

# INFILTRAÇÃO HORIZONTAL DE ÁGUA EM SOLOS NÃO SATURADOS: PERFIL APROXIMADO DE RITZ

GILSON COUTINHO JUNIOR

Orientador: Dr. Afonso Decico

Dissertação apresentada à Escola Superior de  
Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universi-  
dade de São Paulo, para obtenção do título  
de Mestre em Energia Nuclear na Agricultura.

PIRACICABA  
Estado de São Paulo - Brasil  
Março, 1978

*Dedico*

*a*

*Arlete, minha esposa*

*Ofereço*

*a meus pais*

*Gilson e Maria Aparecida*

*e a minha avó*

*Alvina*

## AGRADECIMENTOS

### *Agradeço*

Ao Prof. Dr. Afonso Decico, pela valiosa orientação que tornou possível este trabalho.

Aos Professores Satoshi Tobinaga e José Teixeira Freire, pelas sugestões, apoio e paciente discussão durante a elaboração deste trabalho.

Ao Professor Roberto Naves Domingos pela colaboração e incentivo.

Ao Vitor Hélio Zumpano, pela valiosa colaboração na execução da parte experimental deste trabalho.

A Doraci Dionizio, pelo eficiente trabalho de dactilografia.

Ao Marco Antonio Contador, pela confecção dos gráficos.

Ao Prof. Luiz Martins Rodrigues Filho, pela paciente leitura e correção do manuscrito.

A todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

INDICE

	página
1. RESUMO.....	01
2. INTRODUÇÃO E REVISÃO DA LITERATURA.....	02
3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS. ....	06
3.1. Equação diferencial que descreve o escoamento de água.....	06
3.2. Técnicas de obtenção da solução, .....	08
3.3. Desenvolvimento da técnica proposta.....	13
4. MATERIAL E MÉTODO .....	17
4.1. Material.....	17
4.2. Método.....	20
5. RESULTADOS.. ..	24
6. DISCUSSÃO E CONCLUSÕES.....	34
7. SUMMARY.....	37
8. BIBLIOGRAFIA.....	38

## LISTA DE TABELAS

Nº	Página
1. Características dos solos utilizados.....	17
2. Valores da difusividade em função da umidade do solo, obtidos pelo método de BRUCE e KLUTE.....	27
3. Valores da umidade $\omega$ em função de $\phi = x/\sqrt{t}$ experimental e teórico e desvio entre êles para solo P.V.A....	28
4. Valores da umidade $\omega$ em função de $\phi = x/\sqrt{t}$ experimental e teórico e desvio entre êles para solo T.R.E..	29
5. Valores da umidade $\omega$ em função de $\phi = x/\sqrt{t}$ experimental e teórico e desvio entre êles para solo de CER RADO.....	30

LISTA DE FIGURAS

Nº	Página
1. Sistema utilizado na infiltração.....	19
2. Umidade do solo em função da coordenada de posição horizontal e do tempo para solo T.R.E.....	21
3. Umidade do solo em função da coordenada de posição horizontal e do tempo para solo de CERRADO.....	22
4. Perfil de umidade para escoamento horizontal de água em solo P.V.A.....	31
5. Perfil de umidade para escoamento horizontal de água em solo T.R.E.....	32
6. Perfil de umidade para escoamento horizontal de água em solo de CERRADO.....	33

---

## 1. RESUMO

---

---

Neste trabalho é proposta uma solução analítica aproximada para a equação que descreve o escoamento de água em solos não saturados, com base no método de Ritz - integral.

Perfis de umidade para diferentes solos são determinados através desta solução e comparados com os experimentais.

Também é feita uma comparação com perfis teóricos obtidos pelas técnicas de Tobinaga-Freire, Parlange-Reichardt e Parlange-Bruce e Klute.



---

## 2. INTRODUÇÃO E REVISÃO DA LITERATURA

---

O estudo do escoamento de fluídos em meios porosos não saturados vem despertando um crescente interesse nos mais diversos ramos das pesquisas científica e tecnologica.

Em particular, no que concerne à Engenharia Agronômica, a solução dos problemas relacionados com o escoamento de água em solos não saturados é de grande importância na execução de projetos que, em geral, visam ao aumento da produtividade em uma determinada região.

A determinação de diversos parâmetros, tais como a difusividade e a condutividade do solo, bem como o esta

belecimento do perfil de umidade, assume papel importante nos projetos de irrigação, principalmente em regiões onde a água é o fator limitante.

Quanto mais simples e prática a metodologia utilizada na determinação destas características, maior será a contribuição para um desenvolvimento racional destes projetos.

Do ponto de vista fenomenológico, o estabelecimento de uma forma geral para a difusividade do meio poroso, bem como o desenvolvimento de um método geral para a obtenção da solução analítica da equação que descreve o fenômeno (equação 1) são problemas que ainda carecem de solução.

Vários são os pesquisadores nesta área que merecem destaque.

BRUCE e KLUTE (1956) desenvolveram uma metodologia para a obtenção da difusividade do solo a partir dos perfis de umidade obtidos experimentalmente.

GARDNER e MAYHUGH (1958) sugeriram que para muitos solos a difusividade podia ser relacionada com a umidade por uma função exponencial da forma  $D = D_0 \exp(\beta\theta)$ , onde  $D$  é a difusividade,  $\theta$  a umidade do solo e  $D_0$  e  $\beta$  parâmetros característicos do solo.

SCOTT e HANKS (1962), COVEY (1963), JACKSON (1963 a,b) e WEEKS e RICHARDS (1967) utilizaram em vários trabalhos a forma sugerida por Gardner, e JACKSON (1963a) demonstrou ser ela adequada para a descrição da difusividade hidráulica do so

lo em um intervalo suficientemente grande de umidade.

FREIRE (1970) estabeleceu uma forma empírica para a difusividade em função da umidade, utilizando-se de um solo areno argiloso.

AHUJA e SWARTZENDRUBER (1972) propuseram uma forma de potência para  $D(\theta)$  e estabeleceram a comparação entre os resultados obtidos com esta e com a função exponencial comumente utilizada.

REICHARDT e LIBARDI (1973) estabeleceram uma equação geral para a difusividade, baseada em experimento de infiltração horizontal de água em solo inicialmente seco ao ar.

DECICO e SANTOS (1976) definindo uma difusividade média aparente do solo, apresentaram um método dinâmico baseado na velocidade da frente de molhamento e na frequência de infiltração da água na superfície do solo, para determinação da difusividade em condições de campo.

PHILIP (1955) desenvolveu um método numérico iterativo para a obtenção do perfil de umidade, conhecendo-se  $D(\theta)$ .

PARLANGE (1971) propôs uma expressão analítica para a obtenção do perfil de umidade conhecendo-se  $D(\theta)$ .

PARLANGE (1972), utilizando a difusividade "scaled" proposta por Reichardt (1972), estabeleceu uma expressão para

o cálculo do perfil de umidade e comparou seus resultados com os obtidos por Reichardt, utilizando a técnica numérica proposta por Philip.

TOBINAGA e FREIRE (1974), com base nos resultados obtidos da formulação variacional, estabeleceram uma expressão analítica do perfil de umidade, assumindo a difusividade na forma exponencial.

No presente trabalho, é proposta uma nova técnica para a obtenção de uma solução analítica aproximada com base no método de Ritz - integral, obtendo-se desta forma os perfis de umidade para diferentes tipos de solo.

Além desta, foram utilizadas, para determinação do perfil teórico, a técnica de Tobinaga-Freire, a expressão analítica proposta por Parlange em conjunto com a difusividade generalizada de Reichardt e novamente a expressão de Parlange, desta feita com a difusividade calculada pelo método de Bruce e Klute.

Uma comparação entre os perfis teóricos (calculados através das diferentes técnicas) e o experimental é feita para três solos diferentes, e os resultados obtidos são analisados e discutidos.

---

### 3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

---

---

3.1. Equação diferencial que descreve o fenômeno de escoamento de água.

A equação que descreve o escoamento de água em um meio poroso não saturado, homogêneo, isotrópico, estável e considerando o processo isotérmico e da forma:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{\rho g}{\eta} k(\theta) \nabla \psi \right) \dots \dots \dots (1)$$

onde:

$\theta$  = umidade por cento volume  $[L^3.L^{-3}]$

$g$  = aceleração da gravidade  $[M.T^{-2}]$

$k(\theta)$  = permeabilidade do meio  $[L^2]$

$\rho$  = densidade da água  $[M.L^{-3}]$

$\eta$  = viscosidade da água  $[M.L^{-1}T^{-1}]$

$\psi$  = potencial total da água no meio poroso  $[L]$

No caso unidimensional horizontal a equação (1)

torna-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho g}{\eta} k(\theta) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] \dots\dots\dots (2)$$

onde  $\xi$  é o potencial matricial da água no solo.

Definindo-se a condutividade hidráulica do solo

como:

$$K(\theta) = \frac{\rho g}{\eta} k(\theta) \dots\dots\dots (3)$$

e desprezando-se o efeito da histerese , a equação (2) pode

ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K(\theta) \frac{d\xi}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \dots\dots\dots (4)$$

Definindo-se a difusividade hidráulica do solo -  
como:

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\xi}{d\theta} \dots\dots\dots (5)$$

obtem-se, finalmente

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \dots\dots\dots (6)$$

Esta equação tem a mesma forma de uma equação de difusão não linear, onde D(θ) e função da umidade do solo. Sua solução, seja ela analítica, seja numérica fica dependendo, por tanto, do conhecimento da função D(θ).

### 3.2. Técnicas de Obtenção da Solução

Para o caso do escoamento de água em um meio poroso não saturado, se considerarmos uma coluna homogênea de solo, com umidade inicial constante  $\theta_0$ , na qual é aplicada e man

tida uma umidade de saturação  $\theta_s$  em uma de suas extremidades , podemos escrever, para este sistema, a condição inicial e as de contorno da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \theta(x,0) &= \theta_0 & (a) \\ \theta(0,t) &= \theta_s & (b) \dots\dots\dots(7) \\ \theta(\infty,t) &= \theta_0 & (c) \end{aligned}$$

BRUCE e KLUTE (1956), tomando como partida a equação (6), sujeita as condições de contorno (7), e utilizando a variável de Boltzman

$$x = \phi(\theta)/\sqrt{t} \dots\dots\dots(8)$$

obtiveram para a difusividade a relação:

$$D(\theta) = - \frac{1}{2} \frac{d\phi}{d\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} \phi d\theta \dots\dots\dots(9)$$

Estabeleceram, assim, a difusividade em função da umidade do solo, a partir dos perfis de umidade obtidos experimentalmente, e seguindo o procedimento sugerido pela equa



ção (9), isto é, computando a integral e a derivada para um conjunto de valores da unidade  $\theta$  ao longo do perfil.

REICHARDT et alii (1972) adimensionalizaram e generalizaram a equação (6), utilizando-se de um solo padrão e de grandezas intrínsecas da água e do solo.

Para tanto, sugeriram que os valores do comprimento característico  $\lambda_i$  de diferentes solos fossem determinados relativamente a um solo padrão, segundo a relação:

$$\lambda_i / \lambda_p = (\alpha_i / \alpha_p)^2 \dots\dots\dots (10)$$

onde  $\lambda_p$  é o comprimento característico do solo padrão, e  $\alpha_i$  e  $\alpha_p$  são, respectivamente, as penetrabilidades do solo genérico e do solo padrão.

De posse da equação (10) e definindo a difusividade de acordo com a teoria dos meios similares, obtiveram:

$$D_i(\omega) = \frac{\lambda_p \sigma \alpha_i^2}{\eta \alpha_p} D^*(\omega) \dots\dots\dots (11)$$

onde:

$$\omega = \frac{\theta(x,t) - \theta_0}{\theta_s - \theta_0}, \dots\dots\dots (12)$$

$\sigma$  e  $\eta$  são, respectivamente a tensão superficial e a viscosidade da água,

$D^*(\omega)$  a difusividade "scaled"

e

$D_i(\omega)$  a difusividade generalizada.

Dos dados experimentais de treze solos diferentes, Reichardt et alii determinaram  $D^*(\omega)$ ; tomando um destes solos como padrão, e substituindo  $D^*(\omega)$  na equação (12), obtiveram a expressão:

$$D_i(\omega) = 8,77 \times 10^{-4} \alpha^2 \exp(8,087\omega) \dots \dots \dots (13)$$

que permite calcular a difusividade de um solo genérico, conhecendo-se a penetrabilidade do mesmo.

PARLANGE (1972), utilizando como solução analítica aproximada da equação (6):

$$\phi = 2 \int_{\omega}^1 D(a) da \cdot \left( 2 \int_0^1 aD(a) da \right)^{-1/2} \dots \dots \dots (14)$$

e a difusividade na forma  $D = D_0 \exp\beta\omega$ , estabeleceu a expres

são:

.12.

$$\phi = \left(2D_0\right)^{1/2} \left(\beta-1\right)^{1/2} \exp \beta/2 \left[1-\exp-\beta(1-\omega)\right] \quad (15)$$

de forma que o perfil de umidade  $\omega = \omega(\theta)$  pode ser escrito co  
mo:

$$\omega = 1 + \frac{1}{\beta} \ln \left[1 - \frac{\phi}{\sqrt{2D_0}} \left(\beta-1\right)^{1/2} e^{-\beta/2}\right] \dots\dots (16)$$

TOBINAGA e FREIRE (1973), através da análise dos resultados da formulação variacional, obtiveram uma técnica para a determinação da difusividade na forma  $D(\omega) = D_0 \exp(\beta\omega)$ , onde  $D_0$  e  $\beta$  são parâmetros característicos do solo, utilizando-se do perfil de umidade e dos dados da posição da frente de mo  
lhamento em função do tempo.

O perfil teórico obtido por TOBINAGA (1972) é

$$\omega = \frac{1}{\beta} \ln \left[1 + (\exp \beta-1) (1 - \phi/\alpha)^2\right] \dots\dots\dots (17)$$

onde:

$$\alpha = \left\{ \frac{2D_0}{\beta^2 - 6\beta + \frac{34}{3}} \left[ \left(\beta - \frac{7}{3}\right) e^\beta - 2 e^{\beta/2} \operatorname{arctg} e^{\beta/2} \right] \right\}^{1/2} \quad (18)$$

é a penetrabilidade do meio.

Para a determinação do parâmetro  $\beta$ , adotou-se a condição de que a área sob a curva  $\phi(\omega)$ , obtida pela equação (13), seja igual a área experimental, ou seja:

$$A_{\text{exp}} = \int_0^{\alpha} \omega d\phi = \frac{\alpha}{\beta} \left[ \ln(e^{\beta} + 1) - 2 + 2 e^{\beta/2} \arctg e^{\beta/2} \right] \quad (19)$$

Como a experiência mostra que para a grande maioria dos solos  $\beta > 10$ , Tobinaga-Freire (1974) propuseram uma simplificação na equação (17), estabelecendo para o perfil teórico,

$$\omega = 1 + \frac{2}{\beta} \ln(1 - \phi/\alpha) \dots \dots \dots (20)$$

### 3.3. Desenvolvimento da Técnica Proposta

Utilizando-se na equação (16) da variável de Boltzmann adimensional:

$$\Phi(\theta) = \phi/\sqrt{D_0} = x/\sqrt{D_0 t} \dots \dots \dots (21)$$

obtem-se [COUTINHO et alii (1977)]:

$$D \frac{d}{d\phi} \left( \frac{d\theta}{d\phi} \right) + \frac{\phi}{2} \frac{d\theta}{d\phi} = 0 \dots\dots\dots (22)$$

onde  $D(\phi) = D/D_0 \dots\dots\dots (23)$

Admitindo-se a difusividade na forma:

$$D = D_0 \exp(\beta\omega) \dots\dots\dots (24)$$

a equação (22) torna-se:

$$D \frac{d^2 D}{d\phi^2} + \frac{\phi}{2} \frac{dD}{d\phi} = 0 \dots\dots\dots (25)$$

Das condições 7.b e 7.c, comumente utilizadas na resolução da equação (6), e utilizando-se as equações (12), (23) e (24), obtem-se, para a equação (25), as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} D(0) &= \exp \beta & (a) \dots\dots\dots (26) \\ D(\infty) &= 1 & (b) \end{aligned}$$

Não se tendo conhecimento de um método para a obtenção da solução exata da equação (25), procurou-se, neste trabalho, uma solução aproximada pelo método de Ritz-integral, fazendo-se as seguintes simplificações:

$$\theta = \begin{cases} \theta(x,t) & \text{para } 0 \leq \phi \leq \phi_0 = \alpha/\sqrt{D_0} \\ 0 & \text{para } \phi \geq \phi_0 \end{cases} \dots\dots\dots(27)$$

onde  $\alpha$  é a penetrabilidade do solo.

Com isto, a condição (26.b) torna-se:

$$D(\phi) = 1 \text{ para } \phi \geq \phi_0 \dots\dots\dots(28)$$

Com base nos dados experimentais obtidos, verificou-se a possibilidade de se adotar a solução aproximada de Ritz como:

$$D = \left[ \exp\beta \left( 1 - \frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 + \left( \frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right] \left[ 1 + r \cdot \left( \frac{\phi}{\phi_0} \right) \left( 1 - \frac{\phi}{\phi_0} \right) \right] \quad (29)$$

onde  $r$  é o primeiro coeficiente de Ritz. Este coeficiente foi de

terminado pelo método integral, que consiste em substituir a equação (29) em (25), e impor que:

$$\int_0^{\Phi_0} \left( D \frac{d^2 D}{d\Phi^2} + \frac{\Phi}{2} \frac{dD}{d\Phi} \right) d\Phi = 0 \dots\dots\dots (30)$$

Desta forma obteve-se a equação:

$$r^2 + \left( \frac{7\Phi_0 \exp(-\beta)}{24} + \frac{38}{3} \right) r - 35 \left( \frac{2-\Phi_0 \exp(-\beta)}{9} \right) = 0 \quad (31)$$

cujas raízes são:  $r_1 = 0,77$  e  $r_2 = -10,10$

Como  $r_2 = -10,10$  resulta  $D < 0$ , utilizou-se  $r_1 = 0,77$  como sendo o 1º coeficiente de Ritz da equação (29).

Lembrando-se que  $D = D/D_0 = \exp \beta \omega$ , resulta para o perfil de umidade:

$$\omega = \frac{1}{\beta} \ln \left\{ \left[ \exp \beta \left( 1 - \frac{\Phi}{\alpha} \right)^2 + \left( \frac{\Phi}{\alpha} \right)^2 \right] \left[ 1 + 0,77 \frac{\Phi}{\alpha} \left( 1 - \frac{\Phi}{\alpha} \right) \right] \right\} \quad (32)$$

---

#### 4. MATERIAL E MÉTODO

---

##### 4.1. Material

Na realização deste trabalho foram utilizados três tipos de solo, cujas características são mostradas na tabela 1.

TABELA 1 - Características dos solos utilizados

---

SOLOS	$\rho_s$	$\alpha$	$\beta$	$\theta_o$	$\theta_s$
1	1,66	1,39	14,30	0,020	0,360
2	1,54	1,52	20,00	0,048	0,390
3	1,56	5,20	15,38	0,031	0,350

---



Solo 1 - P.V.A. (Podzólico Vermelho Amarelo, Var. Piracicaba)\*

Solo 2 - T.R.E. (Terra Roxa Estruturada, Var. Luiz de Queiroz)

Solo 3 - Solo de CERRADO - Corumbataí, S.P.

$\rho_s$  - massa específica do solo seco ( $\text{g.cm}^3$ )

$\alpha$  - penetrabilidade do solo ( $\text{cm.min}^{-1/2}$ )

$\beta$  - parâmetro característico do solo

$\theta_o$  - umidade residual ( $\text{cm}^3.\text{cm}^{-3}$ )

$\theta_s$  - umidade de saturação ( $\text{cm}^3.\text{cm}^{-3}$ )

\* dados obtidos por LIBARD e REICHARDT, (1973)

Na confecção das colunas para acondicionar o solo, foram utilizados tubos de acrílico transparente, medindo 80cm de comprimento e 5cm de diâmetro, com parede de 0,3cm de espessura.

O sistema utilizado na infiltração consiste em uma proveta graduada, especialmente projetada para manter a pressão atmosférica, e devidamente acoplada à coluna de solo disposta na posição horizontal (fig.1).

Na obtenção dos perfis de umidade, foi utilizado equipamento constando de um analisador monocanal da ORTEC-INC. e uma fonte de  $C_s^{137}$  de 100mC. (FERRAZ, 1974).

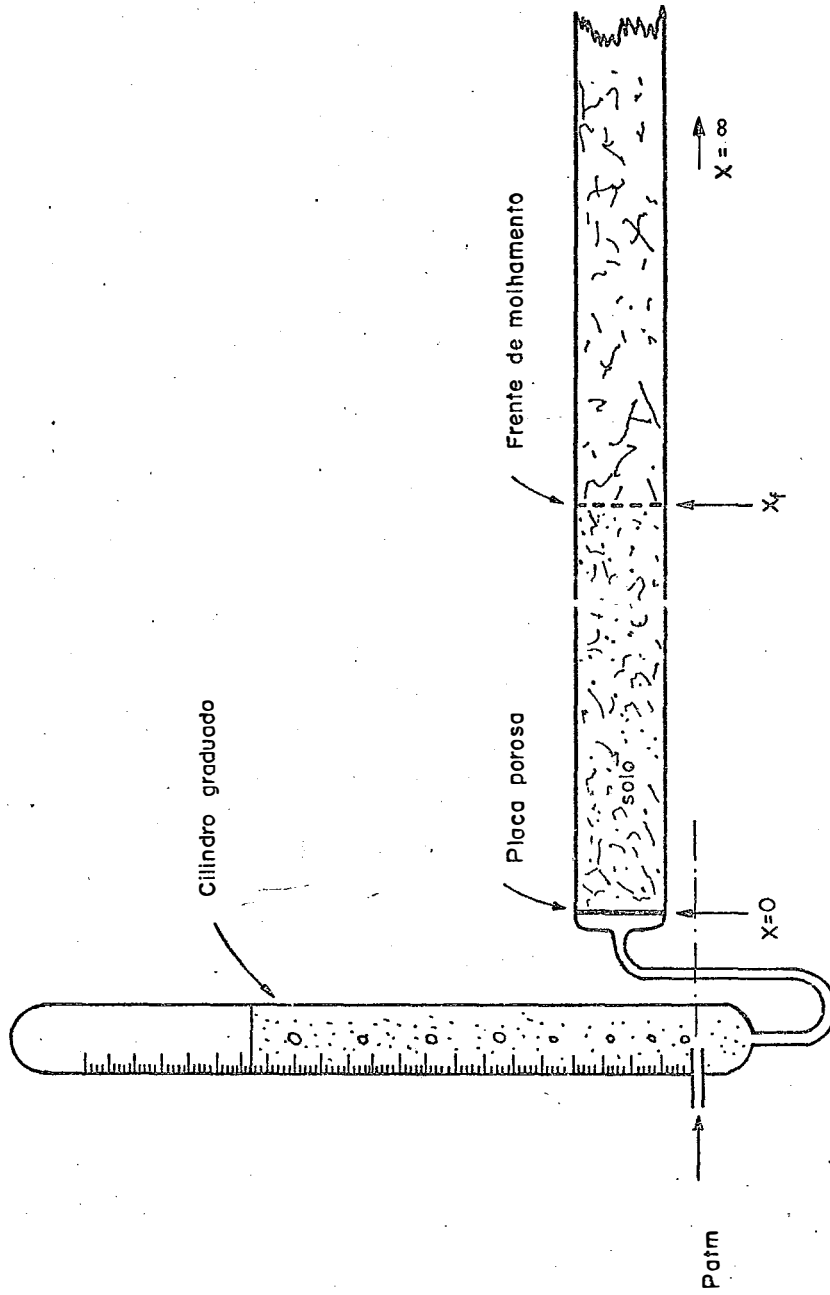


Fig.1 - Sistema utilizado na infiltração

#### 4.2. Método

O solo, inicialmente seco ao ar, foi peneirado em peneiras de 0,1cm e a umidade residual  $\theta_0$  foi determinada pesando-se amostras de solo antes e depois da secagem em estufa (105°C) durante 48 horas.

Durante o processo de infiltração, a posição da frente de molhamento em função do tempo foi determinada visualmente e foram obtidos os perfis de umidade (figuras 2 e 3) através da técnica de atenuação de radiação gama (DAVIDSON et alii, 1963)

O perfil experimental  $\theta(\omega)$  foi obtido a partir dos perfis de umidade  $\theta(x,t)$ , utilizando-se das equações (8) e (12).

Os valores de  $\beta$ , relacionados na tabela 1, foram determinados através dos coeficientes da regressão linear  $-\ln(1 - \phi/\alpha)$  em função de  $\omega$ , a partir da equação (20).

Os perfis teóricos  $\phi(\omega)$  foram obtidos através das técnicas descritas nos itens 2.2 e 2.3.

Na aplicação da técnica de Tobinaga-Freire, utilizou-se a equação (17) e os valores de  $\beta$  da tabela 1, para cada um dos solos utilizados.

A obtenção de  $\phi(\omega)$  pela técnica de Parlange-Reichardt foi feita, procedendo-se da seguinte maneira:

a) determinou-se  $D(\omega)$  através da equação (13), conhecendo-se os valores da penetrabilidade  $\alpha$  fornecidos pela ta

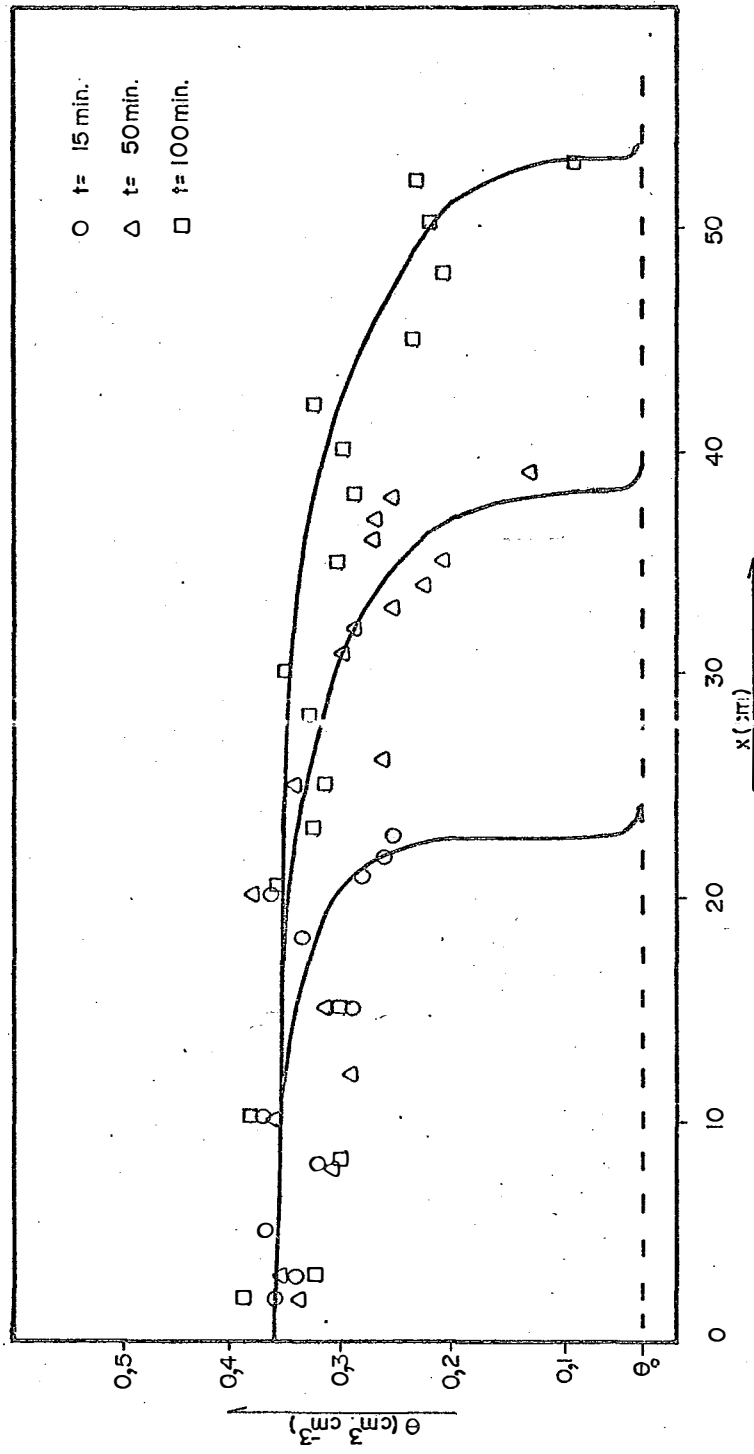


Fig. 2 - Umidade do solo em função da coordenada de posição horizontal e do tempo para solo T.R.E.

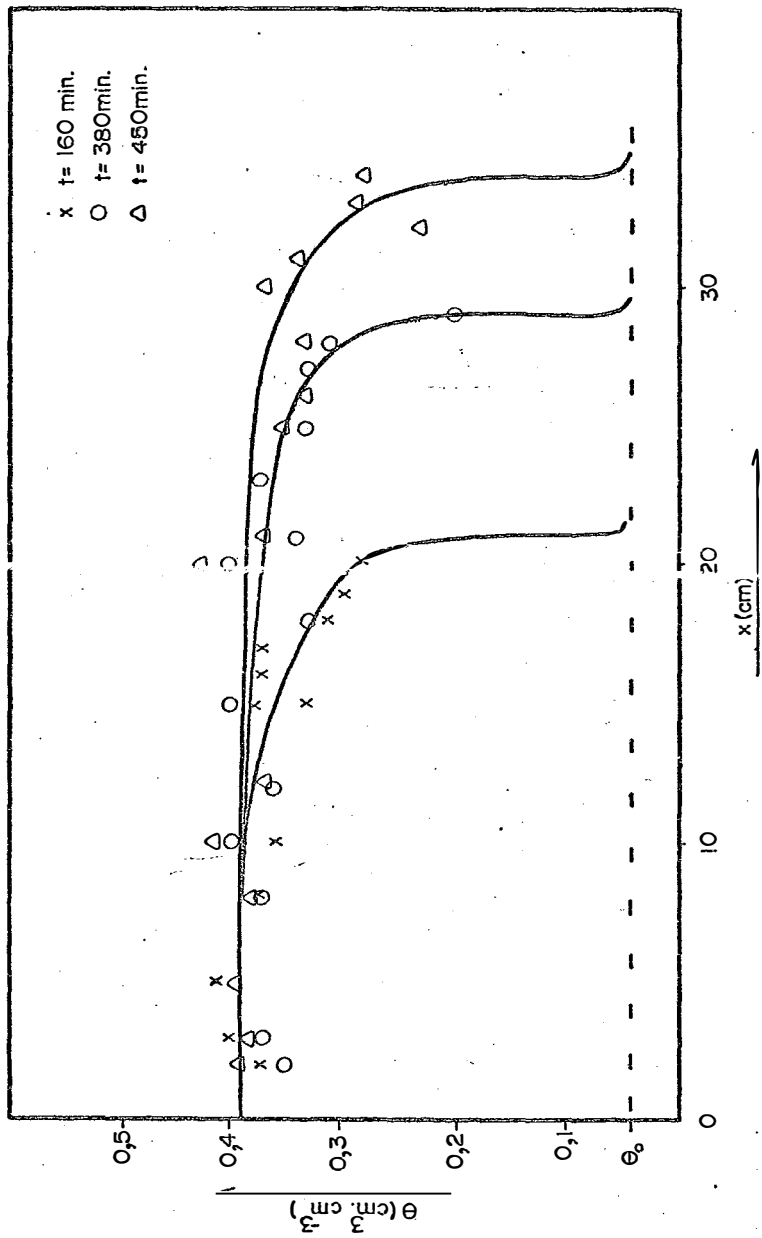


Fig. 3 - Umidade do solo em função da coordenada de posição horizontal e do tempo para solo de Cerrado.

bela 1.

b) com os valores de  $D_0$  e  $\beta$ , assim determinados e através da equação (16) obteve-se  $\phi(\omega)$ .

Pela técnica de Parlange-Bruce e Klute o procedimento foi o seguinte:

a) determinou-se  $D(\omega)$  através da equação (9), computando-se a integral e a derivada para um conjunto de valores da umidade ao longo do perfil.

b) foi feita a regressão linear  $\ln D(\omega)$  em função de  $\omega$ , determinando-se assim os valores de  $D_0$  e  $\beta$ .

c) com os valores de  $D_0$  e  $\beta$ , e utilizando-se a equação (16) obteve-se  $\phi(\omega)$ .

O perfil teórico proposto neste trabalho, com base no método de Ritz-integral, foi obtido através da equação (32), utilizando-se os valores de  $\beta$  e  $\alpha$  da tabela 1.

---

## 5. RESULTADOS

---

---

Seguindo-se o procedimento descrito na metodologia, foram obtidos pela técnica de Parlange-Reichardt os seguintes perfis teóricos:

$$\omega = 1 + 0,12 \ln (1 - 0,80\phi), \dots \dots \dots (33)$$

para solo P.V.A.

$$\omega = 1 + 0,12 \ln (1 - 0,73\phi), \dots \dots \dots (34)$$

para solo T.R.E.

$$\omega = 1 + 0,12 \ln(1 - 0,21\phi), \dots \dots \dots (35)$$

para solo de CERRADO.

Da regressão feita a partir dos dados da tabela 2 para aplicação da técnica de Parlange-Bruce e Klute, obteve-se:

Para o solo P.V.A.:

$$D_o = 8,20 \times 10^{-4} \text{ cm.min}^{-1/2}$$

$$\beta = 8,75$$

e o perfil

$$\omega = 1 + 0,11 \ln(1 - 0,87\phi) \dots \dots \dots (36)$$

Para o solo T.R.E.:

$$D_o = 5,64 \times 10^{-4} \text{ cm.min}^{-1/2}$$

$$\beta = 9,12$$

e o perfil

$$\omega = 1 + 0,14 \ln(1 - 0,89\phi) \dots \dots \dots (37)$$

Para o solo de CERRADO:

$$D_o = 2,5 \times 10^{-2} \text{ cm.min}^{-1/2}$$

$$\beta = 7,55$$

e o perfil



$$\omega = 1 + 0,13 \ln (1 - 0,26\phi) \dots \dots \dots (38)$$

Os valores da umidade  $\omega$  em função de  $\phi = x/\sqrt{t}$  experimental e teórico (calculado pelas diferentes técnicas) bem como o desvio entre eles para os 3 tipos de solos utilizados - encontram-se relacionados nas tabelas 3, 4 e 5 e graficamente representados nas figuras 4, 5 e 6.

TABELA 2 - Valores da difusividade em função da umidade do solo, obtidos pelo método de BRUCE e KLUTE.

SOLO P.V.A.		SOLO T.R.E.		SOLO DE CERRADO	
$\omega$	$D(\text{cm}^2.\text{min}^{-1})$	$\omega$	$D(\text{cm}^3.\text{min}^{-1})$	$\omega$	$D(\text{cm}^2.\text{min}^{-1})$
0,50	0,08	0,50	3,05	0,22	0,10
0,55	0,11	0,55	3,08	0,28	0,21
0,60	0,14	0,60	3,18	0,37	0,59
0,65	0,21	0,65	3,22	0,47	0,95
0,70	0,34	0,70	3,35	0,53	1,50
0,75	0,57	0,75	3,46	0,59	2,17
0,80	0,89	0,80	3,72	0,65	3,38
0,85	1,13	0,85	1,26	0,72	4,64
0,90	2,22	0,90	1,87	0,78	7,12
0,95	4,47	0,95	4,11	0,84	11,40
—	—	—	—	0,90	33,76

TABELA 3 - Valores da umidade  $\omega$  em função de  $\phi = x/\sqrt{t}$  experimental e teórico e desvio entre eles para solo P.V.A.

$\phi$ (cm.min <sup>-1/2</sup> )	$\phi/\alpha$	$\omega_{exp}$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\delta_1\%$	$\delta_2\%$	$\delta_3\%$	$\delta_4\%$
0,20	0,14	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	1,0	1,0	1,0	1,0
0,40	0,28	0,98	0,96	0,95	0,95	0,95	2,0	3,1	3,1	3,1
0,50	0,36	0,97	0,95	0,94	0,94	0,94	2,0	3,1	3,1	3,1
0,60	0,43	0,95	0,93	0,92	0,92	0,92	2,1	3,2	3,2	3,2
0,80	0,57	0,92	0,89	0,88	0,87	0,87	3,2	4,3	5,4	5,4
0,90	0,65	0,90	0,87	0,85	0,84	0,83	3,3	4,3	6,7	7,8
1,00	0,72	0,87	0,83	0,82	0,80	0,78	3,3	5,5	8,0	10,3
1,10	0,79	0,83	0,79	0,79	0,75	0,67	4,6	5,7	9,6	19,3
1,20	0,86	0,76	0,73	0,72	0,61	—	4,8	4,8	19,7	—
1,25	0,90	0,71	0,68	0,68	0,69	—	3,9	5,3	—	—
1,30	0,93	0,62	0,62	0,62	—	—	0,0	0,0	—	—
1,35	0,97	0,46	0,51	0,50	—	—	10,8	8,7	—	—

$$\alpha = 1,39 \text{ cm.min}^{-1/2}$$

$$\delta_1\% = \frac{|\omega_{exp} - \omega|}{\omega} \cdot 100$$

$\omega_{exp}$  =  $\omega_{experimental}$   
 $\omega_1$  (Ritz - Integral)  
 $\omega_2$  (Tobinaga - Freire)

$\omega_3$  (Parlange-Reichardt)  
 $\omega_4$  (Parlange-Bruce e Klute)

TABELA 4 - Valores da umidade  $\omega$  em função de  $\phi = x/\sqrt{t}$  experimental e teórico e desvio entre êles para solo T.R.E.

$\phi$ (cm.min <sup>-1/2</sup> )	$\phi/\alpha$	$\omega_{exp}$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\delta_1\%$	$\delta_2\%$	$\delta_3\%$	$\delta_4\%$
0,20	0,13	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,0	0,0	1,0	1,0
0,40	0,26	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	1,0	2,0	3,0	4,0
0,50	0,33	0,98	0,97	0,96	0,94	0,94	1,0	2,0	4,1	4,1
0,60	0,39	0,98	0,96	0,95	0,93	0,92	2,0	3,1	5,1	6,1
0,70	0,46	0,97	0,95	0,94	0,91	0,89	2,1	3,1	6,2	8,2
0,80	0,53	0,97	0,93	0,93	0,89	0,86	4,1	4,1	8,2	11,3
0,90	0,59	0,95	0,92	0,91	0,87	0,82	3,2	4,2	8,4	13,7
1,00	0,66	0,93	0,90	0,89	0,84	0,76	3,2	4,3	9,7	18,3
1,10	0,72	0,91	0,88	0,87	0,80	0,58	3,3	4,4	12,1	36,3
1,20	0,79	0,87	0,85	0,84	0,74	—	2,1	3,4	14,9	—
1,30	0,85	0,81	0,81	0,81	0,63	—	0,0	0,0	22,2	—
1,35	0,89	0,76	0,78	0,78	0,48	—	2,6	2,6	36,8	—
1,40	0,92	0,70	0,75	0,75	—	—	7,1	7,1	—	—
1,45	0,95	0,59	0,69	0,69	—	—	16,9	16,9	—	—

$$\omega_{exp} = \omega_{experimental} \quad \alpha = 1,52 \text{ cm. min}^{-1/2}$$

$\omega_1$  (Ritz-integral)

$\omega_2$  (Tobinaga-Freire)

$$\delta_1\% = \frac{|\omega_{exp} - \omega_1|}{\omega_{exp}} \cdot 100$$

$\omega_3$  (Parlange-Reichardt)

$\omega_4$  (Parlange-Bruce e Klute)

TABELA 5 - Valores de umidade  $\omega$  em função de  $\phi = x/\sqrt{t}$  experimental e teórico e desvio entre eles para solo de CERRADO.

$\phi$ (cm.min <sup>-1/2</sup> )	$\phi/\alpha$	$\omega_{exp}$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\delta_1\%$	$\delta_2\%$	$\delta_3\%$	$\delta_4\%$
0,5	0,09	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,0	0,0	0,0	1,0
1,0	0,19	0,99	0,98	0,97	0,97	0,96	1,0	2,0	2,0	3,0
1,5	0,29	0,99	0,97	0,96	0,95	0,94	2,0	3,0	4,0	5,1
2,0	0,38	0,98	0,95	0,94	0,93	0,90	3,1	4,1	5,1	8,2
2,5	0,48	0,97	0,93	0,91	0,91	0,86	4,1	6,2	6,2	11,3
3,0	0,58	0,95	0,90	0,89	0,88	0,80	5,3	6,3	6,3	15,8
3,3	0,63	0,93	0,88	0,87	0,86	0,75	5,4	6,5	6,5	29,4
3,5	0,67	0,92	0,86	0,85	0,84	0,69	6,5	7,6	8,7	25,0
3,8	0,73	0,89	0,84	0,83	0,81	0,43	5,6	6,7	9,0	—
4,0	0,77	0,86	0,82	0,81	0,78	—	4,7	5,8	—	—
4,3	0,83	0,81	0,78	0,77	0,72	—	3,7	4,9	—	—
4,5	0,86	0,77	0,74	0,74	0,65	—	3,9	3,9	—	—
4,7	0,90	0,73	0,70	0,70	0,48	—	4,3	4,1	—	—
5,0	0,96	0,53	0,58	0,58	—	—	9,4	9,1	—	—
5,1	0,98	0,45	0,49	0,49	—	—	8,9	8,9	—	—

$\omega_{exp} = \omega_{experimental}$

$\omega_1$  (Ritz-integral)

$\omega_2$  (Tobinaga-Freire)

$\alpha = 5,2 \text{ cm.min}^{-1/2}$

$$\delta_1\% = \frac{|\omega_{exp} - \omega_1|}{\omega_{exp}} \cdot 100$$

$\omega_3$  (Parlange-Reichardt)

$\omega_4$  (Parlange-Bruce e Klute)

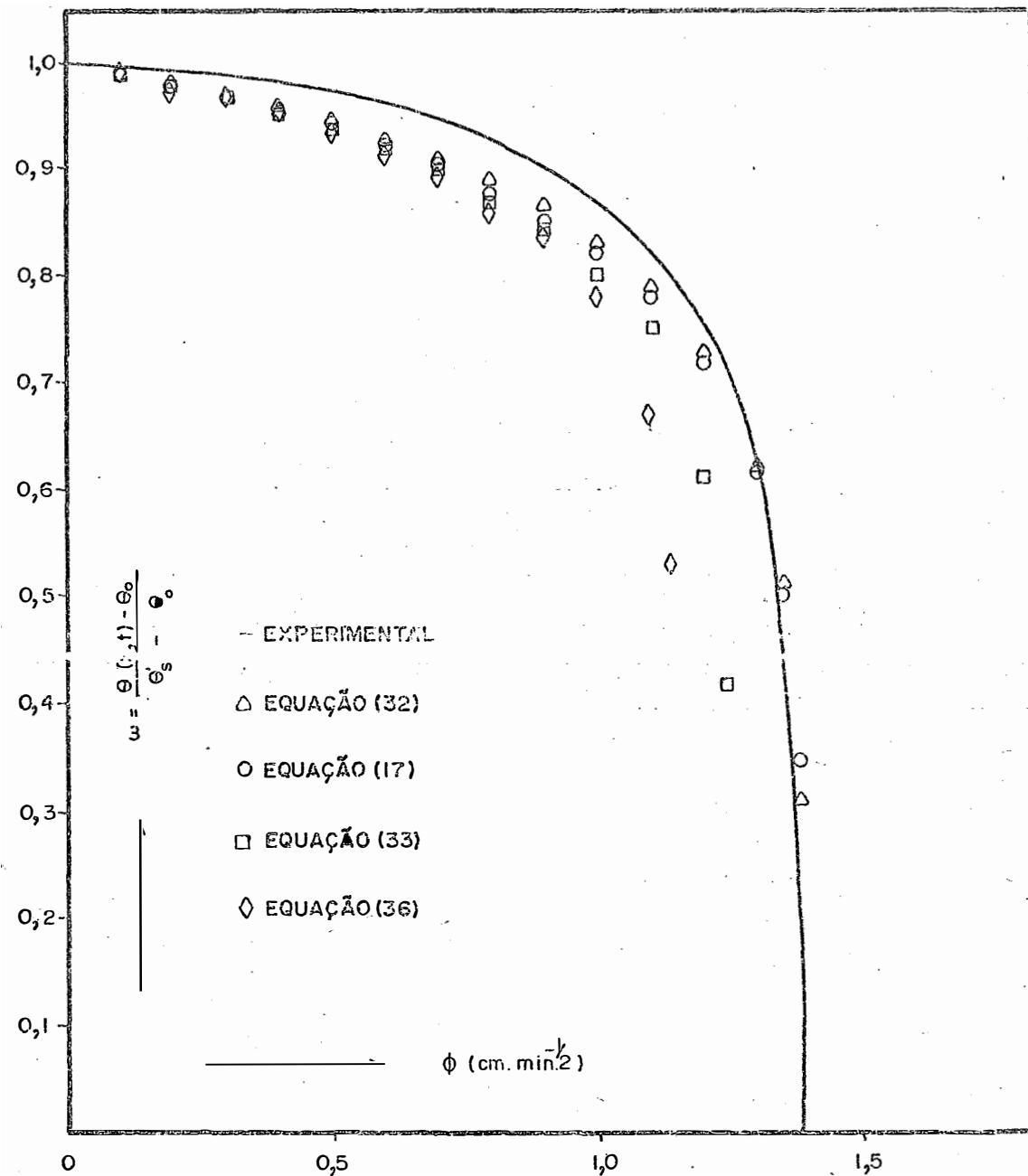


Fig. 4 - Perfil de umidade no escoamento horizontal de água em solo P.V.A.

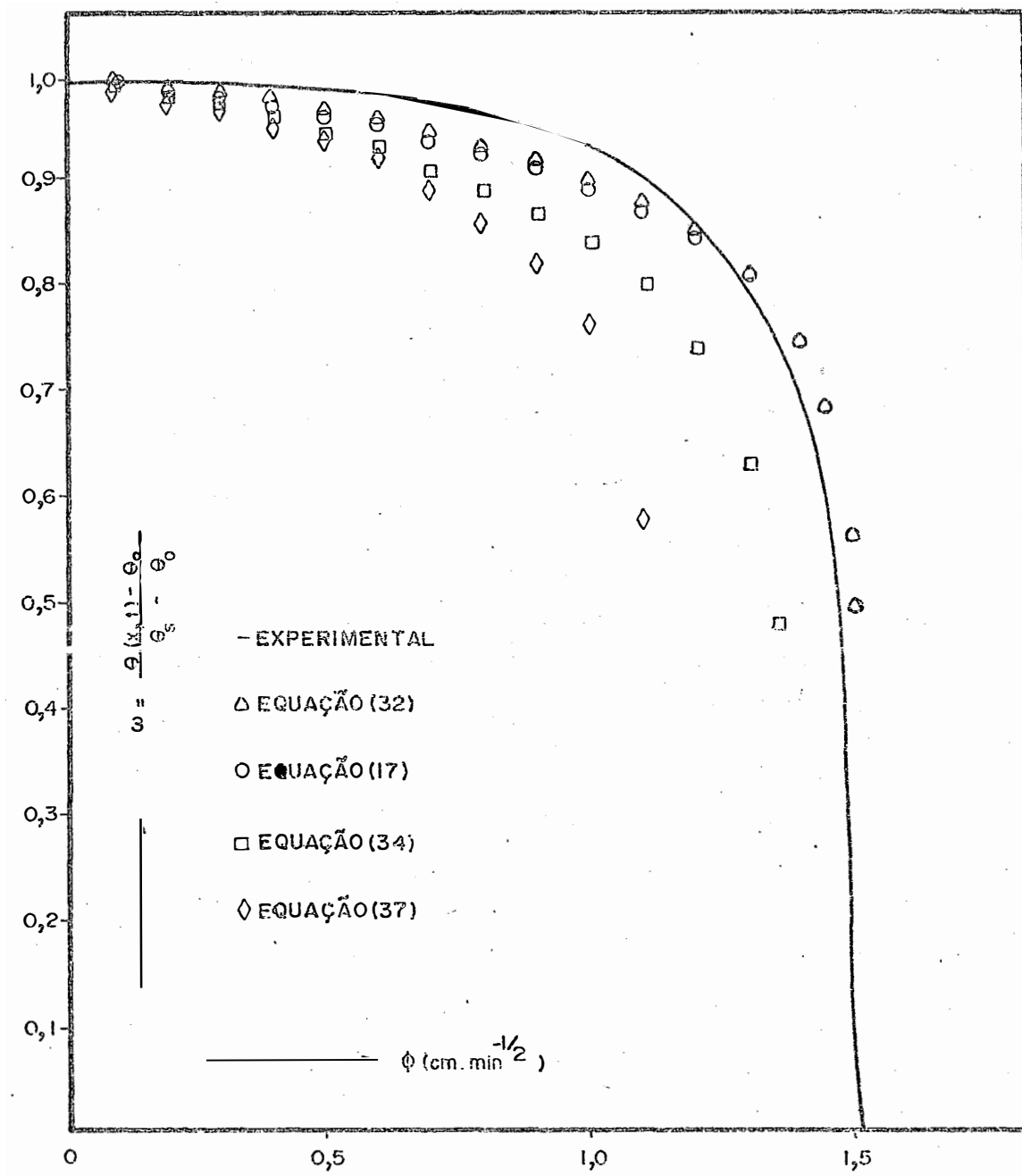


Fig. 5 - Perfil de umidade para escoamento horizontal de água em solo T.R.E.

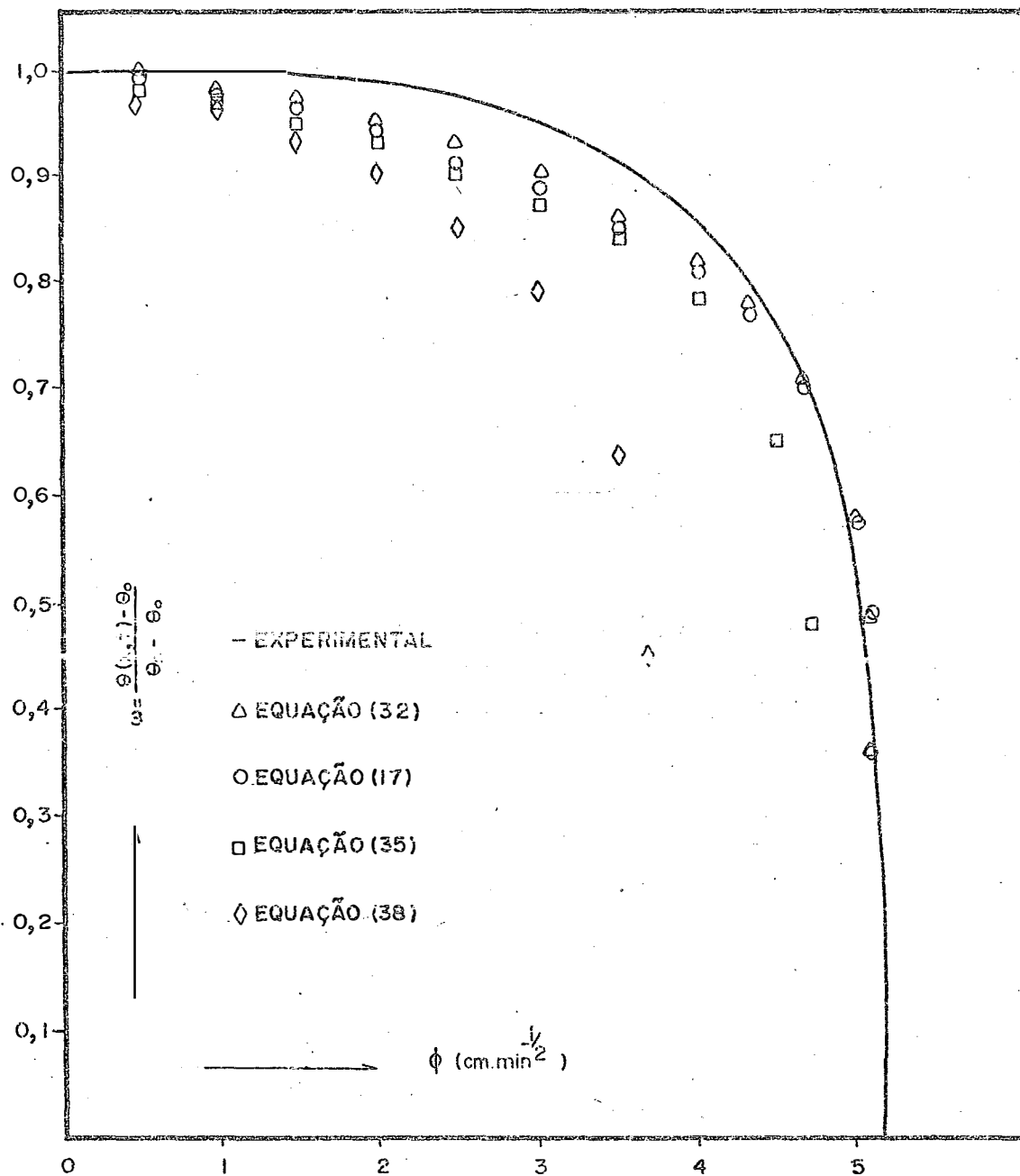


Fig. 6 - Perfil de umidade para escoamento horizontal de água em solo de Cerrado.



---

## 6. DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

---

---

Analisando-se as tabelas 3, 4 e 5, observa-se - que para os três solos estudados os valores obtidos pela técnica aqui proposta (equação 32) concordam plenamente com os valores experimentais, apresentando um erro menor que 10% no intervalo  $0 < \phi/\alpha < 0,95$ , o que compreende a quase totalidade do intervalo de definição.

Convém observar que esta mesma concordância em relação aos valores experimentais e verificada para os perfis teóricos obtidos através da técnica de Tobinaga-Freire (equação 17).

O perfil teórico obtido pela técnica de Parlan

ge-Reichardt apresenta também uma concordância satisfatória - com o experimental, embora em um intervalo ligeiramente menor. Neste caso, o erro inferior a 10% ocorre no intervalo -  $0 < \phi/\alpha < 0,76$ , com pequenas variações entre os três solos es  
tudados.

Já na aplicação da técnica de Parlange-Bruce e Klute, os resultados obtidos foram menos satisfatórios: pode-se observar que o desvio entre os valores teórico e experimenta  
l se acentua, à medida que a penetrabilidade do solo au  
men  
ta.

Tendo em vista estas observações, pode-se con  
cluir:

1. O método de Ritz-integral permite a determinaç  
ão do perfil de umidade na forma analítica  $\phi = \phi(\omega)$  com a mesma precisão da técnica variacional apresentada, por ou  
tro  
lado, grande simplicidade na sua obtenção.

2. A equação de Parlange-Reichardt permite a de  
termina  
ção do perfil com boa precisão, embora num intervalo um pouco menor. Apesar disso, convém salientar a facilidade com que se obtém  $D(\omega)$  pela equação de Reichardt, a qual exige ape  
nas a determinação experimental da penetrabilidade do solo.

3. A literatura mostra que o método de Bruce e Klute para a determinação de  $D(\theta)$ , se apresenta eficiente quanta

do utilizado na procura da solução numérica da equação (6). No presente trabalho, constatou-se que esta mesma eficiência não ocorre quando este método é utilizado na aplicação da equação de Parlange para obtenção da solução analítica aproximada da mesma equação.

---

## 7. SUMMARY

---

---

An approximate analytical solution is proposed in this paper, for the equation that describes the movement of water in non-saturated soils, based upon Ritz's integral method.

Water content profiles for different soils are established by means of this solution and matched with experimental data.

A comparison is also made with theoretical profiles obtained by Tobinaga-Freire's, Parlange-Reichardt's, and Parlange-Bruce and Klute's technics.

---

## 8. BIBLIOGRAFIA

---

---

AHUJA, L.R. and SWARTZENDRUBER, D. (1972) - An improved form of soil water diffusivity function-Soil Sci.Soc.Amer.Proc. 36(9-14).

BRUCE, R.R. and KLUTE, A. (1956) - The measurement of soil water diffusivity-Soil Sci.Soc.Amer. Proc.20(458-462).

COUTINHO, G. Jr.; FREIRE, J.T.; DOMINGOS, R.N. e TOBINAGA, S. (1977) - Infiltração Horizontal de Água em Solos Não Saturados: Peril Aproximado de Ritz - Apresentado no V Encon

tro Sobre Escoamento em Meios Porosos - COPPE/UFRJ.

COVEY, W. (1963) - Mathematical study of the first stage of drying of a moist soil - Soil Sci.Soc.Amer.Proc. 27(130-134).

DAVIDSON, J.M.; BIGGAR, J.W. and NIELSEN, D.R. (1963) - Gamma radiation attenuation for measuring bulk density and transient water flow in porous materials - Journal of Geof. Reser. 68(4777-4783).

DECICO, A. e SANTOS, J.M. (1976) - Método de estimativa da difusividade hidráulica do solo - Cien. e Cult. 29(321-323).

FREIRE, J.T. (1970) - Estudos preliminares do escoamento de água em solos não saturados - Tese de Mestrado - E.E.S. Carlos/USP.

FREIRE, J.T. e TOBINAGA, S. (1974) - Determinação Analítica do Coeficiente de difusão. Anais do II Encontro Sobre escoamento em Meios Porosos - Vol. 1 - Deptº de Física - IGCE/UNESP - Rio Claro.

FREIRE, J.T. e TOBINAGA, S. (1974) - Nota Sobre a Determinação Analítica do coeficiente de Difusão. Anais do II Encontro -

Sobre Escoamento em Meios Porosos - Vol. II - Deptº de Física - IGCE/UNESP - Rio Claro.

FERRAZ, E.S.B. (1974) - Determinação simultânea de densidade e umidade de solos por atenuação de raios gama do  $C_s^{137}$  e  $Am^{241}$ . Piracicaba, ESALQ/USP, 120p. (Tese de Livre-Docência).

GARDNER, W.R. and M.S. MAYHUGH (1958) - Solutions and tests of the diffusion equation for movement of water in soil - Soil Sci.Soc.Amer.Proc. 22(197-201).

JACKSON, R.D. (1963a) - Porosity and soil water diffusivity relations. - Soil Sci.Soc.Amer.Proc. 27(123-126).

JACKSON, R.D. (1963b) - Temperature and soil-water diffusivity relations. - Soil Sci.Soc.Amer.Proc. 27(363-366).

LIBARD, P.L. e K. REICHARDT (1973) - Características hídricas de 5 (cinco) solos do Estado de São Paulo. I - Difusividade da água no solo. O Solo, CALQ. Ano LXV (Nº 1) - (7-13).

PARLANGE, J. Y. (1971) - Theory of water movement in soils: I. One-dimensional absorption - Soil Sci. 111(134-137).

PARLANGE, J. Y. (1972) - Analytical theory of water movement in soils - Proc. 2nd Symp. IAHR-ISSS - 1(222-236)..

PARLANGE, J. Y. (1972) - Horizontal infiltration of water in soils: A theoretical interpretation of recent experiments - Soil. Sci. Soc. Amer. Proc. 37(329-330).

PHILIP, J. R. (1955) - Numerical solutions of equations of the diffusion type with diffusivity concentration - dependent. Trans. Far. Soc. 51(885-892).

PHILIP, J. R. (1969) - Theory of infiltration - Adv. in hydro sci. 5(215-305).

REICHARDT, K.; NIELSEN, D.R. and BIGGAR, J.W. (1972) - Scaling of horizontal infiltration into homogeneous soils - Soil. Sci. Soc. Amer. Proc. 36(241-245).

REICHARDT, K. and LIBARDI, P.L. (1973) - A new equation to estimate soil water diffusivity - Viena, IAEA-SM-176/21.

SCOTT, E.J. and R.J. HANKS. (1962) - Solution of one dimensional diffusion equation for exponential and linear diffusivity functions by power series applied to moisture flow in -



soils - Soil Sci. 94(314-322)

TOBINAGA, S. (1972) - Formulação Variacional do Escoamento de Água em Meios Porosos não Saturados - Tese de Mestrado - E.E. São Carlos/USP.

WEEKS, L.V. and S.J. RICHARDS (1967) - Soil water properties computed from transient flow data - Soil Sci.Soc.Amer.Proc. 31(721-725).