MÉTODOS DE HENDERSON PARA COMPONENTES DA VARIÂNCIA DE DADOS NÃO BALANCEADOS

WALTER VERIANO VALÉRIO FILHO

Orientador: Prof. Dr. CÁSSIO ROBERTO DE MELO GODOI

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Julho - 1983

Aos meus pais e irmãos,

As minhas filhas,
Gabriela, Manoela e Mariana,

A minha amiga e companheira,
Preta,

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

- Ao Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi, Prof. Assistente do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pela eficiente forma de orientação.

- Ao Prof. Paulo Isamo Hiratsuka, do Departamento de Matemática da UNESP Ilha Solteira, pela valiosa ajuda.

- Aos Professores do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelos ensinamentos.

- Aos Funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela amizade e colaboração.

- Aos colegas do Curso de Estatística e Experimentação Agronômica, e da UNIMEP, pelo excelente convívio.

- A Deus, pela força e saúde.

ÍNDICE

MÉTODOS DE HENDERSON PARA COMPONENTES DA VARIÂNCIA DE DADOS NÃO BALANCEADOS

Autor: WALTER VERIANO VALÉRIO FILHO

Orientador: Cássio Roberto de Melo Godoi

RESUMO

O presente trabalho trata de algumas técnicas para a determinação de componentes da variância para dados não balanceados.

Foram estudados os "MÉTODOS DE HENDERSON" (1953), ou mais especificamente, o "MÉTODO DA ANÁLISE DA VARIÂNCIA" (MÉTODO 1 DE HENDERSON), o do "AJUSTE PARA O VÍCIO NOS MODELOS MISTOS" (MÉTODO 2 DE HENDERSON) e "O MÉTODO DE AJUSTAR CONSTANTES" (MÉTODO 3 DE HENDERSON).

O desenvolvimento teórico foi feito a partir de um modelo linear geral, sendo que os resultados obtidos são válidos para qualquer modelo linear de interesse.

A partir de conjuntos de dados hipotéticos fizemos adaptações e aplicações numéricas para alguns casos de modelos com dois e três fatores de classificação.

O MÉTODO 1 deve ser usado apenas para modelos aleatórios e é praticamente uma generalização do método usual da análise da variância de dados balanceados.

O MÉTODO 2 é usado para modelos mistos desde que não exista interações e qualquer tipo de hierarquização entre efeitos fixos e aleatórios. Quanto ao volume de cálculo é um pouco mais trabalhoso que o MÉTODO 1.

O MÉTODO 3 para modelos mistos e aleatórios, apesar de sua maior aplicabilidade, envolve na maioria das vezes matrizes de grandes dimensões.

HENDERSON'S METHODS FOR VARIANCE COMPONENTS OF UNBALANCED DATA

Author: WALTER VERIANO VALÉRIO FILHO

Adviser: Cássio Roberto de Melo Godoi

SUMMARY

The present work discusses about some tecniques for variance components estimation for unbalanced data.

Henderson's Methods (1953) were studied, more specificaly the "Analysis of variance Method" (first Henderson's Method), "Adjusting for bias in Mixed Models" (second Henderson's Method) and "Fitting Constants Method" (third Henderson's Method).

The theoretical development was done from the general linear model, and the results obtained were valid for any linear model.

Numerical illustration with two or three factors of classification were presented with all the details.

The first method should be used only for randon models and it is a generalization of the usual analysis of variance method of balanced data.

The second method is used for mixed models with no interaction including randon and fixed effects and any type of nesting including randon and fixed effects.

The third method, for mixed models and randon, despite of its good applicability, involves large matrices manipulations.

1. INTRODUÇÃO

Dados balanceados são aqueles onde cada uma das subclasses do modelo tem o mesmo número de observações.

Em contraste, dados não balanceados são aqueles onde o número de observações nas subclasses não são todos os mesmos, isto é, há número desigual de observações nas subclasses, incluindo os casos onde não existam observações em algumas delas.

A estimação dos componentes da variância para dados balanceados é baseada, quase que totalmente, no método da análise da variância, mais particularmente nas equações de quadrados médios com seus valores esperados. É um método bem definido, pois que, para cada modelo só existe uma análise da variância, e os sistemas de equações nos componentes são em geral, triangularizados.

Entretanto, para dados não balanceados existem vários métodos para a determinação dos componentes, e que envolvem muita algebra, o que, acarreta dificuldades nas suas aplicações práticas.

Visaremos ao estudo dos métodos 1, 2 e 3 de HENDERSON (1953) que podem ser tomados como base para qualquer estudo nesse campo.

Pretendemos, sempre que possível, fazer o desenvolvimento teórico numa forma matricial, partindo inicialmente de um modelo linear geral, escrito nessa forma.

O nosso propósito, com relação aos "Métodos de HENDERSON", é entende-los e melhor elucidá-los, para facilitar suas aplicações, especialmente em problemas da genética quantitativa, motivação maior do trabalho.

2. REVISÃO DE LITERATURA

O artigo de HENDERSON (1953) é básico em se tratando de estimação de componentes da variância para dados não balanceados.

Os métodos lá descritos têm sido referidos como Métodos 1, 2 e 3 de HENDERSON, e são apresentados simultâneamente com exemplificações numéricas.

Nesse artigo HENDERSON além da descrição dos métodos, faz indicações dos mesmos para o uso em modelos com vários critérios de classificação.

HARVILLE (1967) usando os Métodos 1 e 2 de HENDERSON estabelece condições necessárias e suficientes para a estimabilidade dos componentes da variância de um modelo com dois critérios de classificação com interação.

CUNNINGHAM e HENDERSON (1968) introduzem um procedimento iterativo para estimar efeitos fixos e os componentes da variância em modelos mistos.

Utilizou-se o MÉTODO 3 DE HENDERSON numa forma matricial e a técnica da máxima verossimilhança.

SEARLE (1968) revê e reformula os MÉTODOS DE HENDERSON (1953) em teoria matricial propondo algumas modificações. Apresenta também a metodologia de um quarto método, caracterizado como um caso particular do Método 2.

O mesmo autor ainda conclui nesse trabalho que o MÉTODO 1 é o de mais fácil aplicação, mas que não deve ser usado para modelos mistos. Observa também que o MÉTODO 2 é apenas uma forma simplificada do que ele chamou de MÉTODO 2 GENERALIZADO, e que só deve ser utilizado para modelos que não incluem interações entre efeitos fixos e aleatórios.

Posteriormente, apresenta o MÉTODO 3, indicando sua aplicabilidade principalmente para modelos mistos, e apresenta aplicações numéricas, esclarecendo convenientemente a metodologia usada.

HARVEY (1970) apresenta um procedimento para computar os componentes da variância, usando-se o MÉTODO 3 DE HENDERSON, em modelos mistos que não incluam interações entre efeitos aleatórios. O trabalho é ilustrado através de exemplos com modelos que contem dois e três critérios de classificação.

SEARLE (1971) organiza um trabalho que podemos dizer o mais completo sobre componentes da variância. O artigo foi dividido em três partes, a primeira relata a natureza dos modelos estatísticos, isto é, se fixos, aleatórios ou mistos. A seguir estabelece a metodologia geral para o cálculo dos componentes da variância para dados balanceados, com base no MÉTODO DA ANÁLISE DA VARIÂNCIA. Finalmente, para dados não balanceados, fornece um resumo de vários métodos para a determinação dos componentes, incluindo os três MÉTODOS DE HENDERSON.

HENDERSON *et alii* (1974) provam a invariância do MÉTODO 2 DE HENDERSON, e apresentam um procedimento de cálculo, para uma classe de modelos mistos onde não existam interações entre efeitos fixos e aleatórios.

Nesse trabalho os autores utilizam bastante teoria de algebra vetorial.

Devemos ainda ressaltar que existem muitos trabalhos sobre a estimação de componentes da variância para dados balanceados e não balanceados, que deixamos de citar,pois, o nosso objetivo foi de apresentar especificamente os aspectos teóricos sobre os métodos de HENDERSON (1953).

3. METODOLOGIA

3.1. Modelo linear geral

Todas as correntes de métodos disponíveis para a estimação de componentes da variância para dados não balanceados usam, em um caminho ou outro, formas quadráticas das observações. Antes de descrever os métodos, faremos um resumo das propriedades das formas quadráticas das observações, vindas de um modelo linear geral. Esse é dado por:

$$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e} \qquad (1)$$

onde:

$\underset{\sim}{y}$ é um vetor de N observações de dimensão (N x 1);

X e a matriz de incidência de dimensões (N x K);

$\underset{\sim}{\beta}$ é o vetor de k parâmetros (incluindo ambos os efeitos fixos e aleatórios) de dimensão (k x 1) e;

$\underset{\sim}{e}$ é o vetor de erros aleatórios, com dimensão (N x 1).

O vetor de médias e a matriz de variâncias e covariâncias são anotados, respectivamente, por:

$$\underset{\sim}{\mu} = E(\underset{\sim}{y}) \quad e \quad V = Cov(\underset{\sim}{y}) = E\left[(\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\mu})'\right]$$

3.1.1. Valor esperado de uma forma quadrática

O valor esperado de uma forma quadrática $\underset{\sim}{y}' Q \underset{\sim}{y}$ do modelo dado em (1) é dado por:

$$E(\underset{\sim}{y}' Q \underset{\sim}{y}) = tr(QV) + E(\underset{\sim}{y}') Q E(\underset{\sim}{y})$$

ou (2)

$$E(\underset{\sim}{y}' Q \underset{\sim}{y}) = tr(QV) + \underset{\sim}{\mu}' Q \underset{\sim}{\mu}$$

Onde "tr" representa a operação traço sobre a matriz, que é a soma dos seus elementos diagonais.

Prova:

Desde que uma forma quadrática é um escalar, e pela propriedade circular, temos

$$\underset{\sim}{y}'\, Q\, \underset{\sim}{y} = tr\, (\underset{\sim}{y}'\, Q\, \underset{\sim}{y})$$

$$\underset{\sim}{y}'\, Q\, \underset{\sim}{y} = tr\, (Q\, \underset{\sim}{y}\, \underset{\sim}{y}')$$

Então,

$$E(\underset{\sim}{y}'\, Q\, \underset{\sim}{y}) = E\, [tr\, (Q\, \underset{\sim}{y}\, \underset{\sim}{y}')]$$

$$E(\underset{\sim}{y}'\, Q\, \underset{\sim}{y}) = tr\, [E(Q\, \underset{\sim}{y}\, \underset{\sim}{y}')]$$

$$E(\underset{\sim}{y}'\, Q\, \underset{\sim}{y}) = tr\, [Q\, E(\underset{\sim}{y}\, \underset{\sim}{y}')]$$

Mas,

$$\underset{\sim}{y}\underset{\sim}{y}' = \begin{bmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 & \cdots & y_1 y_N \\ y_2 y_2 & y_2^2 & \cdots & y_2 y_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_N y_1 & y_N y_2 & \cdots & y_N^2 \end{bmatrix}$$

$$E(\underset{\sim}{y}\, \underset{\sim}{y}') = \begin{bmatrix} E(y_1^2) & E(y_1 y_2) & \cdots & E(y_1 y_N) \\ E(y_2 y_1) & E(y_2^2) & \cdots & E(y_2 y_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(y_N y_1) & E(y_N y_2) & \cdots & E(y_N^2) \end{bmatrix}$$

Desde que $E(y_i) = \mu_i$ e $V(y_i) = \sigma_i^2$ para $i = 1, 2, \ldots, N$, teremos:

$$\sigma_i^2 = E(y_i^2) - \mu_i^2 \quad \text{ou} \quad E(y_i^2) = \sigma_i^2 + \mu_i^2 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

$$Cov\ (y_i, y_j) = E(y_i y_j) - \mu_i\ \mu_j \qquad \text{ou}$$

$$E(y_i \cdot y_j) = Cov\ (y_i, y_j) + \mu_i\ \mu_j \qquad \text{para} \quad i, j = 1, 2, \ldots, N$$

onde $Cov\ (y_i, y_j)$ é a covariância entre y_i e y_j, então,

$$E\ (\underset{\sim}{y}\ \underset{\sim}{y}') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & Cov(y_1,y_2) & \ldots & Cov(y_1,y_N) \\ Cov(y_2,y_1) & \sigma_2^2 & \ldots & Cov(y_2,y_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(y_N,y_1) & Cov(y_N,y_1) & \ldots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1^2 & \mu_1\mu_2 & \ldots\mu_1\mu_N \\ \mu_2\mu_1 & \mu_2^2 & \ldots\mu_2\mu_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_N\mu_1 & \mu_N\mu_2 & \ldots & \mu_N \end{bmatrix}$$

logo,

$$E(\underset{\sim}{y}\ \underset{\sim}{y}') = V + \underset{\sim}{\mu}\ \underset{\sim}{\mu}'$$

portanto,

$$\begin{aligned} E\ (\underset{\sim}{y}'\ Q\ \underset{\sim}{y}) &= tr[Q(V + \underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{\mu}')] \\ &= tr[QV + Q\ \underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{\mu}'] \\ &= tr\ QV + tr\ Q\underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{\mu}' \end{aligned}$$

$$E(\underset{\sim}{y}'\, Q\, \underset{\sim}{y}) = tr\, QV + tr\, \underset{\sim}{\mu}'\, Q\, \underset{\sim}{\mu}$$
$$= tr\, QV + \underset{\sim}{\mu}'\, Q\, \underset{\sim}{\mu}\ ,$$

como queriamos demonstrar.

O resultado (2) é a base de muitos métodos para se estimar componentes da variância para dados não balanceados, particularmente para os métodos de HENDERSON.

3.1.2. Modelo deefeitos fixos

Num modelo de efeitos fixos, $\underset{\sim}{\beta}$ dado em (1) incorpora todos os efeitos fixos e só existe o vetor $\underset{\sim}{e}$ como termo aletório.

As seguintes suposições são necessárias:

i. $E\,(\underset{\sim}{e}) = \underset{\sim}{0}$ (3)

ii. $Cov\,(e_i, e_j) = 0$ se $i \neq j$ e

$Cov\,(e_i, e_i) = V(e_i) = \sigma_e^2$; $i = 1, \ldots, N$ (4)

Como consequência de (3) e (4), temos:

$$Cov\,(\underset{\sim}{e}) = E\{[\underset{\sim}{e} - E(\underset{\sim}{e})]\ [\underset{\sim}{e} - E(\underset{\sim}{e})]'\}$$

$$Cov\,(\underset{\sim}{e}) = E(\underset{\sim}{e}\ \underset{\sim}{e}')$$

$$\operatorname{Cov}(\underset{\sim}{e}) = \begin{bmatrix} E(e_1^2) & E(e_1 e_2) & \cdots & E(e_1 e_N) \\ E(e_2 e_1) & E(e_2^2) & \cdots & E(e_2 e_N) \\ \vdots & & & \\ E(e_N e_1) & E(e_N e_2) & \cdots & E(e_N^2) \end{bmatrix} = \sigma_e^2 \, I_N$$

Seja $\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e}$ um modelo de efeitos fixos, então:

$$E(\underset{\sim}{y}) = E(X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e})$$

$$= E(X\underset{\sim}{\beta}) + E(\underset{\sim}{e})$$

$$E(\underset{\sim}{y}) = X\underset{\sim}{\beta}$$

e

$$V = \operatorname{Cov}(\underset{\sim}{y}) = \operatorname{Cov}(X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e})$$

$$= \operatorname{Cov}(\underset{\sim}{e})$$

$$\operatorname{Cov}(\underset{\sim}{y}) = \sigma_e^2 \, I_N = V$$

Então de (2) teremos:

$$E(\underset{\sim}{y}' \, Q \, \underset{\sim}{y}) = tr\,(Q \, \sigma_e^2 \, I_N) + \underset{\sim}{\beta}' \, X' \, Q \, X \, \underset{\sim}{\beta}$$

$$E(\underset{\sim}{y}' \, Q \, \underset{\sim}{y}) = \sigma_e^2 \, tr\,(Q) + \underset{\sim}{\beta}' \, X' \, Q \, X \, \underset{\sim}{\beta} \qquad (5)$$

3.1.3. Modelo misto

Num modelo misto $\underset{\sim}{\beta}$ inclui efeitos fixos e alea_
tórios.

Podemos particionar o vetor $\underset{\sim}{\beta}'$ em:

$\underset{\sim}{\beta}' = (\underset{\sim}{\beta}_1' \; \underset{\sim}{\beta}_2' \; \ldots \; \underset{\sim}{\beta}_K')$, onde, digamos,

$\underset{\sim}{\beta}_1$, contém todos os efeitos fixos do modelo (incluindo geralmente a média geral), e os outros $\underset{\sim}{\beta}$'s cada qual representa um conjunto de efeitos aleatórios.

Particionando a matriz X conforme $\underset{\sim}{\beta}$ teremos:

$X = (X_1 \; X_2 \; \ldots \; X_K)$

Então o modelo dado em (1) torna-se:

$\underset{\sim}{y} = X_1\underset{\sim}{\beta}_1 + X_2\underset{\sim}{\beta}_2 + X_3\underset{\sim}{\beta}_3 + \ldots + X_K\underset{\sim}{\beta}_K + \underset{\sim}{e}$

então:

$E(\underset{\sim}{y}) = X_1\underset{\sim}{\beta}_1 + X_2E(\underset{\sim}{\beta}_2) + X_3E(\underset{\sim}{\beta}_3) + \ldots + X_KE(\underset{\sim}{\beta}_K) + \underset{\sim}{0}$

se usarmos (3).

Com a suposição de que:

$E(\underset{\sim}{\beta}_\theta) = \underset{\sim}{0}$ para $\theta = 2, 3, \ldots, K$ (6)

teremos:

$$E(\underset{\sim}{y}) = X_1\underset{\sim}{\beta}_1$$

e

$$V = Cov(\underset{\sim}{y}) = Cov(X_2\underset{\sim}{\beta}_2 + X_3\underset{\sim}{\beta}_3 + \ldots + X_K\underset{\sim}{\beta}_K + \underset{\sim}{e})$$

$$V = Cov(\underset{\sim}{y}) = Cov(X_2\underset{\sim}{\beta}_2) + Cov(X_3\underset{\sim}{\beta}_3) + \ldots + Cov(X_K\underset{\sim}{\beta}_K) + Cov(\underset{\sim}{e})$$

$$V = Cov(\underset{\sim}{y}) = X_2\ Cov(\underset{\sim}{\beta}_2)X_2' + X_3\ Cov(\underset{\sim}{\beta}_3)X_3' + \ldots + X_K\ Cov(\underset{\sim}{\beta}_K)X_K' + \sigma_e^2\ I_N$$

se assumirmos (3) e (4) e que:

Cada conjunto de efeitos aleatórios tem covariância zero com qualquer outro conjunto de efeitos aleatórios, incluindo-se o termo $\underset{\sim}{e}$. (7)

Se ainda fizermos a pressuposição de que os efeitos aleatórios dentro de cada fator não são correlacionados e tem a mesma variância σ_θ^2; $\theta = 2, 3, \ldots, K$, isto é:

$$Cov\ (\underset{\sim}{\beta}_\theta) = \sigma_\theta^2\ I_{N_\theta} \qquad \text{para } \theta = 2, 3, \ldots, K \qquad (8)$$

onde N_θ é número de níveis para o fator θ, teremos:

$$V = Cov(\underset{\sim}{y}) = X_2\sigma_2^2X_2' + X_3\sigma_3^2X_3' + \ldots + X_K\sigma_K^2X_K' + \sigma_e^2\ I_N$$

Então de (2) teremos:

$$E(\underset{\sim}{y}'\ Q\ \underset{\sim}{y}) = \underset{\sim}{\beta}_1'X_1'QX_1\underset{\sim}{\beta}_1 + tr(Q \sum_{\theta=2}^{k} X_\theta\sigma_\theta^2X_\theta') + tr\ (Q\sigma_e^2I_N)$$

$$E(\underset{\sim}{y}'\ Q\ \underset{\sim}{y}) = \underset{\sim}{\beta}_1'X_1'QX_1\underset{\sim}{\beta}_1 + \sum_{\theta=2}^{K} \sigma_\theta^2\ tr(QX_\theta X_\theta') + \sigma_e^2\ tr\ (Q) \qquad (9)$$

3.1.4. Modelo aleatório

No modelo aleatório todos os efeitos são tomados como aleatórios, exceto a média geral μ. A expressão (9) desenvolvida para modelos mistos pode portanto ser usada para modelos aleatórios, com as substituições do vetor $\underset{\sim}{\beta}_1$ pelo escalar μ (média geral) e da matriz X_1 por $\underset{\sim}{1}$ (vetor de uns).

Podemos então reescrever o modelo dado em (1) por:

$$\underset{\sim}{y} = \mu\underset{\sim}{1} + X_1\underset{\sim}{\beta}_1 + X_2\underset{\sim}{\beta}_2 + \ldots + X_K\underset{\sim}{\beta}_K + \underset{\sim}{e}$$

aplicando o resultado (9), teremos:

$$E(y'Qy) = \mu 1'Q1\mu + \sum_{\theta=1}^{k} \sigma_\theta^2 \text{ tr } (QX_\theta X_\theta') + \sigma_e^2 \text{ tr } (Q) \qquad (10)$$

3.1.5. Redução na soma de quadrados total

Consideremos fixo o modelo dado em (1) e calculemos a redução na soma de quadrados total, devido ao ajuste do mesmo.

Apliquemos o método dos mínimos quadrados para a obtenção de uma solução geral, então:

$$\underset{\sim}{e}'\underset{\sim}{e} = [\underset{\sim}{y} - E(\underset{\sim}{y})]'[\underset{\sim}{y} - E(\underset{\sim}{y})]$$

$$\underset{\sim}{e}'\underset{\sim}{e} = [\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta}]'[\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta}]$$

$$\underset{\sim}{e}'\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{y}'X\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}'X'\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{\beta}'X'X\underset{\sim}{\beta}$$

$$= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\beta}'X'\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\beta}'X'\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{\beta}'X'X\underset{\sim}{\beta}$$

$$\underset{\sim}{e}'\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - 2\,\underset{\sim}{\beta}'X'\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{\beta}'X'X\underset{\sim}{\beta}$$

Calculando a derivada parcial em relação a $\underset{\sim}{\beta}$, teremos:

$$\frac{\partial(\underset{\sim}{e}'\underset{\sim}{e})}{\partial\underset{\sim}{\beta}} = 0 - 2\,X'\underset{\sim}{y} + X'X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\beta}'X'X$$

$$\frac{\partial(\underset{\sim}{e}'\underset{\sim}{e})}{\partial\underset{\sim}{\beta}} = -2\,X'\underset{\sim}{y} + 2\,X'X\underset{\sim}{\beta}$$

Fazendo $\dfrac{\partial(\underset{\sim}{e}'\underset{\sim}{e})}{\partial\underset{\sim}{\beta}} = 0$, obteremos:

$$X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} = X'\underset{\sim}{y} \qquad (11)$$

Uma solução geral para (11) pode ser dada por:

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-}\,X'\underset{\sim}{y} \qquad (12),$$

onde $(X'X)^{-}$ é uma matriz inversa generalizada de $(X'X)$.

Usaremos o conceito de que a matriz $(X'X)^{-}$ é uma inversa generalizada de $(X'X)$ se:

$$(X'X)(X'X)^{-}(X'X) = X'X \qquad (13):$$

Seja o vetor de desvios entre os valores observados e os estimados dado por:

$$\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{y}} = \underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}$$

$$= \underset{\sim}{y} - X(X'X)^{-}X'\underset{\sim}{y}$$

$$\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{y}} = (I - X(X'X)^{-}X')\underset{\sim}{y}$$

A soma de quadrados dos desvios entre os valores observados e os estimados, conhecida também como resíduo ou soma de quadrados dos erros é dada por:

$$SSE = (\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{y}})' \; (\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{y}}) \qquad (14)$$

$$SSE = [(I - X(X'X)^{-}X')\underset{\sim}{y}]'[(I - X(X'X)^{-}X')\underset{\sim}{y}]$$

$$SSE = \underset{\sim}{y}'(I - X(X'X)^{-}X')'(I - X(X'X)^{-}X')\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}'Q\underset{\sim}{y}$$

Verifiquemos que SSE é uma forma quadrática das observações.

Façamos $(X'X)^{-} = G$

De (13) temos que:

$$X'X \; G \; X'X = X'X \qquad (14\text{-}A)$$

logo

$X'X\ G'\ X'X = X'X$, isto é, G' é também uma inversa generalizada de $X'X$.

Dos resultados anteriores, podemos mostrar que:

$X'X\ G\ X' = X'$ ou $X\ G'\ X'X = X$

Para a demonstração provemos inicialmente o seguinte resultado:

$$P\ X'X = Q\ X'X \Longrightarrow PX' = QX' \qquad (14\text{-}A.1)$$

Prova:

$$(PX'X - QX'X)\ (P-Q)' = \phi$$

$$(PX' - QX')\ (PX' - QX')' = \phi$$

$$W\ W' = \phi \Longrightarrow W = \phi$$

logo $(PX' - QX') = \phi \Longrightarrow PX' = QX'$

como queriamos demonstrar.

Em consequência em 14-A, temos:

$$X'X\ G\ X' = X'$$

ou (14-B)

$$X\ G'\ X'X = X$$

Como decorrencia, temos:

$$XGX'\,XGX' = XGX' \qquad (14\text{-}C)$$

$$(I - XGX')\,(I - XGX') = I - XGX' - XGX' + XGX'\,XGX'$$

$$(I - XGX')\,(I - XGX') = (I - XGX') \qquad (14\text{-}D)$$

Seja F uma inversa generalizada de X'X distinta de G, então:

$$XGX' = XFX' \qquad (14\text{-}E)$$

Prova:

De 14-B:

$$XG'X'X = X$$

$$XF'X'X = X$$

logo

$$XG'X'X = XF'X'X$$

de (14-A.1)

$$XG'X' = XF'X'$$

ou

$$XGX' = XFX'$$

como queriamos demonstrar.

Em

$$SSE = \underset{\sim}{y}' (I - XGX')' (I - XGX')\underset{\sim}{y}$$

$$= \underset{\sim}{y}' (I - XG'X') (I - XGX') \underset{\sim}{y}$$

$$= \underset{\sim}{y}' (I - XGX') (I - XGX') \underset{\sim}{y} \qquad \text{por } (14\text{-E}).$$

$$SSE = \underset{\sim}{y}' (I - XGX') \underset{\sim}{y} \qquad \text{por } (14\text{-D})$$

$$SSE = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{y}' XGX' \underset{\sim}{y} \qquad (15)$$

Em (15):

$\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y}$ é a soma de quadrados total.

$\underset{\sim}{y}' XGX' \underset{\sim}{y}$ é a redução na soma de quadratos total devido ao ajuste do modelo: $\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e}$

Usaremos a notação $R(\underset{\sim}{\beta})$ para designar essa redução na soma de quadrados total, isto é:

$$R(\underset{\sim}{\beta}) = \underset{\sim}{y}' XGX' \underset{\sim}{y}$$

ou

$$R(\underset{\sim}{\beta}) = \underset{\sim}{y}' X(X'X)^{-} X'\underset{\sim}{y} \qquad (16)$$

ou de (12)

$$R(\underset{\sim}{\beta}) = \underset{\sim}{y}' X\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y}$$

3.2. "Método da Análise da Variância" para se estimar a variância residual σ_e^2, num modelo fixo

De (15) temos que:

$SSE = \underset{\sim}{y}'I\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{y}'\ XGX'\ \underset{\sim}{y}$ logo,

$E(SSE) = E(\underset{\sim}{y}'I\underset{\sim}{y}) - E(\underset{\sim}{y}'\ XGX'\ \underset{\sim}{y})$

De (5) temos:

$E(\underset{\sim}{y}'I\underset{\sim}{y}) = \sigma_e^2\ tr(I) + \underset{\sim}{\beta}'\ X'IX\ \underset{\sim}{\beta}$

$E(\underset{\sim}{y}'I\underset{\sim}{y}) = N\ \sigma_e^2 + \underset{\sim}{\beta}'\ X'X\ \underset{\sim}{\beta}$

$E(\underset{\sim}{y}'XGX'\underset{\sim}{y}) = \sigma_e^2\ tr(XGX') + \underset{\sim}{\beta}'X'XGX'X\underset{\sim}{\beta}$

$E(\underset{\sim}{y}'XGX'\underset{\sim}{y}) = \sigma_e^2\ tr(XGX') + \underset{\sim}{\beta}'X'X\underset{\sim}{\beta}$ por 14-A

Notemos que: $tr(XGX') = tr(GX'X)$

Mas por (14-A)

$GX'XGX'X = GX'X$ isto é, $GX'X$ é idempotente, logo demonstra-se que:

$tr\ (XGX') = r(GX'X)$, onde "r" indica o posto da matriz.

Verifiquemos que pela regra do produto do posto de uma matriz, temos:

$$r(GX'X) \leqq r(X'X)$$

e por (14-A):

$$r(GX'X) \geqq r(X'X) \qquad \text{então}$$

$$r(GX'X) = r(X'X)$$

Aplicando-se a mesma regra do produto do posto de uma matriz com (14-B), podemos ainda mostrar que:

$$r(X'X) = r(X), \qquad \text{logo}$$

$$E(\underset{\sim}{y}'XGX'\underset{\sim}{y}) = \sigma_e^2\ r(X) + \underset{\sim}{\beta}'X'X\underset{\sim}{\beta}$$

portanto

$$E(SSE) = [N - r(X)]\ \sigma_e^2$$

O método da análise da variância, consiste da seguinte igualdade:

$$\hat{E}(SSE) = SSE, \qquad \text{isto é:}$$

$$[N - r(X)]\ \hat{\sigma}_e^2 = SSE$$

ou

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{SSE}{N - r(X)} \qquad (17)$$

3.3. "Método 1 de Henderson" para modelos aleatórios ou "Método da Análise da Variância"

Resumidamente esse método baseia-se no cálculo das somas de quadrados não corrigidas para em seguida equacioná-las a seus valores esperados, como na análise da variância para dados balanceados. O método aplica-se a modelos aleatórios.

O modelo dado em (1), como já foi visto, pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{y} = \mu \underset{\sim}{1} + X_1 \underset{\sim}{\beta}_1 + X_2 \underset{\sim}{\beta}_2 + \ldots + X_K \underset{\sim}{\beta}_K + \underset{\sim}{e} \qquad (18)$$

São mantidas nesse método as suposições: (3), (4), (6), (7) e (8).

3.3.1. Somas de quadrados não corrigidas

Com relação ao modelo dado em (18), as somas de quadrados não corrigidas para cada fator θ: $\theta = 1, 2, \ldots,$ $\ldots, K$ são calculadas como segue:

$$T_\theta = \sum_{i=1}^{N_\theta} \frac{T_{\theta_i}^2}{N_{\theta_i}} \qquad (19)$$

onde,

T_{θ_i} é o total das observações no i-ésimo nível do fator θ.

N_{θ_i} é o número de observações no i-ésimo nível do fator θ.

N_θ é o número de níveis do fator θ.

A expressão (19) equivale ao total da redução na soma de quadrados devido ao ajuste do modelo $\underset{\sim}{y} = X_\theta \underset{\sim}{\beta}_\theta + \underset{\sim}{e}$, isto é:

$$T_\theta = \sum_{i=1}^{N_\theta} \frac{T_{\theta_i}^2}{N_{\theta_i}} = \underset{\sim}{y}' \; X_\theta (X_\theta' X_\theta)^- X_\theta' \; \underset{\sim}{y} = R(\underset{\sim}{\beta}_\theta) \qquad (20)$$

Este é o caso com tôdas as somas de quadrados não corrigidas usadas no *"MÉTODO 1"*, elas correspondem a reduções na soma de quadrados total devido ao ajuste de μ, e cada um dos β(s) em turno, ignorando todos os outros.

Portanto, em termos do modelo dado em (18) teremos os seguintes somas de quadrados não corrigidas.

$$T\mu = R(\mu) = \underset{\sim}{y}' \underset{\sim}{1} (\underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{1})^- \underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}' A\mu \underset{\sim}{y}$$

$$T_1 = R(\underset{\sim}{\beta}_1) = \underset{\sim}{y}' X_1 (X_1' X_1)^- X_1' \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}' A_1 \underset{\sim}{y}$$

$$T_2 = R(\underset{\sim}{\beta}_2) = \underset{\sim}{y}' X_2 (X_2' X_2)^- X_2' \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}' A_2 \underset{\sim}{y} \qquad (21)$$

$$\vdots$$

$\vdots$

$$T_K = R(\underset{\sim}{\beta}_K) = \underset{\sim}{y}'X_K(X_K'X_K)^- X_K'\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}'A_K\underset{\sim}{y}$$

$$T_o = R(0) = \underset{\sim}{y}'I\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}'I\underset{\sim}{y}$$

Calculemos: $E(T_\mu)$, $E(T_1)$, $E(T_2)$, ... $E(T_K)$, $E(T_o)$

De (10), teremos, sucessivamente:

$$E(T\mu) = E(\underset{\sim}{y}'A\mu\underset{\sim}{y}) = \mu\underset{\sim}{1}'A\mu\underset{\sim}{1}\mu + \sum_{\theta=1}^{K} \sigma_\theta^2 \; tr(A\mu X_\theta X_\theta') + \sigma_e^2 \; tr\;(A\mu)$$

mas, $\underset{\sim}{1}'A\mu\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{1}'\underset{\sim}{1}(\underset{\sim}{1}'\underset{\sim}{1})^-\underset{\sim}{1}'\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{1}'\underset{\sim}{1} = N$ por (14-B)

logo,

$$E(T\mu) = N\,\sigma^2 + \sum_{\theta=1}^{K} \sigma_\theta^2\;(A\mu X_\theta X_\theta') + tr(A\mu)\;\sigma_e^2$$

$$E(T_1) = E(\underset{\sim}{y}'A_1\underset{\sim}{y}) = \mu\underset{\sim}{1}'A_1\underset{\sim}{1}\mu + \sum_{\theta=1}^{K} \sigma_\theta^2 \; tr(A_1X_\theta X_\theta') + \sigma_e^2 \; tr\;(A_1)$$

mas $\underset{\sim}{1}'A_1\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{1}'X_1(X_1'X_1)^-X_1'\;\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{1}'\underset{\sim}{1} = N$ pois a soma de cada coluna de A_1 é igual a 1, logo:

$$E(T_1) = N\mu^2 + \sum_{\theta=1}^{K} \sigma_\theta^2 \; tr\;(A_1X_\theta X_\theta') + \sigma_e^2 \; tr\;(A_1)$$

e assim sucessivamente, obteremos:

$$E(T_K) = N\mu^2 + \sum_{\theta=1}^{K} \sigma_\theta^2 \; tr\;(A_KX_\theta X_\theta') + \sigma_e^2 \; tr(A_K)$$

e

$$E(T_o) = E(\underset{\sim}{y}'I\underset{\sim}{y}) = \mu\underset{\sim}{1}'I\underset{\sim}{1}\mu + \sum_{\theta=1}^{K} \sigma_\theta^2 \; tr(IX_\theta X_\theta') + \sigma_e^2 \; tr(I)$$

ou

$$E(T_o) = N\mu^2 + \sum_{\theta=1}^{K} \sigma_\theta^2 \; tr(X_\theta X_\theta') + N\sigma_e^2$$

Façamos as seguintes igualdades:

$$\hat{E}(T\mu) = T\mu$$

$$\hat{E}(T_1) = T_1$$

$$\hat{E}(T_2) = T_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\hat{E}(T_K) = T_K$$

$$\hat{E}(T_0) = T_0$$

Substituindo-se teremos o sistema (22):

$$\begin{array}{l}
N\hat{\mu}^2 + \hat{\sigma}_1^2 \; tr(A\mu X_1 X_1') + \hat{\sigma}_2^2 \; tr(A\mu X_2 X_2') + \ldots + \hat{\sigma}_K^2 \; tr(A\mu X_K X_K') + \hat{\sigma}_e^2 \; tr(A\mu) = \underset{\sim}{y}' A\mu \underset{\sim}{y} \\
N\hat{\mu}^2 + \hat{\sigma}_1^2 \; tr(A_1 X_1 X_1') + \hat{\sigma}_2^2 \; tr(A_1 X_2 X_2') + \ldots + \hat{\sigma}_K^2 \; tr(A_1 X_K X_K') + \hat{\sigma}_e^2 \; tr(A_1) = \underset{\sim}{y}' A_1 \underset{\sim}{y} \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\
N\hat{\mu}^2 + \hat{\sigma}_1^2 \; tr(A_K X_1 X_1') + \hat{\sigma}_2^2 \; tr(A_K X_2 X_2') + \ldots + \hat{\sigma}_K^2 \; tr(A_K X_K X_K') + \hat{\sigma}_e^2 \; tr(A_K) = \underset{\sim}{y}' A_K \underset{\sim}{y} \\
N\hat{\mu}^2 + \hat{\sigma}_1^2 \; tr(X_1 X_1') + \hat{\sigma}_2^2 \; tr(X_2 X_2') + \ldots + \hat{\sigma}_K^2 \; tr\,(X_K X_K') + \hat{\sigma}_e^2 \; tr(\underset{\sim}{I}) = \underset{\sim}{y}' \underset{\sim}{I} \underset{\sim}{y}
\end{array}$$

Analisemos algumas características deste sistema.

As matrizes $X_\theta X_\theta'$ para $\theta = 1, 2, \ldots, K$ serão compostas por uns e zeros, pois as linhas de X_θ só tem um número um, sendo os restantes nulos.

Os coeficientes do sistema (22), serão:

$$
\begin{array}{llll}
tr\ A_\mu X_1 X_1', & tr\ A_\mu X_2 X_2', & \ldots\ , tr\ A_\mu X_K X_K', & tr\ A_\mu \\
tr\ A_1 X_1 X_1', & tr\ A_1 X_2 X_2', & \ldots\ , tr\ A_1 K_K X_K', & tr\ A_1 \\
tr\ A_2 X_1 X_1', & tr\ A_2 X_2 X_2', & \ldots\ , tr\ A_2 X_K X_K', & tr\ A_2 \\
\vdots & & & \\
tr\ A_K X_1 X_1', & tr\ A_K X_2 X_2', & \ldots\ , tr\ A_K X_K X_K', & tr\ A_K \\
tr\ X_1 X_1' \ , & tr\ X_2 X_2' \ , & \ldots\ , tr\ X_K X_K' \ , & tr\ I
\end{array}
$$

Genericamente, $tr\ A_j X_\theta X_\theta'$ para $j = 1, 2, \ldots, K$ e $\theta = 1,2,\ldots, K$ é a soma dos produtos dos elementos respetivos das matrizes A_j e $X_\theta X_\theta'$, mas desde que $X_\theta X_\theta'$ só é composta por uns e zeros, então $tr\ A_j X_\theta X_\theta'$ é a soma dos elementos de A_j correspondentes aos uns de $X_\theta X_\theta'$.

Segundo uma ordenação conveniente dos elementos do vetor $\underset{\sim}{y}$, podemos obter as matrizes: $A_1, A_2, \ldots, A_K$ através da expressão:

$$A_\theta = \sum_{\theta=1}^{N_\theta}{}^{\oplus} \frac{1}{N_{\theta_i}} J_{N_{\theta_i}} \quad \text{para } \theta = 1, 2, 3, \ldots, K \qquad (23)$$

onde:

A_0 é a soma direta de matrizes $\frac{1}{N_{\theta_i}} J_{N_{\theta_i}}$.

Com $J_{N_{\theta_i}}$ sendo uma matriz quadrada da ordem N_{θ_i} com todos os elementos unitários, e como já foi visto em (3.3.1), N_{θ_i} é o número de observações no i-ésimo nível do fator θ. A soma direta de matrizes A_1, A_2, ..., A_n é definida

$$\text{por } \sum_{i=1}^{n} {}^{\oplus} A_i = \begin{bmatrix} A_1 & \phi & \cdots & \phi \\ \phi & A_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi & \phi & & A_n \end{bmatrix}$$

A ordenação dos elementos em $\underset{\sim}{y}$, o qual nos referimos, é feita de tal maneira que para a obtenção de cada A_θ, $\theta = 1, 2, \ldots, K$, colocamos primeiramente em $\underset{\sim}{y}$ os elementos referentes ao fator correspondente θ.

A matriz $A_\mu = \underset{\sim}{1}(\underset{\sim}{1}'\underset{\sim}{1})^{-}\underset{\sim}{1}' = \frac{1}{N}(\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{1}')$, será sempre uma matriz quadrada de ordem N, com cada elemento sendo 1/N.

O método 1 de "HENDERSON" opera com o sistema (22), corrigindo os dados para a média, de acordo com a característica de cada modelo ou mais especificamente, em conformidade com o significado de cada fator no modelo.

Com o procedimento anterior, obteremos um novo sistema, em que o termo $N\mu^2$ não ocorrerá em nenhuma das equações.

Genericamente, esse sistema pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \hat{E}(\underset{\sim}{S}) \\ \\ \hat{E}(SSE) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & \underset{\sim}{f} \\ \\ \underset{\sim}{0}' & N-r(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\sigma}}^2 \\ \\ \hat{\sigma}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{S} \\ \\ SSE \end{bmatrix} \qquad (24)$$

onde $\hat{\underset{\sim}{\sigma}}^2$ é um vetor das variâncias $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$, ..., $\hat{\sigma}_K^2$, portanto teremos:

$$\begin{bmatrix} P & \underset{\sim}{f} \\ \\ \underset{\sim}{0}' & N-r(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\sigma}}^2 \\ \\ \hat{\sigma}_e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{S} \\ \\ SSE \end{bmatrix} \qquad (24\text{-}1)$$

e por conseguinte, teremos:

$$P\ \hat{\underset{\sim}{\sigma}}^2 + f\ \hat{\sigma}_e^2 = \underset{\sim}{S}$$

$$[N-r(X)]\ \hat{\sigma}_e^2 = SSE$$

e finalmente obteremos:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{SSE}{N - r(X)} \qquad (25)$$

$$\hat{\underset{\sim}{\sigma}}^2 = P^{-1} [\underset{\sim}{S} - \underset{\sim}{f}\, \hat{\underset{\sim}{\sigma}}_e^2] \qquad (26)$$

3.4. "Método 2 de Henderson" (para modelos mistos sem interação de efeitos fixos e aleatórios, e também para modelos que não incluem qualquer hierarquia de fatores fixos e aleatórios)

Esse método usa os dados inicialmente para estimar os efeitos fixos do modelo, para em seguida ajustar os dados, e finalmente aplicar o "MÉTODO 1 DE HENDERSON" nos dados corrigidos.

Em geral esse procedimentos pode ser executado de vários modos, dependendo da maneira pela qual se estimam os efeitos fixos. O "MÉTODO 2 DE HENDERSON" é um dos caminhos.

Antes de discutirmos o método, nós vamos considerar uma generalização.

Suponhamos que o modelo dado em (1), represente um modelo misto, podemos reescreve-lo da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{y} = \mu \underset{\sim}{1} + X_F \underset{\sim}{\beta}_F + X_A \underset{\sim}{\beta}_A + \underset{\sim}{e} \qquad (27)$$

onde todos os efeitos fixos além de μ são representados por $\underset{\sim}{\beta}_F$, e todos os efeitos aleatórios por $\underset{\sim}{\beta}_A$.

As suposições feitas para o "MÉTODO 1 DE HENDERSON" são mantidas.

De uma maneira geral corrigem-se os dados do vetor $\underset{\sim}{y}$ de acordo com um estimador dos efeitos fixos, digamos $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_F = L\underset{\sim}{y}$, para alguma matriz L e assim obtemos um vetor de dados corrigidos $\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{y} - X_F\hat{\underset{\sim}{\beta}}_F$, que sob certas condições, deverá resultar em

$$\underset{\sim}{Z} = \mu\underset{\sim}{t} + X_A^*\underset{\sim}{\beta}_A + Z^*\underset{\sim}{e} \qquad (28)$$

aplicando-se então, o "MÉTODO 1 DE HENDERSON".

Desde que um estimador de $\underset{\sim}{\beta}_F$ deva ser

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_F = L\underset{\sim}{y} \qquad \text{então,}$$

$$\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{y} - X_F L\underset{\sim}{y}$$

$$\underset{\sim}{Z} = (I - X_F L)\underset{\sim}{y}$$

Substituindo-se $\underset{\sim}{y}$ por (27) teremos,

$$\underset{\sim}{Z} = (I - X_F L)\mu\underset{\sim}{1} + (I - X_F L)X_F\underset{\sim}{\beta}_F + (I - X_F L)X_A\underset{\sim}{\beta}_A + (I - X_F L)\underset{\sim}{e}$$

ou

$$\underset{\sim}{Z} = \mu(I - X_F L)\underset{\sim}{1} + (X_F - X_F L X_F)\underset{\sim}{\beta}_F + (X_A - X_F L X_A)\underset{\sim}{\beta}_A + (I - X_F L)\underset{\sim}{e} \quad .(29)$$

Fazendo-se:

$$(I - X_F L)\underset{\sim}{1} = t \qquad (30)$$

$$(X_F - X_F L X_F) = \phi \qquad (31)$$

$$(X_A - X_F L X_A) = X_A^* \qquad (32)$$

$$(\underset{\sim}{I} - X_F L) = Z^* \qquad (33)$$

Vemos que a condição (31) é equivalente à

$$X_F L X_F = X_F$$

isto é, L é uma matriz inversa generalizada de X_F, logo para que $\underset{\sim}{Z}$ não contenha termos em $\underset{\sim}{\beta}_F$ ou para que (28) seja verificada, temos que a condição (31) tem que ser satisfeita, ou ainda mais explicitamente, para que:

$$\underset{\sim}{Z} = \mu \underset{\sim}{t} + X_A^* \underset{\sim}{\beta}_A + Z^* \underset{\sim}{e}$$

e possamos aplicar o "MÉTODO 1 DE HENDERSON", em $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_F = L\underset{\sim}{y}$, L deve ser uma inversa generalizada de X_F.

Podemos obter ainda uma simplificação no procedimento anterior, se ao invés de aplicarmos o "MÉTODO 1" em (28) o fizermos em:

$$\underset{\sim}{Z} = \mu^* \underset{\sim}{1} + X_A \underset{\sim}{\beta}_A + Z^* \underset{\sim}{e} \qquad (34)$$

e exigirmos que μ^* seja um escalar.

Notemos que para (29) reduzir-se a (34) precisamos ter:

$$\mu^* \underset{\sim}{1} = \mu(\underset{\sim}{I} - X_F L)\ \underset{\sim}{1} + (X_F - X_F L X_F) \underset{\sim}{\beta}_F \qquad (35)$$

e em vez de (32), devemos ter:

$$X_F L X_A = \phi \qquad (36)$$

e (33) ainda é mantida, isto é, $Z^* = (I - X_F L)$.

Mas agora como μ^* é um escalar, uma condição suficiente para que (35) seja satisfeita é que:

$X_F L$ tenha suas somas de linhas iguais (37).

e

$X_F - X_F L X_F$ tenha todas as suas linhas iguais (38).

De (35) temos:

$$\mu(I - X_F L)\,\underset{\sim}{1} = \mu\underset{\sim}{1} - \mu X_F L\,\underset{\sim}{1}$$

Seja $X_F L = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{x}'_1 \\ \underset{\sim}{x}'_2 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{x}'_n \end{bmatrix}$, tal que $\underset{\sim}{x}'_1\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{x}'_2\underset{\sim}{1} = \ldots = \underset{\sim}{x}'_n\underset{\sim}{1} = K$

isto é, as somas dos componentes de cada linha de $X_F L$ forem todas as mesmas, teremos então:

$$\mu X_F L\underset{\sim}{1} = \mu \begin{bmatrix} \underset{\sim}{x}'_1 \\ \underset{\sim}{x}'_2 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{x}'_n \end{bmatrix} \underset{\sim}{1} = \mu \begin{bmatrix} \underset{\sim}{x}'_1\underset{\sim}{1} \\ \underset{\sim}{x}'_2\underset{\sim}{1} \\ \vdots \\ \underset{\sim}{x}'_n\underset{\sim}{1} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} K \\ K \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = \mu K\underset{\sim}{1}$$

logo $\qquad \mu X_F L\underset{\sim}{1} = \mu K\underset{\sim}{1}$

Suponhamos em (35) a condição (38) satisfeita, logo:

$$X_F - X_F L X_F = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\ell}' \\ \underset{\sim}{\ell}' \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\ell}' \end{bmatrix}, \qquad \text{então:}$$

$$(X_F - X_F L X_F)\underset{\sim}{\beta}_F = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\ell}' \\ \underset{\sim}{\ell}' \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\ell}' \end{bmatrix} \underset{\sim}{\beta}_F = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\beta}_F \\ \underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\beta}_F \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\beta}_F \end{bmatrix} = \underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\beta}_F \underset{\sim}{1}$$

Finalmente teremos:

$$\mu^* \underset{\sim}{1} = \mu(I - X_F L)\underset{\sim}{1} + (X_F - X_F L X_F)\,\underset{\sim}{\beta}_F$$

$$\mu^* \underset{\sim}{1} = -\mu K\, \underset{\sim}{1} + \underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\beta}_F\, \underset{\sim}{1} + \mu \underset{\sim}{1}$$

$$\mu^* \underset{\sim}{1} = (-\mu K + \underset{\sim}{\ell}\underset{\sim}{\beta}_F + \mu)\underset{\sim}{1} \qquad \text{logo}$$

$$\mu^* = -K + \underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\beta}_F + \mu \quad \text{é um escalar.}$$

Devemos notar que esta última simplificação tirou a necessidade de L ser uma invsersa generalizada de X_F. Então (36), (37) e (38) substituem (30), (31) e (32) e com (33) constituem condições através das quais podemos obter a simplificação proposta.

Podemos dizer que em linhas gerais o "MÉTODO 2

DE HENDERSON" é tal que estima $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_F = L\underset{\sim}{y}$, usando uma L que satisfaz (33), (36), (37) e (38) e aplica o "MÉTODO 1" em (34).

3.4.1. Procedimento geral para o cálculo

Primeiro estima-se $\underset{\sim}{\beta}_F$ pelo método dos mínimos quadrados, simultâneamente com $\underset{\sim}{\beta}_A$, exatamente como se os efeitos aleatórios em $\underset{\sim}{\beta}_A$ fossem fixos.

De (11) temos que as equações normais são:

$$X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} = X'\underset{\sim}{y}$$

Mas neste caso,

$$X = [\underset{\sim}{1} \; X_F \; X_A] \quad \text{e} \quad \hat{\underset{\sim}{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\beta}_F \\ \hat{\beta}_A \end{bmatrix}$$

Logo temos:

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{1}' \\ X_F' \\ X_A' \end{bmatrix} [\underset{\sim}{1} \quad X_F \; X_A] \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_F \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1' \\ X_F' \\ X_A' \end{bmatrix} \underset{\sim}{y}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{1}'\underset{\sim}{1} & \underset{\sim}{1}'X_F & \underset{\sim}{1}'X_A \\ X_F'\underset{\sim}{1} & X_F'X_F & X_F'X_A \\ X_A'\underset{\sim}{1} & X_A'X_F & X_A'X_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_F \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{1}'\underset{\sim}{y} \\ X_F'\underset{\sim}{y} \\ X_A'\underset{\sim}{y} \end{bmatrix} \qquad (39)$$

Somente as soluções para (39) nas quais $\hat{\mu} = 0$ são consideradas. Isto reduz as equações para:

$$\begin{bmatrix} X_F'X_F & X_F'X_A \\ X_A'X_F & X_A'X_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\beta}}_F \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_F'\underset{\sim}{y} \\ X_A'\underset{\sim}{y} \end{bmatrix}$$

ou $$X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} = X'\underset{\sim}{y} \qquad (40)$$

onde $X = [X_F \;\; X_A]$ e $\hat{\underset{\sim}{\beta}}' = [\hat{\underset{\sim}{\beta}}_F' \;\; \hat{\underset{\sim}{\beta}}_A']$

Uma solução para (40) é:

$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = P\, X'\underset{\sim}{y}$ onde

$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ é uma matriz inversa generalizada de X'X.

Logo,

$$\begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\beta}}_F \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_F'\underset{\sim}{y} \\ X_A'\underset{\sim}{y} \end{bmatrix} \qquad (40\text{-}1)$$

Temos então que:

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_F = P_{11}\ X_F'\underset{\sim}{y} + P_{12}\ X_A'\underset{\sim}{y}$$

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_F = [P_{11}X_F' + P_{12}X_A']\ \underset{\sim}{y}$$

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_F = [P_{11}\ \ P_{12}] \begin{bmatrix} X_F' \\ X_A' \end{bmatrix} \underset{\sim}{y}$$

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_F = [P_{11}\ \ P_{12}]\ X'\underset{\sim}{y}$$

Desde que, $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_F = L\underset{\sim}{y}$ temos que:

$$L = [P_{11}\ \ P_{12}]\ X' \qquad (41)$$

Nem todas as matrizes L encontradas como em (41) satisfazem as condições (36), (37) e (38).

Uma maneira particular pela qual se obtém P, (mostraremos a seguir), que determina L satisfazendo estas três condições.

Esse caminho pelo qual obtém-se P, determina, praticamente, o "MÉTODO 2 DE HENDERSON".

Uma inversa generalizada de X'X em (40) pode ser encontrada como segue. Dentro de X'X de posto r escolhe-se uma menor principal (matriz restante de X'X, quando se eliminam linhas e colunas de índices correspondentes) de ordem e característica r. Chamemos esta menor de M e M^{-1} a sua inversa. Uma matriz inversa generalizada P de X'X é encontrada quando substituimos a M em X'X por M^{-1} e colocamos zeros nas linhas e colunas restantes.

O "MÉTODO 2 DE HENDERSON" obtém P desta maneira, mas com uma *condição*: de que nas eliminações das linhas e colunas de X'X para se obter M, escolha-se, tantas quantas forem possíveis, linhas e colunas através de $X_F'X_F$.

Demonstração de que L obtida por este processo, satisfaz as condições: (36), (37) e (38).

Façamos as seguintes reordenações no sistema dado em (40), isto é, em

$$X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} = X'\underset{\sim}{y}$$

Os elementos de $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_F$ correspondentes às linhas e colunas eliminadas de X'X para obter M, são postos nos primeiros lugares dentro de $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_F$, chamemos estes elementos de $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{F_1}$ e particionemos $\hat{\underset{\sim}{\beta}}'_F$ em $[\hat{\beta}'_{F_1} \ \hat{\beta}'_{F_2}]$.

Da mesma maneira os elementos em $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_A$ correspondentes as linhas e colunas eliminadas de X'X na obtenção de M são postos nos últimos lugares, e particionemos $\hat{\underset{\sim}{\beta}}'_A$ em $[\hat{\beta}'_{A_1} \ \hat{\beta}'_{A_2}]$. Então:

$\hat{\underset{\sim}{\beta}}' = [\hat{\underset{\sim}{\beta}}'_{F_1} \;\; \hat{\underset{\sim}{\beta}}'_{F_2} \;\; \hat{\underset{\sim}{\beta}}'_{A_1} \;\; \hat{\underset{\sim}{\beta}}'_{A_2}]$ e em conformidade teremos a matriz:

$$X = [F_1 \;\; F_2 \;\; R_1 \;\; R_2] \qquad (42)$$

Então teremos o sistema dado em (40) reescrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} F_1'F_1 & F_1'F_2 & F_1'R_1 & F_1'R_2 \\ F_2'F_1 & F_2'F_2 & F_2'R_1 & F_2'R_2 \\ R_1'F_1 & R_1'F_2 & R_1'R_1 & R_1'R_2 \\ R_2'F_1 & R_2'F_2 & R_2'R_1 & R_2'R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{F_1} \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{F_2} \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{A_1} \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{A_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1'\underset{\sim}{y} \\ F_2'\underset{\sim}{y} \\ R_1'\underset{\sim}{y} \\ R_2'\underset{\sim}{y} \end{bmatrix}$$

Desta maneira as linhas e colunas através $F_1'F_1$ e $R_2'R_2$ são aquelas eliminadas de $X'X$ para se obter M.

Logo,

$$M = \begin{bmatrix} F_2'F_2 & F_2'R_1 \\ R_1'F_2 & R_1'R_1 \end{bmatrix} \quad (42.1) \qquad \text{e} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (42.2)$$

onde $Q_{21} = Q_{12}'$, então,

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & Q_{11} & Q_{12} & \phi \\ \phi & Q_{21} & Q_{22} & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi \end{bmatrix}$$

Desta maneira, sem perda de generalidade, temos que de (40-1):

$$\begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{F_1} \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{F_2} \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{A_1} \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{A_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & Q_{11} & Q_{12} & \phi \\ \phi & Q_{21} & Q_{22} & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1'\underset{\sim}{y} \\ F_2'\underset{\sim}{y} \\ R_1'\underset{\sim}{y} \\ R_2'\underset{\sim}{y} \end{bmatrix} \quad \text{ou}$$

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_F = \begin{bmatrix} \phi \\ Q_{11}F_2'\underset{\sim}{y} + Q_{12}R_1'\underset{\sim}{y} \end{bmatrix}$$

Portanto de (41) temos:

$$L = \begin{bmatrix} \phi \\ Q_{11}F_2' + Q_{12}R_1' \end{bmatrix} \qquad (43)$$

O crucial da prova consiste nas propriedades da matriz X, especialmente aquelas que surgem da maneira pela qual linhas e colunas de X'X são eliminadas para se obter P, isto é, tantas quantas forem possíveis através $X_F'X_F$. Isto significa que em $X=[F_1\ F_2\ R_1\ R_2]$ o número de colunas de F_1 é tão grande quanto possível e em R_2 é tão pequeno quanto possível, sendo que o número total de colunas em F_1 e R_2 depende de r(X), o posto de X.

A partição de X em $[F_1\ \ F_2\ \ R_1\ \ R_2]$ dada em (42) é tal que: $[F_2\ \ R_1]$ tenha posto coluna completo, sendo que:

$$r[F_2\ \ R_1] = r[F_2] + r[R_1] = r[X_F\ \ X_A] = r[X] \qquad (44)$$

e

$$r[R_1] = r[X_A] \qquad (45)$$

A condição (36), $X_F L X_A = \phi$ é provada ao se mostrar que $LX_A = \phi$ (45.1)

$$LX_A = L[R_1\ \ R_2]$$

De (45) $r[R_1] = r[X_A] = r[R_1\ \ R_2]$, logo, $R_2 = R_1K$ para alguma matriz K. (46), então,

$$LX_A = L[R_1\ \ R_1K]$$

$$= LR_1\ [I\ \ K]$$

$$= \begin{bmatrix} \phi \\ Q_{11}F_2' + Q_{12}R_1' \end{bmatrix} R_1\ [I\ \ K]$$

$$LX_A = \begin{bmatrix} \phi \\ Q_{11}F_2'R_1 + Q_{12}R_1'R_1 \end{bmatrix} [I\ \ K]$$

De (42) temos que:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_2'F_2 & F_2'R_1 \\ R_1'F_2 & R_1'R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{(F_2)} & \phi \\ \phi & I_{(R_1)} \end{bmatrix}$$

logo $Q_{11}F_2'R_1 + Q_{12}R_1'R_1 = \phi$, então,

$$LX_A = \begin{bmatrix} \phi \\ \phi \end{bmatrix} [I \quad K] = \phi$$

Portanto a condição (36), é satisfeita.

A condição (37) de que $X_F L$ tem somas de linhas iguais, é mostrada pela prova de que $L\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{0}$.

Como por (45), $r[X_A] = r[R_1]$ existirá um dos fatores aleatórios, com todos os seus níveis em R_1 (pois que, para cada fator o conjunto de colunas, correspondentes aos níveis, é sempre linearmente independente) chamemos estas colunas de R_{12}, logo $R_{12}\ \underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{1}$.

Podemos então particionar R_1 em $[R_{11}\ R_{12}\ R_{13}]$ logo,

$$[F_1\ F_2\ R_{11}\ R_{12}\ R_{13}\ R_2] \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{1} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{1}$$

$$X\begin{bmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{U} \\ \tilde{0} \end{bmatrix} = \tilde{1} \quad \text{ou} \quad X\,\tilde{U} = \tilde{1} \qquad (47)$$

onde $\tilde{U}' = [\tilde{0}' \ \tilde{1}' \ \tilde{0}']$ é em conformidade com a partição de R_1.

Pré-multiplicando ambos os lados de (47) por X' e substituindo X e X' por (42), teremos:

$$X'\tilde{1} = X'X \begin{bmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{U} \\ \tilde{0} \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} F_1' \\ F_2' \\ R_1' \\ R_2' \end{bmatrix} \tilde{1} = \begin{bmatrix} F_1'F_1 & F_1'F_2 & F_1'R_1 & F_1'R_2 \\ F_2'F_1 & F_2'F_2 & F_2'R_1 & F_2'R_2 \\ R_1'F_1 & R_1'F_2 & R_1'R_1 & R_1'R_2 \\ R_2'F_1 & R_2'F_2 & R_2'R_1 & R_2'R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{U} \\ \tilde{0} \end{bmatrix}$$

logo
$$\begin{bmatrix} F_2' \\ R_1' \end{bmatrix} \tilde{1} = \begin{bmatrix} F_2'F_2 & F_2'R_1 \\ R_1'F_2 & R_1'R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{U} \end{bmatrix}$$

De (43) temos que:

$$L\,\underset{\sim}{1} = \begin{bmatrix} \phi \\ (Q_{11}\;F_2' + Q_{12}\;R_1')\;\underset{\sim}{1} \end{bmatrix}$$

mas,

$$(Q_{11}F_2' + Q_{12}R_1')\;\underset{\sim}{1} = [Q_{11}\;\;Q_{12}] \begin{bmatrix} F_2' \\ R_1' \end{bmatrix} \underset{\sim}{1}$$

$$= [Q_{11}\;\;Q_{12}] \begin{bmatrix} F_2'F_2 & F_2'R_1 \\ R_1'F_2 & R_1'R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{U} \end{bmatrix}$$

$$= [Q_{11}\;F_2'F_2 + Q_{12}\;R_1'F_2 \quad Q_{11}F_2'R_1 + Q_{12}R_1'R_1] \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{U} \end{bmatrix}$$

$$= [I \quad \underset{\sim}{0}] \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{U} \end{bmatrix}$$

$(Q_{11}\;F_2' + Q_{12}\;R_1')\;\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{0}$ logo $L\;\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{0}$, então, $X_F L\;\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{0}$, portanto a soma das linhas de $X_F L$ é constante e igual a zero.

Vejamos a prova da condição (38) de que $X_F - X_F L\;X_F$ tem todas as suas linhas iguais.

De (42) e (43) temos que:

$$X_F - X_F L X_F = [F_1 \;\; F_2] - [F_1 \;\; F_2] \begin{bmatrix} \phi \\ Q_{11}F_2' + Q_{12}R_1' \end{bmatrix} [F_1 \;\; F_2]$$

$$= [F_1 \;\; F_2] - [\phi + F_2\,(Q_{11}F_2' + Q_{12}R_1')]\,[F_1 \;\; F_2]$$

$$= [F_1 \;\; F_2] - [F_2\,(Q_{11}F_2' + Q_{12}R_1')F_1 \quad F_2(Q_{11}F_2' + Q_{12}R_1')F_2]$$

$$= [F_1 \;\; F_2] - [F_2(Q_{11}F_2'F_1 + Q_{12}R_1'F_1) \quad F_2(Q_{11}F_2'F_2 + Q_{12}R_1'F_2)]$$

$$= [F_1 \;\; F_2] - [F_2(Q_{11}F_2'F_1 + Q_{12}R_1'F_1) \quad F_2]$$

$$= [F_1 - F_2(Q_{11}F_2'F_1 + Q_{12}R_1'F_1) \quad \phi]$$

$$X_F - X_F L X_F = [F_1 - F_2\,[Q_{11} \;\; Q_{12}] \begin{bmatrix} F_2' \\ R_1' \end{bmatrix} F_1 \quad \phi] \qquad (48)$$

Como $r[X_A] = r[R_1]$, então $R_1\underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{1}$ para algum vetor $\underset{\sim}{p}$.

Além disso, como $[F_2 \;\; R_1]$ tem posto coluna completo, disto segue que $\underset{\sim}{1}$ e as colunas de F_2 são linearmente independentes, portanto:

$$r[\underset{\sim}{1} \;\; F_2] = r[F_2] + 1 \qquad (49)$$

A restrição inicial para o uso do "MÉTODO 2 DE HENDERSON", pode ser colocada em termos do posto de uma matriz, então o método se aplicaria a modelos que satisfizessem a seguinte condição:

$$r[X_F \quad X_A] = r[X_F] + r[X_A] - 1 \qquad (50)$$

De (44), (45) e (50) temos respectivamente:

$$r[F_2 \quad R_1] = r[X_F \quad X_A] = r[F_2] + r[R_1]$$

$$r[R_1] = r[X_A]$$

$$r[X_F \quad X_A] = r[X_F] + r[X_A] - 1$$

logo,

$$r[F_2] + r[R_1] = r[X_F] + r[X_A] - 1$$

$$r[F_2] = r[X_F] - 1$$

$$r[\underset{\sim}{1} \; F_2] = r[X_F] \qquad \text{por} \qquad (49)$$

$$r[\underset{\sim}{1} \; F_2] = r[\underset{\sim}{1} \; F_1 \; F_2]$$

Portanto:

$F_1 = [\underset{\sim}{1} \; F_2] \; T$ para alguma matriz T, a qual, pode ser escrita como $T' = [\underset{\sim}{t} \quad M']$ para algum vetor $\underset{\sim}{t}$ e alguma matriz M, logo

$$F_1 = [\underset{\sim}{1} \; F_2] \begin{bmatrix} \underset{\sim}{t}' \\ M \end{bmatrix}$$

ou

$F_1 = \underset{\sim}{1}\,\underset{\sim}{t}' + F_2\,M$ e como $R_1\underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{1}$ teremos,

$$F_1 = R_1\underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{t}' + F_2\,M = [F_2 \quad R_1]\begin{bmatrix} M \\ \underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{t}' \end{bmatrix} \qquad (51)$$

Em (48) se substituirmos (51) observemos que:

$$[Q_{11} \quad Q_{12}]\begin{bmatrix} F_2' \\ R_1' \end{bmatrix}[F_2 \quad R_1]\begin{bmatrix} M \\ \underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{t}' \end{bmatrix}$$

$$= [Q_{11} \quad Q_{12}]\begin{bmatrix} F_2'F_2 & F_2'R_1 \\ R_1'F_2 & R_1'R_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M \\ \underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{t}' \end{bmatrix}$$

$$= [Q_{11}F_2'F_2 + Q_{12}R_1'F_2 \qquad Q_{11}F_2'R_1 + Q_{12}R_1'R_1]\begin{bmatrix} M \\ \underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{t}' \end{bmatrix}$$

$$= [I \quad \phi]\begin{bmatrix} M \\ \underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{t}' \end{bmatrix} = M$$

Portanto :

$$X_F - X_F L X_F = [R_1\underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{t}' + F_2M - F_2M \quad \phi]$$

$$= [R_1\underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{t}' \quad \phi]$$

$X_F - X_F L X_F = [\underset{\sim}{1}\,\underset{\sim}{t}' \quad \phi]$ a qual é uma matriz com todas linhas iguais.

Portanto, obtendo-se uma matriz P, pelo processo anterior vimos que ela conduz a uma matriz L através (41) satisfazendo as condições: (36), (37) e (38).

O "MÉTODO 2 DE HENDERSON" se completa ao fazermos $\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{y} - X_F L \underset{\sim}{y}$ e aplicarmos o "MÉTODO 1" em (34), isto é para o modelo: $\underset{\sim}{Z} = \mu^* \underset{\sim}{1} + X_A \underset{\sim}{\beta}_A + Z^* \underset{\sim}{e}$

3.5. "Método 3 de Henderson" para modelos aleatórios e mistos

O terceiro método descrito por "HENDERSON" é baseado no "MÉTODO DE AJUSTAR CONSTANTES" tradicionalmente usado em modelos de efeitos fixos.

Este método trabalha com reduções nas somas de quadrados devido ao ajuste de diferentes subgrupos de fatores ou de diferentes submodelos do original.

Estimam-se as variâncias por equacionar essas reduções, aos seus valores esperados sobre o modelo completo.

Seja o modelo geral dado em (1) $\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e}$ reescrito da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{y} = X_1\underset{\sim}{\beta}_1 + X_2\underset{\sim}{\beta}_2 + \underset{\sim}{e} \qquad (52)$$

onde a partição simplesmente divide $\underset{\sim}{\beta}$ em dois grupos de efeitos $\underset{\sim}{\beta}_1$ e $\underset{\sim}{\beta}_2$ sem a necessidade deles representarem efeitos fixos ou aleatórios.

A redução na soma de quadrados devido ao ajuste do modelo completo, como vimos em (16) é dada por:

$$R(\underset{\sim}{\beta}) = \underset{\sim}{y}'X\ (X'X)^{-}X'\underset{\sim}{y}$$

$$R(\underset{\sim}{\beta}_1, \underset{\sim}{\beta}_2) = \underset{\sim}{y}'X\ (X'X)^{-}X'\underset{\sim}{y} \qquad (53)$$

Consideremos um sub-modelo de (52) dado por:

$$\underset{\sim}{y} = X_1\underset{\sim}{\beta}_1 + \underset{\sim}{e} \qquad (54)\ ,$$

a redução na soma de quadrados devido ao ajuste deste, será dada por:

$$R(\underset{\sim}{\beta}_1) = \underset{\sim}{y}'X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'\ \underset{\sim}{y} \qquad (55)$$

Definimos a redução devido ao ajuste de $\underset{\sim}{\beta}_2$ além de $\underset{\sim}{\beta}_1$ por:

$$R(\underset{\sim}{\beta}_2/\underset{\sim}{\beta}_1) = R(\underset{\sim}{\beta}_1, \underset{\sim}{\beta}_2) - R(\underset{\sim}{\beta}_1) \qquad (56)$$

- *Cálculo da esperança de* $R(\underset{\sim}{\beta}_2/\underset{\sim}{\beta}_1)$

Por (2), temos:

$$E[\underset{\sim}{y}'Q\underset{\sim}{y}] = \text{tr } QV + E(\underset{\sim}{y}')\ QE(\underset{\sim}{y})$$

onde $$V = \text{Cov } (\underset{\sim}{y}) = E[(\underset{\sim}{y} - E(\underset{\sim}{y}))(\underset{\sim}{y} - E(\underset{\sim}{y}))']$$

Antes de calcularmos V, notemos que quando $\underset{\sim}{\beta}$ é fixo, $E(\underset{\sim}{\beta}\underset{\sim}{e}') = \underset{\sim}{\beta}\ E(\underset{\sim}{e}') = \phi$ e quando $\underset{\sim}{\beta}$ inclui elementos que são efeitos aleatórios, eles são assumidos terem média zero e covariância zero com elementos em $\underset{\sim}{e}$, isto é suposição 6 e parte da (7). Então todas as vezes, teremos $E(\underset{\sim}{\beta}\underset{\sim}{e}') = E(\underset{\sim}{e}\underset{\sim}{\beta}') = \phi$. No Cálculo de V é preciso ainda acrescentar às suposições (3) e (4) e também para a aplicação do "MÉTODO 3" é necessário a suposição (8). Então, teremos:

$$V = \text{Cov}(\underset{\sim}{y}) = \text{Cov}(X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e})$$

$$V = E\{[X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e} - E(X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e})]\ [X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e} - E(X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e})]'\}$$

$$V = E\{[X(\underset{\sim}{\beta} - E(\underset{\sim}{\beta})) + \underset{\sim}{e}][X(\underset{\sim}{\beta} - E(\underset{\sim}{\beta})) + \underset{\sim}{e}]'\}$$

$$V = E\{[X(\underset{\sim}{\beta} - E(\underset{\sim}{\beta}))(\underset{\sim}{\beta} - E(\underset{\sim}{\beta}))'X' + X(\underset{\sim}{\beta} - E(\underset{\sim}{\beta}))\underset{\sim}{e}' + \underset{\sim}{e}(\underset{\sim}{\beta} - E(\underset{\sim}{\beta}))'X' + \underset{\sim}{e}\underset{\sim}{e}']\}$$

$$V = E[X(\underset{\sim}{\beta} - E(\underset{\sim}{\beta}))(\underset{\sim}{\beta} - E(\underset{\sim}{\beta}))'X'] + E[\underset{\sim}{e}\underset{\sim}{e}']$$

$$V = XE[(\underset{\sim}{\beta} - E(\underset{\sim}{\beta}))(\underset{\sim}{\beta} - E(\underset{\sim}{\beta}))']X' + E[\underset{\sim}{e}\underset{\sim}{e}']$$

$$V = X\ \text{Cov}\ (\underset{\sim}{\beta})X' + \sigma_e^2\ I$$

Logo a igualdade (2) torna-se:

$$E[\underset{\sim}{y}'Q\underset{\sim}{y}) = trQ[X\ Cov(\underset{\sim}{\beta})X' + \sigma_e^2 I\ ] + E(\underset{\sim}{\beta}')X'QXE(\underset{\sim}{\beta})$$

$$E[\underset{\sim}{y}'Q\underset{\sim}{y}] = trQ[X\ (E(\underset{\sim}{\beta}\underset{\sim}{\beta}') - E(\underset{\sim}{\beta})E(\underset{\sim}{\beta}'))X' + \sigma_e^2\ I] + E(\underset{\sim}{\beta}')X'QXE(\underset{\sim}{\beta})$$

$$= tr\ QXE(\underset{\sim}{\beta}\underset{\sim}{\beta}')X' - tr\ QXE(\underset{\sim}{\beta})E(\underset{\sim}{\beta}')X' + tr\ \sigma_e^2 Q + E(\underset{\sim}{\beta}')X'QXE(\underset{\sim}{\beta})$$

$$E[\underset{\sim}{y}'Q\underset{\sim}{y}] = tr[X'QXE(\underset{\sim}{\beta}\underset{\sim}{\beta}')] + \sigma_e^2\ tr[Q] \qquad (57)$$

Esta forma de $E[\underset{\sim}{y}'Q\underset{\sim}{y}]$ é apropriada para aplicarmos em (53) e (55).

Em (53), $R(\underset{\sim}{\beta}_1, \underset{\sim}{\beta}_2) = \underset{\sim}{y}'X(X'X)^{-}X'\underset{\sim}{y}$, teremos:

$$E[R(\underset{\sim}{\beta}_1,\underset{\sim}{\beta}_2)] = tr[X'X(X'X)^{-}X'X\ E(\underset{\sim}{\beta}\underset{\sim}{\beta}') + \sigma_e^2\ tr[\ X(X'X)^{-}X']$$

Ou ainda como já visto em (3.2), temos:

$$E[R(\underset{\sim}{\beta}_1,\underset{\sim}{\beta}_2)] = tr[X'XE(\underset{\sim}{\beta}\underset{\sim}{\beta}')] + \sigma_e^2\ r(X)$$

Ou ainda, fazendo $X = [X_1\ \ X_2]$ e $\underset{\sim}{\beta}' = [\underset{\sim}{\beta}_1'\ \ \underset{\sim}{\beta}_2']$

teremos:

$$E[R(\underset{\sim}{\beta}_1,\underset{\sim}{\beta}_2)] = tr\left\{\begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E(\underset{\sim}{\beta}_1\underset{\sim}{\beta}_1') & E(\underset{\sim}{\beta}_1\underset{\sim}{\beta}_2') \\ E(\underset{\sim}{\beta}_2\underset{\sim}{\beta}_1') & E(\underset{\sim}{\beta}_2\underset{\sim}{\beta}_2') \end{bmatrix}\right\} + \sigma_e^2\ r(X)$$

Em (55), $R(\underset{\sim}{\beta}_1) = \underset{\sim}{y}'X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'\underset{\sim}{y}$, teremos:

$$E[R(\underset{\sim}{\beta}_1)] = tr[X'X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'X \quad E(\underset{\sim\sim}{\beta\beta}')] + \sigma_e^2 \; tr[X_1(X_1'X_1)^{-}X_1']$$

Fazendo $X = [X_1 \;\; X_2]$ notemos que:

$$X'X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'X = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} [X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'] \; [X_1 \;\; X_2]$$

$$= \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} [X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'X_1 \qquad X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'X_2]$$

$$= \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} [X_1 \qquad X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'X_2] \quad \text{por}$$

(14-B) e (14-E)

$$= \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'X_2 \end{bmatrix}$$

$$X'X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'X = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'X_2 \end{bmatrix} \quad \text{por}$$

(14-B). Portanto:

$$E[R(\underset{\sim}{\beta}_1)] = tr\left\{\begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(\underset{\sim}{\beta}_1\underset{\sim}{\beta}_1') & E(\underset{\sim}{\beta}_1\underset{\sim}{\beta}_2') \\ E(\underset{\sim}{\beta}_2\underset{\sim}{\beta}_1') & E(\underset{\sim}{\beta}_2\underset{\sim}{\beta}_2') \end{bmatrix}\right\} + \sigma_e^2 r(X_1)$$

De (56)

$$E[R(\underset{\sim}{\beta}_2/\underset{\sim}{\beta}_1)] = E[R(\underset{\sim}{\beta}_1,\underset{\sim}{\beta}_2)] - E[R(\underset{\sim}{\beta}_i)]$$

$$E[R(\underset{\sim}{\beta}_2/\underset{\sim}{\beta}_1)] = tr\left\{\begin{bmatrix} \phi & \phi \\ \phi & X_2'X_2-X_2'X_1(X_1'X_1)^-X_1'X_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} E(\underset{\sim}{\beta}_1\underset{\sim}{\beta}_1') & E(\underset{\sim}{\beta}_1\underset{\sim}{\beta}_2') \\ E(\underset{\sim}{\beta}_2\underset{\sim}{\beta}_1') & E(\underset{\sim}{\beta}_2\underset{\sim}{\beta}_2')\end{bmatrix}\right\} + \sigma_e^2[r(X)-r(X_1)]$$

$$E[R(\underset{\sim}{\beta}_2/\underset{\sim}{\beta}_1)] = tr\left\{\begin{bmatrix} \phi & \phi \\ (X_2'X_2-X_2'X_1(X_1'X_1)^-X_1'X_2)E(\underset{\sim}{\beta}_2\underset{\sim}{\beta}_1') & (X_2'X_2-X_2'X_1(X_1'X_1)^-X_1'X_2E(\underset{\sim}{\beta}_2\underset{\sim}{\beta}_2')\end{bmatrix}\right\}+$$

$$+ \quad \sigma_e^2\ [r(X) - r(X_1)]$$

$$E[R(\underset{\sim}{\beta}_2/\underset{\sim}{\beta}_1)] = tr[(X_2'X_2 - X_2'X_1(X_1'X_1)^-X_1'X_2)\ E(\underset{\sim}{\beta}_2\ \underset{\sim}{\beta}_2')] + \sigma_e^2\ [r(X) - r(X_1)]$$

$$E[R(\underset{\sim}{\beta}_2/\underset{\sim}{\beta}_1)] = tr[X_2'(I - X_1(X_1'X_1)^-X_1')X_2\ E(\underset{\sim}{\beta}_2\underset{\sim}{\beta}_2')] + \sigma_e^2[r(X) - r(X_1)] \quad (58)$$

Notemos que em (58) o único termo $\underset{\sim}{\beta}$ envolvido é $\underset{\sim}{\beta}_2$, isto é, a esperança de $R(\underset{\sim}{\beta}_2/\underset{\sim}{\beta}_1)$ é simplesmente uma função de $E(\underset{\sim}{\beta}_2\underset{\sim}{\beta}_2')$ e σ_e^2, e nunca envolverá $E(\underset{\sim}{\beta}_1\underset{\sim}{\beta}_1')$ e $E(\underset{\sim}{\beta}_1\underset{\sim}{\beta}_2')$.

Isto é muito importante porque (58) foi encontrada sem qualquer suposição da forma de $E(\underset{\sim}{\beta}\underset{\sim}{\beta}')$, isto é, $\underset{\sim}{\beta}$ pode conter efeitos fixos ou aleatórios. Consequentemente, se o vetor $\underset{\sim}{\beta}$ de um modelo pode ser particionado em duas partes $\underset{\sim}{\beta}_1$ e $\underset{\sim}{\beta}_2$, onde $\underset{\sim}{\beta}_2$ contém exatamente efeitos aleatórios, então $E[R(\underset{\sim}{\beta}_2/\underset{\sim}{\beta}_1)]$ como dado em (58) contém somente σ_e^2 e os componentes da variância relativos a estes efeitos aleatórios.

O resultado em (58) é particularmente útil em modelos mistos porque, quando $\underset{\sim}{\beta}_1$ representa todos os efeitos fixos, $E[R(\underset{\sim}{\beta}_2/\underset{\sim}{\beta}_1)]$ não conterá termos devido a esses efeitos fixos, a esperança é somente função de σ_e^2 e das variâncias dos efeitos aleatórios em $\underset{\sim}{\beta}_2$.

O "MÉTODO 3 DE HENDERSON" ou MÉTODO DE "AJUSTAR CONSTANTES" se completa ao equacionarmos:

$$E[R(\underset{\sim}{\beta}_2/\underset{\sim}{\beta}_1)] = R(\underset{\sim}{\beta}_2/\underset{\sim}{\beta}_1) = R(\underset{\sim}{\beta}_1,\underset{\sim}{\beta}_2) - R(\underset{\sim}{\beta}_1) \qquad (59)$$

onde obteremos sucessivas equações nos componentes da variância para cada apropriada escolha de $\underset{\sim}{\beta}_1$ e $\underset{\sim}{\beta}_2$.

É importante salientar que (58) ou (59) contém somente termos em σ_e^2 e aqueles relativos as variâncias dos efeitos aleatórios em $\underset{\sim}{\beta}_2$ e esta regra só é válida quando o R(./.) for igual, ao R(.) para o modelo completo, menos R (.) para um sobmodelo.

Uma vez obtidas as equações através (59) elas podem ser usadas na forma de combinações lineares das originais.

4. RESULTADOS

4.1. "Método 1 de Henderdon" para um modelo aleatório com dois fatores de classificação com interação

4.1.1. Modelo e sistema de equações

Seja o modelo dado por:

$$\underset{\sim}{y} = \mu 1 + X_1\underset{\sim}{\beta}_1 + X_2\underset{\sim}{\beta}_2 + X_3\underset{\sim}{\beta}_3 + \underset{\sim}{e} \qquad (60)$$

onde $\underset{\sim}{\beta}_3$ representa o vetor de efeitos da interação entre os fatores 1 e 2.

De (22) teremos o seguinte sistema:

$$N\hat{\mu}^2 + tr(A\mu X_1X_1')\hat{\sigma}_1^2 + tr(A\mu X_2X_2')\hat{\sigma}_2^2 + tr(A\mu X_3X_3')\hat{\sigma}_3^2 + tr(A\mu)\hat{\sigma}_e^2 = \underset{\sim}{y}'A\mu\underset{\sim}{y}$$

$$N\hat{\mu}^2 + tr(A_1X_1X_1')\hat{\sigma}_1^2 + tr(A_1X_2X_2')\hat{\sigma}_2^2 + tr(A_1X_3X_3')\hat{\sigma}_3^2 + tr(A_1)\hat{\sigma}_e^2 = \underset{\sim}{y}'A_1\underset{\sim}{y}$$

$$N\hat{\mu}^2 + tr(A_2X_1X_1')\hat{\sigma}_1^2 + tr(A_2X_2X_2')\hat{\sigma}_2^2 + tr(A_2X_3X_3')\hat{\sigma}_3^2 + tr(A_2)\hat{\sigma}_e^2 = \underset{\sim}{y}'A_2\underset{\sim}{y}$$

$$N\hat{\mu}^2 + tr(A_3X_1X_1')\hat{\sigma}_1^2 + tr(A_3X_2X_2')\hat{\sigma}_2^2 + tr(A_3X_3X_3')\hat{\sigma}_3^2 + tr(A_3)\hat{\sigma}_e^2 = \underset{\sim}{y}'A_3\underset{\sim}{y}$$

$$N\hat{\mu}^2 + tr(X_1X_1')\hat{\sigma}_1^2 + tr(X_2X_2')\hat{\sigma}_2^2 + tr(X_3X_3')\hat{\sigma}_3^2 + tr\ (\underset{\sim}{I})\hat{\sigma}_e^2 = \underset{\sim}{y}'I\underset{\sim}{y}$$

4.1.2. Aplicação numérica do método 1

Consideremos um conjunto fictício de dados, e ajustemos o modelo (60).

		Fator 2		
		nível 1	nível 2	nível 3
Fator 1	nível 1	10; 12 13; 11 12; 14	9; 8 7; 10 12	11; 13 10; 7
	nível 2	8; 9 6	7; 5	

De (23) temos que:

$$A_\theta = \sum_{i=1}^{N_{\theta\oplus}} \frac{1}{N_{\theta_i}} J_{N_{\theta_i}} \qquad \text{para } \theta = 1,\ 2,\ 3.$$

conforme convenientes ordenações de $\underset{\sim}{y}$.

$$A\mu = \underset{\sim}{1}(\underset{\sim}{1}'\underset{\sim}{1})^{-}\underset{\sim}{1}'$$

Ordenemos $\underset{\sim}{y}$, inicialmente para o fator 1 e, consequentemente para 3.

$$\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 13 \\ 11 \\ 12 \\ 14 \\ 9 \\ 8 \\ 7 \\ 10 \\ 12 \\ 11 \\ 13 \\ 10 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}_{20\ 1} ; \quad \underset{\sim}{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{20\ 1} ; \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{20\ 2} ; \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{20\ 3} ; \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{20\ 5}$$

Teremos então:

$$A\mu = \underset{\sim}{1}(\underset{\sim}{1}'\underset{\sim}{1})^{-}\underset{\sim}{1}'$$

$$A\mu = \frac{1}{20}\begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{bmatrix}_{20\times 20}$$

$$A_1 = \sum_{i=1}^{N_1 \oplus} \frac{1}{N_{1_i}} J_{N_{1_i}} = \sum_{i=1}^{2 \oplus} \frac{1}{N_{1_i}} J_{N_{1_i}}$$

$$A_1 = \frac{1}{15}\; {}_{15}\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}_{15} \otimes \frac{1}{5}\; {}_{5}\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1 \end{bmatrix}_{5}$$

$$
A_1 = {}_{20}\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \multicolumn{5}{c}{{}_{15}\phi_{5}} \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
& & & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
\multicolumn{15}{c}{{}_{5}\phi_{15}} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
& & & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
& & & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}
\end{array}\right]_{20}
$$

$$A_3 = \sum_{i=1}^{N_3}{}^{\oplus} \frac{1}{N_{3_i}} J_{N_{3_i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{5}{}^{\oplus} \frac{1}{N_{3_i}} J_{N_{3_i}}$$

$$= \frac{1}{N_{3_1}} J_{N_{3_1}} \oplus \frac{1}{N_{3_2}} J_{N_{3_2}} \oplus \frac{1}{N_{3_3}} J_{N_{3_3}} \oplus \frac{1}{N_{3_4}} J_{N_{3_4}} \oplus \frac{1}{N_{3_5}} J_{N_{3_5}}$$

$$A_3 = \frac{1}{6}\ {}_6\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}_6 \oplus \frac{1}{5}\ {}_5\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1 \end{bmatrix}_5 \oplus \frac{1}{4}\ {}_4\begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix}_4 \oplus$$

$$\oplus \frac{1}{3}\ {}_3\begin{bmatrix} 1&1&1\\ 1&1&1\\ 1&1&1 \end{bmatrix}_3 \oplus \frac{1}{2}\ {}_2\begin{bmatrix} 1&1\\ 1&1 \end{bmatrix}_2$$

$$
A_3 = {}_{20}\left[\begin{array}{ccc}
\begin{matrix}1/6&1/6&1/6&1/6&1/6&1/6\\1/6&1/6&1/6&1/6&1/6&1/6\\1/6&1/6&1/6&1/6&1/6&1/6\\1/6&1/6&1/6&1/6&1/6&1/6\\1/6&1/6&1/6&1/6&1/6&1/6\\1/6&1/6&1/6&1/6&1/6&1/6\end{matrix} & {}_{6}\phi_{14} & \\
{}_{5}\phi_{6} & \begin{matrix}1/5&1/5&1/5&1/5&1/5\\1/5&1/5&1/5&1/5&1/5\\1/5&1/5&1/5&1/5&1/5\\1/5&1/5&1/5&1/5&1/5\\1/5&1/5&1/5&1/5&1/5\end{matrix} & {}_{5}\phi_{9} \\
{}_{4}\phi_{11} & \begin{matrix}1/4&1/4&1/4&1/4\\1/4&1/4&1/4&1/4\\1/4&1/4&1/4&1/4\\1/4&1/4&1/4&1/4\end{matrix} & {}_{4}\phi_{5} \\
{}_{5}\phi_{15} & \begin{matrix}1/3&1/3&1/3\\1/3&1/3&1/3\\1/3&1/3&1/3\end{matrix} & {}_{3}\phi_{2} \\
{}_{2}\phi_{3} & \begin{matrix}1/2&1/2\\1/2&1/2\end{matrix} &
\end{array}\right]_{20}
$$

$$
X_1X_1' = \left[\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{array} & 15^{\phi}5 \\
5^{\phi}15 &
\begin{array}{ccccc}
1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1
\end{array}
\end{array}\right]_{20}
$$

$$X_2X_2' = {}_{20}\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&&&&&&&&&&1&1&1&& \\
1&1&1&1&1&1&&&&&&&&&&1&1&1&& \\
1&1&1&1&1&1&&&&{}_{6}\phi_{9}&&&&&&1&1&1&{}_{6}\phi_{2}& \\
1&1&1&1&1&1&&&&&&&&&&1&1&1&& \\
1&1&1&1&1&1&&&&&&&&&&1&1&1&& \\
1&1&1&1&1&1&&&&&&&&&&1&1&1&& \\
&&&&&&1&1&1&1&1&&&&&&&&1&1 \\
&&&&&&1&1&1&1&1&&&&&&&&1&1 \\
&&{}_{5}\phi_{6}&&&&1&1&1&1&1&&&{}_{5}\phi_{7}&&&&&1&1 \\
&&&&&&1&1&1&1&1&&&&&&&&1&1 \\
&&&&&&1&1&1&1&1&&&&&&&&1&1 \\
&&&&&&&&&&&1&1&1&1&&&&& \\
&&{}_{4}\phi_{11}&&&&&&&&&1&1&1&1&&{}_{4}\phi_{5}&&& \\
&&&&&&&&&&&1&1&1&1&&&&& \\
&&&&&&&&&&&1&1&1&1&&&&& \\
1&1&1&1&1&1&&&&&&&&&&1&1&1&& \\
1&1&1&1&1&1&&&&&{}_{3}\phi_{9}&&&&&1&1&1&{}_{3}\phi_{2}& \\
1&1&1&1&1&1&&&&&&&&&&1&1&1&& \\
&&&&&&1&1&1&1&1&&&&&&&&1&1 \\
&&{}_{2}\phi_{6}&&&&1&1&1&1&1&&&{}_{2}\phi_{7}&&&&&1&1
\end{array}\right]_{20}$$

$$X_3X_3' = {}_{20}\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&&&&&&&&&&&&&& \\
1&1&1&1&1&1&&&&&&&&&&&&&& \\
1&1&1&1&1&1&&&&{}_6\phi_{14}&&&&&&&&&& \\
1&1&1&1&1&1&&&&&&&&&&&&&& \\
1&1&1&1&1&1&&&&&&&&&&&&&& \\
1&1&1&1&1&1&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&1&1&1&1&1&&&&&&&&& \\
&{}_5\phi_6&&&&&1&1&1&1&1&&&&{}_5\phi_9&&&&& \\
&&&&&&1&1&1&1&1&&&&&&&&& \\
&&&&&&1&1&1&1&1&&&&&&&&& \\
&&&&&&1&1&1&1&1&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&1&1&1&1&&&&& \\
&&{}_4\phi_{10}&&&&&&&&&1&1&1&1&&{}_4\phi_5&&& \\
&&&&&&&&&&&1&1&1&1&&&&& \\
&&&&&&&&&&&1&1&1&1&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&1&1&1&& \\
&&{}_5\phi_{14}&&&&&&&&&&&&&1&1&1&{}_3\phi_2& \\
&&&&&&&&&&&&&&&1&1&1&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&1&1 \\
&&&&&&&&&&&&&&&&{}_2\phi_3&&1&1
\end{array}\right]_{20}$$

Ordenemos $\underset{\sim}{y}$, para o fator 2.

$$
y = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 13 \\ 11 \\ 12 \\ 14 \\ 8 \\ 9 \\ 6 \\ 9 \\ 8 \\ 7 \\ 10 \\ 12 \\ 7 \\ 5 \\ 11 \\ 13 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}_{20 \times 1} \quad \underset{\sim}{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{20 \times 1} ; \; X_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{20 \times 2} ; \; X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{20 \times 3}
$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{20 \times 5}$$

De (23) temos:

$$A_2 = \sum_{i=1}^{N_2 \oplus} \frac{1}{N_{2_i}} J_{N_{2_i}}$$

$$A_2 = \sum_{i=1}^{3}{}^{\oplus} \frac{1}{N_{2_i}} J_{N_{2_i}}$$

$$A_2 = \frac{1}{N_{2_1}} J_{N_{2_1}} \oplus \frac{1}{N_{2_2}} J_{N_{2_2}} \oplus \frac{1}{N_{2_3}} J_{N_{2_3}}$$

$$A_2 = \frac{1}{9} {}_{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{9} \oplus \frac{1}{7} {}_{7}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{7} \oplus$$

$$\oplus \frac{1}{4} {}_{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4}$$

$$
A_2 = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & \multicolumn{11}{c}{} \\
1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & \multicolumn{11}{c}{} \\
1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & \multicolumn{11}{c}{} \\
1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & \multicolumn{11}{c}{} \\
1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & \multicolumn{11}{c}{9^{\phi}11} \\
1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & \multicolumn{11}{c}{} \\
1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & \multicolumn{11}{c}{} \\
1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & \multicolumn{11}{c}{} \\
1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & \multicolumn{11}{c}{} \\
\multicolumn{9}{c}{} & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & \multicolumn{4}{c}{} \\
\multicolumn{9}{c}{} & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & \multicolumn{4}{c}{} \\
\multicolumn{9}{c}{7^{\phi}9} & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & \multicolumn{4}{c}{7^{\phi}4} \\
\multicolumn{9}{c}{} & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & \multicolumn{4}{c}{} \\
\multicolumn{9}{c}{} & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & \multicolumn{4}{c}{} \\
\multicolumn{9}{c}{} & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & \multicolumn{4}{c}{} \\
\multicolumn{9}{c}{} & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & \multicolumn{4}{c}{} \\
\multicolumn{16}{c}{} & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\
\multicolumn{16}{c}{4^{\phi}16} & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\
\multicolumn{16}{c}{} & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\
\multicolumn{16}{c}{} & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4
\end{array}\right]_{20}
$$

20

$$
X_1X_1' = {}_{20}\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1&1&1&1&1&1& & & &1&1&1&1&1& & &1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1& & & &1&1&1&1&1& & &1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1& &7^{\phi}3& &1&1&1&1&1&7^{\phi}2& &1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1& & & &1&1&1&1&1& & &1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1& & & &1&1&1&1&1& & &1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1& & & &1&1&1&1&1& & &1&1&1&1\\
 & & & & & &1&1&1& & & & & &1&1& & & & \\
 & &3^{\phi}6& & & &1&1&1& & &3^{\phi}5& & &1&1& &3^{\phi}4& & \\
 & & & & & &1&1&1& & & & & &1&1& & & & \\
1&1&1&1&1&1& & & &1&1&1&1&1& & &1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1& & & &1&1&1&1&1& & &1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1& &5^{\phi}3& &1&1&1&1&1&5^{\phi}2& &1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1& & & &1&1&1&1&1& & &1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1& & & &1&1&1&1&1& & &1&1&1&1\\
 & &2^{\phi}6& & & &1&1&1& & &2^{\phi}5& & &1&1& &2^{\phi}4& & \\
 & & & & & &1&1&1& & & & & &1&1& & & & \\
1&1&1&1&1&1& & & &1&1&1&1&1& & &1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1& &4^{\phi}3& &1&1&1&1&1&4^{\phi}2& &1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1& & & &1&1&1&1&1& & &1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1& & & &1&1&1&1&1& & &1&1&1&1
\end{array}\right]_{20}
$$

$$X_2X_2' = {}_{20}\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&1&1&1& & & & & & & & & & & \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1& & & & & & & & & & & \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1& & & & & & & & & & & \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1& & & & & & & & & & & \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&\multicolumn{11}{c}{{}_{9}\phi_{11}} \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1& & & & & & & & & & & \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1& & & & & & & & & & & \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1& & & & & & & & & & & \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1& & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & &1&1&1&1&1&1&1& & & & \\
 & & & & & & & & &1&1&1&1&1&1&1& & & & \\
\multicolumn{9}{c}{{}_{7}\phi_{9}}&1&1&1&1&1&1&1&\multicolumn{4}{c}{{}_{7}\phi_{4}} \\
 & & & & & & & & &1&1&1&1&1&1&1& & & & \\
 & & & & & & & & &1&1&1&1&1&1&1& & & & \\
 & & & & & & & & &1&1&1&1&1&1&1& & & & \\
 & & & & & & & & &1&1&1&1&1&1&1& & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & &1&1&1&1 \\
\multicolumn{16}{c}{{}_{4}\phi_{16}}&1&1&1&1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & &1&1&1&1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & &1&1&1&1
\end{array}\right]_{20}$$

$$X_3X_3' = {}_{20}\left[\begin{array}{ccccc}
\begin{matrix}1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\end{matrix} & & {}_6\phi_{14} & & \\
{}_3\phi_6 & \begin{matrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{matrix} & & {}_3\phi_{11} & \\
{}_5\phi_9 & & \begin{matrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{matrix} & & {}_5\phi_6 \\
{}_2\phi_{14} & & & \begin{matrix}1&1\\1&1\end{matrix} & {}_2\phi_4 \\
& {}_4\phi_{16} & & & \begin{matrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{matrix}
\end{array}\right]_{20}$$

Coeficientes das equações:

1ª Equação

$N = 20$

$$tr\ A_\mu X_1 X_1' = 250 \frac{1}{20} = \frac{25}{2}$$

$$tr\ A_\mu X_2 X_2' = 146 \frac{1}{20} = \frac{73}{10}$$

$$tr\ A_\mu X_3 X_3' = 90 \frac{1}{20} = \frac{9}{2}$$

$$tr\ A_\mu = 1$$

2ª Equação

$N = 20$

$$tr\ A_1 X_1 X_1' = 225 \frac{1}{15} + 25 \frac{1}{5} = 20$$

$$tr\ A_1 X_2 X_2' = 77 \frac{1}{15} + 13 \frac{1}{5} = \frac{77 + 39}{15} = \frac{116}{15}$$

$$tr\ A_1 X_3 X_3' = 77 \frac{1}{15} + 13 \frac{1}{5} = \frac{116}{15}$$

$$tr\ A_1 = 1 + 1 = 2$$

3ª Equação

$$N = 20$$

$$\mathrm{tr}\; A_2 X_1 X_1' = 45\,\frac{1}{9} + 29\,\frac{1}{7} + 16\,\frac{1}{4} = \frac{92}{7}$$

$$\mathrm{tr}\; A_2 X_2 X_2' = 81\,\frac{1}{9} + 49\,\frac{1}{7} + 16\,\frac{1}{4} = 20$$

$$\mathrm{tr}\; A_2 X_3 X_3' = 45\,\frac{1}{9} + 29\,\frac{1}{7} + 16\,\frac{1}{4} = \frac{92}{7}$$

$$\mathrm{tr}\; A_2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

4ª Equação

$$N = 20$$

$$\mathrm{tr}\; A_3 X_1 X_1' = 36\,\frac{1}{6} + 25\,\frac{1}{5} + 16\,\frac{1}{4} + 9\,\frac{1}{3} + 4\,\frac{1}{2} = 20$$

$$\mathrm{tr}\; A_3 X_2 X_2' = 36\,\frac{1}{6} + 25\,\frac{1}{5} + 16\,\frac{1}{4} + 9\,\frac{1}{3} + 4\,\frac{1}{2} = 20$$

$$\mathrm{tr}\; A_3 X_3 X_3' = 36\,\frac{1}{6} + 25\,\frac{1}{5} + 16\,\frac{1}{4} + 9\,\frac{1}{3} + 4\,\frac{1}{2} = 20$$

$$tr\ A_3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

5ª Equação

$$N = 20$$

$$tr\ X_1X_1' = 20$$

$$tr\ X_2X_2' = 20$$

$$tr\ X_3X_3' = 20$$

$$tr\ I_{20} = 20$$

Cálculo do vetor de termos independentes.

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{y}'A_\mu\underset{\sim}{y} \\ \underset{\sim}{y}'A_1\underset{\sim}{y} \\ \underset{\sim}{y}'A_2\underset{\sim}{y} \\ \underset{\sim}{y}'A_3\underset{\sim}{y} \\ \underset{\sim}{y}'I\ \underset{\sim}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_\mu \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_0 \end{bmatrix}$$

Podemos fazer uso da expressão (20) para obter:

$$\underset{\sim}{y}'A_\mu\underset{\sim}{y} = T_\mu = \frac{(194)^2}{20} = \frac{9409}{5}$$

$$\underset{\sim}{y}'A_1\underset{\sim}{y} = T_1 = \frac{(159)^2}{15} + \frac{(35)^2}{5} = \frac{9652}{5}$$

$$\underset{\sim}{y}'A_2\underset{\sim}{y} = T_2 = \frac{(95)^2}{9} + \frac{(58)^2}{7} + \frac{(41)^2}{4} =$$

$$= \frac{479707}{252}$$

$$\underset{\sim}{y}'A_3\underset{\sim}{y} = T_3 = \frac{(72)^2}{6} + \frac{(46)^2}{5} + \frac{(41)^2}{4} + \frac{(23)^2}{3} +$$

$$+ \frac{(12)^2}{2} = \frac{117347}{60}$$

$$\underset{\sim}{y}'J\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} = 2006$$

Teremos então, por (22):

$$20\hat{\mu}^2 + \frac{25}{2}\hat{\sigma}_1^2 + \frac{73}{10}\hat{\sigma}_2^2 + \frac{9}{2}\hat{\sigma}_3^2 + 1\,\hat{\sigma}_e^2 = \frac{9409}{5}$$

$$20\hat{\mu}^2 + 20\,\hat{\sigma}_1^2 + \frac{116}{15}\hat{\sigma}_2^2 + \frac{116}{15}\hat{\sigma}_3^2 + 2\,\hat{\sigma}_e^2 = \frac{9652}{5}$$

$$20\hat{\mu}^2 + \frac{92}{7}\hat{\sigma}_1^2 + 20\hat{\sigma}_2^2 + \frac{92}{7}\hat{\sigma}_3^2 + 3\hat{\sigma}_e^2 = \frac{479707}{252}$$

$$20\hat{\mu}^2 + 20\,\hat{\sigma}_1^2 + 20\,\hat{\sigma}_2^2 + 20\,\hat{\sigma}_3^2 + 5\,\hat{\sigma}_e^2 = \frac{117347}{60}$$

$$20\hat{\mu}^2 + 20\,\hat{\sigma}_1^2 + 20\,\hat{\sigma}_2^2 + 20\,\hat{\sigma}_3^2 + 20\,\hat{\sigma}_e^2 = 2006$$

Fazendo a correção para a média, teremos:

$$(20 - \frac{25}{2})\,\hat{\sigma}_1^2 + (\frac{116}{15} - \frac{73}{10})\,\hat{\sigma}_2^2 + (\frac{116}{15} - \frac{9}{2})\,\hat{\sigma}_3^2 +$$

$$+ (2 - 1)\hat{\sigma}_e^2 = \frac{243}{5}$$

$$(\frac{92}{7} - \frac{25}{2})\,\hat{\sigma}_1^2 + (20 - \frac{73}{10})\hat{\sigma}_2^2 + (\frac{92}{7} - \frac{9}{2})\hat{\sigma}_3^2 +$$

$$+ (3 - 1)\,\hat{\sigma}_e^2 = \frac{27467}{1260}$$

$$(20 - \frac{92}{7} - 20 + \frac{25}{2})\hat{\sigma}_1^2 + (20 - 20 - \frac{116}{15} + \frac{73}{10})\,\hat{\sigma}_2^2 +$$

$$+ (20 - \frac{92}{7} - \frac{116}{15} + \frac{9}{2})\hat{\sigma}_3^2 +$$

$$+ (5 - 3 - 2 + 1)\,\hat{\sigma}_e^2 = \frac{4516}{1260}$$

$$0\,\hat{\sigma}_1^2 + 0\,\hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2 + (20 - 5)\,\hat{\sigma}_e^2 = \frac{3013}{60}$$

ou ainda:

$$\frac{15}{2}\,\hat{\sigma}_1^2 + \frac{13}{30}\,\hat{\sigma}_2^2 + \frac{97}{30}\,\hat{\sigma}_3^2 + 1\,\hat{\sigma}_e^2 = \frac{243}{5}$$

$$\frac{9}{14}\,\hat{\sigma}_1^2 + \frac{127}{10}\,\hat{\sigma}_2^2 + \frac{121}{14}\,\hat{\sigma}_3^2 + 2\,\hat{\sigma}_e^2 = \frac{27467}{1260}$$

$$\frac{-9}{14}\hat{\sigma}_1^2 + \frac{-13}{30}\hat{\sigma}_2^2 + \frac{761}{210}\hat{\sigma}_3^2 + 1\,\hat{\sigma}_e^2 = \frac{4516}{1260}$$

$$0\,\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}0\,\hat{\sigma}_2^2 + 0\,\hat{\sigma}_3^2 + 15\hat{\sigma}_e^2 = \frac{3013}{60}$$

De (24) temos:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} \frac{15}{2} & \frac{13}{30} & \frac{97}{30} & 1 \\ \frac{9}{14} & \frac{127}{10} & \frac{121}{14} & 2 \\ \frac{-9}{14} & \frac{-13}{30} & \frac{761}{210} & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{\sigma}_1^2 \\ \hat{\sigma}_2^2 \\ \hat{\sigma}_3^2 \\ \hdashline \hat{\sigma}_e^2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \frac{243}{5} \\ \frac{27467}{1260} \\ \frac{4516}{1260} \\ \hdashline \frac{3013}{60} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} P & f \\ \underset{\sim}{0}' & N - r(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\sigma}^2 \\ \sigma_e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{S} \\ SSE \end{bmatrix}$$

Portanto: de (25) e (26) teremos:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{SSE}{N - r(X)} = \frac{3013/60}{15} = \frac{3013}{900}$$

$$\underset{\sim}{\hat{\sigma}}^2 = P^{-1}\,[\underset{\sim}{S} - f\,\hat{\sigma}_e^2]$$

$$\underset{\sim}{\sigma}^2 = \frac{1225}{484288} \begin{bmatrix} \frac{104512}{2100} & \frac{-18720}{6300} & \frac{-78368}{2100} \\ \frac{-7728}{980} & \frac{12288}{420} & \frac{-26352}{420} \\ \frac{3312}{420} & \frac{1248}{420} & \frac{39888}{420} \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{243}{5} \\ \frac{27467}{1260} \\ \frac{4516}{1260} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{3013}{900} \right]$$

$$\underset{\sim}{\hat{\sigma}}^2 = \frac{1225}{484288} \begin{bmatrix} \frac{104512}{2100} & \frac{-18720}{6300} & \frac{-79368}{2100} \\ \frac{-7728}{980} & \frac{12288}{420} & \frac{-26352}{420} \\ \frac{3312}{420} & \frac{3248}{420} & \frac{39888}{420} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{40727}{900} \\ \frac{55153}{6300} \\ \frac{1489}{6300} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\hat{\sigma}}^2 = \begin{bmatrix} 5,560813 \\ 0,177606 \\ 1,072937 \end{bmatrix}$$

Portanto os componentes da variância segundo o método 1 de Henderson são: $\hat{\sigma}_1^2 \cong 5,56$; $\hat{\sigma}_2^2 \cong 0,18$; $\hat{\sigma}_3^2 \cong 1,07$; $\hat{\sigma}_e^2 \cong 3,35$

4.2. "Método 2 de Henderson" para um modelo misto com três fatores de classificação, sendo um fixo e sem interação

4.2.1. Modelo e sistema de equações

Seja o modelo dado por:

$$\underset{\sim}{y} = \mu \underset{\sim}{1} + X_1 \underset{\sim}{\beta}_1 + X_2 \underset{\sim}{\beta}_2 + X_3 \underset{\sim}{\beta}_3 + \underset{\sim}{e} \qquad (61)$$

onde consideraremos fixo o fator 1.

Então temos $\underset{\sim}{\beta}_F = \underset{\sim}{\beta}_1$ e $\underset{\sim}{\beta}'_A = [\underset{\sim}{\beta}'_2 \underset{\sim}{\beta}'_3]$ e em correspondência $X_F = X_1$ e $X_A = [X_2 \ X_3]$.

Devemos calcular $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_F = L\underset{\sim}{y}$ para em seguida fazermos: $\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{y} - X_F L \underset{\sim}{y}$, e aplicarmos o "MÉTODO 1" em:

$$\underset{\sim}{Z} = \mu^* \underset{\sim}{1} + X_A \underset{\sim}{\beta}_A + Z^* \underset{\sim}{e}$$

ou

$$\underset{\sim}{Z} = \mu^* \underset{\sim}{1} + X_2 \underset{\sim}{\beta}_2 + X_3 \underset{\sim}{\beta}_3 + (I - X_F L)\, \underset{\sim}{e} \qquad (62)$$

Sejam os totais não corrigidos:

$$T_0 = \underset{\sim}{Z}' I \underset{\sim}{Z}$$

$$T_2 = \underset{\sim}{Z}' X_2 (X_2' X_2)^- X_2' \underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{Z}' A_2 \underset{\sim}{Z}$$

$$T_3 = \underset{\sim}{Z}'X_3(X_3'X_3)^- X_3'\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{Z}'A_3\underset{\sim}{Z}$$

$$T_\mu^* = \underset{\sim}{Z}'\underset{\sim}{1}\ (\underset{\sim}{1}'\underset{\sim}{1})^- \underset{\sim}{1}'\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{Z}'A_\mu^*\underset{\sim}{Z}$$

O "MÉTODO 1 DE HENDERSON" consiste no cálculo de combinações apropriadas dos T(s), igualando-as as suas esperanças.

De (2) temos:

$$E[\underset{\sim}{Z}'Q\underset{\sim}{Z}] = tr\ [QV] + E[\underset{\sim}{Z}']\ QE[\underset{\sim}{Z}] \text{ onde } V = Cov[\underset{\sim}{Z}]$$

$$E[\underset{\sim}{Z}] = \mu^*\underset{\sim}{1} \qquad ; \quad E[\underset{\sim}{Z}'] = \underset{\sim}{1}'\mu^*$$

$$V = Cov[\underset{\sim}{Z}] = Cov[\mu^*\underset{\sim}{1} + X_2\underset{\sim}{\beta}_2 + X_3\underset{\sim}{\beta}_3 + (I - X_FL)\ \underset{\sim}{e}]$$

$$= Cov[X_2\underset{\sim}{\beta}_2] + Cov\ [X_3\underset{\sim}{\beta}_3] + Cov[(I - X_FL)\underset{\sim}{e}]$$

$$Cov[\underset{\sim}{Z}] = X_2I\sigma_2^2X_2' + X_3I\sigma_3^2X_3' + (I - X_FL)I\sigma_e^2(I - X_FL)'$$

$$\therefore \quad E[Z'QZ] = \underset{\sim}{1}'\mu^*\mu^*\underset{\sim}{1} + \sum_{i=2}^{3} \sigma_i^2\ tr\ QX_iX_i' + \sigma_e^2\ tr\ Q(I - X_FL)(I - X_FL)'$$

ou ainda

$$E[Z'QZ] = N\mu^{*2} + \sum_{i=2}^{3} \sigma_i^2\ tr\ QX_iX_i' + \sigma_e^2\ tr\ Q(I - X_FL)(I - X_FL)'\ .$$

Apliquemos então estes resultados em T_0, T_2, T_3 e T_μ*.

Em $T_0 = \underset{\sim}{Z} I \underset{\sim}{Z}'$, temos $Q = I$

logo,

$$E[T_0] = N\,\mu^{*2} + trX_2X_2'\,\sigma_2^2 + trX_3X_3'\,\sigma_3^2 + tr(I - X_FL)(I - X_FL)'\sigma_e^2$$

Em $T_2 = \underset{\sim}{Z}'X_2(X_2'X_2)^-X_2'\,\underset{\sim}{Z}$, temos $Q = X_2(X_2'X_2)^-X_2'$

logo

$$E[T_2] = N\mu^{*2} + trX_2(X_2'X_2)^-X_2'X_2X_2'\sigma_2^2 + trX_2(X_2'X_2)^-X_2'X_3X_3'\sigma_3^2 +$$

$$+ trX_2(X_2'X_2)^-X_2'(I - X_FL)(I - X_FL)'\,\sigma_e^2$$

Em $T_3 = \underset{\sim}{Z}'X_3(X_3'X_3)^-X_3'\underset{\sim}{Z}$, temos $Q = X_3(X_3'X_3)^-X_3'$

logo

$$E[T_3] = N\mu^{*2} + trX_3(X_3'X_3)^-X_3'X_2X_2'\,\sigma_2^2 + tr\,X_3(X_3'X_3)^-X_3'X_3X_3'\sigma_3^2 +$$

$$+ tr\,X_3(X_3'X_3)^-X_3'(I - X_FL)(I - X_FL)'\,\sigma_e^2$$

Em $T\mu^* = \underset{\sim}{Z}'\,\frac{1}{N}\,J\,\underset{\sim}{Z}$, temos $Q = \frac{1}{N}\,J$ onde $J = \underset{\sim}{1}\,\underset{\sim}{1}'$

logo,

$$E[T\mu^*] = N\mu^{*2} + tr\,\frac{1}{N}\,JX_2X_2'\,\sigma_2^2 + tr\,\frac{1}{N}\,JX_3X_3'\sigma_3^2 +$$

$$+ tr\,\frac{1}{N}\,J(I - X_FL)(I - X_FL)'\,\sigma_e^2$$

Analisemos alguns termos em $E[T_2]$ e $E[T_3]$.

Em $E[T_2]$ façamos:

$$\text{tr}\ [X_2(X_2'X_2)^- X_2'\ (I - X_F L)(I - X_F L)'] = A$$

então,

$$A = \text{tr}\ [(I - X_F L)' X_2 (X_2'X_2)^- X_2'(I - X_F L)]$$

$$= \text{tr}\ [(I - L'X_F')X_2(X_2'X_2)^- X_2'(I - X_F L)]$$

$$= \text{tr}\ [X_2(X_2'X_2)^- X_2'(I - X_F L) - L'X_F'X_2(X_2'X_2)^- X_2'(I - X_F L)]$$

$$= \text{tr}\ [X_2(X_2'X_2)^- X_2' - X_2(X_2'X_2)^- X_2'X_F L - L'X_F'X_2(X_2'X_2)^- X_2' + $$

$$+ L'X_F'X_2(X_2'X_2)^- X_2'X_F L]$$

$$= \text{tr}\ [X_2(X_2'X_2)^- X_2'] - \text{tr}\ [X_2(X_2'X_2)^- X_2'X_F L] - \text{tr}\ [L'X_F'X_2(X_2'X_2)^- X_2'] +$$

$$+ \text{tr}\ [LL'X_F'X_2(X_2'X_2)^- X_2'X_F]$$

$$= \text{tr}\ [X_2(X_2'X_2)^- X_2'] - \text{tr}\ [LX_2(X_2'X_2)^- X_2'F] - \text{tr}\ [X_2'L'X_F'X_2(X_2'X_2)^-] +$$

$$+ \text{tr}\ [LL'X_F'X_2(X_2'X_2)^- X_2'X_F]$$

$$A = \text{tr}[X_2(X_2'X_2)^- X_2'] + \text{tr}[LL'X_F'X_2(X_2'X_2)^- X_2'X_F]$$

desde que por (45.1), $LX_A = \phi$

Portanto:

$$\mathrm{tr}\,[X_2(X_2'X_2)^- X_2'(I - X_F L)(I - X_F L)'] = \mathrm{tr}\,[X_2(X_2'X_2)^- X_2] +$$

$$+ \mathrm{tr}\,[LL'X_F'X_2(X_2'X_2)^- X_2'X_F]$$

e por (14-B) e (14-E) temos: $X_2(X_2'X_2)^- X_2'X_2 = X_2$.

Analogamente obteremos os mesmos resultados em $E[T_3]$.

Portanto, teremos de (22):

$$E[T_0] = N\hat{\mu}^{*2} + \mathrm{tr}X_2X_2'\hat{\sigma}_2^2 + \mathrm{tr}X_3X_3'\hat{\sigma}_3^2 + \mathrm{tr}(I - X_F L)(I - X_F L)'\hat{\sigma}_e^2 = T_0$$

$$E[T_2] = N\hat{\mu}^{*2} + \mathrm{tr}X_2X_2'\hat{\sigma}_2^2 + \mathrm{tr}X_2(X_2'X_2)^- X_2'X_3X_3'\hat{\sigma}_3^2 + \{\mathrm{tr}[X_2(X_2'X_2)^- X_2'] +$$

$$+ \mathrm{tr}[LL'X_F'X_2(X_2'X_2)^- X_2'X_F]\}\hat{\sigma}_e^2 = T_2$$

$$E[T_3] = N\hat{\mu}^{*2} + \mathrm{tr}X_3(X_3'X_3)^- X_3'X_2X_2'\hat{\sigma}_2^2 + \mathrm{tr}X_3X_3'\hat{\sigma}_3^2 + \{\mathrm{tr}[X_3(X_3'X_3)^- X_3'] +$$

$$+ \mathrm{tr}[LL'X_F'X_3(X_3'X_3)^- X_3'X_F]\}\hat{\sigma}_e^2 = T_3$$

$$E[T\mu^*] = N\mu^{*2} + \frac{1}{N}\,\mathrm{tr}\,JX_2X_2'\hat{\sigma}_2^2 + \frac{1}{N}\,\mathrm{tr}\,JX_3X_3'\hat{\sigma}_3^2 +$$

$$+ \frac{1}{N}\,\mathrm{tr}\,J(I - X_F)(I - X_F L)'\,\hat{\sigma}_e^2 = T\mu^*$$

Notemos ainda que:

$$LL' = \begin{bmatrix} \phi \\ Q_{11}F_2' + Q_{12}R_1' \end{bmatrix} [\phi \quad F_2Q_{11}' + R_1Q_{12}'] =$$

$$= \begin{bmatrix} \phi & \phi \\ \phi & (Q_{11}F_2' + Q_{12}R_1')(F_2Q_{11}' + R_1Q_{12}') \end{bmatrix}$$

mas,

$$(Q_{11}F_2' + Q_{12}R_1')(F_2Q_{11}' + R_1Q_{12}') = Q_{11}F_2'F_2Q_{11}' + Q_{11}F_2'R_1Q_{12}' +$$

$$+ Q_{12}R_1'F_2Q_{11}' + Q_{12}R_1'R_1Q_{12}'$$

$$= Q_{11}(F_2'F_2Q_{11}' + F_2' R_1Q_{12}') +$$

$$+ Q_{12}(R_1'F_2Q_{11}' + R_1'R_1Q_{12}')$$

$$= Q_{11}(F_2'F_2Q_{11} + F_2'R_1Q_{21}) +$$

$$+ Q_{12}(R_1'F_2Q_{11} + R_1'R_1Q_{21})$$

$$= Q_{11} \, I + Q_{12} \, \phi = Q_{11}$$

$$\therefore \quad LL' = \begin{bmatrix} \phi & \phi \\ \phi & Q_{11} \end{bmatrix}$$

4.2.2. Aplicação numérica do método 2

Consideremos um conjunto fictício de dados, e ajustemos o modelo (61).

		Fator 1					
		nível 1		nível 2		nível 3	
		Fator 2		Fator 2		Fator 2	
		nível 1	nível 2	nível 1	nível 2	nível 1	nível 2
Fator 3	nível 1	10	12	9	8	11	13
		13	11	7	10	10	7
		12	14	12			
	nível 2	8	9	7	15		
		6					

Então teremos:

$$\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 13 \\ 11 \\ 12 \\ 14 \\ 8 \\ 9 \\ 6 \\ 9 \\ 8 \\ 7 \\ 10 \\ 12 \\ 7 \\ 15 \\ 11 \\ 13 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}_{20\,1} ; \; X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{20\,3} ; \; X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{20\,2} ; \; X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{20\,2}$$

Temos que $r[X'X] = r[X] = 5$, portanto temos que eliminar duas colunas de X, para encontrar uma sub-matriz de X'X com posto 5. Nas eliminações tantas quantas forem possíveis serão colunas de $X_F = X_1$ ou através de $X_F'X_F = X_1'X_1$.

Seja então a partição de X, como em (42), isto é $X = [F_1\ F_2\ R_1\ R_2]$ tal que $r\,[F_2\ R_1] = r\,[X] = 5$.

Então teremos:

$$F_1 = {}_{20}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_1 \quad F_2 = {}_{20}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_2 \quad R_1 = {}_{20}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_3 \quad R_2 = {}_{20}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_1$$

Portanto de (43) temos:

$$L = \begin{bmatrix} & \phi & \\ Q_{11}F_2' & + & Q_{12}R_1' \end{bmatrix}$$

A obtenção de Q_{11} e Q_{12}, é feita através de (42.1) e (42.2), isto é, a partir da inversa de:

$$M = \begin{bmatrix} F_2'F_2 & F_2'R_1 \\ R_1'F_2 & R_1'R_1 \end{bmatrix} \quad \text{então} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

Então teremos:

$$M = \left[\begin{array}{cc|ccc} 7 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ \hline 4 & 2 & 11 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 9 & 7 \\ 5 & 4 & 8 & 7 & 15 \end{array}\right]$$

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right]$$

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{cc:ccc} \frac{84281}{330904} & \frac{38253}{330904} & \frac{-34210}{330904} & \frac{-32966}{330904} & \frac{-15}{1064} \\ \frac{38253}{330904} & \frac{130309}{330904} & \frac{-14306}{330904} & \frac{-16794}{330904} & \frac{-103}{1064} \\ \hdashline \frac{-17105}{165452} & \frac{-7153}{165452} & \frac{45406}{165452} & \frac{31722}{165452} & \frac{-202}{1064} \\ \frac{-16482}{165452} & \frac{-8397}{165452} & \frac{31722}{165452} & \frac{51626}{165452} & \frac{-214}{1064} \\ \frac{-15}{1064} & \frac{-103}{1064} & \frac{-202}{1064} & \frac{-214}{1064} & \frac{311}{1064} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hdashline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right]$$

Então de (43) temos:

$$L = \begin{bmatrix} \phi \\ Q_{11}F_2' + Q_{12}R_1' \end{bmatrix} \text{, portanto:}$$

$$L' = \frac{1}{330904} \begin{bmatrix} 0 & -38875 & -46339 \\ 0 & -37631 & -48827 \\ 0 & -38875 & -46339 \\ 0 & -37631 & -48827 \\ 0 & -38875 & -46339 \\ 0 & -37631 & -48827 \\ 0 & -34210 & -14306 \\ 0 & -32966 & -16794 \\ 0 & -34210 & -14306 \\ 0 & 45406 & -8086 \\ 0 & 46650 & -10574 \\ 0 & 45406 & -8086 \\ 0 & 46650 & -10574 \\ 0 & 45406 & -8086 \\ 0 & 50071 & 23947 \\ 0 & 51315 & 21459 \\ 0 & -622 & 83970 \\ 0 & 622 & 81482 \\ 0 & -622 & 83970 \\ 0 & 622 & 81482 \end{bmatrix}_{20 \times 3}$$

Obtenção dos dados corrigidos

$$\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{y} - X_F L y$$

ou

$$\underset{\sim}{Z} = (I - X_F L)\ \underset{\sim}{y} \quad , \quad \text{portanto:}$$

$$\underset{\sim}{Z} = \frac{1}{266} \begin{bmatrix} 2660,0 \\ 3192,0 \\ 3458,0 \\ 2926,0 \\ 3192,0 \\ 3724,0 \\ 2128,0 \\ 2394,0 \\ 1596,0 \\ 2633,5 \\ 2367,5 \\ 2101,5 \\ 2899,5 \\ 3431,5 \\ 2101,5 \\ 4229,5 \\ 3178,5 \\ 3710,5 \\ 2912,5 \\ 2114,5 \end{bmatrix}_{20 \times 1}$$

Com relação ao modelo (62), isto é:

$$\underset{\sim}{Z} = \mu^{*}\underset{\sim}{1} + X_2\underset{\sim}{\beta}_2 + X_3\underset{\sim}{\beta}_3 + (I - X_F L)\underset{\sim}{e}$$

podemos reorganizar o conjunto de dados da seguinte maneira.

		Fator 2	
		nível 1	nível 2
Fator 3	nível 1	$\frac{2660,0}{266}$ $\frac{2633,5}{266}$ $\frac{3178,5}{266}$ $\frac{3458,0}{266}$ $\frac{2101,5}{266}$ $\frac{2912,5}{266}$ $\frac{3192,0}{266}$ $\frac{3431,5}{266}$	$\frac{3192,0}{266}$ $\frac{2367,5}{266}$ $\frac{3710,5}{266}$ $\frac{2926,0}{266}$ $\frac{2899,5}{266}$ $\frac{2114,5}{266}$ $\frac{3724,0}{266}$
	nível 2	$\frac{2128,0}{266}$ $\frac{2101,5}{266}$ $\frac{1596,0}{266}$	$\frac{2394,0}{266}$ $\frac{4229,5}{266}$

- *Cálculo dos coeficientes das esperanças*

Em $E[T_0]$

$N = 20$

$tr\ X_2X_2' = tr\ X_2'X_2$

mas, $X_2'X_2 = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $tr\ X_2X_2' = 20$

$tr\ X_3X_3' = X_3'X_3$

mas, $X_3'X_3 = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $tr\ X_3X_3' = 20$

$$\begin{aligned} tr(I - X_FL)(I - X_FL)' &= tr(I - X_FL)'(I - X_FL) \\ &= tr(I - L'X_F')(I - X_FL) \\ &= tr[I - X_FL - L'X_F' + L'X_F'X_FL] \\ &= tr[I] - tr[X_FL] - tr[X_FL] + tr[L'X_F'X_FL] \end{aligned}$$

$$tr(I - X_FL)(I - X_FL)' = tr\ [I_{20}] - 2\ tr[X_FL] + tr[L'X_F'X_FL]$$

$tr\ [I_{20}] = 20$

$tr\ [X_FL] = \dfrac{661808}{330904} = 2$

$tr[L'X_F'X_FL] = tr[X_FLL'X_F']$

mas $$X_F LL'X_F' = [F_1 \;\; F_2] \begin{bmatrix} \phi & \phi \\ \phi & Q_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1' \\ F_2' \end{bmatrix}$$

$$X_F LL'X_F' = [\phi \;\; F_2 \, Q_{11}] \begin{bmatrix} F_1' \\ F_2' \end{bmatrix}$$

$$X_F LL'X_F' = F_2 \, Q_{11} \, F_2'$$

logo $$tr[X_F LL'X_F'] = tr[F_2 \, Q_{11} \, F_2'] = tr[F_2'F_2 \, Q_{11}]$$

$$= \frac{1}{330904} \, tr \left\{ \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 84281 & 38253 \\ 38253 & 130309 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{330904} \, [7(84281) + 4(130309)] = \frac{1111203}{330904}$$

$$tr[X_F LL'X_F'] = \frac{67887}{20216}$$

logo $$tr(I - X_F L)(I - X_F L)' = 20 - 4 + \frac{67887}{20216} = \frac{391343}{20216}$$

Em $E[T_2]$

$N = 20$

$tr \, X_2 X_2' = tr \, X_2' X_2 = 20$

Reordenemos o vetor $\underset{\sim}{Z}$ de maneira as matrizes X_2 e X_3 serem respectivamente:

$$X_2 = {}_{20}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_2 ; \quad X_3 = {}_{20}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_2 \quad \text{onde } \underset{\sim}{Z} = \frac{1}{266}\; {}_{20}\begin{bmatrix} 2660{,}0 \\ 2633{,}5 \\ 3178{,}5 \\ 3458{,}0 \\ 2101{,}5 \\ 2912{,}5 \\ 3192{,}0 \\ 3431{,}5 \\ 2128{,}0 \\ 2101{,}5 \\ 1596{,}0 \\ 3192{,}0 \\ 2367{,}5 \\ 3710{,}5 \\ 2926{,}0 \\ 2899{,}5 \\ 2114{,}5 \\ 3724{,}0 \\ 2394{,}0 \\ 4229{,}5 \end{bmatrix}_1$$

Seja

$A_2 = X_2(X_2'X_2)^{-}X_2'$. De (23) temos:

$$A_2 = \sum_{i=1}^{N_2}{}^{\oplus} \frac{1}{N_{2_i}} J_{N_{2_i}}$$

$$= \frac{1}{N_{2_1}} J_{N_{2_1}} \oplus \frac{-1}{N_{2_2}} J_{N_{2_2}}$$

$$
A_2 = {}_{20}\left[\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\
\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\
\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\
\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\
\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\
\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\
\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\
\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\
\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\
\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\
\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11}
\end{array} & {}_{11}\phi_{9} \\
{}_{9}\phi_{11} &
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9}
\end{array}
\end{array}\right]_{20}
$$

$$X_3X_3' = {}_{20}\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & {}_8\phi_3 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & {}_8\phi_2 & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & {}_3\phi_8 & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & {}_3\phi_7 & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & {}_7\phi_3 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & {}_7\phi_2 & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & & {}_2\phi_8 & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & {}_2\phi_7 & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & 1 & 1
\end{array}\right]_{20}$$

$$\therefore \quad \operatorname{tr} A_2X_3X_3' = 73\ \frac{1}{11} + 53\ \frac{1}{5} = \frac{1240}{55}$$

$$\operatorname{tr}[X_2(X_2'X_2)^- X_2'] = \operatorname{tr} A_2 = 1 + 1 = 2$$

$$\operatorname{tr}[LL'X_F'X_2(X_2'X_2)^- X_2'X_F] =$$

$$\operatorname{tr}[X_F LL'X_F'X_2(X_2'X_2)^- X_2'] = \operatorname{tr}[F_2Q_{11}F_2'X_2(X_2'X_2)^- X_2']$$

desde que $$X_F LL'X_F' = [F_1 \quad F_2] \begin{bmatrix} \phi & \phi \\ \phi & Q_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1' \\ F_2' \end{bmatrix}$$

$$X_F LL'X_F' = [\phi \quad F_2Q_{11}] \begin{bmatrix} F_1' \\ F_2' \end{bmatrix} = F_2Q_{11}F_2' ,$$

como já vimos anteriormente.

Portanto:

$$\operatorname{tr}[F_2Q_{11}F_2'X_2(X_2'X_2)^- X_2'] = \frac{133321}{105336}$$

Em T_3

$N = 20$

$$\operatorname{tr}X_3X_3' = \operatorname{tr}X_3'X_3 = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 20$$

Reordenemos o vetor $\underset{\sim}{Z}$ de maneira as matrizes X_3 e X_2 serem respectivamente:

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{20 \times 2} ; \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{20 \times 2} \quad \text{onde } \underset{\sim}{Z} = \frac{1}{266} \begin{bmatrix} 2660,0 \\ 2633,5 \\ 3178,5 \\ 3458,0 \\ 2101,5 \\ 2912,5 \\ 3192,0 \\ 3431,5 \\ 3192,0 \\ 2367,5 \\ 3710,5 \\ 2926,0 \\ 2899,5 \\ 2114,5 \\ 3724,0 \\ 2128,0 \\ 2101,5 \\ 1596,0 \\ 2394,0 \\ 4229,5 \end{bmatrix}_{20 \times 1}$$

Seja $A_3 = X_3(X_3'X_3)^-X_3'$. De (23) temos:

$$A_3 = \sum_{i=1}^{N_3}{}^{\oplus} \frac{1}{N_{3_i}} J_{N_{3_i}}$$

$$= \frac{1}{N_{3_1}} J_{N_{3_1}} \oplus \frac{1}{N_{3_2}} J_{N_{3_2}}$$

$$A_3 = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & {}_{15}\Phi_{5} & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
 & & & & & & & {}_{5}\Phi_{15} & & & & & & & & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}
\end{array}\right]_{20}$$

$$X_2X_2' = {}_{20}\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&1&1& & & & & & & &1&1&1& & \\
1&1&1&1&1&1&1&1& & & & & & & &1&1&1& & \\
1&1&1&1&1&1&1&1& & & & & & & &1&1&1& & \\
1&1&1&1&1&1&1&1& & & &{}_8\phi_7& & & &1&1&1&{}_8\phi_2& \\
1&1&1&1&1&1&1&1& & & & & & & &1&1&1& & \\
1&1&1&1&1&1&1&1& & & & & & & &1&1&1& & \\
1&1&1&1&1&1&1&1& & & & & & & &1&1&1& & \\
 & & & & & & & &1&1&1&1&1&1&1& & & &1&1\\
 & & & & & & & &1&1&1&1&1&1&1& & & &1&1\\
 & & & {}_7\phi_8& & & & &1&1&1&1&1&1&1&{}_7\phi_3& & &1&1\\
 & & & & & & & &1&1&1&1&1&1&1& & & &1&1\\
 & & & & & & & &1&1&1&1&1&1&1& & & &1&1\\
 & & & & & & & &1&1&1&1&1&1&1& & & &1&1\\
 & & & & & & & &1&1&1&1&1&1&1& & & &1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1& & & & & & & &1&1&1& & \\
1&1&1&1&1&1&1&1& & &{}_3\phi_7& & & & &1&1&1&{}_3\phi_2& \\
1&1&1&1&1&1&1&1& & & & & & & &1&1&1& & \\
 & & & {}_2\phi_8& & & & &1&1&1&1&1&1&1&{}_2\phi_3& & &1&1\\
 & & & & & & & &1&1&1&1&1&1&1& & & &1&1
\end{array}\right]_{20}$$

$$tr\ A_3X_2X_2' = 113\ \frac{1}{15} + 13\ \frac{1}{5} = \frac{113 + 39}{15} =$$

$$= \frac{152}{15}$$

$$tr\ A_3 = X_3(X_3'X_3)^{-}X_3' = 2$$

Como no caso anterior:

$$tr[LL'X_F'X_3(X_3'X_3)^{-}X_3'X_F] = tr[F_2Q_{11}F_2'X_3(X_3'X_3)^{-}X_3'] = tr[V]$$

$$tr[V] = \frac{6733461}{(330504)(15)} = \frac{21651}{15960}$$

Em $T\mu^*$

$N = 20$

$$\frac{1}{N}\ tr\ J\ X_2X_2' = \frac{202}{20}$$

$$\frac{1}{N}\ tr\ JX_3X_3' = \frac{250}{20}$$

Façamos

$$\frac{1}{N}\ tr\ [J(I - X_FL)(I - X_FL)'] = A, \text{ então:}$$

$$A = \frac{1}{N}\ tr[JI - JX_FL - JL'X_F' + J\ F_2\ Q_{11}\ F_2']$$

e operando em cada termo obteremos:

$$\frac{1}{N} tr[J\ 1] = \frac{1}{20}\ 20 = 1$$

$$\frac{1}{N} tr\ [J\ X_F L] = 0$$ pois a soma das linhas de L é zero.

$$\frac{1}{N} tr[JL'X_F'] = 0$$ pois a soma das linhas de L é zero.

$$\frac{1}{N} tr[JF_2 Q_{11} F_2'] = \frac{26871}{21280}$$

logo,

$$A = \frac{1}{N} tr[J(I - X_F L)(I - X_F L')] = 1 + \frac{26871}{21280} =$$

$$= \frac{48151}{21280}$$

Portanto teremos:

$$E[T_0] = 20\ \mu^{*2} + 20\sigma_2^2 + 20\sigma_3^2 + \frac{391343}{20216}\ \sigma_e^2$$

$$E[T_2] = 20\mu^{*2} + 20\sigma_2^2 + \frac{1240}{99}\ \sigma_3^2 + \frac{343993}{105336}\ \sigma_e^2$$

$$E[T_3] = 20\mu^{*2} + \frac{152}{15}\ \sigma_2^2 + 20\sigma_3^2 + \frac{53571}{15960}\ \sigma_e^2$$

$$E[T\mu^*] = 20\mu^{*2} + \frac{202}{20}\sigma_2^2 + \frac{250}{20}\sigma_3^2 + \frac{48151}{21280}\sigma_e^2$$

Calculemos $T_0 = \underset{\sim}{Z}'A_0\underset{\sim}{Z}$; $T_2 = \underset{\sim}{Z}'A_2\underset{\sim}{Z}$; $T_3 = \underset{\sim}{Z}'A_3\underset{\sim}{Z}$; $T\mu^* = \underset{\sim}{Z}'A\mu^*\underset{\sim}{Z}$, aplicando a expressão (20).

$$T_0 = \underset{\sim}{Z}'I\underset{\sim}{Z} = 2415{,}568500$$

$$T_2 = \underset{\sim}{Z}'A_2\underset{\sim}{Z} = 2302{,}565181$$

$$T_3 = \underset{\sim}{Z}'A_3\underset{\sim}{Z} = 2303{,}989583$$

$$T\mu^* = \underset{\sim}{Z}'A\mu^*\underset{\sim}{Z} = 2291{,}932444$$

Temos então por (22)

$$20\hat{\mu}^{*2} + \frac{202}{20}\hat{\sigma}_2^2 + \frac{250}{20}\hat{\sigma}_3^2 + \frac{48151}{21280}\hat{\sigma}_e^2 = 2291{,}932444$$

$$20\hat{\mu}^{*2} + 20\hat{\sigma}_2^2 + \frac{1240}{99}\hat{\sigma}_3^2 + \frac{343993}{105336}\hat{\sigma}_e^2 = 2302{,}565181$$

$$20\hat{\mu}^{*2} + \frac{152}{15}\hat{\sigma}_2^2 + 20\hat{\sigma}_3^2 + \frac{53571}{15960}\hat{\sigma}_e^2 = 2303{,}989583$$

$$20\hat{\mu}^{*2} + 20\hat{\sigma}_2^2 + 20\hat{\sigma}_3^2 + \frac{391343}{20216}\hat{\sigma}_e^2 = 2415{,}568500$$

Façamos agora:

$$\hat{E}[T_2 - T\mu^*] = T_2 - T\mu^*$$

$$\hat{E}[T_3 - T\mu^*] = T_3 - T\mu^*$$

$$\hat{E}[T_0 - T_2 - T_3 + T\mu^*] = T_0 - T_2 - T_3 + T\mu^*$$

Obteremos então:

$$(20 - \frac{202}{20})\hat{\sigma}_2^2 + (\frac{1240}{99} - \frac{250}{20})\hat{\sigma}_3^2 + (\frac{343993}{105336} - \frac{48151}{21280})\hat{\sigma}_e^2 =$$

$$= 10,632737$$

$$(\frac{152}{15} - \frac{202}{20})\hat{\sigma}_2^2 + (20 - \frac{250}{20})\hat{\sigma}_3^2 + (\frac{53571}{15960} - \frac{48151}{21280})\hat{\sigma}_e^2 =$$

$$= 12,057139$$

$$-\frac{1}{30}\hat{\sigma}_2^2 - \frac{5}{98}\hat{\sigma}_3^2 + (\frac{391343}{20216} - \frac{53571}{15960} - \frac{343593}{105330} + \frac{48151}{21280})\hat{\sigma}_e^2 =$$

$$= 100,946180$$

ou ainda,

$$\frac{198}{20}\hat{\sigma}_2^2 + \frac{50}{1980}\hat{\sigma}_3^2 + \frac{2112911}{2106720}\hat{\sigma}_e^2 = 10,632737$$

$$\frac{1}{30}\hat{\sigma}_2^2 + \frac{150}{20}\hat{\sigma}_3^2 + \frac{2304423}{2106720}\hat{\sigma}_e^2 = 12,057139$$

$$-\frac{1}{30}\hat{\sigma}_2^2 - \frac{50}{1980}\hat{\sigma}_3^2 + \frac{31597777}{2106720}\hat{\sigma}_e^2 = 100,946180$$

Temos então o sistema:

$$P\ \hat{\sigma}^2 = Q$$

onde
$$P = \begin{bmatrix} \frac{198}{20} & \frac{50}{1980} & \frac{2112911}{2106720} \\ \frac{1}{30} & \frac{150}{20} & \frac{2304423}{2106720} \\ -\frac{1}{30} & \frac{-50}{1980} & \frac{31597777}{2106720} \end{bmatrix} ; \quad \hat{\sigma}^2 = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_2^2 \\ \hat{\sigma}_3^2 \\ \hat{\sigma}_e^2 \end{bmatrix}$$

e
$$Q = \begin{bmatrix} 10,632737 \\ 12,057139 \\ 100,946180 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^2 = P^{-1}\ Q$$

logo

$$\hat{\sigma}^2 = \begin{bmatrix} 0,100989 & -0,000363 & -0,006726 \\ -0,000481 & 0,133302 & -0,009689 \\ 0,000224 & 0,000224 & 0,066642 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10,632737 \\ 12,057139 \\ 100,946180 \end{bmatrix}$$

portanto:

$$\hat{\sigma}_2 \cong 0,390449$$

$$\hat{\sigma}_3 \cong 0,624059$$

$$\hat{\sigma}_e \cong 6,732389$$

são os componentes segundo o Método 2 de Henderson.

4.3. "Método 3 de Henderson" para um modelo aleatório com dois fatores de classificação, com interação e para um modelo misto com dois fatores sendo um fixo e, mais interação aleatória

4.3.1. Modelos e sistemas de equações

Seja o modelo aleatório dado por:

$$\underset{\sim}{y} = \mu \underset{\sim}{1} + X_1 \underset{\sim}{\beta}_1 + X_2 \underset{\sim}{\beta}_2 + X_3 \underset{\sim}{\beta}_3 + \underset{\sim}{e} \qquad (63)$$

onde $\underset{\sim}{\beta}_3$ representa o vetor dos efeitos da interação entre os fatores 1 e 2.

Consideremos os sub-modelos de (63) dados por:

$$\underset{\sim}{y} = \mu \underset{\sim}{1} + \underset{\sim}{e}$$

$$\underset{\sim}{y} = \mu \underset{\sim}{1} + X_1 \underset{\sim}{\beta}_1 + \underset{\sim}{e}$$

$$\underset{\sim}{y} = \mu \underset{\sim}{1} + X_1 \underset{\sim}{\beta}_1 + X_2 \underset{\sim}{\beta}_2 + \underset{\sim}{e}$$

Sejam as reduções correspondentes:

$$R(\mu) = \underset{\sim}{y}' X_\mu (X'_\mu X_\mu)^- X'_\mu y \quad \text{onde} \quad X_\mu = \underset{\sim}{1}$$

$$R(\mu,\ 1) = \underset{\sim}{y}'\ X_{\mu,1}(X'_{\mu,1}X_{\mu,1})^{-}X'_{\mu,1}\ \underset{\sim}{y}$$

onde

$$X_{\mu,1} = (\underset{\sim}{1}\ X_1)$$

$$R(\mu,1,2) = \underset{\sim}{y}'X_{\mu,1,2}\ (X'_{\mu,1,2}\ X_{\mu,1,2})^{-}X'_{\mu,1,2}\ \underset{\sim}{y}$$

onde

$$X_{\mu,1,2} = (\underset{\sim}{1}\ X_1X_2)$$

$$R(\mu,1,2,3) = \underset{\sim}{y}'X_{\mu,1,2,3}(X'_{\mu,1,2,3}\ X_{\mu,1,2,3})^{-}X'_{\mu,1,2,3}\ \underset{\sim}{y}$$

onde

$$X_{\mu,1,2,3} = (\underset{\sim}{1}\ X_1\ X_2\ X_3);\quad R(0) = y'Iy$$

Em função das anteriores, calculemos as seguintes reduções de interesse:

$$R(1,2,3/\mu) = R\ (\mu,1,2,3) - R\ (\mu)$$

$$R(2,3/\mu,1) = R\ (\mu,1,2,3) - R(\mu,1)$$

$$R(3/\mu,1,2) = R\ (\mu,1,2,3) - R(\mu,1,2)$$

$$SSE = R(0/\mu,1,2,3) = R(0) - R(\mu,1,2,3)$$

Aplicando (58) nas reduções acima vemos que:

$E[R(1,2,3/\mu)]$ é função linear de σ_1^2, σ_2^2, σ_3^3 e σ_e^2.

$E[R(2,3/\mu,1)]$ é função linear de σ_2^2, σ_3^2 e σ_e^2.

$E[R(3/\mu,1,2)]$ é função linear de σ_3^2 e σ_e^2.

$E[R(0/\mu,1,2,3)] = E(SSE)$ é função linear de σ_e^2.

obtemos então sucessivamente os componentes da variância, aplicando (59) ou melhor, igualando as esperanças anteriores as reduções correspondentes, isto é:

$$\hat{E}[R(1,2,3/\mu)] = R(\mu,1,2,3) - R(\mu)$$

$$\hat{E}[R(2,3/\mu,1)] = R(\mu,1,2,3) - R(\mu,1)$$

$$\hat{E}[R(3/\mu,1,2)] = R(\mu,1,2,3) - R(\mu,1,2)$$

$$\hat{E}[R(0/\mu,1,2,3)] = \hat{E}[SSE] = R(0) - R(\mu,1,2,3)$$

Como salientamos em (3.5) podemos trabalhar com funções linearmente independentes das anteriores, por exemplo:

Multipliquemos a 2ª equação por (-1) e somemos à 1ª.

Multipliquemos a 3ª equação por (-1) e somemos à 2ª, obteremos então o seguinte sistema de equações:

$$\hat{E}[R(1,2,3/\mu] - \hat{E}[R(2,3/\mu,1] = R(\mu,1) - R(\mu)$$

$$\hat{E}[R(2,3/\mu,1)] - \hat{E}[R(3/\mu,1,2] = R(\mu,1,2) - R(\mu,1)$$

$$\hat{E}[R(3/\mu,1,2)] = R(\mu,1,2,3) - R(\mu,1,2)$$

$$\hat{E}[SSE] = R(0) - R(\mu,1,2,3)$$

É importante notar que temos um sistema linear, tal que:

A 1ª equação tem como incógnitas as variâncias: $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$, $\hat{\sigma}_3^2$ e $\hat{\sigma}_e^2$.

A 2ª equação tem como incógnitas as variâncias: $\hat{\sigma}_2^2$, $\hat{\sigma}_3^2$ e $\hat{\sigma}_e^2$.

A 3ª equação tem como incógnitas as variâncias: $\hat{\sigma}_3^2$ e $\hat{\sigma}_e^2$.

A 4ª equação tem como incógnita a variância: $\hat{\sigma}_e^2$.

Seja o modelo misto dado por:

$$\underset{\sim}{y} = \mu\underset{\sim}{1} + X_1\underset{\sim}{\beta}_1 + X_2\underset{\sim}{\beta}_2 + X_3\underset{\sim}{\beta}_3 + \underset{\sim}{e} \qquad (64)$$

onde tomamos como fixo o fator 1.

Consideremos então os sub-modelos:

$$\underset{\sim}{y} = \mu\underset{\sim}{1} + X_1\underset{\sim}{\beta}_1 + \underset{\sim}{e}$$

$$\underset{\sim}{y} = \mu\underset{\sim}{1} + X_1\underset{\sim}{\beta}_1 + X_2\underset{\sim}{\beta}_2 + \underset{\sim}{e}$$

Sejam as reduções correspondentes:

$$R(\mu,1) = \underset{\sim}{y}'X_{\mu,1}(X'_{\mu,1}X_{\mu,1})^{-}X'_{\mu,1}\ \underset{\sim}{y}$$

onde $X_{\mu,1} = (\underset{\sim}{1}\ X_1)$

$$R(\mu,1,2) = \underset{\sim}{y}'X_{\mu,1,2}(X'_{\mu,1,2}\ X_{\mu,1,2})^{-}X'_{\mu,1,2}\ \underset{\sim}{y}$$

onde $X_{\mu,1,2} = (\underset{\sim}{1}\ X_1 X_2)$

$$R(\mu,1,2,3) = \underset{\sim}{y}'X_{\mu,1,2,3}(X'_{\mu,1,2,3}X_{\mu,1,2,3})^{-}X'_{\mu,1,2,3}\ \underset{\sim}{y}$$

onde $X_{\mu,1,2,3} = (\underset{\sim}{1}\ X_1\ X_2\ X_3)$

$$R(0) = y'Iy$$

Em função das anteriores, calculemos as seguintes reduções de interesse:

$$R(2,3/\mu,1) = R(\mu,1,2,3) - R(\mu,1)$$

$$R(3/\mu,1,2) = R(\mu,1,2,3) - R(\mu,1,2)$$

$$R(0/\mu,1,2,3) = SSE = R(0) - R(\mu,1,2,3)$$

Aplicando (58) nas reduções acima vemos que:

$E[R(2,3/\mu,1)]$ é função linear de σ_2^2, σ_3^2 e σ_e^2.

$E[R(3/\mu,1,2)]$ é função linear de σ_3^2 e σ_e^2.

$E[R(0/\mu,1,2,3)] = E[SSE]$ é função linear de σ_e^2.

Obteremos então sucessivamente os componentes da variância, aplicando (59), isto é, igualando as esperanças anteriores as reduções correspondentes:

$$\hat{E}[R(2,3/\mu,1)] = R(\mu,1,2,3) - R(\mu,1)$$

$$\hat{E}[R(3/\mu,1,2)] = R(\mu,1,2,3) - R(\mu,1,2)$$

$$\hat{E}[R(0/\mu,1,2,3)] = \hat{E}[SSE] = R(0) - R(\mu,1,2,3)$$

Como no caso anterior devemos observar que é mais usual trabalharmos com funções linearmente independentes, obtidas das anteriores.

Se multiplicarmos a 2ª equação por (-1) e somarmos à 1ª, obteremos o sistema:

$$\hat{E}[R(2,3/\mu,1)] - \hat{E}[R(3/\mu,1,2)] = R(\mu,1,2) - R(\mu,1)$$

$$\hat{E}[R(3/\mu,1,2)] = R(\mu,1,2,3) - R(\mu,1,2)$$

$$\hat{E}[SSE] = R(0) - R(\mu,1,2,3)$$

Observemos que este sistema linear é tal que:

A 1ª equação tem como incógnitas as variâncias: $\hat{\sigma}_2^2$, $\hat{\sigma}_3^2$ e $\hat{\sigma}_e^2$.

A 2ª equação tem como incógnitas as variâncias: $\hat{\sigma}_3^2$ e $\hat{\sigma}_e^2$.

A 3ª equação apresenta a incógnita $\hat{\sigma}_e^2$.

4.3.2. Aplicações numéricas do método 3

Consideremos o modelo aleatório, dado em (63) para o seguinte conjunto fictício de dados.

		Fator 2		
		nível 1	nível 2	nível 3
Fator 1	nível 1	10 ; 12 13 ; 11 12 ; 14	9 ; 8 7 ; 10 12	11 ; 13 10 ; 7
	nível 2	8 ; 9 6	8 ; 6	

Teremos então:

$$\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 13 \\ 11 \\ 12 \\ 14 \\ 9 \\ 8 \\ 7 \\ 10 \\ 12 \\ 11 \\ 13 \\ 10 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 6 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}_{20\ 1} ; \underset{\sim}{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{20\ 1} ; X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{20\ 2} ; X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{20\ 3} ; X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{20\ 5}$$

Teremos portanto que resolver o seguinte sistema:

$$\hat{E}[R(1,2,3/\mu)] - \hat{E}[R(2,3/\mu,1)] = R(\mu,1) - R(\mu)$$

$$\hat{E}[R(2,3/\mu,1)] - \hat{E}[R(3/\mu,1,2)] = R(\mu,1,2) - R(\mu,1)$$

$$\hat{E}[R(3/\mu,1,2)] = R(\mu,1,2,3) - R(\mu,1,2)$$

$$\hat{E}[SSE] = R(0) - R(\mu,1,2,3)$$

Com base em (58) teremos:

$$E[R(1,2,3/\mu)] = tr\{X'_{1,2,3}(\underset{\sim}{I} - X_\mu(X'_\mu X_\mu)^- X'_\mu)X_{1,2,3}E(\underset{\sim}{\beta}_{1,2,3}\underset{\sim}{\beta}'_{1,2,3})\} + \\ + \sigma_e^2[5 - 1]$$

$$E[R(2,3/\mu,1)] = tr\{X'_{2,3}(\underset{\sim}{I} - X_{\mu,1}(X'_{\mu,1}X_{\mu,1})^- X'_{\mu,1})X_{2,3}E(\underset{\sim}{\beta}_{2,3}\underset{\sim}{\beta}'_{2,3})\} + \\ + \sigma_e^2\ [5 - 2]$$

$$E[R(3/\mu,1,2)] = tr\{X'_3(\underset{\sim}{I} - X_{\mu,1,2}(X'_{\mu,1,2}X_{\mu,1,2})^- X'_{\mu,1,2})X_3E(\underset{\sim}{\beta}_3\underset{\sim}{\beta}'_3)\} + \\ + \sigma_e^2\ [5 - 4]$$

$$E[SSE] = \sigma_e^2\ [20 - 5]$$

onde $\underset{\sim}{\beta}_{2,3}$ é o vetor dos efeitos dos fatores 2 e 3

$\underset{\sim}{\beta}_{1,2,3}$ é o vetor dos efeitos dos fatores 1, 2 e 3.

Em $E[R(3/\mu,1,2)]$

seja $\quad Q_{\mu,1,2} = X_{\mu,1,2}\,(X'_{\mu,1,2}X_{\mu,1,2})^{-}X'_{\mu,1,2}$

onde $\quad X_{\mu,1,2} = (\underset{\sim}{1}\ X_1\ X_2)$, $\quad$ então:

$$X'_{\mu,1,2}X_{\mu,1,2} = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 5 & 9 & 7 & 4 \\ 15 & 15 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & 5 & 3 & 2 & 0 \\ 9 & 6 & 3 & 9 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(X'_{\mu,1,2}X_{\mu,1,2})^{-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7/24 & -7/72 & -1/12 & 0 \\ 0 & 0 & -7/12 & 31/216 & 1/36 & 0 \\ 0 & 0 & -1/12 & 1/36 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Obteremos então:

$$Q_{\mu,1,2} = \frac{1}{216}\;{}_{20}\!\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 10 & -15 & -15 \\
31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 10 & -15 & -15 \\
31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 10 & -15 & -15 \\
31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 10 & -15 & -15 \\
31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 10 & -15 & -15 \\
31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 10 & -15 & -15 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 36 & 36 & 36 & 36 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -12 & -12 & 18 & 18 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 36 & 36 & 36 & 36 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -12 & -12 & 18 & 18 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 36 & 36 & 36 & 36 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -12 & -12 & 18 & 18 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 36 & 36 & 36 & 36 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -12 & -12 & 18 & 18 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 36 & 36 & 36 & 36 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -12 & -12 & 18 & 18 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 54 & 54 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 54 & 54 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 54 & 54 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 54 & 54 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & -12 & -12 & -12 & -12 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 52 & 52 & 52 & 30 & 30 \\
10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & -12 & -12 & -12 & -12 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 52 & 52 & 52 & 30 & 30 \\
10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & -12 & -12 & -12 & -12 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 52 & 52 & 52 & 30 & 30 \\
-15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 30 & 30 & 63 & 63 \\
-15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 30 & 30 & 63 & 63
\end{array}\right]_{20}$$

e

$$X_3'(I - Q_{\mu,1,2})X_3 = \frac{1}{216}\begin{bmatrix} 180 & -180 & 0 & -180 & 180 \\ -180 & 180 & 0 & 180 & -180 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -180 & 180 & 0 & 180 & -180 \\ 180 & -180 & 0 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

Como $E(\underset{\sim}{\beta}_3\underset{\sim}{\beta}_3') = \begin{bmatrix} \sigma_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$ teremos,

$$\mathrm{tr}\ \{X_3'(I - Q_{\mu,1,2})X_3\ E(\beta_3\beta_3')\} = \frac{720}{216}\ \sigma_3^2$$

isto é

$$\mathrm{tr}\ X_3'(I - X_{\mu,1,2}(X_{\mu,1,2}'X_{\mu,1,2})^{-}X_{\mu,1,2}')X_3E(\underset{\sim}{\beta}_3\underset{\sim}{\beta}_3') =$$

$$= \frac{720}{216}\ \sigma_3^2$$

Em $E[R(2,3/\mu,1)]$

seja

$$Q_{\mu,1} = X_{\mu,1}(X'_{\mu,1}X_{\mu,1})^{-}X'_{\mu,1}$$

onde

$$X_{\mu,1} = (\underset{\sim}{1} \;\; X_1)$$

$$X'_{\mu,1}X_{\mu,1} = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 5 \\ 15 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \therefore$$

$$(X'_{\mu,1}X_{\mu,1})^{-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/15 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Obteremos então:

$$
Q_{\mu,1} = {}_{20}\left[\begin{array}{cc}
\begin{matrix}
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15}
\end{matrix} & {}_{15}\phi_{5} \\
{}_{5}\phi_{15} & \begin{matrix}
\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}
\end{matrix}
\end{array}\right]_{20}
$$

e

$$X'_{2,3}(I - Q_{\mu,1})X_{2,3} = \begin{bmatrix} 72/15 & -48/15 & -24/15 & 54/15 & -30/15 & -24/15 & 6/5 & -6/5 \\ -48/15 & 77/15 & -20/15 & -30/15 & 50/15 & -20/15 & -6/5 & 6/5 \\ -24/15 & -20/15 & 44/15 & -24/15 & -20/15 & 44/15 & 0 & 0 \\ 54/15 & -30/15 & -24/15 & 54/15 & -30/15 & -24/15 & 0 & 0 \\ -30/15 & 50/15 & -20/15 & -30/15 & 50/15 & -20/15 & 0 & 0 \\ -24/15 & -20/15 & 44/15 & -24/15 & -20/15 & 44/15 & 0 & 0 \\ 6/5 & -6/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/5 & -6/5 \\ -6/5 & 6/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6/5 & 6/5 \end{bmatrix}$$

Como

$$E(\beta_{2,3}\beta'_{2,3}) = \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

teremos:

$$tr\{X'_{2,3}(I - Q_{\mu,1})X_{2,3}E(\beta_{2,3}\beta'_{2,3})\} = \left(\frac{72}{15} + \frac{68}{15} + \frac{44}{15}\right) \sigma_2^2 +$$

$$+ \left(\frac{54}{15} + \frac{50}{15} + \frac{55}{15} + \frac{6}{5} + \frac{6}{5}\right) \sigma_3^2$$

isto é,

$$tr\{X'_{2,3}(I - X_{\mu,1}(X'_{\mu,1}X_{\mu,1})^{-}X'_{\mu,1})X_{2,3}E(\beta_{2,3}\beta'_{2,3}) =$$

$$= \frac{184}{15}\sigma_2^2 + \frac{184}{15}\sigma_3^2$$

Em $E[R(1,2,3/\mu)]$

seja

$$Q = X_\mu(X'_\mu X_\mu)^{-}X'_\mu$$

onde

$$X_\mu = \underset{\sim}{1}$$

obteremos então:

$$Q_{\mu} = X_{\mu}(X_{\mu}^{\prime}X_{\mu})^{-}X_{\mu}^{\prime} = \frac{1}{20}\;{}_{20}\!\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{array}\right]_{20}$$

e

$$X'_{1,2,3}(I - Q_{\mu})X_{1,2,3} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 75 & -75 & -15 & -5 & 20 & 30 & 25 & 20 & -45 & -30 \\ -75 & 75 & 15 & 5 & -20 & -30 & -25 & -20 & 45 & 30 \\ -15 & 15 & 99 & -63 & -36 & 66 & -45 & 36 & 33 & -18 \\ -5 & 5 & -63 & 91 & -28 & -42 & 65 & -28 & -21 & 26 \\ 20 & -20 & -36 & -28 & 64 & -24 & -20 & 64 & -12 & -8 \\ 30 & -30 & 66 & -42 & -24 & 84 & -30 & -24 & -18 & -12 \\ 25 & -25 & -45 & 65 & -20 & -30 & 75 & -20 & -15 & -10 \\ 20 & -20 & -36 & -28 & 64 & -24 & -20 & 64 & -12 & -8 \\ -45 & 45 & 33 & -21 & -12 & -18 & -15 & -12 & 51 & -6 \\ -30 & 30 & -18 & 26 & -8 & -12 & -10 & -8 & -6 & 36 \end{bmatrix}$$

Como

$$E(\underset{\sim}{\beta}_{1,2,3}\underset{\sim}{\beta}'_{1,2,3}) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

teremos:

$$tr\{X'_{1,2,3}(I - Q)X_{1,2,3}E(\underset{\sim}{\beta}_{1,2,3}\underset{\sim}{\beta}'_{1,2,3})\} =$$

$$= \frac{150}{20}\sigma_1^2 + \frac{254}{20}\sigma_2^2 + \frac{310}{20}\sigma_3^2$$

isto é:

$$tr\ X'_{1,2,3}(I - X_\mu(X'_\mu X_\mu)^- X'_\mu)X_{1,2,3}E(\underset{\sim}{\beta}_{1,2,3}\underset{\sim}{\beta}'_{1,2,3}) =$$

$$= \frac{150}{20}\sigma_1^2 + \frac{254}{20}\sigma_2^2 + \frac{310}{20}\sigma_3^2$$

Podemos então escrever:

$$\hat{E}[R(1,2,3/\mu)] = \frac{150}{20}\hat{\sigma}_1^2 + \frac{254}{20}\hat{\sigma}_2^2 + \frac{310}{20}\hat{\sigma}_3^2 + 4\ \hat{\sigma}_e^2$$

$$\hat{E}[R(2,3/\mu,1)] = \frac{184}{15}\hat{\sigma}_2^2 + \frac{184}{15}\hat{\sigma}_3^2 + 3\ \hat{\sigma}_e^2$$

$$\hat{E}[R(3/\mu,1,2)] = \frac{720}{216}\hat{\sigma}_3^2 + 1\ \hat{\sigma}_e^2$$

$$\hat{E}[SSE] = 15\ \hat{\sigma}_e^2$$

Podemos fazer uso da expressão (20) para obter:

$$R(\mu) = \underset{\sim}{y}'Q_\mu\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}'X_\mu(X'_\mu X_\mu)^- X'_\mu\ \underset{\sim}{y} = \frac{(196)^2}{20} = 1920{,}800000$$

$$R(\mu,1) = \underset{\sim}{y}'Q_{\mu,1}\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}'X_{\mu,1}(X'_{\mu,1}X_{\mu,1})^- X'_{\mu,1}\underset{\sim}{y} = \frac{(159)^2}{15} + \frac{(37)^2}{5} = 1959{,}20000$$

$$R(\mu,1,2,3) = \underset{\sim}{y}'Q_{\mu 1,2,3}\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}'X_{\mu,1,2,3}(X'_{\mu 1,2,3}X_{\mu,1,2,3})^{-}X'_{\mu,1,2,3}\underset{\sim}{y}$$

$$R(\mu,1,2,3) = \frac{(72)^2}{6} + \frac{(46)^2}{5} + \frac{(41)^2}{4} + \frac{(23)^2}{3} + \frac{(14)^2}{2} = 1981{,}783333$$

$$R(\mu,1,2) = \underset{\sim}{y}'Q_{\mu,1,2}\underset{\sim}{y}$$

$$= \underset{\sim}{y}'X_{\mu,1,2}(X'_{\mu,1,2}X_{\mu,1,2})^{-}X'_{\mu,1,2}\ \underset{\sim}{y}$$

$$R(\mu,1,2) = 1977{,}990741$$

$$R(0) = y'Iy = 2032$$

Portanto, teremos o sistema:

$$\frac{150}{20}\hat{\sigma}_1^2 + \left(\frac{254}{20} - \frac{184}{15}\right)\hat{\sigma}_2^2 + \left(\frac{310}{20} - \frac{184}{15}\right)\hat{\sigma}_3^2 + \hat{\sigma}_e^2 = 38{,}40000$$

$$\frac{184}{15}\hat{\sigma}_2^2 + \left(\frac{184}{15} - \frac{720}{216}\right)\hat{\sigma}_3^2 + 2\hat{\sigma}_e^2 = 18{,}790741$$

$$\frac{720}{216}\hat{\sigma}_3^2 + \hat{\sigma}_e^2 = 3{,}792592$$

$$15\ \hat{\sigma}_e^2 = 50{,}216667$$

Onde teremos sucessivamente:

$$\hat{\sigma}_e \cong 3{,}347778$$

$$\hat{\sigma}_3^2 \cong 0{,}133444$$

$$\hat{\sigma}_2^2 \cong 0,888838$$

$$\hat{\sigma}_1^2 \cong 4,564745$$

os componentes da variância segundo o Método 3 de Henderson.

Se tivessemos considerado o modelo misto, dado em (64) para o mesmo conjunto de dados anterior, obteríamos os mesmos componentes da variância, a menos de $\hat{\sigma}_1^2$, pois que neste caso o fator 1 é considerado fixo.

5. DISCUSSÃO

O "MÉTODO 1 DE HENDERSON" assemelha-se bastante ao método da análise da variância para dados balanceados, podendo-se dizer em linhas gerais, que é uma extensão daquele método.

Em têrmos de cálculo envolve operações com matrizes de grandes dimensões que são facilitadas se usarmos a expressão (23) no cálculo das matrizes do sistema (22).

O "MÉTODO 1", é próprio para modelos aleatórios, o que restringe em parte seu uso.

Deve-se ainda ressaltar que o MÉTODO, considera as restrições (3), (4), (6), (7), e (8), para a obtenção dos componentes.

O "MÉTODO 2 DE HENDERSON" conforme vimos aplica-se em modelos mistos. Temos inicialmente que estimar os efeitos fixos, para em seguida aplicarmos o MÉTODO 1 DE HENDERSON.

É um método definido para modelos que não incluam interações entre efeitos fixos e aleatórios e qualquer hierarquia de fatores fixos e aleatórios.

O fato de termos que corrigir os dados através de uma estimativa para os efeitos fixos e aplicar posteriormente o "MÉTODO 1" introduz dificuldade em termos de cálculo, principalmente nos coeficientes do termo σ_e^2, o que ficou bem nítido, nas operações em (4.2.1) e (4.2.2)

No que diz respeito ao desenvolvimento teórico, foi o que mais exigiu particularidades de algebra linear e matricial.

O MÉTODO 2, usando o procedimento do "MÉTODO 1" no cálculo dos componentes, considera ainda as mesmas restrições sobre os termos aleatórios.

Finalmente, o "MÉTODO 3 DE HENDERSON" aplica-se tanto para modelos mistos como para modelos aleatórios, apesar de ser mais utilizado no primeiro caso.

No seu desenvolvimento verificamos que na obtenção de algumas reduções na soma de quadrados total, utilizados no método, podem aparecer operações matriciais bastante trabalhosas.

Uma outra dificuldade que surge na aplicação deste método é que para um mesmo modelo, podemos obter sistemas de equações distintos o que nos levaria a conjuntos desiguais de componentes da variância. Este é um problema ainda não resolvido, e o que existem atualmente, são apenas algumas sugestões para o fato.

Usa-se neste método parte da restrição (7) e as restantes utilizadas nos métodos anteriores.

6. CONCLUSÕES

No caso de modelos aleatórios em geral, o "MÉTODO 1 DE HENDERSON", deve ser preferido ao "MÉTODO 3", devido a sua facilidade de aplicação, pois que utiliza a metodologia frequente da Análise da Variância. No caso de modelos envolvendo covariancias entre conjuntos de efeitos aleatórios, o "MÉTODO 3" através de seu procedimento, consegue eliminar estes efeitos, nas esperanças das reduções da soma de quadrados total. Enquanto que o "MÉTODO 1" assume que estas covariâncias são todas nulas. Neste caso, portanto, o "MÉTODO 3" deve ser utilizado.

Em modelos mistos que não incluam interações entre efeitos fixos e aleatórios e qualquer hierarquia de efeitos fixos e aleatórios, o "MÉTODO 2" deve ter primazia em relação ao "MÉTODO 3". Caso contrário, isto é, para modelos mistos que não satisfaçam as condições anteriores o "MÉTODO

3" deve ser empregado.

Todos os métodos descritos por HENDERSON, de uma maneira geral envolvem operações trabalhosas, mas que serão bastante facilitadas se fizermos uso dos computadores.

7. BIBLIOGRAFIA

BLISCHKE, W.R., 1966. Variances of estimates of variance components in a three way classification. *Biometrics* 22: 553-56.

CRUMP, S.L., 1946. The estimation of variance components in analysis of variance. *Biometrics Bulletin* 2: 7-11.

CRUMP, S.L., 1951. Present status of variance component analysis. *Biometrics* 7: 1-16.

CUNNINGHAM, E.P. e C.R. HENDERSON, 1968. An interative procedure for estimating fixed effects and variance components in mixed model situations. *Biometrics* 24:13-23.

EISENHART, C., 1947. The assumptions underlying the analysis of variance. *Biometrics* 3: 1-21.

HARVEY, W.R., 1970. Estimation of variance and covariance components in the mixed model. *Biometrics* __26__: 485-504.

HARVILLE, D.A., 1967. Estimability of variance components for the 2-way classification with interation. *The Annals of Mathematical Statistics* __38__: 1508-1519.

HENDERSON, C.R., 1953. Estimation of variance and covariance components. *Biometrics* __9__: 226-252.

HENDERSON, C.R., S.R. SEARLE e L.R. SCHAEFFER, 1974. The invariance and calculation of method 2 for estimating variance components. *Biometrics* __30__: 583-588.

MAHAMUNULU, D.M., 1963. Sampling variances of the estimates of variance components in the unbalanced 3-way nested classification. *The Annals of Mathematical Statistics* __34__: 521-523.

SEARLE, S.R., 1956. Matrix methods in variance and covariance components analysis. *The Annals of Mathematical Statistics* __27__: 737-748.

SEARLE, S.R., 1958. Sampling variance of estimates of components of variance. *Tha Annals of Mathematical Statistics* __29__: 167-178.

SEARLE, S.R., 1961. Variance components in the unbalanced 2 way nested classification. *The Annals of Mathematical Statistics* 32: 1161-1166.

SEARLE, S.R., 1968. Another look at Henderson's Methods of estimating variance components. *Biometrics* 24: 749-788.

SEARLE, S.R. e R.F. FAWCETT, 1970. Expected mean squares in variance components models having finite populations. *Biometrics* 26: 243-254.

SEARLE, S.R., 1971. *Linear Models*. 1ª Edição. Nova York, John Wiley, 532 p.

SEARLE, R., 1971. Topics in variance component estimation. *Biometrics* 27: 1-76.

TUKEY, J.W., 1956. Variancesof variance components: I. Balanced Designs. *The Annals of Mathematical Statistics* 27: 722-736.

TUKEY, J.W., 1957. Variances of variance components: II. The Unbalanced Single Classification. *The Annals of Mathematical Statistics* 28: 43-56.