

# DISTRIBUIÇÕES INTERFERIDAS

*Estudo sobre uma distribuição generalizada*

AQUILES E. PIEDRABUENA

Engenheiro Agrônomo - Investigador do Instituto Nacional de Tecnología Agropecuária  
(I. N. T. A.) Centro Regional Rionegrense, Estación Experimental Agropecuária  
del Alto Valle, Río Negro, Argentina

Tese apresentada à Escola Superior  
de Agricultura «Luiz de Queiroz» da  
Universidade de São Paulo para  
obtenção do título de Magister Scientiae

PIRACICABA  
SÃO PAULO — BRASIL

1968

E R R A T A

<u>Página</u>	<u>Linha</u>	<u>Onde se lê</u>	<u>Leia-se</u>
19	4	Binomial	Binomial generalizada
25	3	$\frac{6(p+3)}{c+1} + \dots + \frac{6(p+3)(p+4)}{2!(c+1)^2}$	$\frac{6(p+3)}{c+1} + \frac{6(p+3)(p+4)}{2!(c+1)^2}$
29	7	qjá que	já que
31	última	$P(B/A) = 1/4$	$q(B/A) = 1/4$
47		Acrescentar ao final do QUADRO XV	

Para distribuição de Poisson

$$\chi^2 = 17,765^{**}, \text{ para } 5 \text{ G. L.}$$

Para Binomial generalizada

$$\chi^2 = 5,664, \text{ não significativo para } 3 \text{ G. L.}$$

Às duas pessoas mais importantes de minha existência:

aquela que me deu a vida e

à que me deu um objetivo para vivê-la

Dedico pois, esta tese,

a minha mãe Maria Luisa "in memoriam" e

com todo meu amor a minha esposa Doroty

Ao Professor Eng.<sup>o</sup> Sixto E. Trucco

quem iniciou-me na estatística

Homenagem

## A G R A D E C I M E N T O S

Agradeço mui especialmente ao Prof. Dr. Frederico Pimentel Gomes, Catedrático da 16.<sup>a</sup> Cadeira (Matemática e Estatística), orientador desta tese, pela constante crítica construtiva, a objetividade de seu assessoramento e as acertadas diretrizes dadas.

Ao Professor Associado Dr. Izaias Rangel Nogueira, pela abundante bibliografia indicada e a constante ajuda.

Ao Professor Livre-Docente Dr. Humberto de Campos, pelas oportunas sugestões feitas.

Ao Professor Assistente Dr. Clovis Pompilio de Abreu, pela tradução ao Português do 1.<sup>o</sup> Capítulo.

A minha esposa Doroty pelo esgotante trabalho de tradução dos Capítulos restantes.

E a todos os integrantes da 16.<sup>a</sup> Cadeira (Matemática e Estatística) da E. S. A. "Luiz de Queiroz", que de uma ou de outra forma, concorreram para a realização d'êste trabalho.

# ÍNDICE

	Página
1 - INTRODUÇÃO	1
2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
3 - DESENVOLVIMENTO DAS DISTRIBUIÇÕES	5
3.1 - Distribuição de Yule	5
3.2 - Distribuição de Greenwood e Yule	7
3.3 - Distribuição Binomial Generalizada	9
3.3.1 - Expressão estocástica interferida	10
3.3.2 - Desenvolvimento da distribuição binomial generalizada	12
3.3.3 - Momentos	15
3.3.4 - Tendência à normalidade	16
4 - DISCUSSÃO DAS DISTRIBUIÇÕES	20
4.1 - Igualdade das Distribuições	20
4.2 - Vantagens da Distribuição Binomial Generalizada	21
4.2.1 - Simplicidade e unificação das distribuições	21
4.2.2 - Desenvolvimento dos momentos	22
4.2.2.1 - Forma direta	22
4.2.2.2 - Forma de Nogueira	26
4.2.2.3 - Momentos pela fórmula de Nogueira	28
4.2.2.4 - Por analogia com a binomial gene- ralizada	29
5 - DISTRIBUIÇÃO INTERFERIDA	31
5.1 - Funções Discretas	31
5.2 - Funções Contínuas	40

	Página
6 - INTERFERÊNCIAS SEM BINOMIAL GENERALIZADA	48
7 - TRANSFORMAÇÃO DE DADOS	52
8 - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES	57
9 - RESUMO	60
10 - BIBLIOGRAFIA CONSULTADA	62

## 1 - INTRODUÇÃO

No ano de 1950 o autor, conjuntamente com os Engenheiros-Agrônomos MAVEROFF e DEIS , realizou uma pesquisa sôbre a influência do tamanho de vasilhame sôbre o número e a distribuição de leveduras (29) .

Foram feitas então 200 contagens em hematocitometro (20 x 20) diretamente dos mostos vînicos em fermentação, constatando-se que: quando se trabalha com essa técnica, e não com a descrita por STUDENT (12) as leveduras não se distribuem segundo uma série de Poisson (26) (29) .

A explicação que a princípio se deu a essa anomalia foi a de que nos traços de reticulado do hematocitometro, se produziam fenômenos de tensão superficiais que faziam as leveduras se situarem sôbre aqueles traços do reticulado , ou nas interseções, com maior frequência do que dentro dos quadrados.

Outras hipóteses aventadas foram de que à heterogeneidade da população, seria composta não somente por Sacharomices cerevisae , var. vinii , bem como por S. apiculata , escassos Micoderma aceti e também detritos celulares da polpa de uva ; tôdas estas causas interferindo em um ou outro sentido, distorcendo a série de Poisson.

Em várias experimentos, de distintas índoles, sempre que apareciam interferências, influenciando fortemente, se bem que próprias do ensaio, apenas o puro desenvolvimento do mesmo, indicava a existência de uma distribuição conhecida comumente como binomial negativa.

Dado isto é que pretende-se desenvolver esta teoria com base na hipótese citada.

## 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A importância que tem a distribuição binomial negativa se nota logo pelas numerosas referências e trabalhos publicados, alguns deles, não muito explícitos.

YULE (34) estudou efeitos cumulativos em exposições repetidas a doenças fatais, chegando a uma distribuição dos sobreviventes, na forma binomial negativa (19, 34).

GREENWOOD e YULE (15) com aplicações sobre acidentes de trabalho estudaram o desvio que apresentam as amostras, em relação a distribuição de Poisson, partindo de considerações distintas, chegaram a resultados semelhantes, como se verá em 4.1.

A hipótese que apresentaram é a seguinte: a população é composta por diferentes graus individuais de propensão aos acidentes, o que quer dizer que a média é também uma variável aleatória, dentro da distribuição de Poisson, e com uma função de distribuição do tipo III de Pearson (3, 5, 8, 9, 10, 14, 15, 19, 23).

ENGERBERGER e PÓLYA (6) conceberam uma distribuição generalizada, que nada mais é do que o modelo de GREENWOOD e YULE, que se conhece com o nome de distribuição de Pólya, aplicada a acidentes (6, 10, 33).

NEWBOL (23) também aplicou a distribuição binomial negativa, em estudos sobre acidentes na indústria (10, 23), enquanto que LUNDBERG (21) a estendeu a um modelo matemático complexo, como aplicação da teoria geral ao estudo de enfermidades e acidentes (10, 21).

FISHER (8) desenvolveu uma forma binomial negativa simples, sem maiores explicações, para logo passar ao modelo de GREENWOOD e YULE. Fez um estudo crítico dos trabalhos de HALDANE (16) propondo um índice de eficiência para o ajuste da distribuição.



Novamente FISHER , CORBET e WILLIAM (9) referiram à distribuição binomial negativa, estudando problemas relacionados com o número de indivíduos pertencentes a determinadas espécies, em plantas e animais (5 , 9) .

ARLEY (2) a aplicou como uma informação adicional, no estudo das radiações cósmicas (3 , 10) .

KENDALL (19) dedicou a ela dois subcapítulos, o primeiro sumamente claro e preciso referente ao desenvolvimento do modelo de GREENWOOD e YULE , e o segundo, ao primeiro modelo de YULE , com uma demonstração não muito explícita , que o autor reformulou para dar maior clareza.

CRAMER (5) fez, em seu livro, uma simples referência fora do texto, como uma anomalia da distribuição de Poisson.

ANSCOMBE (1) a incluiu em um trabalho sobre distribuições binomiais e logarítmicas (1 , 10) .

GREENWOOD (14) publicou um trabalho sobre propensão aos acidentes.

PIEDRABUENA (26) sem conhecer os trabalhos anteriormente citados, a apresentou uma comunicação no "I<sup>er</sup> Coloquio de Estadística" , realizado em Mendoza, República Argentina , sob os auspícios da "Universidade Nacional de Cuyo". Aí esboçou uma distribuição binomial com expoente negativo, onde um dos termos do binômio é também negativo.

PIEDRABUENA e CHRISTENSEN (28) aplicaram os mesmos conceitos anteriores à distribuição do número de filoxeras em raízes de Vitis vinifera , com excelentes resultados.

BATES e NEYMAN (3) estudaram a propensão a acidentes, e TAGUCHI (31) elaborou tabelas para os níveis de probabilidade de 5% a 1% .

BUSH e MOSTELLER (4) a puseram dentro de uma série de modelos aplicados aos processos de aprendizagem.

JOHNSON (17) fez também uma generalização sobre o modelo de GREENWOOD e YULE , no estudo de propensão a acidentes.

WILKS (33) a incluiu em seu livro, como um caso especial, sem maiores explicações, dentro do subcapítulo "Discrete Waiting-Time Distributions" , ao passo que FREEMAN (10) dedicou todo um capítulo a êsse tipo de distribuição.

PIEDRABUENA (27) fez outra aplicação da distribuição na classificação das famílias indígenas segundo o número de filhos vivos.

Como se verifica, a teoria se desenvolveu com base quase exclusiva na propensão a acidentes. A extensão que se fez a outras aplicações foi dando interpretações análogas a variações de risco do modelo de GREENWOOD e YULE .

### 3 - DESENVOLVIMENTO DAS DISTRIBUIÇÕES

#### 3.1 - Distribuição de Yule

Esta distribuição é considerada como um caso distinto da binomial negativa (19) , embora apresente resultados semelhantes.

YULE (34) supôs, segundo FREEDMAN (10) e KENDALL (19) , uma população exposta repetidas vezes a uma doença ou tóxico, considerando análogos seus efeitos e determinando a probabilidade de morte durante  $n$  exposições.

A probabilidade individual de contrair a doença ou sofrer uma intoxicação, o que êle denomina ataque, durante uma única exposição, é  $p$  e se considera constante para tôdas as exposições. A probabilidade contrária será  $q$  (não ocorrência de ataques) . Consequentemente,

$$p + q = 1 .$$

O número de repetições independentes é o número  $n$  de exposições.

As probabilidades desses ataques individuais: 0 , 1 , ... , n vezes nas  $n$  exposições, serão dadas pelos termos do desenvolvimento de  $(q + p)^n$  .

Presume-se porém que as mortes acontecem depois de  $r$  ataques.

A probabilidade de sobreviver em  $n$  exposições é a de ter sido atacado 0 , 1 , ... ,  $r - 1$  vezes durante as  $n$  exposições, e será

$$\sum_{j=0}^{r-1} \binom{n}{j} q^{n-j} p^j ,$$

e a de sobreviver em  $n - 1$  exposições será:

$$\sum_{j=0}^{r-1} \binom{n-1}{j} q^{n-j-1} p^j ,$$

Consequentemente a probabilidade de morrer durante a  $n$ ésima exposição será a diferença entre as duas probabilidades acima, ou seja:

$$\sum_{j=0}^{r-1} \binom{n-1}{j} q^{n-j-1} p^j - \sum_{j=0}^{r-1} \binom{n}{j} q^{n-j} p^j ,$$

ou ainda:

$$q^{n-1} - q^n + \sum_j^{r-1} \binom{n-1}{j} q^{n-j-1} p^j - \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} q^{n-j} p^j$$

$$= q^{n-1} (1 - q) - \sum_{j=1}^{r-1} \left[ \binom{n}{j} q^{n-j} p^j - \binom{n-1}{j} q^{n-j-1} p^j \right].$$

Mas, pela relação de Stifel

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1},$$

logo, obtemos:

$$q^{n-1} p - \sum_{j=1}^{r-1} \left[ \binom{n-1}{j} q^{n-j} p^j + \binom{n-1}{j-1} q^{n-j} p^j - \binom{n-1}{j} q^{n-j-1} p^j \right]$$

$$= q^{n-1} p - \sum_{j=1}^{r-1} \left[ \binom{n-1}{j} q^{n-j-1} p^j (q - 1) + \binom{n-1}{j-1} q^{n-j} p^j \right]$$

$$= q^{n-1} p + \sum_{j=1}^{r-1} \left[ \binom{n-1}{j} q^{n-j-1} p^{j+1} - \binom{n-1}{j-1} q^{n-j} p^j \right]$$

Para as sucessivas reduzidas ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ), aplicado na fórmula acima obtemos:

$$R_1 = q^{n-1} p$$

$$R_2 = q^{n-1} p + \binom{n-1}{1} q^{n-2} p^2 - \binom{n-1}{0} q^{n-1} p$$

$$= \binom{n-1}{1} q^{n-2} p^2$$

$$R_3 = \binom{n-1}{1} q^{n-2} p^2 + \binom{n-1}{2} q^{n-3} p^3 - \binom{n-1}{1} q^{n-2} p^2$$

$$= \binom{n-1}{2} q^{n-3} p^3$$

e assim sucessivamente. A reduzida de ordem  $r$  seria:

$$R_r = \binom{n-1}{r-1} q^{n-r} p^r,$$

donde  $n = r + i$ , para  $i = 0, 1, 2, \dots$

Para  $i = 0$ , isto é, para  $n = r$ ,

$$\binom{r-1}{r-1} q^0 p^r = \frac{(r-1)!}{(r-1)! 0!} q^0 p^r = p^r,$$

para  $i = 1$

$$\binom{r}{r-1} q p^r = \frac{r!}{(r-1)! 1!} q p^r = r q p^r ,$$

para  $i = 2$

$$\binom{r+1}{r-1} q^2 p^r = \frac{(r+1)!}{(r-1)! 2!} q^2 p^r = \frac{r(r+1)}{2!} q^2 p^r .$$

Assim, depois de haver sobrevivido, desde o começo até a  $n$ ésima exposição, para os valores de  $n$ , desde  $r$  em diante se terá uma distribuição de mortes dada pela função de probabilidade

$$p^r \left[ 1 , r q , \frac{r(r+1)}{2!} q^2 , \dots \right]$$

para os eventos  $0, 1, \dots$ , que são os termos sucessivos da binomial negativa  $p^r (1 - q)^{-r}$ .

### 3.2 - Distribuição de Greenwood e Yule

Ao referir-se ao número de acidentes, supõe-se que estes se distribuem segundo uma distribuição de Poisson

$$f(j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}$$

para  $j = 0, 1, \dots$ , sendo  $\lambda$ , neste caso, uma variável aleatória, que expressa aos distintos graus de riscos individuais a que está submetida a população e, cuja função de distribuição é dada por

$$dF = \frac{c^p}{\Gamma(p)} e^{-c\lambda} \lambda^{p-1} d\lambda ,$$

$$\lambda > 0 , \quad p > 0 ,$$

sendo  $c$  e  $p$  parâmetros da distribuição.

Para o valor médio,  $m(j)$ , temos

$$m(j) = \int_0^{\infty} \frac{c^p}{\Gamma(p)} e^{-c\lambda} \lambda^{p-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} d\lambda .$$

Integrando a expressão para todos os valores de  $j$ , com a função auxiliar

$$\psi(t) = 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots = e^{\lambda t}$$

obtem-se

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{c^p}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} e^{-c\lambda} \lambda^{p-1} e^{-\lambda+ \lambda t} d\lambda \\ &= \frac{c^p}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(c+1-t)} \lambda^{p-1} d\lambda . \end{aligned}$$

Fazendo  $\lambda(c+1-t) = u$ ,  $c+1-t > 0$ ,  $\frac{t}{c+1} < 1$

$$= \frac{c^p}{\Gamma(p)} \cdot \frac{1}{(c+1-t)^p} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{p-1} du ,$$

mas a integral, é a função  $\Gamma(p)$

$$g(t) = \frac{c^p}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\Gamma(p)}{(c+1-t)^p} = \frac{c^p}{(c+1)^p} \left(1 - \frac{t}{c+1}\right)^{-p} ,$$

que para  $t = 1$ , (\*) dará o desenvolvimento

$$\left(\frac{c}{c+1}\right)^p \left(1 - \frac{1}{c+1}\right)^{-p} = 1 ,$$

ou simbolicamente

$$\left(\frac{c}{c+1}\right)^p \left[ 1 , \frac{p}{c+1} , \frac{p(p+1)}{2!(c+1)^2} , \dots \right] ,$$

ou em forma geral

$$f(x) = \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \frac{\left| \binom{-p}{x} \right|}{(c+1)^x}$$

-.-.-.-

-.-.-.-

(\*) para  $c \geq 0$ .

para  $x = 0, 1, \dots$

Como se verá mais adiante a média e a variância são:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{p}{c} \\ \mu_2 &= \frac{p}{c} \left( \frac{c+1}{c} \right) \end{aligned} \right\} \therefore \begin{aligned} c &= \frac{\mu_1^2}{\mu_2 - \mu_1^2} \\ p &= \frac{(\mu_1)^2}{\mu_2 - \mu_1^2} \end{aligned}$$

o que permite, pelas estimativas dos parâmetros, determinar os valores  $\hat{p}$  e  $\hat{c}$ .

### 3.3 - Distribuição Binomial Generalizada

A inferência realizada (26), se baseia na pressuposição de que: uma distribuição de frequências, para valores  $x = 0, 1, \dots$ , poderá ser tomada como proveniente de uma distribuição binomial (incluindo Poisson).

$$(q + p)^n \quad \text{com} \quad q + p = 1.$$

Neste caso, a média e a variância serão:

$$\left. \begin{aligned} m &= n p \\ \mu_2 &= n p q \end{aligned} \right\} \therefore \frac{\mu_2}{m} = q,$$

e dado que  $0 \leq q \leq 1$ , tem-se

$$\mu_2 \leq m \left[ \begin{array}{l} \mu_2 < m, \text{ distribuição binomial} \\ \mu_2 = m, \text{ distribuição de Poisson} \end{array} \right].$$

Este raciocínio permite obter as estimativas dos parâmetros  $\hat{p}$ ,  $\hat{q}$ ,  $\hat{n}$ , e, por consequência, as probabilidades dos acontecimentos,  $x = 0, 1, \dots$  e suas respectivas frequências teóricas, mesmo para Séries de Poisson <sup>(\*)</sup>. (QUADRO I).

.....

.....

.....

(\*) Quando a variância é pouco diferente da média.

O caso que deu origem a este desenvolvimento (contagem de leveduras) e muitos outros mais estudados, tinham uma característica comum que os distingue: a variância sensivelmente superior à média, pelo que se se seguisse friamente o raciocínio anteriormente exposto, nos levaria à absurda conclusão, do ponto de vista de conceito de probabilidade, de que (25) :

$$q > 1 \quad , \quad p < 0 \quad e \quad n < 0 \quad ,$$

obtendo-se um binômio  $(q - p)^{-n}$  (7, 26) .

Deste resultado se pode aventar a hipótese de que essas probabilidades estão interferidas, como tentaremos mostrar em 3.3.1 .

Os verdadeiros valores de  $q$  e  $p$  estão mascarados por uma interferência que não se conhece e que, mesmo se conhecida, não seria possível controlar ou isolar (total ou parcialmente) , pois que aumenta de forma artificial a variância e baixa a média, ou ambas as coisas.

Na presente tese, se preferirá denominar expressão estocástica interferida de  $q$  e de  $p$  , simbolizando-se com as letras gregas  $\chi$  e  $\psi$  respectivamente e , ao expoente do binômio  $(- n)$  com a letra  $\nu$  .

### 3.3.1 - Expressão estocástica interferida

Suponha-se, que um atirador A , realize  $n$  disparos sobre um alvo , efetuando  $m$  impactos no centro. Sua frequência relativa, para um número  $n$  suficientemente grande de disparos (21) , ou probabilidade estimada seria

$$\hat{p} (A) = \frac{m}{n} \quad .$$

Conjuntamente com A , um atirador B interfere na prova, fazendo por erro ou intencionalmente,  $s$  disparos, sobre o mesmo alvo, dando no centro  $t$  vezes, frente à ignorância do jurado que controla a prova, sobre sua presença ou atitude. Sua probabilidade estimada será pois

$$\hat{p} (B) = t/s \quad .$$



Observado o alvo pelo jurado perceberá  $m + t$  impactos no centro.

Seria lícito tomar

$$\frac{m + t}{n}$$

como a frequência relativa de  $A$  ? ... Evidentemente que não, principalmente se  $m + t > n$ . Mas se o jurado não encontrasse essa desigualdade, atribuiria  $m + t$  acertos a  $A$ .

Porém, o certo é que esse alvo (a pesquisa em estudo) apresenta  $m + t$  impactos, causados pelas balas e sabe-se que somente se deram  $n$  tiros.

Se em vez de falar de probabilidades ou frequências relativas se denominasse a essa relação, expressão estocástica, ficara salvo o inconveniente apontado e teria

$$\hat{\lambda} = \frac{m + t}{n} \rightarrow 1 ,$$

Já que  $m + t$  pode ser maior, igual ou menor que  $n$ .

Agora,

$$\hat{\lambda} = m/n + t/n$$

Se como

$$\hat{p}(A) = m/n \quad e \quad t = s \hat{p}(B)$$

$$\therefore \hat{\lambda} = \hat{p}(A) + \frac{s}{n} \hat{p}(B) .$$

Se se denominar  $\lambda^{(*)} = s/n$  ao valor da interferência (velocidade relativa do tiro) de  $B$  sobre  $A$  ( $s$  disparos de  $B$ , para  $n$  de  $A$ ) seria

$$\hat{\lambda} = \hat{p}(A) + \lambda \hat{p}(B)$$

Raciocinando em forma similar  $\hat{\psi} = \hat{q}(A) - \lambda \hat{p}(B)$ ,

logo

$$\hat{\lambda} + \hat{\psi} = \hat{p}(A) + \hat{q}(A) = 1 ,$$

-----

-----

-----

(\*) No Capítulo 6 explicar-se-á as restrições deste parâmetro.

pois que em um fenômeno interferido, se  $\kappa$  é maior que 1, a outra expressão estocástica,  $\psi$  terá de ser negativa, pois a soma é necessariamente 1.

Como consequência do anterior, o expoente  $n$ , substituído por sua expressão  $\psi$ , seria também negativo, já que a média é positiva e

$$\psi = \frac{m}{1 - \kappa}, \quad (\kappa \neq 1).$$

Como se poderá ver, fica plenamente justificado, como é que podem apresentar-se expressões estocásticas maiores que a unidade.

### 3.3.2 - Desenvolvimento da distribuição binomial generalizada

Seguindo as mesmas inferências de 3.3 e utilizando os valores  $\kappa$  e  $\psi$  (expressões estocásticas) em vez de  $q$  e  $p$  (probabilidades) já que

$$\mu_2 \leq m$$

e considerando

$$m = E(x) = \psi \psi > 0,$$

$$\mu_2 = E[(x - m)^2] = \psi \psi \kappa \geq 0,$$

teria

$$\frac{\mu_2}{m} = \kappa > 0$$

por (3.3.1)

$$\psi = 1 - \kappa$$

$$\psi = \frac{m}{1 - \kappa} \quad (\text{para } \kappa \neq 1)$$

ou

$$\psi = \frac{m^2}{m - \mu_2} \quad (\text{para } m - \mu_2 \neq 0).$$

Uma vez que  $m = \psi \psi$  e que se exige  $m > 0$ , resulta que  $\psi$  deverá ser negativo se  $\psi$  o fôr, e vice-versa.

Agora o binômio  $(q + p)^n$  ficaria generalizado por

$$(\kappa + \psi)^{\nu}$$

onde  $\kappa + \psi = 1$ . Portanto

$$(\kappa + \psi)^{\nu} = \kappa (1 + \psi/\kappa) = \kappa^{\nu} \left[ 1 + \left( \frac{1}{\kappa} - 1 \right) \right]^{\nu}$$

O desenvolvimento de função

$$\left[ 1 + \left( \frac{1}{\kappa} - 1 \right) \right]^{\nu} = (1 + \psi/\kappa)^{\nu}$$

nos dará uma série, que é a binomial

$$1 + \nu \frac{\psi}{\kappa} + \frac{\nu(\nu-1)}{2!} \left( \frac{\psi}{\kappa} \right)^2 + \dots + \binom{\nu}{x} \left( \frac{\psi}{\kappa} \right)^x + \dots$$

cuja convergência, LA VALLÉE POUSSIN, (20), exige

$$-1 < \frac{1}{\kappa} - 1 \leq 1$$

logo

$$\kappa \geq \frac{1}{2}$$

Quando tivermos

$$\frac{1}{2} \leq \kappa \leq 1$$

o valor de  $\psi$  será positivo e o valor de  $\nu$  também, mas neste caso teria de ser um número natural para que a série não apresente termos negativos.

Com estas restrições, o desenvolvimento do binômio poderá ser usado e nos dará:

$$\begin{aligned} (\kappa + \psi)^{\nu} &= \kappa^{\nu} + \nu \kappa^{\nu-1} \psi + \frac{\nu(\nu-1)}{2!} \kappa^{\nu-2} \psi^2 + \dots + \\ &+ \binom{\nu-x}{x} \kappa^{\nu-x} \psi^x + \dots \end{aligned}$$

Pelo exposto, a binomial generalizada será válida para valores de

$\chi > 1$ , dando uma série positiva convergente, e também para

$$\frac{1}{2} < \chi < 1,$$

se  $\nu$  é número natural (\*), dando neste caso a distribuição binomial comum.

QUADRO I

Distribuição de alojamentos pelo número de seus moradores (27)

Número de Moradores	Frequências Observadas	Frequências Teóricas Binomial Generalizada	Frequências Teóricas de Poisson
0	--	1,73	1,88
1	8	6,59	6,88
2	15	12,55	13,09
3	15	15,97	16,45
4	13	15,17	15,36
5	11	11,55	11,37
6	9	7,33	6,95
7	4	3,99	3,60
8	2	1,90	1,63
9	1	0,80	0,64
10 e mais	--	0,42	0,23
<b>Totais</b>	<b>78</b>	<b>78,00</b>	<b>78,00</b>

$$\bar{x} = 3,807692$$

$$s^2 = 3,676823$$

$$\hat{\lambda} = 0,9656 = \hat{q}$$

$$\hat{\psi} = 0,0344 = \hat{p}$$

$$\hat{\nu} = 107,8533 = \hat{n}$$

Para séries de Poisson:  $\chi^2 = 1,540$  não significativo para 5 G. L.

Para binomial generalizada:  $\chi^2 = 1,572$  não significativo para 4 G. L.

(\*) Na prática, se seu valor é sensivelmente superior ao número de eventos, pode-se utilizar igualmente a distribuição mesmo no caso de  $\nu$  ser positivo, mas não inteiro, já que os termos da série de ordem superior a  $n$  são muito pequenos.

## QUADRO II

Distribuição de leveduras em hematocitometro (26) (29)

Número de Leveduras	Frequências Observadas	Frequências Teóricas Binomial Generalizada	Frequências Teóricas de Poisson
0	112	111,28	88,58
1	124	122,36	133,54
2	79	83,40	100,66
3	45	45,65	50,58
4	22	21,86	19,06
5	11	9,57	5,75
6	6	3,93	1,44
7 e mais	1	1,95	0,39
Total	400	400,00	400,00

$$\bar{X} = 1,5075$$

$$s^2 = 2,07513158$$

$$\hat{\kappa} = 1,3765$$

$$\hat{\psi} = -0,3765$$

$$\hat{\nu} = -4,0336$$

Para séries de Poisson:  $\chi^2 = 32,003$  \*\*\* significativo para 5 G. L.

Para binomial generalizada:  $\chi^2 = 1,612$  não significativo para 4 G. L.

3.3.3 - Momentos

Embora sejam necessárias somente a média e a variância, para o desenvolvimento em série, é interessante assinalar que todos os demais momentos seguem as mesmas normas que para uma binomial positiva, sendo pois:

$$\mu_1' = m = \nu \psi \quad \text{por hipótese}$$

$$\mu_2' = \nu \psi \kappa \quad \text{por hipótese}$$

$$\mu_3' = \nu \psi \kappa (\kappa - \psi) \quad \text{por analogia com a binomial positiva}$$

$$\mu_4' = 3 \nu^2 \psi^2 \kappa^2 + \nu \psi \kappa (1 - 6 \kappa \psi) \quad \text{por analogia com a binomial positiva.}$$

3.3.4 - Tendência à normalidade

A probabilidade que teria o acontecimento  $m$  seria

$$P_m = \binom{v}{m} \psi^m \cdot \kappa^{v-m} = \frac{v!}{m! (v-m)!} \psi^m \kappa^{v-m}$$

e como

$$m = v \psi$$

e

$$v - m = v \kappa$$

$$P_m = \frac{v!}{(v\psi)! (v\kappa)!} \psi^{v\psi} \kappa^{v\kappa}$$

A aplicação da fórmula de Stirling nos dá

$$P_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi v\psi\kappa}} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

Para um valor  $v$  qualquer da distribuição, seria

$$v = v\psi \pm \delta$$

onde  $\delta$  é um desvio, e seguindo o mesmo raciocínio se teria

$$P_\delta = \frac{v!}{(v\psi - \delta)! (v\kappa + \delta)!} \psi^{v\psi - \delta} \kappa^{v\kappa + \delta}$$

$$= \frac{v!}{(v\psi - \delta)! (v\kappa + \delta)!} \cdot \psi^{v\psi - \delta} \kappa^{v\kappa + \delta}$$

o que daria, desenvolvendo pela fórmula de Stirling

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi v\psi\kappa}} e^{-\frac{\delta^2}{2v\psi\kappa}}$$

Sendo

$$v\psi\kappa = \mu_2 = \sigma^2 = 1$$

e

$$\delta/\sigma = t$$

ter-se-ia, para

$$\nu \longrightarrow -\infty$$

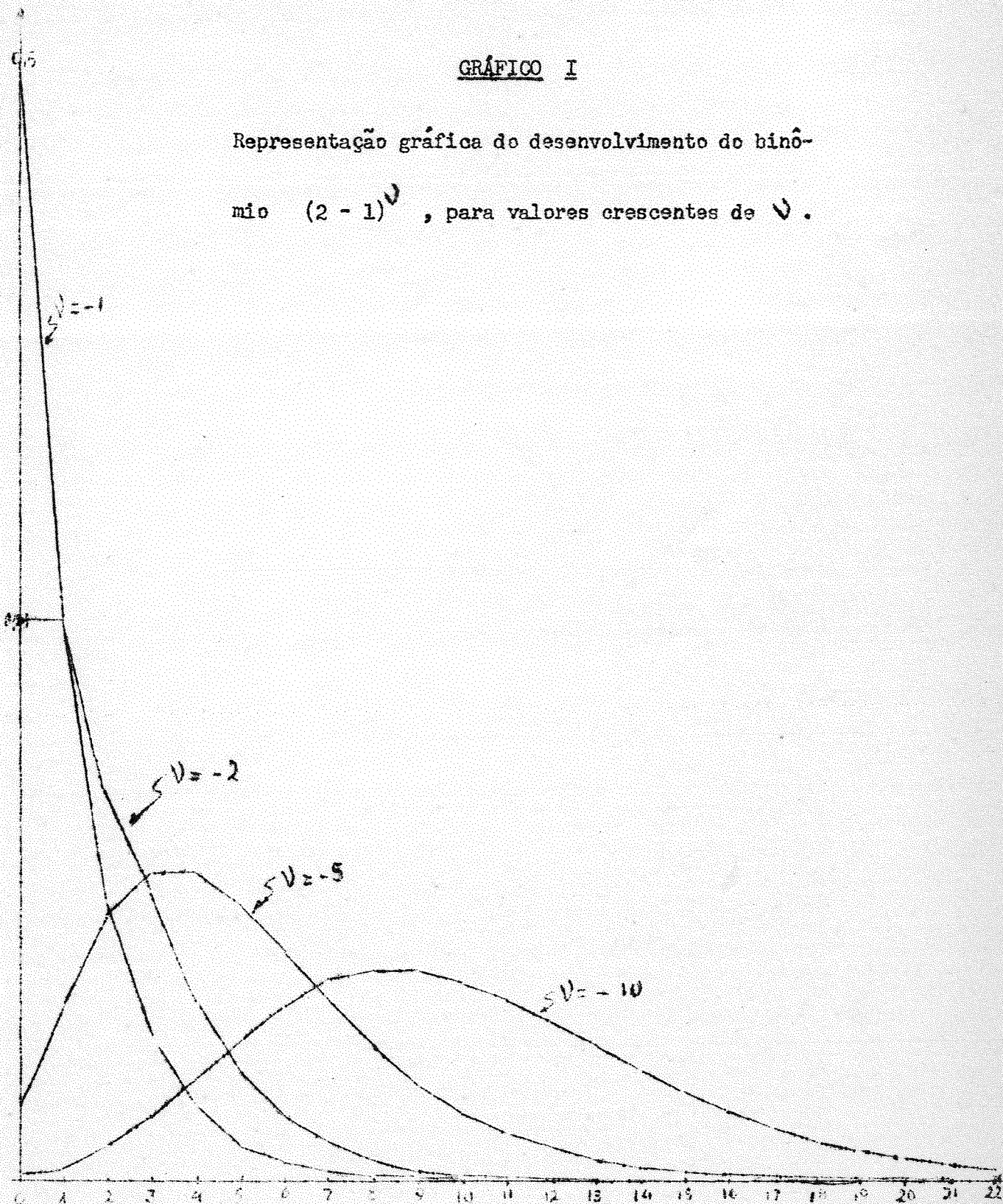
$$\lim_{\nu \rightarrow -\infty} P_{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Vale dizer que a medida que  $\nu$  cresce um valor absoluto, a série tende a normalizar-se aproximando-se de uma "gaussiana", (QUADRO III e GRÁFICO I).

A forma como se normaliza é inversa, a binomial positiva é similar à de Poisson, ou seja inviezada à direita. No GRÁFICO I pode apreciar-se como vai normalizando a distribuição do binômio  $(2 - 1)^{\nu}$ , e a característica apontada.

GRÁFICO I

Representação gráfica do desenvolvimento do binômio  $(2 - 1)^v$ , para valores crescentes de  $v$ .





## QUADRO III

Distribuição de filoxeras em 400 raízes de Vitis vinifera (28)

Número de Filoxeras	Frequências Observadas	Frequências Teóricas Binomial	Frequências Teóricas Superfície Curva Normal
0	2	1,64	7,88
1	8	8,31	10,52
2	22	21,64	19,72
3	39	38,70	31,96
4	53	53,42	45,28
5	60	60,66	55,60
6	59	58,98	60,44
7	50	50,47	54,60
8	39	38,77	44,84
9	27	27,15	31,72
10	18	17,53	19,40
11	11	10,58	10,36
12	6	5,95	4,80
13	3	3,17	1,92
14	2	1,60	0,68
15 e mais	1	1,43	0,28
Totais	400	400,00	400,00

$$\bar{X} = 5,9875$$

$$s^2 = 7,0773$$

$$\hat{\mu}_3 = 8,5629$$

$$\hat{\mu}_4 = 143,8516$$

$$\beta_1 = 0,454 \text{ moderadamente assimétrica}$$

$$\beta_2 = 3,072 \text{ mesocurtica}$$

$$\hat{\nu} = 1,185$$

$$\hat{\psi} = -0,185$$

$$\hat{\sigma} = -32,368$$

Distribuição normal

$$\chi^2 = 11,778 \text{ não significativa com 10 G. L. , mais de 30\% .}$$

Binomial generalizada

$$\chi^2 = 0,0616 \text{ não significativa com 10 G. L. , mais de 99\% .}$$

4 - DISCUSSÃO DAS DISTRIBUIÇÕES

4.1 - Igualdade das Distribuições

As três distribuições apontadas anteriormente

[1]  $p^r (1 - q)^{-r}$

[2]  $\left(\frac{c}{c+1}\right)^p \left(1 - \frac{1}{c+1}\right)^{-p}$

[3]  $(\chi + \psi)^\psi$ .

Se reduzem a uma só, já que é evidente que [1] e [2] são equivalentes com

$$p = \frac{c}{c+1}, \quad q = \frac{1}{c+1} \quad \text{e} \quad r = p \quad (*)$$

Com respeito a [3] ter-se-ia:

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \left(1 - \frac{1}{c+1}\right)^{-p} &= \left(\frac{c+1}{c}\right)^{-p} \left(1 - \frac{1}{c+1}\right)^{-p} \\ &= \left(\frac{c+1}{c} - \frac{1}{c}\right)^{-p} \end{aligned}$$

∴  $\chi = \frac{c+1}{c}, \quad \psi = -\frac{1}{c}, \quad \psi = -p$ .

Também se pode raciocinar da seguinte maneira: quando se desenvolve

$$(\chi + \psi)^\psi = \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \left(\frac{c+1}{c}\right)^{-p}$$

por ser  $\psi$  negativo

$$\psi = -p$$

(\*) A desuniformidade que aparece nos símbolos é devida a que se quiz respeitar os símbolos que os autores usaram em seus trabalhos originais.

Agora

$$\begin{aligned}
 (\chi + \psi)^{\psi} &= (1 - \psi + \psi)^{\psi} \\
 &= (1 - \psi)^{\psi} \left(1 + \frac{\psi}{1 - \psi}\right)^{\psi} \\
 &= (1 - \psi)^{\psi} \left(\frac{1}{1 - \psi}\right)^{\psi} \\
 &= \chi^{\psi} \cdot \chi^{-\psi} = \left(\frac{c + 1}{c}\right)^{-p} \left(\frac{c + 1}{c}\right)^p
 \end{aligned}$$

portanto

$$\chi = \frac{c + 1}{c}$$

com as consequentes deduções dos demais valores.

Por correspondências com essas igualdades pode-se determinar as equivalências entre [2] e [3] como se segue:

$$\chi = \frac{1}{p} \quad , \quad \psi = -\frac{q}{p} \quad e \quad \psi = -r$$

e reciprocamente

$$p = \frac{1}{\chi} \quad , \quad q = -\frac{\psi}{\chi} \quad e \quad r = -\psi$$

## 4.2 - Vantagens da Distribuição Binomial Generalizada

### 4.2.1 - Simplicidade e unificação das distribuições

É evidente que a forma binomial em que se expressa, está ao alcance de qualquer pessoa, com reduzidos conhecimentos matemáticos, como também as inferências que se fazem para seu desenvolvimento, embora os outros esquemas fazem necessário, por parte de quem os estude, de conhecimentos mais ou menos profundos de Análise Matemática, ademais não difere, salvo em sinal, do binômio de

probabilidades  $(q + p)^n$ , de tal modo que se poderia definir êste como um caso especial de binomial generalizada quando  $\mathcal{K} < 1$ . No caso em que  $\mathcal{K}$  tende a 1 a distribuição de Poisson seria também um caso especial da binomial generalizada e, neste último, quando não possuem tabelas de séries de Poisson (11), se obtêm resultados semelhantes ao aplicar aquela distribuição (QUADRO I).

#### 4.2.2 - Desenvolvimento dos momentos

Como se viu no 3.3.3, os momentos da binomial generalizada, não diferem dos já conhecidos para distribuição binomial e se obtêm diretamente dela.

Para os outros modelos sua obtenção é muito trabalhosa e, ainda que a forma geral proposta por NOGUEIRA (24) torna-a, ao mesmo tempo que elegante, mais singela, não logra alcançar a facilidade da primeira.

##### 4.2.2.1 - Forma direta

Para maior facilidade, o desenvolvimento dos momentos se dará sobre o modelo de GREENWOOD e YULE.

Dada a distribuição cujos termos são os da série

$$\left(\frac{c}{c+1}\right)^p \left[ 1 + \frac{p}{c+1} + \frac{p(p+1)}{2!(c+1)^2} + \frac{p(p+1)(p+2)}{3!(c+1)^3} + \dots \right],$$

onde a variável aleatória assume os valores 0, 1, 2, ..., etc.

O primeiro momento  $\mu_1^i$  é

$$\mu_1^i = \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \left[ \frac{p}{c+1} + \frac{p(p+1)}{(c+1)^2} + \frac{p(p+1)(p+2)}{2!(c+1)^3} + \dots \right]$$

fatorando

$$\mu_1^i = \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \frac{p}{c+1} \left[ 1 + \frac{p+1}{c+1} + \frac{(p+1)(p+2)}{2!(c+1)^2} + \dots \right]$$

$$\mu_1^1 = \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \frac{p}{c+1} \left(\frac{c+1}{c}\right)^{p+1} \quad (*)$$

$$\mu_1^1 = p/c .$$

O segundo momento  $\mu_2^1$  será

$$\mu_2^1 = \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \left[ \frac{p}{c+1} + \frac{2 p (p+1)}{(c+1)^2} + \frac{3 p (p+1)(p+2)}{2! (c+1)^3} + \frac{4 p (p+1)(p+2)(p+3)}{3! (c+1)^4} + \dots \right]$$

fatorando

$$\begin{aligned} \mu_2^1 &= \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \frac{p}{c+1} \left\{ 1 + \frac{p+1}{c+1} + \frac{(p+1)(p+2)}{2! (c+1)^2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{p+1}{c+1} \left[ 1 + \frac{p+2}{c+1} + \frac{(p+2)(p+3)}{2! (c+1)^2} + \dots \right] \right\} \\ &= \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \frac{p}{c+1} \left[ \left(\frac{c+1}{c}\right)^{p+1} + \left(\frac{p+1}{c+1}\right) \left(\frac{c+1}{c}\right)^{p+2} \right] \\ &= \frac{p}{c} + \frac{p(p+1)}{c^2} . \end{aligned}$$

O terceiro momento  $\mu_3^1$  será:

$$\begin{aligned} \mu_3^1 &= \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \left[ \frac{p}{c+1} + \frac{4 p (p+1)}{(c+1)^2} + \frac{9 p (p+1)(p+2)}{2! (c+1)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{16 p (p+1)(p+2)(p+3)}{3! (c+1)^4} + \frac{35 p (p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{4! (c+1)^5} + \dots \right] \end{aligned}$$

.....

.....

.....

(\*) A expressão  $\left(\frac{c+1}{c}\right)^{p+1}$  está substituindo o desenvolvimento de

$$\left(1 - \frac{1}{c+1}\right)^{-p-1}, \text{ válido para } c > 0 .$$

$$\begin{aligned} \mu_3^1 = & \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \frac{p}{c+1} \left[ 1 + \frac{p+1}{c+1} + \frac{(p+1)(p+2)}{2!(c+1)^2} + \dots \right. \\ & \dots + \frac{p+1}{c+1} \left\{ 3 \left[ 1 + \frac{p+2}{c+1} + \frac{(p+2)(p+3)}{2!(c+1)^2} + \dots \right] + \right. \\ & \left. \left. + \frac{p+2}{c+1} \left[ 1 + \frac{p+3}{c+1} + \frac{(p+3)(p+4)}{2!(c+1)^2} + \dots \right] \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_3^1 = & \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \frac{p}{c+1} + \left(\frac{c+1}{c}\right)^{p+1} + \frac{p+1}{c+1} \left[ 3 \left(\frac{c+1}{c}\right)^{p+2} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{p+2}{c+1}\right) \left(\frac{c+1}{c}\right)^{p+3} \right] \\ = & \frac{p}{c} + \frac{3p(p+1)}{c^2} + \frac{p(p+1)(p+2)}{c^3} \end{aligned}$$

O momento  $\mu_4^1$  será:

$$\begin{aligned} \mu_4^1 = & \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \left[ \frac{p}{c+1} + \frac{8p(p+1)}{(c+1)^2} + \frac{27p(p+1)(p+2)}{2!(c+1)^3} + \right. \\ & + \frac{64p(p+1)(p+2)(p+3)}{3!(c+1)^4} + \frac{125p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{4!(c+1)^5} + \\ & \left. + \frac{216p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)}{5!(c+1)^6} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\mu_4' = \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \frac{p}{c+1} \left[ 1 + \frac{p+1}{c+1} + \frac{(p+1)(p+2)}{2!(c+1)^2} + \dots + \frac{p+1}{c+1} \left[ 7 + \frac{7(p+2)}{c+1} + \frac{7(p+2)(p+3)}{2!(c+1)^2} + \dots + \frac{(p+2)}{c+1} \left[ 6 + \frac{6(p+3)}{c+1} + \dots + \frac{6(p+3)(p+4)}{2!(c+1)^2} + \dots + \frac{p+3}{c+1} \left[ 1 + \frac{p+4}{c+1} + \frac{(p+4)(p+5)}{2!(c+1)^2} + \dots \right] \right] \right] \right]$$

$$\mu_4' = \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \frac{p}{c+1} \left[ \left(\frac{c+1}{c}\right)^{p+1} + \frac{p+1}{c+1} \left[ 7 \left(\frac{c+1}{c}\right)^{p+2} + \frac{p+2}{c+1} \left[ 6 \left(\frac{c+1}{c}\right)^{p+3} + \left(\frac{p+3}{c+1}\right) \left(\frac{c+1}{c}\right)^{p+4} \right] \right] \right]$$

$$\mu_4' = \frac{p}{c} + \frac{7p(p+1)}{c^2} + \frac{6p(p+1)(p+2)}{c^3} + \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{c^4} .$$

Os momentos com relação à média serão:

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \frac{p}{c} + \frac{p(p+1)}{c^2} - \frac{p^2}{c^2}$$

$$\therefore \mu_2 = \frac{p}{c} \left(\frac{c+1}{c}\right) \quad \text{ou} \quad \mu_2 = p \left(\frac{c+1}{c^2}\right)$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3 \mu_2' \mu_1' + 2 (\mu_1')^3$$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \frac{p}{c} + 3 \frac{p(p+1)}{c^2} + \frac{p(p+1)(p+2)}{c^3} - \\ &\quad - 3 \left[ \frac{p}{c} + \frac{p(p+1)}{c} \right] \frac{p}{c} + 2 \frac{p^3}{c^3} \\ &= \frac{p}{c} \cdot \frac{c+1}{c} \left( \frac{c+1}{c} + \frac{1}{c} \right) \end{aligned}$$

ou

$$\mu_3 = p \left( \frac{c^2 + 3c + 2}{c^3} \right)$$

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \mu_4^i - 4 \mu_3^i \mu_1^i + 6 \mu_2^i (\mu_1^i)^2 - 3 (\mu_1^i)^4 \\ &= \frac{p}{c} + \frac{7p(p+1)}{c^2} + \frac{6p(p+1)(p+2)}{c^3} + \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{c^4} - \\ &\quad - 4 \left[ \frac{p}{c} + 3 \frac{p(p+1)}{c^2} + \frac{p(p+1)(p+2)}{c^3} \right] \frac{p}{c} + \\ &\quad + 6 \left[ \frac{p}{c} + \frac{p(p+1)}{c^2} \right] \frac{p^2}{c^2} - 3 \frac{p^4}{c^4} \\ \mu_4 &= 3 \frac{p^2}{c^2} \left( \frac{c+1}{c} \right)^2 + \frac{p}{c} \cdot \frac{c+1}{c} \left[ 1 + 6 \frac{c+1}{c^2} \right] . \end{aligned}$$

Como se pode ver os cálculos são trabalhosos e sujeitos a erros, embora neste desenvolvimento figurem apenas as passagens principais.

#### 4.2.2.2 - Fórmula de Nogueira

Esta fórmula requer o conhecimento da média e a variância. Segundo NOGUEIRA (24) um momento qualquer



$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \cdot \frac{d}{dm} \mu_n + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

sendo válida esta igualdade para toda função de distribuição  $f(x)$ , que satisfaça a condição seguinte:

$$\frac{d}{dm} f(x) = f(x) \frac{x - m}{\sigma^2}$$

Para o modelo em questão

$$f(x) = \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \frac{\left| \binom{-p}{x} \right|}{(c+1)^x}$$

$$m = p/c \quad ; \quad \frac{dm}{dc} = -\frac{p}{c^2} \quad ; \quad \frac{dc}{dm} = -\frac{c^2}{p}$$

$$\therefore \frac{d}{dm} f(x) = -\frac{c^2}{p} \cdot \frac{d}{dc} f(x)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dm} f(x) &= -\frac{c^2}{p} \left[ p \left(\frac{c}{c+1}\right)^{p-1} \frac{1}{(c+1)^2} \cdot \frac{\left| \binom{-p}{x} \right|}{(c+1)^x} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left| \binom{-p}{x} \right| \cdot (c+1)^{x-1}}{(c+1)^{2x}} \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \right] \\ &= \left(\frac{c}{c+1}\right)^p \frac{\left| \binom{-p}{x} \right|}{(c+1)^x} \left(-\frac{c^2}{p}\right) \left[ \frac{p}{c(c+1)} - \frac{x}{c+1} \right] \\ &= f(x) \left[ \frac{-cp + c^2 x}{p(c+1)} \right] \end{aligned}$$

Dividindo o numerador e o denominador por  $c^2$ , fica:

$$\frac{d}{dm} f(x) = f(x) \left[ \frac{x - \frac{p}{c}}{\frac{p}{c} \cdot \frac{c+1}{c}} \right]$$

mas

$$p/c = m \quad e \quad \frac{p}{c} \left( \frac{c+1}{c} \right) = \sigma^2$$

$$\therefore \frac{d}{dm} f(x) = \frac{x - m}{\sigma^2}$$

#### 4.2.2.3 - Momentos pela fórmula de Nogueira

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} \mu_n + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

$$\mu_2 = \sigma^2 \frac{d}{dm} \mu_1 + \sigma^2 \mu_0$$

mas

$$\mu_1 = 0 \quad e \quad \mu_0 = 1$$

$$\therefore \mu_2 = \sigma^2 = \frac{p}{c} \cdot \frac{c+1}{c}$$

$$\mu_3 = \sigma^2 \frac{d}{dm} \mu_2 + 2 \sigma^2 \mu_1 = \sigma^2 \frac{d}{dm} \mu_2$$

$$\mu_3 = \frac{p}{c} \cdot \frac{c+1}{c} \left( -\frac{c^2}{p} \right) \frac{d}{dc} \left( \frac{p}{c} \cdot \frac{c+1}{c} \right)$$

portanto

$$\mu_3 = \frac{p}{c} \cdot \frac{c+1}{c} \left( -\frac{c+1}{c} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \sigma^2 \frac{d}{dm} \mu_3 + 3 \sigma^2 \mu_2 = 3 \left( \frac{p}{c} + \frac{c+1}{c} \right)^2 + \\ &+ \left( \frac{p}{c} \cdot \frac{c+1}{c} \right) \left( -\frac{c^2}{p} \right) \cdot \frac{d}{dc} \left[ p \left( \frac{c^2 + 3c + 2}{c^3} \right) \right] \\ &= 3 \left( \frac{p}{c} \cdot \frac{c+1}{c} \right)^2 + \frac{p}{c} \cdot \frac{c+1}{c} \cdot \frac{c^4 + 6(c^3 + c^2)}{c^4} \end{aligned}$$

portanto

$$\mu_4 = 3 \left( \frac{p}{c} \cdot \frac{c+1}{c} \right)^2 + \frac{p}{c} \cdot \frac{c+1}{c} \left[ 1 + 6 \left( \frac{c+1}{c} \cdot \frac{1}{c} \right) \right]$$

#### 4.2.2.4 - Por analogia com a binomial generalizada

Não necessita nenhuma demonstração já que se vê a equivalência direta, se por 3.3.3 e 4.1, substituir-se-á os valores de  $\psi$ ,  $\psi$  e  $\kappa$  por seus iguais

$$- p \quad , \quad - \frac{1}{c} \quad e \quad \frac{c+1}{c}$$

e ter-se-á

$$m = \psi = p/c$$

$$\mu_2 = \psi \kappa = \frac{p}{c} \cdot \frac{c+1}{c}$$

$$\mu_3 = \psi \kappa (\kappa - \psi) = \frac{p}{c} \cdot \frac{c+1}{c} \left( \frac{c+1}{c} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\begin{aligned} \mu_4 &= 3 \psi^2 \kappa^2 + \psi \kappa (1 - 6 \kappa \psi) = 3 \left( \frac{p}{c} \cdot \frac{c+1}{c} \right)^2 + \\ &+ \frac{p}{c} \cdot \frac{c+1}{c} \left[ 1 + 6 \left( \frac{c+1}{c} \cdot \frac{1}{c} \right) \right] \end{aligned}$$

Extendendo ao modelo de Yule se terá

$$m = r \frac{q}{p}$$

$$\mu_2 = r \frac{q}{p^2}$$

$$\mu_3 = r \frac{q (q + 1)}{p^3}$$

$$\mu_4 = 3 r^2 \frac{q^2}{p^4} + \frac{r q [(1 + q)^2 + 2 q]}{p^4}$$

## 5 - DISTRIBUIÇÃO INTERFERIDA

### 5.1 - Funções Discretas

Já se viu em 3.3.1 como pode um fenômeno qualquer ser interferido e, como pode aumentar sua expressão estocástica a valores maiores que a unidade.

Neste capítulo se mostrará, em modelos teóricos, com suas correspondentes comparações, como uma distribuição é interferida e como são distorcidos os valores paramétricos.

Suponha-se que um jogador A atira, ao mesmo tempo, oito moedas, repetindo o experimento um número  $N$  de vezes (por exemplo 512), em companhia de um jogador B que pega, em cada lance, as moedas que saíram caras e, volta a jogá-las, dando o resultado obtido a um observador que desconhece as regras do jogo e somente deseja saber o número de caras obtido ao final de cada lance. (Em termos de pesquisa: um fenômeno em estudo, outro que interfere e o pesquisador anotando resultados).

Se se soubesse que há oito moedas, pensar-se-ia de imediato numa distribuição de frequências dada por

$$512 (1/2 + 1/2)^8 ,$$

mas na realidade a distribuição apresenta uma outra forma.

Para cada moeda jogada a probabilidade da não ocorrência de cara, pode suceder de duas maneiras: ou o jogador A obtém coroa, ou obtendo cara, o jogador B, que neste caso torna a jogar a moeda, obtém coroa. Portanto:

Para o Jogador A :  $P(\bar{A}) = q(A) = 1/2$

Para o Jogador B : probabilidade de jogar =  $1/2$

probabilidade de coroa =  $1/2$

$P(B/A) = 1/4$

Portanto:

$$P \text{ coroa (A ou B)} = 1/2 + 1/4 = 3/4 .$$

Em forma de expressão estocástica interferida seria

$$\chi = q(A) + \lambda q(B/A) \quad , \quad \lambda \geq 0$$

$$q(A) = 1/2 \quad , \quad q(B/A) = 1/4 \quad , \quad \lambda = 1 \quad ,$$

um jôgo de B para cada um de A) ,

$$\therefore \chi = 1/2 + 1/4 = 3/4 .$$

Portanto, como o número de moedas não se modifica ao final do jôgo, o binômio em questão é:

$$512 (3/4 + 1/4)^8 .$$

Ao mesmo resultado, de forma detalhada, pode chegar-se, desenvolvendo, para cada eventualidade, como se distribuiriam as frequências (QUADRO IV) .

Como se poderá ver, a distribuição se distorce , baixando a média em 50% e a variância em 25% .

Para comprovar como na realidade se comporta a distribuição, tomaram-se oito moedas e se realizaram 512 lances, com os resultados do QUADRO V .

Para ver mais claro o efeito da interferência, supor-se-á os mesmos jogadores do exemplo anterior, com a diferença de que o jogador B agrega tantas moedas quantas as que saíram caras, dos lances de A , e, juntando-as, volta a jogá-las, o que equivale a duplicar o número de moedas que saíram caras. O desenvolvimento será seguido no QUADRO VI .

$$q(A) = 1/2 \quad , \quad q(B/A) = 1/4 \quad , \quad \lambda = 2$$

$$\therefore \chi = 1/2 + 2(1/4) = 1 .$$

Como se vê, chegou-se ao caso limite da interferência,  $\chi = 1$  , onde ela começa a ser percebida.

Experimentalmente, os resultados obtidos com o último exemplo constam do QUADRO VII .

Como se poderá ver, produziu-se a condição necessária para uma distribuição de Poisson ( $m = \mu_2$ ).

Em verdade não se trata de uma distribuição de Poisson, mas se não se soubesse as condições e o mecanismo do jogo; seria lícito ajustar a série por uma distribuição de Poisson? O certo é que ela se ajusta bem (QUADRO VII).

QUADRO IV

Desenvolvimento das frequências com a interferência  $\lambda = 1$

Número de caras	Frequência não interferida	Jogador B										Frequências finais do jogo
		Número de caras										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8		
	2	2	8	14	14	8,75	3,50	0,875	0,125	0,0078125	51,2578125	
J	16		8	28	42	35,00	17,50	5,250	0,875	0,0625000	136,6875000	
o	56			14	42	52,50	35,00	13,125	2,625	0,2187500	159,4687500	
g	112				14	35,00	35,00	17,500	4,375	0,4375000	106,3125000	
a	140					8,75	17,50	13,125	4,375	0,5468750	44,2968750	
o	112						3,50	5,250	2,625	0,4375000	11,8125000	
r	56							0,875	0,875	0,2187500	1,9687500	
A	16								0,125	0,0625000	0,1875000	
8	2									0,0078125	0,0078125	
		512	2	16	56	112	140,00	112,00	56,000	16,000	2,0000000	512,0000000

$m = 2,00$

$\mu_2 = 1,50$

para oito moedas sem a interferência do jogador B seria

$m = 4,00$

$\mu_2 = 2,00$

## QUADRO V

Frequências obtidas na realização dos 512 lances do QUADRO IV

Número de caras	Frequências Observadas	Jôgo Teórico	Binomial Generalizada
0	49	51,3	54,3
1	141	136,7	137,1
2	162	159,5	155,2
3	104	106,3	103,7
4	40	44,3	45,2
5	9	11,8	13,4
6	5	1,9	2,7
7	2	0,2	0,4
8	.-	.-	.-
Total	512	512,0	512,0

Jôgo Teórico

$$m = 2$$

$$\mu_2 = 1,50$$

$$q = 0,75$$

$$p = 0,25$$

$$n = 8$$

Binomial Generalizada

$$\bar{x} = 2,0039$$

$$s^2 = 1,5890$$

$$\hat{u} = 0,7930 = \hat{q}$$

$$\hat{\psi} = 0,2070 = \hat{p}$$

$$\hat{v} = 9,6780 = \hat{n}$$

Para o jôgo teórico

$$\chi^2 = 1,0621 \text{ para } 5 \text{ G. L., não significativo}$$

Para a Binomial generalizada

$$\chi^2 = 1,5404 \text{ para } 3 \text{ G. L., não significativo.}$$



QUADRO VI

Desenvolvimento das frequências com a interferência  $\lambda = 2$

Jogador A (número de carcas)	Freg. sem Int.	Jogador B (Número de moedas que joga)								Frequências Finais do Jôgo	
		0	2	4	6	8	10	12	14		16
0	2	2	4	3,5	1,75	0,546875	0,109375	0,013671875	0,0009765625	0,000030507578125	11,920968955078125
1	16	8	14,0	10,50	4,375000	1,093750	0,164062500	0,0136718750	0,000288281250000	0,000288281250000	38,146972155250000
2	56	4	21,0	26,25	15,312500	4,921875	0,902243750	0,0888671875	0,003662109375000	0,003662109375000	72,479248046875000
3	112		14,0	35,00	30,625000	13,125000	3,007812500	0,3554687500	0,017089843750000	0,017089843750000	96,130371093750000
4	140		3,5	26,25	38,281250	22,968750	6,767578125	0,9775390625	0,055541992187500	0,055541992187500	98,800659179687500
5	112			10,50	30,625000	27,562500	10,828125000	1,9550781250	0,133300781250000	0,133300781250000	81,604003906250000
6	56			1,75	15,625000	22,968750	12,632812500	2,9326171875	0,244384765625000	0,244384765625000	55,841064453125000
7	16				4,375000	13,125000	10,828125000	3,3515625000	0,349121093750000	0,349121093750000	32,028808593750000
8	2				0,546875	4,921875	6,767578125	2,9326171875	0,392761230147000	0,392761230147000	15,561706542647000
9	--					1,093750	3,007812500	1,9550781250	0,349121093750000	0,349121093750000	6,405761715750000
10	--					0,109375	0,902243750	0,9775390625	0,244384765625000	0,244384765625000	2,233642578125000
11	--					0,164062500	0,164062500	0,3554687500	0,133300781250000	0,133300781250000	0,652832031250000
12	--					0,013671875	0,013671875	0,0888671875	0,055541992187500	0,055541992187500	0,158081054787500
13	--					0,0136718750	0,0136718750	0,0136718750	0,017089843750000	0,017089843750000	0,030761718750000
14	--					0,0009765625	0,0009765625	0,0009765625	0,003662109375000	0,003662109375000	0,004638671875000
15	--					0,000488281250000	0,000488281250000	0,000488281250000	0,000488281250000	0,000488281250000	0,000488281250000
16	--					0,000030517578125	0,000030517578125	0,000030517578125	0,000030517578125	0,000030517578125	0,000030517578125
<b>Totais</b>	<b>512</b>	<b>2</b>	<b>16</b>	<b>56,0</b>	<b>112,00</b>	<b>140,0000000</b>	<b>112,000000</b>	<b>56,000000000</b>	<b>16,00000000000</b>	<b>2,000000000000000</b>	<b>512,000000000000000</b>

QUADRO VII

Frequências obtidas na realização dos 512 lances do QUADRO VI

Número de Caras	Frequência Observada	Jôgo Teórico	Frequências Teóricas de Poisson	Frequências Teóricas Binomial Generalizada
0	9	11,92	9,38	8,88
1	36	38,15	37,51	35,79
2	75	72,48	75,02	73,89
3	98	93,13	100,03	100,73
4	101	98,80	100,03	101,99
5	82	81,60	80,02	80,92
6	54	55,84	53,35	53,41
7	34	32,03	30,48	32,00
8	15	15,56	15,24	14,59
9	5	6,41	6,77	6,25
10	2	2,23	2,71	2,38
11	.-	0,65	0,99	0,81
12	1	0,16	0,33	0,26
13	.-	0,03	0,10	0,07
14	.-	0,01	0,03	0,02
15	.-	.-	0,01	0,01
16	.-	.-		
Totais	512	512,00	512,00	512,00

Jôgo Teórico

$m = 4$

$\mu_2 = 4$

$q = 1$

$p = 0$

$n = ?$

Binomial Generalizada

$\bar{x} = 4,00977$

$s^2 = 3,85705$

$\hat{\lambda} = 0,96191$

$\hat{p} = 0,03809$

$\hat{q} = 105,28023$

Para o jôgo teórico

$$\chi^2 = 1,447 \text{ para } 9 \text{ G. L. , não significativo}$$

Para distribuição de Poisson

$$\chi^2 = 1,384 \text{ para } 8 \text{ G. L. , não significativo}$$

Para Binomial generalizada

$$\chi^2 = 0,5897 \text{ para } 7 \text{ G.L. , não significativo}$$

No modêlo anterior baixou a média com maior velocidade que a variância e neste último modêlo a média permaneceu fixa, mas a variância aumentou. Pode-se dizer então que numa distribuição interferida, ou baixa a média com maior intensidade que a variância, ou esta sobe mais rapidamente que aquela, ou baixa a média e sobe a variância.

Para ver com maior clareza êste efeito, aumentaremos a intensidade da interferência no jôgo de A e B , reduzindo o número de moedas a só quatro, para não complicar os cálculos e fazer mais viável o experimento prático.

A interferência que realiza B é triplicando o número de moedas que jôga em função das caras obtidas por A (QUADROS VIII e IX) .

$$q(A) = 1/2$$

$$q(B/A) = 1/4$$

$$\lambda = 3$$

$$\mu = \frac{1}{2} + 3 \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\psi = - \frac{1}{4} .$$

QUADRO VIII

Desenvolvimento das frequências com a interferência  $\lambda = 3$

		Frequên- cia sem interfe- rir	Jogador B (número de moedas em jogo)					Frequências finais do Jogo
			0	3	6	9	12	
Joga- dor A (Núme- ro de caras)	0	32	32	16	3	0,25	0,0078125	51,2578125
	1	128		38	18	2,25	0,0937500	68,3437500
	2	192		48	45	9,00	0,5156250	102,5156250
	3	128		16	60	21,00	1,7187500	98,7187500
	4	32			45	31,50	3,8671875	80,3671875
	5				18	31,50	6,1875000	55,6875000
	6				3	21,00	7,2187500	31,2187500
	7					9,00	6,1875000	15,1875000
	8					2,25	3,8671875	6,1171875
	9					0,25	1,7187500	1,9687500
	10						0,5156250	0,5156250
	11						0,0937500	0,0937500
12						0,0078125	0,0078125	
Totais		512	32	128	192	128,00	32,0000000	512,0000000

## QUADRO IX

Frequências obtidas na realização dos 512 lances do QUADRO X

Número de Caras	Frequências Observadas	Jogo Teórico	Frequências Teóricas de Poisson	Frequências Teóricas Binomial Generalizada
0	43	51,26	23,68	32,19
1	71	68,34	72,79	80,42
2	104	102,51	111,83	107,74
3	100	98,72	114,57	103,15
4	78	80,36	88,05	78,92
5	53	55,69	54,15	52,26
6	35	31,22	27,75	29,35
7	18	15,14	12,20	15,19
8	8	6,12	4,69	7,23
9	2	1,97	1,60	3,22
10	.-	0,52	0,48	1,35
11	.-	0,09	0,15	0,53
12	.-	0,01	0,04	0,20
--	.-	.-	0,01	0,07
--	.-	.-	.-	0,03
Totais	512,00	512,00	512,00	511,85

Jôgo Teórico

Binomial Generalizada

m = 3,00

$\bar{x}$  = 3,0742

$\mu_2$  = 3,75

$s^2$  = 3,7836

$\kappa$  = 1,25

$\hat{\kappa}$  = 1,2307

$\psi$  = - 0,25

$\hat{\psi}$  = - 0,2307

$\nu$  = -12,00

$\hat{\nu}$  = - 13,3260

Para o jôgo teórico

$\chi^2 = 2,8455$  para 8 G. L. , não significativo.

Para distribuição de Poisson

$\chi^2 = 24,0285^{**}$  , com 7 G. L.

Para Binomial generalizada

$\chi^2 = 7,1236$  com 6 G. L. , não significativo.

Neste modelo vê-se que a variância ultrapassa a média, levando a distribuição a uma binomial negativa.

Nos QUADROS X e XI se apresenta uma distribuição de Bryobia rubroculus , em 100 fôlhas de macieiras, no primeiro caso em zonas expostas ao vento e no segundo em zonas abrigadas.

Como se poderá notar a distribuição está interferida pela ação dos ventos, sendo uma binomial negativa, enquanto que, onde não sofre a influência daqueles, se distribui segundo uma série de Poisson como era de se esperar.

QUADRO X

Distribuição de "Arañuela parda" (Bryobia rubrioculus)  
em 100 fôlhas de macieiras (\*)

Número de Acaros	Frequências Observadas	Frequências Teó- ricas de Poisson	Frequências Teó- ricas Binomial Generalizada
0	26	21,2	28,3
1	35	32,9	29,5
2	18	25,5	20,2
3	9	13,2	11,4
4	6	5,1	5,8
5	4	1,6	2,7
6	1	0,4	1,2
7	1	0,1	0,5
8	.-	.-	0,2
Mais de 8	.-	.-	0,1
Totais	100	100,0	100,0

$\bar{x} = 1,550$

$\hat{\mu} = 1,4907$

$\hat{\sigma} = - 3,1587$

$s^2 = 2,3106$

$\hat{\psi} = - 0,4907$

Para a distribuição de Poisson:

$\chi^2 = 9,1695 *$  , para 3 G. L.

Para a Binomial generalizada

$\chi^2 = 2,1421$  , para 2 G. L. não significativo

(\*) Dados gentilmente oferecidos pelo Eng.<sup>o</sup>-Agr.<sup>o</sup> J. Gianotti

## QUADRO XI

Distribuição das Bryobias em zonas abrigada, perto da alameda

Número de Acaros	Frequências Observadas	Frequências Teó- rica de Poisson	Frequências Teóricas Binomial Generalizada
0	3	7,4	7,1
1	25	19,3	18,8
2	29	25,1	24,7
3	19	21,8	24,4
4	10	14,1	13,7
5	8	7,4	7,0
6	4	3,2	2,9
7	2	1,2	1,0
8	.-	0,4	0,3
9	.-	0,1	0,1
Totais	100	100,0	100,0

$$\bar{x} = 2,5800$$

$$\hat{\lambda} = 0,9723$$

$$\hat{\psi} = 93,2084$$

$$s^2 = 2,5086$$

$$\hat{\psi} = 0,0277$$

Para distribuição de Poisson

$$\chi^2 = 3,0258 \text{ não significativo para } 3 \text{ G. L.}$$

Para Binomial generalizada

$$\chi^2 = 3,7584 \text{ não significativo para } 2 \text{ G. L.}$$

Também mostram o efeito de uma interferência, um grupo de famílias classificadas pelo número de filhos vivos (27). (QUADROS XII e XIII).



## QUADRO XII

Distribuição de 137 famílias pelo número de filhos vivos.  
 Dados obtidos das tribos de Ancatrúz, Longuitran e Mel-  
 lado Morales - Província de Neuquén, Argentina, 1964  
 (27).

Número de Filhos Vivos	Frequências Observadas	Frequências Teóricas de Poisson	Frequências Teóricas Binomial Generalizada
0	5	2,5	3,4
1	17	10,0	11,7
2	23	20,1	20,8
3	22	26,8	25,6
4	20	26,8	24,7
5	17	21,4	19,7
6	14	14,3	13,6
7	8	8,2	8,4
8	5	4,1	4,7
9	3	1,8	2,3
10	2	0,7	1,2
11	1	0,3	0,6
Mais de 11	-	-	0,3
Totais	137	137,0	137,0

$$\bar{x} = 4,0000$$

$$\hat{\mu} = 1,1765$$

$$\hat{\psi} = -22,6667$$

$$s^2 = 4,7059$$

$$\hat{\psi} = -0,1765$$

Para distribuição de Poisson

$$\chi^2 = 13,7556^* \text{ , para 6 G. L.}$$

Para Binomial generalizada

$$\chi^2 = 5,5847 \text{ não significativo, para 6 G. L.}$$

## QUADRO XIII

Distribuição de 48 famílias do QUADRO XII , onde a idade da mulher estava entre 20 e 25 anos

Número de Filhos Vivos	Frequências Observadas	Frequências Teóricas de Poisson	Frequências Teóricas Binomial Generalizada
0	4	3,6	3,5
1	9	9,3	9,4
2	12	12,1	12,3
3	10	10,4	10,6
4	7	6,8	6,7
5	4	3,5	3,4
6	2	1,5	1,4
Mais de 6	-	0,8	0,7
Total	48	48,0	48,0

$$\bar{x} = 2,5625$$

$$\hat{\mu} = 0,9616$$

$$\hat{\nu} = 66,7285$$

$$s^2 = 2,4641$$

$$\hat{\psi} = 0,0384$$

Para a distribuição de Poisson:

$$\chi^2 = 0,0831 , \text{ não significativo para } 3 \text{ G. L.}$$

Para a Binomial generalizada:

$$\chi^2 = 0,2099 , \text{ não significativo para } 2 \text{ G. L.}$$

No QUADRO XII , a distribuição está interferida pelo número de filhos mortos que abaixa a média e aumenta a variância. Pelo contrário, no QUADRO XIII , embora o número de dados seja escasso, pode-se ver que aquela in-

terferência não chega a afastá-la de uma série de Poisson, dado o pequeno intervalo de tempo em que estejam classificadas a mais.

## 5.2 - Funções Contínuas

O fenômeno da interferência, mostrado em 5.1, apenas seria possível ser aplicado no campo contínuo, mas se pode dizer que: se se toma uma quantidade suficientemente grande de dados, de um fenômeno contínuo, e se os agrupa em uma distribuição de frequências e, em intervalos de classe segundo as fórmulas

$$a = \frac{V_M - V_m}{n}$$

sendo  $n$  o número natural mais próximo do valor da expressão

$$n = \frac{\log N}{\log 2} + 1$$

$a$  = amplitude do intervalo de classe

$V_M - V_m$  = amplitude total de variação

$n$  = número de intervalos

$N$  = universo (número total de dados).

Atribuindo-se o valor zero ao primeiro intervalo, correspondente ao zero da distribuição contínua, e assim sucessivamente, em correspondência unívoca com a sucessão natural dos números, aos demais intervalos, aquela distribuição ficará descontínua e pode ser aplicada a técnica da binomial generalizada, e, se se desejar maior precisão ainda, poder-se-ão corrigir as frequências teóricas por diferenças finitas.

Os QUADROS XIV e XV sobre dados de Chuvas em dois meses, um seco (Julho) e outro chuvoso (Janeiro) durante 67 anos, em Campinas (12), mostram por si só a excelência do ajuste.

## QUADRO XIV

Distribuição das chuvas do mês de Julho em Campinas , no período de 1896 a 1956 .

mm. de chuva	x	Frequência Observada	Frequência Teórica de Poisson	Frequências Teóricas Binomial Generalizada
0 - 21	0	40	27,0	37,2
21 - 42	1	12	24,5	15,3
42 - 63	2	6	11,2	7,2
53 - 84	3	4	3,4	3,6
84 - 105	4	3	0,8	1,9
105 - 126	5	-.-	0,1	1,0
126 - 147	6	2	-.-	0,5
147 - 168	7	-.-	-.-	0,3
Total		67	67,0	67,0

$$\bar{x} = 0,9104$$

$$\hat{\mu} = 2,2710$$

$$\hat{\nu} = - 0,7163$$

$$s^2 = 2,0676$$

$$\hat{\psi} = - 1,2710$$

Para a distribuição de Poisson:

$$\chi^2 = 17,7392^{***}, \text{ para } 2 \text{ G. L.}$$

Para a Binomial generalizada:

$$\chi^2 = 1,9090, \text{ não significativo, para } 3 \text{ G. L.}$$

## QUADRO XV

Distribuição das chuvas do mês de Janeiro, em Campinas, no período de 1896 a 1956 .

mm. de chuva	x	Frequências Observadas	Frequências Teóricas de Poisson	Frequências Teóricas Binomial Generalizada
0 - 83	0	1	5,8	3,2
83 - 166	1	12	14,2	12,3
166 - 249	2	27	17,4	21,2
249 - 332	3	17	14,1	18,2
332 - 415	4	6	8,7	9,7
415 - 498	5	2	4,2	1,8
498 - 581	6	1	1,7	0,5
581 - 664	7	1	0,6	0,1
664 - 747	8	..	0,2	..
Total		67	66,9	67,0

$$\bar{x} = 2,4478$$

$$\hat{\lambda} = 0,6349$$

$$\hat{\nu} = 6,7041$$

$$s^2 = 1,5540$$

$$\hat{\psi} = 0,3651$$

## 6 - INTERFERÊNCIAS SEM BINOMIAL GENERALIZADA

No Capítulo 5 da tese, se demonstraram os efeitos de uma interferência. Mas é necessário esclarecer que esta nem sempre levará a uma binomial e porém a uma binomial negativa, dependendo, a distribuição final, não somente em si só, mas da amplitude do fenômeno interferido, como também de sua própria distribuição, além da forma e natureza com que incide a interferência.

Casos há, que embora fazendo-se os cálculos, como no referido capítulo, determina-se a média e a variância com exatidão. Entretanto, se se desenvolve a série binomial, o resultado não confere com o verdadeiro desenvolvimento do esquema proposto já que, por vezes, chega-se a uma bi-modal, como no QUADRO XVI, onde se supõe um jogo como o do 5.1, mas somente com duas moedas e triplicando o número de moedas em que saem caras.

Segundo o critério de interferência o desenvolvimento estaria dado pelo binômio

$$(5/4 - 1/4)^{-6},$$

para  $\lambda = 3$  e  $n = 2$ .

Portanto a média e a variância seriam

$$m = -6(-1/4) = 1,50$$

$$\mu_2 = -6(-1/4)(5/4) = 1,875,$$

e como se poderá ver, o resultado é o mesmo que aquele proveniente do verdadeiro desenvolvimento, apesar de que as frequências calculadas por este último não são iguais às calculadas por aquele binômio.

Pode provir este fato, a que só se tomaram, para a distribuição generalizada, os dois primeiros momentos.

É evidente que  $\lambda$  deve haver restrições que o autor tratou de pesquisar, mas com resultado negativo. Pode-se obter, empiricamente que quando o

valor de  $\lambda$  (interferência) excede o valor de  $n$  (expoente do binômio sem a interferência) a distribuição apresenta-se na forma dita anteriormente. No caso exposto  $\lambda = 3$  e  $n = 2$ .

O fato é de natureza puramente teórica já que o parâmetro  $\lambda$  só é estimável quando são conhecidas as regras do jogo, o que na prática dificilmente pode ocorrer.

Como no caso dos jogadores supor-se-á que o jogo de A se distribui normalmente e B joga novamente as frequências obtidas por A com uma distribuição também normal e, para facilitar os cálculos se suporá que ambas, sobre um universo  $n = 1.000$ , possuem média zero e variância um. (QUADRO XVII)

QUADRO XVI

Distorção da distribuição quando  $\lambda > n$  ( $\lambda = 3$  ;  $n = 2$ )

	Frequências	Jogador B N.º de Moedas Jogadas			Frequências Totais	Binomial Negativa	
		0	3	6			
Jogador A	0	128	128	32	2	162	134,22
Número de moedas jogadas	1	256	..	96	12	108	161,06
	2	128	..	96	30	126	112,74
	3	..	..	32	40	72	60,13
	4	..	..	..	30	30	27,06
	5	..	..	..	12	12	10,82
	6	..	..	..	2	2	3,97
Totais		512	128	256	128	512	1,36
							0,40
							0,20
							512,00

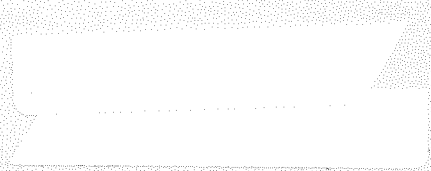
$$m = \frac{768}{512} = 1,50$$

$$\mu_2 = \frac{2112 - 1152}{512}$$

$$= 1,875$$

Como se pode ver, a distribuição resultante é normal, com  $\beta_1 = 0$  e  $\beta_2 = 2,9996 \approx 3$  e, o mais interessante é que todo o desenvolvimento dá uma superfície de correlação, o que permitiria definir a correlação, como a medida da interferência de uma distribuição sobre outra. QUADRO XVII

5-115





QUADRO XVII

(continua)

Desenvolvimento das frequências de duas distribuições normais que interferem-se

		Frequência do Jogador B para					
		- 5	- 4	- 3	- 2	- 1	0
	- 8	0,00002	0,00005	0,00002			
	- 7	0,00020	0,00137	0,00137	0,00020		
	- 6	0,00082	0,01389	0,03573	0,01387	0,00082	0,00001
Frequên-	- 5	0,00129	0,05540	0,36220	0,36220	0,05540	0,00129
cias do	- 4	0,00082	0,08777	1,44485	3,67206	1,44485	0,08777
Joga-	- 3	0,00020	0,05570	2,28878	14,64825	14,64825	2,28878
dor A	- 2	0,00002	0,03189	1,40485	23,20430	58,43354	23,20430
para	- 1		0,00137	0,36220	14,64825	92,56458	92,26458
	0		0,00005	0,03573	3,67206	58,43354	146,63156
	1			0,00137	0,36220	14,64825	22,56458
	2			0,00002	0,01389	1,44485	23,20430
	3					0,05520	2,28872
	4					0,00082	0,08777
	5						0,00129
	6						0,00001
	7						
	8						
Frequências Totais		0,00337	0,22919	5,97712	60,59730	241,73030	382,92602

## QUADRO XVII

(continuação)

		Frequência do Jogador B para					Frequências Totais
		1	2	3	4	5	
	- 8						0,00009
	- 7						0,00314
	- 6						0,06516
	- 5						0,83778
Frequên-	- 4	0,00082					6,73894
cias do	- 3	0,05540	0,00020				33,98526
Joga-	- 2	1,44485	0,01389	0,00002			107,75966
dor A	- 1	14,64825	0,36220	0,00137			215,15280
para	0	58,43354	3,67206	0,03573	0,00005		270,91432
	1	92,56458	14,64825	0,36220	0,00137		215,15280
	2	58,43354	23,20430	1,44485	0,01389	0,00002	107,75966
	3	14,64825	14,64825	2,28878	0,05540	0,00020	33,98526
	4	1,44685	3,67206	1,44485	0,08777	0,00082	6,73894
	5	0,05540	0,36220	0,36220	0,05540	0,00129	0,83778
	6	0,00082	0,01389	0,03573	0,01389	0,00082	0,06516
	7		0,00020	0,00137	0,00137	0,00020	0,00314
	8			0,00002	0,00005	0,00002	0,00009
Frequências Totais		241,73030	60,59730	5,97712	0,22919	0,00337	999,99998

7 - TRANSFORMAÇÃO DE DADOS

A distribuição binomial negativa, é assimétrica, corresponde, quando se faça análise de variância com tais dados, a que estes sejam transformados.

Para o caso geral (7) a variável  $X_i$  é transformada numa nova variável  $f(X)$  suposta normal, e independentemente distribuída, com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , que para uma amostra  $n$  é representada simbolicamente por

$$dF(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [f(X_i) - \mu]^2} \prod_{i=1}^n dF(X_i)$$

Se se conhece a distribuição da variável  $X_i$  é possível achar a de  $f(X_i)$  mais adequada para normalizar os dados.

Para o caso em que a variância é uma função da média, ter-se-á

$$\sigma^2 = g(\mu)$$

e a transformação aproximada é fornecida pela integral indefinida

$$\int \frac{dX}{\sqrt{g(X)}} = f(X) .$$

Por ser no caso da binomial negativa

$$\frac{\sigma^2}{\mu} = \kappa$$

obtemos

$$\sigma^2 = \kappa \mu$$

$$\therefore \int \frac{dX}{\sqrt{\kappa X}} = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{X} ,$$

pois  $\frac{2}{\sqrt{\kappa}}$  é uma constante, não influi sobre a análise de variância e

$$\therefore f(X_i) = \sqrt{X_i} ,$$

transformação esta, igual à que se usa para o caso de Poisson.

Pode-se também fazer a correção segundo a fórmula  $\sqrt{X_i + 0,5}$ , embora seja mais conveniente a forma

$$\sqrt{X_i + a}$$

onde  $a$  é um valor de ajuste que poderá ser calculado por recorrência.

Como não se dispunha de dados fornecidos por outras pesquisas, tomou-se a distribuição de Bryobia do QUADRO X, sendo elaborados cartões com os números 0, 1, 2, etc., em quantidade correspondente a sua respectiva frequência e de onde se tiraram cinco amostras de dez dados cada, com a reposição dos cartões.

Uma daquelas amostras (consideradas como tratamentos) foi sorteada para que seus dados fossem abaixados de uma unidade (menos os zeros) como se um tratamento qualquer tivesse a propriedade de diminuir a população, para ter a certeza de que um deles diferiria dos restantes.

Nesse sorteio foi favorecida a Amostra IV, QUADRO XVIII.

Nos QUADROS XIX, XX, XXI e XXII, figuram as análises de variância dos dados sem transformação e transformados pelas fórmulas anteriormente apontadas.

Como se poderá ver, no primeiro caso, o valor de  $F$  não acusa diferenças significativas entre amostras, embora se saiba que a Amostra IV é diferente das outras. Mas os dados transformados pela  $\sqrt{X}$  e  $\sqrt{X + 0,5}$  acusam valores de  $F$  significativos para o nível de 5% de probabilidade.

Testados pelo teste de Tukey, os dados transformados pela fórmula  $\sqrt{X}$  só apresentam diferenças entre os Tratamentos III e IV (QUADRO XXI) e aqueles transformados pela fórmula  $\sqrt{X + 0,5}$ , não apresentam diferenças significativas, devido ao fato de que este teste é muito rigoroso, pois se pode comprovar, pelo teste de  $t$ , que há contrastes ortogonais significativos.

Porém, seria melhor transformar os dados pela fórmula  $\sqrt{X + a}$ , dado  $a$  por recorrência, para quem desejasse trabalhar com uma maior precisão.

Nos casos em que os dados provenientes de uma binomial negativa são expressos em porcentagens, embora não se dê exemplo, a transformação, por analogia com a binomial positiva, será

$$\int \frac{dX}{\sqrt{X(1-X)}} = 2 \text{ arc sen } \sqrt{X}$$

ou para melhorar a normalização

$$f(X) = \text{arc sen } \sqrt{X + a}$$

determinando  $a$  por recorrência.

QUADRO XVIII

Dados das Amostras

Sem transformação						Transformação por $\sqrt{X}$					Transformação por $\sqrt{X + 0,5}$				
I	II	III	IV	V		I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
1	0	1	0	5		1,0	0,00	1,00	0,00	2,24	1,22	0,71	1,32	0,71	2,35
1	1	1	0	5		1,00	1,00	1,00	0,00	2,24	1,22	1,22	1,22	0,71	2,35
2	5	4	1	1		1,41	2,24	2,00	1,00	1,00	1,58	2,35	2,12	1,22	1,22
1	4	3	2	4		1,00	2,00	1,73	1,41	2,00	1,22	2,12	1,87	1,58	2,12
3	5	5	1	1		1,73	2,24	2,24	1,00	1,00	1,87	2,35	2,35	1,22	1,22
0	2	3	0	1		0,00	1,41	1,73	0,00	1,00	0,71	1,87	1,87	0,71	1,22
0	2	1	0	1		0,00	1,41	1,00	0,00	1,00	0,71	1,22	1,22	0,71	1,22
3	1	1	0	1		1,73	1,00	1,00	0,00	1,00	1,87	1,22	1,22	0,71	1,22
0	1	0	1	2		0,00	1,00	0,00	1,00	1,41	0,71	0,71	0,71	1,22	1,58
4	6	4	0	0		2,00	0,00	2,00	0,00	0,00	2,12	2,12	2,12	0,71	0,71
Total	15	21	23	5	21	9,87	12,30	13,70	4,41	12,89	13,23	15,89	15,42	9,50	15,21
$\bar{X}$	1,5	2,1	2,3	0,5	2,1	0,987	1,230	1,370	0,441	1,289	1,323	1,589	1,592	0,950	1,521

## QUADRO XIX

Análise de variância dos dados não transformados

Causas de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amostras	4	21,6	5,400	2,15
Resíduo	45	112,9	2,500	
Total	49	134,5		

$$F_{05} = 2,58$$

## QUADRO XX

Análise de variância dos dados transformados pela fórmula  $\sqrt{X}$ 

Causas de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amostras	4	5,658732	1,414633	2,792 *
Resíduo	45	22,800390	0,506675	
Total	49	28,459122		

Teste de Tukey:  $\Delta = 0,905$ 

## QUADRO XXI

Amostras	I	II	III	IV	V	$\bar{X}$
I	////	.-	.-	.-	.-	0,987
II		////	.-	.-	.-	1,230
III			////	*	.-	1,370
IV				////	.-	0,441
V					////	1,289

## QUADRO XXII

Análise de variância dos dados transformados pela fórmula

$$\sqrt{X + 0,5}$$

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amostras	4	2,45530	0,738825	2,630 *
Resíduo	45	12,64055	0,280901	
Total	49	15,59585		

Teste de Tukey:  $\Delta = 6,71 > 0,642$

que é a diferença máxima entre médias de tratamentos

Teste de  $\underline{t}$

$$\hat{Y} = \hat{m}_1 + \hat{m}_2 + \hat{m}_3 - 3 \hat{m}_4 = 1,654$$

$$\hat{V}(\hat{Y}) = 0,5806$$

$$t = 2,849 ** \quad .$$

## 8 - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES

Foi permitido ver-se, através de todo o desenvolvimento desta tese, que uma interferência é algo que desconhecemos "a priori", e somente a distorção que oferece a série nos faz suspeitar de sua existência. Quanto ao conhecimento dela, é algo fluido e na maioria das vezes impreciso e depende do critério com que é julgada. Por exemplo, a variação de risco a que se referem GREENWOOD e YULE (15), não é mais que a interferência que provoca cada indivíduo com seu maior ou menor conhecimento do perigo de acidente a que está exposto e seu distinto grau de confiança em si mesmo, sobre uma distribuição que, possivelmente, fôra binomial comum se não existissem tais condições.

A mortandade de indivíduos em um meio hostil, ou frente a uma doença, se verá interferida pela resistência a êsse mesmo meio ou doença.

Até no caso das distribuições de chuvas poder-se-ia dizer que estão interferidas por ação de outros agentes climáticos, como por exemplo, ação dos ventos, e que determinam maiores ou menores condições de viabilidade.

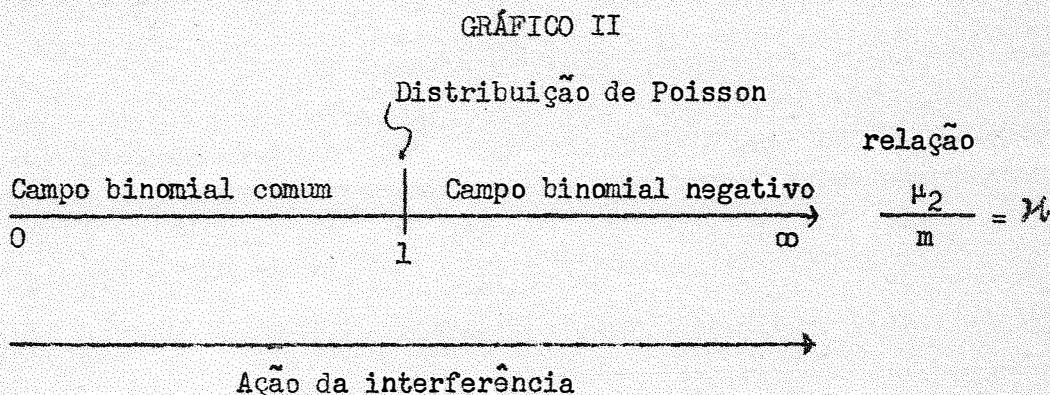
No caso especial da distribuição de Poisson, pode-se dizer que também é uma binomial interferida, por uma causa tal, que faz a probabilidade  $q$  tender à unidade, e  $p$  a zero, dando-lhe o carácter de acontecimento raro. Se é fortemente interferida por essa ou outras causas, será levada a uma binomial negativa.

Para dar uma idéia mais clara, apesar de não possuir dados sobre o fato a expor, que confirmem este raciocínio, dir-se-á que, por exemplo: o número de falecimentos por dia que há numa população suficientemente grande é algo que se distribui regularmente (quase forma normal), mas se se anotaram somente os suicídios, êstes são produzidos pela influência de fatores pessoais, que os faz caso raro e, se tais fatos foram pesquisados numa época de depressão econômica, desastre social ou político-social, é bem possível que já não



se encontrará uma distribuição de Poisson, senão uma distorção dela, por interferência daquelas causas, que a faça chegar a uma binomial negativa.

Para ser mais claro ainda, pode-se exprimir tais fatos segundo o GRÁFICO II .



Quando a binomial generalizada é uma binomial negativa demonstra-se que para valores fixos de  $K$  e  $\psi$ , a medida que  $N$  tende a  $-\infty$  a série se vai normalizando e apresenta uma imagem virtual da tendência à normalidade de uma binomial comum.

Casos há em que a interferência distorce a distribuição de tal forma que já não segue uma binomial generalizada, proporcionando-se mais de uma moda e, em outros, ainda que altere a distribuição, não altera a sua natureza, pelo que deve ter-se precaução ao aplicar a distribuição binomial generalizada.

Nos casos em que se aplique análise de variância a dados que apresentem uma distribuição binomial negativa é conveniente transformar aquêles dados pela fórmula  $\sqrt{X + a}$  e nos casos em que as contagens sejam expressas em porcentagem dever-se-á transformá-las pela fórmula  $\arcsen \sqrt{X + a}$ .

A fórmula binomial generalizada que se propõe, apresenta vantagens sobre as outras fórmulas por:

- 1.º) Singelez na compreensão de seus fundamentos, pois se associa a uma distribuição binomial comum conhecida.
- 2.º) Facilidade de cálculos.
- 3.º) Determinação direta dos momentos.
- 4.º) Unificação de três distribuições ( binomial de Poisson e binomial negativa ) em uma só.
- 5.º) Poder-se-á aplicar também, com cautela, a fenômenos contínuos.

9 - RESUMO

Devido a uma anomalia relativa à distribuição de Poisson em contagens de leveduras, o autor chegou a uma distribuição binomial que não é mais que o modelo de GREENWOOD e YULE, mas por diferente caminho e com o conceito de interferência.

Apresenta o esquema de YULE

$$p^r (1 - 2)^{-r}$$

e o de GREENWOOD e YULE

$$\left(\frac{c}{c+1}\right)^p \left(1 - \frac{1}{c+1}\right)^{-p}$$

Baseado na relação  $\frac{\mu_2}{m}$  determina o que denomina expressão estocástica, dado que essa relação quando é maior que um escapa ao conceito de probabilidade

$$\frac{\mu_2}{m} = \frac{n p q}{n p} = q$$

$$0 \leq q \leq 1$$

Essa expressão estocástica é simbolizada pela letra grega  $\chi$ .

Demonstra o autor que ela pode ser maior, igual ou menor que a unidade, segundo seja a intensidade da interferência. Determina que à outra expressão estocástica  $\psi$  deve-se somar um e que o sinal de  $\chi$  será igual ao do  $\psi$ , isto é, será negativo.

Desenvolve o binômio

$$(\chi + \psi)^\chi$$

demonstrando sua tendência à normalidade quando  $\chi$  cresce em valor absoluto.

Apresenta a equivalência desta distribuição, com os modelos de YULE e GREENWOOD e YULE, enumerando as vantagens apresentadas sobre estas.

Sobre a hipótese da interferência, construiu esquemas teóricos para apresentar como se distorce uma binomial até chegar à binomial negativa, bastando-se no modelo

$$\chi = q(A) + \lambda q(B) ,$$

sendo  $q(A)$  a probabilidade contrária da distribuição de  $A$  ;  $q(B)$  a probabilidade contrária da distribuição  $B$  que interfere e  $\lambda$  o coeficiente de interferência.

Com exemplos práticos mostra a realidade de suas afirmações, transferindo-as ao campo contínuo.

Refere-se, porém, à casos onde não se produz a binomial generalizada, alertando sobre seu uso indiscriminado.

Para as contagens que sigam a distribuição binomial negativa, ter-se-á que fazer transformação dos dados pela fórmula  $\sqrt{X + a}$  , ou, se forem expressos em porcentagem, pela fórmula  $\text{arc sen } \sqrt{X + a}$  .

As conclusões a que se chega, finalmente, são:

- 1.º) Maior singelez.
- 2.º) Facilidade nos cálculos.
- 3.º) Determinação direta dos momentos.
- 4.º) Unificação das três distribuições.
- 5.º) Aplicabilidade a fenômenos contínuos.

10 - BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- 1 - ANSCOMBE, F. I. - 1950 - Sampling Theory of the Negative Binomial and Logarithmic Series Distributions. Biometrika, vol. 35, pp. 358-382.
- 2 - ARLEY, N. - 1943 - Stochastic Proces and Cosmic Radiation. G.E. C. Gads Forlag, Copenhagen.
- 3 - BATES GRACE, E. and NEYMAN, J. - 1952 - Contributions to the Theory of Accident Pronness, I, II, Univ. of California, Publications in Statistics, Vol. 1, n.º 9, 10, pp. 215-234, 255-276.
- 4 - BUSH, R. R. and E. MOSTELLER - 1955 - Stocastics Models for Learning. John Wiley and Sons, New York.
- 5 - CRAMER, H. - 1953 - Métodos Matemáticos de Estadística. Versão Espanhola por Enrique Cansado, Aguilar S. A., Madrid.
- 6 - EGGENBERGER, F. und PÓLYA, G. - 1923 - Über Die Statistik verketteter Vorgänge, Zeitschrift für Angew, Mathematik um Mechanik, Vol. 1, pp. 279-289.
- 7 - FEDERER, W. T. - 1955 - Experimental Design. The McMillan Co., New York.
- 8 - FISHER, R. A. - 1941 - The Negative Binomial Distribution. Annals of Eugenics, Vol. XI, Pt. II, pp. 182-187. Reimpressão de Contributions to Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, Inc., 1950.
- 9 - FISHER, R. A., CORBET, A. S. and WILLIAMS, S. B. - 1942 - The Relation between the Number of Species and Individuals in Samples of an Animal Population. Jur. of Animal Ecology, Vol. 12, n.º 1, pp. 42-58.

- 10 - FREEMAN, H. - 1963 - Introduction to Statistical Inference. Addison Wesley Publ. Co. Inc. Massachusetts.
- 11 - GENERAL ELECTRIC COMPANY - 1962 - (Defense Systems Department). Tables of the Individual and Accumulative Terms of Poisson Distribution, D. van Nostrand Co. Inc., Princeton New Jersey.
- 12 - GODOY, H., NOGUEIRA, I. RANGEL e PIMENTEL GOMES, F. - 1961 - Análise Estatística de Dados Pluviométricos de Campinas. Bragantia. Bol. Tec. do Instituto Agrônômico do Estado de S. Paulo. Vol. 20, Campinas.
- 13 - GOSSET, W. S. - 1907 - On the Error of Counting with a Haemocytometer. Biometrika, V, p. 351. Consultado em Student's Collected Paper, Edited by E. S. Pearson and John Wishart. Biometrika Trustees, University Press, Cambridge, 1958.
- 14 - GREENWOOD, M. - 1950 - Accident Proness. Biometrika, Vol. 37, pp. 24-29.
- 15 - GREENWOOD, M. and YULE, G. U. - 1920 - An Enquiry Into the Nature of Frequency Distributions Representative of Multiple Happenings with Particular Reference of Multiple Attacks of Disease or of Repeated Accidents. Jur. Roy. Stat. Soc., Vol. 83, pp. 255-279.
- 16 - HALDANE, J. B. S. - 1941 - The Fitting of Binomial Distributions. Ann. Eugen. 11, 179, London.
- 17 - JOHNSON, N. L. - 1957 - Uniqueness of a Result in the Theory of Accident Proness. Biometrika, Vol. 44, pp. 530-531.
- 18 - KEMPTHORNE, O. e colb. - 1954 - Statistics and Mathematics in Biology. The Iowa State College Press, Ames, Iowa.

- 19 - KENDALL, M. G. - 1947 - The Advanced Theory of Statistics. G. Griffin and Co. Ltd. , London.
- 20 - LA VALLÉE POUSSIN, Ch. - J. de - 1938 - Cours d'Analyse Infinitésimale , Tom. I , 8<sup>a</sup> ed , Gauthier Villars , Paris.
- 21 - LUNDBERG, O. - 1940 - On Random Processes and their Application to Sickness and Accident Statistics. Upsala Almquist and Wiksells.
- 22 - MISSES von, R. - 1939 - Probability Statistics an Truth. Versão Inglesa por L. Neyman y colab. The Mac Millan Co. New York.
- 23 - NEWBOLD, E. - 1927 - Practical Applications of the Estatistics of Repeated Events, Particulary to Industrial Accidents. Jour. Roy. Stat. Soc. Vol. 90 , pp. 487 .
- 24 - NOGUEIRA, I. RANGEL - 1965 - Fórmula Geral para Obtenção dos Momentos nas Distribuições Binomial , Poisson e Normal. Bol. Didático da E. S. A. "Luiz de Queiroz" . USP. , n.º 12 , Piracicaba. S. Paulo.
- 25 - PEARSON, E. S. and HARTLEY, H. O. - 1956 - Biometrika Tables for Statisticians. Vol. I .
- 26 - PIEDRABUENA, A. E. - 1952 - Distribuciones no Poissonianas de las Levaduras en las Platinas. Comunicación al 1.<sup>er</sup> Coloquio de Estadística. U. N. C. Mendoza. Estocástica , Soc. Arg. de Estadística n.º 1 , pg. 17 . 1953 .
- 27 - PIEDRABUENA, A. E. - 1963 - La Familia Indígena y sus Problemas en la Provincial del Neuquén . Inf. Inéd.
- 28 - PIEDRABUENA, A. E. y CHRISTENSEN, J. R. - 1952 - Estudio Estadístico de un Filoxericida. Actas del 1.<sup>er</sup> Congreso Regional Anti-filoxérico y de Sanidad Vitícola. U. N. C. Mendoza , Argentina.

- 29 - PIEDRABUENA, A. E. , MAVEROF, A. y DEIS, P. - 1950 - Influencia de la Capacidad de la Vasija sobre el Número y Distribución de las Levaduras. Rev. de la Facultad de Ciencias Agrarias. U. N. C. , Tomo II , n.º 2 , pp. 17-34 .
- 30 - PIMENTEL GOMES, F. - 1963 - Curso de Estatística Experimental. E. S. A. "Luiz de Quesiroz" , 404 pp. + 15 tabelas. 3ª edição. Piracicaba , S. Paulo.
- 31 - PIMENTEL GOMES, F. - 1967 - Iniciação a Estatística. 205 pp. + 8 tabelas. Livraria Nobel S. A. , São Paulo.
- 32 - TAGUCHI, G. - 1952/53 - Tables of 5 Percent and 1 Percent Points for the Pólya - Eggenberger Distribution Function. Reports of Statistical Application Research , Union of Japanese Scientists and Engenners. Vol. 2 , pp. 27-32 .
- 33 - WILKS, S. S. - 1963 - Mathematical Statistics , John Wiley and Sons. Inc. , New York . 2ª edition.
- 34 - YULE, G. Y. - 1910 - On the Distribution of Deaths with Age when Cause of Death act Cumulatively, and Similar Frequency Distributions. Jour. Roy. Stat. Soc. Vol. 73 , pp. 26-38 .