LUCIO JOSÉ VIVALDI
Engenheiro-Agrônomo
DEPARTAMENTO NACIONAL DE PESQUISA AGROPECUÁRIA
Bolsista do CNPq.
BRASÍLIA DF

UTILIZAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO GAMA EM DADOS PLUVIOMÉTRICOS

Orientador: **Prof. Dr. Clóvis Pompílio de Abreu**

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, a obtenção do título de Mestre.

PIRACICABA - SÃO PAULO
— 1973 —

A minha esposa

e ao meu filho

DEDICO

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. Dr. Clóvis Pompílio de Abreu, que não mediu esforços na orientação do presente trabalho;

Ao Prof. Dr. Frederico Pimentel Gomes, pelas valiosas sugestões apresentadas;

Aos Profs. Dr. Décio Barbin e Dr. Izaias Rangel Nogueira, pelos subsídios concedidos e alto espírito de colaboração;

Aos Profs. Dr. Roberto Simionato Moraes e Dr. Vivaldo Francisco da Cruz, pelo assessoramento na parte de computação eletrônica;

À Dra. Dinah Mochel de Menezes, do Setor de Climatologia Agrícola do Instituto de Pesquisa e Experimentação Agropecuária do Centro Sul (IPEACS), pela gentileza do fornecimento dos dados pluviométricos;

Ao Dr. Roberto Meirelles de Miranda, Diretor do Departamento Nacional de Pesquisa Agropecuária (DNPEA), pela oportunidade que nos foi oferecida de realizarmos nosso curso de pós-graduação;

Ao Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq), pela concessão da bolsa de pós-graduação;

Somos gratos.

I N D I C E

1. INTRODUÇÃO

A avaliação de diferentes alturas pluviais, do ponto de vista probabilístico, é uma informação pouco utilizada. Como consequência, a média aritmética é a estimativa considerada quando se quer avaliar a quantidade de água proveniente das chuvas.

Em se tratando de precipitação anual, nada há que desabone o uso da média, já que a sua distribuição se aproxima da normal; entretanto, para períodos menores, como mensais, a distribuição da variável geralmente se afasta muito da normal. Nestes casos deve-se ajustar aos dados uma outra distribuição e, a partir dela, obter as informações possíveis.

Uma distribuição que tem sido usada com sucesso é a distribuição gama com dois parâmetros. Seu estudo se encontra nos livros, como auxiliar no desenvolvimento de outras importantes distribuições, mas não sob o ponto de vista de sua aplicação.

Dada a complexidade da estimação dos parâmetros e da variância, é necessária uma discussão sobre o assunto, inserida neste trabalho como condição de sua aplicabilidade. Devido à natureza do problema e à extensão dos cálculos, torna-se imperioso o uso da computação eletrônica; por conseguinte, paralelamente, são abordadas particularidades a respeito.

O estudo do ajustamento da distribuição gama foi feito com os dados pluviométricos provenientes da região do Km 47 da antiga Rodovia Rio-São Paulo, onde está localizado o Instituto de Pesquisa e Experimentação Agropecuária do Centro Sul (IPEACS).

2. REVISÃO DA LITERATURA

BARGER e THOM (1949) foram os primeiros a aplicar a distribuição gama no ajustamento a dados pluviométricos. Estudando a distribuição de frequência dos dados compreendidos entre uma e dezesseis semanas, verificaram que, para períodos pequenos, como até quatro semanas, a forma da curva sugere uma exponencial negativa no ajustamento e, ao aumentar o período, a tendência da curva é ser unimodal e assimétrica, para depois se aproximar da curva normal. Baseados nestes fatos, os autores usaram a distribuição gama, cuja curva admite tal flexibilidade. Foi utilizado um método aproximado para estimar os parâmetros. Os autores deram maior importância à discussão dos resultados do que aos detalhes estatístico-matemáticos relativos.

FRIEDMAN e JANES (1957) investigaram com maior profundidade o problema da estimativa de probabilidade de precipitação plu vial. Referindo-se ao tamanho da amostra, afirmam que são necessários no mínimo dados de 30 anos, para que ela seja representativa. Sobre o emprego da distribuição gama, concluiram o mesmo que BARGER e THOM (1949).

Barger, Shaw e Dale (1959), citados por STROMMEN e HORSFIELD (1969), efetuaram um estudo com dados pluviométricos de duas e três semanas, e concluíram que a distribuição gama foi eficiente no ajustamento.

TOPIL (1963) explorou o assunto de forma diferente. Estudou a distribuição de frequências de precipitação pluvial maior ou igual a 0,01 polegada, ocorrida entre 1 e 15 dias e relacionou a curva de distribuição acumulada com o número de dias, obtendo a probabilidade de precipitação maior ou igual a 0,01 polegada para períodos de 1, 2, ..., 15 dias. Com relação à metodologia aplicada, o trabalho deixa a desejar.

STROMMEN e HORSFIELD (1969) publicaram, através do Departamento de Agricultura dos Estados Unidos, tabelas de probabilidade de precipitação pluvial mensal para 23 Estados, usando a distribuição gama. Os parâmetros foram estimados pelo processo aproximado de Thom e nada foi dito sobre teste de ajustamento. Os autores deram ênfase somente à interpretação dos resultados, nada comentando sobre a metodologia aplicada.

AMARAL e SILVA (1970) trabalhando com os dados pluviométricos de Pelotas, RS, publicaram uma tabela que dá a probabilidade (em diversos níveis) da precipitação pluvial das pêntadas de um ano. Não foi possível obter-se os detalhes teóricos relativos ao trabalho.

ELLIS (1972), analisando as alturas de chuva de Manaus, AM, conseguiu um bom ajustamento da distribuição normal à precipitação anual, mas utilizou a distribuição gama para os dados mensais, em vista do seu caráter geral de assimetria. A qualidade do ajustamento, verificada por gráficos e pelo teste de Kolmogorov, foi satisfatória, concluiu o autor. O trabalho não aborda os pormenores estatístico-matemáticos envolvidos na obtenção dos resultados, sendo citado apenas que os parâmetros foram estimados pelo processo aproximado de Thom.

Outros autores publicaram trabalhos versando sobre o assunto, mas nada acrescentando ao que já foi dito.

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Como foi visto na parte de revisão da literatura, todos os trabalhos consultados são omissos no que tange ao desenvolvimento teórico, particularmente importante, quando se trata da aplicação da distribuição gama a dados pluviométricos ou a qualquer outra variável. Aqui, dois itens são fundamentais: o da estimativa dos parâmetros e o da determinação de probabilidades usando a função gama incompleta. Na estimativa dos parâmetros o processo aproximado de Thom é o comumente aplicado. Na determinação de probabilidades é feito o uso de tabelas em função dos parâmetros estimados. Em ambos os casos, são necessárias aproximações, o que, sem dúvida, ocasiona erro nos resultados.

Pelas razões expostas, torna-se indispensável um estudo teórico relativo aos itens citados.

3.1 - Generalidades

Uma variável aleatória $\underline{x}$ se distribui segundo uma distribuição gama se sua função de densidade é:

$$f(x;\ g,\ b) = \frac{1}{b^g\ \Gamma(g)}\ e^{-x/b}\ x^{g-1} \qquad 0 < x < \infty \qquad (1)$$

$$= 0 \text{ para outros valores de } \underline{x} \quad ,$$

onde $\underline{g}$ e $\underline{b}$ são os parâmetros da distribuição, ambos maiores que zero.

A função geradora de momentos da distribuição gama é dada por:

$$m(t) = \frac{1}{(1 - bt)^g} \qquad t < \frac{1}{b} \quad , \qquad (2)$$

de onde se obtêm os momentos populacionais em relação à origem. Os dois momentos que vão interessar são:

$$\mu_1' = gb \quad , \qquad (3)$$

$$\mu_2' = b^2 g(g + 1) \quad . \qquad (4)$$

Os momentos populacionais em relação à média são obtidos dos anteriores e são dados por:

$$\mu_r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{r-i}\ \mu_i'(\mu_1')^{r-i} \quad , \qquad (5)$$

de onde se obtém:

$$\mu_2 = b^2 g \quad , \tag{6}$$

$$\mu_3 = 2\ b^3 g \quad , \tag{7}$$

$$\mu_4 = 3\ b^4 g(g + 2) \quad . \tag{8}$$

De (6) e (7) acha-se o coeficiente de assimetria:

$$\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{g}} \quad , \tag{9}$$

que é positivo e tende para zero à medida que g aumenta, mostrando que a distribuição gama tende a ser simétrica para valores grandes de g . Segundo THOM (1958) pode ser provado que ao fazer g tender para o infinito, a distribuição gama se aproxima da distribuição normal. O mesmo autor diz que em aplicações climatológicas, para g maior que cem, pode-se optar pelo uso da distribuição normal.

3.2 - Estimativa dos parâmetros

Um dos problemas estatísticos na aplicação da distribuição gama a dados climatológicos está na estimativa dos parâmetros b e g . Vários métodos podem ser utilizados, entretanto, todos possuem limitações, ora, advindas de problemas matemáticos, ora por produzirem estimadores ineficientes. O método dos quadrados mínimos apresenta uma série de dificuldades quando aplicado à distribuição gama, como está descrito em SNYDER (1972), e não é recomendado. O método dos momentos e o da máxima verossimilhança são os comumente usados e as circunstâncias de cada caso particular vão indicar qual o melhor.

3.2.1 - Método dos momentos

Dada uma amostra aleatória $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de tamanho n, os momentos amostrais em relação à origem são dados por:

$$m'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^r \quad , \qquad (10)$$

de onde se tiram:

$$m'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad , \qquad (11)$$

$$m'_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad . \qquad (12)$$

Os momentos populacionais em relação à origem são função dos parâmetros e podem ser assim representados

$$\mu'_r = \mu'_r(\theta_1, \theta_2, \ldots) \quad .$$

Seja $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots$ a solução do sistema:

$$\begin{cases} m'_1 = \mu'_1 & , \\ m'_2 = \mu'_2 & . \end{cases} \qquad (13)$$

Os valores de $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, ... , são as estimativas de θ_1, θ_2, ... , obtidas pelo método dos momentos.

Aplicando (13) para o caso da distribuição gama, obtém-se:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \hat{g}\hat{b} \quad , \qquad (14)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \hat{b}^2 \hat{g}(\hat{g} + 1) \quad . \qquad (15)$$

A solução do sistema é:

$$\hat{g} = \frac{\bar{x}^2}{s^2} \quad , \qquad (16)$$

$$\hat{b} = \frac{s^2}{\bar{x}} \quad , \qquad (17)$$

onde,

$$s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n} \quad ,$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} \quad .$$

As variâncias destas estimativas são obtidas em função dos momentos amostrais; (16) e (17) podem ser apresentadas na forma:

$$\hat{g} = \frac{m_1'^2}{m_2} = H_1(m_1' \, , \, m_2) \qquad , \qquad (18)$$

$$\hat{b} = \frac{m_2}{m_1'} = H_2(m_1' \, , \, m_2) \qquad . \qquad (19)$$

A variância de uma variável aleatória H, que é função dos momentos amostrais m_1' e m_2 , é dada por:

$$V(H) = V(m_1') \left[\frac{\partial H}{\partial m_1'} \right]^2_{\substack{m_1'=\mu_1' \\ m_2=\mu_2}} + V(m_2) \left[\frac{\partial H}{\partial m_2} \right]^2_{\substack{m_1'=\mu_1' \\ m_2=\mu_2}} +$$

$$+ \; 2 \; COV(m_1' \, , \, m_2) \, . \left[\frac{\partial H}{\partial m_1'} \right]_{\substack{m_1'=\mu_1' \\ m_2=\mu_2}} \cdot \left[\frac{\partial H}{\partial m_2} \right]_{\substack{m_1'=\mu_1' \\ m_2=\mu_2}} \qquad , \qquad (20)$$

demonstrada em CRAMÉR (1963).

O mesmo autor demonstra que:

$$V(m_1') = \frac{\mu_2}{n} \qquad , \qquad (21)$$

$$V(m_2) = \frac{(\mu_4 - \mu_2^2)}{n} \quad , \qquad (22)$$

$$COV(m_1' \; , \; m_2) = \frac{\mu_3(n - 1)}{n^2} \quad . \qquad (23)$$

De (18) obtêm-se:

$$\left[\frac{\partial H_1}{\partial m_1'}\right]^2_{\substack{m_1'=\mu_1' \\ m_2=\mu_2}} = \left[\frac{2\mu_1'}{\mu_2}\right]^2 \quad , \qquad (24)$$

$$\left[\frac{\partial H_1}{\partial m_2}\right]^2_{\substack{m_1'=\mu_1' \\ m_2=\mu_2}} = \left[-\frac{\mu_1'^2}{\mu_2^2}\right]^2 \quad . \qquad (25)$$

Aplicando (20):

$$V(\hat{g}) = V(H_1) = \frac{\mu_2}{n} \cdot \frac{4\mu_1'^2}{\mu_2^2} + \frac{(\mu_4 - \mu_2^2)}{n} \cdot \frac{\mu_1'^4}{\mu_2^4} -$$

$$- \frac{4(n - 1)\mu_3}{n^2} \cdot \frac{\mu_1'^3}{\mu_2^3} \quad . \qquad (26)$$

Substituindo os momentos populacionais em função de g e b, tem-se que:

$$V(\hat{g}) = \frac{2g}{n} \left[g + 5 - \frac{4(n-1)}{n} \right] \quad . \qquad (27)$$

Com o mesmo procedimento, obtém-se:

$$V(\hat{b}) = \frac{b^2}{ng} \left[2g + 7 - \frac{4(n-1)}{n} \right] \quad . \qquad (28)$$

O método dos momentos não apresenta dificuldades na estimação dos parâmetros b e g , entretanto, sua utilização está sujeita a uma situação especial. THOM (1958) num estudo sobre a eficiência dos estimadores obtidos pelo método dos momentos em comparação com os obtidos pelo mátodo da máxima verossimilhança chegou ao seguinte resultado:

Para $g = 1$:

Eficiência de $\hat{g}$ = 0,39

Eficiência de $\hat{b}$ = 0,51

Para $g = 10$:

Eficiência de $\hat{g}$ = 0,88

Eficiência de $\hat{b}$ = 0,89

Isto mostra que para valores de g menores que 10 o método dos momentos produz estimativas ineficientes de b e g. À medida que o valor de $\underline{g}$ aumenta, a eficiência torna-se próxima de 1 e pode-se aplicá-lo sem prejuízo.

Em se tratando de precipitação pluvial, dificilmente $\hat{\underline{g}}$ é maior que 10, principalmente para períodos curtos, mas podem ocorrer, como no trabalho de ELLIS (1972), valores de $\hat{\underline{g}}$ superiores a 30. O método dos momentos pode ser utilizado como uma primeira aproximação das estimativas. Caso $\hat{\underline{g}}$ seja grande, conserva-se a estimativa, caso contrário usa-se o método da máxima verossimilhança.

3.2.2 - Método da máxima verossimilhança

3.2.2.1 - Generalidades

O método da máxima verossimilhança, desenvolvido por FISHER (1941), é um processo geral de obtenção de estimativas. Parte-se basicamente da função de verossimilhança, $\underline{M}$, definida como:

$$M = f(x_1; \theta_1, \theta_2, \ldots) \cdot f(x_2; \theta_1, \theta_2, \ldots) \ldots$$

$$\ldots f(x_n; \theta_1, \theta_2, \ldots) \quad , \qquad (29)$$

onde x_i é o i-ésimo elemento da amostra e $\theta_1, \theta_2, \ldots$, são os parâmetros. Os valores $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots$, que tornam máxima a função $\underline{M}$, são os estimadores de $\theta_1, \theta_2, \ldots$, por máxima verossimilhança. Para facilitar as operações, toma-se o logaritmo natural de $\underline{M}$ e deriva-se parcialmente em relação a cada parâmetro e iguala-se a zero. Resolvendo-se o sistema:

$$\frac{\partial \log M}{\partial \theta_i} = 0 \quad , \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{30}$$

obtêm-se $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots$ Saliente-se que indicou-se por log o logaritmo natural.

Para a distribuição gama têm-se, aplicando (29) e (30):

$$M = \frac{1}{b^{ng}\left[\Gamma(g)\right]^n} \; e^{-\Sigma x_i/b} \; (x_1 \cdot x_2 \ldots x_n)^{g-1} \quad , \tag{31}$$

$$L = \log M = ng \log b - n \log \Gamma(g) - \frac{1}{b} \Sigma x_i + (g-1) \Sigma \log x_i , \tag{32}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial g} = - n \log \hat{b} - n \dfrac{\Gamma'(\hat{g})}{\Gamma(\hat{g})} + \Sigma \log x_i = 0 \quad , & (33) \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial b} = - \dfrac{n\hat{g}}{\hat{b}} + \dfrac{1}{\hat{b}^2} \Sigma x_i = 0 \quad . & (34) \end{cases}$$

Simplificando (33) e (34) chega-se a:

$$\begin{cases} \hat{b} = \dfrac{\bar{x}}{\hat{g}} \quad , & (35) \\[2ex] \log \hat{g} - \dfrac{\Gamma'(\hat{g})}{\Gamma(\hat{g})} = \log \bar{x} - \dfrac{1}{n} \Sigma \log x_i \quad . & (36) \end{cases}$$

A expressão $\frac{\Gamma'(\hat{g})}{\Gamma(\hat{g})}$ é denominada função digama de $\hat{g}$, representada por $\psi(\hat{g})$. As suas derivadas $\psi'(\hat{g})$, $\psi''(\hat{g})$, ..., etc. são conhecidas como função trigama, tetragama, ... , etc. Sendo assim, a equação (36) passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\log \hat{g} - \psi(\hat{g}) = R \quad , \tag{37}$$

onde

$$R = \log \bar{x} - \frac{1}{n} \Sigma \log x_i \quad . \tag{38}$$

Para se resolver (37) é necessário conhecer $\psi(\hat{g})$. A função digama aparece tabulada em algumas publicações, mas para poucos valores, não contribuindo para o propósito em questão. Por isso, um ligeiro estudo sobre seus desenvolvimentos em série é oportuno.

3.2.2.2 - Função digama

Nörlund (1924) citado por THOM (1958) mostrou que:

$$\psi(a) = \log a - \frac{1}{2a} - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k\ a^{2k}} + R_m \ , \qquad a \geq 1 \quad , \tag{39}$$

onde B_k indica os números de Bernoulli, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, ... , e R_m é o resto após $\underline{m}$ termos, avaliado pela inequação:

$$\left| R_m \right| < \frac{B_{2m+2}}{(2m + 2)\ a^{2m+2}} \quad . \tag{40}$$

A expressão (39) encontra-se demonstrada em BATEMAN (1953).

Um segundo desenvolvimento é dado em COURANT (1966):

$$\psi(a) = -\frac{1}{a} - \gamma - \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+v} - \frac{1}{v} \right) \qquad a > 0\ , \tag{41}$$

onde γ é a constante de Euler.

O último desenvolvimento é de real importância, já que dele se obtêm expressões de grande valia. De (41), obtém-se:

$$\psi(a+1) = -\frac{1}{a+1} - \gamma - \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+1+v} - \frac{1}{v} \right) \ . \tag{42}$$

Subtraindo (42) de (41), fica:

$$\psi(a) = \psi(a+1) - \frac{1}{a} \ . \tag{43}$$

Derivando-se (41) e (43), chega-se a:

$$\psi'(a) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(a+v)^2} \ , \tag{44}$$

$$\psi'(a) = \psi'(a+1) + \frac{1}{a^2} \ . \tag{45}$$

Generalizando (43) e (45):

$$\psi(a) = \psi(a+N) - \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \dots - \frac{1}{a+N-1} \tag{46}$$

$$\psi'(a) = \psi'(a + N) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a + 1)^2} + \ldots + \frac{1}{(a + N - 1)^2} \qquad (47)$$

As duas últimas expressões são de grande importância quando a é pequeno. O valor de $\psi(a + N)$ para N grande é facilmente obtido de (39), com alta precisão e, através de (46) acha-se $\psi(a)$. A função trigama, $\psi'(a)$, também necessita ser conhecida quando se forem estimar as variâncias de $\hat{g}$ e $\hat{b}$. Derivando-se (39):

$$\psi'(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{a^{2k+1}} + R'_m \quad , \qquad (48)$$

onde R'_m é o resto após m termos e é avaliado pela inequação:

$$\left| R'_m \right| < \frac{B_{2m+2}}{a^{2m+3}} \quad . \qquad (49)$$

Da mesma maneira, calcula-se $\psi'(a + N)$ por (48) e depois $\psi'(a)$ por (47).

Outros desenvolvimentos, sem maior interesse, são encontados, como:

$$\psi(a) = -\frac{1}{a} - \gamma + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n)\, a^{n-1} \qquad |a| < 1 , \qquad (50)$$

onde $\zeta(n)$ é a função Zeta de Riemann, encontrado em BATEMAN (1953) e SHENTON e BAWMAN (1970);

$$\psi(a) = \frac{1}{2} \log a(a+1) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right) - \frac{1}{90}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{(a+1)^3}\right) \cdots , \qquad (51)$$

encontrado em MILNE (1968).

3.2.2.3 - Obtenção dos estimadores

A dificuldade do método reside na resolução da equação $\log \hat{g} - \psi(\hat{g}) = R$, de onde se obtêm $\hat{g}$. Um caminho a seguir é calcular os valores de $\left[\log \hat{g} - \psi(\hat{g})\right]$, confeccionando-se uma tabela da seguinte forma:

$\hat{g}$	$\log \hat{g} - \psi(\hat{g})$
...	... ...
...	... ...
...	... ...

Tendo-se o valor de R, obtido através dos elementos amostrais, por comparação com $\log \hat{g} - \psi(\hat{g})$, $\hat{g}$ fica determinado. Com o auxílio de um computador eletrônico esta tabela é facilmente formada. Tabelas desta natureza não são comuns e as publicadas são incompletas no sentido do número de valores de $\hat{g}$ abrangidos, obrigando o usuário a efetuar interpolações. Ainda pode ocorrer que $\hat{g}$ somente fique determinado por extrapolação, o que não é recomendado.

Uma tabela nestes moldes é dada por CHAPMAN (1956); outra melhor por CHOI e WETTE (1969).

Um outro caminho é resolver a equação (37) por um processo iterativo. O método iterativo de Newton aplicado na resolução da citada equação foi estudado por THOM (1968) e CHOI e WETTE(1969).

A equação $\log \hat{g} - \psi(\hat{g}) = R$ pode ser escrita assim:

$$h(\hat{g}) = \log \hat{g} - \psi(\hat{g}) - R = 0 \quad . \tag{52}$$

Pelo método iterativo de Newton, tem-se que:

$$\hat{g}_k = \hat{g}_{k-1} - \frac{h(\hat{g}_{k-1})}{h'(\hat{g}_{k-1})} \quad , \tag{53}$$

logo:

$$\hat{g}_k = \hat{g}_{k-1} - \frac{\log \hat{g}_{k-1} - \psi(\hat{g}_{k-1}) - R}{\dfrac{1}{\hat{g}_{k-1}} - \psi'(\hat{g}_{k-1})} \quad . \tag{54}$$

Como $\dfrac{1}{(x + a)^2}$ é uma função positiva e decrescente para $x \geq 0$, pode-se escrever a seguinte inequação:

$$\psi'(a) = \sum_{i=0}^{\infty} (i + a)^{-2} > \int_0^{\infty} (x + a)^{-2}\, dx = \frac{1}{a} \quad . \tag{55}$$

Consequentemente, $a \cdot \psi'(a) > 1$ e $h'(\hat{g}_{k-1})$ é sempre diferente de zero. Como $h(\hat{g}_{k-1})$ e $h'(\hat{g}_{k-1})$ são funções monótonas de $\hat{g}_{k-1}$, a convergência do processo é assegurada.

Uma outra condição é o conhecimento de um valor inicial g_0, próximo do valor exato de $\underline{\hat{g}}$. BARTHOLOMEW (1957) mostrou que a esperança matemática de $\underline{R}$ se aproxima de $\frac{1}{2g}$; então, um valor inicial que se amolda ao que foi dito anteriormente é dado por:

$$g_0 = \frac{1}{2R} \tag{56}$$

3.2.2.4 - Variância dos estimadores e intervalos de confiança

Os estimadores obtidos pelo método da máxima verossimilhança têm variâncias e covariâncias, dadas pela matriz:

$$V = \frac{1}{n} R^{-1} = \begin{bmatrix} V(\hat{\theta}_1) & \mathrm{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) & \cdots \\ \mathrm{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) & V(\hat{\theta}_2) & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{bmatrix}, \tag{57}$$

onde $\underline{n}$ é o tamanho da amostra e $\underline{R}$ é uma matriz k x k (sendo $\underline{k}$ o número de estimativas), cujo elemento geral é:

$$r_{ij} = -E\left[\frac{\partial^2 \log}{\partial\theta_i\ \partial\theta_j}\ f(x;\ \theta_1, \theta_2, \ldots)\right]. \tag{58}$$

Para a distribuição gama:

$$r_{11} = -E\left[\frac{\partial^2 \log}{\partial g^2} f(x;\ g,\ b)\right] = -E\left[-\psi'(g)\right] = \psi'(g) \tag{59}$$

$$r_{12} = -E\left[\frac{\partial^2 \log}{\partial g\, \partial b} f(x;\ g,\ b)\right] = -E\left(-\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{b} \tag{60}$$

$$r_{22} = -E\left[\frac{\partial^2 \log}{\partial b^2} f(x;\ g,\ b)\right] = -E\left(\frac{g}{b^2} - \frac{2x}{b^3}\right) = \frac{g}{b^2} \tag{61}$$

Portanto:

$$R = \begin{bmatrix} \psi'(g) & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & \frac{g}{b^2} \end{bmatrix} \tag{62}$$

$$V = \frac{1}{n\left[g\ \psi'(g) - 1\right]} \begin{bmatrix} g & -b \\ -b & b^2\ \psi'(g) \end{bmatrix}, \tag{63}$$

de onde se obtêm:

$$V(\hat{g}) = \frac{g}{n\left[g\,\psi'(g) - 1\right]} \qquad , \qquad (64)$$

$$V(\hat{b}) = \frac{g}{n\left[g\,\psi'(g) - 1\right]} \qquad , \qquad (65)$$

$$COV(\hat{g},\ \hat{b}) = \frac{g}{n\left[g\,\psi'(g) - 1\right]} \qquad . \qquad (66)$$

Para amostras grandes, um intervalo de confiança aproximado pode ser construido, para os parâmetros $\underline{b}$ e $\underline{g}$. Não há estudo sobre o tamanho da amostra necessário para a construção destes intervalos, entretanto, como se observa em (64) e (65) a variância das estimativas é inversamente proporcional ao tamanho da amostra, indicando que quanto maior $\underline{n}$, menor é o intervalo de confiança.

FRIEDMAN e JANES (1957) acham que $\underline{n}$ deve ser maior que 30, mas não fazem pesquisa especial sobre o assunto. Ao nível de 90% de probabilidade, têm-se os seguintes intervalos:

Para $\underline{g}$:

$$\hat{g} \pm 1{,}64 \sqrt{V(\hat{g})} \qquad (67)$$

Para $\underline{b}$:

$$\hat{b} \pm 1{,}64 \sqrt{V(\hat{b})} \qquad (68)$$

Naturalmente, estes intervalos são baseados na hipótese de que $\hat{g}$ e $\hat{b}$ tenham distribuição aproximadamente normal, com médias g e b e variâncias $V(\hat{g})$ e $V(\hat{b})$, respectivamente. O valor 1,64 é retirado da tabela de distribuição normal a 90%.

O que ocorre na prática é não se conhecer o valor dos parâmetros. Esta dificuldade pode ser ultrapassada, substituindo g e b por $\hat{g}$ e $\hat{b}$, sem que isso afete apreciavelmente o grau de aproximação, segundo MOOD e GRAYBILL (1970).

3.3 - Estimativas de probabilidade e de precipitação

Tendo-se os estimadores $\hat{b}$ e $\hat{g}$, obtidos pelos momentos ou por máxima verossimilhança, surge a questão de se estimar probabilidade através da função de distribuição ou de se estimar precipitação pluvial a um dado nível de probabilidade. Duas situações podem ocorrer, conforme os elementos amostrais:

a) não há valores nulos na amostra;
b) há valores nulos na amostra.

No primeiro caso emprega-se o modelo simples e no segundo o modelo misto.

3.3.1 - Modelo simples

A função de distribuição é representada pela função gama incompleta:

$$F(t) = \frac{1}{\hat{b}^{\hat{g}}\,\Gamma(\hat{g})} \int_0^t e^{-x/\hat{b}} \; x^{\hat{g}-1} \; dx \quad , \qquad (69)$$

onde t pode representar precipitação pluvial ou outra variável. A expressão (69) não possui solução imediata e necessita alguma manipulação. Fazendo $y = x/\hat{b}$ e substituindo em (69), obtêm-se:

$$F(t) = \frac{1}{\Gamma(\hat{g})} \int_0^t e^{-y} \; y^{\hat{g}-1} \; dy \quad . \tag{70}$$

Desenvolvendo-se em série e^{-y} e integrando-se, chega-se a:

$$F(t) = \frac{t^{\hat{g}}}{\Gamma(\hat{g})} \left[\frac{1}{\hat{g}} - \frac{1}{(\hat{g}+1)} \cdot t + \frac{1}{(\hat{g}+2)} \cdot \frac{t^2}{2!} \dots \right] \quad . \tag{71}$$

Multiplicando-se e dividindo-se (71) por e^t e aplicando-se o teorema relativo a multiplicação de séries de potências, chega-se a:

$$F(t) = \frac{t^{\hat{g}}}{\hat{g}\;\Gamma(\hat{g})\;e^t} \left[1 + \frac{t}{\hat{g}+1} + \frac{t^2}{(\hat{g}+1)(\hat{g}+2)} \quad \dots \right] \quad , \tag{72}$$

que é uma forma mais simplificada.

A probabilidade de ocorrência de um valor menor ou igual a x é dada por F(t), onde $t = x/\hat{b}$.

Determinar x, dado F(t), também é feito usando (72). Fazendo F(t) = F, a expressão (72) pode ser representada desta forma:

$$h_1(t) = \frac{t^{\hat{g}}}{e^t\ \hat{g}\ \Gamma(\hat{g})} \left[1 + \frac{1}{\hat{g}+1} + \frac{t^2}{(\hat{g}+1)(\hat{g}+2)} + \ldots \right] - F = 0 \qquad (73)$$

De (70):

$$h_1'(t) = \frac{t^{\hat{g}-1}}{e^t\ \Gamma(\hat{g})} = F'(t) \quad . \qquad (74)$$

Segundo THOM (1968), $h_1(t)$ e $h_1'(t)$ possuem as condições necessárias para que se possa aplicar o método iterativo de Newton. Sendo assim,

$$t_i = t_{i-1} - \frac{h_1(t_{i-1})}{h_1'(t_{i-1})} \quad ,$$

$$t_i = t_{i-1} - \frac{\dfrac{t_{i-1}^{\hat{g}}}{\hat{g}\ \Gamma(\hat{g})\ e^{t_{i-1}}} \left[1 + \dfrac{t_{i-1}}{(\hat{g}+1)} + \dfrac{t_{i-1}^2}{(\hat{g}+1)(\hat{g}+2)} + \ldots \right] - F}{\dfrac{t_{i-1}^{\hat{g}-1}}{e^{t_{i-1}}\ \Gamma(\hat{g})}} \ . \qquad (75)$$

Achando-se o valor de $\underline{t}$, $x = t.\hat{b}$.

Para iniciar o processo iterativo precisa-se ter um valor inicial t_o. Este valor varia de acordo com $\underline{\hat{g}}$ e F e é dado por THOM (1968):

Para $\hat{g} \geq 1$:

$$t_o = \log \frac{1}{1-F} + \left[1{,}51 - 2F(1-F) \right] (\hat{g} - 1) \quad , \quad F \geq 0{,}50 \qquad (76)$$

$$t_o = \log \frac{1}{1 - F} + \left[0{,}49 + 2F(1 - F)\right](\hat{g} - 1) \quad , \quad F < 0{,}50 \qquad (77)$$

Para $\underline{\hat{g}} < 1$:

$$t_o = \frac{1{,}309\ F}{(1 - 0{,}658\ F^2)} - 0{,}10 \quad , \quad 0{,}50 < F < 0{,}90 \qquad (78)$$

$$t_o = \frac{1{,}309\ F}{(1 - 0{,}658\ F^2)} - 0{,}06 \quad , \quad F \geq 0{,}90 \qquad (79)$$

$$t_o = 0{,}01 \quad , \quad F \leq 0{,}50 \qquad (80)$$

3.3.2 - Modelo misto

Frequentemente, em períodos curtos não há ocorrência de chuva, ou seja, a precipitação pluvial é igual a zero. O valor $x = 0$ não pode ser utilizado na estimativa dos parâmetros pelo método da máxima verossimilhança no caso da distribuição gama. Abandonar esta informação e trabalhar somente com os valores não nulos, ocasiona uma superestimação da precipitação a um determinado nível de probabilidade. THOM (1951), pesquisando este aspecto, introduziu o conceito de distribuição mista, para a precipitação pluvial e para outras variáveis climatológicas. Ele considerou a precipitação como um fenômeno cuja ocorrência é aleatória, com probabilidade $\underline{q}$ e a não ocorrência com a probabilidade $\underline{p}$, sendo $p + q = 1$. Desta forma, a função de distribuição acumulada passa a ser:

$$H(x) = p + q\ F(x) \qquad , \qquad (81)$$

onde F(x) é a função gama incompleta. Uma estimativa de $\underline{p}$ é:

$$\hat{p} = \frac{Y_o}{n} \qquad , \qquad (82)$$

sendo $\underline{n}$ o tamanho da amostra e Y_o o número de valores nulos.

Para se obter $P\left[x \leq X\right]$ emprega-se (81), fazendo-se: $t = x/\hat{b}$. No caso inverso, dado $H(x) = H$ quer se obter $\underline{x}$; para isso utiliza-se o método iterativo de Newton:

$$G(x) = \hat{p} + (1 - \hat{p})\ F(x) - H = 0 \qquad (83)$$

$$t_i = t_{i-1} - \frac{G(t_{i-1})}{G'(t_{i-1})} \qquad (84)$$

$$x = t\ .\ \hat{b} \qquad (85)$$

O valor inicial t_o varia de acordo com $\underline{\hat{g}}$ e $\underline{H}$ e aqueles dados anteriores (76, 77, 78, 79, 80), podem ser usados.

3.4 - Computação eletrônica

Para obter os resultados pelos métodos indicados, requerem-se muitos cálculos, alguns complicados e extensos. Por esta razão, todas as operações foram feitas com o auxílio do Computador

IBM - 1130 com 16 K palavras.

Na aplicação do método iterativo de Newton foi utilizada a sub-rotina RTNI que faz parte do Manual de Sub-rotinas Científicas da IBM (1968). Ela requer outra sub-rotina, chamada FCT, que fornece o valor da função no ponto t_{i-1}, assim como o de sua derivada. Na resolução de (52), a sub-rotina FCT requer duas outras sub-rotinas: DGAMA e TGAMA, que fornecem $\psi(\hat{g}_{k-1})$ e $\psi'(\hat{g}_{k-1})$, respectivamente.

O valor de $\psi(\hat{g}_{k-1})$ foi obtido empregando-se primeiramente a expressão:

$$\psi(\hat{g}_{k-1} + N) = \log\,(\hat{g}_{k-1} + N) - \frac{1}{2(\hat{g}_{k-1} + N)} - \sum_{i=1}^{m} \frac{B_{2i}}{2i(\hat{g}_{k-1} + N)^{2i}},$$

para $m = 11$ e $(\hat{g}_{k-1} + N) < 43$ e depois pela expressão:

$$\psi(\hat{g}_{k-1}) = \psi(\hat{g}_{k-1} + N) - \frac{1}{\hat{g}_{k-1}} - \frac{1}{\hat{g}_{k-1} + 1} - \cdots - \frac{1}{\hat{g}_{k-1} + N - 1}$$

Não há uma expressão matemática para e avaliar o erro cometido no cálculo de $\psi(\hat{g}_{k-1})$, mas, comparando-se os valores obtidos com alguns presentes em MILNE (1968), observa-se que o erro está na sexta decimal para $\hat{g}_{k-1} = 0,50$. Como a precisão aumenta ao crescer $\hat{g}_{k-1}$, conclui-se que o erro cometido está acima da sexta decimal para $\hat{g}_{k-1} \geq 0,50$.

No cálculo de $\psi'(\hat{g}_{k-1})$, procedimento análogo foi seguido. Obteve-se $\psi'(\hat{g}_{k-1} + N)$ através de:

$$\psi'(\hat{g}_{k-1} + N) = \frac{1}{(\hat{g}_{k-1} + N)} + \frac{1}{2(\hat{g}_{k-1} + N)^2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{B_{2i}}{(\hat{g}_{k-1} + N)^{2i+1}} ,$$

para $m = 11$ e $(\hat{g}_{k-1} + N) < 42$ e $\psi'(\hat{g}_{k-1})$ pela expressão:

$$\psi'(\hat{g}_{k-1}) = \psi'(\hat{g}_{k-1} + N) + \frac{1}{g^2_{k-1}} + \frac{1}{(\hat{g}_{k-1} + 1)^2} + \dots + \frac{1}{(\hat{g}_{k-1} + N - 1)^2} .$$

Aqui o erro cometido apresenta a mesma característica do anterior, quando os valores são comparados com àqueles dados em OWEN (1962).

Na solução de (73) são usadas as sub-rotinas RTNI, FCT e GAMA. A última faz parte do Manual de Sub-rotinas Científicas da IBM (1968) e só calcula $\Gamma(a)$ para $a < 34,5$.

4. MATERIAL E MÉTODOS

4.1 - Material

O material usado no presente trabalho foi fornecido pela Seção de Climatologia Agrícola do Instituto de Pesquisa Agropecuária do Centro Sul (IPEACS), situado no Km 47 da antida Rodovia Rio-São Paulo, Itaguai, Estado do Rio de Janeiro, latitude $22^{o}40'$, altitude 33 m. São dados pluviométricos diários de 1940 a 1972 num total de 33 anos. Isto possibilitou o estudo do ajustamento da distribuição gama aos dados, correspondentes a 9 períodos dentro de cada mês. O estudo dos períodos 1-5, 1-10, 1-15, 1-20, 1-25 e mensal dá uma visão do que acontece em termos de probabilidade de precipitação pluvial ao aumentar o tamanho do período, assim como possibilitou uma análise das tendências das diversas estimativas. Os períodos de 11-20 e 21 até o último dia do mês, juntamente com o de 1-10, fornecem informações independentes, o mesmo ocorrendo com os de 1-15 e de 16 até o último dia do mês.

Nos anos bissextos o mês de fevereiro foi reduzido para 28 dias, seguindo o procedimento utilizado por TOPIL (1963) e AMARAL (1968), que consiste em multiplicar os totais dos períodos por 28/29.

4.2 - Métodos

Na estimativa dos parâmetros $\underline{g}$ e $\underline{b}$ foi empregado o método da máxima verossimilhança, descrito em 3.2.2. A estimativa da precipitação pluvial nos diversos níveis de probabilidade foi obtida segundo o processo desenvolvido em 3.3, utilizando-se o modelo simples ou misto, de acordo com a ausência ou presença de valores nulos na amostra. A estimativa da assimetria foi determinada através da equação (9)

$$\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{g}} ,$$

e as variâncias de $\underline{\hat{g}}$ e $\underline{\hat{b}}$ e os intervalos de confiança dos parâmetros $\underline{g}$ e $\underline{b}$ foram obtidos segundo o procedimento descrito em 3.2.2.4. Para se estimar σ^2 foi usada a expressão (6)

$$\sigma^2 = b^2 g ,$$

e a estimativa da média foi baseada em 33 anos em todos os períodos.

Para se verificar a qualidade do ajustamento da distribuição gama aos dados, foi aplicado o teste de χ^2, respeitando-se as recomendações presentes em PIMENTEL GOMES (1971) e DIXON e MASSEY (1966). O teste de ajustamento de Kolmogorov-Smirnov não foi aplicado em virtude da necessidade do conhecimento dos valores dos parâmetros _g_ e _b_, segundo MASSEY (1951).

Em todos os cálculos, os dados pluviométricos foram usados em cm, mas, a escala não é importante, pois afeta somente a estimativa de _b_, que, por esta razão, é chamado de parâmetro escalar.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 - Resultados

Os resultados numéricos das estimativas e intervalos de confiança relativos aos 108 períodos estudados estão presentes no Apêndice 1, nos quadros de I a XII. Os valores de χ^2 obtidos no teste de ajustamento, juntamente com os respectivos níveis aproximados de significância estão contidos no Apêndice 2, nos quadros de XIII a XVIII. Foram elaboradas tabelas de probabilidade de precipitação pluvial a 20 níveis de probabilidade para todos os períodos estudados; no Apêndice 3, nas tabelas de I a VI estão estes resultados.

5.2 - Discussão

5.2.1 - Estimativas de g e b

De uma maneira geral, ao aumentar o tamanho do período cresceu o valor de $\hat{g}$, em consequência da diminuição da assimetria; houve casos, porém, como em fevereiro, onde no período de 1-10 a assimetria foi maior do que no período de 1-5, como pode ser observado no quadro II. Os valores de $\hat{g}$, com excessão de cinco, estão abaixo de 5,000, o que determinou a não utilização do método dos momentos na estimativa dos parâmetros. O maior valor de $\hat{g}$ foi de 10,746 obtido no período mensal de dezembro, indicando que foi o período de menor assimetria, como pode ser visto no quadro XII. Nos meses mais chuvosos os valores de $\hat{g}$ foram em média, superiores aos obtidos nos meses menos chuvosos, como maio, junho, julho, agosto e setembro. Isto é explicado pela pronunciada assimetria dos períodos nos meses mais secos.

O valor da estimativa de b não apresentou nenhuma tendência notável em relação ao tamanho dos períodos dentro de cada mês, levando-se em conta que $\hat{b}$ varia de acordo com $\hat{g}$ e a média. No entanto, houve predominância de valores maiores de $\hat{b}$ nos meses mais chuvosos. A importância da estimativa de b está no que diz respeito a variância da amostra; desde que

$$s^2 = \hat{g} \cdot \hat{b}^2 \quad ,$$

a estimativa da variância de um determinado período aumenta rapidamente ao crescer o valor de $\hat{b}$, sendo este um indicador da variabilidade dos dados.

A precisão das estimativas $\hat{g}$ e $\hat{b}$ está diretamente relacionada com o valor de $\hat{p}$, proporção dos valores nulos da amostra. Quando $\hat{p} = 0$, o tamanho da amostra foi de 33, já que todos os elementos amostrais foram utilizados na obtenção das estimativas, o mesmo não ocorrendo quando $\hat{p} > 0$. Neste caso o tamanho da amostra reduziu-se para $33\ (1 - \hat{p})$. Nos períodos de 1-5 dos meses de junho e setembro, $\hat{p} = 0{,}485$, como pode ser observado no Apêndice 1, nos quadros VI e IX respectivamente; em ambos os casos somente 17 elementos amostrais foram utilizados na obtenção das estimativas $\hat{g}$ e $\hat{b}$. Os problemas advindos desta circunstância são dois. O primeiro é que as variâncias de $\hat{b}$ e $\hat{g}$ serão maiores, porque elas são inversamente proporcionais ao tamanho da amostra. O segundo diz respeito aos intervalos de confiança dos parâmetros g e b, já que da forma como foi proposta a sua construção é necessário que $\hat{g}$ e $\hat{b}$ tenham uma distribuição aproximadamente normal; isto se consegue à medida que aumenta o tamanho da amostra.

A ocorrência de valores elevados de $\hat{p}$ foi frequente nos períodos de 1-5 e 1-10, particularmente nos meses mais secos.

O desvio padrão de $\hat{g}$, $s(\hat{g})$, foi em média 23% de $\hat{g}$, enquanto que $s(\hat{b})$ ficou em torno de 28% de $\hat{b}$. Os intervalos de confiança dos parâmetros g e b foram construídos ao nível de 90% de probabilidade. Embora elevados, nunca a extremidade inferior abrangeu o valor zero, mesmo que fossem construídos ao nível de 95% de probabilidade. Isto é um fato desejável, considerando que g e b são sempre maiores do que zero. FRIEDMAN e JANES (1957) acham que o nível de 90% de probabilidade é suficiente em se tratando de uma variável climatológica.

As estimativas da assimetria e da variância dependem de $\hat{g}$ e de $\hat{g}$ e $\hat{b}$, respectivamente. Quando $\hat{p} > 0$ a assimetria fou subestimada, desde que osvalores nulos não foram considerados. Por sua vez, s^2 foi obtida a partir de 33 $(1 - \hat{p})$ elementos amostrais, não representando a variabilidade dos dados em 33 anos.

5.2.2 - Teste de ajustamento

O teste de χ^2 foi empregado para testar a hipótese de que os dados de cada período são provenientes de uma populaçao que se distribui segundo uma distribuição gama; o nível de significância adotado para se rejeitar a hipótese foi de 5% de probabilidade.

Em 50% dos casos o valor de χ^2 foi significativo a mais de 50% de probabilidade; o valor de χ^2 obtido no período mensal de abril foi significativo a aproximadamente 98% de probabilidade como pode ser visto no Apêndice 2, quadro XIV. Isto significa que há aproximadamente 98% de probabilidade de que as diferenças entre as frequências esperadas e observadas foram devidas ao acaso. Dos 108 períodos estudados, em 106 a hipótese nula não foi rejeitada a 5%

de probabilidade. Somente em 2 períodos, 11-20 (janeiro) e 21-31 (julho), a hipótese nula foi rejeitada a 5%, como pode ser observado no Apêndice 2, nos quadros XIII e XVI, respectivamente.

5.2.3 - Tabelas de probabilidade

A principal finalidade da aplicação da distribuição gama na análise de dados pluviométricos é a de se obter estimativas de precipitação pluvial em termos de probabilidade. Tomando como exemplo a tabela I (Apêndice 3), no período mensal de janeiro, vê-se que há 30% de probabilidade de chover quantidade igual ou inferior a 144,1 mm. Isto indica que dentro de 10 anos em 3 espera-se em janeiro uma precipitação igual ou menor do que 144,1 mm, ou, alternativamente, em 7 anos dentro de 10, espera-se que em janeiro a precipitação exceda a 144,1 mm. No mesmo período, ao nível de 70%, corresponde 254,4 mm, indicando que em 7 anos dentro de 10, a precipitação esperada será igual ou inferior a 254,4 mm, ou em 3 anos dentro de 10, espera-se mais do que 254,4 mm.

Por comparação das diferenças entre as precipitações esperadas entre uma alta e baixa probabilidades, pode-se fazer inferências utilizando-se as variâncias. No período mensal de janeiro a amplitude entre 5% e 95% é de 353,0 mm. Em igual período, em dezembro, a amplitude entre os mesmos níveis é de 185,2mm; as variâncias são 122,7 e 32,3 respectivamente. Deste modo, num determinado espaço de tempo, uma precipitação maior pode geralmente ser esperada em janeiro, com relação a dezembro, mas, a precipitação em janeiro, provavelmente será mais irregular do que a de dezembro, em vista das variâncias.

A interpolação linear poderá ser utilizada com sucesso em determinados intervalos, geralmente entre 0,25 e 0,65, onde o crescimento é aproximadamente linear. Em níveis mais baixos ou mais elevados, a interpolação polinomial proporcionará melhor resultado.

6. CONCLUSÕES

6.1 - O ajustamento da distribuição gama aos dados pluviométricos mostrou ser eficiente, independentemente do tamanho dos períodos estudados, já que a hipótese nula foi rejeitada em 2 períodos dos 108, 11-20 de janeiro e 21-31 de julho.

6.2 - Ficou evidenciada a necessidade da aplicação do método da máxima verossimilhança na obtenção das estimativas dos parâmetros, tendo em vista a reduzida magnitude de $\hat{\underline{g}}$.

6.3 - O processo iterativo de Newton mostrou ser eficiente na resolução das equações de obtenção de $\hat{\underline{g}}$ e da estimativa da precipitação pluvial a um determinado nível de probabilidade, já que em ambos os casos houve convergência do processo.

6.4 - Embora não rejeitada a hipótese nula, em nenhum dos períodos de 1-5 e 1-10, o tamanho da amostra nestes períodos ficou redu zido, principalmente nos meses mais secos, o que leva a concluir que a distribuição gama não proporcionou bons resultados para a análise dos dados pluviométricos destes períodos.

7. RESUMO

O presente trabalho foi dirigido no sentido de apresentar um estudo detalhado sobre a aplicação da distribuição gama na análise de dados pluviométricos.

São desenvolvidos o método dos momentos e o método da máxima verossimilhança, utilizados na obtenção das estimativas dos parâmetros *g* e *b* da distribuição gama. Em ambos os casos, são deduzidas fórmulas para a determinação da variância dos estimadores.

Para se estimar a precipitação pluvial a um determinado nível de probabilidade, são desenvolvidos os modelos simples e misto, com a utilização do processo iterativo de Newton.

Como aplicação, fez-se o ajustamento da distribuição gama aos dados pluviométricos relativos a 9 períodos de cada mês. O teste de ajustamento empregado foi o de χ^2.

São apresentados os resultados correspondentes a todos os períodos estudados e é feita uma análise com relação às estimativas $\underline{\hat{g}}$ e $\underline{\hat{b}}$. Confeccionaram-se tabelas de probabilidade de precipitação pluvial e alguns aspectos tocantes à sua utilização são discutidos.

Finalmente, são apresentadas as conclusões entre as quais se destacam:

a - Baseado no teste de χ^2, o ajustamento da distribuição gama aos dados pluviométricos, foi eficiente em razão da hipótese nula não ser rejeitada em 98,15% dos períodos estudados;

b - A distribuição gama não proporcionou bons resultados para a análise dos dados pluviométricos dos períodos de 1-5 e 1-10, principalmente nos meses mais secos.

8. SUMMARY

This paper has in view the use of the gamma distribution in the analysis of rainfall data.

The method of moments and that of maximum likelihood are applied to the estimation of parameters g and b in equation

$$dF = \frac{1}{b^g \, \Gamma(g)} \; e^{-x/b} \; x^{g-1} \; dx \qquad (x > 0) .$$

Simple and mixed models are introduced when estimating the parameters, with the use of Newton's iterative method.

Rainfall data used refer to years 1940 through 1972 (33 years) at the Instituto de Pesquisa e Experimentação Agropecuária do Centro-Sul (IPEACS). Periods 1-5, 1-10, 1-15, 1-20, 1-25 and monthly were tried.

The goodness of fit was evaluated by the χ^2 test.

Results are presented refering to all periods studied , and an analysis on the estimation of parameters g and b. Tables of probabilities of amount of rainfall were calculated.

The main conclusions are:

a - The fitting of the gamma distribution to the data was excellent, since the null hypothesis was not rejected in 98.15% of cases.

b - The gamma distribution did not give good results for periods of 1-5 days and 1-10 days, specially in dry months.

9. BIBLIOGRAFIA

AMARAL, E. - 1968 - Análise Harmônica. Pesquisa Agropecuária Brasileira 3: 7-43.

AMARAL, E. e SILVA, J.B. - 1970 - Tabelas de Probabilidades de Precipitação Pluviométrica em Pelotas, RS. Circular nº 44, IPEAS, M.A.

BARGER, G.L. e THOM, H.C.S. - 1949 - Evaluation of Drought Hazard. Agronomy Journal 41(11): 519-526.

BARGER, G.L.; SHAW, R.H. e DALE, R.F. - 1959 - Em STROMMEN e HORSFIELD (1969). Gamma Distribution Parameters from 2 and 3 - week Precipitation Totals in the North Central Region of the United States. Agricultural and Home Economics Experiment Station, Iowa State University. 183 pp.

BARTHOLOMEW, D.J. - 1957 - Testing of Departure from the Exponential Distribution. Biometrika 44: 253-257.

BATEMAN, H. - 1953 - Higher Transcendental Functions, Vol. 1. Mac Graw-Hill Book Company, Inc., Nova York . 302 pp.

CHAPMAN, D.G. - 1956 - Estimating the Parameters of a Truncated Gamma Distribution. Annals of Mathematical Statistics 27: 498-506.

CHOI, S.C. e WETTE, R. - 1969 - Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of the Gamma Distribution an their Bias. Technometrics 11(4): 683-690.

COURANT, R. - 1965 - Cálculo Diferencial e Integral, Vol. I, 1ª edição. Tradução do original em alemão Vorlesorengen über Differential und Integralrechung. Editora Globo, Rio de Janeiro. 616 pp.

COURANT, R. - 1966 - Cálculo Diferencial e Integral, Vol. II, 1ª edição. Tradução do original em alemão Vorlesoregen über Differential und Integralrechung. Editora Globo, Rio de Janeiro. 685 pp.

CRAMER, R. - 1963 - Metodos Matematicos de Estadistica, 3ª edição. Tradução do original em inglês Mathematical Methods of Statistics. Aguilar, S.A. Ediciones - Madrid. 660 pp.

DIXON, W.J. e MASSEY, F.J - 1966 - Introduccion al Analisis Estadistico, 2ª edição. Tradução do original em inglês Introduction to Statistical Analysis, 2ª edição. Ediciones Castilla S.A. - Madrid. 489 pp.

ELLIS, J. - 1972 - Análise Estatística das Alturas de Chuva Anuais e Mensais em Manaus, Amazonas. Departamento Nacional de Meteorologia, M.A., Boletim Técnico 7: 1-12.

FISHER, R.A. - 1941 - On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics. Philosophical Transaotions Royal Society, serie A, 222: 309-368.

FRIEDMAN, D.G. e JANES, B.E. - 1957 - Estimation of Rainfall Probabilities. University of Connecticut, Agricultural Experiment Station, Bulletin 332. 22 pp.

I.B.M. - 1968 - 1130 Soientific Subroutine Package (1130 - CM - 02X). Programmer's Manual, 4ª edição. 191 pp.

MASSEY, F.J. - 1951 - The Kolmogorov-Smirnov Test of Goodness of Fit. Journal of the American Statistical Association 46: 68-78.

MILNE, W.E. - 1968 - Cálculo Numérico. Tradução do original em inglês Numerical Calculus. Editora Polígono, São Paulo. 346 pp.

NÖRLUND, N.E. - 1924 - Em THOM (1958). Vorlesungen über Differenzenrechnung. Springer, Berlin.

OWEN, D.B. - 1962 - Handbook of Statistical Tables. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Massachusetts, U.S. 580 pp.

PIMENTEL GOMES, F. - 1971 - Iniciação à Estatística, 3ª edição. Livraria Nobel S.A., São Paulo. 205 pp.

SELBY, S.M. - 1968 - Standard Mathematical Tables, 16ª edição. The Chemical Rubber Co. 18901 Cranwood Parkway, Cleveland, Ohio 44128. 692 pp.

SHENTON, L.R. e BOWMAN, K.O. - 1970 - Remarks on Thom's Estimators for the Gamma Distribution. Monthly Weather Review 98 (2): 154-160.

SIEGEL, S. - 1956 - Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences. McGraw-Hill Book Company, Nova York, 312 pp.

SNYDER, W.M. - 1972 - Fitting of Distribution Functions by Nonlinear Least Squares. Water Resources Research 8(6): 1423-1432.

SOKAL, R.R. e ROHLF, F.J. - 1969 - Biometry. W.H. Freeman and Company, San Francisco. 775 pp.

STROMMEN, N.D. e HORSFIELD, J.E. - 1969 - Monthly Precipitation Probabilities by Climatic Divisions. Departamento de Agricultura dos Estados Unidos. Publicação nº 160. 140 pp.

THOM, H.C.S. - 1951 - A Frequency Distribution for Precipitation. Abstract, Bulletin American Meteorological Society 32 (10): 397.

THOM, H.C.S. - 1958 - A Note on the Gamma Distribution. Monthly Weather Review 86(4): 117-122.

THOM, H.C.S. - 1968 - Direct and Inverse Tables of the Gamma Distribution. Environmental Data Service. Departamento de Comércio dos Estados Unidos. 30 pp.

TOPIL, A.G. - 1963 - Precipitation Probability at Denver Related to Lenght of Period. Monthly Weather Review 91(6): 293-297.

APÊNDICE 1 - ESTIMATIVA DE g, b, p, ASSIMETRIA (γ_1), MÉDIA, DESVIO PADRÃO DE $\hat{g}$, DESVIO PADRÃO DE $\hat{b}$, VARIÂNCIA E INTERVALOS DE CONFIANÇA DOS PARÂMETROS <u>g</u> e <u>b</u> OBTIDOS NOS 108 PERÍODOS ESTUDADOS.

QUADRO I - **Estimativas de g, b, p, assimetria (γ_1), média, desvio padrão de $\hat{g}$, desvio padrão de $\hat{b}$, variância e intervalos de confiança dos parâmetros *g* e *b*, obtidos nos nove períodos de janeiro.**

Períodos	Estimativas								Intervalos de confiança a 90%	
	$\hat{g}$	$\hat{b}$	$\hat{p}$	$\hat{\gamma}_1$	média (mm)	$s(\hat{g})$	$s(\hat{b})$	s^2	de g	de b
1 - 5	0,995	3,223	0,152	2,005	27,2	0,234	0,974	10,3	$\hat{g} \pm 0,383$	$\hat{b} \pm 1,596$
1 - 10	1,498	4,154	0,030	1,634	60,4	0,341	1,120	25,9	$\hat{g} \pm 0,559$	$\hat{b} \pm 1,836$
1 - 15	1,959	5,000	—	1,429	98,0	0,447	1,300	49,0	$\hat{g} \pm 0,733$	$\hat{b} \pm 2,132$
1 - 20	2,997	4,584	—	1,155	137,4	0,701	1,167	62,9	$\hat{g} \pm 1,149$	$\hat{b} \pm 1,913$
1 - 25	3,386	5,111	—	1,087	173,1	0,796	1,295	88,5	$\hat{g} \pm 1,305$	$\hat{b} \pm 2,123$
1 - 31	3,691	5,767	—	1,041	212,9	0,871	1,457	122,7	$\hat{g} \pm 1,428$	$\hat{b} \pm 2,390$
11 - 20	1,731	4,730	0,061	1,520	76,9	0,405	1,280	38,7	$\hat{g} \pm 0,663$	$\hat{b} \pm 2,099$
11 - 31	0,846	8,935	—	2,174	75,6	0,181	2,549	67,6	$\hat{g} \pm 0,297$	$\hat{b} \pm 4,180$
16 - 31	1,259	9,128	—	1,782	115,0	0,278	2,465	104,9	$\hat{g} \pm 0,456$	$\hat{b} \pm 4,043$

QUADRO II - Estimativas de g, b, p, assimetria (γ_1), média, desvio padrão de $\hat{g}$, desvio padrão de $\hat{b}$, variância e intervalos de confiança dos parâmetros **g** e **b**, obtidos nos nove períodos de fevereiro.

Períodos	Estimativas								Intervalos de confiança a 90%	
	$\hat{g}$	$\hat{b}$	$\hat{p}$	$\hat{\gamma}_1$	média (mm)	$s(\hat{g})$	$s(\hat{b})$	s^2	de g	de b
1 - 5	1,265	2,484	0,212	1,778	24,8	0,315	0,755	7,8	$\hat{g} \pm 0,517$	$\hat{b} \pm 1,238$
1 - 10	2,416	2,261	0,091	1,287	49,7	0,586	0,609	12,4	$\hat{g} \pm 0,961$	$\hat{b} \pm 0,999$
1 - 15	2,041	3,513	0,030	1,400	69,6	0,475	0,925	25,2	$\hat{g} \pm 0,776$	$\hat{b} \pm 1,517$
1 - 20	2,148	5,293	0,030	1,364	110,3	0,501	1,390	60,2	$\hat{g} \pm 0,821$	$\hat{b} \pm 2,279$
1 - 25	2,940	4,901	—	1,166	144,1	0,687	1,248	70,6	$\hat{g} \pm 1,126$	$\hat{b} \pm 2,047$
1 - 28	4,875	3,428	—	0,906	167,2	1,161	0,860	57,3	$\hat{g} \pm 1,904$	$\hat{b} \pm 1,411$
11 - 20	0,897	7,159	0,061	2,111	60,4	0,199	2,087	46,0	$\hat{g} \pm 0,325$	$\hat{b} \pm 3,423$
21 - 28	1,346	4,515	0,061	1,723	57,1	0,309	1,249	27,4	$\hat{g} \pm 0,506$	$\hat{b} \pm 2,048$
16 - 28	2,125	4,591	—	1,372	97,6	0,488	1,188	44,8	$\hat{g} \pm 0,799$	$\hat{b} \pm 1,948$

QUADRO III - Estimativas de g, b, p, assimetria (γ_1), média, desvio padrão de $\hat{g}$, desvio padrão de $\hat{b}$, variância e intervalos de confiança dos parâmetros g e b, obtidos nos nove períodos de março.

Períodos	Estimativas								Intervalos de confiança a 90%	
	$\hat{g}$	$\hat{b}$	$\hat{p}$	$\hat{\gamma}_1$	média (mm)	$s(\hat{g})$	$s(\hat{b})$	s^2	de g	de b
1 - 5	0,869	4,624	0,121	2,145	35,3	0,198	1,401	18,6	$\hat{g} \pm 0,325$	$\hat{b} \pm 2,297$
1 - 10	1,148	5,626	0,030	1,866	62,7	0,256	1,560	36,4	$\hat{g} \pm 0,419$	$\hat{b} \pm 2,557$
1 - 15	2,316	4,675	—	1,314	108,3	0,534	1,204	50,6	$\hat{g} \pm 0,876$	$\hat{b} \pm 1,974$
1 - 20	2,632	5,252	—	1,233	138,3	0,612	1,344	72,6	$\hat{g} \pm 1,002$	$\hat{b} \pm 2,204$
1 - 25	3,085	5,129	—	1,139	158,2	0,722	1,304	81,2	$\hat{g} \pm 1,184$	$\hat{b} \pm 2,138$
1 - 31	3,791	5,150	—	1,027	195,3	0,895	1,301	100,6	$\hat{g} \pm 1,468$	$\hat{b} \pm 2,133$
11 - 20	1,779	4,381	0,030	1,499	75,6	0,410	1,164	34,1	$\hat{g} \pm 0,672$	$\hat{b} \pm 1,909$
21 - 31	1,138	5,166	0,030	1,875	57,0	0,253	1,434	30,4	$\hat{g} \pm 0,415$	$\hat{b} \pm 2,351$
16 - 31	2,089	4,165	—	1,384	87,0	0,479	1,079	38,3	$\hat{g} \pm 0,785$	$\hat{b} \pm 1,768$

QUADRO IV - Estimativas de g, b, p, assimetria (γ_1), média, desvio padrão de $\hat{g}$, desvio padrão de $\hat{b}$, variância e intervalos de confiança dos parâmetros $\underline{g}$ e $\underline{b}$, obtidos nos nove períodos de abril.

Períodos	Estimativas								Intervalos de confiança a 90%	
	$\hat{g}$	$\hat{b}$	$\hat{p}$	$\hat{\gamma}_1$	média (mm)	$s(\hat{g})$	$s(\hat{b})$	s^2	de g	de b
1 - 5	1,081	2,773	0,091	1,923	27,3	0,248	0,800	8,3	$\hat{g} \pm 0,406$	$\hat{b} \pm 1,312$
1 - 10	0,923	4,534	—	2,081	41,9	0,199	1,276	19,0	$\hat{g} \pm 0,326$	$\hat{b} \pm 2,091$
1 - 15	2,128	2,772	—	1,371	59,0	0,489	0,717	16,3	$\hat{g} \pm 0,801$	$\hat{b} \pm 1,175$
1 - 20	2,351	3,234	—	1,304	76,1	0,543	0,832	24,6	$\hat{g} \pm 0,890$	$\hat{b} \pm 1,364$
1 - 25	2,519	3,409	—	1,260	85,9	0,584	0,874	29,3	$\hat{g} \pm 0,957$	$\hat{b} \pm 1,433$
1 - 30	3,103	3,097	—	1,135	96,1	0,727	0,787	29,8	$\hat{g} \pm 1,191$	$\hat{b} \pm 1,291$
11 - 20	1,361	2,761	0,091	1,714	34,2	0,318	0,776	10,4	$\hat{g} \pm 0,521$	$\hat{b} \pm 1,272$
21 - 30	1,643	1,341	0,091	1,560	20,0	0,389	0,370	3,0	$\hat{g} \pm 0,637$	$\hat{b} \pm 0,607$
16 - 30	1,994	1,918	0,030	1,416	37,1	0,463	0,506	7,3	$\hat{g} \pm 0,759$	$\hat{b} \pm 0,829$

QUADRO V - Estimativas de g, b, p, assimetria (γ_1), média, desvio padrão de $\hat{g}$, desvio padrão de $\hat{b}$, variância e intervalos de confiança dos parâmetros g e b, obtidos nos nove períodos de maio.

Períodos	Estimativas								Intervalos de confiança a 90%	
	$\hat{g}$	$\hat{b}$	$\hat{p}$	$\hat{\gamma}_1$	média (mm)	$s(\hat{g})$	$s(\hat{b})$	s^2	de g	de b
1 - 5	0,874	1,440	0,182	2,139	10,3	0,207	0,452	1,8	$\hat{g} \pm 0{,}339$	$\hat{b} \pm 0{,}741$
1 - 10	1,053	2,148	0,091	1,949	20,6	0,240	0,522	4,9	$\hat{g} \pm 0{,}394$	$\hat{b} \pm 1{,}019$
1 - 15	1,358	2,259	0,061	1,716	28,8	0,312	0,625	6,9	$\hat{g} \pm 0{,}511$	$\hat{b} \pm 1{,}024$
1 - 20	1,862	2,166	0,030	1,466	39,1	0,430	0,574	8,7	$\hat{g} \pm 0{,}705$	$\hat{b} \pm 0{,}941$
1 - 25	1,802	2,724	—	1,490	49,1	0,409	0,712	13,4	$\hat{g} \pm 0{,}671$	$\hat{b} \pm 1{,}168$
1 - 31	2,181	2,561	—	1,354	55,9	0,501	0,662	14,3	$\hat{g} \pm 0{,}822$	$\hat{b} \pm 1{,}085$
11 - 20	0,803	2,723	0,152	2,232	18,6	0,185	0,851	6,0	$\hat{g} \pm 0{,}303$	$\hat{b} \pm 1{,}396$
21 - 31	0,688	2,676	0,091	2,410	16,8	0,151	0,832	4,9	$\hat{g} \pm 0{,}248$	$\hat{b} \pm 1{,}364$
16 - 31	1,082	2,509	—	1,922	27,2	0,236	0,690	6,3	$\hat{g} \pm 0{,}387$	$\hat{b} \pm 1{,}131$

QUADRO VI - **Estimativas de g, b, p, assimetria (γ_1), média, desvio padrão de $\hat{g}$, desvio padrão de $\hat{b}$, variância e intervalos de confiança dos parâmetros $\underline{g}$ e $\underline{b}$, obtidos nos nove períodos de junho.**

Períodos	Estimativas								Intervalos de confiança a 90%	
	$\hat{g}$	$\hat{b}$	$\hat{p}$	$\hat{\gamma}_1$	média (mm)	$s(\hat{g})$	$s(\hat{b})$	s^2	de g	de b
1 - 5	0,606	1,756	0,485	2,568	5,5	0,175	0,746	1,9	$\hat{g} \pm 0,286$	$\hat{b} \pm 1,222$
1 - 10	0,696	1,852	0,152	2,396	10,9	0,159	0,595	2,4	$\hat{g} \pm 0,259$	$\hat{b} \pm 0,975$
1 - 15	1,006	1,877	0,030	1,993	18,3	0,222	0,530	3,5	$\hat{g} \pm 0,363$	$\hat{b} \pm 0,868$
1 - 20	1,989	1,409	0,030	1,418	27,2	0,462	0,372	3,9	$\hat{g} \pm 0,757$	$\hat{b} \pm 0,609$
1 - 25	1,926	1,738	0,030	1,441	32,5	0,446	0,460	5,8	$\hat{g} \pm 0,731$	$\hat{b} \pm 0,753$
1 - 30	2,884	1,304	0,030	1,178	36,5	0,684	0,338	4,9	$\hat{g} \pm 1,121$	$\hat{b} \pm 0,553$
11 - 20	0,681	2,808	0,152	2,422	16,2	0,155	0,906	5,4	$\hat{g} \pm 0,253$	$\hat{b} \pm 1,485$
21 - 30	0,704	1,816	0,273	2,382	9,3	0,174	0,629	2,3	$\hat{g} \pm 0,284$	$\hat{b} \pm 1,030$
16 - 30	0,781	2,645	0,121	2,262	18,2	0,177	0,816	5,5	$\hat{g} \pm 0,289$	$\hat{b} \pm 1,338$

QUADRO VII - Estimativas de g, b, p, assimetria (γ_1), média, desvio padrão de $\hat{g}$, desvio padrão de $\hat{b}$, variância e intervalos de confiança dos parâmetros **g** e **b**, obtidos nos nove períodos de julho.

Períodos	E s t i m a t i v a s								Intervalos de confiança a 90%	
	$\hat{g}$	$\hat{b}$	$\hat{p}$	$\hat{\gamma}_1$	média (mm)	$s(\hat{g})$	$s(\hat{b})$	s^2	de g	de b
1 - 5	0,757	1,226	0,424	2,297	5,4	0,211	0,470	1,1	$\hat{g} \pm 0,346$	$\hat{b} \pm 0,771$
1 - 10	0,907	1,581	0,121	2,100	12,6	0,208	0,476	2,3	$\hat{g} \pm 0,341$	$\hat{b} \pm 0,780$
1 - 15	1,078	1,721	0,030	1,926	18,0	0,239	0,481	3,2	$\hat{g} \pm 0,392$	$\hat{b} \pm 0,788$
1 - 20	1,355	1,668	—	1,718	22,6	0,301	0,447	3,8	$\hat{g} \pm 0,494$	$\hat{b} \pm 0,733$
1 - 25	1,750	1,503	—	1,512	26,3	0,397	0,394	3,9	$\hat{g} \pm 0,650$	$\hat{b} \pm 0,645$
1 - 31	2,177	1,403	—	1,355	30,6	0,501	0,363	4,2	$\hat{g} \pm 0,820$	$\hat{b} \pm 0,594$
11 - 20	0,744	1,706	0,212	2,318	10,0	0,177	0,561	2,2	$\hat{g} \pm 0,290$	$\hat{b} \pm 0,920$
21 - 31	0,818	0,844	0,061	2,210	6,5	0,180	0,250	0,6	$\hat{g} \pm 0,294$	$\hat{b} \pm 0,409$
16 - 31	0,968	1,180	0,030	2,032	11,1	0,213	0,335	1,3	$\hat{g} \pm 0,348$	$\hat{b} \pm 0,548$

QUADRO VIII - **Estimativas de g, b, p, assimetria (γ_1), média, desvio padrão de $\hat{g}$, desvio padrão de $\hat{b}$, variância e intervalos de confiança dos parâmetros *g* e *b*, obtidos nos nove períodos de agosto.**

Períodos	Estimativas								Intervalos de confiança a 90%	
	$\hat{g}$	$\hat{b}$	$\hat{p}$	$\hat{\gamma}_1$	média (mm)	$s(\hat{g})$	$s(\hat{b})$	s^2	de g	de b
1 - 5	0,870	1,465	0,424	2,143	7,3	0,246	0,548	1,9	$\hat{g} \pm 0{,}402$	$\hat{b} \pm 0{,}899$
1 - 10	0,631	2,341	0,182	2,516	12,1	0,145	0,781	3,5	$\hat{g} \pm 0{,}238$	$\hat{b} \pm 1{,}281$
1 - 15	0,695	2,706	0,182	2,398	15,4	0,161	0,885	5,1	$\hat{g} \pm 0{,}264$	$\hat{b} \pm 1{,}451$
1 - 20	0,797	2,750	0,061	2,240	20,6	0,175	0,818	6,0	$\hat{g} \pm 0{,}286$	$\hat{b} \pm 1{,}341$
1 - 25	1,074	2,470	0,030	1,930	25,7	0,238	0,691	6,6	$\hat{g} \pm 0{,}390$	$\hat{b} \pm 1{,}132$
1 - 31	1,584	2,392	—	1,589	37,9	0,356	0,632	9,1	$\hat{g} \pm 0{,}584$	$\hat{b} \pm 1{,}036$
11 - 20	0,675	1,801	0,303	2,433	8,5	0,169	0,642	2,2	$\hat{g} \pm 0{,}277$	$\hat{b} \pm 1{,}053$
21 - 31	1,097	1,678	0,061	1,909	17,3	0,247	0,475	3,1	$\hat{g} \pm 0{,}405$	$\hat{b} \pm 0{,}779$
16 - 31	1,305	1,776	0,030	1,750	22,5	0,294	0,485	4,1	$\hat{g} \pm 0{,}482$	$\hat{b} \pm 0{,}795$

QUADRO IX - Estimativas de g, b, p, assimetria (γ_1), média, desvio padrão de $\hat{g}$, desvio padrão de $\hat{b}$, variância e intervalos de confiança dos parâmetros g e b, obtidos nos nove períodos de setembro.

Períodos	Estimativas								Intervalos de confiança a 90%	
	$\hat{g}$	$\hat{b}$	$\hat{p}$	$\hat{\gamma}_1$	média (mm)	$s(\hat{g})$	$s(\hat{b})$	s^2	de g	de b
1 - 5	0,633	2,426	0,485	2,513	7,9	0,183	1,020	3,7	$\hat{g} \pm 0,300$	$\hat{b} \pm 1,672$
1 - 10	0,828	2,444	0,212	2,197	16,0	0,199	0,789	4,9	$\hat{g} \pm 0,326$	$\hat{b} \pm 1,293$
1 - 15	1,062	2,701	0,061	1,940	27,0	0,239	0,768	7,7	$\hat{g} \pm 0,391$	$\hat{b} \pm 1,260$
1 - 20	1,130	2,939	0,030	1,881	32,2	0,252	0,816	9,8	$\hat{g} \pm 0,412$	$\hat{b} \pm 1,339$
1 - 25	1,368	3,235	0,030	1,709	42,9	0,309	0,880	14,3	$\hat{g} \pm 0,507$	$\hat{b} \pm 1,442$
1 - 30	1,777	3,222	0,030	1,500	55,6	0,410	0,856	18,5	$\hat{g} \pm 0,671$	$\hat{b} \pm 1,404$
11 - 20	1,017	1,758	0,091	1,982	16,3	0,232	0,511	3,1	$\hat{g} \pm 0,380$	$\hat{b} \pm 0,838$
21 - 30	0,693	3,699	0,091	2,402	23,3	0,152	1,149	9,5	$\hat{g} \pm 0,250$	$\hat{b} \pm 1,883$
16 - 30	0,806	3,654	0,030	2,227	28,6	0,174	1,068	10,8	$\hat{g} \pm 0,285$	$\hat{b} \pm 1,750$

QUADRO X - Estimativas de g, b, p, assimetria (γ_1), média, desvio padrão de $\hat{g}$, desvio padrão de $\hat{b}$, variância e intervalos de confiança dos parâmetros g e b, obtidos nos nove períodos de outubro.

Períodos	E s t i m a t i v a s								Intervalos de confiança a 90%	
	$\hat{g}$	$\hat{b}$	$\hat{p}$	$\hat{\gamma}_1$	média (mm)	$s(\hat{g})$	$s(\hat{b})$	s^2	de g	de b
1 - 5	0,927	1,475	0,212	2,077	10,8	0,225	0,467	2,0	$\hat{g} \pm 0,368$	$\hat{b} \pm 0,766$
1 - 10	1,293	1,907	0,121	1,759	21,7	0,306	0,548	4,7	$\hat{g} \pm 0,501$	$\hat{b} \pm 0,898$
1 - 15	1,556	2,445	0,061	1,603	35,8	0,361	0,667	9,3	$\hat{g} \pm 0,591$	$\hat{b} \pm 1,094$
1 - 20	2,322	2,339	0,030	1,312	52,7	0,544	0,611	12,7	$\hat{g} \pm 0,892$	$\hat{b} \pm 1,002$
1 - 25	3,558	2,034	—	1,060	72,4	0,838	0,515	14,7	$\hat{g} \pm 1,374$	$\hat{b} \pm 0,843$
1 - 31	5,485	1,732	—	0,854	95,0	1,313	0,434	16,4	$\hat{g} \pm 2,150$	$\hat{b} \pm 0,711$
11 - 20	1,418	2,253	0,030	1,679	31,0	0,321	0,610	7,2	$\hat{g} \pm 0,527$	$\hat{b} \pm 1,001$
21 - 31	3,068	1,380	—	1,142	42,4	0,718	0,351	5,8	$\hat{g} \pm 1,177$	$\hat{b} \pm 0,575$
16 - 31	4,341	1,365	—	0,960	59,3	1,030	0,344	8,1	$\hat{g} \pm 1,689$	$\hat{b} \pm 0,563$

QUADRO XI - Estimativa de g, b, p, assimetria (γ_1), média, desvio padrão de $\hat{g}$, desvio padrão de $\hat{b}$, variância e intervalos de confiança dos parâmetros g e b, obtidos nos nove períodos de novembro.

Períodos	Estimativas								Intervalos de confiança a 90%	
	$\hat{g}$	$\hat{b}$	$\hat{p}$	$\hat{\gamma}_1$	média (mm)	$s(\hat{g})$	$s(\hat{b})$	s^2	de g	de b
1 - 5	1,375	1,545	0,061	1,705	20,0	0,316	0,427	3,3	$\hat{g} \pm 0,518$	$\hat{b} \pm 0,699$
1 - 10	2,721	1,473	0,030	1,212	39,9	0,643	0,382	5,9	$\hat{g} \pm 1,054$	$\hat{b} \pm 0,627$
1 - 15	2,129	2,960	—	1,371	63,0	0,489	0,764	18,7	$\hat{g} \pm 0,801$	$\hat{b} \pm 1,255$
1 - 20	3,425	2,379	—	1,081	81,5	0,806	0,603	19,4	$\hat{g} \pm 1,321$	$\hat{b} \pm 0,988$
1 - 25	4,261	2,575	—	0,969	109,7	1,011	0,648	28,3	$\hat{g} \pm 1,657$	$\hat{b} \pm 1,063$
1 - 30	8,260	1,660	—	0,696	137,2	1,994	0,413	22,8	$\hat{g} \pm 3,269$	$\hat{b} \pm 0,677$
11 - 20	1,843	2,313	—	1,473	42,3	0,419	0,604	9,9	$\hat{g} \pm 0,687$	$\hat{b} \pm 0,990$
21 - 30	2,320	2,372	—	1,313	55,0	0,535	0,611	13,0	$\hat{g} \pm 0,877$	$\hat{b} \pm 1,001$
16 - 30	4,055	1,828	—	0,993	74,2	0,960	0,461	13,5	$\hat{g} \pm 1,574$	$\hat{b} \pm 0,755$

QUADRO XII - Estimativa de g, b, p, assimetria (γ_1), média, desvio padrão de $\hat{g}$, desvio padrão de $\hat{b}$, variância e intervalos de confiança dos parâmetros $\underline{g}$ e $\underline{b}$, obtidos dos nove períodos de dezembro.

Períodos	E s t i m a t i v a s								Intervalos de confiança a 90%	
	$\hat{g}$	$\hat{b}$	$\hat{p}$	$\hat{\gamma}_1$	média (mm)	$s(\hat{g})$	$s(\hat{b})$	s^2	de g	de b
1 - 5	0,716	4,894	0,091	2,363	31,9	0,158	1,510	17,1	$\hat{g} \pm 0,259$	$\hat{b} \pm 2,475$
1 - 10	3,005	2,098	0,030	1,154	61,2	0,714	0,542	13,2	$\hat{g} \pm 1,170$	$\hat{b} \pm 0,889$
1 - 15	3,490	2,349	—	1,070	82,0	0,822	0,595	19,3	$\hat{g} \pm 1,347$	$\hat{b} \pm 0,975$
1 - 20	5,799	2,022	—	0,830	117,3	1,389	0,506	23,7	$\hat{g} \pm 2,277$	$\hat{b} \pm 0,829$
1 - 25	7,822	1,959	—	0,715	153,3	1,886	0,488	30,0	$\hat{g} \pm 3,093$	$\hat{b} \pm 0,800$
1 - 31	10,746	1,737	—	0,610	186,7	2,606	0,431	32,3	$\hat{g} \pm 4,273$	$\hat{b} \pm 0,707$
11 - 20	1,439	4,019	0,030	1,667	56,1	0,327	1,087	23,3	$\hat{g} \pm 0,535$	$\hat{b} \pm 1,783$
21 - 31	1,668	4,163	—	1,549	9,4	0,377	1,095	28,9	$\hat{g} \pm 0,617$	$\hat{b} \pm 1,795$
16 - 31	3,648	2,870	—	1,047	104,7	0,860	0,726	30,0	$\hat{g} \pm 1,410$	$\hat{b} \pm 1,189$

APÊNDICE 2 – VALORES DE χ^2 OBTIDOS NO TESTE DE AJUSTAMENTO PARA OS 108 PERÍODOS ESTUDADOS.

QUADRO XIII - Valores de χ^2 obtidos no teste de ajustamento para os nove períodos de janeiro e fevereiro.

Janeiro				Fevereiro			
Períodos	χ^2	G.L.	Nível de significância	Períodos	χ^2	G.L.	Nível de significância
1 - 5	1,693	3	0,70	1 - 5	1,943	3	0,70
1 - 10	4,372	4	0,50	1 - 10	4,390	5	0,50
1 - 15	1,730	4	0,80	1 - 15	1,928	3	0,70
1 - 20	1,279	5	0,95	1 - 20	9,209	4	0,10
1 - 25	2,017	4	0,80	1 - 25	6,595	4	0,20
1 - 31	6,122	4	0,20	1 - 28	1,441	4	0,90
11 - 20	7,892	3	0,05	11 - 20	0,653	3	0,90
21 - 31	7,789	3	0,10	21 - 28	5,092	3	0,20
16 - 31	2,967	3	0,50	16 - 28	5,276	3	0,20

QUADRO XIV - Valores de χ^2 obtidos no teste de ajustamento para os nove períodos de março e abril.

Março				Abril			
Períodos	χ^2	G.L.	Nível de significância	Períodos	χ^2	G.L.	Nível de significância
1 - 5	3,378	3	0,50	1 - 5	5,341	3	0,20
1 - 10	2,787	3	0,50	1 - 10	3,000	3	0,50
1 - 15	2,387	3	0,50	1 - 15	0,285	3	0,98
1 - 20	2,600	3	0,50	1 - 20	1,487	4	0,90
1 - 25	4,764	3	0,20	1 - 25	0,643	3	0,90
1 - 31	1,299	5	0,95	1 - 30	0,936	5	0,98
11 - 20	4,463	3	0,30	11 - 20	2,471	4	0,70
21 - 31	2,876	4	0,70	21 - 30	5,047	3	0,20
16 - 31	0,761	3	0,90	16 - 30	0,634	3	0,90

QUADRO XV - Valores de χ^2 obtidos no teste de ajustamento para os nove períodos de maio e junho.

M a i o				J u n h o			
Períodos	χ^2	G.L.	Nível de significância	Períodos	χ^2	G.L.	Nível de significância
1 - 5	2,624	3	0,50	1 - 5	1,444	2	0,50
1 - 10	2,965	4	0,70	1 - 10	4,187	4	0,50
1 - 15	3,586	3	0,50	1 - 15	4,597	3	0,30
1 - 20	1,659	3	0,70	1 - 20	1,094	4	0,90
1 - 25	2,218	1	0,20	1 - 25	1,437	4	0,90
1 - 31	1,514	2	0,50	1 - 30	4,379	5	0,50
11 - 20	1,943	3	0,70	11 - 20	4,270	4	0,50
21 - 31	1,000	1	0,50	21 - 30	2,002	3	0,70
16 - 31	2,220	1	0,20	16 - 30	4,870	4	0,30

QUADRO XVI - Valores de χ^2 obtidos no teste de ajustamento para os nove períodos de julho e agosto.

Julho				Agosto			
Períodos	χ^2	G.L.	Nível de significância	Períodos	χ^2	G.L.	Nível de significância
1 - 5	3,450	3	0,50	1 - 5	3,000	1	0,10
1 - 10	3,057	3	0,50	1 - 10	1,421	3	0,70
1 - 15	0,933	3	0,90	1 - 15	5,850	3	0,20
1 - 20	3,017	4	0,70	1 - 20	1,104	3	0,80
1 - 25	3,519	4	0,50	1 - 25	3,779	4	0,50
1 - 31	8,818	5	0,20	1 - 31	4,105	5	0,70
11 - 20	0,800	3	0,90	11 - 20	2,481	3	0,50
21 - 31	8,874	3	0,05	21 - 31	4,449	2	0,20
16 - 31	5,852	3	0,20	16 - 31	2,660	3	0,50

QUADRO XVII - Valores de χ^2 obtidos no teste de ajustamento para os nove períodos de setembro e outubro.

Setembro				Outubro			
Períodos	χ^2	G.L.	Nível de significancia	Períodos	χ^2	G.L.	Nível de significancia
1 - 5	2,901	2	0,30	1 - 5	0,100	2	0,95
1 - 10	0,686	3	0,90	1 - 10	1,523	3	0,70
1 - 15	3,172	3	0,50	1 - 15	2,255	4	0,70
1 - 20	1,878	4	0,80	1 - 20	2,729	4	0,70
1 - 25	0,982	3	0,90	1 - 25	3,233	4	0,70
1 - 30	2,074	3	0,70	1 - 31	2,905	5	0,80
11 - 20	2,252	4	0,70	11 - 20	2,318	3	0,70
21 - 30	1,903	3	0,70	21 - 31	3,784	3	0,30
16 - 30	2,299	4	0,70	16 - 31	5,404	4	0,30

QUADRO XVIII - Valores de χ^2 obtidos no teste de ajustamento para os nove períodos de novembro e dezembro.

Novembro				Dezembro			
Períodos	χ^2	G.L.	Nível de significância	Períodos	χ^2	G.L.	Nível de significância
1 - 5	2,789	4	0,70	1 - 5	3,065	3	0,50
1 - 10	1,565	4	0,90	1 - 10	1,982	3	0,70
1 - 15	1,386	3	0,80	1 - 15	1,442	3	0,70
1 - 20	1,779	3	0,70	1 - 20	1,999	3	0,70
1 - 25	3,028	3	0,50	1 - 25	4,661	3	0,20
1 - 30	2,919	4	0,70	1 - 31	5,300	5	0,50
11 - 20	6,497	3	0,10	11 - 20	6,984	3	0,10
21 - 30	1,488	3	0,70	21 - 31	6,357	3	0,10
16 - 30	0,541	3	0,95	16 - 31	7,741	4	0,10

APÊNDICE 3 - PROBABILIDADE DE PRECIPITAÇÃO PLUVIAL EM MM À 20 NÍVEIS DE PROBABILIDADE, PARA OS 108 PERÍODOS ESTUDADOS.

TABELA I - Probabilidade de precipitação pluvial em mm, em nove períodos de janeiro e fevereiro, para a Região do Km 47 da Antiga Rodovia Rio - São Paulo.

Probabilidade	Janeiro – Períodos 1-5	1-10	1-15	1-20	1-25	1-31	11-20	21-31	16-31
0,05	—	3,8	16,9	37,3	52,2	68,6	—	2,4	9,8
0,10	—	9,4	25,5	50,4	68,6	88,8	10,7	5,6	17,6
0,15	—	14,2	32,9	60,8	81,7	104,7	18,2	9,3	25,3
0,20	1,8	18,6	39,8	70,2	93,2	118,7	24,7	13,5	32,9
0,25	3,9	23,1	46,5	79,0	104,0	131,6	30,8	18,0	40,7
0,30	6,1	27,5	53,2	87,5	114,4	144,1	36,8	23,0	48,8
0,35	8,5	32,1	60,0	96,0	124,7	156,4	42,9	28,5	57,3
0,40	11,0	36,9	67,0	104,5	135,0	168,6	49,1	34,6	66,3
0,45	13,8	42,0	74,2	113,3	145,5	181,1	55,6	41,2	75,9
0,50	16,9	47,3	81,8	122,3	156,3	194,0	62,4	48,7	86,3
0,55	20,3	53,1	90,0	131,9	167,7	207,5	69,7	57,0	97,6
0,60	24,0	59,4	98,8	142,1	179,9	221,8	77,6	66,4	110,0
0,65	28,3	66,5	108,6	153,2	193,0	237,3	86,3	77,1	124,0
0,70	33,3	74,4	119,5	165,4	207,5	254,4	96,1	89,7	139,9
0,75	39,1	83,7	132,0	179,4	224,0	273,7	107,4	104,6	158,5
0,80	46,3	94,8	147,0	195,8	243,3	296,3	120,9	123,1	181,1
0,85	55,6	108,8	165,7	216,2	267,1	324,1	137,9	147,2	209,9
0,90	68,6	128,2	191,4	243,6	299,1	361,4	161,3	181,3	250,0
0,95	90,9	160,7	233,9	288,2	351,0	421,6	200,0	240,4	317,7
0,99	142,8	234,1	328,1	384,8	462,5	550,7	286,6	379,1	472,4

Probabilidade	Fevereiro – Períodos 1-5	1-10	1-15	1-20	1-25	1-28	11-20	21-28	16-28
0,05	—	—	8,0	13,8	38,5	64,8	—	—	18,6
0,10	—	5,7	16,0	26,8	52,2	80,3	2,0	5,1	27,4
0,15	—	13,7	22,0	36,4	63,2	92,2	5,1	9,8	34,8
0,20	—	18,8	27,4	45,0	73,0	102,4	8,7	14,3	41,7
0,25	2,6	23,2	32,5	53,1	82,3	111,8	12,5	18,6	48,3
0,30	5,3	27,3	37,5	61,0	91,3	120,8	16,8	23,1	54,9
0,35	8,0	31,3	42,6	68,9	100,3	129,5	21,5	27,7	61,5
0,40	10,7	35,2	47,7	76,9	109,3	138,1	26,6	32,5	68,3
0,45	13,5	39,2	53,0	85,2	118,5	146,9	32,2	37,6	75,3
0,50	16,4	43,3	58,6	93,9	128,1	155,8	38,4	43,0	82,7
0,55	19,6	47,7	64,5	103,1	138,2	165,1	45,3	48,9	90,6
0,60	23,2	52,3	71,0	113,1	149,0	175,0	53,1	55,4	99,1
0,65	27,1	57,3	78,0	123,9	160,8	185,5	62,0	62,6	108,4
0,70	31,5	62,9	85,9	136,1	173,8	197,1	72,4	70,8	118,8
0,75	36,7	69,3	94,9	150,0	188,6	210,1	84,7	80,4	130,8
0,80	42,9	76,8	105,6	166,6	206,0	225,3	99,9	91,9	145,0
0,85	50,8	86,1	119,1	187,2	227,6	243,8	119,6	106,6	162,8
0,90	61,8	98,8	137,4	215,4	256,8	268,5	147,5	126,9	197,1
0,95	80,4	119,4	167,7	261,7	304,2	307,9	195,6	161,2	227,1
0,99	122,7	164,6	234,7	364,0	390,7	391,3	308,1	239,0	315,4

Nota: Nos anos bissextos os valores de fevereiro devem ser multiplicados por 29/28.

TABELA II - Probabilidade de precipitação pluvial em mm, em nove períodos de março e abril, para a Região do Km 47 da Antiga Rodovia Rio - São Paulo.

	Março										Abril								
Probabilidade	Períodos									Probabilidade	Períodos								
	1-5	1-10	1-15	1-20	1-25	1-31	11-20	21-31	16-31		1-5	1-10	1-15	1-20	1-25	1-30	11-20	21-30	16-30
0,05	—	2,0	22,8	33,3	44,1	64,2	6,8	1,8	16,3	0,05	—	1,7	11,3	16,3	19,8	26,9	—	—	4,1
0,10	—	6,3	32,8	46,3	59,2	82,7	14,9	5,7	24,0	0,10	0,4	3,7	16,6	23,3	27,8	36,1	1,0	1,0	8,3
0,15	0,8	10,5	41,1	56,9	71,2	97,2	21,2	9,4	30,7	0,15	2,3	6,0	21,1	29,1	34,4	43,4	4,5	3,5	11,5
0,20	2,8	14,7	48,7	66,5	81,9	109,9	27,0	13,3	36,8	0,20	4,3	8,4	25,2	34,4	40,4	49,9	7,5	5,4	14,4
0,25	5,0	19,1	55,9	75,6	92,0	121,8	32,6	17,2	42,7	0,25	6,3	11,0	29,2	39,6	46,1	56,0	10,3	7,1	17,1
0,30	7,6	23,7	63,1	84,5	101,8	133,1	38,1	21,4	48,6	0,30	8,5	13,9	33,2	44,6	51,6	61,9	13,1	8,8	19,8
0,35	10,4	28,5	70,3	93,3	111,4	144,2	43,7	25,8	54,5	0,35	10,7	17,0	37,2	49,6	57,2	67,8	16,0	10,5	22,5
0,40	13,5	33,7	77,6	102,3	121,2	155,4	49,5	30,5	60,6	0,40	13,1	20,3	41,3	54,7	62,9	73,7	19,0	12,2	25,2
0,45	17,0	39,2	85,2	111,5	131,1	166,7	55,5	35,5	66,9	0,45	15,7	24,0	45,6	60,0	68,7	79,7	22,2	14,0	28,1
0,50	20,9	45,2	93,1	121,2	141,5	178,4	61,9	41,0	73,5	0,50	18,6	28,0	50,0	65,6	74,8	86,0	25,5	15,9	31,1
0,55	25,2	51,7	101,5	131,4	152,3	190,6	68,7	46,9	80,6	0,55	21,7	32,6	54,8	71,4	81,3	92,6	29,2	17,9	34,3
0,60	30,1	59,0	110,6	142,3	163,9	203,6	76,1	53,6	88,2	0,60	25,1	37,6	59,9	77,8	88,2	99,6	33,2	20,1	37,8
0,65	35,7	67,2	120,5	154,2	176,5	217,6	84,2	61,0	96,6	0,65	29,0	43,4	65,5	84,7	95,7	107,2	37,7	22,5	41,5
0,70	42,2	76,5	131,6	167,4	190,5	233,0	93,4	69,6	106,0	0,70	33,5	50,1	71,8	92,4	104,1	115,6	42,7	25,2	45,8
0,75	50,0	87,5	144,3	182,5	206,3	250,5	103,9	79,6	116,8	0,75	38,8	58,0	79,1	101,2	113,7	125,2	48,6	28,4	50,7
0,80	59,7	100,9	159,3	200,3	224,9	270,9	116,6	91,9	129,6	0,80	45,2	67,8	87,6	111,7	125,1	136,5	55,7	32,1	56,5
0,85	72,2	118,0	178,0	222,4	247,9	296,0	132,4	107,5	145,6	0,85	53,4	80,4	98,4	124,7	139,2	150,4	64,8	36,9	63,7
0,90	90,0	142,0	203,5	252,4	279,0	329,7	154,2	129,4	167,5	0,90	65,0	98,3	113,1	142,4	158,4	169,2	77,3	43,4	73,7
0,95	120,7	182,6	245,3	301,4	329,4	383,9	190,3	166,6	203,5	0,95	84,7	129,0	137,2	171,5	189,7	199,7	98,3	54,2	90,1
0,99	192,9	276,0	337,3	408,4	438,5	500,1	271,0	252,1	283,3	0,99	130,1	180,7	190,6	235,4	258,3	265,3	146,0	78,5	126,4

TABELA III - Probabilidade de precipitação pluvial em mm, em nove períodos de maio e junho, para a Região do Km 47 da Antiga Rodovia Rio - São Paulo.

	Maio										Junho								
Probabilidade	Períodos									Probabilidade	Períodos								
	1-5	1-10	1-15	1-20	1-25	1-31	11-20	21-31	16-31		1-5	1-10	1-15	1-20	1-25	1-30	11-20	21-30	16-30
0,05	—	—	—	3,8	7,6	11,0	—	—	1,6	0,05	—	—	0,3	3,0	3,4	6,8	—	—	—
0,10	—	0,2	2,6	8,1	11,7	16,0	—	—	3,2	0,10	—	—	1,4	6,0	7,0	11,6	—	—	—
0,15	—	1,7	5,0	11,4	15,4	20,3	—	0,4	4,9	0,15	—	—	2,5	8,4	9,8	14,8	—	—	0,3
0,20	0,1	3,1	7,3	14,4	18,8	24,2	0,7	1,0	6,6	0,20	—	0,2	3,6	10,5	12,5	17,6	0,3	—	1,1
0,25	0,8	4,6	9,5	17,3	22,2	28,0	1,7	1,9	8,4	0,25	—	0,7	4,8	12,5	14,7	20,2	1,0	—	2,1
0,30	1,5	6,2	11,7	20,2	25,6	31,8	3,0	2,9	10,2	0,30	—	1,3	6,1	14,5	17,0	22,6	1,9	0,1	3,3
0,35	2,4	7,9	14,0	23,0	29,1	35,5	4,4	4,1	12,2	0,35	—	2,1	7,6	16,4	19,4	25,1	3,0	0,6	4,7
0,40	3,4	9,7	16,5	26,0	32,7	39,4	6,1	5,4	14,4	0,40	—	3,0	9,1	18,5	21,8	27,5	4,3	1,4	6,2
0,45	4,4	11,7	19,0	29,1	36,4	43,4	7,9	7,0	16,7	0,45	—	4,0	10,7	20,6	24,4	30,0	5,9	2,3	8,0
0,50	5,6	13,8	21,8	32,3	40,3	47,6	10,0	8,7	19,3	0,50	0,0	5,2	12,5	22,8	27,0	32,5	7,7	3,3	10,0
0,55	7,0	16,2	24,7	35,8	44,6	52,0	12,3	10,8	22,0	0,55	0,1	6,6	14,5	25,1	29,9	35,2	9,7	4,6	12,2
0,60	8,5	18,8	28,0	39,5	49,2	56,8	15,0	13,1	25,1	0,60	1,5	8,2	16,7	27,6	32,9	38,1	12,1	6,2	14,8
0,65	10,2	21,8	31,6	43,7	54,2	62,1	18,1	15,9	28,6	0,65	2,4	10,1	19,2	30,4	36,3	41,2	15,0	8,0	17,8
0,70	12,3	25,2	35,8	48,3	59,9	68,0	21,8	19,2	32,7	0,70	4,0	12,4	22,1	33,5	40,1	44,7	18,3	10,1	21,3
0,75	14,7	29,2	40,6	53,6	66,5	74,7	26,2	23,1	37,4	0,75	6,1	15,1	25,6	37,1	44,4	48,6	22,4	12,8	25,5
0,80	17,7	34,1	46,4	60,0	74,4	82,8	31,6	28,1	43,2	0,80	8,5	18,6	29,8	41,4	49,6	53,3	27,6	16,1	30,7
0,85	21,6	40,4	53,7	68,0	84,3	92,8	38,8	34,7	50,6	0,85	12,4	23,1	35,2	46,7	56,1	59,0	34,4	20,5	37,6
0,90	27,2	49,3	63,9	78,9	97,8	106,4	48,9	44,1	61,0	0,90	18,4	29,7	42,8	54,0	65,0	66,7	44,2	26,9	47,4
0,95	36,7	64,4	81,1	97,0	120,4	128,9	66,6	60,7	78,7	0,95	27,4	41,2	55,8	66,0	76,7	79,3	61,6	38,2	64,4
0,99	59,2	99,4	120,1	137,4	170,7	178,5	108,3	100,5	119,7	0,99	49,0	68,7	86,1	92,7	104,4	106,6	103,1	65,2	104,7

TABELA IV - Probabilidade de precipitação pluvial em mm, em nove períodos de julho e agosto, para a Região do Km 47 da Antiga Rodovia Rio - São Paulo.

Probabilidade	Julho – Períodos 1-5	1-10	1-15	1-20	1-25	1-31	11-20	21-31	16-31
0,05	—	—	0,4	2,2	3,9	5,2	—	—	0,2
0,10	—	—	1,6	3,8	6,1	7,8	—	0,1	0,7
0,15	—	0,3	2,7	5,4	8,0	10,0	—	0,4	1,4
0,20	—	1,1	3,9	6,9	9,9	12,0	—	0,7	2,1
0,25	—	1,9	5,1	8,5	11,7	14,0	0,2	1,1	2,8
0,30	—	2,8	6,4	10,0	13,5	16,0	0,8	1,6	3,6
0,35	—	3,9	7,8	11,7	15,4	18,0	1,5	2,1	4,4
0,40	—	5,0	9,3	13,5	17,3	20,0	2,3	2,6	5,3
0,45	0,1	6,2	10,9	15,3	19,3	22,2	3,4	3,2	6,3
0,50	0,7	7,6	12,6	17,3	21,5	24,4	4,5	3,9	7,4
0,55	1,5	9,1	14,6	19,5	23,7	26,8	5,9	4,6	8,6
0,60	2,5	10,9	16,7	21,9	26,2	29,4	7,4	5,5	10,0
0,65	3,7	12,9	19,1	24,5	29,0	32,2	9,2	6,5	11,5
0,70	5,2	15,2	21,9	27,5	32,1	35,4	11,4	7,6	13,3
0,75	7,0	17,9	25,1	31,1	35,7	39,1	14,0	9,0	15,4
0,80	9,3	21,3	29,1	35,3	40,0	43,5	17,2	10,7	18,0
0,85	12,3	25,6	34,2	40,7	45,3	48,9	21,5	13,0	21,4
0,90	16,7	31,8	41,4	48,3	52,8	56,4	27,7	16,1	26,1
0,95	24,4	42,5	53,6	60,9	65,1	68,7	38,5	21,6	34,2
0,99	42,9	67,4	81,8	89,7	92,6	96,1	64,2	34,6	53,1

Probabilidade	Agosto – Períodos 1-5	1-10	1-15	1-20	1-25	1-31	11-20	21-31	16-31
0,05	—	—	—	—	0,6	4,8	—	—	1,0
0,10	—	—	—	0,4	2,2	7,8	—	1,0	2,8
0,15	—	—	—	1,5	3,9	10,6	—	2,1	4,5
0,20	—	0,0	0,0	2,4	5,5	13,2	—	3,3	6,1
0,25	—	0,3	0,6	3,6	7,3	15,8	—	4,6	7,7
0,30	—	0,9	1,5	4,9	9,2	18,5	—	5,9	9,3
0,35	—	1,6	2,5	6,5	11,1	21,2	0,2	7,3	11,1
0,40	—	2,6	3,8	8,2	13,3	24,1	0,8	8,7	12,9
0,45	0,3	3,7	5,2	10,1	15,6	27,1	1,6	10,3	14,8
0,50	1,4	5,0	7,0	12,2	18,0	30,2	2,6	12,0	16,9
0,55	2,6	6,5	9,0	14,6	20,8	33,7	3,7	13,9	19,2
0,60	4,1	8,4	11,3	17,4	23,8	37,4	5,1	16,0	21,7
0,65	5,7	10,6	14,0	20,6	27,3	41,6	6,8	18,4	24,4
0,70	7,7	13,2	17,3	24,3	31,3	46,3	8,9	21,1	27,6
0,75	10,2	16,4	21,3	28,7	35,9	51,7	11,4	24,4	31,3
0,80	13,2	20,5	26,3	34,2	41,6	48,2	14,6	28,3	35,8
0,85	17,1	26,0	32,9	41,4	48,9	66,5	18,9	33,3	41,5
0,90	22,7	34,0	42,5	51,7	59,2	77,9	25,1	40,3	49,4
0,95	32,3	48,1	59,2	69,5	76,7	96,9	36,1	52,3	62,7
0,99	55,1	82,1	99,4	111,7	117,1	139,7	62,5	79,8	93,0

TABELA V - Probabilidade de precipitação pluvial em mm, em nove períodos de setembro e outubro, para a Região do Km 47 da Antiga Rodovia Rio - São Paulo.

	Setembro										Outubro								
Probabilidade	Períodos									Probabilidade	Períodos								
	1-5	1-10	1-15	1-20	1-25	1-30	11-20	21-30	16-30		1-5	1-10	1-15	1-20	1-25	1-31	11-20	21-31	16-31
0,05	—	—	—	1,0	2,2	5,0	—	—	0,2	0,05	—	—	—	7,4	22,7	39,4	1,7	11,7	21,4
0,10	—	—	1,4	3,1	5,8	10,9	0,1	0,0	1,3	0,10	—	—	4,1	13,8	29,5	48,1	4,4	15,8	26,9
0,15	—	—	3,2	5,3	9,1	15,5	1,2	0,6	2,6	0,15	—	1,5	7,4	18,5	35,0	54,7	6,8	19,0	31,2
0,20	—	—	5,0	7,4	12,2	19,8	2,3	1,5	4,1	0,20	—	3,6	10,4	22,5	39,7	60,3	9,1	21,8	35,0
0,25	—	0,5	6,9	9,7	15,3	23,9	3,5	2,7	5,8	0,25	0,5	5,4	13,2	26,4	44,2	65,4	11,3	24,6	38,4
0,30	—	1,6	8,9	12,0	18,5	28,0	4,7	4,1	7,6	0,30	1,4	7,3	16,0	30,1	48,5	70,3	13,6	27,2	41,7
0,35	—	2,9	11,1	14,5	21,8	32,1	6,0	5,7	9,7	0,35	2,3	9,3	18,8	33,8	52,7	75,1	16,0	29,8	45,0
0,40	—	4,4	13,4	17,1	25,2	36,3	7,5	7,6	12,1	0,40	3,4	11,3	21,8	37,5	56,9	79,7	18,5	32,4	48,2
0,45	—	6,1	15,8	20,0	28,9	40,8	9,0	9,8	14,7	0,45	4,5	13,4	24,9	41,4	61,2	84,5	21,1	35,0	51,4
0,50	0,0	8,0	18,5	23,1	32,8	45,5	10,7	12,2	17,6	0,50	5,8	15,6	28,1	45,4	65,7	89,3	23,9	37,0	54,8
0,55	0,7	10,1	21,5	26,5	37,0	50,5	12,6	15,1	20,8	0,55	7,3	18,1	31,7	49,7	70,3	94,3	26,9	40,7	58,2
0,60	2,0	12,6	24,8	30,2	41,7	55,9	14,7	18,4	24,5	0,60	8,9	20,8	35,5	54,3	75,3	99,6	30,3	43,8	61,9
0,65	3,3	15,4	28,6	34,4	46,9	61,9	17,1	22,2	28,8	0,65	10,8	23,8	39,7	59,3	80,7	105,2	33,9	47,2	65,9
0,70	5,5	18,7	32,9	39,3	52,8	68,6	19,8	26,7	33,7	0,70	13,0	27,2	44,5	64,9	86,6	111,4	38,1	51,0	70,3
0,75	8,4	22,7	38,0	45,0	59,7	76,4	23,1	32,2	39,7	0,75	15,5	31,2	50,1	71,3	93,3	118,4	43,0	55,2	75,2
0,80	12,0	27,6	44,2	51,9	68,0	85,6	27,0	39,1	47,1	0,80	18,7	36,0	56,8	78,8	101,1	126,4	48,9	60,2	80,9
0,85	17,1	34,1	52,1	60,8	78,6	97,3	32,1	48,2	56,7	0,85	22,8	42,1	65,2	88,2	110,8	136,2	56,4	66,4	68,0
0,90	25,4	43,3	63,3	73,2	93,2	113,3	39,3	61,4	70,4	0,90	28,6	50,6	76,8	101,0	123,8	149,3	66,7	74,7	97,4
0,95	37,9	59,3	82,4	94,4	117,8	139,9	51,5	84,4	94,2	0,95	38,6	64,9	96,2	122,0	144,8	170,0	84,0	88,3	112,4
0,99	68,7	97,0	126,4	143,0	173,8	199,2	79,9	139,4	150,4	0,99	61,9	97,4	139,8	168,1	189,8	213,7	123,3	117,6	144,5

TABELA VI - Probabilidade de precipitação pluvial em mm, em nove períodos de novembro e dezembro, para a Região do Km 47 da Antiga Rodovia Rio - São Paulo.

Probabilidade	Novembro – Períodos									Probabilidade	Dezembro – Períodos								
	1-5	1-10	1-15	1-20	1-25	1-30	11-20	21-30	16-30		1-5	1-10	1-15	1-20	1-25	1-31	11-20	21-31	16-31
0,05	—	6,7	12,0	25,1	39,1	69,1	6,8	11,6	25,5	0,05	—	12.0	25,3	50,1	75,5	103,9	3,2	9,6	33,4
0,10	1,8	11,8	17,7	32,9	49,4	80,6	10,4	16,7	32,5	0,10	0,0	20,0	33,1	60,7	88,5	118,4	8,3	15,3	43.4
0,15	3,5	15,3	22,5	39,1	57,4	89,1	13,6	20,9	38,0	0,15	0,9	25,5	39,3	68,7	98,1	129,0	12,6	20,4	51,2
0,20	5,1	18,3	26,9	44,5	64,4	96,2	16,6	24,7	42,7	0,20	2,2	30,2	44,7	75,6	106,3	137,9	16,7	25,2	58.1
0,25	6,6	21,2	31,2	49,6	70,8	102,7	19,5	28,4	47,1	0,25	3,9	34,4	49,8	81,8	113,6	145,8	20,8	30,0	64,5
0,30	8,2	23,9	35,5	54,5	76,9	108,7	22,5	32,1	51,4	0,30	5,9	38,5	54,6	87,7	120,5	153,2	24,9	34,9	70,6
0,35	9,8	26,5	39,7	59,4	82,9	114,5	25,5	35,7	55,5	0,35	8,2	42,5	59,5	93,4	127,1	160,2	29,2	39,8	76,7
0,40	11,5	29,2	44,1	64,2	88,9	120,2	28,6	39,4	59,6	0,40	10,8	46,5	64,3	99,1	133,6	167,1	33,7	45,0	82,7
0,45	13,2	32,0	48,7	69,2	95,0	125,9	31,8	43,3	63,8	0,45	13,8	50,6	69,2	104,8	140,2	174,0	38,4	50,4	88,9
0,50	15,1	34,8	53.4	74,3	101,2	131,6	35,2	47,3	68,1	0,50	17,1	54,9	74,3	110,6	146,8	180,9	43,5	56,1	95,3
0,55	17,2	37,9	58,5	79,7	107,7	137,6	36,8	51,6	72,6	0,55	21,0	59,3	79,6	116,6	153,6	188,0	48,9	62,3	101,9
0,60	19,4	41,1	64,0	85,4	114,6	143,8	42,8	56,2	77,4	0,60	25,5	64,1	85,3	122,9	160,7	195,5	54,9	69,0	109,0
0,65	21,9	44,6	70,0	91,5	122,1	150,4	47,1	61,2	82,5	0,65	30,7	69,2	91,4	129,7	168,3	203,3	61,6	76,4	116,7
0,70	24,7	48,5	76,7	98,4	130,2	157,6	52,0	66,9	88,2	0,70	36,8	74,9	98,2	137,1	176,6	211,8	69,1	84,8	125,1
0,75	28,1	52,9	84,4	106,1	139,4	165,6	57,7	73,3	94,6	0,75	44,2	81,3	105,9	145,4	185,8	221,3	77,9	94,5	134,7
0,80	32,0	58,1	93,6	115,2	150,1	174,8	64,4	80,9	102,0	0,80	53,5	88,9	114,8	155,0	196,5	232,1	88,4	106,1	145,9
0,85	37,1	64,6	105,1	126,4	163,3	186,0	72,9	90,4	111,2	0,85	65,7	98,3	125,9	166,8	209,4	245,2	101,8	120,8	159,7
0,90	44,1	73,3	120,7	141,4	180,9	200,7	84,5	103,4	123,4	0,90	83,3	110,9	140,8	182,3	226,3	262,3	120,3	141,0	178,1
0,95	55,9	87,6	146,5	165,7	209,2	223,9	103,8	124,6	143,1	0,95	114,0	131,4	164,9	207,1	253,1	289,1	151,4	174,6	208,0
0,99	82,6	118,7	203,5	217,9	269,3	271,7	146,7	171,3	185,2	0,99	175,8	187,4	216,6	259,0	308,6	344,3	221,7	250,0	272,0