{\text{Valor observado do maior desvio}} \right| \times 100$$

Tabela 12 - Parâmetros Estimados Para o Modelo Contendo Nitrogênio e Fósforo (Grupos 2.1, 2.2, 2.4 e 3.2) e Maior Desvio Encontrado.

Grupos	Parâmetros					Maior Desvio %
	$\hat{A}$	$\hat{c}_1$	$\hat{b}_1$	$\hat{c}_2$	$\hat{b}_2$	
2.1	5.956,35	0,0091	63,51	0,0022	270,38	4,8
2.2	6.114,59	0,0093	48,68	0,0035	219,97	1,2
2.4	8.032,86	0,0041	108,28	0,0023	404,74	4,2
3.2	19.100,32	0,0120	45,24	0,0002	594,64	3,0

Tabela 13 - Parâmetros Estimados Para o Modelo Contendo Nitrogênio e Potássio (Grupos 3.3, 3.4 e 3.5) e Maior Desvio Encontrado.

Grupos	Parâmetros					Maior Desvio %
	$\hat{A}$	$\hat{c}_1$	$\hat{b}_1$	$\hat{c}_3$	$\hat{b}_3$	
3.3	5.820,93	0,0119	48,82	0,0242	45,29	6,1
3.4	17.873,14	0,0005	251,51	0,0260	46,30	3,3
3.5	5.406,12	0,0098	46,22	0,0174	85,38	2,3

Confrontando-se as estimativas dos parâmetros contidas nas Tabelas 12 e 13, com as estimativas iniciais apresentadas na Tabela 1, para os sete grupos aqui comentados, verifica-se que há uma leve discrepância. Esta discrepância é mais acentuada para as estimativas dos parâmetros relativas ao fósforo ($\hat{b}_2$ e $\hat{c}_2$) e potássio ($\hat{b}_3$ e $\hat{c}_3$). As estimativas concernentes a nitrogênio ($\hat{b}_1$ e $\hat{c}_1$) são praticamente as mesmas, isto talvez, pelo fato da maior reação do solo ter sido para este nutriente, enquanto que, quase não houve reação para fósforo e potássio.

4.2.3 - Modelo para três nutrientes

Este modelo foi utilizado apenas para os grupos designados como 1 e 2.3, isto porque os três nutrientes, isoladamente, satisfazem à condição (29).

A análise de variância do grupo 1 encontra-se na Tabela 14, enquanto que para o grupo 2.3 ela é apresentada na Tabela 15. Para ambos os casos, houve um efeito altamente significativo para regressão, o mesmo não acontecendo para os desvios de regressão. Isto comprova que a equação em apreço representa bem o fenômeno, ou em outras palavras, há um perfeito ajustamento do modelo aos dados de produção dos grupos abordados.

Tabela 14 - Análise de Variância Para o Grupo 1.

Causas da variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos (NPK)	(26)	(456.937.700)		
Regressão	6	447.173.733	74.528.956	119,00**
Desvios de Regressão	20	9.763.967	488.198	0,78
Locais (L)	49	2.072.093.350	42.287.619	67,52**
Interação NPK x L	1.274	797.868.790	626.271	

C.V. = 16,49%

Tabela 15 - Análise de Variância Para o Grupo 2.3.

Causas da variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos (NPK)	(26)	(128.428.342)		
Regressão	6	117.241.070	19.540.178	29,43**
Desvios de Regressão	20	11.187.272	559.364	0,84
Locais (L)	10	357.855.578	35.785.558	53,89**
Interação NPK x L	260	172.646.008	664.023	

C.V. = 14,40%

Os coeficientes de determinação apresentam valores altos: 0,958 e 0,834 para os grupos 1 e 2.3, respectivamente. Como se observa, a maior percentagem de variação de tratamentos é explicada pela regressão.

Na Tabela 16, aparecem as estimativas dos parâmetros dos grupos 1 e 2.3. A última coluna, contem a per centagem do maior desvio encontrado entre os valores observados e estimados, tomando como base o valor observado. Este valor foi calculado através da relação (30).

Tabela 16 - Parâmetros Estimados Para o Modelo Contendo Nitrogênio, Fósforo e Potássio (Grupos 1 e 2.3) e Maior Desvio Encontrado.

Grupo	Parâmetros							Maior Desvio
	$\hat{A}$	$\hat{c}_1$	$\hat{b}_1$	$\hat{c}_2$	$\hat{b}_2$	$\hat{c}_3$	$\hat{b}_3$	%
1	6.467,59	0,0077	67,35	0,0037	242,74	0,0753	19,92	4,2
2.3	7.227,19	0,0086	67,13	0,0123	113,71	0,0076	125,83	7,5

Comparando-se as estimativas dos parâmetros contidas na Tabela 16, com as estimativas iniciais apresentadas na Tabela 1, para os grupos 1 e 2.3, verifica-se que há uma leve discrepância. Esta discrepância é mais acentuada para as estimativas dos parâmetros relativas ao fósforo ($\hat{b}_2$ e $\hat{c}_2$) e potássio ($\hat{b}_3$ e $\hat{c}_3$). As estimativas concernentes ao nitrogênio ($\hat{b}_1$ e $\hat{c}_1$) são praticamente as mesmas, isto talvez, pelo fato da maior reação do solo ter sido para este nutriente, enquanto que quase não houve reação para fósforo e potássio.

5. CONCLUSÕES

Levando em conta as condições de realização deste trabalho e, à luz dos resultados obtidos, foram feitas as seguintes conclusões, julgadas mais importantes:

5.1 - O método de linearização, aplicado aos três modelos em estudo, deu bons resultados, pois, houve um perfeito ajustamento desses modelos aos dados de produção oriundos de doses crescentes dos nutrientes testados. Portanto, é viável a aplicação do método para estimar os parâmetros da equação de Mitscherlich proposta por Baule.

5.2 - Os valores iniciais das estimativas dos parâmetros, utilizados para os três modelos, foram bem determinados, pois, satisfizeram as condições impostas pelo método, ou seja:

5.2.1 - A obtenção do ponto v_{min} compreendido no intervalo 0;1 e, em consequência, uma soma de quadrados dos desvios de regressão mínima.

5.2.2 - A convergência do processo iterativo com um número não muito elevado de iterações. A convergência média foi de 2, 47 e 33 iterações para os modelos contendo um, dois e três nutrientes, respectivamente.

5.3 - O método só deve ser utilizado, em qualquer um dos três modelos, se os nutrientes, isoladamente, satisfazem a relação:

$$2\bar{y}_1 > \bar{y}_0 + \bar{y}_2 \quad , \quad \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{\bar{y}_2 - \bar{y}_1} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\hat{A}}{\hat{A} - \bar{y}_0} > 0 \; ,$$

onde, $\bar{y}_i$ = produção média correspondente ao nível i, conforme comprovaram PIMENTEL GOMES e MALAVOLTA (1949).

Se esta relação não é satisfeita, é inexequível a aplicação do método, pois, ele não convergirá, ou então, obter-se-ão estimativas absurdas para os parâmetros.

5.4 - É sabido que a equação de Mitscherlich exige que se tenha $\bar{y}_0 < \bar{y}_1 < \ldots < \bar{y}_t$ (0,1,...,t são as doses dos tratamentos em ordem crescente), no entanto, o método poderá ser utilizado mesmo quando ocorrerem pequenas discrepâncias nesta relação, desde que, satisfaçam as relações do ítem anterior.

É evidente, que a convergência será mais rápida se esta relação de médias for satisfeita.

5.5 - Nos grupos estudados, houve sempre um efeito altamente significativo para regressão, o mesmo não ocorrendo para os desvios de regressão e, os coeficientes de determinação foram todos superiores a 0,833.

Cumpre ressaltar que, embora a soma de quadrados de regressão tenha sido obtida por subtração, ela está corretamente estimada, pois coincide com a soma de quadrados dos efeitos isolados obtidas das análises individuais, conforme o caso.

6 RESUMO

Dentre as várias funções de produção, a equação de Mitscherlich é a de mais larga utilização no campo da adubação. Entretanto, ela vem sendo sempre utilizada em sua forma mais simples (para apenas um nutriente), devido a dificuldade em se obter estimativas dos parâmetros em equações não lineares.

Neste trabalho estudou-se a equação de Mitscherlich sob três aspectos:

- tomando-se somente uma variável independente;
- tomando-se duas variáveis independentes;
- tomando-se três variáveis independentes.

Estas duas últimas formas foram propostas por Baule, onde as variáveis independentes correspondem às doses dos nutri-

entes.

Para este fim, foram estudados 50 ensaios fatoriais 3^3 de adubação NPK em milho, instalados na região de Ribeirão Preto, Estado de São Paulo, em terra roxa legítima.

Os experimentos foram grupados de diversas formas, obtendo-se:

1 grupo de 50 ensaios

4 grupos anuais

13 ensaios do ano agrícola 1957/58

14 ensaios do ano agrícola 1958/59

11 ensaios do ano agrícola 1959/60

12 ensaios do ano agrícola 1960/61

5 grupos de 10 ensaios formados por sorteio,

num total de 10 casos.

Foi utilizado o Método Modificado de Gauss-Newton para ajustar funções de regressão não linear pelos quadrados mínimos. Em todos os casos, houve sempre um efeito altamente significativo para regressão, o mesmo não ocorrendo para os desvios de regressão. Portanto, foi viável a aplicação do método para estimar os parâmetros da equação de Mitscherlich.

As equações estimadas foram:

Para um nutriente

- Grupo 3.1:

$$y_N = 8307{,}70 . \left[1 - 10^{-0{,}0016(x_N + 191{,}02)}\right]$$

Para dois nutrientes:

- Grupo 2.1:

$$y_{N,P} = 5956{,}35 . \left[1 - 10^{-0{,}0091(x_N + 63{,}51)}\right] . \left[1 - 10^{-0{,}0822(x_P + 270{,}38)}\right]$$

- Grupo 2.2:

$$y_{N,P} = 6114{,}59 . \left[1 - 10^{-0{,}0093(x_N + 48{,}68)}\right] . \left[1 - 10^{-0{,}0035(x_P + 213{,}37)}\right]$$

- Grupo 2.4:

$$y_{N,P} = 8032{,}88 . \left[1 - 10^{-0{,}0041(x_N + 108{,}28)}\right] . \left[1 - 10^{-0{,}0023(x_P + 404{,}74)}\right]$$

- Grupo 3.2:

$$y_{N,P} = 19100{,}32 . \left[1 - 10^{-0{,}0120(x_N + 45{,}24)}\right] . \left[1 - 10^{-0{,}0002(x_P + 594{,}64)}\right]$$

- Grupo 3.3:

$$y_{N,K} = 5820{,}93 . \left[1 - 10^{-0{,}0119(x_N + 48{,}82)}\right] . \left[1 - 10^{-0{,}0242(x_K + 45{,}29)}\right]$$

- Grupo 3.4:

$$y_{N,K} = 17873{,}14 . \left[1 - 10^{-0{,}0005(x_N + 251{,}51)}\right] . \left[1 - 10^{-0{,}00263(x_K + 46{,}30)}\right]$$

- Grupo 3.5:

$$y_{N,K} = 5406{,}12 . \left[1 - 10^{-0{,}0098(x_N + 46{,}22)}\right] . \left[1 - 10^{-0{,}0174(x_K + 85{,}38)}\right]$$

Para três nutrientes:

- Grupo 1:

$$y_{N,P,K} = 6467,59 \cdot \left[1-10^{-0,0077(x_N+67,35)}\right] \cdot \left[1-10^{-0,0037(x_P+242,74)}\right] \cdot \left[1-10^{-0,0753(x_K+19,92)}\right]$$

- Grupo 2.3:

$$y_{N,P,K} = 7227,19 \cdot \left[1-10^{-0,0086(x_N+57,13)}\right] \cdot \left[1-10^{-0,0123(x_P+113,71)}\right] \cdot \left[1-10^{-0,0076(x_K+125,83)}\right]$$

SUMMARY

Among the various yield models, Mitscherlich's function is the one which can be found most useful in fertilizer experiments. However we can find application of this model only in its simplest form, due to the difficulty in the estimation of the parameters in non linear cases.

In this work we study mainly three aspects of Mitscherlich model, that is:

- one independent variable;
- two independent variables;
- three independent variables.

The last two forms were proposed by Baule, where the independent variables corresponded to nutrient levels.

For this purpose, 50 trials in corn (maize) were studied in 3x3x3 factorial with NPK as factors. The experiments were conducted in the Ribeirão Preto region, State of São Paulo, Brazil, on a well structured dusk-red latosol, locally known as "terra roxa".

The experiments were grouped in different ways, which follow:

1 group of 50 trials

4 annual groups

13 trials from 1957/58 period

14 trials from 1958/59 period

11 trials from 1959/60 period

12 trials from 1960/61 period

5 groups of 10 trials formed by random process,

summing up 10 cases.

The modified Gauss-Newton Method was used to fit non linear regression models by least squares theory. All cases showed high significance for fitness and low significance for lack of fit part of the treatment sum of squares. So we considered the method as a good estimator of the parameters of Mitscherlich function.

The funcions obtained were:

For one nutrient:

- Group 3.1:

$$y_N = 8307,70.\left[1-10^{-0,0016(x_N+191,02)}\right]$$

For two nutrients:

- Group 2.1:

$$y_{N,P} = 5956,35.\left[1-10^{-0,0091(x_N+63,51)}\right].\left[1-10^{-0,0022(x_P+270,38)}\right]$$

- Group 2.2:

$$y_{N,P} = 6114,59.\left[1-10^{-0,0033(x_N+48,68)}\right].\left[1-10^{-0,0035(x_P+219,97)}\right]$$

- Group 2.4:

$$y_{N,P} = 8032,86.\left[1-10^{-0,0041(x_N+108,29)}\right].\left[1-10^{-0,0023(x_P+401,74)}\right]$$

- Group 3.2:

$$y_{N,P} = 19100,32.\left[1-10^{-0,0120(x_N+45,24)}\right].\left[1-10^{-0,0002(x_P+594,64)}\right]$$

- Group 3.3:

$$y_{N,K} = 5820,93.\left[1-10^{-0,0119(x_N+48,82)}\right].\left[1-10^{-0,0242(x_K+45,28)}\right]$$

- Group 3.4:

$$y_{N,K} = 17673,14.\left[1-10^{-0,0005(x_N+251,51)}\right].\left[1-10^{-0,00260(x_K+46,30)}\right]$$

- Group 3.5:

$$y_{N,K}=5406{,}12.\left[1-10^{-0{,}0098(x_N+46{,}22)}\right].\left[1-10^{-0{,}0174(x_K+85{,}33)}\right]$$

<u>For three nutrients:</u>

- Group 1:

$$y_{N,P,K}=5467{,}59.\left[1-10^{-0{,}0077(x_N+67{,}35)}\right].\left[1-10^{-0{,}0037(x_P+242{,}74)}\right].\left[1-10^{-0{,}0753(x_K+19{,}92)}\right]$$

- Group 2.3:

$$y_{N,P,K}=7227{,}19.\left[1-10^{-0{,}0086(x_N+67{,}13)}\right].\left[1-10^{-0{,}0123(x_P+113{,}71)}\right].\left[1-10^{-0{,}0075(x_K+125{,}83)}\right]$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALBA, A.M., 1960. Phosphorus and Nitrogen Uptake as Expressed by a Mitscherlich-type Equation. 7th International Congress of Soil Science. Amsterdam, 3:154:160.

BAULE, B., 1918. Zu Mitscherlich Gesetz der Physiologischen Beziehungen. Landwirtschaftlich Jahrbücher. Berlin, 51:363-385.

CAMPOS, H., 1967. Aspectos da Aplicação das Superfícies de Resposta a Ensaios Fatoriais 3^3 de Adubação. Piracicaba, ESALQ/USP, 82 p. (Tese de Livre-Docência).

CORNELL, R.G., 1962. A Method for Fitting Linear Combinations of Exponentials. Biometrics. Washington, 18:104-113.

CORTARELLI, A., 1973. Estudo da Curva de Crescimento de Machos de Raça Nelore, Através de Quatro Modelos Estocásticos. Jaboticabal, FMVAJ/UEJMF, 179 p. (Tese de Doutoramento).

D'AULÍSIO, M.B.G., 1973. Influência dos Erros Experimentais Sobre as Recomendações de Adubação Obtidas Pela Lei de Mitscherlich. Botucatu, FCMBB/UEJMF, 71 p. (Tese de Doutoramento).

DAY, N.E., 1966. Fitting Curves to Longitudinal Data. Biometrics. Washington, 22:276-291.

DAY, R.H., 1963. Simple Methods of Estimating Certain Non-Linear Functions With Emphosis on Agricultural Data. Agric. Hand., 256:1-27.

DRAPER, N. e H. SMITH, 1966. Applied Regression Analysis. New York, John Wiley, 407 p.

FINNEY, D.J., 1958. The Efficiences of Alternative Estimators for an Asymptotic Regression Equation. Biometrika. London, 45:370-388.

HARTLEY, H.O., 1958. The Estimation of Non-Linear Parameters by "Internal Last Squares". Biometrika. London, 35:32-45.

HARTLEY, H.O., 1961. The Modified Gauss-Newton Method for the Fitting on Non-Linear Regression Functions by Least Squares. Technometrics, 3:269-280.

HIORNS, R.W., 1962. A Further Note on the Extension of Stevens' Tables for Assymptotic Regression. Biometrics. Washington, 18:123.

IBACH, D.B. e S.W. MANDUM, 1953. Determining Use of Fertilizer. F.M. 105 U.S.D.A. Apud 7th International Congress of Soil Science, 3:154-160, 1960.

LIPTON, S., 1961. On the Extension of Stevens' Tables for Assymptotic Regression. Biometrics. Washington, 17: 321.

MESTRE, A., 1965. Ajuste de la Ecuacion de Mitscherlich para la Interpretacion Economica de Experimentos con Fertilizantes. CENICAFE. Caldas, 16:77-91.

MISCHAN, M.M., 1972. Análise Econométrica de Crescimento de Gado Bovino. Botucatu, FCMBB/UEJMF, 141 p. (Tese de Doutoramento).

MITSCHERLICH, E.A., 1909. Das Gesetz des Minimums und das Gesetz des Abnehmenden Bodenertrages. Landwirtschaftliche Jahrbücher. Berlin, 38:537-552.

MORAES, R.S., 1969. Superfície Polinomial de Resposta num Ensaio de Adubação com Níveis Não-Equidistantes. Piracicaba, ESALQ/USP, 58 p. (Tese de Doutoramento).

NOGUEIRA, I.R., 1950. Sobre uma Propriedade da Equação Utilizada para a Interpolação da Lei de Mitscherlich. Anais E.S.A. "Luiz de Queiroz". Piracicaba, 7:105-108.

NOGUEIRA, I.R., 1960. Pesquisa sobre o Planejamento Experimental de Ensaios de Adubação. Piracicaba, ESALQ/USP, 44 p. (Tese de Livre-Docência).

PATTERSON, H.O., 1956. A Simple Method for Fitting an Asymptotic Regression Curve. Biometrics, Washington, 12:323-329.

PIMENTEL GOMES, F. e E. MALAVOLTA, 1949. Aspectos Matemáticos e Estatísticos da Lei de Mitscherlich. Anais E.S.A. "Luiz de Queiroz". Piracicaba, 6:198-229.

PIMENTEL GOMES, F., 1951. A Lei de Mitscherlich e a Análise da Variância em Experimentos de Adubação. Anais E.S.A. "Luiz de Queiroz", Piracicaba, 8:355-368.

PIMENTEL GOMES, F., 1953. The Use of Mitscherlich's Regression Law in the Analysis of Experiments With Fertilizers. Biometrics, Washington, 9:498-516.

PIMENTEL GOMES, F. e H. CAMPOS, 1966. Resultados de Ensaios de Adubação. In: INSTITUTO BRASILEIRO DE POTASSA. Cultura e Adubação do Milho. São Paulo.

PIMENTEL GOMES, F., 1976. Curso de Estatística Experimental. São Paulo, Livraria Nobel S.A., 430 p.

PISKUNOV, N., (s.d.). Differential and Integral Calculus. Moscou, Peace Publishers. 895 p.

SILVEIRA JÚNIOR, P., 1976. Estudo de Alguns Modelos Exponenciais de Crescimento de Bovinos da Raça Ibagé. Piracicaba, ESALQ/USP, 174 p. (Tese de Mestrado).

STEVENS, W.L., 1951. Asymptotic Regression. Biometrics. Washington, 7:247-267.

VIEIRA, S., 1970. Aspectos das Funções de Produção Ajustadas aos Ensaios Fatoriais 3^3 de Adubação. Piracicaba, ESALQ/USP, 165 p. (Tese de Doutoramento).

A P Ê N D I C E

Tabela 17 - Produções, em kg/ha, de Milho em Grão, Referentes aos 50 Ensaios de Adubação NPK em Milho, Instalados na região de Ribeirão Preto.

TRATAMENTOS	ENSAIOS 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
000	2125	2325	2750	3775	4125	3625	2875	2150	1750	3250
001	2200	1725	1625	6550	5200	3025	3225	2550	2250	4400
002	2250	1725	2050	5500	4100	2625	6000	3000	3250	4650
010	3175	1525	2975	6000	3750	3050	6900	4200	1700	4400
011	2425	1575	2500	6050	5450	3775	4125	3950	3050	5375
012	1825	1500	2750	5550	4300	3675	3875	3900	1375	4500
020	2275	1150	2625	4400	2775	3125	7325	4550	2750	4475
021	2625	1450	2800	4825	3625	3250	3725	4625	1000	5500
022	1775	2450	3000	7075	4625	3375	3350	3765	2250	4425
100	3750	1875	2675	6450	3375	3000	5750	3025	3100	5125
101	2425	2075	2000	5375	4250	3375	6600	3750	2050	4560
102	2275	2750	1950	5400	4800	3750	5000	2900	2875	3250
110	2275	2525	2225	6000	3875	3325	6050	3975	1875	4375
111	3025	2325	1875	5750	5900	3875	6250	3875	2550	4250
112	2600	3000	3250	5375	4750	2550	6100	4375	3600	4225
120	2750	2250	2925	5250	5000	3925	6825	5675	2150	6375
121	2500	1500	2575	7525	5375	3650	7425	3785	5500	4550
122	2950	2150	2200	5250	4150	4000	7250	4750	1800	5150
200	4350	2550	3550	5100	4275	3500	6900	4300	2550	5500
201	2275	2075	2600	6275	5500	4275	7375	4000	3000	5500
202	3500	3500	3425	5025	4500	2650	3025	3875	2125	4450
210	2625	2700	2675	5525	6225	3000	6450	3500	5000	4575
211	3500	2050	2975	5875	5025	3000	5000	3125	2750	4625
212	3550	2750	3300	5650	6325	4900	6450	4250	3000	4675
220	3625	2375	2950	5875	5050	4500	9000	5250	2500	4000
221	3650	2775	2850	6425	6000	3625	5650	4750	2500	4575
222	3125	3125	3250	6375	5375	4125	7250	4500	4250	4900

(continuação)

TRATAMENTOS	ENSAIOS 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
000	3325	2075	3100	1425	2500	1875	4750	4050	2700	2550
001	3900	2450	3910	2050	3150	3750	3725	4350	2775	2600
002	2750	1925	4460	3500	2875	1525	4175	5000	2750	2450
010	3625	2600	4335	3175	3300	1875	4600	4500	2375	3550
011	3950	2800	4525	2875	3275	1850	5050	4200	2650	2300
012	3525	3225	4220	2325	4375	2100	5850	4050	3050	2175
020	3800	2500	5630	2550	2550	3000	4625	4100	2875	1875
021	3700	2150	5010	2925	3950	2900	3850	4600	2500	4375
022	3700	2520	3675	3000	4500	3075	5350	4500	2325	2800
100	4375	3650	6280	2700	2925	3000	4925	5200	3050	4250
101	4500	3500	6175	4625	2500	3375	4725	5950	2700	3900
102	4450	3450	6810	4375	3950	2750	4850	5800	3375	3750
110	4250	5200	6500	4925	5200	2025	4550	5000	3475	3500
111	5000	3400	5620	4275	3875	2650	6300	5600	3275	4450
112	3625	3700	6110	3275	4250	3625	4575	5800	3250	4000
120	4850	4910	6920	5100	5000	2250	5750	4450	2800	3875
121	4250	5380	6780	4200	5300	3875	5625	6450	3150	4650
122	4625	4120	5175	5300	4350	2650	6000	6500	3500	5000
200	4300	4150	6225	4600	2900	2425	5350	4500	3450	3125
201	4825	3760	7150	4800	3700	3050	6375	4500	3250	4325
202	4325	5175	5360	5750	5600	2650	5300	5600	2900	4300
210	4800	4610	5370	5025	3050	3350	5125	4500	3650	3875
211	4400	4275	7630	4425	5550	3875	5750	5400	3425	3700
212	5275	4520	6565	5000	4925	3250	5500	5600	3400	4800
220	5950	3920	5970	5000	6400	3300	6125	5000	3375	5100
221	5000	4175	6500	4525	4750	3875	6300	5500	3450	4800
222	4150	6060	6975	5200	5000	5200	6625	5000	3675	4150

(continuação)

TRATAMENTOS	ENSAIOS									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
000	4250	3850	4050	2700	3885	2875	4500	3750	4250	4400
001	3785	2505	3700	2500	3600	3050	4050	3800	3900	5750
002	3920	4190	3530	2275	3700	2575	5000	3500	3550	8500
010	3370	3530	4140	3150	3650	2650	5300	3750	4250	6500
011	4420	4350	4400	3050	3460	2875	3600	4100	4250	6100
012	4405	3250	3340	2700	3875	3350	4150	3600	4650	5700
020	4880	4000	3200	2800	3780	2575	4350	3000	5150	6000
021	3875	4340	3730	2900	3800	2400	4450	3850	4100	4250
022	4600	4170	4220	3100	4500	3250	4050	3500	4200	7550
100	7150	5300	4860	3550	4640	3750	6000	5450	4450	5200
101	6195	5700	4820	3000	4250	3500	5450	4550	5250	5600
102	6530	5990	4050	3000	4250	2900	5150	4650	5500	5400
110	6010	7075	7190	4050	5000	3750	5500	4150	4600	5150
111	6100	4945	5810	3650	5200	3500	5150	4500	6000	7150
112	4990	5730	6025	3650	4650	3250	4800	5250	5450	7350
120	5170	5790	5820	3400	4675	3425	5350	5500	4800	6500
121	6710	6150	4220	3500	4670	4125	5400	5300	5950	6500
122	6690	5080	3690	3850	4750	3625	5200	5800	5450	7400
200	6680	5535	5800	3150	4680	4250	5550	5900	5400	6100
201	7585	5490	6380	3600	4950	4350	5900	4900	4900	5000
202	6025	5650	6740	3750	5075	4250	5700	6100	4450	7350
210	8140	7150	6960	3925	5190	4075	5000	5500	4550	6150
211	6600	6475	6330	3950	5340	3950	7050	4375	5400	9300
212	7460	5885	5300	3450	5250	3650	5500	5300	4750	8300
220	8200	6675	6070	4050	4510	4250	6400	5900	5250	6500
221	7170	5650	4915	4750	5950	3675	7400	5400	5500	6400
222	8300	647[illegible]	5210	4450	5400	4750	5600	5550	4800	6100

(continuação)

TRATAMENTOS	ENSAIOS 31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
000	3000	4700	4900	3500	4100	3500	5100	6550	3850	2300
001	2400	4500	5300	4100	6500	3000	6550	7100	3950	2900
002	2950	4300	7400	3900	4250	2650	7500	7150	5450	3300
010	2900	4400	5000	4500	5000	1900	4100	7000	4700	2200
011	2600	4750	5550	4400	4250	3700	6550	8000	5650	2150
012	3250	3700	5650	4500	5700	4350	8150	8150	4350	3550
020	3950	5000	6900	4050	4650	2500	4450	7800	5750	1850
021	3900	4900	6850	3850	3900	3550	7350	7500	4600	2600
022	3300	4750	5550	4700	4100	3900	8200	8000	4250	2950
100	4100	4650	7250	4250	6750	3700	6400	8000	6700	1350
101	3250	5700	6000	5150	5900	6450	7200	7700	6150	3450
102	4500	6000	6500	6050	6000	5050	7750	8800	6100	2850
110	5400	5500	7600	4500	4050	4650	4600	7100	5750	4000
111	4400	6000	5900	6300	6550	4000	8050	7400	6500	3750
112	3900	5600	6800	5400	5250	5150	7300	8400	5850	2150
120	4000	5850	6600	4400	5000	7000	5900	8000	6800	1700
121	4550	5750	6700	5650	5950	4750	7650	7900	5400	3350
122	4350	5350	6875	5500	6250	4550	8750	8550	6600	2800
200	4600	5100	7550	6500	6900	6700	6200	8400	7250	2300
201	4800	5000	7550	5450	5300	4600	7700	8350	7750	2200
202	6450	5050	7200	5800	5800	5800	8400	7750	7500	2750
210	6000	6950	6050	4950	6550	7150	5150	8000	7500	1950
211	5000	4500	8350	6000	7250	6000	7850	9000	8150	4400
212	5150	6050	7950	7100	6150	4950	8650	8350	7500	3350
220	5150	6900	5000	4450	5450	4750	6450	8100	6750	3250
221	5250	5900	8100	7000	6600	6150	7350	8600	7000	4400
222	5500	5000	7150	6950	6250	5000	8750	8100	7750	2200

(continuação)

TRATAMENTOS	ENSAIOS 41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
000	3150	5000	3850	3850	6350	5900	5400	4400	4150	4400
001	4150	5900	4500	3250	5500	5000	1800	5550	4050	4250
002	4800	3600	4000	3250	6650	3350	3750	5750	5250	4350
010	3500	6150	5000	3250	4600	6650	6400	5900	6350	4500
011	6350	5250	4750	4250	5600	7000	4950	5700	5400	5650
012	4750	4650	5250	3350	5150	5900	2550	4850	4650	4200
020	1850	6000	5250	3500	4250	3850	3550	5050	5500	5100
021	5100	6250	4750	2350	6350	6050	5250	4800	4800	4550
022	7000	6400	4750	1750	6850	4350	5000	6950	5850	5050
100	2650	4400	6100	6000	7400	6250	5600	5350	6200	4700
101	5600	6200	5750	5900	6000	5850	7000	7250	5750	4400
102	6050	5600	5150	4100	5900	4900	5750	6000	6450	5000
110	4850	4750	5000	4600	6000	5450	5800	5150	6350	4900
111	4150	5500	4750	5050	7350	4000	4750	6900	6150	4750
112	5750	5000	6150	4750	6350	5250	5750	7350	7000	5400
120	5100	6050	6150	5000	6100	8000	5850	7800	5300	5350
121	6600	4600	6150	3900	5750	6950	6500	6000	5900	5250
122	4600	4000	5150	4500	6600	5750	6800	6500	7750	5050
200	3350	5750	7000	5750	7500	4900	6100	7050	6300	5900
201	5850	5250	6250	6250	7950	6050	6150	6000	5900	4800
202	5000	5250	7250	5250	8250	7600	6400	7250	6950	4300
210	2800	4250	5600	5500	7500	7350	7200	5700	6200	5450
211	5550	6250	6500	5250	5650	7400	7350	7100	7650	4900
212	7300	5900	6650	6600	6300	6000	5850	6500	5150	5000
220	4200	5000	7300	6000	8650	6800	7200	6900	6850	5750
221	6000	5900	6750	6400	7400	6050	6250	7000	6750	6000
222	5500	4500	6700	5250	6900	5550	7000	6900	7250	6000

Tabela 18 - Produções Médias, em kg/ha, de Milho em Grão, dos Grupos de Ensaios.

TRATAMENTOS	GRUPOS 1	2.1	2.2	2.3	2.4	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
000	3671	2865	3283	4341	4383	3725	3698	3825	4118	2990
001	3846	3308	3256	4809	4233	4032	3400	4261	4268	3268
002	4018	3406	3390	5059	4458	4300	3962	4092	4375	3361
010	4118	3710	3512	4482	4933	4096	4376	3794	4665	3658
011	4297	3812	3454	4932	5225	4635	4286	4367	4558	3640
012	4076	3402	3500	5218	4433	4304	3748	4448	4568	3314
020	3990	3645	3368	4859	4292	4085	4386	3548	4350	3580
021	4128	3410	3614	4909	4788	4723	4152	4170	4892	3701
022	4366	3537	3818	5250	5096	4416	4084	4918	4828	3588
100	4733	4033	4378	5473	5225	4421	4856	4855	5042	4488
101	4868	3895	4335	5704	5775	4674	5016	5130	5078	4440
102	4809	3820	4337	6018	5321	4508	4722	5293	5068	4454
110	4792	4035	4804	5209	5217	4656	5238	4888	4745	4432
111	4966	4130	4627	6023	5300	5278	4757	5170	5110	4517
112	4955	4097	4419	5986	5562	4960	5056	5136	5165	4456
120	5108	4600	4490	5777	5767	5044	5458	5012	5378	4650
121	5236	4676	4859	6059	5529	5040	5498	5648	5258	4738
122	5094	4121	4728	6257	5508	4826	5220	5239	5208	4975
200	5155	4404	4428	6304	5762	4912	5432	5158	5600	4672
201	5216	4508	4875	5777	5867	5188	5252	5274	5358	5010
202	5282	3918	4949	6377	6146	5026	4928	5505	6058	4926
210	5201	4389	4930	6091	5583	5321	5682	5246	4975	4782
211	5504	4172	5130	6639	6346	5533	5239	5532	6148	5070
212	5500	4708	4926	6609	6008	5625	5373	5584	5960	4956
220	5479	4690	5318	5809	6221	5480	5863	5615	5272	5167
221	5587	4498	5194	6568	6325	5526	5435	5827	6055	5090
222	5583	4882	5359	6286	5958	5176	5846	5625	5728	5540