ESTUDO DOS COMPONENTES DE VARIÂNCIA NOS EXPERIMENTOS EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS COM UMA OBSERVAÇÃO PERDIDA

SHEILA ZAMBELLO DE PINHO
ENGENHEIRA-AGRÔNOMA

Professora-Assistente-Doutora do Departamento de Matemática da
Faculdade de Ciências Médicas e Biológicas de Botucatu

Prof. Dr. ROBERTO SIMIONATO MORAES
ORIENTADOR

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura «Luiz de Queiroz», da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de «Mestre».

PIRACICABA
Estado de São Paulo
1975

A meus pais,

Ao Valdemar, Fernanda e Eduardo,

DEDICO.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Dr. *ROBERTO SIMIONATO MORAES*, Professor Assistente Doutor do Departamento de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", pela orientação segura e incentivo a nós dispensado.

Ao Dr. *DECIO BARBIN* e Dr. *VIVALDO FRANCISCO DA CRUZ*, Professores Assistentes Doutores do Departamento de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" e a Dra. *MARTHA MARIA MISCHAN*, Professora Assistente Doutora do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências Médicas e Biológicas de Botucatu, pelas valiosas sugestões apresentadas.

Aos Professores do Departamento de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", pelos ensinamentos recebidos.

Ao Sr. *DORIVAL LÁZARO VICENTINI* pelo cuidadoso trabalho de datilografia realizado.

A todos que, de uma forma ou de outra, concorreram para o bom andamento deste trabalho.

Í N D I C E

1. *INTRODUÇÃO*

Os experimentos em parcelas subdivididas têm grande utilização na experimentação agropecuária. Muitas vezes ocorrem perdas de parcelas e ou subparcelas nesse delineamento.

A bibliografia sobre o assunto é escassa, e muitas dúvidas pairam a respeito. O único trabalho que aborda o fato com maior amplitude foi o realizado por *ANDERSON* (2) em 1946. Entretanto, nesta publicação, o autor faz um resumo do assunto, apresentando apenas fórmulas para estimativas dos valores perdidos e das variâncias de contrastes entre duas médias que envolvem essas estimativas, sem deduzi-las, o que torna difícil a verificação das mesmas. Além disso há discordância de uma das fórmulas de variância de contraste, entre o autor citado e *COCHRAN* e *COX* (4).

Assim sendo, procuramos realizar neste trabalho um estudo dos componentes de variância de um experimento em parcelas subdivididas com I tratamentos testados nas parcelas, dispostas em J blocos casualizados e K tratamentos testados nas subparcelas, com uma subparcela perdida, a fim de verificarmos a possibilidade de uso das variâncias residuais de parcelas e subparcelas, nas variâncias dos contrastes entre duas médias.

A seguir determinamos fórmulas de variâncias de contrastes de duas médias confrontando-se com as existentes na literatura.

2. *REVISÃO BIBLIOGRÁFICA*

A preocupação inicial nas análises estatísticas de experimentos onde ocorrem unidades perdidas é a sua estimativa sob um ponto de vista relativamente rigoroso, a fim de que seja levada avante a análise.

Um dos primeiros trabalhos, relativos à determinação de valores para unidades perdidas, foi publicado por *ALLAN e WISHART* (1) que deduziram fórmulas e ilustraram seu uso para uma única unidade perdida em experimentos em blocos casualizados e em quadrado latino. Estes métodos foram estendidos por *YATES* (11) para a determinação de várias parcelas perdidas, baseado no método dos quadrados mínimos, substituindo os dados perdidos por incógnitas e procurando tornar mínima a soma de quadrados do resíduo.

ANDERSON (2) apresentou uma revisão bibliográfica sobre parcelas perdidas, considerando vários tipos de delineamentos e as respectivas fórmulas até então deduzidas. Além do caso de unidade perdida em blocos casualizados com parcelas subdivididas, apresentou e comentou várias outras fórmulas para a estimativa de parcelas perdidas em látices, quadrado latino, blocos casualizados e fatoriais 2^n e 3^n.

Muitos outros autores tem estudado o problema de unidades perdidas em diversos tipos de delineamentos. Podemos citar, entre outros, *CORNISH* (6) que estudou o caso de estimativas de valores para unidades perdidas em experimentos em blocos casualizados incompletos; *CAMPOS* (3), determinou fórmulas para o cálculo de parcelas perdidas e variâncias de contrastes de médias que envolviam unidades perdidas em ensaios em blocos casualizados, quadrado latino e períodos sucessivos; *SMITH* (8) estudou o caso da determinação da variância do erro da estimativa da unidade perdida; *PINHO* (7) deduziu fórmulas para a estimativa de uma e duas subparcelas perdidas em delineamentos em parcelas subdivididas e uma e duas subsubparcelas perdidas em delineamentos em parcelas subsubdividi das, considerando as diversas localizações das observações perdi das. Determinou também, as somas de quadrados corrigidas para ca da causa de variação, usando as fórmulas deduzidas e através do método do resíduo condicional.

ANDERSON (2) aplicou o método da covariância em um experi mento em parcelas subdivididas com r repetições, α parcelas e β subparcelas, onde a unidade perdida recebeu os tratamentos a_1, b_1, na repetição r_1 e estabeleceu como a melhor estimativa da unidade perdida, a fim de minimizar o erro da subparcela, o resíduo do coe ficiente b de regressão:

$$y = \frac{r\ (R_1A_1) + \beta\ (A_1B_1) - A_1}{(r - 1)(\beta - 1)}$$

onde y representa a subparcela perdida, (R_1A_1) o total de todas as unidades existentes com o tratamento a_1 na repetição r_1, (A_1B_1) o total de todas as unidades existentes com os tratamentos a_1 e b_1 e A_1 o total de todas as unidades existentes com o tratamento a_1.

ANDERSON (2) afirmou que se esta estimativa for usada pa ra a unidade perdida, todas as somas de quadrados exceto a do er ro (b), estarão ligeiramente super estimadas. A estimativa impar cial de qualquer soma de quadrados é determinada subtraindo-se a tendência ("bias"), dada pela expressão:

$$(y - y_1)^2\ \Sigma\ (x_1^2)$$

onde:

a) Para o tratamento B

$$y_1 = \frac{r\alpha\ (R_1A_1) + \alpha\beta\ (A_1B_1) - \alpha A_1 - \beta B_1 + G}{(\beta - 1)(r\alpha - \alpha + 1)}$$

$$\Sigma\ (x_1^2) = (\beta - 1)(r\alpha - \alpha + 1)/r\alpha\beta$$

b) Para a interação *AxB*

$$y_1 = \frac{r\alpha\ (R_1A_1) + \beta B_1 - G}{(r\alpha - 1)(\beta - 1)}$$

$$\Sigma\ (x_1^2) = (r\alpha - 1)(\beta - 1)/r\alpha\beta$$

sendo B_1 o total de todas as unidades existentes com o tratamento b_1 e G o total de todas as unidades existentes.

ANDERSON (2) afirmou ainda que abordar de maneira exata a análise da parcela é mais complicado. É provável que o teste de significância para tratamentos *A* não seja seriamente afetado pela pequena tendenciosidade introduzida pelo uso do valor da estimativa da unidade perdida.

PINHO (7), estudando um experimento em parcelas subdivididas com *J* repetições, *I* parcelas e *K* subparcelas, onde a subparcela recebeu os tratamentos T_i e T'_k no bloco B_j, estabeleceu a estimativa y_1 para a subparcela perdida, a fim de minimizar a soma de quadrados do resíduo (b), SQR_1.

Assim

$$y_1 = \frac{JP + K\ (T_iT'_k) - T_i}{(J - 1)(K - 1)}$$

onde y_1 representa a subparcela perdida, P o total de todas as unidades presentes na parcela onde se perdeu um dado, $T_iT'_k$ o total de todos os dados relativos aos tratamentos T_i e T'_k correspondentes à subparcela perdida e T_i o total de todas as unidades existentes com o tratamento T atribuído à parcela com a subparcela perdida.

Com a estimativa y_1 para a subparcela perdida *PINHO* (7) obteve a soma de quadrados SQR_1 imparcial que é a soma de quadrados do resíduo (b).

O modelo matemático para o experimento é:

$$x_{ijk} = m + t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k + tt'_{ik} + e_{ijk}$$

com

$$i = 1,2,3 \ldots I,\ j = 1,2,3 \ldots J \text{ e } k = 1,2,3 \ldots K,$$

onde:

x_{ijk}: valor observado da ik-ésima subparcela, no j-ésimo bloco;

m: média geral;

t_i: efeito do i-ésimo nível do tratamento T;

b_j: efeito do j-ésimo bloco;

tb_{ij}: efeito associado a ij-ésima observação ou efeito residual das parcelas;

t'_k: efeito do k-ésimo nível do tratamento T';

tt'_{ik}: efeito interado do i-ésimo nível do tratamento T com o k-ésimo nível do tratamento T';

e_{ijk}: efeito associado a ijk-ésima observação ou efeito residual das subparcelas.

Eliminando do modelo matemático o efeito tt'_{ik} relativo à interação, *PINHO* (7) determinou y_2 como estimativa da subparcela perdida, minimizando SQR_2, sendo:

$$y_2 = \frac{IJP + KT'_k - G}{(K - 1)(IJ - 1)}$$

e

$$SQR_2 = SQtotal - SQP - SQT'$$

onde y_2 representa a subparcela perdida, T'_k o total de todas as unidades existentes com o tratamento T' atribuído à subparcela perdida, G o total das unidades disponíveis, SQP a soma de quadrados de parcelas e SQT' a soma de quadrados de tratamentos T'.

A soma de quadrados corrigida da interação TxT', SQIntera ção TxT'_c, foi determinada como:

$$SQInteração\ TxT'_c = SQR_2 - SQR_1$$

A diferença entre SQInteração TxT'_c e a SQInteração TxT' calculada com a estimativa y_1 para a subparcela perdida nos dá

$$U_{TxT'} = \frac{(IJ - 1)(K - 1)}{IJK} (y_1 - y_2)^2$$

que é a correção para a SQInteração TxT' proposta por *PINHO* (7).

Verificamos que os métodos propostos por *ANDERSON* (2) e *PINHO* (7) se equivalem no que diz respeito à correção da SQInteração TxT'.

Procedendo de maneira idêntica para a determinação da soma de quadrados corrigida de tratamentos T', SQtratamentos $(T')_c$, *PINHO* (7) obteve:

$$y_3 = \frac{P}{K - 1}$$

e

$$SQR_3 = SQtotal - SQP$$

Então:

$$SQtratamentos\ (T')_c = SQR_3 - SQR_2$$

Para a comparação dos métodos propostos por *ANDERSON* (2) e *PINHO* (7) há necessidade de se determinar a esperança matemática das somas de quadrados estudadas.

Fórmulas para estimativas do erro padrão de diferenças entre duas médias, onde valores perdidos são envolvidos, são dadas por *COCHRAN & COX* (4) para experimentos em parcelas subdivididas e estão reproduzidas na Tabela 1.

Tabela 1: Erro padrão para experimentos em parcelas subdivididas com unidades perdidas.

COMPARAÇÕES	MEDIDAS COMO	ERRO PADRÃO
- diferença entre 2 médias de tratamento A	$a_i - a_j$	$\sqrt{\dfrac{2\ (E_a + f\ E_b)}{rb}}$
- diferença entre 2 médias de tratamento B	$b_i - b_j$	$\sqrt{\dfrac{2\ E_b\ (1 + f\ b/a)}{ra}}$
- diferença entre 2 médias num mesmo nível de A	$a_i b_j - a_i b_k$	$\sqrt{\dfrac{2\ E_b\ (1 + f\ b/a)}{r}}$
- diferença entre 2 médias A - mesmo nível de B - nível diferente de B	 $a_i b_j - a_k b_j$ $a_i b_j - a_k b_\ell$	$\sqrt{\dfrac{2\ E_a + 2\ E_b\ \left[(b-1)+f\ b^2\right]}{rb}}$

onde:

E_a: é o quadrado médio para o erro (a);

E_b: é o quadrado médio para o erro (b);

b: é o número de tratamentos B testados nas subparcelas;

a: é o número de tratamentos A testados nas parcelas;

r: é o número de repetições;

f: é um fator determinado da seguinte maneira:

Quando ocorrer somente um valor perdido o fator *f* da Tabela 1 é **1/2(r-1)**(b-1), para comparaçoes envolvendo uma média com o valor perdido e outra média qualquer. Quando ocorrer mais de um valor perdido, f depende do local da sub-unidade perdida. A seguinte aproximação é correta para certos casos mas tende ser ligeiramente grande para outros:

$$f = \frac{k}{2\,(r - d)(b - k + c - 1)}$$

onde k, c e d se referem somente às observações perdidas nas duas médias comparadas, em particular

k = número de observações perdidas;

c = número de blocos que contêm uma ou mais observações perdidas;

d = número de observações perdidas no tratamento da sub-unidade $a_j b_k$ que é mais afetado.

STEEL e TORRIE (10), citando *COCHRAN e COX* (4), relacionaram as mesmas fórmulas da Tabela 1, porém estabeleceram $f=(r-1)(b-1)/2$ o que nos parece ser um engano dos autores.

ANDERSON (2) também deduziu fórmulas para estimativas da variância da diferença entre duas médias, sendo uma delas com uma unidade perdida. Relacionamos estas fórmulas na Tabela 2.

Tabela 2: Variância da diferença entre duas médias sendo uma delas com uma unidade perdida.

COMPARAÇÕES	MEDIDAS COMO	VARIÂNCIA
- diferença entre 2 médias de tratamento $\bar{A}$	$a_i - a_j$	$\frac{2}{rb}\left[E_a + \frac{E_b}{2\,(r-1)(b-1)}\right]$
- diferença entre 2 médias de tratamento $\bar{B}$	$b_i - b_j$	$\frac{2\,E_b}{ra}\left[1 + \frac{b}{2a\,(r-1)(b-1)}\right]$
- diferença entre 2 médias B num mesmo nível de A	$a_i b_j - a_i b_k$	$\frac{2\,E_b}{r}\left[1 + \frac{b}{2\,(r-1)(b-1)}\right]$
- diferença entre 2 médias A num mesmo nível de B	$a_i b_j - a_k b_j$	$\frac{2\,E_a}{rb} + \frac{2\,E_b}{rb}\left[(b-1) + \frac{b^2}{2\,(r-1)(b-1)}\right]$

A notação utilizada na Tabela 2 é a mesma adotada na Tabela 1.

Substituindo a expressão $f = 1/2\ (r-1)(b-1)$ nas fórmulas dos erros padrões dados na Tabela 1, podemos compará-las com as fórmulas das variâncias dadas por *ANDERSON* (2), na Tabela 2.

Verificamos que são idênticas, com exceção às fórmulas para variância da diferença entre duas médias B num mesmo nível de A que diferem por um fator $\frac{1}{a}$ no segundo termo.

CONDÊ (5) apresenta um estudo interessante sobre componentes de variância a partir de uma reestruturação do modelo matemático. Esta reestruturação facilita o estudo do comportamento dos tratamentos (T') em cada nível dos tratamentos (T) e o comportamento dos tratamentos (T) em cada nível dos tratamentos (T').

Para o primeiro caso o modelo reestruturado é

$$x_{ijk} = m + t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k/t_1 + t'_k/t_2 + t'_k/t_3 + \ldots + \\ + t'_k/t_i + e_{ijk}$$

e para o segundo,

$$x_{ijk} = m + b_j + tb_{ij} + t'_k + t_i/t'_1 + t_i/t'_2 + t_i/t'_3 + \ldots + \\ + t_i/t'_k + e_{ijk}$$

3. *DESENVOLVIMENTO TEÓRICO*

Para maior clareza deduziremos detalhadamente os componentes de variância para um experimento em parcelas subdivididas com I tratamentos T aplicado às parcelas, dispostas em blocos casualizados, K tratamentos T' aplicados às subparcelas e J repetições com apenas uma subparcela perdida.

3.1. Modelo Matemático.

O modelo matemático para o experimento em parcelas subdivididas com as parcelas dispostas em blocos ao acaso é:

$$x_{ijk} = m + t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k + tt'_{ik} + e_{ijk} \qquad \text{(a)}$$

com

$i = 1,2,3 \ldots I$, $j = 1,2,3 \ldots J$ e $k = 1,2, 3 \ldots K$,

onde:

x_{ijk} = valor observado da ik-ésima subparcela, no j-ésimo bloco;

m = média geral;

t_i = efeito do i-ésimo nível do tratamento T;

b_j = efeito do j-ésimo bloco;

tb_{ij} = efeito associado a ij-ésima observação ou efeito residual das parcelas;

t'_k = efeito do k-ésimo nível do tratamento T';

tt'_{ik} = efeito interado do i-ésimo nível do tratamento T com o k-ésimo nível do tratamento T';

e_{ijk} = efeito associado a ijk-ésima observação ou efeito residual das subparcelas.

O modelo reestruturado para o estudo do comportamento dos tratamentos T' em cada nível dos tratamentos T é:

$$x_{ijk} = m + t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k/t_1 + t'_k/t_2 + \\ + t'_k/t_3 + \ldots + t'_k/t_I + e_{ijk} \quad \text{(b)}$$

onde:

t'_k/t_1 = efeito dos tratamentos T' dentro do nível 1 dos tratamentos T;

t'_k/t_2 = efeito dos tratamentos T' dentro do nível 2 dos tratamentos T, etc.

O modelo reestruturado para o estudo do comportamento dos tratamentos T em cada nível dos tratamentos T' é:

$$x_{ijk} = m + b_j + tb_{ij} + t'_k + t_i/t'_1 + t_i/t'_2 + \\ + t_i/t'_3 + \ldots + t_i/t'_k + e_{ijk} \quad \text{(c)}$$

onde:

t_i/t'_1 = efeito dos tratamentos T dentro do nível 1 dos tratamentos T';

t_i/t'_2 = efeito dos tratamentos T dentro do nível 2 dos tratamentos T', etc.

As deduções serão realizadas apenas para o modelo tipo I que considera aleatórios tb_{ij} e e_{ijk}, ambos com média zero e variância respectivamente σ^2_{tb} e σ^2.

3.2. Componentes de Variância das Somas de Quadrados não Corrigidas.

Para a dedução dos componentes de variância utilizaremos as fórmulas que nos dão as somas de quadrados (SQ), levando em consideração a estimativa da subparcela perdida.

Considerando apenas uma subparcela perdida (y) que recebeu os tratamentos T_i e T'_k no bloco B_j podemos definir os seguintes termos:

T_i: é o total de todos os dados relativos ao tratamento T atribuído à parcela com a subparcela perdida;

$T_iT'_k$: é o total de todos os dados relativos ao tratamento T_i e T'_k correspondentes à subparcela perdida;

P: é o total das subparcelas presentes na parcela onde se perdeu um dado,

e

$$y = \frac{JP + K\ (T_iT'_k) - T_i}{(J - 1)(K - 1)}$$

a) $SQtotal = \sum\limits_{i,j,k}' x^2_{ijk} + y^2 - C$

onde

$\sum\limits_{i,j,k}' x^2_{ijk}$ representa a soma de quadrados de todas as (IJK-1) subparcelas existentes.

$$C = \frac{\left(\sum\limits_{i,j,k}' x_{ijk} + y\right)^2}{IJK} = \frac{(x\ ...)^2}{IJK}$$

onde

$\sum\limits_{i,j,k}' x_{ijk}$ representa a soma de todas as (IJK-1) subparcelas existentes.

3.2.1. $E\ (SQtotal) = E\ (\sum\limits_{i,j,k}' x^2_{ijk}) + E\ (y^2) - E\ (C).$

3.2.2. $E\ (y^2) = E\left[\frac{JP + K\ (T_iT'_k) - T_i}{(J - 1)(K - 1)}\right]^2$

Dado que:

$$x_{ijk} = m + t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k + tt'_{ik} + e_{ijk}$$

e pelo fato de que no resultado final das diversas E (S.Q.) m não aparece, podemos suprimi-la em todos os cálculos, facilitando, assim, as deduções:

$$P = (K-1)\ t_i + (K-1)\ b_j + (K-1)\ tb_{ij} + \sum_k t'_k +$$

$$+ \sum_k tt'_{ik} + \sum_k{}' e_{ijk} - t'_k - tt'_{ik}$$

$$T_iT'_k = (J-1)\ t_i + \sum_j b_j + \sum_j{}' tb_{ij} + (J-1)\ t'_k +$$

$$+ (J-1)\ tt'_{ik} + \sum_j{}' e_{ijk} - b_j$$

$$T_i = P + T_iT'_k + R$$

$$R = (J-1)(K-1)\ t_i + (K-1) \sum_j b_j + (K-1) \sum_j{}' tb_{ij} +$$

$$+ (J-1) \sum_k t'_k + (J-1) \sum_k tt'_{ik} + \sum_{j,k}{}'' e_{ijk} -$$

$$- (K-1)\ b_j - (J-1)\ t'_k - (J-1)\ tt'_{ik}$$

onde

$\sum_k{}' e_{ijk}$: é a soma dos (K-1) erros associados às subparcelas existentes na parcela onde se perdeu um dado;

$\sum_j{}' e_{ijk}$: é a soma dos (J-1) erros associados às subparcelas que receberam os tratamentos T_i e T'_k correspondentes à subparcela perdida.

$\sum_{j,k}{}'' e_{ijk}$: é a soma dos (J-1)(K-1) erros associados às subparcelas que receberam o tratamento T_i correspondente à subparcela perdida mas não receberam o tratamento T'_k e não estão na parcela onde se perdeu um dado.

$\Sigma'_{j}\ tb_{ij}$: é a soma dos (J-1) efeitos residuais associados às parcelas que receberam os tratamentos T_i e T'_k correspondentes à subparcela perdida.

R: é o total de todos os dados relativos ao tratamento T atribuído à parcela com a subparcela perdida, menos o total das subparcelas presentes na parcela onde se perdeu um dado e menos o total dos dados relativos ao tratamento T_i e T'_k correspondentes à subparcela perdida. Ou seja, $R = T_i - P - T_iT'_k$.

Como:

$$y = \frac{JP + K\ T_iT'_k - T_i}{(J-1)(K-1)}$$

e

$$T_i = P + T_iT'_k + R$$

Temos:

$$y = \frac{(J-1)\ P + (K-1)\ T_iT'_k - R}{(J-1)(K-1)}$$

e de acordo com as restrições:

$$\sum_i t_i = 0,\ \sum_j b_j = 0,\ \sum_k t'_k = 0 \text{ e } \sum_i tt'_{ik} = \sum_k tt'_{ik} = 0$$

temos:

$$y = t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k + tt'_{ik} + \frac{\sum'_k e_{ijk}}{K-1} + $$

$$+ \frac{\sum'_j e_{ijk}}{J-1} - \frac{\sum''_{j,k} e_{ijk}}{(J-1)(K-1)}$$

Como $E\ (t_i^2) = t_i^2$, $E\ (b_j^2) = b_j^2$, $E\ (t_k'^2) = t_k'^2$ e $E\ (tt')^2_{ik} = (tt')^2_{ik}$, temos

$$E\ (y^2) = t_i^2 + b_j^2 + \sigma_{tb}^2 + t_k'^2 + (tt_{ik}')^2 +$$

$$+ \frac{J + K - 1}{(J - 1)(K - 1)}\ \sigma^2$$

3.2.3. $E\ (C) = \frac{E\ (x\ ...)^2}{IJK}$

$$x\ ... = JK \sum_i t_i + IK \sum_j b_j + K \sum_{i,j} tb_{ij} + IJ \sum_k t_k' +$$

$$+ J \sum_{i,k} tt_{ik}' + \sum_{i,j,k}' e_{ijk} +$$

$$+ \frac{\sum_k' e_{ijk}}{K - 1} + \frac{\sum_j' e_{ijk}}{J - 1} - \frac{\sum_{j,k}'' e_{ijk}}{(J-1)(K-1)}$$

onde:

$\sum_{i,j,k}' e_{ijk}$ é a soma de todos os (IJK-1) erros associados às subparcelas existentes.

Como,

$$\sum_{i,j,k}' e_{ijk} = \sum_{i,j,k}'' e_{ijk} + \sum_k' e_{ijk} + \sum_j' e_{ijk} +$$

$$+ \sum_{j,k}'' e_{ijk}$$

e levando-se em conta as restrições, temos:

$$E\ (x\ ...)^2 = IJK^2\ \sigma_{tb}^2 + \{(I-1)\ JK + \frac{K^2}{K-1} + \frac{J^2}{J-1} +$$

$$+ \frac{\left[(J - 1)(K - 1) - 1\right]^2}{(J - 1)(K - 1)}\}\ \sigma^2$$

$$\frac{E\ (x\ ...)^2}{IJK} = K\ \sigma_{tb}^2 + \left[1 + \frac{1}{I\ (J - 1)(K - 1)}\right]\ \sigma^2$$

Portanto,

$$E\ (C) = K\ \sigma^2_{tb} + \left[1 + \frac{1}{I\ (J-1)(K-1)}\right] \sigma^2$$

$$E \left[\sum_{i,j,k}{}' x^2_{ijk}\right] = \sum_{i,j,k}{}' \left[E\ (x_{ijk})^2\right]$$

mas

$$x_{ijk} = t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k + tt'_{ik} + e_{ijk}$$

$$E \left[\sum_{i,j,k}{}' x^2_{ijk}\right] = \sum_{i,j,k}{}' \ E\left[(t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k + \right.$$

$$\left. + tt'_{ik} + e_{ijk})^2\right]$$

desenvolvendo o quadrado e somando-se $E\ (y^2)$ temos:

$$E \left[\sum_{i,j,k}{}' x^2_{ijk}\right] + E\ (y^2) = JK \sum_i t^2_i + IK \sum_j b^2_j + IJK\ \sigma^2_{tb} +$$

$$+ IJ \sum_k t'^2_k + J \sum_{i,k} (tt')^2_{ik} +$$

$$+ \left[(IJK-1) + \frac{J+K-1}{(J-1)(K-1)}\right] \sigma^2$$

Substituindo os valores em (3.2.1):

$$E\ (SQtotal) = JK \sum_i t^2_i + IK \sum_j b^2_j + K\ (IJ-1)\ \sigma^2_{tb} +$$

$$+ IJ \sum_k t'^2_k + J \sum_{i,k} (tt')^2_{ik} + \left[(IJK-2) + \right.$$

$$\left. + \frac{J+K-1}{(J-1)\ (K-1)} - \frac{1}{I\ (J-1)(K-1)}\right] \sigma^2$$

b) $SQblocos = \dfrac{\sum_j{}' B'^2_j}{IK} + \dfrac{(B_j + y)^2}{IK} - C$

onde,

B_j: é o total das unidades restantes no bloco da subparcela perdida.

$\sum_j' B_j'^2$: é a soma dos quadrados dos totais de cada bloco, excetuando o da subparcela perdida.

3.2.4. $E\ (SQblocos) = \frac{1}{IK} E\ (\sum_j' B_j'^2) + \frac{1}{IK} E\ (B_j + y)^2 - E\ (C).$

$$B_j + y = K \sum_i t_i + IK\, b_j + K \sum_i tb_{ij} + I \sum_k t_k' +$$

$$+ \sum_{i,k} tt_{ik}' + \sum_{i,k}' e_{ijk} + \frac{\sum_k' e_{ijk}}{K - 1} + \frac{\sum_j' e_{ijk}}{J - 1}$$

$$- \frac{\sum_{j,k}'' e_{ijk}}{(J-1)(K-1)}$$

onde,

$\sum_{i,k}' e_{ijk}$ é a soma dos (IK-1) erros associados às subparcelas existentes no bloco que contém a subparcela perdida.

Como,

$$\sum_{i,k}' e_{ijk} = \sum_{i,k}'' e_{ijk} + \sum_k' e_{ijk}$$

e levando-se em consideração as restrições, temos:

$$E\ (B_j + y)^2 = I^2K^2b_j^2 + IK^2\ \sigma_{tb}^2 + \left[(I-1)\ K + \frac{K^2}{(K-1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(J-1)} + \frac{1}{(J-1)(K-1)}\right] \sigma^2$$

$$\frac{1}{IK} E\,(B_j + y)^2 = IK\, b_j^2 + K\, \sigma_{tb}^2 + \left[1 + \frac{J}{I(J-1)(K-1)}\right] \sigma^2$$

Para outro bloco B_j' qualquer, temos:

$$E\,(B_j')^2 = I^2K^2\, b_j^2 + IK^2\, \sigma_{tb}^2 + IK\, \sigma^2$$

$$\frac{1}{IK} E\,(B_j')^2 = IK\, b_j^2 + K\, \sigma_{tb}^2 + \sigma^2$$

e,

$$\frac{1}{IK} E\,(\Sigma_j'\, B_j'^2) = \frac{1}{IK} \Sigma_j' \left[E\,(B_j'^2)\right]$$

Então,

$$\frac{1}{IK} E\,(\Sigma_j'\, B_j'^2) + \frac{1}{IK} E\,(B_j + y)^2 = IK \Sigma_j b_j^2 + JK\, \sigma_{tb}^2 + \left[J + \frac{J}{I(J-1)(K-1)}\right] \sigma^2$$

Substituindo em (3.2.4):

$$E\,(SQblocos) = IK \Sigma_j b_j^2 + K\,(J-1)\, \sigma_{tb}^2 + \left[(J-1) + \frac{J-1}{I(J-1)(K-1)}\right] \sigma^2$$

c) SQTratamentos (T) $= \dfrac{\Sigma_i'\, T_i'^2}{JK} + \dfrac{(T_i + y)^2}{JK} - C$

T_i: é o total dos dados relativos ao tratamento T atribuído à parcela com a subparcela perdida.

$\Sigma_i'\, T_i'^2$: é a soma dos quadrados dos totais de cada tratamento testado nas parcelas, excetuando o da subparcela perdida.

$$3.2.5.\ E\left[SQTratamentos\ (T)\right] = \frac{1}{JK}\ E\ (\sum_i{}'\ T_i'^{\,2}) + $$

$$+ \frac{1}{JK}\ E\ (T_i + y)^2 - E\ (C)$$

$$T_i + y = JK\ t_i + K \sum_j b_j + K \sum_j tb_{ij} + J \sum_k t'_k +$$

$$+ J \sum_k tt'_{ik} + \sum_{j,k}{}' e_{ijk} + \frac{\sum_k{}' e_{ijk}}{K-1} +$$

$$+ \frac{\sum_j{}' e_{ijk}}{J-1} - \frac{\sum_{j,k}{}'' e_{ijk}}{(J-1)(K-1)}$$

onde,

$$\sum_{j,k}{}' e_{ijk} = \sum_k{}' e_{ijk} + \sum_j{}' e_{ijk} + \sum_{j,k}{}'' e_{ijk}$$

Considerando-se as restrições, temos:

$$E\ (T_i + y)^2 = J^2K^2\ t_i^2 + JK^2\ \sigma_{tb}^2 + \{\frac{K^2}{K-1} + \frac{J^2}{J-1} +$$

$$+ \frac{\left[(J-1)(K-1)-1\right]^2}{(J-1)(K-1)}\}\ \sigma^2$$

$$\frac{1}{JK}\ E\ (T_i + y)^2 = JK\ t_i^2 + K\ \sigma_{tb}^2 + \left[1 + \frac{1}{(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2$$

Para um tratamento T_i' qualquer sem unidade perdida, temos:

$$E\ (T_i')^2 = J^2K^2\ t_i^2 + JK^2\ \sigma_{tb}^2 + JK\ \sigma^2$$

$$\frac{1}{JK}\ E\ (T_i')^2 = JK\ t_i^2 + K\ \sigma_{tb}^2 + \sigma^2$$

e

$$\frac{1}{JK}\ E\ (\sum_i{}'\ T_i'^{\,2}) = \frac{1}{JK} \sum_i{}' \left[E\ (T_i'^{\,2})\right]$$

$$\frac{1}{JK} E \sum_{i}{}' (T_i')^2 + \frac{1}{JK} E (T_i+y)^2 = JK \sum_{i} t_i^2 + IK \sigma_{tb}^2 +$$

$$+ \left[I + \frac{1}{(J-1)(K-1)} \right] \sigma^2$$

Substituindo em (3.2.5):

$$E \left[SQTratamentos\ (T) \right] = JK \sum_{i} t_i^2 + K (I-1) \sigma_{tb}^2 +$$

$$+ \left[(I-1) + \frac{I-1}{I(J-1)(K-1)} \right] \sigma^2$$

d) SQResíduo (a) = SQT x B = $\dfrac{\sum'_{i,j} P_{ij}^2}{K} + \dfrac{(P + y)^2}{K} -$

$- C - SQT - SQB$

P: é o total das subparcelas presentes na parcela onde se perdeu um dado.

$\sum'_{i,j} P_{ij}^2$: é a soma dos quadrados de cada parcela, excetuando a da subparcela perdida.

3.2.6. $E \left[SQResíduo\ (a) \right] = E\ (SQT\ x\ B) = \dfrac{1}{K} E \left[\sum'_{i,j} P_{ij}^2 \right] +$

$$+ \frac{1}{K} E(P+y)^2 - E(C) - E(SQT) - E(SQB)$$

$$P + y = K\ t_i + K\ b_j + K\ tb_{ij} + \sum_{k} t_k' + \sum_{k} tt_{ik}' +$$

$$+ \sum_{k}{}' e_{ijk} + \frac{\sum'_{k} e_{ijk}}{K-1} + \frac{\sum'_{j} e_{ijk}}{J-1} -$$

$$- \frac{\sum''_{j,k} e_{ijk}}{(J-1)(K-1)}$$

$$E\,(P + y)^2 = K^2\,t_i^2 + K^2\,b_j^2 + K^2\,\sigma_{tb}^2 + \left[\frac{K^2}{K-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{J-1} + \frac{1}{(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2$$

$$\frac{1}{K}\,E\,(P + y)^2 = K\,t_i^2 + K\,b_j^2 + K\,\sigma_{tb}^2 +$$

$$+ \left[\frac{K\,(J-1) + 1}{(J-1)\,(K-1)}\right]\sigma^2$$

Para um P_{ij} qualquer, temos:

$$E\,(P_{ij})^2 = K^2\,t_i^2 + K^2\,b_j^2 + K^2\,\sigma_{tb}^2 + K\,\sigma^2$$

$$\frac{1}{K}\,E\,(P_{ij})^2 = K\,t_i^2 + K\,b_j^2 + K\,\sigma_{tb}^2 + \sigma^2$$

e,

$$\frac{1}{K}\,E\left[\sum_{i,j}{}'\,P_{ij}^2\right] = \frac{1}{K}\sum_{i,j}{}'\left[E\,(P_{ij})^2\right]$$

$$\frac{1}{K}\,E\left[\sum_{i,j}{}'\,(P_{ij})^2\right] + \frac{1}{K}\,E\,(P + y)^2 = JK\sum_i t_i^2 +$$

$$+ IK\sum_j b_j^2 + IJK\,\sigma_{tb}^2 + \left[(IJ-1) + \right.$$

$$\left. + \frac{K\,(J-1) + 1}{(J-1)\,(K-1)}\right]\sigma^2$$

Substituindo os valores em (3.2.6):

$$E\left[\text{SQResíduo (a)}\right] = K\,(I-1)(J-1)\,\sigma_{tb}^2 + \left[(I-1)(J-1) + \right.$$

$$\left. + \frac{(I-1)(J-1)}{I(J-1)\,(K-1)}\right]\sigma^2$$

e) $\text{SQTratamentos (T')} = \dfrac{\sum_k{}'\,T_k''^2}{IJ} + \dfrac{(T_k' + y)^2}{IJ} - C$

T'_k: é o total de todos os dados relativos ao tratamento T' atribuído à subparcela perdida.

$\sum'_k T''^2_k$: é a soma dos quadrados dos totais de cada tratamento testado nas subparcelas, excetuando o da subparcela perdida.

3.2.7. $$E\left[SQTratamentos\ (T')\right] = \frac{1}{IJ} E\left(\sum_k{}' T''^2_k\right) + \frac{1}{IJ} E\left(T'_k + y\right)^2 - E\ (C)$$

$$T'_k + y = J \sum_i t_i + I \sum_j b_j + \sum_{i,j} tb_{ij} + IJ\ t'_k + J \sum_i tt'_{ik} + \sum_{i,j}{}' e_{ijk} + \frac{\sum'_k e_{ijk}}{K-1} + \frac{\sum'_j e_{ijk}}{J-1} - \frac{\sum''_{j,k} e_{ijk}}{(J-1)(K-1)}$$

Mas,

$$\sum_{i,j}{}' e_{ijk} = \sum_{i,j}{}'' e_{ijk} + \sum_j{}' e_{ijk}$$

Então,

$$E\ (T'_k + y)^2 = IJ\ \sigma^2_{tb} + I^2 J^2\ t'^2_k + \left[(I-1)\ J + \frac{1}{K-1} + \frac{J^2}{J-1} + \frac{1}{(J-1)(K-1)}\right] \sigma^2$$

$$\frac{1}{IJ} E\ (T'_k + y)^2 = \sigma^2_{tb} + IJ\ t'^2_k + \left[1 + \frac{K}{I(J-1)(K-1)}\right] \sigma^2$$

Para um T''_k qualquer, temos:

$$E\,(T''_k)^2 = IJ\,\sigma^2_{tb} + I^2J^2\,t'^2_k + IJ\,\sigma^2$$

$$\frac{1}{IJ}\,E\,(T''_k)^2 = \sigma^2_{tb} + IJ\,t'^2_k + \sigma^2$$

e,

$$\frac{1}{IJ}\,E\left[\sum_k{}'\,T''^2_k\right] = \frac{1}{IJ}\sum_k{}'\left[E\,(T''_k)^2\right]$$

Então:

$$\frac{1}{IJ}\,E\,(\sum_k{}'\,T''^2_k) + \frac{1}{IJ}\,E\,(T'_k + y)^2 = K\,\sigma^2_{tb} +$$

$$+ IJ\sum_k t'^2_k + \left[K + \frac{K}{I(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2$$

Substituindo em (3.2.7):

$$E\left[SQTratamentos\ (T')\right] = IJ\sum_k t'^2_k + \left[(K-1) +\right.$$

$$\left. + \frac{K-1}{I(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2$$

f) $$SQInteração\ TxT' = \frac{\sum_{i,k}{}'\,(TT')^2_{ik}}{J} + \frac{(T_iT'_k + y)^2}{J} -$$

$$- C - SQT' - SQT$$

$T_iT'_k$: é o total de todos os dados relativos aos tratamentos T_i e T'_k correspondentes à subparcela perdida.

$\sum_{i,k}{}'\,(TT')^2_{ik}$: é a soma dos quadrados de cada tratamento $T_iT'_k$ excetuando o da subparcela perdida.

3.2.8. $E\ (SQ\ Int.\ TxT') = \frac{1}{J} E \left[\sum_{i,k}{}' (TT')^2_{ik} \right] + \frac{1}{J} E\ (T_i T'_k + y)^2 -$

$$- E\ (C) - E\ (SQT') - E\ (SQT)$$

$$T_i T'_k + y = J\ t_i + \sum_j b_j + \sum_j tb_{ij} + J\ t'_k + J\ tt'_{ik} +$$

$$+ \sum_j{}' e_{ijk} + \frac{\sum_k{}' e_{ijk}}{K - 1} + \frac{\sum_j{}' e_{ijk}}{J - 1} -$$

$$- \frac{\sum_{j,k}{}'' e_{ijk}}{(J-1)(K-1)}$$

$$E\ (T_i T'_k + y)^2 = J^2\ t_i^2 + J\ \sigma^2_{tb} + J^2\ t'^2_k + J^2\ (tt')^2_{ik} +$$

$$+ \left[\frac{J^2}{J-1} + \frac{1}{K-1} + \frac{1}{(J-1)(K-1)} \right] \sigma^2$$

$$\frac{1}{J} E\ (T_i T'_k + y)^2 = J\ t_i^2 + \sigma^2_{tb} + J\ t'^2_k + J\ (tt')^2_{ik} +$$

$$+ \frac{J(K - 1) + 1}{(J-1)(K-1)} \sigma^2$$

Para um TT'_{ik} qualquer, temos:

$$E\ (TT')^2_{ik} = J^2\ t_i^2 + J\ \sigma^2_{tb} + J^2\ t'^2_k + J^2\ (tt')^2_{ik} + J\ \sigma^2$$

$$\frac{1}{J} E\ (TT')^2_{ik} = J\ t_i^2 + \sigma^2_{tb} + J\ t'^2_k + J\ (tt')^2_{ik} + \sigma^2$$

e

$$\frac{1}{J} E \left[\sum_{i,k}{}' (TT')^2_{ik} \right] = \frac{1}{J} \sum_{i,k}{}' \left[E\ (TT')^2_{ik} \right]$$

Então,

$$\frac{1}{J} E \left[\sum_{i,k}{}' (TT')^2_{ik} \right] + \frac{1}{J} E (T_i T'_k + y)^2 = JK \sum_i t_i^2 +$$

$$+ IK \sigma^2_{tb} + IJ \sum_k t'^2_k +$$

$$+ J \sum_{i,k} (tt')^2_{ik} + \left[(IK-1) + \right.$$

$$\left. + \frac{J(K-1)+1}{(J-1)(K-1)} \right] \sigma^2$$

Substituindo em (3.2.8):

$$E\ (SQ\ Int.\ TxT') = J \sum_{i,k} (tt')^2_{ik} + \left[(I-1)(K-1) + \right.$$

$$\left. + \frac{(I-1)(K-1)}{I\ (J-1)(K-1)} \right] \sigma^2$$

g) SQResíduo (b) = SQtotal - SQB - SQT - SQTxB - SQT' - - SQTxT'

3.2.9. $E \left[SQRes\acute{\imath}duo\ (b) \right] = E\ (SQtotal) - E\ (SQB) - E\ (SQT) - E\ (SQTxB) - E\ (SQT') - E\ (SQTxT')$

Substituindo os valores em (3.2.9):

$$E \left[SQRes\acute{\imath}duo\ (b) \right] = \left[I\ (J-1)(K-1) - 1 \right] \sigma^2$$

Pela Tabela 3 verificamos que todos os quadrados médios, com exceção o do resíduo (b), estão super estimados de um fator $\frac{\sigma^2}{I(J-1)(K-1)}$ onde σ^2 é a esperança do quadrado médio do resíduo (b).

Tabela 3: Componentes de Variância das SQ e QM com uma observação perdida.

CAUSA DE VARIAÇÃO	G.L.	E (S.Q.)	E (Q.M.)
Blocos	$J - 1$	$\left[(J-1) + \frac{J-1}{I(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2 + K(J-1)\,\sigma^2_{tb} + IK\sum\limits_j b_j^2$	$\left[1 + \frac{1}{I(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2 + K\,\sigma^2_{tb} + \frac{IK\sum\limits_j b_j^2}{J-1}$
Tratamentos (T)	$I - 1$	$\left[(I-1) + \frac{I-1}{I(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2 + K(I-1)\,\sigma^2_{tb} + JK\sum\limits_i t_i^2$	$\left[1 + \frac{1}{I(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2 + K\,\sigma^2_{tb} + \frac{JK\sum\limits_i t_i^2}{I-1}$
Resíduo (a)	$(I-1)(J-1)$	$\left[(I-1)(J-1) + \frac{(I-1)\ (J-1)}{I(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2 + K(I-1)(J-1)\,\sigma^2_{tb}$	$\left[1 + \frac{1}{I(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2 + K\,\sigma^2_{tb}$
Tratamentos (T')	$K - 1$	$\left[(K-1) + \frac{K-1}{I(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2 + IJ\sum\limits_k t_k'^2$	$\left[1 + \frac{1}{I(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2 + \frac{IJ\sum\limits_k t_k'^2}{K-1}$
Interação TxT'	$(I-1)(K-1)$	$\left[(I-1)(K-1) + \frac{(I-1)\ (K-1)}{I(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2 + J\sum\limits_{i,k}(tt')^2_{ik}$	$\left[1 + \frac{1}{I(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2 + \frac{J\sum\limits_{i,k}(tt')^2_{ik}}{(I-1)\ (J-1)}$
Resíduo (b)	$\left[I(J-1)(K-1)-1\right]$	$\left[I(J-1)(K-1)-1\right]\sigma^2$	σ^2

3.3. *Componentes de Variância das Somas de Quadrados Corrigidas.*

3.3.1. *Soma de quadrados da interação TxT'_c.*

Para facilitar as deduções, determinaremos as esperanças das somas de quadrados envolvidas na determinação da E (SQInteração TxT'_c).

Com a estimativa y_2 para a unidade perdida apresentada por *PINHO* (7), podemos determinar:

$$SQR_2 = SQtotal - SQP - SQT'$$

onde,

$$SQtotal = \sum_{i,j,k}{}' x_{ijk}^2 + y_2^2 - C$$

$$SQP = \frac{\sum_{i,j}{}' P_{ij}^2}{K} + \frac{(P + y_2)^2}{K} - C$$

$$SQT' = \frac{\sum_{k}{}' T_k''^2}{IJ} + \frac{(T_k' + y_2)^2}{IJ} - C$$

$$C = \frac{(\sum_{i,j,k}{}' x_{ijk} + y_2)^2}{IJK}$$

e

$$y_2 = \frac{IJP + K\ T_k' - G}{(K-1)\ (IJ-1)}$$

com a estimativa

$$y_1 = \frac{JP + K\ (T_iT_k) - T_i}{(K-1)(J-1)}$$

para a subparcela perdida determinamos SQR_1 que é a soma de quadrados do resíduo (b) e cuja esperança matemática, determinada em em 3.2.9 é

$$E\left[SQResíduo\ (b)\right] = E\ (SQR_1) = \left[I(J-1)(K-1)-1\right]\sigma^2$$

Sabemos que

$$SQInteração\ TxT'_c = SQR_2 - SQR_1$$

e

$$E\ (SQInteração\ TxT'_c) = E\ (SQR_2) - E\ (SQR_1)$$

Seguindo a metodologia apresentada em 3.2 estabelecemos a esperança matemática das diversas somas de quadrados envolvidas na determinação da $E\ (SQR_2)$.

$$E\ (SQtotal) = JK \sum_i t_i^2 + IK \sum_j b_j^2 + K\ (IJ-1)\ \sigma_{tb}^2 +$$

$$+ IJ \sum_k t_k'^2 + J \sum_{i,k} (tt')_{ik}^2 +$$

$$+ \left[\frac{IJK\ (IJ+K-2)}{(K-1)^2(IJ-1)^2} - \frac{IJK}{(K-1)(IJ-1)}\right](tt')_{ik}^2 +$$

$$+ \left[(IJK-2) + \frac{IJ+K-2}{(K-1)(IJ-1)}\right]\sigma^2$$

$$E\ (SQP) = JK \sum_i t_i^2 + IK \sum_j b_j^2 + K\ (IJ-1)\ \sigma_{tb}^2 +$$

$$+ \frac{IJK(IJ-1)}{(K-1)^2(IJ-1)^2}(tt')_{ik}^2 + \left[(IJ-1) + \right.$$

$$\left. + \frac{IJ-1}{(K-1)(IJ-1)}\right]\sigma^2$$

$$E\ (SQT') = IJ \sum_k t_k'^2 + \frac{IJK\ (K-1)}{(K-1)^2(IJ-1)^2}(tt')_{ik}^2 +$$

$$+ \left[(K-1) + \frac{K-1}{(K-1)(IJ-1)}\right]\sigma^2$$

Portanto

$$E\ (\text{SQInteração } TxT'_c) = J \sum_{i,k} (tt')^2_{ik} -$$

$$- \frac{IJK}{(K-1)(IJ-1)} (tt')^2_{ik} +$$

$$+ (I-1)(K-1)\ \sigma^2$$

Utilizando a correção proposta por *ANDERSON* (2) chegaríamos ao mesmo resultado, pois os dois métodos se equivalem no que diz respeito à correção da soma de quadrados da interação TxT'.

Como o número de graus de liberdade associado a esta soma de quadrados é (I-1)(K-1) e E [QMResíduo (b)] é σ^2 podemos concluir que esta interação pode ser perfeitamente testada com o quadrado médio do resíduo (b).

3.3.2. Soma de quadrados de tratamentos $(T')_c$

ANDERSON (2) apresenta a seguinte correção para a soma de quadrados de tratamentos T'

$$U_{T'} = (y - y_1)^2\ \Sigma\ (x_1^2)$$

onde:

$$y = \frac{JP + K\ (T_i T'_k) - T_i}{(J-1)(K-1)}$$

$$y_1 = \frac{IJP + IK\ (T_i T'_k) - I\ T_i - K\ T'_k + G}{(K-1)(IJ - I + 1)}$$

$$\Sigma\ (x_1^2) = (K - 1)(IJ - I + 1)/IJK$$

Determinando a esperança matemática da correção obtemos

$$E\ (U_{T'}) = \frac{IJK}{(K-1)(IJ-I+1)}\ t'^2_k + \frac{I}{J-1}\ \sigma^2$$

Subtraindo esta expressão da esperança matemática da so ma de quadrados de tratamentos *T'* determinada com *y*, temos:

$$E\left[SQTratamentos\ (T')_c\right] = IJ \sum_k t'^2_k - \frac{IJK}{(K-1)(IJ-I+1)}\, t'^2_k +$$

$$+\left[1 + \frac{I^2-1}{I(J-1)}\right]\sigma^2$$

Para a determinação da esperança matemática da soma de quadrados de tratamentos *T'* corrigida segundo *PINHO* (7), partimos da expressão:

$$SQTratamentos\ (T')_c = SQR_3 - SQR_2$$

e

$$SQR_3 = SQtotal - SQP$$

Ambas as somas de quadrados, SQtotal e SQP, são determinadas com a estimativa $y_3 = \frac{P}{K-1}$ para a subparcela perdida.

Seguindo a metodologia apresentada em 3.2 obtemos:

$$E\ (SQtotal) = JK \sum_i t_i^2 + IK \sum_j b_j^2 + K\ (IJ-1)\ \sigma^2_{tb} +$$

$$+ IJ \sum_k t'^2_k + J \sum_{i,k} (tt')^2_{ik} +$$

$$+ \frac{K\ (IJ-1) + IJK\ (K-1)}{IJ\ (K-1)^2}\, t'^2_k +$$

$$+ \frac{K\ (IJ-1) + IJK\ (K-1)}{IJ\ (K-1)^2}\, (tt')^2_{ik} +$$

$$+ \left[(IJK-2) + \frac{IJ-1}{IJ\ (K-1)}\right]\sigma^2$$

$$E\ (SQP) = JK \sum_i t_i^2 + IK \sum_j b_j^2 + K\ (IJ-1)\ \sigma^2_{tb} + \frac{K(IJ-1)}{IJ(K-1)^2}\, t'^2_k +$$

$$+ \frac{K(IJ-1)}{IJ(K-1)^2}\, (tt')^2_{ik} + \left[(IJ-1) + \frac{IJ-1}{IJ(K-1)}\right]\sigma^2$$

e

$$E\ (SQR_3) = IJ \sum_k t'^2_k + J \sum_{i,k} (tt')^2_{ik} + \frac{K}{K-1} t'^2_k +$$

$$+ \frac{K}{K-1} (tt')^2_{ik} + \left[IJ\ (K-1) - 1 \right] \sigma^2$$

Como

$$E \left[SQTratamentos\ (T')_c \right] = E\ (SQR_3) - E\ (SQR_2)$$

Temos:

$$E \left[SQTratamentos\ (T')_c \right] = IJ \sum_k t'^2_k + \frac{K}{K-1} t'^2_k -$$

$$- \frac{K}{(K-1)(IJ-1)} (tt')^2_{ik} +$$

$$+ (K-1)\ \sigma^2$$

Comparando os dois resultados podemos verificar que a correção proposta por *ANDERSON* (2) não possibilita testar o efeito dos tratamentos *T'* com o QMR (b), o mesmo não acontecendo quando se determina SQT'_c através do método proposto por *PINHO* (7).

3.4. Comparação de Médias.

Há cinco casos para comparações de médias, como:

a) diferença entre duas médias dos tratamentos (T);
b) diferença entre duas médias dos tratamentos (T');
c) diferença entre duas médias de T' no mesmo nível de T;
d) diferença entre duas médias de T no mesmo nível de T';
e) diferença entre duas médias de T a diferentes níveis de T'.

Para os casos (a) e (b) as estimativas das variâncias para contrastes entre duas médias, sendo uma delas com a subparcela perdida, serão deduzidas a partir do modelo matemático apresenta do em 3.1.a, ao passo que os outros três casos serão deduzidos a partir dos modelos matemáticos reestruturados, apresentados por *CONDÉ* (5) e reproduzidos em 3.1.b e 3.1.c.

a) Diferença entre duas médias dos tratamentos (T):

Para o tratamento T_i com a subparcela perdida,

$$T_i + y = JK\ t_i + K \sum_j b_j + K \sum_j tb_{ij} + J \sum_k t'_k + J \sum_k tt'_{ik} + \frac{K}{K-1} \sum_k{}' e_{ijk} + \frac{J}{J-1} \sum_j{}' e_{ijk} + \frac{(J-1)(K-1)-1}{(J-1)(K-1)} \sum_{j,k}{}'' e_{ijk}$$

$$\frac{T_i + y}{JK} = \bar{T}_i = t_i + \frac{1}{J} \sum_j tb_{ij} + \frac{1}{JK} \left[\frac{K}{K-1} \sum_k{}' e_{ijk} + \frac{J}{J-1} \sum_j{}' e_{ijk} + \frac{(J-1)(K-1)-1}{(J-1)(K-1)} \sum_{j,k}{}'' e_{ijk} \right]$$

Para um tratamento $T_{i'}$ qualquer:

$$T_{i'} = JK\ t_{i'} + K \sum_j b_j + K \sum_j tb_{i'j} + J \sum_k t'_k + J \sum_k tt'_{i'k} + \sum_{j,k} e_{i'jk}$$

$$\frac{T_{i'}}{JK} = \bar{T}_{i'} = t_{i'} + \frac{1}{J} \sum_j tb_{ij} + \frac{1}{JK} \sum_{j,k} e_{i'jk}$$

$$\hat{Y}_i = \bar{T}_{i'} - \bar{T}_i$$

$$\hat{Y}_i = t_{i'} - t_i + \frac{1}{J} \sum_j (tb_{i'j} - tb_{ij}) + \frac{1}{JK} \sum_{j,k} e_{i'jk} - \frac{1}{JK} \left[\frac{K}{K-1} \sum_k{}' e_{ijk} + \frac{J}{J-1} \sum_j{}' e_{ijk} + \frac{(J-1)(K-1)-1}{(J-1)(K-1)} \sum_{j,k}{}'' e_{ijk} \right]$$

$$E(\hat{Y}_i) = t_{i'} - t_i$$

Por definição:

$$V(\hat{Y}_i) = E\left[\hat{Y}_i - E(\hat{Y}_i)\right]^2$$ substituindo, temos

$$V(\hat{Y}_i) = E\left\{\frac{1}{J}\sum_j (tb_{i'j} - tb_{ij}) + \frac{1}{JK}\sum_{j,k} e_{i'jk} - \right.$$

$$- \frac{1}{JK}\left[\frac{K}{K-1}\sum_k{}' e_{ijk} + \frac{J}{J-1}\sum_j{}' e_{ijk} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{(J-1)(K-1)-1}{(J-1)(K-1)}\sum_{j,k}{}'' e_{ijk}\right]\right\}^2$$

$$V(\hat{Y}_i) = \frac{1}{J^2}\, 2\, J\, \sigma^2_{tb} + \frac{JK}{J^2K^2}\,\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{J^2K^2}\left\{\frac{K^2}{K-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{J^2}{J-1} + \frac{\left[(J-1)(K-1)-1\right]^2}{(J-1)(K-1)}\right\}$$

$$V(\hat{Y}_i) = \frac{2}{J}\,\sigma^2_{tb} + \frac{2(J-1)(K-1)+1}{(JK(J-1)(K-1)}\,\sigma^2$$

$$V(\hat{Y}_i) = \frac{2}{JK}\left[K\,\sigma^2_{tb} + \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2(J-1)(K-1)}\right]$$

Se $E\left[QMR\ (a)\right] = E_a = K\,\sigma^2_{tb} + \sigma^2$ e

$E\left[QMR\ (b)\right] = E_b = \sigma^2$

Então,

$$V(\hat{Y}_i) = \frac{2}{JK}\left[E_a + \frac{E_b}{2(J-1)(K-1)}\right]$$

Verificamos que esta fórmula é idêntica àquela apresentada por *ANDERSON* (2) e *COCHRAN & COX* (4).

Mas,

$$E\left[QMR\ (a)\right] = E_a = K\,\sigma^2_{tb} + \left[1 + \frac{1}{I(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2$$

e

$$E\left[QMR\ (b)\right] = E_b = \sigma^2$$

Então

$$V\ (\hat{Y}_i) = \frac{2}{JK}\left[E_a + \frac{(I-2)\ E_b}{2\ I\ (J-1)(K-1)}\right]$$

b) Diferença entre duas médias dos tratamentos (T'):

Para o tratamento T'_k com a subparcela perdida,

$$T'_k + y = J \sum_i t_i + I \sum_j b_j + \sum_{i,j} tb_{ij} + IJ\ t'_k +$$

$$+ J \sum_i tt'_{ik} + \sum_{i,j}'' e_{ijk} + \frac{1}{K-1} \sum_k' e_{ijk} +$$

$$+ \frac{J}{J-1} \sum_j' e_{ijk} - \frac{1}{(J-1)(K-1)} \sum_{j,k}'' e_{ijk}$$

$$\frac{T'_k + y}{IJ} = \bar{T}'_k = \frac{1}{IJ} \sum_{i,j} tb_{ij} + t'_k + \frac{1}{IJ}\left[\sum_{i,j}'' e_{ijk} +\right.$$

$$+ \frac{1}{K-1} \sum_k' e_{ijk} + \frac{J}{J-1} \sum_j' e_{ijk} -$$

$$\left. - \frac{\sum_{j,k}'' e_{ijk}}{(J-1)(K-1)}\right]$$

Para um tratamento $T'_{k'}$ qualquer:

$$T'_{k'} = J \sum_i t_i + I \sum_j b_j + \sum_{i,j} tb_{ij} + IJ\ t'_{k'} +$$

$$+ J \sum_i tt'_{ik'} + \sum_{i,j} e_{ijk'}$$

$$\frac{T'_{k'}}{IJ} = \bar{T}'_{k'} = \frac{1}{IJ} \sum_{i,j} tb_{ij} + t'_{k'} + \frac{1}{IJ} \sum_{i,j} e_{ijk'}$$

$$\hat{Y}_k = \bar{T}'_{k'} - \bar{T}'_k$$

$$\hat{Y}_k = t'_{k'} - t'_k + \frac{1}{IJ} \sum_{i,j} e_{ijk'} - \frac{1}{IJ} \left[\sum_{i,j}'' e_{ijk} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{K-1} \sum_k' e_{ijk} + \frac{J}{J-1} \sum_j e_{ijk} - \frac{\sum_{j,k}'' e_{ijk}}{(J-1)(K-1)} \right]$$

$$E\ (\hat{Y}_k) = t'_{k'} - t'_k$$

$$V\ (\hat{Y}_k) = E\ \{ \frac{1}{IJ} \sum_{i,j} e_{ijk'} - \frac{1}{IJ} \left[\sum_{i,j}'' e_{ijk} + \right.$$

$$+ \frac{1}{K-1} \sum_k' e_{ijk} + \frac{J}{J-1} \sum_j' e_{ijk} -$$

$$\left. - \frac{\sum_{j,k}'' e_{ijk}}{(J-1)(K-1)} \right] \}^2$$

$$V\ (\hat{Y}_k) = \{ \frac{IJ}{I^2 J^2} + \frac{1}{I^2 J^2} \left[(I-1)\ J + \frac{1}{K-1} + \frac{J^2}{J-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(J-1)(K-1)} \right] \} \sigma^2$$

$$V\ (\hat{Y}_k) = \frac{2}{IJ} \left[1 + \frac{K}{2\ I\ (J-1)(K-1)} \right] \sigma^2$$

Como,

$$E \left[QMR\ (b) \right] = E_b = \sigma^2$$

$$V\ (\hat{Y}_k) = \frac{2\ E_b}{IJ} \left[1 + \frac{K}{2\ I\ (J-1)(K-1)} \right]$$

Fórmula esta idêntica às apresentadas por *ANDERSON* (2) e *COCHRAN & COX* (4).

c) Diferença entre duas médias de T' no mesmo nível de T.
De acordo com o modelo matemático reestruturado,

$$x_{ijk} = m + t_i + b_j + tb_{ij} + t'_k/t_1 + t'_k/t_2 + t'_k/t_3 + \dots +$$
$$+ t'_k/t_i + e_{ijk}$$

temos:

Para o tratamento $T'_{k/i}$ com a subparcela perdida:

$$T'_{k/i} + y = J\ t_i + \sum_j b_j + \sum_j tb_{ij} + J\ t'_k/t_i +$$

$$+ \frac{1}{K-1} \sum_k{}' e_{ijk} + \frac{J}{J-1} \sum_j{}' e_{ijk} -$$

$$- \frac{\sum''_{j,k} e_{ijk}}{(J-1)(K-1)}$$

$$\frac{T'_{k/i} + y}{J} = t_i + \frac{1}{J} \sum_j b_j + t'_k/t_i +$$

$$+ \frac{1}{J} \left[\frac{1}{K-1} \sum_k{}' e_{ijk} + \frac{J}{J-1} \sum_j{}' e_{ijk} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sum''_{j,k} e_{ijk}}{(J-1)(K-1)} \right]$$

Para um $T'_{k'/i}$ qualquer:

$$T'_{k'/i} = J\ t_i + \sum_j b_j + \sum_j tb_{ij} + J\ t'_{k'}/t_i + \sum_j e_{ijk'}$$

$$\frac{T'_{K'/i}}{J} = t_i + \frac{1}{J} \sum_j b_j + \frac{1}{J} \sum_j tb_{ij} + t'_{k'}/t_i +$$

$$+ \frac{1}{J} \sum_j e_{ijk'}$$

$$\hat{Y}_{k/i} = \frac{T'_{k'/i}}{J} - \frac{T'_{k/i} + y}{J}$$

$$\hat{Y}_{k/i} = t'_{k'}/t_i - t'_k/t_i + \frac{1}{J} \sum_j e_{ijk'} -$$

$$- \frac{1}{J} \left[\frac{1}{K-1} \sum_k{}' e_{ijk} + \frac{J}{J-1} \sum_j{}' e_{ijk} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sum''_{j,k} e_{ijk}}{(J-1)(K-1)} \right]$$

$$E\ (\hat{Y}_{k/i}) = t'_{k'}/t_i - t'_k/t_i$$

$$V\ (\hat{Y}_{k/i}) = E\ \{\frac{1}{J} \sum_{j} e_{ijk'} - \frac{1}{J} \left[\frac{1}{K-1} \sum_{k}{}' e_{ijk} + \right.$$

$$\left. + \frac{J}{J-1} \sum_{j}{}' e_{ijk} - \frac{\sum''_{j,k} e_{ijk}}{(J-1)(K-1)}\right]\}^2$$

$$V\ (\hat{Y}_{k/i}) = \{\frac{J}{J^2} + \frac{1}{J^2} \left[\frac{1}{K-1} + \frac{J^2}{J-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(J-1)(K-1)}\right]\}\ \sigma^2$$

$$V\ (\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{J} \left[1 + \frac{K}{2\ (J-1)(K-1)}\right] \sigma^2$$

Como,

$$E\ \left[QMR\ (b)\right] = E_b = \sigma^2$$

$$V\ (\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2\ E_b}{J} \left[1 + \frac{K}{2\ (J-1)(K-1)}\right]$$

Verificamos que *ANDERSON* (2) apresentou fórmula idêntica à deduzida acima, e que a fórmula estabelecida por *COCHRAN & COX* (4) difere desta por um fator $\frac{1}{a}$ no segundo termo, onde a = = I.

d) Diferença entre duas médias de T no mesmo nível de T'.

De acordo com o modelo matemático reestruturado,

$$x_{ijk} = m + b_j + tb_{ij} + t'_k + t_i/t'_1 + t_i/t'_2 +$$

$$+ t_i/t'_3 + \ldots + t_i/t'_k + e_{ijk}$$

temos:

Para o tratamento $t_{i/k}$ com a subparcela perdida,

$$T_{i/k} + y = \sum_j b_j + \sum_j tb_{ij} + J\ t_i/t'_k + \frac{1}{K-1} \sum_k{}' e_{ijk} +$$

$$+ \frac{J}{J-1} \sum_j{}' e_{ijk} - \frac{\sum_{j,k}'' e_{ijk}}{(J-1)(K-1)}$$

$$\frac{T_{i/k} + y}{J} = \frac{1}{J} \sum_j tb_{ij} + t_i/t'_k + \frac{1}{J} \left[\frac{1}{K-1} \sum_k{}' e_{ijk} + \right.$$

$$\left. + \frac{J}{J-1} \sum_j{}' e_{ijk} - \frac{\sum_{j,k}'' e_{ijk}}{(J-1)(K-1)} \right]$$

Para um $t_{i'/k}$ qualquer:

$$T_{i'/k} = \sum_j b_j + \sum_j tb_{i'j} + J\ t_{i'}/t'_k + \sum_j e_{i'jk}$$

$$\frac{T_{i'/k}}{J} = \frac{1}{J} \sum_j tb_{i'j} + t_{i'}/t'_k + \frac{1}{J} \sum_j e_{i'jk}$$

$$\hat{Y}_{i/k} = \frac{T_{i'/k}}{J} - \frac{T_{i/k} + y}{J}$$

$$\hat{Y}_{i/k} = \frac{1}{J} \sum_j (tb_{i'j} - tb_{ij}) + t_{i'}/t'_k - t_i/t'_k +$$

$$+ \frac{1}{J} \sum_j e_{i'jk} - \frac{1}{J} \left[\frac{\sum_k' e_{ijk}}{K-1} + \frac{J}{J-1} \sum_j{}' e_{ijk} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sum_{j,k}'' e_{ijk}}{(J-1)(K-1)} \right]$$

$$E\ (\hat{Y}_{i/k}) = t_{i'}/t'_k - t_i/t'_k$$

$$V\ (\hat{Y}_{i/k}) = E \left\{ \frac{1}{J} \sum_j (tb_{i'j} - tb_{ij}) + \frac{1}{J} \sum_j e_{i'jk} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{J} \left[\frac{\sum_k' e_{ijk}}{K-1} + \frac{J}{J-1} \sum_j{}' e_{ijk} - \frac{\sum_{j,k}'' e_{ijk}}{(J-1)(K-1)} \right] \right\}^2$$

$$V(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2J}{J^2}\sigma^2_{tb} + \frac{J\sigma^2}{J^2} + \frac{1}{J^2}\left[\frac{1}{K-1} + \frac{J^2}{J-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2$$

$$V(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{J}\sigma^2_{tb} + \frac{2}{J}\sigma^2 + \frac{K}{J(J-1)(K-1)}\sigma^2$$

Se $E\left[QMR\ (a)\right] = K\sigma^2_{tb} + \sigma^2$

$E\left[QMR\ (b)\right] = \sigma^2$

Então,

$$V(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2E_a}{JK} + \frac{2E_b}{JK}\left[(K-1) + \frac{K^2}{2(J-1)(K-1)}\right]$$

Fórmula esta dada por *ANDERSON* (2) e *COCHRAN & COX* (4).

Mas

$$E\left[QMR\ (a)\right] = K\sigma^2_{tb} + \left[1 + \frac{1}{I(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2$$

e

$$E\left[QMR\ (b)\right] = \sigma^2$$

Então,

$$V(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2E_a}{JK} + \frac{2E_b}{JK}\left[(K-1) + \frac{IK^2 - 2}{2I(J-1)K-1)}\right]$$

e) Diferença entre duas médias de T a diferentes níveis de T'.

Ainda de acordo com o modelo matemático reestruturado,

$$x_{ijk} = m + b_j + tb_{ij} + t'_k + t_i/t'_1 + t_i/t'_2 +$$

$$+ t_i/t'_3 + \ldots + t_i/t'_k + e_{ijk}$$

temos:

Para o tratamento $T_{i/k}$ com a subparcela perdida,

$$\frac{T_{i/k} + Y}{J} = \frac{1}{J} \sum_j tb_{ij} + t_i/t'_k + \frac{1}{J} \left[\frac{\sum'_k e_{ijk}}{K-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{J}{J-1} \sum'_j e_{ijk} - \frac{\sum''_{j,k} e_{ijk}}{(J-1)(K-1)} \right]$$

Para um $T_{i'/k'}$ qualquer,

$$\frac{T_{i'/k'}}{J} = \frac{1}{J} \sum_j tb_{i'j} + t_{i'}/t'_{k'} + \frac{1}{J} \sum_j e_{i'jk'}$$

$$\hat{Y}_{i'k'} = \frac{T_{i'/k'}}{J} - \frac{T_{i/k} + Y}{J}$$

$$\hat{Y}_{i'/k'} = \frac{1}{J} \sum_j (tb_{i'j} - tb_{ij}) + t_{i'}/t'_{k'} - t_i/t'_k +$$

$$+ \frac{1}{J} \sum_j e_{i'jk'} - \frac{1}{J} \left[\frac{\sum'_k e_{ijk}}{K-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{J}{J-1} \sum'_j e_{ijk} - \frac{\sum''_{j,k} e_{ijk}}{(J-1)(K-1)} \right]$$

$$E\,(\hat{Y}_{i'/k'}) = t_{i'}/t'_{k'} - t_i/t'_k$$

$$V\,(\hat{Y}_{i'/k'}) = E\,\{\frac{1}{J} \sum_j (tb_{i'j} - tb_{ij}) + \frac{1}{J} \sum_j e_{i'jk'} -$$

$$- \frac{1}{J} \left[\frac{\sum'_k e_{ijk}}{K-1} + \frac{J}{J-1} \sum'_j e_{ijk} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sum''_{j,k} e_{ijk}}{(J-1)(K-1)} \right]\}^2$$

$$V(\hat{Y}_{i'/k'}) = \frac{1}{J^2}\, 2\, J\, \sigma^2_{tb} + \frac{J}{J^2}\, \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{J^2}\left[\frac{1}{K-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{J^2}{J-1} + \frac{1}{(J-1)(K-1)}\right]$$

$$V(\hat{Y}_{i'/k'}) = \frac{2}{J}\,\sigma^2_{tb} + \frac{2}{J}\,\sigma^2 + \frac{K}{J\,(J-1)(K-1)}\,\sigma^2$$

Se

$$E\left[QMR\ (a)\right] = K\,\sigma^2_{tb} + \sigma^2$$

$$E\left[QMR\ (b)\right] = \sigma^2$$

Então,

$$V(\hat{Y}_{i'/k'}) = \frac{2\,E_a}{JK} + \frac{2\,E_b}{JK}\left[(K-1) + \frac{K^2}{2\,(J-1)(K-1)}\right]$$

Mas,

$$E\left[QMR\ (a)\right] = K\,\sigma^2_{tb} + \left[1 + \frac{1}{I\,(J-1)(K-1)}\right]\sigma^2$$

$$E\left[QMR\ (b)\right] = \sigma^2$$

Então,

$$V(\hat{Y}_{i'/k'}) = \frac{2\,E_a}{JK} + \frac{2\,E_b}{JK}\left[(K-1) + \frac{IK^2 - 2}{2\,I\,(J-1)(K-1)}\right]$$

Verificamos que esta fórmula é idêntica à determinada no ítem *d*.

Nas fórmulas em que os dois resíduos estão envolvidos, o número de graus de liberdade associado, pode ser satisfatoriamente calculado pela fórmula de *SATTERTWAITE* (9).

4. *RESUMO E CONCLUSÕES*

Considerando a importância dos experimentos em parcelas subdivididas na pesquisa agronômica e a possibilidade de ocorrência de perdas de informações, apresentamos um estudo dos componentes de variância das somas de quadrados dos diversos efeitos, quando há falta de uma subparcela. Os componentes de variância foram determinados a partir da expressão de cada soma de quadrados, sempre considerando a mesma estimativa y_1 para a subparcela perdida, onde

$$y_1 = \frac{JP + K\ (T_i T_k') - T_i}{(J-1)(K-1)}$$

e

J: número de blocos;

K: número de tratamentos testados nas subparcelas;

P: total das subparcelas presentes na parcela onde se perdeu um dado;

$T_i T_k'$: total de todos os dados relativos aos tratamentos T_i e T_k' correspondentes à subparcela perdida;

T_i: total de todos os dados relativos ao tratamento T atribuído à parcela com a subparcela perdida.

Tentando elucidar o problema da correção das somas de quadrados determinamos os componentes de variância das somas de quadrados da interação TxT' e do tratamento T' ambas corrigidas segundo os métodos propostos por *ANDERSON* (2) e *PINHO* (7).

A partir da estimativa y_1 para a subparcela perdida, dos componentes de variância das somas de quadrados e do modelo matemático reestruturado segundo *CONDÉ* (5), determinamos estimativas de variância de contrastes de duas médias, considerando sempre uma delas com a subparcela perdida.

Com o estudo realizado podemos concluir:

a) O quadrado médio do resíduo (b) fica imparcial ("Unbiased") quando utilizamos a estimativa y_1 para a subparcela perdida.

b) Todos os quadrados médios, com exceção do resíduo (b), determinados com a estimativa y_1 para a subparcela perdida, estão super estimados de um fator $\frac{\sigma^2}{I(J-1)(K-1)}$ onde σ^2 é a esperança do quadrado médio do resíduo (b), e I é o número de tratamentos testados nas parcelas.

c) O efeito da interação TxT' pode ser testado com o quadrado médio do resíduo (b) quando corrigimos a soma de quadrados desta interação pelo método proposto por *ANDERSON* (2) ou pelo método proposto por *PINHO* (7).

d) A esperança da soma de quadrados de tratamentos T' corrigida de acordo com *PINHO* (7) é

$$E(SQT'_c) = IJ \sum_k t'^2_k + \frac{K}{K-1} t'^2_k - \frac{K}{(K-1)(IJ-1)} (tt')^2_{ik} + (K-1)\sigma^2$$

o que nos possibilita testar o efeito dos tratamentos T' com o quadrado médio do resíduo (b), o que não acontece com a soma de quadrados de tratamentos T' corrigida de acordo com *ANDERSON* (2).

e) A variância do contraste entre duas médias, sendo uma delas com a subparcela perdida, é obtida:

e.1) Para duas médias dos tratamentos T

$$V(\hat{Y}_i) = \frac{2}{JK}\left[E_a + \frac{(I-2)\ E_b}{2\ I\ (J-1)(K-1)}\right]$$

e.2) Para duas médias dos tratamentos T'

$$V(\hat{Y}_k) = \frac{2\ E_b}{IJ}\left[1 + \frac{K}{2\ I\ (J-1)(K-1)}\right]$$

e.3) Para duas médias de T' no mesmo nível de T

$$V(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2\ E_b}{J}\left[1 + \frac{K}{2\ (J-1)(K-1)}\right]$$

e.4) Para duas médias de T no mesmo nível de T'

$$V\ (\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2\ E_a}{JK} + \frac{2\ E_b}{JK}\left[(K-1) + \right.$$

$$\left. + \frac{IK^2 - 2}{2\ I\ (J-1)(K-1)}\right]$$

e.5) Para duas médias de T a diferentes níveis de T'

$$V\ (\hat{Y}_{i'/k'}) = \frac{2\ E_a}{JK} + \frac{2\ E_b}{JK}\left[(K-1) + \right.$$

$$\left. + \frac{IK^2 - 2}{2\ I\ (J-1)(K-1)}\right]$$

onde:

E_a = QMR (a), e

E_b = QMR (b).

f) As fórmulas relacionadas em e.1 e e.4 não são concordantes com as apresentadas por *ANDERSON* (2) e *COCHRAN & COX* (4) que consideraram a $E\left[\text{QMResíduo (a)}\right] = K\ \sigma^2_{tb} + \sigma^2$, quando $E\left[\text{QMResíduo (a)}\right] = K\ \sigma^2_{tb} + \left[1 + \frac{1}{I\ (J-1)(K-1)}\right]\sigma^2$.

g) A fórmula apresentada na conclusão e.3 é concordante com a estabelecida por *ANDERSON* (2) e discordante da apresentada por *COCHRAN & COX* (4) de um fator $\frac{1}{a}$ no segundo termo, onde a é o número de tratamentos testados nas parcelas.

h) A fórmula da conclusão e.2 é idêntica às apresentadas por *ANDERSON* (2) e *COCHRAN & COX* (4) pois envolve apenas o quadrado médio do resíduo (b), cuja esperança é σ^2.

5. *REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS*

1. *ALLAN, F.E. & WISHART, J.* A method of estimating the yield of a missing plot in field experimental Work. Jour. Agr. Sci., 20 : 399-406, 1930.

2. *ANDERSON, R.L.* Missing-plot techniques. Biometrics, Washington, 2 : 41-47, 1946.

3. *CAMPOS, H.* Estudo sobre a análise de experimentos com parcelas perdidas (Tese) Piracicaba, 1964. 84 p.

4. *COCHRAN, W.G. and COX, G.* Experimental Designs. 2ª ed., New York, John Wiley & Sons, 1957. 64 p.

5. *CONDÉ, A.R.* Estudo dos Componentes de Variância nos experimentos em parcelas subdivididas (Tese). Piracicaba, 1974.

6. *CORNISH, E.A.* The estimation of missing values in incomplete randomized blocks experiments. Ann. Engen., 10:112-118, 1940.

7. *PINHO, S.Z.* Observações perdidas em delineamentos em parcelas subdivididas e parcelas subsubdivididas (Tese). Botucatu, 1973. 173 p.

8. *SMITH, H.F.* Error variance on treatment contrasts in an experiment with missing observations. Indian J. Agric. Stat., 2 : 111-124, 1950.

9. *SATTERTHWAITE, F.E.* An Aproximate Distribution of Estimates of Variance Components. Biometrics, 2 : 110-114, 1946.

10. *STEEL, R.G. & TORRIE, J.H.* Principles and Procedures of Statistics. London, McGraw-Hill, 1960. 481 p.

11. *YATES, F.* The analysis of replicated experiment when the fields results are incomplete. Emp. Jour. Exp. Agr., 1:129-142, 1933.