ANÁLISE ESTATÍSTICA DE UM EXPERIMENTO EM QUADRADO LATINO COM PERDA DE PARCELAS, LINHA, COLUNA OU TRATAMENTO

SAMUEL FABRE SANCHES
Licenciado em Matemática

Orientador: Dr. Izaias Rangel Nogueira

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Experimentação e Estatística.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Abril, 1978

À meus pais

À minha esposa, Mercedes

À meus filhos, Hebert

Janaina

DEDICO

AGRADECIMENTOS

Expressamos nossos sinceros agradecimentos:

- Ao Dr. Izaias Rangel Nogueira, Professor Titular, Chefe do Departamento de Matemática e Estatística, da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", pela orientação segura, o qual, mais do que orientador, foi amigo.

- Ao Dr. Frederico Pimentel Gomes, Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Experimentação e Estatística, pelo brilhante empenho demonstrado na condução do curso.

- Ao Dr. Humberto de Campos, pelo espírito de colaboração e pelas atenções dispensadas a nós e nossa família.

- Aos demais professores e funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela dedicação, sabedoria e espírito de colaboração.

- Ao amigo e colega Prof. José Carani, Vice Diretor do Centro de Ciências Exatas da Fundação Universidade Estadual de Londrina, pelo apoio e incentivo que nos deu para a realização do curso.

- À Fundação Universidade Estadual de Londrina, e ao Dr. Oscar Alves, Magnífico Reitor, pela oportunidade oferecida para a realização do curso.

- Aos colegas do Departamento de Matemática e Estatística e Computação da Fundação Universidade Estadual de Londrina, que galhardamente acumularam nossas funções docentes, possibilitando a realização do curso.

- À CAPES, que através do Plano Institucional de Capacitação de Docentes da Fundação Universidade Estadual de Londrina (PICD-FUEL), concedeu bolsa de estudo.

- Ao colega Prof. José Carlos Pinote, Coordenador de Recursos Humanos e Presidente da Comissão de Capacitação Docente da FUEL, pela segurança que nos proporcionou.

- Aos colegas do curso, e aos nossos vizinhos em Piracicaba cujo espírito de solidariedade e humanismo nos permitiu uma atmosfera de trabalho plena de segurança e tranquilidade.

- Ao Prof. Dr. David O. Hansen, do Departamento de Economia e Sociologia Rural, pela versão do Resumo para o inglês.

- À Sra. Sônia Novaes Rasera, pelo trabalho de datilografia.

- E a todos que de uma forma ou de outra concorreram para o bom andamento deste trabalho.

ÍNDICE

	página
1. RESUMO	1
2. INTRODUÇÃO	5
3. REVISÃO DE LITERATURA	7
4. MATERIAL	13
5. MÉTODO	15
5.1. Cálculo das SQ P($\hat{m}$, $\hat{t}_k$, $\hat{\ell}_i$, $\hat{c}_j$), SQ P($\tilde{m}$, $\tilde{\ell}_i$, $\tilde{c}_j$) e SQ P ($\bar{m}$, $\bar{\ell}_i$)	15
5.2. Análise de variância	18
5.3. Variância de um contraste entre efeitos de tratamentos ...	19
5.4. Análise de variância quando substituimos as parcelas perdidas pelas suas estimativas x_1, x_2, ..., x_p	20
5.5. Cálculo dos números U e U'	20
5.6. Esquema da análise de variância	21
6. RESULTADOS TEÓRICOS	23
6.1. Caso de uma parcela perdida	24
6.2. Caso de duas parcelas perdidas em linhas, colunas e tratamentos distintos	39
6.3. Caso de duas parcelas perdidas na mesma linha	53
6.4. Caso de duas parcelas perdidas na mesma coluna	63
6.5. Caso de duas parcelas perdidas num mesmo tratamento	71
6.6. Caso de um tratamento perdido	80

página

6.7. Caso de uma linha perdida 86

6.8. Caso de uma coluna perdida 91

7. CONCLUSÕES 93

8. SUMMARY 96

9. BIBLIOGRAFIA 99

1. RESUMO

O presente trabalho foi orientado no sentido de apresentar um estudo simples da análise estatística de um delineamento em quadrado latino r x r, onde ocorrem perdas de:

a. uma parcela

b. duas parcelas de tratamentos distintos

c. duas parcelas de um mesmo tratamento

d. um tratamento, ou uma linha, ou uma coluna.

Consideramos o modelo matemático:

$y_{ij} = m + t_{k(i,j)} + c_j + \ell_i + e_{ij}$, onde:

m é a média geral

$t_{k(i,j)}$ é o efeito do tratamento k

c_j é o efeito da coluna j

ℓ_i é o efeito da linha i

e_{ij} é o erro com N $(0, \sigma^2)$.

A partir desse modelo, pelo método do resíduo condicional , que é baseado no método dos quadrados mínimos, foram abordados os seguintes tópicos:

1. Cálculo das somas de quadrados dos parâmetros: SQ P($\hat{m}, \hat{t}_k$, $\hat{c}_j$, $\hat{\ell}_i$), SQ P($\tilde{m}$, $\tilde{c}_j$, $\tilde{\ell}_i$) e SQ P($\bar{m}$, $\bar{\ell}_i$), utilizando as estimativas das parcelas perdidas.

2. Demonstração da fórmula para se obter: SQ Tratamento (aj) e SQ Coluna (aj).

3. Demonstração da fórmula para o cálculo da variância de um contraste entre efeitos de dois tratamentos, através da relação:

$V\ (P'\hat{\beta}_1) = P'M_1^{-1}\ P\ \sigma^2$, onde,

$\hat{\beta}_1 = M_1^{-1}\ X_1^1\ Y$ é o vetor coluna formado pelas estimativas dos parametros do modelo matemático, e $P'\beta$ é um constraste entre efeitos de tratamentos.

4. Análise de variância quando substituimos as parcelas perdidas pelas suas estimativas (x_1, x_2).

5. Demonstração da fórmula para a correção (U) da SQ Tratamento (x), onde U = SQ T(x) - SQ T(aj).

Os principais resultados obtidos foram:

casos estudados	SQ Tratamento(aj)	Correção (U)	G.L. do Resíduo	para
a	$\hat{t}_1 y_1 + \Sigma\, \hat{t}_k T_k$	$\hat{t}_1(x_1 - y_1)$	$r^2 - 3r + 1$	$r \geqslant 3$
b	$\hat{t}_1 y_1 + \hat{t}_2 y_2 + \Sigma \hat{t}_k T_k$	$\hat{t}_1(x_1 - y_1) + \hat{t}_2(x_2 - y_2)$	$r^2 - 3r$	$r \geqslant 4$
c	$\hat{t}_1(y_1 + y_2) + \Sigma \hat{t}_k T_k$	$2\hat{t}_1(x_1 - y_2)$	$r^2 - 3r$	$r \geqslant 4$
d	-		$r^2 - 4r + 3$	$r \geqslant 4$

onde: x_1 e x_2 são as estimativas das parcelas perdidas quando consideramos o modelo $y_{ij} = m + t_{k(i,j)} + c_j + \ell_i + e_{ij}$;

y_1 e y_2 são as estimativas das parcelas perdidas quando consideramos o modelo $y_{ij} = m + c_j + \ell_i + e_{ij}$.

Para comprovação dos resultados utilizamos dados de um experimento compilado de *PIMENTEL GOMES (1976)*.

As principais conclusões deste trabalho foram:

1. As fórmulas deduzidas para o cálculo das (SQ T(aj), SQ C(aj), U e U' onde U' = SQ C(y) - SQ (aj), são bastante simples e de fácil uso.

2. As dimensões minimas de um delineamento em quadrado latino, quando ocorre perda de duas parcelas ou uma linha ou uma coluna ou um tratamento é 4 x 4.

3. Nos casos em que ocorre a perda de um tratamento ou uma linha ou uma coluna, podemos usar a teoria geral de blocos incompletos equilibrados para a obtenção das somas de quadrados das causas de variações ajustadas.

4. O número U na forma matricial é:

$$U = \frac{1}{r^2}\left[(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)\right] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - y_1) \\ (x_2 - y_2) \end{bmatrix}$$

onde, a matriz $\left[a_{ij} \right]$ é formada pelos coeficientes do sistema cujas variáveis são as estimativas y_1 e y_2.

2. INTRODUÇÃO

Por condições alheias ao experimentador pode, em muitas ocasiões, ocorrer a perda de uma ou mais parcelas em trabalhos de natureza experimental. Nestes casos, a análise estatística se torna mais complicada.

Convém salientar que, quando certas observações são prejudicadas, se tornando discrepantes do normal, pelos mesmos motivos citados acima, ou mesmo por erro do experimentador, pode-se considerá-las como parcelas perdidas, de acordo com o conceito estatístico.

Num delineamento em quadrado latino r x r pode ocorrer perda de:

a. uma parcela;

b. duas ou mais parcelas em linhas, colunas e tratamentos distintos;

c. duas ou mais parcelas numa mesma linha, ou numa mesma coluna;

d. duas ou mais parcelas num mesmo tratamento;

e. todas as parcelas de uma linha ou de uma coluna;

f. todas as parcelas de um mesmo tratamento.

Podem também ocorrer outros casos que deixamos de citar, pois, neste trabalho, abordaremos apenas os casos citados acima.

A análise estatística de tais experimentos se torna mais complexa. Porém, qualquer experimento, desde que bem planejado, pode ser analisado estatisticamente, mesmo ocorrendo as perdas citadas e desde que não resulte em um número pequeno de graus de liberdade associado ao resíduo.

Para cada caso citado, faremos a análise dos dados existentes, levando em conta a perda ocorrida.

A solução mais usada nestes casos é aquela que procede à determinação das estimativas das parcelas perdidas. Uma vez determinadas, procede-se à análise de modo usual.

Entretanto, o uso de parcelas estimadas conduz a uma análise de variância com vícios das somas de quadrados de linhas ou colunas e tratamentos, sendo necessário proceder-se à uma correção dessas somas de quadrados.

Um dos objetivos deste trabalho é obter as somas de quadrados ajustadas e, ao mesmo tempo, a correção para as somas de quadrados, quando consideramos no experimento as estimativas das parcelas perdidas.

Convém salientar que o objetivo principal é mostrar fórmulas fáceis de serem memorizadas, tanto para somas de quadrados ajustadas, como para a correção, quando necessária.

3. REVISÃO DE LITERATURA

As estimativas de parcelas perdidas, sob um aspecto matemático rigoroso, em experimentos estatísticos, têm sido bastante exploradas nestas últimas décadas.

Geralmente, a preocupação inicial nas análises de tais experimentos, é a estimativa das parcelas perdidas, de modo que se possa levar avante a análise de variância.

Um dos primeiros trabalhos relativos à determinação de valores para parcelas perdidas, em experimentos, foi publicado por *ALLAN e WISHART (1930)*, que deduziram fórmulas e ilustraram seu uso para uma parcela em experimentos em blocos casualizados e em quadrado latino. Para experimento em blocos casualizados deduziu a seguinte fórmula:

$$K = \frac{(r + n - 1)\ S - n\ S_t - r\ S_b}{(r - 1)\ (n - 1)},$$

onde K e a estimativa da parcela perdida;

r é o número de blocos;

n é o número de tratamentos;

S é a soma das parcelas existentes;

S_t é a soma dos totais de tratamentos, excluindo o da parcela perdida;

S_b é a soma dos totais de blocos, excluindo o da parcela perdida.

Para o caso de um experimento em quadrado latino, cita a fórmula:

$$K = \frac{1}{r - 1} S_1 - \frac{2}{(r - 1)(r - 1)} S_2 ,$$

onde, S_1 = soma dos dados das 3(r - 1) parcelas relacionadas com a perdida, na linha, coluna e tratamento;

S_2 = soma das parcelas que não estão relacionadas.

Estes autores definem como parcelas perdidas, aquelas cujos dados são imperfeitos, por motivos alheios ao controle do experimentador.

ANDERSON (1946) define parcelas perdidas de maneira análoga, porém recomenda que sejam rejeitadas em casos extremos. Apresentou uma revisão de literatura sobre parcelas perdidas, em vários tipos de delineamentos, e as respectivas fórmulas até então deduzidas para as estimativas das parcelas perdidas. Além dos delineamentos em blocos casualizados e em quadrado latino, apresentou e comentou várias outras fórmulas para estimativas de parcelas perdidas em látice e fatorial 2^n e 3^n.

De acordo com *COCHRAN e COX (1957)*, quando algumas observações estão faltando, o procedimento correto é escrever um modelo matemático para todas as observações que estão presente. As equações normais dos quadrados mínimos são construídas da maneira usual. Estas tomam exatamente a mesma forma geral que teriam se todas as observações estivessem presentes. Com a falta dos termos das equações que representam as parcelas perdidas, o sistema de equações não tem a mesma simetria que teria se não houvessem parcelas perdidas. Assim sendo, sua solução torna-se mais difícil.

Os mesmos autores propuseram um método, que foi denominado de Método Correto dos Quadrados Mínimos.

YATES (1933) resolveu o problema baseado no método dos quadrados mínimos para determinação de várias parcelas perdidas, substituindo-se por incógnitas e procurando minimizar a soma de quadrados do resíduo.

Ao citar um experimento em blocos casualizados com uma parcela perdida, o autor afirma que, se o valor estimado for inserido no lugar da parcela perdida, e se a análise for feita como se não tivesse ocorrido nenhuma perda, algumas propriedades importantes ocorram:

a. as estimativas dos efeitos de tratamentos e efeitos de blocos são as mesmas que as obtidas pelo método correto dos quadrados mínimos;

b. a soma de quadrados do resíduo é exatamente a mesma que é dada pelo procedimento correto;

c. o número exato de graus de liberdade, associado ao total e ao resíduo, se obtem subtraindo uma unidade de cada, respectivamente.

Este mesmo autor mostrou também, que a soma de quadrados de tratamentos, quando usados todos os dados, inclusive as estimativas das parcelas perdidas, é sempre pouco maior que a soma de quadrados de tratamentos ajustada.

COCHRAN e COX (1957) concluem que este método, usando as estimativas e fazendo a análise como se o experimento estivesse completo, deve ser considerado como um artifício computacional, pois a única solução completa do problema de dados perdidos é através do método correto dos quadrados mínimos.

PEARCE (1953) cita quatro métodos para estimar parcelas perdidas:

a. Método de Pseudo-Variável;

b. Método das Equações Paramétricas,

c. Minimização da Soma de Quadrados Residual;

d. por fórmulas.

Todos estes métodos são variantes do método dos quadrados mínimos.

YATES (1933) apresenta fórmulas para a variância de médias de dois tratamentos, um com uma parcela perdida e o outro sem parcelas perdidas, nos delineamentos em blocos casualizados e quadrado latino, cujas fórmulas são respectivamente:

$$\frac{1}{r}\left[2 + \frac{n}{(r - 1)(n \quad 1)}\right]\sigma^2 ,$$

onde, n = nº de tratamentos;

r = nº de repetições.

$$\frac{1}{2}\left[2 + \frac{r}{(r - 1)(r - 2)}\right]\sigma^2 ,$$

onde, r = número de tratamentos;

σ^2 = variância residual.

O mesmo autor apresenta uma regra prática bastante aproximada para determinar a variância de um constraste de dois tratamentos, ambos com uma ou mais parcelas perdidas, tanto em blocos casualizados, como em quadrado latino. Supõe-se um contraste de dois tratamentos A e B em um ensaio em quadrado latino. Cada repetição de A é contada:

1) como 1 (um), quando os dois tratamentos estão presentes na linha e coluna correspondente;
2) como 2/3, se B é perdido ou na linha ou na coluna, mas não em ambas;
3) como 1/3, se B é perdido na linha e na coluna;
4) como 0 (zero), se A é perdido.

Cada repetição de B é contada de modo análogo.

A soma nos dá o número de repetições efetivas para o cálculo da variância.

PANSE e SUKHATME (1957), baseados nas fórmulas de *YATES*

(1933), para o cálculo de uma parcela perdida, mostram um método prático para estimar duas parcelas perdidas nos delineamentos em blocos casualizados e em quadrado latino, que são:

a. para blocos casualizados:

$$x_1 = \frac{rB_1 + nT_1 - (G + x_2)}{(r - 1)(n - 1)} \quad ; \quad x_2 = \frac{rB_2 + nT_2 - (G - x_1)}{(r - 1)(n - 1)} ,$$

onde, x_i representa a estimativa da parcela perdida;

B_i e T_i representam os totais das parcelas restantes no bloco i e tratamento i, onde figura a parcela x_i, com i = 1 e 2;

G é o total geral.

b. para quadrado latino:

$$X_1 = \frac{r(C_1 + T_1 + L_1) - 2(G + x_2)}{(r - 1)(r - 2)} ,$$

$$x_2 = \frac{r(C_2 + T_2 + L_2) - 2(G + x_1)}{(r - 1)(r - 2)} ,$$

onde, C_i, L_i e T_i se referem aos totais de coluna i, linha i e tratamento i, onde figura x_i, com i = 1, 2.

CAMPOS (1964) apresenta um estudo sobre a análise de experimentos com parcelas perdidas, determinando fórmulas para o cálculo das estimativas dessas parcelas e variâncias de contrastes de dois tratamentos com e sem parcelas perdidas, em delineamentos em blocos casualizados, em quadrado latino e em períodos sucessivos.

4. MATERIAL

Utilizamos neste estudo dados experimentais obtidos de *PIMENTEL GOMES (1976)*, onde aplicaremos toda a metodologia estudada neste trabalho.

Os dados se referem a um experimento de competição de variedades de cana-de-açúcar, onde foram usadas cinco variedades (A, B, C, D e E), dispostas em um quadrado latino de 5 x 5. As produções de cana-planta, em quilos por parcela, são dadas no quadro seguinte.

(D) 432	(A) 518	(B) 458	(C) 583	(E) 331
(C) 724	(E) 478	(A) 524	(B) 550	(D) 400
(E) 489	(B) 384	(C) 556	(D) 297	(A) 420
(B) 494	(D) 500	(A) 313	(A) 486	(C) 501
(A) 515	(C) 660	(D) 438	(E) 394	(B) 318

Os totais obtidos são:

$L_1 = 2322$	$C_1 = 2654$	$T_1 = 2463$	(A = Co 290)
$L_2 = 2676$	$C_2 = 2540$	$T_2 = 2204$	(B = Co 421)
$L_3 = 2146$	$C_3 = 2289$	$T_3 = 3024$	(C = Co 419)
$L_4 = 2294$	$C_4 = 2310$	$T_4 = 2067$	(D = Poj 2878)
$L_5 = 2325$	$C_5 = 1970$	$T_5 = 2005$	(E = CP 36-13)

Procuramos adaptar este exemplo a cada caso estudado, convenientemente, para melhor compreensão do nosso trabalho.

5. MÉTODO

Para a determinação das somas de quadrados de tratamentos e colunas ajustadas, utilizamos o método do resíduo condicional, que é baseado no método dos quadrados mínimos.

5.1. Cálculo dos SQP $(\hat{m}, \hat{t}_k, \hat{\ell}_i, \hat{c}_j)$, SQP $(\tilde{m}, \tilde{\ell}_i, \tilde{c}_j)$ e SQP $(\bar{m}, \bar{\ell}_i)$

Foi considerado um delineamento em quadrado latino r x r, cujo modelo matemático é:

$$Y_{ij} = m + t_{k(i,j)} + \ell_i + c_j + e_{ij} \text{ , ... } (5.1.a)$$

onde, Y_{ij} = valor observado na parcela da linha i, com a coluna j;

$t_k(i,j)$ = efeito do tratamento k que ocorreu simultaneamente na linha i e coluna j;

ℓ_i = efeito da linha i;

c_i = efeito da coluna j;

m = média geral, teórica;

e_{ij} = erro experimental, onde $e_{ij} \cap N(0, \sigma^2)$.

Suponhamos que foram perdidas p parcelas com $p < r$, em:

a. uma mesma linha ou mesma coluna;

b. um mesmo tratamento;

c. linhas, colunas e tratamentos distintos.

Na forma matricial o modelo é:

$$Y = X_1 \beta_1 + \varepsilon \quad ,$$

e pelo método dos quadrados mínimos obtemos o sistema de equações normais:

$$X_1' X_1 \hat{\beta}_1 = X_1' Y \qquad \text{ou} \qquad S_1 \hat{\beta}_1 = X_1' Y \quad ,$$

onde:

$$\hat{\beta}_1 = \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{\tau} \\ \underline{\hat{\ell}} \\ \underline{\hat{c}} \end{bmatrix} \qquad \hat{\tau} = \begin{bmatrix} \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \vdots \\ \hat{t}_t \end{bmatrix} \qquad \underline{\hat{\ell}} = \begin{bmatrix} \hat{\ell}_1 \\ \hat{\ell}_2 \\ \vdots \\ \hat{\ell}_r \end{bmatrix} \qquad \underline{\hat{c}} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \vdots \\ \hat{c}_r \end{bmatrix}$$

Como S_1 é singular, para a resolução do sistema introduzimos a restrição $A_1 \hat{\beta}_1 = \phi$. Desse modo a solução é:

$$\hat{\beta}_1 = M_1^{-1} X_1' Y \quad ,$$

sendo $M_1 = S_1 + A_1$

A partir da solução podemos determinar a soma de quadrados dos parâmetros, SQP $(\hat{m}, \hat{t}_k, \hat{\ell}_i, \hat{c}_j)$, que denominaremos de $SQP_{(1)}$

$$SQP_{(1)} = \hat{\beta}_1' X_1' Y = \hat{m}G + \Sigma \hat{t}_k T_k + \Sigma \hat{\ell}_i L_i + \Sigma \hat{c}_j C_j \ .$$

Eliminando do modelo matemático (5.1.a)os efeitos de tratamentos, temos:

$$Y_{ij} = m + \ell_i + c_j + e_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.1.b)$$

Na forma matricial, o modelo é:

$$Y = X_2 \beta_2 + \varepsilon \quad .$$

De modo análogo, temos o sistema de equações normais:

$$X_2'X_2\tilde{\beta}_2 = X_2'Y \ ,$$

onde $X_2'X_2 = S_2$ (singular).

Com a restrição $A_2 \hat{\beta} = \phi$, obtemos a solução

$$\tilde{\beta}_2 = M_2^{-1} X_2'Y,$$

sendo $M_2 = S_2 - A_2$.

De forma análoga, determinamos

$$SQP(\tilde{m}, \tilde{\ell}_i, \tilde{c}_j) = \tilde{\beta}_2' X_2'Y = \tilde{m}G + \Sigma\, \tilde{c}_jC_j + \Sigma\, \tilde{\ell}_iL_i \ ,$$

que denominaremos $SQP_{(2)}$.

Eliminando do modelo matemático (5.1.a)os efeitos de tratamentos e de colunas ,temos:

$$y_{ij} = m + \ell_i + e_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.1.c)$$

cuja notação matricial é:

$$Y = X_3 \beta_3 + \varepsilon \ .$$

De modo análogo, obtem-se o sistema de equações normais

$$X_3'X_3\ \bar{\beta}_3 = X_3'Y\ ,\ \text{ou}\ \ S_3\bar{\beta}_3 = X_3'Y$$

e com a restrição $A_3\ \bar{\beta}_3 = \phi$, a solução é:

$$\bar{\beta}_3 = M_3^{-1}\ X_3'Y\ ,$$

onde $M_3 = S_3 - A_3$.

Com este resultado, obtemos:

$$SQP(\bar{m},\ \bar{\ell}_i) = \bar{\beta}_3'\ X_3'Y = \bar{m}G + \Sigma\ \bar{\ell}_iL_i$$

que denotaremos por $SQP_{(3)}$.

Com as somas de quadrados de parâmetros (1), (2) e (3) determinadas, podemos obter a análise de variância.

5.2. Análise de variância

$$SQT(aj) = SQP_{(1)} - SQP_{(2)}$$

$$= \hat{\beta}_1'\ X_1'Y - \tilde{\beta}_2\ X_2'Y$$

$$= (\hat{m} - \tilde{m})\ G + \Sigma\ \hat{t}_kT_k + \Sigma(\hat{\ell}_i - \tilde{\ell}_i)L_i + \Sigma(\hat{c}_j - \tilde{c}_j)C_j\ \ ..(5.2.a)$$

$$SQC(aj) = SQP_{(2)} - SQP_{(3)}$$

$$= \tilde{\beta}_2'\ X_2'Y - \bar{\beta}_3'\ X_3'\ Y$$

$$= (\tilde{m} - \bar{m})G + \Sigma\ \tilde{c}_jC_j + (\tilde{\ell}_i - \bar{\ell}_i)L_i\ \ ....\ (5.2.b)$$

SQL = de modo usual, considerando apenas as observações existentes; .... (5.2.c)

SQ Total = $\Sigma\ y_{ij}^2 - C$, onde $\Sigma\ y_{ij}^2$ é a soma dos quadrados das observa ções existentes, e $C = \dfrac{G^2}{r^2 - p}$; .... (5.2.d)

SQR = SQ Total - SQT(aj) - SQC(aj) - SQL .... (5.2.e)

Esquema da análise da variância .... (5.2.f)

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos (aj)	$r-1$	$\hat{\beta}_1' X_1' Y - \tilde{\beta}_2' X_2' Y$	SQT(aj)/(r-1)	(QMT(aj)/QMR
Colunas (ja)	$r-1$	$\tilde{\beta}_2' X_2' Y - \bar{\beta}_3' X_3' Y$	SQT(aj)/(r-1)	
Linhas	$r-1$	de modo usual	SQL/(r-1)	
Resíduo	$r^2-3r+2-p$	por diferença	$SQR/(r^2-3r+2-p)$	
Total	r^2-p-1	$2y_{ij}^2 - C$		

5.3. Variância de um contraste

Seja $P' \beta_1$ um contraste entre efeitos de tratamentos.

Então:

$$V(P'\hat{\beta}_1) = P' M_1^{-1} P \sigma^2 \quad ,$$

cuja estimativa é

$$\hat{V}(P'\hat{\beta}_1) = P' M_1^{-1} P s^2,$$

onde s^2 = QMR.

A estimativa da média de um tratamento é dado por:

$$\hat{m}_k = \hat{t}_k + \hat{m} \ ,$$

então podemos escrever que

$$V(\hat{t}_k - \hat{t}_{k'}) = V(\hat{m}_k - \hat{m}_{k'}).$$

Uma vez determinada $V(P'\hat{\beta})$, onde $P'\hat{\beta}$ é a estimativa de um contraste que envolve médias estimadas de tratamentos, podemos fazer uso de alguns testes, com as devidas precauções, tais como: teste t, teste de Tukey e teste de Scheffé, sendo este último para contrastes mais sofisticados.

5.4. Análise de variância quando substituímos as p parcelas perdidas pelas suas estimativas $x_1, x_2, \ldots, x_p$

Substituindo as parcelas pedidas pelas suas estimativas, procede-se a análise de modo usual como se não houvessem parcelas perdidas, isto é, podemos calcular as somas de quadrados das causas de variações, cuja notação será:

SQ Tratamento (x) = SQ T(x)

SQ Coluna (x) = SQ C(x)

SQ Linha (x) = SQ L(x)

SQ Resíduo (x) = SQ R(x)

SQ Total (x) = SQ to (x),

onde o índice x representa a presença das estimativas das parcelas perdidas.

No esquema de análise, somente os graus de liberdades associados as causas de variações, e a SQ R(x), não se modificam aqueles dados em (5.2.f).

5.5. Cálculo dos números U e U'

Conforme *YATES (1933)*, temos:

SQ T(x) > SQ T(aj.),

então existe um número real U tal que:

$$U = SQ\ T(x) - SQ\ T(aj) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.5.a)$$

e,

$$SQ\ C(y) > SQ\ C(aj),$$

então existe um número real U' tal que:

$$U' = SQ\ C(y) - SQ\ C(aj) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.5.b)$$

onde, x representa a estimativa da parcela perdida quando consideramos o modelo matemático de um delineamento em quadrado latino; y representa a estimativa da parcela perdida quando consideramos o modelo matemático de um delineamento em blocos casualizados.

5.6. Esquema da análise de variância

Esquema .... (5.6.a)

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamento (aj)	$r - 1$	$SQ\ T(x) - U$	$\frac{SQ\ T(aj)}{r - 1}$	$\frac{QM\ T(aj)}{QM\ Res.}$
Coluna (aj)	$r - 1$	$SQ\ C(y) - U'$		
Linha	$r - 1$	modo usual		
Resíduo	$r^2 - 3r + 2 - p$	por diferença	QM Res.	
Total (x)	$r^2 - p - 1$	$\Sigma\ y_{ij}^2 - C$		

ou

Esquema .... (5.6.b)

C. Variação	G.L.	S.Q.	S.Q. (aj)	Q.M.	F
Tratamento (x)	$r - 1$	SQ T(x)	SQ T(x) - U	$\frac{SQ\ T(aj)}{r - 1}$	$\frac{QM\ T(aj)}{QM\ R}$
Coluna (x)	$r - 1$	SQ C(x)			
Linha (x)	$r - 1$	SQ L(x)			
Resíduo (x)	$r^2 - 3r + 2 - p$	SQ R(x)	SQ Res.	QM Res.	
Total	$r^2 - p - 1$				

para $r^2 - 3r + 2 - p > 0$

6. RESULTADOS TEÓRICOS

Para maior clareza, deduziremos detalhadamente à Análise Estatística de um delineamento em Quadrado Latino r x r em cada caso seguinte:

6.1. caso de (1) uma parcela perdida;

6.2. caso de (2) duas parcelas perdidas em linhas, colunas e tratamentos distintos;

6.3. caso de (2) duas parcelas perdidas numa mesma linha;

6.4. caso de (2) duas parcelas perdidas numa mesma coluna;

6.5. caso de (2) duas parcelas perdidas num mesmo tratamento;

6.6. caso de um tratamento perdido;

6.7. caso de uma linha perdida:

6.8. caso de uma coluna perdida.

Faremos também as deduções das fórmulas mais comuns para o cálculo das estimativas das pareelas perdidas,assim como, apresentaremos de uma maneira mais simples possível, as deduções das variâncias de contrastes entre médias de tratamentos, com parcelas perdidas para cada caso citado anteriormente.

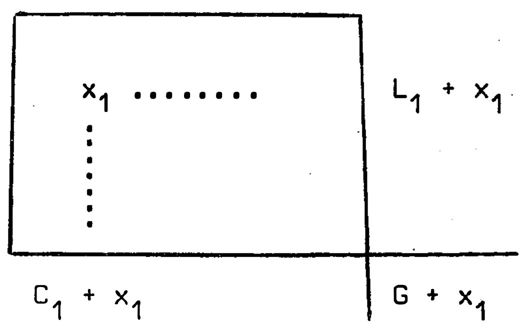
A metodologia será a mesma em todos os casos, porém nos casos 6.6, 6.7 e 6.8 pode-se usar a teoria geral de Blocos Incompletos, Equilibrados, para determinar a soma de quadrados de:

a. colunas ou linhas ajustadas no caso 6.6;

b. tratamentos ajustada nos casos 6.7 e 6.8.

6.1. Caso de uma parcela perdida

Consideremos um delineamento em quadrado latino $r \times r$ no qual foi perdida uma parcela, conforme o esquema dado



onde

L_1 é o total das parcelas existentes na linha 1;

C_1 é o total das parcelas existentes na coluna 1;

T_1 é o total das parcelas existentes no tratamento 1;

G é o total geral das parcelas existentes.

6.1.1. Cálculo das SQ $P_{(1)}$, SQ $P_{(2)}$ e SQ $P_{(3)}$

Considerando o modelo matemático

$$Yij = m + t_{k(i,j)} + c_j + \ell_i + e_{ij} \quad \text{...............} \quad (6.1.1.a)$$

e admitindo as restrições $\Sigma\, \hat{t}_k = \Sigma\, \hat{\ell}_i = \Sigma\, \hat{c}_j = 0$ o sistema de equações normais é:

$$\begin{bmatrix} r^2-1 & -1 & -1 & -1 \\ r-1 & r-1 & -1 & -1 \\ r-1 & -1 & r-1 & -1 \\ r-1 & -1 & -1 & r-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{t}_1 \\ \hat{\ell}_1 \\ \hat{c}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ T_1 \\ L_1 \\ C_1 \end{bmatrix}$$

No sistema acima não figuram as equações relativas a $\hat{t}_k$, $\hat{\ell}_i$ e $\hat{c}_j$, com $k \neq 1$, $i \neq 1$ e $j \neq 1$ cujas soluções são imediatas.

Fazendo $x_1 = \hat{m} + \hat{t}_1 + \hat{\ell}_1 + \hat{c}_1$, a solução do sistema é:

$$\hat{m} = \frac{x_1 + G}{r^2}$$

$$\hat{t}_1 = \frac{x_1 + T_1}{r} - \hat{m} \quad \text{e} \quad \hat{t}_k = \frac{T_k}{r} - \hat{m} \quad \text{para } k \neq 1$$

$$\hat{\ell}_1 = \frac{x_1 + L_1}{r} - \hat{m} \quad \text{e} \quad \hat{\ell}_i = \frac{L_i}{r} - \hat{m} \quad \text{para } i \neq 1$$

$$\hat{c}_1 = \frac{x_1 + C_1}{r} - \hat{m} \quad \text{e} \quad \hat{c}_j = \frac{C_j}{r} - \hat{m} \quad \text{para } j \neq 1$$

Podemos agora calcular x_1.

Como:

$x_1 = \hat{m} + \hat{t}_1 + \hat{\ell}_1 + \hat{c}_1$, então:

$$x_1 = \frac{x_1 + T_1}{r} + \frac{x_1 + L_1}{r} + \frac{x_1 + C_1}{r} - \frac{2\,(x_1 + G)}{r^2}$$

daí, obtemos

$$x_1 = \frac{r\,(T_1 + L_1 + C_1) - 2G}{(r-1)(r-2)}$$, cujo resultado é a estimativa da parcela perdida de um delineamento em quadrado latino.

Com as estimativas, $\hat{m}$, $\hat{t}_k$, $\hat{\ell}_i$ e $\hat{c}_j$ podemos obter:

$$SQ\ P_{(1)} = \hat{m}\ G + \Sigma\ \hat{t}_k\ T_k + \Sigma\ \hat{\ell}_i\ L_i + \Sigma\ \hat{c}_j\ C_j$$

Com a eliminação dos efeitos de tratamentos do modelo 6.1.1.a, temos

$$y_{ij} = m + \ell_i + c_j + e_{ij} \qquad \text{.........................} \quad (6.1.1.b)$$

Admitindo as restrições $\Sigma\ \tilde{\ell}_i = \Sigma\ \tilde{c}_j = 0$, obtemos o sistema de equações normais

$$\begin{bmatrix} r^2-1 & -1 & -1 \\ r-1 & r-1 & -1 \\ r-1 & -1 & r-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{m} \\ \tilde{\ell}_1 \\ \tilde{c}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ L_1 \\ C_1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $y_1 = \tilde{m} + \tilde{\ell}_1 + \tilde{c}_1$, a solução do sistema é:

$$\tilde{m} = \frac{y_1 + G}{r^2}$$ e para as esquações restantes, temos:

$$\tilde{\ell}_1 = \frac{y_1 + L_1}{r} - \tilde{m} \quad \text{e} \quad \tilde{\ell}_i = \frac{L_i}{r} - \tilde{m} \quad \text{para } i \neq 1$$

$$\tilde{c}_1 = \frac{y_1 + C_1}{r} - \tilde{m} \quad \text{e} \quad \tilde{c}_j = \frac{C_j}{r} - \tilde{m} \quad \text{para } j \neq 1$$

Como $y_1 = \tilde{m} + \tilde{\ell}_i + \tilde{c}_j$, temos que

$$y_1 = \frac{y_1 + L_1}{r} + \frac{y_1 + C_1}{r} - \frac{y_1 + G}{r^2}\,,$$ dai obtemos

$$y_1 = \frac{r\ (L_1 + C_1) - G}{(r-1)^2}$$, cujo resultado é a estimativa da parcela perdida de um delineamento em blocos casualizados com r tratamentos (colunas) e r blocos (linhas).

Calculado $\tilde{m}$, $\tilde{\ell}_i$ e $\tilde{c}_j$, obtemos:

$$SQ\ P_{(2)} = \tilde{m}G + \Sigma\ \tilde{\ell}_i L_i + \Sigma\ \tilde{c}_j C_j$$

Considerando o modelo matemático

$$y_{ij} = m + \ell_i + e_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.1.1.c)$$

O sistema de equações normais com a restrição $\Sigma\ \bar{\ell}_i = 0$ é:

$$\begin{bmatrix} r^2-1 & -1 \\ r-1 & r-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{m} \\ \bar{\ell}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ L_1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $z_1 = \bar{m} + \bar{\ell}_1$, a solução do sistema é:

$$\bar{m} = \frac{z_1 + G}{r^2}$$

$$\bar{\ell}_1 = \frac{z_1 + L_1}{r} - \bar{m} \qquad \bar{\ell}_i = \frac{L_i}{r} - \bar{m} \quad \text{para } i \neq 1$$

Dado que, $z_1 = \bar{m} + \bar{\ell}_1$, então:

$z_1 = \dfrac{z_1 + L_1}{r}$ donde $z_1 = \dfrac{L_1}{r-1}$, cujo resultado é a estimativa de uma parcela perdida num delineamento inteiramente casualizado com r tratamentos (linha) e r repetições (colunas).

Calculado $\bar{m}$ e $\bar{\ell}_1$, obtemos:

$$SQ\ P_{(3)} = \bar{m}G + \Sigma\bar{\ell}_i L_i$$

Calculadas as somas dos quadrados de parâmetros (1), (2) e (3), podemos então, obter a análise de variância.

6.1.2. Análise de variância

Cálculo da soma de quadrados de tratamentos ajustada.

Temos que:

$$SQ\ T(aj) = (\hat{m} - \tilde{m})G + \Sigma(\hat{\ell}_i - \tilde{\ell}_i)L_i + \Sigma(\hat{c}_j - \tilde{c}_j)C_j + \Sigma\ \hat{t}_k\ T_k\ ,$$

onde $$\hat{m} - \tilde{m} = \frac{x_1 - y_1}{r^2}$$

$$\hat{\ell}_1 - \tilde{\ell}_1 = \hat{c}_1 - \tilde{c}_1 = \frac{x_1 - y_1}{r} - (\hat{m} - \tilde{m})$$

$\hat{\ell}_i - \tilde{\ell}_i = \hat{c}_j - \tilde{c}_j = - (\hat{m} - \tilde{m})$, então

$$SQ\ T(aj) = \frac{x_1 - y_1}{r}(L_1 + C_1) - \frac{x_1 - y_1}{r^2}G + \Sigma\ \hat{t}_k\ T_k$$

ou

$$SQ\ T(aj) = \frac{x_1 - y_1}{r^2}\left[r(L_1 + C_1) - G\right] + \Sigma\ \hat{t}_k\ T_k$$

Lembrando que $(r - 1)^2\ y_1 = r(L_1 + C_1) - G$, logo podemos escrever que:

$$SQ\ T(aj) = \left(\frac{r - 1}{r}\right)^2 (x_1 - y_1)y_1 + \Sigma\ \hat{t}_k\ T_k.$$

Por outro lado é fácil verificar que:

$\hat{t}_1 = \left(\frac{r - 1}{r}\right)^2 (x_1 - y_1)$, então a SQ T(aj) passa a ser:

$$SQ\ T(aj) = \hat{t}_1 y_1 + \Sigma\ \hat{t}_k\ T_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (6.1.2.a)$$

logo,

$$QM\ T(aj) = \frac{\hat{t}_1 y_1 + \Sigma\ \hat{t}_k\ T_k}{r - 1}$$ com r - 1 graus de liberdade.

Em geral, para a análise de variância é costume ajustar somente o SQ Tratamentos, mas se houver interesse pode-se ajustar SQ Colunas ou SQ Linhas.

Como:

$$SQ\ C(aj) = (\tilde{m} - \bar{m})G + \Sigma(\tilde{\ell}_i - \bar{\ell}_i)L_i + \Sigma\ \tilde{c}_j\ C_j,\ \text{onde}$$

$$\tilde{m} - \bar{m} = \frac{y_1 - z_1}{r^2}$$

$$\tilde{\ell}_1 - \bar{\ell}_1 = \frac{y_1 - z_1}{r} - (\tilde{m} - \bar{m})$$

$$\tilde{\ell}_i - \bar{\ell}_i = -\ (\tilde{m} - \bar{m}),\ \text{então}$$

$$SQ\ C(aj) = \frac{y_1 - z_1}{r} L_1 + \Sigma\ \tilde{c}_j\ C_j$$

Lembrando que $L_1 = (r - 1)z_1$, temos:

$$SQ\ C(aj) = \frac{(r - 1)}{r} (y_1 - z_1)z_1 + \Sigma\ \tilde{c}_j\ C_j$$

Por outro lado, temos:

$\tilde{c}_1 = \dfrac{r - 1}{r} (y_1 - z_1)$, logo a SQ C(aj) fica:

$$SQ\ C(aj) = \tilde{c}_1 z_1 + \Sigma\ \tilde{c}_j\ C_j, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.1.2.b)$$

logo

$$QM\ C(aj) = \frac{\tilde{c}_1 z_1 + \Sigma\ \tilde{c}_j C_j}{r - 1}$$ com r - 1 graus de liberdade.

Para o cálculo da SQ L, se procede de modo usual, então:

$$SQ\ L = \frac{L_1^2}{r - 1} + \frac{\Sigma\ L_{i'}^2}{r} - C,\ \text{com}\ i' = 2, 3, \ldots, r \qquad (6.1.2.c)$$

onde $$C = \frac{G^2}{r^2 - 1}$$

então: $$QM\ L = \frac{SQ\ L}{r - 1},$$ com r - 1 graus de liberdade.

$$SQ\ \text{total} = \Sigma\ y_{ij}^2 - C,\ \text{onde} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.1.2.d)$$

$\Sigma\ y_{ij}^2$ é a soma dos quadrados das parcelas existentes.

A soma de quadrados residual é obtida por exclusão, isto é:

SQ R = SQ total - SQ T(aj) - SQ C(aj) - SQ L .... (6.1.2.e)

logo

$$QM\ R = \frac{SQ\ R}{r^2 - 3r + 1} \quad \text{com } r^2 - 3r + 1 \text{ graus de liberdade}$$

Com os resultados obtidos acima, temos o seguinte esquema da análise de variância .... (6.1.2.f)

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos(aj)	$r - 1$	$\hat{t}_1 y_1 + \Sigma\ \hat{t}_k T_k$	SQ T(aj)/(r - 1)	QM T(aj)/QM R
Colunas (aj)	$r - 1$	$\tilde{c}_1 z_1 + \Sigma\ \tilde{c}_j\ C_j$		
Linha	$r - 1$	de modo usual		
Resíduo	$r^2 - 3r + 1$	por diferença	SQ R/(r^2-3r+1)	
Total	$r^2 - 2$	$\Sigma\ y_{ij}^2 - C$		

6.1.3. Variância de um contraste que envolve efeitos de tratamentos

Dado o contraste $P'\beta_1$ que envolve efeitos de tratamentos, temos:

$$\hat{V}\ (P'\hat{\beta}_1) = P'\ M_1^{-1}\ P\ s^2,$$

como

$$\hat{t}_1 = \frac{x_1 + T_1}{r} - \hat{m}$$

$$\hat{t}_k = \frac{T_k}{r} - \hat{m} \quad \text{para } k \neq 1$$

ou

$$\hat{t}_1 = \frac{r - 1}{r(r - 2)} T_1 + f_1 (L,C,G)$$

$$\hat{t}_k = \frac{1}{r(r - 1)(r - 2)} T_1 + \frac{1}{r} T_k + f_k(L,C,G) \text{ para } k \neq 1$$

Sejam as estimativas dos contrastes

$\hat{y}_1 = \hat{t}_2 - \hat{t}_3$

$\hat{y}_2 = \hat{t}_1 - \hat{t}_2$, onde

t_1 é o efeito do tratamento com uma parcela perdida

t_k (para $k \neq 1$) é o efeito do tratamento sem parcela perdida,

então:

$$\hat{V}(\hat{y}_1) = \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right] s^2 \rightarrow \hat{V}(\hat{y}_1) = \frac{2}{r} s^2$$

e

$$\hat{V}(\hat{y}_2) = \left[\frac{r - 1}{r(r - 2)} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r(r - 1)(r - 2)}\right] s^2$$

ou

$$\hat{V}(\hat{y}_2) = \left[\frac{2}{r} + \frac{1}{(r - 1)(r - 2)}\right] s^2$$

Conhecido os efeitos de tratamentos podemos, obter os efeitos das médias de tratamentos.

Dado que $\hat{m}_k = \hat{t}_k + \hat{m}$ para $k = 1, 2, \ldots, r$

temos

$$\hat{m}_1 = \frac{x_1 + T_1}{r}$$

$$\hat{m}_k = \frac{T_k}{r}$$ para $k \neq 1$, então podemos escrever,

$$\hat{V}(\hat{t}_k - \hat{t}_{k'}) = \hat{V}(\hat{m}_k - \hat{m}_{k'})$$

Conhecida a variância de um contraste, podemos usar os testes de significância, assim como; t, Tukey, Duncan e Scheffé, porém de modo que sejam satisfeitas as exigências de cada um como explica *PIMENTEL GOMES (1976)*.

No caso presente, temos:

Uso do teste $t = \dfrac{\hat{y}}{\sqrt{\hat{V}(\hat{y})}}$

para $\hat{y}_1$ => $t = \dfrac{\hat{y}_1}{s\sqrt{\frac{2}{r}}}$

para $\hat{y}_2$ => $t = \dfrac{\hat{y}_2}{s\sqrt{\frac{2}{r} + \frac{2}{(r-1)(r-2)}}}$ com número de graus de liberdade do resíduo $(r^2 - 3r + 1)$

Uso do teste Tukey $\Delta = q\sqrt{\frac{1}{2}\hat{V}(\hat{y})}$

para $\hat{y}_1$ ==> $\Delta = q - \dfrac{s}{\sqrt{r}}$

para $\hat{y}_2$ ==> $\Delta = q\ s\sqrt{\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{2(r-1)(r-2)}\right]}$

Uso do teste de Scheffé

$$S = \sqrt{(r-1)\ F\ \hat{V}(\hat{y})}$$

para $\hat{y}_1$ ==> $S = s\sqrt{(r-1) . F . 2/r}$

para $\hat{y}_2$ ==> $S = s\sqrt{(r-1)F\left[\frac{2}{r} + \frac{1}{(r-1)(r-2)}\right]}$ onde,

$$F = \frac{QM\ T(aj)}{QM\ R}$$

6.1.4. Análise da variância, quando substituimos a parcela perdida pela sua estimativa x_1

Consideremos o esquema dado em 6.1.

Uma vez determinado x_1, procede-se a análise de modo usual, como se não houvesse parcela perdida, isto é;

$$SQ\ T(x) = \frac{(T_1 + x_1)^2}{r} + \frac{\Sigma\ T^2_{k'}}{r} - C_{(x)}\ ,\ \text{para } k' \neq 1;$$

$$SQ\ C(x) = \frac{(C_1 + x_1)^2}{r} + \frac{\Sigma\ C^2_{j'}}{r} - C_{(x)}\ ,\ \text{para } j' \neq 1;$$

$$SQ\ L(x) = \frac{(L_1 + x_1)^2}{r} + \frac{\Sigma\ L^2_{i'}}{r} - C_{(x)}\ ,\ \text{para } i' \neq 1;$$

$$SQ\ total(x) = x_1^2 + \Sigma\ y^2_{ij} - C_{(x)}\ ;$$

$$SQ\ R(x) = SQ\ total(x) - SQ\ T(x) - SQ\ C(x) - SQ\ L(x),\ \text{onde:}$$

$\Sigma\ y^2_{ij}$ é a soma das parcelas existentes e

$$C_{(x)} = \frac{(G + x_1)^2}{r^2}$$

No esquema de análise, somente os graus de liberdade associados a C.V. , e a SQ R(x) não se modificam daqueles dados em (6.1.2.f).

6.1.5. Cálculo dos números U e U'

Conforme *YATES (1933)*, a soma de quadrados de tratamento (x) é sempre um pouco maior que a soma de quadrados de tratamentos ajustada, isto é:

SQ T(x) > SQ T(aj), logo existe um número real U > 0 (zero), tal que:

$$U = SQ\ T(x) - SQ\ T(aj)$$

ou

$$U = \frac{(T_1 + x_1)^2}{r} + \frac{\Sigma\, T_{k'}^2}{r} - \frac{(G + x_1)^2}{r^2} - \hat{t}_1 y_1 - \Sigma\, \hat{t}_k\, T_k$$ pa-

ra: $k = 1,2, \ldots, r$ e $k' = 2,3, \ldots, r$

Substituindo os $\hat{t}_k$ em $\Sigma\, \hat{t}_k\, T_k$ pelas suas expressões correspondentes, temos:

$$U = \frac{(T_1 + x_1)^2}{r} + \frac{\Sigma\, T_{k'}^2}{r} - \frac{(G + x_1)^2}{r^2} - \hat{t}_1 y_1 - \frac{(T_1 + x_1)}{r} T_1 - \frac{\Sigma\, T_{k'}^2}{r} + \hat{m}\, G$$

Desenvolvendo e simplificando, temos:

$$U = \frac{x_1 T_1 + x_1^2}{r} - \frac{x_1 G + x_1^2}{r^2} - \hat{t}_1 y_1 \quad , \quad \text{ou}$$

$$U = x_1 \left[\frac{T_1 + x_1}{r} - \frac{G + x_1}{r^2} \right] - \hat{t}_1 y_1$$

como,

$$\hat{t}_1 = \frac{T_1 + x_1}{r} - \frac{G + x_1}{r^2} \quad , \quad \text{então:}$$

$U = x_1 \hat{t}_1 - \hat{t}_1 y_1$, ou

$U = \hat{t}_1 (x_1 - y_1)$

Usando o fato de que:

$\hat{t}_1 = \left[\frac{r - 1}{r}\right]^2 (x_1 - y_1)$, podemos escrever:

$$U = \left[\frac{r - 1}{r} (x_1 - y_1) \right]^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.1.5.a)$$

De modo análogo, temos que:

SQ C(y) > SQ C(aj), logo existe um número real U' > 0 tal que

U' = SQ C(y) - SQ C(aj) ,

$$SQ\ C(y) = \frac{(C_1 + y_1)^2}{r} + \frac{\Sigma\ C_{j'}^2}{r} - \frac{(G - y_1)^2}{r^2} \quad , \quad e$$

y tem o mesmo significado dado anteriormente, então,

$$U' = \frac{(y_1 + C_1)^2}{r} + \frac{\Sigma\ C_{j'}^2}{r} - \frac{(G + y_1)^2}{r^2} - \tilde{c}_1 z_1 - \Sigma\ \tilde{c}_j C_j, \text{ onde}$$

$j = 1, \ldots\ldots, r \quad . \quad j' = 2, \ldots\ldots, r$

Substituindo os $\tilde{c}_j$ pelas suas expressões em $\Sigma\ \tilde{c}_j C_j$, temos

$$U' = \frac{(y_1 + C_1)^2}{r} + \frac{\Sigma\ C_{j'}^2}{r} - \frac{(G + y_1)^2}{r^2} - \tilde{c}_1 z_1 - \frac{(y_1 + C_1)}{r} C_1 - \frac{\Sigma\ C_{j'}^2}{r} + \tilde{m}\ G$$

Desenvolvendo e simplificando, obtemos:

$$U' = \frac{y_1 C_1 + y_1^2}{r} - \frac{y_1\ G + y_1^2}{r^2} - \tilde{c}_1 z_1$$

ou

$$U' = y_1 \left[\frac{C_1 + y_1}{r} - \frac{G + y_1}{r^2} \right] - \tilde{c}_1 z_1$$

como

$$\tilde{c}_1 = \frac{C_1 + y_1}{r} - \frac{G + y_1}{r^2} \quad , \text{ então:}$$

$$U' = Y_1\ \tilde{c}_1 - \tilde{c}_1\ z_1$$

ou

$$U' = \tilde{c}_1\ (y_1 - z_1)$$

Lembrando que $\tilde{c}_1 = \frac{r - 1}{r}\ (y_1 - z_1)$, podemos escrever:

$$U' = \frac{r - 1}{r}\ (y_1 - z_1)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.1.5.b)$$

6.1.6. Esquema da Análise de variância

Esquema .... (6.1.6.a)

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos (aj)	$r - 1$	SQ T(x) - U	SQ T(aj)/(r - 1)	QM T(aj)/QMR
Colunas (aj)	$r - 1$	SQ C(y) - U'		
Linhas	$r - 1$	modo usual		
Resíduo	$r^2 - 3r + 1$	por diferença	SQ R/(r^2 - 3r + 1)	
Total	$r^2 - 2$	$\Sigma y_{ij}^2 - C$		

ou

Esquema .... (6.1.6.b)

C.V.	G.L.	S.Q.	S.Q.(aj)	Q.M.	F
Trat. (x)	$r - 1$	SQ T(x)	SQ T(x) - U	SQ T(aj)/(r - 1)	QM T(aj)/QMR
Col. (x)	$r - 1$	SQ C(x)			
Linha (x)	$r - 1$	SQ L(x)			
Resid. (x)	$r^2 - 3r + 1$	SQ R(x) = SQ R		SQ R/(r^2 - 3r + 1)	
Total (x)	$r^2 - 2$	$x_1^2 + \Sigma y_{ij}^2 - C(x)$			

Um exemplo numérico:

No exemplo dado em 4, suponhamos que foi perdida a parcela com tratamento A (variedade Co 290), e cuja estimativa é x_1, como figura no quadro seguinte:

(D) 432	(A) x_1	(B) 458	(C) 583	(E) 331	1804	L_1	T_1 = 1945
(C) 724	(E) 478	(A) 524	(B) 550	(D) 400			
(E) 489	(B) 384	(C) 556	(D) 297	(A) 420			
(B) 494	(D) 500	(E) 313	(A) 486	(C) 501			
(A) 515	(C) 660	(D) 438	(E) 394	(B) 318			
	2022				11245		
	C_1				G		

Cálculo das estimativas x_1, y_1 e z_1

x_1 = 530,416

y_1 = 492,8125

z_1 = 451

Com as fórmulas obtidas em 6.1.2, temos:

Quadro da Análise de variância

Esquema (6.1.2.f ou 6.1.6.a)

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Trat. (aj)	4	137.156,2208$\bar{3}$	34.289,05	11,08 **
Col. (aj)	4	52.455,4625		
Linha	4	31.723,558$\bar{3}$		
Resíduo	11	34.040,71$\bar{6}$	3.094,61	
Total	23	255.375,958$\bar{3}$		

OU

Com as fórmulas obtidas em 6.1.5 temos:

Quadro de Análise de variância

Esquema (6.1.6.b)

C.V.	G.L.	S.Q.	S.Q.(aj)	Q.M.	F
Trat. (x)	4	$138.061,22\bar{7}$	$137.156,2208\bar{3}$	34.289,05	11,08 **
Col. (x)	4	$56.596,06\bar{1}$			
Linha (x)	4	$30.353,32\bar{7}$			
Res. (x)	11	$34.040,71\bar{6}$	$34.040,71\bar{6}$	3.094,61	
total (x)	23	$259.051,\bar{3}$			

onde:

$$U = \hat{t}_1(x_1 - y_1) \Longrightarrow U = 905,0069\bar{4}$$

Cálculo das estimativas das médias de tratamentos

$\hat{m}_1 = 495,08\bar{3}$ (do tratamento com 1 (uma) parcela perdida)

$\hat{m}_2 = 440,8$

$\hat{m}_3 = 604,8$

$\hat{m}_4 = 413,4$

$\hat{m}_5 = 401$

Podemos agora compara entre si as diversas médias de varieda des pelo teste de Tukey.

$$\Delta = q \sqrt{1/2\ \hat{V}\ (\bar{y})}$$

ao nível de 5% de probabilidade, temos

$q = 4,58$

Sejam os contrastes

$$\hat{Y}_1 = \hat{m}_{k'} - \hat{m}_k \Longrightarrow \Delta_1 = 113,94 \text{ para } k \neq 1 \text{ e } k' \neq 1 \text{ e } k \neq k'$$

$$\hat{y}_2 = \hat{m}_1 - \hat{m}_k \Longrightarrow \Delta_2 = 125{,}25 \quad \text{para } k \neq 1$$

Logo a variedade (3) Co 419 supera significativamente todas as outras, exceto a variedade (1) Co 290, ao nível de 5% de probabilidade.

6.2. Caso de duas parcelas perdidas em linhas, colunas e tratamentos distintos

Seja um delineamento em quadrado latino r x r no qual foram perdidas duas parcelas conforme o seguinte esquema:

$$\begin{array}{|ccc|l}
\hline
 & x_1 & & L_1 + x_1 \\
x_2 & & & L_2 + x_2 \\
\hline
C_1 + x_2 & C_2 + x_1 & & G + x_1 + x_2
\end{array}$$

, onde L_1, L_2, C_1, C_2, T_1, T_2 e G tem o mesmo significado dado anteriormente.

6.2.1. Cálculo das SQ $P_{(1)}$, SQ $P_{(2)}$ e SQ $P_{(3)}$

Considerando o modelo matemático

$$y_{ij} = m + t_{k(i,j)} + c_j + \ell_i + e_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.2.1.a)$$

Com as restrições $\Sigma\, \hat{t}_k = \Sigma\, \hat{\ell}_i = \Sigma\, \hat{c}_j$, o sistema de equações normais fica:

$$\begin{bmatrix}
r^2-2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
r-1 & r-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
r-1 & 0 & r-1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
r-1 & -1 & 0 & r-1 & 0 & -1 & 0 \\
r-1 & 0 & -1 & 0 & r-1 & 0 & -1 \\
r-1 & -1 & 0 & -1 & 0 & r-1 & 0 \\
r-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & r-1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \hat{\ell}_1 \\ \hat{\ell}_2 \\ \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} G \\ T_1 \\ T_2 \\ L_1 \\ L_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Deixamos de colocar no sistema anterior, as equações seguintes:

$$\hat{t}_k = \frac{T_k}{r} - \hat{m}, \quad \hat{\ell}_i = \frac{L_i}{r} - \hat{m} \quad e \quad \hat{c}_j = \frac{C_j}{r} - \hat{m}$$

para $k \neq 1$ e 2 , $i \neq 1$ e 2 e $j \neq 1$ e 2

Para facilitar a solução do sistema fazemos:

$x_1 = \hat{m} + \hat{t}_1 + \hat{\ell}_1 + \hat{c}_1$

$x_2 = \hat{m} + \hat{t}_2 + \hat{\ell}_2 + \hat{c}_2$ então obtemos a solução, que é:

$$\hat{m} = \frac{G + x_1 + x_2}{r^2}$$

$$\hat{t}_1 = \frac{T_1 + x_1}{r} - \hat{m}, \quad \hat{\ell}_1 = \frac{L_1 + x_1}{r} - \hat{m}, \quad \hat{c}_1 = \frac{C_1 + x_1}{r} - \hat{m}$$

$$\hat{t}_2 = \frac{T_2 + x_2}{r} - \hat{m}, \quad \hat{\ell}_2 = \frac{L_2 + x_2}{r} - \hat{m}, \quad c_2 = \frac{C_2 + x_2}{r} - \hat{m}$$

Podemos agora calcular x_1 e x_2.

Dado que:

$x_1 = \hat{m} + \hat{t}_1 + \hat{\ell}_1 + \hat{c}_1$

$x_2 = \hat{m} + \hat{t}_2 + \hat{\ell}_2 + \hat{c}_2$, substituindo em x_1 e x_2 as estimativas $(\hat{m}, \hat{t}_1, \hat{\ell}_1$ e $\hat{c}_1)$ e $(\hat{m}, \hat{t}_2, \hat{\ell}_2$ e $\hat{c}_2)$, respectivamente pelos seus valores encontrados acima, obtemos:

$$x_1 = \frac{T_1 + L_1 + C_1}{r} + \frac{3\,x_1}{r} - \frac{2\,(G + x_1 + x_2)}{r^2}$$

$$x_2 = \frac{T_2 + L_2 + C_2}{r} + \frac{3\,x_2}{r} - \frac{2\,(G + x_1 + x_2)}{r^2}$$

Este sistema pode ser escrito como se segue ;

$$(r - 1)(r - 2)x_1 + 2x_2 = r(T_1 + L_1 + C_1) - 2\,G$$

$$2x_1 + (r - 1)(r - 2)x_2 = r(T_2 + L_2 + C_2) - 2\,G,$$

cuja solução é:

$$x_1 = \frac{(r-1)(r-2)\,\left[\,r(T_1+ L_1+ C_1) - 2G\,\right] - 2\left[\,r(T_2+ L_2+ C_2)-2G\,\right]}{(r - 1)^2\,(r - 2)^2 - 4}$$

e

$$x_2 = \frac{(r-1)(r-2)\left[\,r(T_2+ L_2+ C_2) - 2G\,\right] - 2\left[\,r(T_1+ L_1+ C_1)-2\,G\,\right]}{(r - 1)^2\,(r - 2)^2 - 4}$$

para $r \geqslant 4$

Os valores x_1 e x_2 são as estimativas das parcelas perdidas do delineamento em estudo.

Determinados $\hat{m}$, $\hat{t}_k$, $\hat{\ell}_i$ e $\hat{c}_j$, podemos obter:

$$SQ\ P_{(1)} = \hat{m}\,G + \Sigma\,\hat{t}_k\,T_k + \Sigma\,\hat{\ell}_i\,L_i + \Sigma\,\hat{c}_j\,C_j$$

Considerando o modelo matemático

$$y_{ij} = m + \ell_i + c_j + e_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.2,1,b)$$

Admitindo as restrições $\Sigma\,\tilde{\ell}_i = \Sigma\,\tilde{c}_j = 0$, então o sistema de equações normais é:

$$\begin{bmatrix} r^2-2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ r-1 & r-1 & 0 & -1 & 0 \\ r-1 & 0 & r-1 & 0 & -1 \\ r-1 & -1 & 0 & r-1 & 0 \\ r-1 & 0 & -1 & 0 & r-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{m} \\ \tilde{\ell}_1 \\ \tilde{\ell}_2 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ L_1 \\ L_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

As equações restantes que não figuram no sistema são:

$$\tilde{\ell}_i = \frac{L_i}{r} - \tilde{m} \quad \text{e} \quad \tilde{c}_j = \frac{C_j}{r} - \tilde{m} \qquad \text{para } i \neq 1 \text{ e } 2$$
$$j \neq 1 \text{ e } 2$$

Fazendo

$y_1 = \tilde{m} + \tilde{\ell}_1 + \tilde{c}_1$

$y_2 = \tilde{m} + \tilde{\ell}_2 + \tilde{c}_2$, a solução do sistema é:

$$\tilde{m} = \frac{G + y_1 + y_2}{r^2}$$

$$\tilde{\ell}_1 = \frac{L_1 + y_1}{r} - \tilde{m} \quad \text{e} \quad \tilde{c}_1 = \frac{C_1 + y_1}{r} - \tilde{m}$$

$$\tilde{\ell}_2 = \frac{L_2 + y_2}{r} - \tilde{m} \quad \text{e} \quad \tilde{c}_2 = \frac{C_2 + y_2}{r} - \tilde{m}$$

Dado que:

$y_1 = \tilde{m} + \tilde{\ell}_1 + \tilde{c}_1$

$y_2 = \tilde{m} + \tilde{\ell}_2 + \tilde{c}_2$, de modo análogo a x_1 e x_2, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (r - 1)^2 y_1 + y_2 = r(L_1 + C_1) - G \\ y_1 + (r - 1)^2 y_2 = r(L_2 + C_2) - G \end{cases}$$

que tem como solução:

$$y_1 = \frac{(r - 1)^2 \left[r(L_1 + C_1) - G \right] - \left[r(L_2 + C_2) - G \right]}{(r - 1)^4 - 1}$$

e

$$y_2 = \frac{(r - 1)^2 \left[r(L_2 + C_2) - G \right] - \left[r(L_1 + C_1) - G \right]}{(r - 1)^4 - 1}$$

cujos resultados tem o mesmo significado dado anteriormente.

Uma vez calculado $\tilde{m}$, $\tilde{\ell}_i$ e $\tilde{c}_j$, podemos obter:

$$SQ\ P_{(2)} = \tilde{m}\ G + \Sigma\ \tilde{\ell}_i\ L_i + \Sigma\ \tilde{c}_j\ C_j$$

Seja o modelo matemático:

$$y_{ij} = m + \ell_i + e_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.2.1.c)$$

Com a restrição $\Sigma\ \bar{\ell}_i = 0$, o sistema de equações normais é:

$$\begin{bmatrix} r^2-2 & -1 & -1 \\ r-1 & r-1 & 0 \\ r-1 & 0 & r-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{m} \\ \bar{\ell}_1 \\ \bar{\ell}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$$

As equações restantes são:

$$\bar{\ell}_i = \frac{L_i}{r} - \bar{m} \qquad \text{para } i \neq 1 \text{ e } 2$$

Fazendo

$$z_1 = \bar{m} + \bar{\ell}_1$$

$$z_2 = \bar{m} + \bar{\ell}_2$$, a solução do sistema é:

$$\bar{m} = \frac{G + z_1 + z_2}{r^2}$$

$$\bar{\ell}_1 = \frac{L_1 + z_1}{r} - \bar{m} \qquad \text{e} \qquad \bar{\ell}_2 = \frac{L_1 + z_2}{r} - \bar{m}$$

Dado que,

$$z_1 = \bar{m} + \bar{\ell}_1$$

$$z_2 = \bar{m} + \bar{\ell}_2$$

Substituindo $\bar{m}$, $\bar{\ell}_1$, $\bar{\ell}_2$ em z_1 e z_2 pelas suas expressões, obtemos:

$$z_1 = \frac{L_1}{r - 1} \qquad \text{e} \qquad z_2 = \frac{L_2}{r - 1}$$

cujos resultados, tem o mesmo significado dado anteriormente.

Calculado $\tilde{m}$ e $\tilde{\ell}_i$, temos:

$$SQ\ P_{(3)} = \tilde{m}\ G + \Sigma\ \tilde{\ell}_1\ L_i$$

6.2.2. Análise de variância

Temos que:

$$SQ\ T(aj) = (\hat{m} - \tilde{m})G + \Sigma(\hat{\ell}_i - \tilde{\ell}_i)L_i + \Sigma(\hat{c}_j - \tilde{c}_j)C_j + \Sigma\hat{t}_k\ T_k\ ,$$

onde:

$$\hat{m} - \tilde{m} = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{r^2}\ ;$$

$$\hat{\ell}_1 - \tilde{\ell}_1 = \hat{c}_1 - \tilde{c}_1 = \frac{x_1 - y_1}{r} - (\hat{m} - \tilde{m})\ ;$$

$$\hat{\ell}_2 - \tilde{\ell}_2 = \hat{c}_2 - \tilde{c}_2 = \frac{x_2 - y_2}{r} - (\hat{m} - \tilde{m})\ ;$$

$$\hat{\ell}_i - \tilde{\ell}_i = \hat{c}_j - \tilde{c}_j = - (\hat{m} - \tilde{m}) \quad \text{para } i \neq 1 \text{ e } 2,\ j \neq 1 \text{ e } 2\ .$$

Substituindo, esses valores em SQ T(aj), temos:

$$SQ\ T(aj) = \frac{x_1 - y_1}{r}\left[L_1 + C_1\right] + \frac{x_2 - y_2}{r}\left[L_2 + C_2\right] - \frac{(x_1 - y_1 + x_2 - y_2)G}{r^2} + \Sigma\ \hat{t}_k\ T_k$$

ou

$$SQ\ T(aj) = \frac{x_1 - y_1}{r^2}\left[r\ (L_1 + C_1) - G\right] + \frac{x_2 - y_2}{r^2}\left[r(L_2 + C_2) - G\right] + \Sigma\ \hat{t}_k\ T_k$$

Reportando a 6.2.1.b, temos que:

$$r\ (L_1 + C_1) - G = (r - 1)^2\ y_1 + y_2$$

$r\ (L_2 + C_2) - G = (r - 1)^2\ y_2 + y_1$, então podemos escrever:

$$SQ\ T(aj) = \frac{x_1 - y_1}{r^2}\left[(r-1)^2 y_1 + y_2\right] + \frac{x_2 - y_2}{r^2}\left[(r-1)^2 y_2 + \right.$$

$$\left. + y_1\right] + \Sigma\ \hat{t}_k\ T_k \quad \text{, ou ainda,}$$

$$SQ\ T(aj) = \frac{1}{r^2}\left[(r-1)^2(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)\right] y_1 \qquad +$$

$$+ \frac{1}{r^2}\left[(r-1)^2(x_2 - y_2) + (x_1 - y_1)\right] y_2 + \Sigma\ \hat{t}_k\ T_k\ .$$

Por outro lado, é facil verificar que:

$$\hat{t}_1 = \frac{1}{r^2}\left[(r-1)^2(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)\right] \qquad \text{e}$$

$$\hat{t}_2 = \frac{1}{r^2}\left[(r-1)^2(x_2 - y_2) + (x_1 - y_1)\right] \text{, então, temos:}$$

$$SQ\ T(aj) = \hat{t}_1 y_1 + \hat{t}_2 y_2 + \Sigma\ \hat{t}_k\ T_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.2.2.a)$$

Desse modo chegamos a uma fórmula bastante simples e de fácil uso.

De modo análogo, fazemos para se obter a SQ C(aj), ou seja

$$SQ\ C(aj) = (\tilde{m}_{\cdot} - \bar{m})G + \Sigma(\tilde{\ell}_i - \bar{\ell}_i)L_i + \Sigma\ \tilde{c}_j\ C_j$$

Substituindo as expressões entre parênteses pelos seus valores, temos

$$SQ\ C(aj) = \frac{y_1 - z_1}{r} L_1 + \frac{y_2 - z_2}{r} L_2 + \Sigma\ \tilde{c}_j\ C_j$$

Lembrando que:

$L_1 = (r - 1)z_1$ e $L_2 = (r - 1)z_2$, temos

$$SQ\ C(aj) = \frac{r-1}{r}(y_1 - z_1)z_1 + \frac{r-1}{r}(y_2 - z_2)z_2 + \Sigma\ \tilde{c}_j\ C_j$$

Por outro lado, temos que:

$$\tilde{c}_1 = \frac{r-1}{r}(y_1 - z_1) \quad e \quad \tilde{c}_2 = \frac{r-1}{r}(y_2 - z_2),$$

então:

$$SQ\ C(aj) = \tilde{c}_1 z_1 + \tilde{c}_2 z_2 + \Sigma\ \tilde{c}_j\ C_j \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (6.2.2.b)$$

Para a SQ L (de modo usual), isto é:

$$SQ\ L = \frac{L_1^2}{r-1} + \frac{L_2^2}{r-1} + \frac{\Sigma\ L_{i'}^2}{r} - C, \quad \text{onde}$$

$$C = \frac{G^2}{r^2 - 2} \quad e \quad i' = 3, 4, \dots, r \qquad (6.2.2.c)$$

SQ total $= \Sigma\ y_{ij}^2 - C$, onde $\Sigma\ y_{ij}^2$ é a soma das parcelas existentes. .... (6.2.2.d)

A SQ R é obtido por diferença, isto é:

$$SQ\ R = SQ\ total - SQ\ T(aj) - SQ\ C(aj) - SQ\ L \ \dots.. \quad (6.2.2.e)$$

Então, o Esquema de análise de variância é: .... (6.2.2.f)

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	
Trat. (aj)	$r - 1$	$\hat{t}_1 y_1 + \hat{t}_2 y_2 + \Sigma\ \hat{t}_k T_k$	SQ T(aj)/(r-1)	QM T(aj)/QMR
Col. (aj)	$r - 1$	$\tilde{c}_1 z_1 + \tilde{c}_2 z_2 + \Sigma\ \tilde{c}_j C_j$		
Linha	$r - 1$	de modo usual		
Resíduo	$r^2 - 3r$	por diferença	SQ R/(r^2-3r)	
Total	$r^2 - 3$	$\Sigma\ y_{ij}^2 - C$		

para $r > 4$

6.2.3. Cálculo da variância de um contraste que envolve efeitos de tratamentos

$$V\ (P'\ \hat{\beta}) = P'\ M^{-1}\ P\ \sigma^2$$

Temos que:

$$\hat{t}_1 = \frac{T_1 + x_1}{r} - \hat{m}$$

$$\hat{t}_2 = \frac{T_2 + x_2}{r} - \hat{m}$$

$$\hat{t}_k = \frac{T_k}{r} - \hat{m} \quad \text{para } k \neq 1 \text{ e } 2$$

Substituindo x_1, x_2 e $\hat{m}$ nas equações acima temos:

$$\hat{t}_1 = \frac{(r-1)(r-2)^2 + r - 3}{r(r-3)\left[(r-1)(r-2) + 2\right]} T_1 - \frac{r-1}{r(r-3)\left[(r-1)(r-2)+2\right]} T_2 +$$

$$+ f_1\,(L_i, C_j, G)$$

$$\hat{t}_2 = \frac{r-1}{r(r-3)\left[(r-1)(r-2)+2\right]} T_1 + \frac{(r-1)(r-2)^2 + r - 3}{r(r-3)\left[(r-1)(r-2)+2\right]} T_2 +$$

$$+ f_2\,(L_i, C_j, G)$$

$$\hat{t}_k = \frac{-1}{r\left[(r-1)(r-2)+2\right]} T_1 + \frac{-1}{r\left[(r-1)(r-2)+2\right]} T_2 + \frac{1}{r} T_k +$$

$$+ f_3\,(L_i, C_j, G) \qquad \text{para } k \neq 1 \text{ e } 2$$

Sejam os contrastes

$$\hat{y}_1 = \hat{t}_3 - \hat{t}_4\,, \quad \hat{y}_2 = \hat{t}_1 - \hat{t}_3 \quad \text{e} \quad \hat{y}_3 = \hat{t}_1 - \hat{t}_2$$

então:

a. $\hat{V}\,(\hat{y}_1) = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right) s^2 \Longrightarrow \hat{V}\,(y_1) = \frac{2}{r}\, s^2$

b. $\hat{V}(\hat{y}_2) = \left[\frac{(r-1)(r-2)^2 + r - 3}{r(r-3)\left[(r-1)(r-2)+2\right]} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r\left[(r-1)(r-2)+2\right]}\right] s^2 \Longrightarrow$

$$\hat{V}(\hat{y}_2) = \left[\frac{2}{r} + \frac{(r-1)(r-2)}{r(r-3)\left[(r-1)(r-2)+2\right]}\right] s^2$$

c. $\hat{V}(\hat{y}_3) = \dfrac{2\left[(r - 1)(r - 2)^2 + r - 3\right] + 2\,(r - 1)}{r(r - 3)\left[(r - 1)(r - 2) + 2\right]}\; s^2 \Longrightarrow$

$$\hat{V}(\hat{y}_3) = \frac{2(r - 2)}{r(r - 3)} \cdot s^2$$

Para o cálculo das estimativas das médias de tratamentos, temos:

$$\hat{m}_1 = \hat{t}_1 + \hat{m} \Longrightarrow \hat{m}_1 = \frac{T_1 + x_1}{r}$$

$$\hat{m}_2 = \hat{t}_2 + \hat{m} \Longrightarrow \hat{m}_2 = \frac{T_2 + x_2}{r}$$

$$\hat{m}_k = \hat{t}_k + \hat{m} \Longrightarrow \hat{m}_k = \frac{T_k}{r} \qquad \text{para} \quad k \neq 1 \text{ e } 2$$

Uma vez obtida a variância de um contraste, que envolve efeitos de tratamentos, podemos comparar as diversas médias de tratamentos, fazendo uso dos testes já mencionados.

6.2.4. Análise da variância quando usamos as estimativas x_1 e x_2

Calculadas as estimativas x_1 e x_2, a análise prossegue de maneira usual, como já vimos.

No quadro de análise somente os números de graus de liberdades associados as causas de variações, e a SQ R(x), não se modificam daquele visto em (6.2.2.f).

6.2.5. Cálculo dos números U e U'

Já foi definido U = SQ T(x) - SQ T(aj), então:

$$U = \frac{(T_1 + x_1)^2}{r} + \frac{(T_2 + x_2)^2}{r} + \frac{\Sigma\, T_{k'}^2}{r} - C(x) - \hat{t}_1 y_1 - \hat{t}_2 y_2 - \Sigma\, \hat{t}_k\, T_k$$

onde $k' = 3, 4, \ldots, r$ e $C(x) = \dfrac{(G + x_1 + x_2)^2}{r^2}$

Substituindo os $\hat{t}_k$ em $\Sigma\, \hat{t}_k\, T_k$ e desenvolvendo, temos

$$U = \frac{x_1 T_1 + x_2 T_2 + x_1^2 + x_2^2}{r} - \hat{m}(x_1 + x_2) - \hat{t}_1 y_1 - \hat{t}_2 y_2$$

ou

$$U = x_1 \left[\frac{T_1 + x_1}{r} - \hat{m}\right] + x_2\left[\frac{T_2 + x_2}{r} - \hat{m}\right] - \hat{t}_1 y_1 - \hat{t}_2 y_2$$

como

$$\frac{T_1 + x_1}{r} - \hat{m} = \hat{t}_1 \quad \text{e} \quad \frac{T_2 + x_2}{r} - \hat{m} = \hat{t}_2$$

podemos escrever:

$$U = x_1 \hat{t}_1 + x_2 \hat{t}_2 - \hat{t}_1 y_1 - \hat{t}_2 y_2$$

ou

$$U = \hat{t}_1(x_1 - y_1) + \hat{t}_2(x_2 - y_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.2.5.a)$$

usando o fato de que:

$$\hat{t}_1 = \frac{1}{r^2}\left[(r - 1)^2(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)\right] \quad \text{e}$$

$$\hat{t}_2 = \frac{1}{r^2}\left[(r - 1)^2(x_2 - y_2) + (x_1 - y_1)\right]$$

temos

$$U = \left(\frac{r - 1}{r}\right)^2\left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right] + \frac{2}{r^2}(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)$$

Na forma matricial é:

$$U = \frac{1}{r^2}\left[(x_1 - y_1), (x_2 - y_2)\right] \begin{bmatrix} (r - 1)^2 & 1 \\ 1 & (r - 1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - y_1) \\ (x_2 - y_2) \end{bmatrix}$$

De modo análogo obtemos o número U'

Sendo $U' = SQ\ C(y) - SQ\ C(aj)$,

então:

$$U' = \frac{(C_1 + y_1)^2}{r} + \frac{(C_2 + y_2)^2}{r} + \frac{\Sigma\, C_{j'}^2}{r} - C_{(y)} - \tilde{c}_1 z_1 - \tilde{c}_2 z_2 - \Sigma\, \tilde{c}_j\, C_j$$

onde $j' = 3,4, \ldots, r$ e $C_{(y)} = \dfrac{(G + y_1 + y_2)^2}{r^2}$

Desenvolvendo e simplificando, obtemos:

$$U' = \tilde{c}_1(y_1 - z_1) + \tilde{c}_2(y_2 - z_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.2.5.b)$$

Como $\tilde{c}_1 = \dfrac{r-1}{r}(y_1 - z_1)$ e $\tilde{c}_2 = \dfrac{r-1}{r}(y_2 - z_2)$

podemos escrever U' como se segue:

$$U' = \frac{r-1}{r}\left[(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 \right],$$ ou na forma matricial:

$$U' = \frac{1}{r}\left[(y_1 - z_1)\,(y_2 - z_2)\right] \begin{bmatrix} (r-1) & 0 \\ 0 & (r-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_1 - z_1) \\ (y_2 - z_2) \end{bmatrix}$$

6.2.6. Esquema da Análise de variância

Esquema .... (6.2.6.a)

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Trat. (aj)	$r - 1$	SQ T(x) - U	SQ R(aj)/(r - 1)	QM T(aj)/QM R
Col. (aj)	$r - 1$	SQ C(y) - U'		
Linha	$r - 1$	de modo usual		
Res.	$r^2 - 3r$	por diferença	SQ R/(r^2 - 3r)	
Total	$r^2 - 3$	$\Sigma\, y_{ij}^2 - C$		

OU

Esquema .... (6.2.6.b)

C.V.	G.L.	S.Q.	S.Q.(aj)	Q.M.	F
SQ T(x)	$r - 1$	SQ T(x)	SQ T(x) - U	QM T(aj)	QM T(aj)/QM R
SQ C(x)	$r - 1$	SQ C(x)			
SQ L(x)	$r - 1$	SQ L(x)			
SQ R(x)	$r^2 - 3r$	SQ R(x) = SQ R		QM R	
Total	$r^2 - 3$	$x_1^2+x_2^2+\Sigma y_{ij}^2-C(x)$			

Um exemplo numérico

Suponhamos que no exemplo dado em 4 as parcelas perdidas tenham estimativas x_1 e x_2 como figura no quadro abaixo.

(D) 432	(A) 518	(B) 458	(C) 583	(E) 331	2322	L_3	$T_1 = 1939$
(C) 724	(E) 478	(A) x_1	(B) 550	(D) 400	2151	L_1	$T_2 = 1710$
(E) 489	(B) 384	(C) 556	(D) 297	(A) 420	2146	L_4	$T_3 = 3024$
(B) x_2	(D) 500	(E) 313	(A) 486	(C) 501	1800	L_2	$T_4 = 2067$
(A) 515	(C) 660	(D) 438	(E) 394	(B) 318	2325	L_5	$T_5 = 2005$
2160	2540	1765	2310	1970	10745		
C_2	C_3	C_1	C_4	C_5			

x_1 está associado a L_1, C_1 e T_1

x_2 está associado a L_2, C_2 e T_2

Usando as fórmulas obtidas, temos:

$x_1 = 569{,}71428$, $y_1 = 519{,}15686$ e $z_1 = 538$

$x_2 = 476{,}71428$, $y_2 = 533{,}49019$ e $z_2 = 450$

Usando o esquema 6.2.2.f, temos:

Quadro da análise de variância

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Trat. (aj)	4	137.510,55	34.377,64	10,39 **
Col. (aj)	4	54.932,82		
Linha	4	28.517,30		
Res.	10	33.094,63	3.309,46	
Total	22	254.055,30		

ou seguir o esquema 6.2.6.b.

C.V.	G.L.	S.Q.	S.Q.(aj)	Q.M.	F
Trat. (x)	4	140.979,83	137.510,55	34.377,64	10,39 **
Col. (x)	4	52.839,09			
Linha (x)	4	37.244,81			
Res. (x)	10	33.094,63	33.094,63	3.309,46	
Total (x)	22	264.158,36			

As médias de tratamentos são:

$\hat{m}_3$ = 604,8

$\hat{m}_1$ = 501,74 (do tratamento que contém x_1)

$\hat{m}_2$ = 436,74 (do tratamento que contém x_2)

$\hat{m}_4$ = 413,4

$\hat{m}_5$ = 401,0

Para a comparação das diversas médias entre si, usaremos o teste de Tukey:

$$\Delta = \sqrt{1/2\ \hat{V}(\hat{y})}$$

Sejam os contrastes entre duas médias

$\hat{y}_1$ (entre dois tratamentos sem parcelas perdidas)

$\hat{y}_2$ (um com parcela perdida e o outro sem parcela perdida)

$\hat{y}_3$ (ambos com parcelas perdidas)

Ao nível de 5% de probabilidade, temos:

$$\Delta_1 = 4{,}65 \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\ s^2} \Longrightarrow \Delta_1 = 119{,}63$$

$$\Delta_2 = 4{,}65 \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{2}{5} + \frac{4.3}{5.2(4.3+2)}\right] s^2} \Longrightarrow \Delta_2 = 131{,}82$$

$$\Delta_3 = 4{,}65 \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2}\right] s^2} \Longrightarrow \Delta_3 = 146{,}51$$

Conclusão:

A este nível de probabilidade, vemos que a variedade 3 (Co-419) supera todas as outras variedades, exceto a variedade 1 (Co 290).

6.3. Caso de duas parcelas perdidas na mesma linha

Consideremos o seguinte esquema, em um delineamento em quadrado latino r x r:

x_1	x_2	$L_1 + x_1 + x_2$
$C_1 + x_1$	$C_2 + x_2$	$G + x_1 + x_2$

, onde

x_1 está associado a L_1, C_1 e T_1

x_2 está associado a L_1, C_2 e T_2.

6.3.1. Cálculo das SQ $P_{(1)}$, SQ $P_{(2)}$ e SQ $P_{(3)}$

Considerando o modelo matemático

$$y_{ij} = m + t_{k(i,j)} + \ell_i + c_j + e_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.3.1.a)$$

Admitindo as restrições $\Sigma\, \hat{t}_k = \Sigma\, \hat{\ell}_i = \Sigma\, \hat{c}_j = 0$, o sistema de equações normais é:

$$\begin{bmatrix} r^2-2 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ r-1 & r-1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ r-1 & 0 & r-1 & -1 & 0 & -1 \\ r-2 & -1 & -1 & r-2 & -1 & -1 \\ r-1 & -1 & 0 & -1 & r-1 & 0 \\ r-1 & 0 & -1 & -1 & 0 & r-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \hat{\ell}_1 \\ \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ T_1 \\ T_2 \\ L_1 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

No sistema acima, não figuram as equações seguintes:

$$\hat{\ell}_i = \frac{L_i}{r} - \hat{m}, \quad \hat{c}_j = \frac{C_j}{r} - \hat{m} \quad \text{e} \quad \hat{t}_k = \frac{T_k}{r} - \hat{m}$$

para $i \neq 1$, $j \neq 1$ e 2 e $k \neq 1$ e 2.

A solução do sistema é:

$$\hat{m} = \frac{G + x_1 + x_2}{r^2}$$

$$\hat{\ell}_1 = \frac{L_1 + x_1 + x_2}{r} - \hat{m}, \quad \hat{c}_1 = \frac{C_1 + x_1}{r} - \hat{m} \text{ e } \hat{t}_1 = \frac{T_1 + x_1}{r} - \hat{m}$$

$$\hat{c}_2 = \frac{C_2 + x_2}{r} - \hat{m} \text{ e } \hat{t}_2 = \frac{T_2 + x_2}{r} - \hat{m}$$

onde

$$x_1 = \hat{m} + \hat{t}_1 + \hat{\ell}_1 + \hat{c}_1 \quad \text{e} \quad x_2 = \hat{m} + \hat{t}_2 + \hat{\ell}_1 + \hat{c}_2$$

daí temos:

$$x_1 = \frac{r(T_1 + L_1 + C_1) - 2G}{(r-1)(r-2)} + \frac{x_2}{r-1}$$

$$x_2 = \frac{r(T_2 + L_1 + C_2) - 2G}{(r-1)(r-2)} + \frac{x_1}{r-1}$$

cuja solução é:

$$x_1 = \frac{(r-1)\left[T_1 + L_1 + C_1\right] + \left[T_2 + L_1 + C_2\right] - 2G}{(r-2)^2}$$

$$x_2 = \frac{(r-1)\left[T_2 + L_1 + C_2\right] + \left[T_1 + L_1 + C_1\right] - 2G}{(r-2)^2}$$

Com as estimativas $\hat{m}$, $\hat{t}_k$, $\hat{\ell}_i$ e $\hat{c}_j$, podemos obter

$$SQ\ P_{(1)} = \hat{m}\ G + \Sigma\ \hat{t}_k T_k + \Sigma\ \hat{\ell}_i L_i + \Sigma\ \hat{c}_j C_j$$

Seja o modelo matemático

$$y_{ij} = m + \ell_i + c_j + e_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.3.1.b)$$

O sistema de equações normais, admitindo as restrições $\Sigma\ \tilde{\ell}_i = \Sigma\ \tilde{c}_j = 0$, é:

$$\begin{bmatrix} r^2-2 & -2 & -1 & -1 \\ r-2 & r-2 & -1 & -1 \\ r-1 & -1 & r-1 & 0 \\ r-1 & -1 & 0 & r-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{m} \\ \tilde{\ell}_1 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ L_1 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $y_1 = \tilde{m} + \tilde{\ell}_1 + \tilde{c}_1$ e $y_2 = \tilde{m} + \tilde{\ell}_1 + \tilde{c}_2$, a solução do sistema é:

$$\tilde{m} = \frac{G + y_1 + y_2}{r^2}$$

$$\tilde{\ell}_1 = \frac{L_1 + y_1 + y_2}{r} - \tilde{m} \qquad\qquad \tilde{\ell}_i = \frac{L_i}{r} - \tilde{m} \quad \text{para } i \neq 1$$

$$\tilde{c}_1 = \frac{C_1 + y_1}{r} - \tilde{m}$$

$$\tilde{c}_2 = \frac{C_2 + y_2}{r} - \tilde{m} \qquad \tilde{c}_j = \frac{C_j}{r} - \tilde{m} \quad \text{para } j \neq 1 \text{ e } 2$$

Dado que

$$y_1 = \tilde{m} + \tilde{\ell}_1 + \tilde{c}_1$$

$$y_2 = \tilde{m} + \tilde{\ell}_1 + \tilde{c}_2$$ e substituindo $(\tilde{m}, \tilde{\ell}_1$ e $\tilde{c}_1)$ e $(\tilde{m}, \tilde{\ell}_1$ e $\tilde{c}_2)$ em y_1 e y_2 respectivamente, temos:

$$y_1 = \frac{L_1 + y_1 + y_2}{r} + \frac{C_1 + y_1}{r} - \frac{G + y_1 + y_2}{r^2}$$

$$y_2 = \frac{L_1 + y_1 + y_2}{r} + \frac{C_2 + y_2}{r} - \frac{G + y_1 + y_2}{r^2},$$

ou

$$(r - 1)^2 y_1 - (r - 1)y_2 = r(L_1 + C_1) - G$$

$$-(r - 1)y_1 + (r - 1)^2 y_2 = r(L_1 + C_2) - G$$

cujo resultado é:

$$y_1 = \frac{(r - 1)\left[L_1 + C_1\right] + \left[L_1 + C_2\right] - G}{(r - 1)(r - 2)}$$

$$y_2 = \frac{(r - 1)\left[L_1 + C_2\right] + \left[L_1 + C_1\right] - G}{(r - 1)(r - 2)}$$

Com os resultados de $\tilde{m}$, $\tilde{\ell}_i$ e $\tilde{c}_j$ podemos obter a SQ $P_{(2)}$.

Considerando o modelo matemático

$$y_{ij} = m + \ell_i + e_{ij}$$

O sistema de equações normais, impondo a restrição $\Sigma\, \bar{\ell}_i = 0$, é:

$$\begin{bmatrix} r^2-2 & -2 \\ r-2 & r-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{m} \\ \bar{\ell}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ L_1 \end{bmatrix}$$

que tem como solução:

$$\bar{m} = \frac{G + 2\,z_1}{r^2}$$

$$\bar{\ell}_1 = \frac{L_1 + 2\,z_1}{r} - \bar{m} \quad \text{e} \quad \bar{\ell}_i = \frac{L_i}{r} - \bar{m} \quad \text{para } i \neq 1$$

onde $z_1 = \bar{m} + \bar{\ell}_1$ e $z_2 = \bar{m} + \bar{\ell}_1$ ou $z_1 = z_2$

Substituindo $\bar{m}$ e $\bar{\ell}_1$ pelos seus valores em z_1 temos:

$$z_1 = \frac{L_1}{r - 2} = z_2$$

Calculado as estimativas $\bar{m}$ e $\bar{\ell}_i$, obtemos a SQ $P_{(3)}$

6.3.2. Análise da variância

$$SQ\ T(aj) = (\hat{m} - \tilde{m})G + \Sigma\ (\hat{\ell}_i - \tilde{\ell}_i)L_i + \Sigma\ \hat{c}_j - \tilde{c}_j)C_j + \Sigma\ \hat{t}_k T_k$$

onde

$$\hat{\ell}_1 - \tilde{\ell}_1 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{r} - (\hat{m} - \tilde{m})$$

$$\hat{\ell}_i - \tilde{\ell}_i = -(\hat{m} - \tilde{m}) = \hat{c}_j - \tilde{c}_j \qquad \text{para} \quad i \neq 1 \text{ e } j \neq 1 \text{ e } 2$$

$$\hat{c}_1 - \tilde{c}_1 = \frac{x_1 - y_1}{r} - (\hat{m} - \tilde{m})$$

$$\hat{c}_2 - \tilde{c}_2 = \frac{x_2 - y_2}{r} - (\hat{m} - \tilde{m})$$

$\hat{m} - \tilde{m} = \dfrac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{r^2}$, então, substituindo esses valores em SQ T(aj) e desenvolvendo, obtemos:

$$SQ\ T(aj) = \frac{x_1 - y_1}{r^2}\left[r(L_1 + C_1) - G\right] + \frac{x_2 - y_2}{r^2}\left[r(L_1 + C_2) - G\right] + \hat{t}_k\ T_k$$

Lembrando que:

$$r(L_1 + C_1) - G = (r - 1)^2 y_1 - (r - 1)y_2$$

$r(L_1 + C_2) - G = -(r - 1)y_1 + (r - 1)^2 y_2$, podemos escrever:

$$SQ\ T(aj) = \frac{x_1 - y_1}{r^2}\left[(r - 1)^2 y_1 - (r - 1)y_2\right] + \frac{x_2 - y_2}{r^2}\left[(r - 1)^2 y_2 - (r - 1)y_1\right] +$$

$$+ \Sigma \hat{t}_k\ T_k$$

ou ainda:

$$SQ\ T(aj) = \frac{1}{r^2}\left[(r-1)^2(x_1-y_1)-(r-1)(x_2-y_2)\right]y_1 + \frac{1}{r^2}\left[(r-1)^2(x_2-y_2)-(r-1)(x_1-y_1)\right]y_2 +$$

$$+ \Sigma\ \hat{t}_k\ T_k$$

como,

$$\hat{t}_1 = \frac{1}{r^2}\left[(r - 1)^2(x_1 - y_1)-(r - 1)(x_2 - y_2)\right] \quad e$$

$$\hat{t}_2 = \frac{1}{r^2}\left[(r - 1)^2(x_2 - y_2)-(r - 1)(x_1 - y_1)\right] \ , \text{ temos:}$$

$$SQ\ T(aj) = \hat{t}_1 y_1 + \hat{t}_2 y_2 + \Sigma\ \hat{t}_k T_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.3.2.a)$$

Temos que:

$$SQ\ C(aj) = (\tilde{\tilde{m}} - \bar{m})G + \Sigma(\tilde{\tilde{\ell}}_i - \bar{\ell}_i L_i + \Sigma\ \tilde{c}_j C_j,$$

De modo análogo a (6.2.2.b), obtemos

$$SQ\ C(aj) = (\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2)z_1 + \Sigma\ \tilde{c}_j C_j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.3.2.b)$$

$$SQ\ L = \frac{L_1^2}{r - 2} + \frac{\Sigma\ L_{i'}^2}{r} - C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.3.2.c)$$

para $i' = 2,3,\ldots,r$

$$SQ\ total = \Sigma\, y_{ij}^2 - C, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6.3.2.d)$$

$$SQ\ R = SQ\ total - SQ\ T(aj) - SQ\ C(aj) - SQ\ L, \quad \ldots\ (6.3.2.e)$$

onde,

$$C = \frac{G^2}{r^2 - 2}\ .$$

Então, o esquema de análise será:

Esquema .... (6.3.2.f)

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Trat. (aj)	$r - 1$	$\hat{t}_1 y_1 + \hat{t}_2 y_2 + \Sigma\, \hat{t}_k T_k$	SQ T(aj)/(r-1)	QM T(aj)/QM R
Col. (aj)	$r - 1$	$(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2) z_1 + \Sigma\, \tilde{c}_j C_j$		
Linha	$r - 1$	de modo usual		
Resíduo	$r^2 - 3r$	por diferença	SQ R/$(r^2 - 3r)$	
Total	$r^2 - 3$	$\Sigma\, y_{ij}^2 - C$		

para $r \geqslant 4$

6.3.3. Cálculo da variância de um contraste que envolve efeitos de tratamentos

Seja o contraste $P'\beta$, então:

$$\hat{V}(P'\hat{\beta}) = P'M^{-1}P s^2 \quad \text{onde } s^2 = QM\ R$$

Dado que:

$$\hat{t}_1 = \frac{T_1 + x_1}{r} - \hat{m}$$

$$\hat{t}_2 = \frac{T_2 + x_2}{r} - \hat{m}$$

$$\hat{t}_k = \frac{T_k}{r} - \hat{m} \qquad \text{para } k \neq 1 \text{ e } 2$$

Temos:

$$\hat{t}_{k'} = \frac{(r - 1)}{r(r - 2)} T_{k'} + f_{k'}(L_i, C_j, G) \qquad \text{para } k' = 1 \text{ e } 2$$

$$\hat{t}_k = - \frac{1}{r(r - 2)^2} T_1 - \frac{1}{r(r - 2)^2} T_2 + \frac{1}{k} T_k + f_k(L_i, C_j, G)$$

para $k \neq 1$ e 2

Sejam as estimativas dos seguintes contrastes que envolve efeitos de dois tratamentos:

$\hat{y}_1 = \hat{t}_3 - \hat{t}_4$ (ambos sem parcela perdida)

$\hat{y}_2 = \hat{t}_1 - \hat{t}_3$ (um com uma parcela perdida)

$\hat{y}_3 = \hat{t}_1 - \hat{t}_2$ (ambos com uma parcela perdida).

então:

a. $\hat{V}(\hat{y}_1) = (\frac{1}{r} + \frac{1}{r}) s^2 \Longrightarrow \hat{V}(\hat{y}_1) = \frac{2}{r} s^2$

b. $\hat{V}(\hat{y}_2) = (\frac{r - 1}{r(r - 2)} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r(r - 2)^2}) s^2 \Longrightarrow$

$\hat{V}(\hat{y}_2) = \left[\frac{2}{r} + \frac{r - 1}{r(r - 2)^2}\right] s^2$

c. $\hat{V}(\hat{y}_3) = \left[\frac{r - 1}{r(r - 2)} + \frac{r - 1}{r(r - 2)}\right] s^2 \Longrightarrow \hat{V}(\hat{y}_3) = \frac{2(r - 1)}{r(r - 2)} \cdot s^2$

A estimativa da média de um tratamento é:

$\hat{m}_k = \hat{t}_k + \hat{m}$, então:

para $k = 1 \Longrightarrow \hat{m}_1 = \frac{T_1 + x_1}{r}$ (do tratamento que contém x_1)

para $k = 2 \Longrightarrow \hat{m}_2 = \frac{T_2 + x_2}{r}$ (do tratamento que contém x_2)

para $k \neq 1$ e $2 \Longrightarrow \hat{m}_k = \dfrac{T_k}{r}$ (do tratamento completo).

Uma vez conhecida a variância de um contraste, podemos aplicar os testes já mencionados.

6.3.4. Análise de variância quando substituímos as parcelas perdidas pelas suas estimativas x_1 e x_2

Consideremos o esquema dado em 6.3.

Uma vez determinado os valores de x_1 e x_2 a análise é feita de modo usual.

No esquema de análise, apenas os números de graus de liberdade associados as causas de variações, e a SQ R(x) não se modificam daqueles dados em 6.3.2.f.

6.3.5. Cálculo dos números U e U'

Temos que:

U = SQ T(x) - SQ T(aj), seguindo de maneira análoga ao que fizemos em 6.1.5 e 6.2.5, temos:

$$U = \hat{t}_1(x_1 - y_1) + \hat{t}_2(x_2 - y_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.3.5.a)$$

Lembrando que:

$$\hat{t}_1 = \frac{1}{r^2}\left[(r-1)^2(x_1 - y_1) - (r-1)(x_2 - y_2)\right] \qquad e$$

$$\hat{t}_2 = \frac{1}{r^2}\left[(r-1)^2(x_2 - y_2) - (r-1)(x_1 - y_1)\right]$$

então podemos escrever U como se segue:

$$U = \frac{(r-1)^2}{r^2}\left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right] - \frac{2(r-1)}{r^2}(x_1 - y_1)\ (x_2 - y_2)$$

ou na forma matricial:

$$U = \frac{1}{r^2}\left[(x_1 - y_1),(x_2 - y_2)\right] \begin{bmatrix} (r-1)^2 & -(r-1) \\ -(r-1) & (r-1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - y_1) \\ (x_2 - y_2) \end{bmatrix}$$

Sabemos que:

$$U' = SQ\ C(y) - SQ\ C(aj)$$

De modo análogo ao desenvolvimento anterior, temos:

$$U' = \tilde{c}_1(y_1 - z_1) + \tilde{c}_2(y_2 - z_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.3.5.b)$$

Lembrando que:

$$\tilde{c}_1 = \frac{r-1}{r}(y_1 - z_1) - \frac{1}{r}(y_2 - z_2) \quad \text{e}$$

$$\tilde{c}_2 = \frac{r-1}{r}(y_2 - z_2) - \frac{1}{r}(y_1 - z_1)\ , \text{ então:}$$

$$U' = \frac{r-1}{r}\left[(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2\right] - \frac{2}{r}(y_1 - z_1)(y_2 - z_2)\ ,$$

onde: $z_1 = z_2$

6.3.6. Esquema de Análise de variância

Esquema .... (6.3.6.a)

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Trat.(aj)	$r - 1$	SQ T(x) - U	SQ R(aj)/(r - 1)	QM T(aj)/QM R
Col. (aj)	$r - 1$	SQ C(y) - U'		
Linha	$r - 1$	modo usual		
Resíduo	$r^2 - 3r$	por diferença	SQ R/(r^2 - 3r)	
Total	$r^2 - 3$	$\Sigma y_{ij}^2 - C$		

ou

Esquema .... (6.3.6.b)

C.V.	G.L.	S.Q.	S.Q.(aj)	Q.M.	F
Trat. (x)	$r - 1$	SQ T(x)	SQ T(x) - U	SQ T(aj)/(r-1)	QM T(aj)/QMR
Col. (x)	$r - 1$	SQ C(x)			
Lin. (x)	$r - 1$	SQ L(x)			
Res. (x)	$r^2 - 3r$	SQ R(x) =	SQ R	SQ R$(r^2 - 3r)$	
Total (x)	$r^2 - 3$	$x_1^2 + x_2^2 + \Sigma y_{ij}^2 - C(x)$			

6.4. Caso de duas parcelas perdidas na mesma coluna

Seja o seguinte esquema:

x_1	$L_1 + x_1$
x_2	$L_2 + x_2$
$C_1 + x_1 + x_2$	$G + x_1 + x_2$

, onde

x_1 está associado aos Totais L_1, C_1, T_1 e G

x_2 está associado aos Totais L_2, C_1, T_2 e G

6.4.1. Cálculo das SQ $P_{(1)}$, SQ $P_{(2)}$ e SQ $P_{(3)}$

Consideremos os seguintes modelos matemáticos

$$y_{ij} = m + t_{k(i,j)} + \ell_i + c_j + e_{ij} \quad \text{................} \quad (6.4.1.a)$$

$$y_{ij} = m + \ell_i + c_j + e_{ij} \quad \text{......................} \quad (6.4.1.b)$$

$$y_{ij} = m + \ell_i + e_{ij} \quad \text{..........................} \quad (6.4.1.c)$$

Seguindo a mesma metodologia, temos:

$$\hat{m} = \frac{G + x_1 + x_2}{r^2}, \quad \tilde{m} = \frac{G + y_1 + y_2}{r^2} \quad e \quad \bar{m} = \frac{G + z_1 + z_2}{r^2}$$

$$\hat{\ell}_1 = \frac{L_1 + x_1}{r} - \hat{m}, \quad \tilde{\ell}_1 = \frac{L_1 + y_1}{r} - \tilde{m} \quad e \quad \bar{\ell}_1 = \frac{L_1 + z_1}{r} - \bar{m}$$

$$\hat{\ell}_2 = \frac{L_2 + x_2}{r} - \hat{m}, \quad \tilde{\ell}_2 = \frac{L_2 + y_2}{r} - \tilde{m} \quad e \quad \bar{\ell}_2 = \frac{L_2 + z_2}{r} - \bar{m}$$

$$\hat{\ell}_i = \frac{L_i}{r} - \hat{m} \qquad \tilde{\ell}_i = \frac{L_i}{r} - \tilde{m} \qquad e \qquad \bar{\ell}_i = \frac{L_i}{r} - \bar{m}$$

para $i \neq 1$ e 2

$$\hat{c}_1 = \frac{C_1 + x_1 + x_2}{r} - \hat{m} \qquad e \qquad \tilde{c}_1 = \frac{C_1 + y_1 + y_2}{r} - \tilde{m}$$

$$\hat{c}_j = \frac{C_j}{r} - \hat{m} \qquad e \qquad \tilde{c}_j = \frac{C_j}{r} - \tilde{m} \quad \text{para } j \neq 1$$

$$\hat{t}_1 = \frac{T_1 + x_1}{r} - \hat{m} \qquad e \qquad \hat{t}_2 = \frac{T_2 + x_2}{r} - \hat{m}$$

$$\hat{t}_k = \frac{T_k}{r} - \hat{m} \qquad \text{para} \quad k \neq 1 \text{ e } 2$$

De modo análogo ao que fizemos anteriormente, podemos determinar (x_1 e x_2),(Y_1 e y_2) e (z_1 e z_2).

Dado que:

$$x_1 = \hat{m} + \hat{t}_1 + \hat{\ell}_1 + \hat{c}_1 \qquad e \qquad x_2 = \hat{m} + \hat{t}_2 + \hat{\ell}_2 + \hat{c}_1, \text{ temos:}$$

$$x_1 = \frac{(r-1)\left[T_1 + L_1 + C_1\right] + \left[T_2 + L_2 + C_2\right] - 2G}{(r-2)^2} \qquad e$$

$$x_2 = \frac{(r-1)\left[T_2 + L_2 + C_1\right] + \left[T_1 + L_1 + C_1\right] - 2G}{(r-2)^2}$$

Dado que:

$$y_1 = \tilde{m} + \tilde{\ell}_1 + \tilde{c}_1 \qquad e \qquad y_2 = \tilde{m} + \tilde{\ell}_2 + \tilde{c}_1 \quad , \qquad \text{temos:}$$

$$y_1 = \frac{(r-1)\left[L_1 + C_1\right] + \left[L_2 + C_1\right] - G}{(r-1)(r-2)} \quad \text{e}$$

$$y_2 = \frac{(r-1)\left[L_2 + C_1\right] + \left[L_1 + C_1\right] - G}{(r-1)(r-2)}$$

Dado que:

$$z_1 = \bar{m} + \bar{\ell}_1 \qquad \text{e} \qquad z_2 = \bar{m} + \bar{\ell}_2 \quad \text{, temos:}$$

$$z_1 = \frac{L_1}{r-1} \qquad \text{e} \qquad z_2 = \frac{L_2}{r-1}$$

Com os resultados $(\hat{m}, \hat{t}_k, \hat{\ell}_i, \hat{c}_j)$, $(\tilde{m}, \tilde{\ell}_i, \tilde{c}_j)$ e $(\bar{m}, \bar{\ell}_i)$, podemos obter, as SQ $P_{(1)}$, SQ $P_{(2)}$ e SQ $P_{(3)}$, respectivamente.

6.4.2. Análise de variância

Temos que:

$$SQ\ T(aj) = (\hat{m} - \tilde{m})G + \Sigma(\hat{\ell}_i - \tilde{\ell}_i)L_i + \Sigma(\hat{c}_j - \tilde{c}_j)C_j + \Sigma\ \hat{t}_k T_k$$

Desenvolvendo, obtemos:

$$SQ\ T(aj) = \hat{t}_1 y_1 + \hat{t}_2 y_2 + \Sigma\ \hat{t}_k T_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.4.2.a)$$

Temos que:

$SQ\ C(aj) = (\tilde{m} - \bar{m})G + \Sigma(\tilde{\ell}_i - \bar{\ell}_i)L_i + \Sigma\ \tilde{c}_j\ C_j$, de modo análogo a (6.3.2.a), obtemos:

$$SQ\ C(aj) = (z_1 + z_2)\tilde{c}_1 + \Sigma\ \tilde{c}_j C_j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.4.2.b)$$

onde

$$\tilde{c}_1 = \frac{r-1}{r}(y_1 - z_1) = \frac{r-1}{r}(y_2 - z_2)$$

$$SQ\ L = \frac{L_1^2}{r-1} + \frac{L_2^2}{r-1} + \frac{\Sigma\ L_{i'}^2}{r} - C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.4.2.c)$$

onde $i' = 3, 4, \ldots, r$ e $C = \dfrac{G^2}{r^2 - 2}$

$$SQ\ total = \Sigma\, y_{ij}^2 - C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.4.2.d)$$

$$SQ\ R = SQ\ total - SQ\ T(aj) - SQ\ C(aj) - SQ\ L \quad \ldots\ldots \quad (6.4.2.e)$$

Logo o esquema da análise será:

Esquema .... (6.4.2.f)

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Trat. (aj)	$r - 1$	$\hat{t}_1 y_1 + \hat{t}_2 y_2 + \Sigma\, \hat{t}_k T_k$	SQ T(aj)/(r-1)	QM T(aj)/QM R
Col. (aj)	$r - 1$	$(z_1 + z_2)\hat{c}_1 + \Sigma\, \hat{c}_j C_j$		
Linha	$r - 1$	de modo usual		
Resíduo	$r^2 - 3r$	por diferença	SQ R/(r^2-3r)	
Total	$r^2 - 3$	$\Sigma\, y_{ij}^2 - C$		

6.4.3. Cálculo da variância de um contraste que envolve efeitos de tratamentos

São as mesmas obtidas em (6.3.3)

6.4.4. Análise de variância quando substituimos as parcelas perdidas pelas suas estimativas x_1 e x_2

Considerando o esquema dado em 6.4, temos:

$$SQ\ T(x) = \frac{(T_1 + x_1)^2}{r} + \frac{(T_2 + x_2)^2}{r} + \frac{\Sigma\, T_{k'}^2}{r} - C(x)$$

$$SQ\ C(x) = \frac{(C_1 + x_1 + x_2)^2}{r} + \frac{\Sigma\, C_{j'}^2}{r} - C(x)$$

$$SQ\ L(x) = \frac{(L_1 + x_1)^2}{r} + \frac{(L_2 + x_2)^2}{r} + \frac{\Sigma\ L_{i'}^2}{r} - C(x)$$

$$SQ\ to(x) = x_1^2 + x_2^2 + \Sigma\ y_{ij}^2 - C(x)$$

$$SQ\ R(x) = SQ\ to(x) - SQ\ T(x) - SQ\ C(x) - SQ\ L(x)$$

No esquema da análise de variância, sabemos que apenas os graus de liberdade associados as causas de variações, e a SQ R(x) não se modificam dos dados 6.4.2.f.

6.4.5. Cálculo dos números U e U'

Dado que

$U = SQ\ T(x) - SQ\ T(aj)$, então, de modo análogo ao que fizemos en (6.3.5), obtemos:

$$U = \hat{t}_1(x_1 - y_1) + \hat{t}_2(x_2 - y_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.4.5.a)$$

Lembrando que:

$$\hat{t}_1 = \frac{1}{r^2}\left[(r - 1)^2(x_1 - y_1) - (r - 1)(x_2 - y_2)\right] \quad e$$

$$\hat{t}_2 = \frac{1}{r^2}\left[(r - 1)^2(x_2 - y_2) - (r - 1)(x_1 - y_1)\right],\ \text{podemos}$$

escrever U como se segue:

$$U = \frac{1}{r^2}\left[(x_1 - y_1),(x_2 - y_2)\right]\begin{bmatrix}(r - 1)^2 & -(r - 1) \\ -(r - 1) & (r - 1)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(x_1 - y_1) \\ (x_2 - y_2)\end{bmatrix}$$

Temos que:

$$U' = SQ\ C(y) - SQ\ C(aj)$$

Desenvolvendo e simplificando, obtemos:

$$U' = 2\tilde{c}_1(y_1 - z_1) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (6.4.5.b)$$

Lembrando que:

$$\tilde{c}_1 = \frac{r - 1}{r}(y_1 - z_1), \text{ temos:}$$

$$U' = \frac{2(r - 1)(y_1 - z_1)^2}{r}$$

6.4.6. Esquema da Análise de variância

Esquema .... (6.4.6.a)

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Trat. (aj)	$r - 1$	SQ T(x) - U	SQ T(aj)/(r - 1)	QM T(aj)/QM R
Col. (aj)	$r - 1$	SQ C(y) - U'		
Linha	$r - 1$	de modo usual		
Resíduo	$r^2 - 3r$	por diferença	SQ R/$(r^2 - 3r)$	
Total	$r^2 - 3$	$\Sigma y_{ij}^2 - C$		

para $r \geqslant 4$

ou

C.V.	G.L.	S.Q.	S.Q.(aj)	Q.M.	F
Trat. (x)	$r - 1$	SQ T(x)	SQ T(x) - U	SQ T(aj)/(r-1)	QM T(aj)/QMR
Col. (x)	$r - 1$	SQ C(x)			
Linha (x)	$r - 1$	SQ L(x)			
Resíduo (x)	$r^2 - 3r$	SQ R(x)	= SQ R	SQ R/$(r^2$-3r)	
Total (x)	$r^2 - r$	$x_1^2 + x_2^2 + \Sigma y_{ij}^2 - C(x)$			

Um exemplo:

No exemplo dado em 4, suponhamos que as estimativas das parcelas perdidas sejam x_1 e x_2, como se figuram no quadro abaixo:

(D) 432	(A) x_1	(B) x_2	(C) 583	(E) 331	1346	L_1
(C) 724	(E) 478	(A) 524	(B) 550	(D) 400	2676	L_2
(E) 489	(B) 384	(C) 556	(D) 297	(A) 420	2146	L_3
(B) 494	(D) 500	(E) 313	(A) 486	(C) 501	2294	L_4
(A) 515	(C) 660	(D) 438	(E) 394	(B) 318	2325	L_5
2654	2022	1831	2310	1970	10787	
	C_1	C_2				

$T_1 = 1945$

$T_2 = 1746$

x_1 esta associado a L_1, C_1 e T_1

x_2 esta associado a L_1, C_2 e T_2

Usando as fórmulas obtidas em 6.3.1, temos:

$x_1 = 511,\bar{2}$ $\quad y_1 = 488,5$ $\quad z_1 = 448,\bar{6}$

$x_2 = 381,\bar{2}$ $\quad y_2 = 440,75$ $\quad z_2 = 448,\bar{6}$

Pelo esquema 6.3.2.f ou 6.3.6.a, temos:

C.V.	G.L.	SQ	QM	F
Trat. (aj)	4	139.630,3$\bar{5}$	34.907,5$\bar{3}$	11,12 **
Col. (aj)	4	52.568,$\bar{6}$	13.142,1$\bar{6}$	
Linha	4	31.672,9$\bar{3}$	7.918,2$\bar{3}$	
Resíduo	10	31.388,0$\bar{4}$	3.138,80$\bar{4}$	
Total	22	255.260,		

ou pelo esquema 6.3.6.b.

C.V.	G.L.	S.Q.	S.Q.(aj)	Q.M.	F
Trat.(x)	4	142.661,496	139.630,3$\bar{5}$	34.907,5$\bar{8}$	11,12 **
Col. (x)	4	57.994,696			
Linha (x)	4	32.620,404			
Res. (x)	10	31.388,04	31.388,0$\bar{4}$	3.138,80$\bar{4}$	
Total	22	264.664,641			

As médias de tratamentos são:

$\hat{m}_3$ = 604,8

$\hat{m}_1$ = 491,24

$\hat{m}_2$ = 425,4

$\hat{m}_4$ = 413,4

$\hat{m}_5$ = 401

Podemos comparar as diversas médias entre si pelo teste de Tukey, isto é:

$$\Delta = q \sqrt{1/2\ \hat{V}(\hat{y})}$$

Sejam as estimativas dos contrastes $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$ e $\hat{y}_3$, onde:

$\hat{y}_1$ envolve médias de 2 (dois) tratamentos sem parcelas perdidas

$\hat{y}_2$ envolve médias de 2 (dois) tratamentos, um com parcela perdida e outro sem parcela perdida

$\hat{y}_3$ envolve médias de 2 (dois) tratamentos, ambos com parcelas perdidas.

Então, ao nível de 5% de probabilidade, temos:

$$\Delta_1 = 4{,}65\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\, s^2} \Longrightarrow \Delta_1 = 116{,}50$$

$$\Delta_2 = 4{,}65\sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5} + \frac{4}{5.9}\right] s^2} \Longrightarrow \Delta_2 = 128{,}80$$

$$\Delta_3 = 4{,}65\sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{2.4}{5.3}\right] s^2} \Longrightarrow \Delta_3 = 134{,}53$$

Conclusões:

É a mesma obtida no exemplo anterior.

6.5. Caso de duas parcelas perdidas num mesmo tratamento

Seja um delineamento em quadrado latino r x r, onde se perderam 2 (duas) parcelas referentes a um mesmo tratamento, conforme o esquema seguinte:

x_1		$L_1 + x_1$
	x_2	$L_2 + x_2$
$C_1 + x_1$	$C_2 + x_2$	$G + x_1 + x_2$, onde

x_1 está associado aos totais T_1, L_1, C_1 e G

x_2 está associado aos totais T_1, L_2, C_2 e G

6.5.1. Cálculo das SQ $P_{(1)}$, SQ $P_{(2)}$ e SQ $P_{(3)}$

Considerando o modelo matemático:

$$y_{ij} = m + t_{k(i,j)} + \ell_i + c_j + e_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.5.1.a),$$

o sistema de equações normais, admitindo as restrições $\Sigma\, \hat{t}_k = \Sigma\, \hat{\ell}_i = \Sigma\, \hat{c}_j = 0$, é:

$$\begin{bmatrix} (r^2-2) & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ (r-2) & (r-2) & -1 & -1 & -1 & -1 \\ (r-1) & -1 & (r-1) & 0 & -1 & 0 \\ (r-1) & -1 & 0 & (r-1) & 0 & -1 \\ (r-1) & -1 & -1 & 0 & (r-1) & 0 \\ (r-1) & -1 & 0 & -1 & 0 & (r-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{t}_1 \\ \hat{\ell}_1 \\ \hat{\ell}_2 \\ \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ T_1 \\ L_1 \\ L_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Fazendo

$$x_1 = \hat{m} + \hat{t}_1 + \hat{\ell}_1 + \hat{c}_1$$

$$x_2 = \hat{m} + \hat{t}_1 + \hat{\ell}_2 + \hat{c}_2 \quad , \quad \text{a solução do sistema é:}$$

$$\hat{m} = \frac{G + x_1 + x_2}{r^2}$$

$$\hat{t}_1 = \frac{T_1 + x_1 + x_2}{r^2} - \hat{m} \qquad \hat{t}_k = \frac{T_k}{r} - \hat{m} \quad \text{para } k \neq 1$$

$$\hat{\ell}_1 = \frac{L_1 + x_1}{r^2} - \hat{m} \qquad \hat{\ell}_i = \frac{L_i}{r} - \hat{m} \quad \text{para } i \neq 1 \text{ e } 2$$

$$\hat{\ell}_2 = \frac{L_2 + x_2}{r} - \hat{m}$$

$$\hat{c}_1 = \frac{C_1 + x_1}{r} - \hat{m} \qquad \hat{c}_j = \frac{C_j}{r} - \hat{m} \quad \text{para } j \neq 1 \text{ e } 2$$

$$\hat{c}_2 = \frac{C_2 + x_2}{r} - \hat{m}$$

Do sistema

$$x_1 = \hat{m} + \hat{t}_1 + \hat{\ell}_1 + \hat{c}_1$$

$$x_2 = \hat{m} + \hat{t}_1 + \hat{\ell}_2 + \hat{c}_2 \quad , \quad \text{obtemos:}$$

$$x_1 = \frac{(r-1)\left[T_1 + L_1 + C_1\right] + \left[T_1 + L_2 + C_2\right] - 2G}{(r-2)^2} \quad \text{e}$$

$$x_2 = \frac{(r - 1)\left[T_1 + L_2 + C_2\right] + \left[T_1 + L_1 + C_1\right] - 2G}{(r - 2)^2}$$

Com os resultados acima obtidos determinamos SQ P($\hat{m}$, $\hat{t}_k$, $\hat{\ell}_i$, $\hat{c}_j$) = SQ $P_{(1)}$.

Considerando o modelo matemático

$$y_{ij} = m + \ell_i + c_j + e_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.5.1.b)$$

e procedendo de modo análogo aos casos anteriores, obtemos para as estimativas ($\tilde{m}$, $\tilde{\ell}_i$, $\tilde{c}_j$, y_1 e y_2) expressões iguais as encontradas em 6.2.1 quando foi considerado o modelo (6.2.1.b).

Considerando o modelo matemático

$$y_{ij} = m + \ell_i + e_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.5.1.c)$$

e procedendo de modo análogo aos casos anteriores, obtemos para as estimativas ($\bar{m}$, $\bar{\ell}_i$, z_1 e z_2) as mesmas expressões encontradas em 6.2.1 quando foi considerado o modelo (6.2.1.c).

6.5.2. Análise de variância

Temos que:

$$SQ\ T(aj) = (\hat{m} - \tilde{m})G + \Sigma(\hat{\ell}_i - \tilde{\ell}_i)L_i + \Sigma(\hat{c}_j - \tilde{c}_j) + \Sigma\ \hat{t}_k T_k$$

Procedendo de modo análogo aos casos anteriores, obtemos:

$$SQ\ T(aj) = \frac{1}{r^2}\left[(r - 1)^2(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)\right]y_1 + \frac{1}{r^2}\left[(r - 1)^2(x_2 - y_2) + (x_1 - y_1)\right]y_2 + \Sigma\ \hat{t}_k\ T_k$$

Por outro lado, temos que:

$$\hat{t}_1 = \frac{1}{r^2}\left[(r-1)^2(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[(r-1)^2(x_2 - y_2) + (x_1 - y_1)\right] \quad , \quad \text{então}$$

$$SQ\ T(aj) = (y_1 + y_2)\ \hat{t}_1 + \Sigma\ \hat{t}_k T_k \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (6.5.2.a)$$

Temos que:

$$SQ\ C(aj) = (\tilde{m} - \bar{m})G + \Sigma(\tilde{\ell}_i - \bar{\ell}_i)L_i + \Sigma\ \tilde{c}_j C_j$$

Desenvolvendo e simplificando, chegamos a mesma expressão da da em 6.2.2.b, isto é:

$$SQ\ C(aj) = \tilde{c}_1 z_1 + \tilde{c}_2 z_2 + \Sigma\ \tilde{c}_j C_j \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (6.5.2.b)$$

Para os cálculos das SQ L, SQ total e SQ R procedemos de modo já mencionado.

Logo o esquema da análise de variância é:

Esquema .... (6.5.2.c)

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Trata. aj	$r - 1$	$(y_1 + y_2)\hat{t}_1 + \Sigma\hat{t}_k T_k$	SQT $(aj)/(r-1)$	QM T(aj)/QM R
Col. (aj)	$r - 1$	$\tilde{c}_1 z_1 + \tilde{c}_2 z_2 + \Sigma\tilde{c}_j C_j$		
Linha	$r - 1$	de modo usual		
Resíduo	$r^2 - 3r$	por diferença	SQ R/$(r^2 - 3r)$	
Total	$r^2 - 3$	$\Sigma\ y_{ij}^2 - C$		

para $r \geqslant 4$

6.5.3. Cálculo da variância de um contraste que envolve efeitos de tratamentos

Temos que:

$$\hat{t}_1 = \frac{T_1 + x_1 + x_2}{r} - \hat{m}$$

$$\hat{t}_k = \frac{T_k}{r} - \hat{m} \qquad \text{para} \quad k \neq 1.$$

Substituindo x_1, x_2 e $\hat{m}$ pelas suas expressões em $\hat{t}_1$ e $\hat{t}_k$, temos:

$$\hat{t}_1 = \frac{r^2 - 2r + 2}{r(r-2)^2} T_1 + f_1(L_i, C_j, G)$$

$$\hat{t}_k = -\frac{2}{r(r-2)^2} T_1 + \frac{1}{r} T_k + f_2(L_i, C_j, G) \quad \text{para } k \neq 1$$

Sejam as estimativas dos contrastes:

$$\hat{y}_1 = \hat{t}_2 - \hat{t}_3$$

$$\hat{y}_2 = \hat{t}_1 - \hat{t}_2, \quad \text{então:}$$

$$\hat{V}(\hat{y}_1) = \frac{2}{r} s^2 \qquad \text{e}$$

$$\hat{V}(\hat{y}_2) = \left[\frac{r^2 - 2r + 2}{r(r-2)^2} + \frac{1}{r} + \frac{2}{r(r-2)^2}\right] s^2,$$

ou

$$\hat{V}(\hat{y}_2) = \left[\frac{2}{r} + \frac{2}{(r-2)^2}\right] s^2$$

Temos que:

$$\hat{m}_k = \hat{t}_k + \hat{m}, \text{ então}$$

$$\hat{m}_1 = \frac{T_1 + x_1 + x_2}{r} \quad \text{e} \quad \hat{m}_k = \frac{T_k}{r} \qquad \text{para} \quad k \neq 1$$

Para a comparação de médias, procedemos de modo análogo aos casos anteriores.

6.5.4. Análise de variância quando substituimos as parcelas perdidas pelas suas estimativas x_1 e x_2, respectivamente

Determinado x_1 e x_2, então a análise se procede de modo usual.

No esquema de análise, apenas os números de graus de liberdade associados as causas de variações, e a SQ R(x) não de modificam daqueles visto em 6.5.2.c.

6.5.5. Cálculo dos números U e U'

Temos que:

$$U = \frac{(T_1 + x_1 + x_2)^2}{r} + \frac{\Sigma\, T_{k'}^2}{r} - C(x) - \hat{t}_1(y_1 + y_2) - \Sigma \hat{t}_k T_k$$

para k' = 2,3, ... ,r

Desenvolvendo a expressão acima, obtemos:

$$U = \hat{t}_1(x_1 + x_2) - \hat{t}_1(y_1 + y_2),$$

ou

$$U = \hat{t}_1\left[(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)\right]$$

Por outro lado, temos que:

$x_1 - y_1 = x_2 - y_2$, então:

$U = 2\hat{t}_1(x_1 - y_1)$ .... (6.5.5.a)

Usando o fato de que:

$$\hat{t}_1 = \frac{x_1 - y_1}{r^2} \left[(r - 1)^2 + 1 \right] \quad \text{, temos:}$$

$$U = \frac{2\left[(r - 1)^2 + 1 \right] (x_1 - y_1)^2}{r^2}$$

ou na forma matricial

$$U = \frac{1}{r^2} \left[(x_1 - y_1),(x_1 - y_1)\right] \begin{bmatrix} (r - 1)^2 & 1 \\ 1 & (r - 1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - y_1) \\ (x_1 - y_1) \end{bmatrix}$$

O número U' é o mesmo que foi obtido em 6.2.5, isto é:

$$U' = \tilde{c}_1(y_1 - z_1) + \tilde{c}_2(y_2 - z_2) \quad \text{.................. (6.5.5.b)}$$

ou

$$U' = \frac{r - 1}{r} \left[(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 \right]$$

6.5.6. Esquema da Análise de variância

Esquema .... (6.5.6.a)

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Trat. (aj)	$r - 1$	SQ T(x) - U	SQ T(aj)/(r - 1)	QM T(aj)/QM R
Col. (aj)	$r - 1$	SQ C(y) - U'		
Linha	$r - 1$	de modo usual		
Resíduo	$r^2 - 3r$	por diferença	SQ R/$(r^2 - 3r)$	
Total	$r^2 - 3$	$\Sigma\, y_{ij}^2 - C$		

para $r \geq 4$

OU

Esquema .... (6.5.6.b)

C.V.	G.L.	S.Q.	S.Q.(aj)	Q.M.	F
Trat. (x)	$r - 1$	SQ T(x)	SQ T(x) - U	SQ T(aj)/(r-1)	QM T(aj)/QM R
Col. (x)	$r - 1$	SQ C(x)			
Linha (x)	$r - 1$	SQ L(x)			
Res. (x)	$r^2 - 3r$	SQ R(x)	= SQ R	SQ $R/(r^2 - 3r)$	
Total	$r^2 - 3$	$x_1^2 + x_2^2 + \Sigma y_{ij}^2 - C(x)$			

para $r \geqslant 4$

Um exemplo:

Sejam x_1 e x_2 as estimativas das parcelas perdidas no experimento dado em 4, como figuram no quadro abaixo:

432	(A) x_1	458	583	331	1804	L_1	
724	478	(A)x_2	550	400	2152	L_2	
489	384	556	297	420	2146	L_3	$T_1 = 1421$
494	500	313	486	501	2294	L_4	$T_2 = 2204$
515	660	438	394	318	2325	L_5	$T_3 = 3024$
2654	2022	1765	2310	1970	10721		$T_4 = 2067$
C_5	C_1	C_2	C_3	C_4			$T_5 = 2005$

x_1 está associado a L_1, C_1, T_1 e G

x_2 está associado a L_2, C_2, T_1 e G

Usando as fórmulas obtidas em 6.5.1, temos:

$x_1 = 542,\bar{6}$, $y_1 = 492,862745$ e $z_1 = 451$

$x_2 = 573$, $y_2 = 523,196078$ e $z_2 = 538$

Pelo esquema 6.5.2.c ou 6.5.6.a, temos

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Trat. (aj)	4	138.236,26	34.559,06	10,76**
Col. (aj)	4	52.299,07		
Linha	4	28.671,01		
Resíduo	10	32.097,27	3.209,72	
Total	22	251,303,61		

ou, seguindo o esquema 6.5.6.b.

C.V.	G.L.	S.Q.	S.Q.(aj)	Q.M.	F
Trat. (x)	4	141.609,64	138.236,26	34.559,06	10,76**
Col. (x)	4	56.627,91			
Linha (x)	4	36.901,17			
Resíduo (x)	10	32.097,26	32.097,26	3.209,72	
Total	22	267.237,			

As médias de tratamentos são:

$\hat{m}_3 = 604,8$

$\hat{m}_1 = 507,33$

$\hat{m}_2 = 440,8$

$\hat{m}_5 = 401$ $\hat{m}_4 = 413,4$

Para comparação das diversas médias entre si, usaremos o teste de Tukey, isto é:

$\Delta = q\sqrt{1/2\ \hat{V}(\hat{y})}$

Sejam as estimativas dos seguintes contrastes $\hat{y}_1$ e $\hat{y}_2$, onde:

$\hat{y}_1$ envolve efeitos de dois tratamentos sem parcelas perdidas;

$\hat{y}_2$ envolve efeitos de dois tratamentos, sendo um com parcelas perdidas e o outro sem parcelas perdidas.

Então, ao nível de 5% de probabilidade, temos:

$$\Delta_1 = 4,65\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot s^2} \Longrightarrow \Delta_1 = 117,81$$

$$\Delta_2 = 4,65\sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}+\frac{2}{9}\right] s^2} \Longrightarrow \Delta_2 = 146,92$$

A conclusão é a mesma do exemplo anterior.

6.6. Caso de um tratamento perdido

Consideremos um delineamento em quadrado latino r x r em que ocorreu a perda de um tratamento (suponhamos que seja o tratamento 1).

6.6.1. Cálculo das SQ $P_{(1)}$, SQ $P_{(2)}$ e SQ $P_{(3)}$

Considerando o modelo matemático:

$$y_{ij} = m + t_{k(i,j)} + \ell_i + c_j + e_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.6.1.a)$$

e admitindo as restrições $\Sigma\, \hat{t}_k = \Sigma\, \hat{\ell}_i = \Sigma\, \hat{c}_j = 0$.

A solução do sistema de equações normais é:

$$\hat{m} = \frac{G}{r(r-1)}$$

$$\hat{t}_k = \frac{T_k}{r} - \hat{m} \qquad \text{para } k = 2, 3, \ldots, r$$

$$\hat{\ell}_i = \frac{(r-1)L_i + C_i}{r(r-2)} - \frac{(r-1)\,\hat{m}}{(r-2)} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, r$$

$$\hat{c}_j = \frac{L_j + (r-1)C_j}{r(r-2)} - \frac{(r-1)\,\hat{m}}{(r-2)} \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, r$$

Com os resultados acima obtidos podemos determinar a SQ $P_{(1)}$.

Considerando o modelo matemático:

$$y_{ij} = m + \ell_i + c_j + e_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.6.1.b)$$

e admitindo as restrições $\Sigma\, \tilde{\ell}_i = \Sigma\, \tilde{c}_j = 0$.

A solução do sistema de equações normais é:

$$\tilde{m} = \frac{G}{r(r-1)}$$

$$\tilde{\ell}_i = \frac{(r-1)L_i + C_i}{r(r-2)} - \frac{(r-1)\tilde{m}}{(r-2)}$$

$$\tilde{c}_j = \frac{L_j + (r-1)C_j}{r(r-2)} - \frac{(r-1)\tilde{m}}{(r-2)}$$

Com as estimativas acima obtidas determinamos a SQ $P_{(2)}$

Considerando o modelo matemático:

$$y_{ij} = m + \ell_i + e_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.6.1.c)$$

e admitindo a restrição $\Sigma\, \bar{\ell}_i = 0$, temos:

$$\bar{m} = \frac{G}{r\,(r-1)}$$

$$\bar{\ell}_i = \frac{L_i}{r-1} - \bar{m}$$

Com os resultados acima, obtemos SQ $P_{(3)}$.

6.6.2. Análise de Variância

Temos que:

$$SQ\ T(aj) = (\hat{m} - \tilde{m})G + \Sigma(\hat{\ell}_i - \tilde{\ell}_i)L_i + \Sigma(\hat{c}_j - \tilde{c}_j)C_j + \Sigma\ \hat{t}_k\ T_k\ .$$

Como: $\hat{m} = \tilde{m}$

$\hat{\ell}_i = \tilde{\ell}_i$

$\hat{c}_j = \tilde{c}_j$, temos:

$SQ\ T(aj) = \Sigma\ \hat{t}_k T_k$, ou

$$SQ\ T(aj) = \frac{\Sigma\ T_k^2}{r} - \frac{G^2}{r(r-1)} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (6.6.2.a)$$

logo $SQ\ T(aj) = SQ\ T$ de modo usual ,

Temos que:

$$SQ\ C(aj) = (\tilde{m} - \bar{m})G + \Sigma(\tilde{\ell}_i - \bar{\ell}_i)L_i + \Sigma\ \tilde{c}_j C_j\ .$$

Substituindo na equação acima as estimativas pelos seus valores, temos:

$$SQ\ C(aj) = \Sigma\left[\frac{L_i + (r-1)C_i}{r(r-1)(r-2)} - \frac{r\ \hat{m}}{r(r-2)}\right]L_i + \Sigma\left[\frac{L_i + (r-1)C_i}{r\ (r-2)} - \frac{r(r-1)\hat{m}}{r(r-2)}\right]C_i,$$

ou

$$SQ\ C(aj) = \frac{1}{r(r-1)(r-2)}\Sigma[L_i + (r-1)C_i]L_i + \frac{1}{r(r-2)}\Sigma[L_i + (r-1)C_i]C_i - \frac{r^2\ \hat{m}\ G}{r(r-2)}\ ,$$

ou ainda,

$$SQ\ C(aj) = \Sigma\ \{[L_i + (r-1)C_i][\frac{L_i}{r(r-1)(r-2)} + \frac{C_i}{r(r-2)}]\} - \frac{r^2\ \hat{m}\ G}{r(r-2)}\ ,$$

como $\hat{m} = \dfrac{G}{r(r-1)}$, temos

$$SQ\ C(aj) = \frac{1}{r(r-1)(r-2)} \Sigma\left[L_i + (r-1)C_j\right]^2 - \frac{G^2}{(r-1)(r-2)} \quad \ldots (6.6.2.b)$$

Para o cálculo das SQ L, SQ total e SQ R fazemos de modo usual, isto é:

$$SQ\ L = \frac{\Sigma L_i^2}{r-1} - C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6.6.2.c)$$

$$SQ\ total = \Sigma\ y_{ij}^2 - C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6.6.2.d)$$

$$SQ\ R = SQ\ total - SQ\ T - SQ\ C(aj) - SQ\ L \quad \ldots\ldots\ldots (6.6.2.e)$$

onde $C = \dfrac{G^2}{r^2 - r}$

O esquema da análise de variância é:

Esquema .... (6.6.2.f)

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Trat.	$r - 2$	de modo usual	SQ T/$(r - 2)$	QM T/QM R
Col. (aj)	$r - 1$	SQ C(aj)		
Linha	$r - 1$	de modo usual		
Resíduo	$(r-1)(r-3)$	por diferença	SQ R/$[(r-1)(r-3)]$	
Total	$r^2 - r - 1$	$\Sigma\ y_{ij}^2 - C$		

para $r \geqslant 4$

6.6.3. Cálculo da variância de um contraste

A variância de um contraste que envolve efeitos de 2 (dois) tratamentos é:

$$V(\hat{y}) = \frac{2}{r}\sigma^2$$, logo sua estimativa é:

$$\hat{V}(\hat{y}) = \frac{2}{r} s^2$$

A estimativa da média de um tratamento é:

$$\hat{m}_k = \hat{t}_k + \hat{m} \Longrightarrow \hat{m}_k = \frac{T_k}{r}$$

Para a comparação das diversas médias entre si, fazemos de modo análogo aos casos anteriores.

Um exemplo:

Suponhamos que foi perdido o tratamento (3) no experimento dado em 4, conforme o quadro seguinte:

			(C) x_1		1739
(C) x_2					1952
		(C) x_3			1590
					1793
	(C) x_5			(C) x_4	1665
1930	1880	1733	1727	1469	8739

$T_1 = 2463$

$T_2 = 2204$

$T_4 = 2067$

$T_5 = 2005$

Usando as fórmulas obtidas em 6.6.2, temos:

Quadro de Análise de variância:

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Trat.	3	24.793,75	8.264,58	2,02
Col. (aj)	4	37.830,96		
Linha	4	18.893,7		
Resíduo	8	32.624,54	4.078,06	
Total	19	114.142,95		

As estimativas das médais de tratamentos são:

$\hat{m}_1 = 492,6$

$\hat{m}_2 = 440,8$

$\hat{m}_4 = 413,4$

$\hat{m}_5 = 401$

Muito embora não seja recomendado o uso do teste de Tukey, pois não houve diferença significativa entre tratamentos pelo teste F, vamos exemplificar o seu uso.

$$\Delta = q \sqrt{1/2 \ \hat{V}(\hat{y})}$$

Então ao nível de 5% de probabilidade, temos:

$$\Delta = \frac{4,53 \ . \ s}{\sqrt{5}} \Longrightarrow \Delta = 129,37$$

Notamos que realmente nenhum contraste entre as médias de tratamentos supera $\Delta = 129,37$m logo não há diferença significativa entre os tratamentos.

6.7. Caso de uma linha perdida

Consideremos um delineamento em quadrado latino $r \times r$, onde ocorreu a perda completa de uma linha (suponhamos que seja a linha 1).

6.7.1. Cálculo das SQ $P_{(1)}$, SQ $P_{(2)}$ e SQ $P_{(3)}$

Considerando o modelo matemático:

$$y_{ij} = m + t_{k(i,j)} + \ell_i + c_j + e_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.7.1.a)$$

e admitindo as restrições $\Sigma\, \hat{t}_k = \Sigma\, \hat{\ell}_i = \Sigma \hat{c}_j = 0$, a solução do sistema de equações normais é:

$$\hat{m} = \frac{G}{r^2 - r}$$

$$\hat{\ell}_i = \frac{L_i}{r} - \hat{m} \qquad \text{para} \qquad i = 2, \ldots, r$$

$$\hat{t}_k = \frac{(r - 1)T_k + C_k}{r(r - 2)} - \frac{r(r - 1)\,\hat{m}}{r(r - 2)}$$

$$\hat{c}_j = \frac{T_j + (r - 1)\, C_j}{r(r - 2)} - \frac{r(r - 1)\,\hat{m}}{r(r - 2)}$$

Logo, podemos obter SQ $P_{(1)}$.

Considerando o modelo matemático

$$y_{ij} = m + \ell_i + c_j + e_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.7.1.b)$$

e admitindo as restrições $\Sigma\, \tilde{\ell}_i = \Sigma\, \tilde{c}_j = 0$, temos:

$$\tilde{m} = \frac{G}{r^2 - r}, \quad \tilde{\ell}_i = \frac{L_i}{r} - \hat{m} \quad \text{e} \quad \tilde{c}_j = \frac{C_j}{r - 1} - \tilde{m}.$$

Daí obtemos a SQ $P_{(2)}$.

Considerando o modelo matemático:

$$y_{ij} = m + \ell_i + e_{ij} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (6.7.1.c)$$

e admitindo a restrição $\Sigma\, \bar{\ell}_i = 0$, temos:

$$\bar{m} = \frac{G}{r^2 - r} \qquad e \qquad \bar{\ell}_i = \frac{L_i}{r} - \bar{m} \quad .$$

Daí obtemos SQ $P_{(3)}$.

6.7.2. Análise de variância

É dado que:

$$SQ\ T(aj) = (\hat{m} - \tilde{m})G + \Sigma(\hat{\ell}_i - \tilde{\ell}_i)L_i + \Sigma(\hat{c}_j - \tilde{c}_j)C_j + \Sigma \hat{t}_k\ T_k.$$

Como:

$$\hat{m} - \tilde{m} = 0$$

$$\hat{\ell}_i - \tilde{\ell}_i = 0$$

$$\hat{c}_j - \tilde{c}_j = \frac{C_j + (r - 1)T_j}{r(r - 1)(r - 2)} - \frac{r\ \hat{m}}{r(r-2)}$$

$$\hat{t}_j = \frac{(r - 1)T_j + C_j}{r(r - 2)} - \frac{r(r - 1)\hat{m}}{r(r - 2)} \quad , \qquad \text{então:}$$

$$SQ\ T(aj) = \Sigma \left[\frac{C_j+(r-1)T_j}{r(r-1)(r-2)} - \frac{r\ \hat{m}}{r(r-2)}\right]C_j + \Sigma\left[\frac{(r-1)T_j}{r(r-2)} - \frac{r(r-1)\ \hat{m}}{r(r-2)}\right]\ T_j.$$

Desenvolvendo e simplificando, obtemos:

$$SQ\ T(aj) = \frac{1}{r(r-1)(r-2)}\ \Sigma\left[C_j + (r - 1)T_j\right]^2 - \frac{1}{(r-1)(r-2)}\ G^2 \quad \dots\ (6.7.2.a)$$

Temos que:

$$SQ\ C(aj) = (\hat{m} - \bar{m})G + \Sigma(\tilde{\ell}_i - \bar{\ell}_i)L_i + \Sigma\ \tilde{c}_j C_j$$

Como, $\tilde{m} = \bar{m}$ e $\tilde{\ell}_i = \bar{\ell}_i$, temos:

$$SQ\ C(aj) = \Sigma\ \tilde{c}_j C_j \quad , \quad \text{ou}$$

$$SQ\ C(aj) = \frac{\Sigma\ C_j^2}{r - 1} - \frac{G^2}{r^2 - r}, \text{ isto é:}$$

SQ C(aj) = SQ C de modo usual.

Para o cálculo das SQ L, SQ total e SQ R, temos:

$$SQ\ L = \frac{\Sigma\ L_i^2}{r} - \frac{G^2}{r^2 - r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6.7.2.c)$$

$$SQ\ total = \Sigma\ y_{ij}^2 - C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6.7.2.d)$$

$$SQ\ R = SQ\ total - SQ\ T(aj) - SQ\ C - SQ\ L \ \ldots\ldots\ldots (6.7.2.e)$$

$$\text{onde } C = \frac{G^2}{r^2 - r}$$

Logo o esquema da análise de variância é:

Esquema .... (6.7.2.f)

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Trat. (aj)	$r - 1$	SQ T(aj)	SQ T(aj)/(r - 1)	QM T(aj)/QM R
Coluna	$r - 1$	de modo usual		
Linha	$r - 2$	de modo usual		
Resíduo	$(r - 1)(r - 3)$	por diferença	SQ R/[(r-1)(r-3)]	
Total	$r^2 - r - 1$	$\Sigma\ y_{ij}^2 - C$		

para $r \geqslant 4$

6.7.3. Variância de um contraste que envolve efeitos de tratamentos

Temos que:

$$\hat{t}_1 = \frac{r - 1}{r(r - 2)} T_1 + f_1 (C_1, G)$$

- -

$$\hat{t}_r = \frac{r - 1}{r(r - 2)} T_r + f_r (C_r, G)$$

Dado que:

$$\hat{V}(P' \hat{\beta}) = P' M_1^{-1} P s^2 \qquad , \qquad \text{então:}$$

$$\hat{V}(\hat{t}_k - \hat{t}_{k'}) = \left[\frac{r - 1}{r(r - 2)} + \frac{r - 1}{r(r - 2)} \right] s^2 \qquad , \text{ ou}$$

$$\hat{V}(\hat{t}_k - \hat{t}_{k'}) = \frac{2(r - 1)}{r(r - 2)} s^2$$

A estimativa da média de tratamento é dado por:

$$\hat{m}_k = \hat{t}_k + \hat{m} \qquad , \qquad \text{logo}$$

$$\hat{m}_k = \frac{(r - 1)T_k + C_k}{r(r - 2)} - \frac{G}{r (r - 1)(r - 2)}$$

Para a comparação das diversas médias de tratamentos, usamos os testes já mencionados.

Um exemplo:

Suponhamos que no experimento dado em 4 tenhamos perdido uma linha, como figura no quadro abaixo:

					2322	T_1 = 1939
x_3	x_5	x_1	x_2	x_4		T_2 = 1654
					2146	T_3 = 2300
					2294	T_4 = 1667
					2325	T_5 = 1527
1930	2062	1765	1760	1570	9087	

Usando a fórmula (6.7.2.a), temos:

$$SQ\ T(aj) = \frac{1}{60}\left[(1765 + 4\ .\ 1939)^2 + \ldots + (2062 + 4.1527)^2\right] - \frac{9087^2}{12}$$

$$SQ\ T(aj) = 71.499,33$$

Esquema de Análise de variância:

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Trat.(aj)	4	71.499,33	17.874,83	2,26
Coluna	4	34.938,8		
Linha	3	4.333,75		
Resíduo	8	63.264,67	7.908,08	
Total	19	174.036,55		

Embora não tenha ocorrido diferença significativa, pelo teste F, podemos fazer a comparação de médias pelo teste Tukey.

As estimativas das médias de tratamentos são:

$\hat{m}_3 = 742$

$\hat{m}_4 = 549,2$

$\hat{m}_5 = 544,66$

$\hat{m}_1 = 483,28$

$\hat{m}_2 = 406,95$

$$\Delta = 4,89 \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2.4}{5.3} s^2} \Longrightarrow \Delta = 224,55$$

Verificamos que a variedade 3 (Co 419) difere significativamente das variedades 2 (Co 421) e 1 (Co 290) ao nível de 5% de probabilidade.

6.8. Caso de uma coluna perdida

Consideremos um delineamento em quadrado latino r x r, onde foi perdida uma coluna (suponhamos a coluna 1).

Para a análise de variância, procedemos de modo idêntico feito em 6.7.

De modo que, deixaremos de desenvolver ítem por ítem, colocando apenas os resultados mais importantes.

$$SQ\ T(aj) = \frac{1}{r(r-1)(r-2)} \Sigma\left[L_i + (r-1)\ T_i \right]^2 - \frac{1}{(r-1)r-2)} G^2$$

Esquema da análise de variância:

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Trat. (aj)	$r - 1$	SQ T(aj)	SQ T(aj)/$(r - 1)$	QM T(aj)/QM R
Coluna	$r - 2$	de modo usual		
Linha	$r - 1$	de modo usual		
Resíduo	$(r - 1)(r - 3)$	por diferença	SQ R/$[(r - 1)(r - 3)]$	
Total	$r^2 - r - 1$	$\Sigma y_{ij}^2 - C$		

onde $C = \dfrac{G^2}{r^2 - r}$ e $i = 1, 2, \ldots, r$

$j = 2, 3, \ldots, r$

A variância de um contraste que envolve efeitos de tratamentos é a mesma obtida em 6.7.3.

A estimativa da média de um tratamento é dada pela fórmula:

$$\hat{m}_k = \frac{(r - 1)T_k + L_k}{r(r - 2)} - \frac{G}{r(r - 1)(r - 2)}$$

7. CONCLUSÕES

7.1. A regra prática, para se calcular a variância de um contraste entre efeitos de tratamentos com parcelas perdidas apresentada por *YATES*, para um delineamento em quadrado latino, se aproxima bastante da variância verdadeira.

7.2. Nos sistemas de equações cujas variáveis são as estimativas das parcelas perdidas, fica difícil explicitá-las, quando o número de variáveis for superior a 2 (dois). É mais viável, então, substituir os T_k, L_i, C_j e G que figuram em cada equação pelos seus valores, e resolver o sistema. Determinando desse modo os valores de x_1, x_2, ..., x_p sem se preocupar com a fórmula de cada x_i.

7.3. A fórmula obtida para a SQ T(aj) em todos os casos estudados, quando houve perda de parcelas (uma ou duas), é bem sugestiva e de fácil uso.

Por outro lado, podemos notar que em todos os casos a SQ T(aj), exceto no caso (6.5), tem a mesma expressão.

7.4. A fórmula obtida para o número U é simples e de fácil uso, de modo que calculada SQ T(x), podemos corrigi-la sem dificuldade alguma, aplicando assim o exato teste F.

7.5. O número U na forma matricial, possui a mesma expressão em todos os casos estudados, isto é:

$$U = \frac{1}{r^2}\left[(x_1 - y_1), (x_2 - y_2)\right] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - y_1) \\ (x_2 - y_2) \end{bmatrix},$$

onde a matriz $\left[a_{ij} \right]$ é formada pelos coeficientes do sistema, cujas variáveis são as estimativas y_1 e y_2.

7.6. As fórmulas obtidas para SQ C(aj) e U' seguem de modo análogo a simplicidade das fórmulas da SQ T(aj) e U.

7.7. A estimativa da variância de um contraste entre efeitos de tratamentos, obtidos através da fórmula: $\hat{V}(P'\hat{\beta}) = P'M_1^{-1}P\ s^2$, é bastante simples.

7.8. Nos exemplos dados notamos que quando houve perda de parcelas, o valor do F obtido não difere muito do F obtido quando consideramos as estimativas das parcelas perdidas.

7.9. A dimensão mínima para um quadrado latino onde foram perdidas duas parcelas, ou uma linha,ou uma coluna,ou um tratamento, é de 4 x 4, isto é , se for, 3 x 3, o número de graus de liberdade associado ao resíduo se anula, impossibilitando desse modo a análise de variância.

7.10. No caso de um tratamento perdido, podemos considerar o modelo matemático: $y_{ij} = \ell_i + c_j + e_{ij}$, e calcular a SQ C(aj) ou a SQ L(aj) pela teoria geral de blocos incompletos equilibrados. No caso de uma linha perdida, podemos obter a SQ T(aj) de maneira análoga.

8. SUMMARY

This study represnts a statistical analysis of an experiment that used the latin square technique (r x r), where losses occurred according to the following pattern:

a. one plot;

b. two plots receiving distinct treatments;

c. two plots receiving the same treatment;

d. on treatment, or one row, or one column.

We assume the following mathematival model:

$y_{ij} = m + t_{k(i,j)} + c_j + \ell_i + e_{ij}$, where

m is the average score;

$t_{k(i,j)}$ is the treatment effect k

c_j is ths columm effect j

ℓ_i is the row effect i

e_{ij} is the error effect with $N(0, \sigma^2)$

Parting from this design using the conditional residuals

model that is based on the least squares method, the following topics were considered:

1. Calculation of the sums of squares of the parameters: SS P($\hat{m}$, $\hat{t}_k$, $\hat{c}_j$, $\hat{\ell}_i$), SS P($\tilde{m}$, $\tilde{c}_j$, $\tilde{\ell}_i$) e SS P($\bar{m}$, $\bar{\ell}_i$) using estimates for the omitted plots.

2. Demonstration of the formula to obtain: SS Treatments (aj) and SS Column (aj).

3. Demonstration of the formula by calculating the variance of the difference between effects of two treatment, using the relation

$V(P'\hat{\beta}_1) = P' M_1^{-1} P \sigma^2$, where

$\hat{\beta}_1 = M^{-1} X_1^1 y$, is the vector column formed by the estimates of the mathematical model parameters, and

$P'\beta_1$ is the difference between treatment effects.

4. Analysis of variance when omitted plots are substituted by their estimates (x_1, x_2).

5. Demonstration of the formula using the correction factor (U) of the SS Treatment (x), where U = SS T(x) - SS T(aj).

The principal technical results obtained were:

studied cases	SS Treatment (aj)	Correction Factor (U)	Residual d.f.	for
a	$\hat{t}_1 y_1 + \Sigma \hat{t}_k T_k$	$\hat{t}_1(x_1 - y_1)$	$r^2 - 3r + 1$	$r \geq 3$
b	$\hat{t}_1 y_1 + \hat{t}_2 y_2 + \Sigma \hat{t}_k T_k$	$\hat{t}_1(x_1 - y_1) + \hat{t}_2(x_2 - y_2)$	$r^2 - 3r$	$r \geq 4$
c	$\hat{t}_1(y_1 + y_2) + \Sigma \hat{t}_k T_k$	$2\,\hat{t}_1(x_1 - y_2)$	$r^2 - 3r$	$r \geq 4$
d	-	-	$r^2 - 4r + 3$	$r \geq 4$

Where:

x_1 and x_2 are the estimates of the omitted plots when we consider the model $y_{ij} = m + t_k + c_j + \ell_i + e_{ij}$;

y_1 and y_2 are the estimates of the omitted plots when we consider the model $y_{ij} = m + c_j + \ell_i + e_{ij}$.

To verify the results, data from an experiment conducted by *PIMENTEL GOMES (1976)* were used.

Principal conclusions of this study were:

1. The formulas deduced from the calculation of the SS T(aj), SS C(aj), U and U', where U' = SS C(y) - SS C(aj), are very simple and easy to use.

2. The minimum dimension of a latin square design is 4 x 4 when a loss of either two plots, or one row or one column or one treatment occurs.

3. For cases where the loss of a treatment, or a row, or a column occurs, the general theory of incomplete balanced blocks can be used to obtain, the sum, of square of the causes of adjusted variations.

4. The number U in matrix form is:

$$U = \frac{1}{r^2}\left[(x_1-y_1)(x_2-y_2)\right] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - y_1) \\ (x_2 - y_2) \end{bmatrix}$$

where, the matrix $\left[a_{ij}\right]$ is formed by the system coefficients whose variations are estimated by y_1 and y_2.

9. BIBLIOGRAFIA

ALLAN, F.E. e J. WISHART, 1930. A Method of Estimating the Yield of a Missing Plot in Field Experimental Work. *Jour. Agr. SC. 20*: 399-406.

ANDERSON, R.L., 1946. Missing - Plot Techniques. *Biometrics, 2*: 41-46.

CALZADA BENZA, J., 1954. Experimentación Agricola. Ediciones Agro. Ganaderas S.A. 360 pp.

CAMPOS, H., 1964. Estudo sobre a Análise de Experimentos com Parcelas Perdidas. Piracicaba, ESALQ/USP, 84 p. (Tese de Doutoramento).

CHAKRABARTI, M.C., 1962. Mathematics of Design and Analysis of Experiments. Londres. Asia Publising House. 117 p.

COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1957. Experimental Design. 2a. ed. New York, John Wiley, 611 p.

KEMPTHORNE, O. 1952. The Design and Analysis of Experiments. New York. John Wiley. 631 pp.

KENDALL, M.A. 1948. The Advanced Theory of Statistics. Vol. II. 2a. ed. Londres. Charles Griffin. 521 pp.

PANSE, V.G. e P.V. SUKHATAME, 1957. Statistical Methods of Agricultural Workes. New Delhi. Indians Council of Agricultural Research. 361 pp.

PEARCE, S.C., 1953. Field Experimentacion With Fruit Trees and Other Perennial Plants. England Commonwealth Agricultural Bureaux. 131 pp.

PIMENTEL GOMES, F., 1976. Curso de Estatística Experimental. 6a. ed. Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz". Piracicaba, São Paulo. 430 pp. + 15 tabelas.

YATES, F., 1933. The Analysis of Replicated Experiments When the Fields Results ate Incomplete. *Emp. Jour. Exp. Agric. 1*: 129-142.

YATES, F., 1936. Incomplete Latin Squares. *Journ. Agri. Sci.* 26: 301-315.