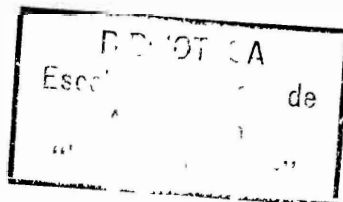


JOSÉ ANTONIO BONILLA CASTILLO
Engenheiro - Agrônomo

FACULDADE DE AGRONOMIA
MONTEVIDÉU - URUGUAI

COMPARAÇÃO DE EQUAÇÕES PARA A CONSTRUÇÃO DE
TABELAS DE VOLUMES "STANDARD" DO "PINUS MARÍTIMO"
(*Pinus pinaster* Ait)

Tese apresentada à Escola Superior de
Agricultura "Luiz de Queiroz", da
Universidade de São Paulo, para ob-
tenção do título de
"Magister Scientiae".



PIRACICABA
- 1967 -

REFERÊNCIA

JOSÉ ANTONIO BONILLA CASTILLO

Engenheiro - Agrônomo

FACULDADE DE AGRONOMIA

MONTEVIDÉU - URUGUAI

COMPARAÇÃO DE EQUAÇÕES PARA A CONSTRUÇÃO DE
TABELAS DE VOLUMES "STANDARD" DO "PINUS MARITIMO"

(*Pinus pinaster* Ait)

Tese apresentada à Escola Superior de
Agricultura "Luiz de Queiroz", da
Universidade de São Paulo, para ob-
tenção do título de
"Magister Scientiae".

PIRACICABA

- 1967 -

AGRADECIMENTOS

O autor deseja agradecer especialmente ao Dr. Frederico Pimentel Gomes, conselheiro da tese, pela supervisão do presente trabalho, aos Eng.^{DS}-Agr.^{DS} Roberto Simionato Moraes e Nivaldo Francisco da Cruz pela estruturação do programa Fortran, e a computação eletrônica dos dados analisados, e ao Dr. Humberto de Campos e ao Eng.^D-Agr.^D Décio Barbin pela tradução do texto original em castelhano.

Í N D Í C E

	Página
1 - INTRODUÇÃO	1
2 - REVISÃO DA LITERATURA	2
2.1 - Antecedentes Históricos das Tabelas de Volumes	2
2.2 - As Fórmulas Propostas	3
2.2.1 - Fórmulas aritméticas	3
2.2.2 - Fórmulas logarítmicas	4
2.3 - As Tabelas de Volumes das Coníferas na América Latina	9
3 - MATERIAIS E MÉTODOS	12
3.1 - Materiais	12
3.1.1 - Descrição do local	12
3.1.1.1 - Solo	12
3.1.1.2 - Clima	13
3.1.1.3 - Vegetação	13
3.1.2 - Características do povoamento florestal	14
3.1.3 - As árvores em estudo	14
3.1.4 - As tabelas de volumes "Standard"	16
3.1.4.1 - Características	16
3.1.4.2 - Requisitos	16
3.2 - Métodos	18
3.2.1 - Método de cubagem das árvores	18
3.2.2 - Métodos de construção das tabelas de volumes "Standard"	18
3.2.3 - As equações a comparar	20
3.2.4 - Análise estatística	21
3.2.4.1 - Determinação dos parâmetros e suas va- riâncias e covariâncias, significância e intervalos de confiança	22
3.2.4.1.1 - Equação da Variável Combinada	22
3.2.4.1.2 - Equação de Schumacher	28
3.2.4.2 - Análise de variância da regressão	32

3.2.4.2.1	=	Equação da Variável Combinada	33
3.2.4.2.2	=	Equação de Schumacher	36
3.2.4.3	=	Precisão das tabelas de volumes	38
3.2.4.4	=	Coefficientes de correlação	40
3.2.4.4.1	=	Equação da Variável Combinada	40
3.2.4.4.2	=	Equação de Schumacher	42
3.2.4.5	=	Ponderação do desvio padrão da fórmula logarítmica	45
4	=	RESULTADOS	50
4.1	=	Resultados da Análise Estatística	50
4.1.1	=	Equação da Variável Combinada	50
4.1.2	=	Equação de Schumacher	51
4.2	=	Construção das Tabelas de Volumes	52
4.2.1	=	Equação da Variável Combinada	52
4.2.2	=	Equação de Schumacher	53
5	=	DISCUSSÃO	54
6	=	CONCLUSÕES	57
7	=	RESUMO	59
8	=	SUMMARY	61
9	=	BIBLIOGRAFIA	63
		APÊNDICE I	66
		APÊNDICE II	80

1 - INTRODUÇÃO

A utilização de tabelas para estimar volumes de madeira para árvores de dimensões especificadas, é uma técnica universalmente difundida (tabelas de volumes). O conceito básico no qual se apoia sua construção é a relação, gráfica ou matemática, entre o volume e alguma ou algumas medidas que caracterizam as dimensões de uma árvore. Assim, existem tabelas de entrada simples (locais), nas quais o volume se relaciona somente com o diâmetro; as de dupla entrada ("standard") nas quais, além do diâmetro intervem a altura e finalmente, as de entrada múltipla, onde se consideram ainda, a forma e às vezes outros elementos, como porcentagem de casca, etc. Em todas estas relações o volume sempre ocupa a posição de variável dependente, enquanto que diâmetro, altura, forma, etc., constituem as variáveis independentes.

O método de construção das tabelas, como já se falou, pode ser gráfico ou matemático. Ambos apresentam certa subjetividade, o gráfico devido a que a relação volume - variável (variáveis) independente (independentes) gera somente pontos, sendo o ajuste da curva, manual, variando portanto, com cada operador. No método matemático, a subjetividade depende da fórmula escolhida, sendo necessário efetuar comparações entre as diversas equações propostas, com o fim de determinar suas precisões relativas.

O presente trabalho, traça, precisamente, como objetivos básicos, a construção de uma tabela de volumes "standard" para "Pinus marítimo" (Pinus pinaster Ait.) por métodos matemáticos e a comparação posterior, das equações utilizadas (uma aritmética e outra logarítmica).

2 - REVISÃO DA LITERATURA

2.1 - Antecedentes Históricos das Tabelas de Volumes

A primeira tabela de volume "moderna" é atribuída a Heinrich Cotta o qual publicou uma para Fagus ("beech") em 1804, desenvolvendo posteriormente (1817) uma série de tabelas de volumes "standard". Presume-se, porém, que a primeira tabela de volumes deve ter sido construída durante a segunda metade do Século XVIII.

O conceito das variações da forma foi apresentada pela primeira vez em 1800 por Paulsen em um manuscrito. Gottlob König em sua "Forest Mathematik", publicado em 1846, deu a primeira idéia clara a cerca do estado de conhecimento das tabelas de volumes, na Alemanha. Um maior desenvolvimento da construção destas tabelas ocorreu no mesmo ano, com a publicação das famosas Tabelas Bavarianas, construídas a partir de 40.000 árvores. Foram transformadas para o sistema métrico em 1872 por Behn. Tabelas dessa importância têm sido seguidamente publicadas, como as de Grudner e Schwappach (1928), baseadas em mais de 70.000 árvores de 9 espécies. É interessante mencionar que com número tão elevado de árvores não é prático o uso de métodos matemáticos, já que o traçado das curvas pelo método gráfico não apresenta nenhuma dificuldade, tendo como resultado a subjetividade praticamente inexistente. Por outro lado, todas as tabelas enumeradas foram construídas a partir de métodos gráficos. Recentemente, já em pleno século XX, começaram a desenvolver equações que estudavam a relação entre o volume de um lado e diâmetro e altura de outro, podendo-se citar rapidamente as seguintes fórmulas: Schumacher (1933), Hasslund (1941), Steate (1945), Dwight (1948), Korsun (1955), etc. Imediatamente nos referimos a elas.

2.2 - As Fórmulas Propostas

Para a construção de tabelas de volumes "standard" têm sido propostas muitas equações, e dentre estas serão apresentadas neste trabalho, a proximadamente 20 (vinte), classificando-as em duas categorias: aritméticas e logarítmicas. V significa volume ; D , diâmetro à altura do peito ; H , altura ; a , b , c , d , e , f , são coeficientes.

2.2.1 - Fórmulas aritméticas

2.2.1.1 - Nasslund: $V = a + b D^2 + c D^2 H + d H^2 + e D H^2$.

2.2.1.2 - Meyer: $V = a + b D + c D H + d D^2 + e D^2 H$.

2.2.1.3 - Stoate ou Australiana: $V = a + b D^2 + c H + d D^2 H$.

2.2.1.4 Variável Combinação: $V = a + b D^2 H$

2.2.1.5 - Fator de Forma Constante: $V = a D^2 H$.

2.2.1.6 - Compreensiva: $V = a + bD + cDH + dD^2 + eH + fD^2H$.

2.2.1.7 - Schumacher: $V = a + D^b + H^c$.

2.2.1.8 - Korsun: $V = a + (D + 1)^b + H^c$.

Nos últimos anos tem sido desenvolvidas novas fórmulas, que tem variado sua estrutura tradicional, apresentando algum ou alguns de seus termos em forma fracionária.

Outra inovação é a inclusão de potências maiores que dois no diâmetro. Entre tais equações podemos citar as seguintes:

2.2.1.9 - $V = a + b D^2 H + c D^3$.

2.2.1.10 - $V = \frac{D^2}{a} + \frac{b}{H}$.

Ambas citadas por HOMER (1965) .

2.2.1.11 - Taketa: $V = \frac{(D^2 H)}{(a + b D)}$.

Ao lado destas cabe mencionar algumas fórmulas especiais que não se enquadram entre as anteriores, tais como:

2.2.1.12 - WAUSTHOZ (1964) propõe uma fórmula realmente complicada:

$$V = \left[\frac{S}{(n+1)} \right] \cdot \left[\frac{(H^{n+1})}{(H-a)} \right]^n$$

onde: S é a área basal à altura do peito,

A é a relação entre duas circunferências tomadas em determinados lugares do tronco,

n é o expoente da equação geral da conica $y^2 = p x^m$, o qual varia, nas árvores reais, entre 0 e 3.

2.2.1.13 - VERUETTE FUENTES (1963), trabalhando numa tabela fotogramétrica de dupla entrada, para volume de coníferas, menciona a seguinte fórmula: $V = a + b H + c E$, onde E representa porcentagem de espessura.

2.2.2 - Fórmulas logarítmicas

2.2.2.1 - Schumacher: $\log V = a + b \log D + c \log H$

2.2.2.2 - Dwight: $\log V = a + b \log D + (3 - b) \log H$

Esta fórmula, na realidade, é uma modificação da anterior, baseada na premissa de que sendo o volume uma relação cúbica, a soma dos expoentes de H e D deve ser igual a 3. Ademais, tem o mérito de reduzir a dois, o número de coeficientes desconhecidos.

2.2.2.3 - Variável Combinada Logarítmica: $\log V = a + b \log D^2 H$.

2.2.2.4 - Thornber: $\log V = a + b \log (H/D) + \log D^2 H$.

2.2.2.5 - LOJÁN (1966) propõe a fórmula seguinte:

$$\log V = a + b \log D + c \log H.$$

Na realidade trata-se da fórmula de Schumacher, na qual o agrupamento das árvores para relacioná-las com o volume, se efetua a partir de classes altimétricas e não de classes diamétricas, como ocorre em todos os outros casos.

Estudos realizados sobre diversas fórmulas têm sido efetuados podendo-se resumir as conclusões obtidas, da seguinte maneira:

KORSUN (1955) de um ponto de vista teórico, modificou a fórmula de Schumacher: $V = a \cdot D^b \cdot H^c$, transformando-a em $V = a \cdot (D + 1)^b H^c$, baseando-se em que, ao referir-se a D como sendo diâmetro à altura do peito, as árvores com uma altura inferior a 1,30 m., teriam volume igual a zero. Porém, experimentalmente, a maior precisão obtida com esta fórmula não compensa o considerável aumento de tempo que demandam os cálculos (mais do dobro), pelo que a fórmula original é tida como plenamente justificada.

VAN SOEST (1959) examinou 15 métodos de construção de tabelas de volumes, aplicadas a 518 árvores, obtendo os resultados seguintes:

- a - Os melhores resultados obtêm-se usando o fator forma ao invés de volume como variável dependente.
- b - Os métodos gráficos e matemáticos têm segurança similar.
- c - Na prática, a forma, para a maioria das árvores em pé, pode ser derivada com suficiente segurança à partir de $F = a + b \log D$, ainda que desvios acima de 10% da linha de regressão são esperados.
- d - Uma estimativa consideravelmente melhor, pode ser obtida à partir da equação: $F = a + b \log D + c \log D_1 + d \log H$, com um erro de 3%.

SIMPENDORFER (1959) trabalhou com uma amostra de 107 árvores de Pinus radiata D. Don, procedentes de várias culturas, comparando 12 equações, a maioria delas, incluindo medida da forma. Dentro das fórmulas com duas variáveis independentes, menciona-se unicamente a do Stoat (Australiana), a qual conduz a resultados piores, determinando-se a equação seguinte:

$$V = - 1,285 - 0,0140 D^2 + 0,0284 H + 0,0023 D^2 H .$$

LOJÁN (1966) ; trabalhou em bosque tropical úmido, com espécies tais como: Cordia alliodora , Cedrela mexicana , Lonchocarpus sp. , Sapium sp. , Jacaranda copaia , etc.

Estudou quatro fórmulas:

- a - Variável Combinada (já citada, fórmula 2.2.1.4),
- b - Similar à Australiana e a de Naslund,
- c - Schumacher (já citada, fórmula 2.2.2.1),
- d - Loján (já citada, fórmula 2.2.2.5) .

Determinaram-se os seguintes erros de estimativa em média (aproximadamente): (a) 12,5% ; (b) 20,0% ; (c) 8,0% ; (d) 3,7% .

O autor enumera as seguintes vantagens do método proposto:

- a - A tendência perfeitamente clara da relação entre H e V .
- b - O marcado paralelismo das linhas de regressão para cada classe diamétrica, o que permite manter um coeficiente da regressão comum para todas elas.
- c - As tendências obtidas se prestam ao cálculo com quadrados mínimos.

Construiu-se uma tabela de volume "standard" utilizando-se a equação seguinte:

$$\log V = - 4,07682 + 2,03986 \log D + 0,779 \log H .$$

HONER (1965) estudou a aplicação de nove equações de regressão do volume referente a diâmetro e altura, em 8 espécies de coníferas e 3 de folhosas, sobressaindo a fórmula já citada:

$$V = \frac{D^2}{a} + \frac{b}{H} ,$$

por sua segurança e facilidade de aplicação.

SPURR (1951) realizou um estudo muito interessante de comparação de fórmulas para a construção de tabelas de volumes. Devemos mencionar, porém, que tal estudo foi efetuado há mais de 15 anos e equações mais modernas não

foram comparadas no trabalho mencionado. Segundo êsse autor, em estudos realizados sôbre diversas espécies de Ficea, a escolha da equação de regressão pode introduzir um erro de até 25% na estimação do volume total, sendo comuns variações de 5 a 10%. O citado pesquisador provou numerosas fórmulas, com e sem intervenção do fator forma. Dentre as enumeradas neste trabalho, as estudadas foram as seguintes:

- a - Australiana ou de Stoate (2.2.1.3) ;
- b - Variável Combinada (2.2.1.4) ;
- c - Fator de Forma Constante (2.2.1.5) ;
- d - Schumacher (2.2.2.1) ;
- e - Dwight (2.2.2.2) ;
- f - Variável Combinada Logarítmica (2.2.2.3) .

O autor chega às seguintes conclusões:

- a - Dentre as fórmulas aritméticas, a Australiana (2.2.1.3) e a Variável Combinada (2.2.1.4) são evidentemente superiores à do Fator de forma constante (2.2.1.5) .
- b - Dentre as fórmulas logarítmicas, a de Schumacher (2.2.2.1) demonstrou ser a melhor, enquanto que a Variável Combinada Logarítmica (2.2.2.3) apresenta altos e baixos, segundo a série estudada. A fórmula de Dwight (2.2.2.2) mostrou-se inferior a ambas.
- c - Entre a de Schumacher e as duas melhores aritméticas (Australiana e Variável Combinada) existem diferenças variáveis segundo a série estudada, mas em conjunto não se puderam apreciar diferenças significativas. O autor sugere o uso das fórmulas aritméticas, especialmente a Australiana, já que os benefícios teóricos da solução logarítmica estão sôbre-balanceados pelos problemas resultantes do manêjo dos logarítmos, e além disso, por envolver um maior trabalho.

d - A escolha das equações para tabelas "standard" depende fundamentalmente do tamanho da amostra podendo apresentar os seguintes casos:

- Quando se medem muitas árvores (500 ou mais) os dados devem ser agrupados em classes altimétricas, em cada uma das quais se determina a regressão do volume sobre o quadrado do diâmetro. Calculam-se os coeficientes de regressão, os quais são computados tendo por base a altura. Se são obtidas linhas retas, a fórmula Australiana é recomendável.
- Para poucos dados (100 a 500 árvores) não há pontos suficientes para se calcular em coeficiente de regressão para cada classe de altura. As relações podem ser supostas lineares e então é utilizável a fórmula Australiana.
- Para muito poucos dados (50 a 100) o método da Variável Combinada é suficientemente segura.

Por outro lado, refere SPURR (1951), que Stoate, trabalhando na Austrália com "Pinus insigne" (Pinus radiata D. Don) obteve resultados similares aos seus, no sentido de que a fórmula da Variável Combinada apresenta resultados quase que tão satisfatórios como a Australiana.

SCHUMACHER e DOS SANTOS HALL (1933), aplicaram inicialmente a chamada fórmula de Schumacher (2.2.2.1) a 264 árvores de Liriodendron tulipifera, obtendo-se a expressão seguinte:

$$V = - 2,5220 + 1,7924 \log D + 1,0565 \log H .$$

Calculou-se ainda, um coeficiente de correlação múltipla, $R = 0,9981$. Logo, utilizou-se a mesma equação em quatro folhosas e quatro coníferas, obtendo-se os resultados seguintes:

Especies	N.º de Árvores	Equação
<u>Pinus virginiana</u>	846	- 2,6030 + 1,7023 log D + 1,2039 log H
<u>Pinus echinata</u>	285	- 2,7582 + 1,8081 log D + 1,2345 log H
<u>Pinus taeda</u>	370	- 2,3723 + 1,9136 log D + 0,9532 log H
<u>Pseudotsuga taxifolia</u>	217	- 2,6681 + 1,6653 log D + 1,1800 log H
<u>Acer rubrum</u>	537	- 2,4821 + 1,8361 log D + 1,0191 log H
<u>Castanea dentata</u>	704	- 2,6260 + 1,7779 log D + 1,1302 log H
<u>Juglans nigra</u>	400	- 2,6842 + 1,7173 log D + 1,1974 log H
<u>Liquidambar styraciflua</u>	388	- 2,6849 + 1,7470 log D + 1,1644 log H

GOLDING e HALL (1961) realizaram comparações de 25 equações em Pinus banksiana, Picea glauca e Populus tremuloides, considerando o diâmetro e a altura como variáveis independentes. De todas elas, destacaram a fórmula da Variável Combinada, atendendo simultaneamente à precisão e à facilidade de uso.

2.3 - As Tabelas de Volumes das Coníferas na América Latina

Da revisão do material bibliográfico consultado e em especial de "FORESTRY ABSTRACTS", depreende-se a inexistência de trabalhos sobre comparação de equações para tabelas de volume das coníferas na América Latina. A esse respeito cabe assinalar o trabalho de LOJAN (1966) já citado, porém referido a folhosas em bosque tropical úmido.

Com respeito a tabelas de volumes de coníferas, latinoamericanas, encontram-se poucas mas interessantes contribuições, entre as quais citaremos a de LEIGHTON (1957), no Chile, sobre "Pinus insignis" (Pinus radiata D. Don). Também a de HEINSDIJK (1959) em "Pinheiro Brasil" (Araucaria angustifolia (Bert.) C. Ktze), sobre 207 árvores (sem casca) calculando uma tabela de entrada tripla,

a partir da fórmula: $V = F \cdot A B \cdot H$, onde $A B =$ área basal. A forma F é calculada à partir da relação seguinte: $F = a + b D + c H$.

Outra contribuição importante é a tabela de entrada tripla do INSTITUTO FLORESTAL (1962) do Chile, também sobre "Pinus insigne", baseada nos coeficientes de forma de Girard, a partir de 616 árvores (sem casca). A fórmula utilizada foi: $V = a + b D^2 \cdot H \cdot F$, onde os coeficientes a e b assumiram os valores 1,223 e 0,00002309, respectivamente.

Também cabe citar a tabela fotogramétrica de VERJETTE FUENTES (1963) do México, na qual utilizou a equação já citada: $V = a + b H + c \cdot E$, onde E é a porcentagem de espessura. Neste estudo obtiveram-se os seguintes coeficientes de correlação:

- a - Entre volume e altura: 0,42 (significativo)
- b - Entre volume e espessura: 0,49 (significativo)
- c - Entre altura e espessura: 0,06 (não significativo).

O coeficiente de correlação total foi de 0,69 (significativo). Com relação à espécie estudada neste trabalho, "Pinus marítimo" além dos trabalhos realizados no Uruguai que são descritos mais adiante, não se tem notícia de nenhum trabalho realizado na América Latina. Na Europa existem várias tabelas, podendo-se citar as de SOULOU IAC (1947) na França; LONGHI (1952) na Itália; e a de RUIZ-DANA LARRARTE (1963), na Espanha.

Muito recentemente, de 1964 para cá, começou-se a trabalhar no Uruguai, sobre tabelas de volume de "Pinus marítimo". A primeira contribuição, BONILLA e BOTTAZZI (1964) é um trabalho provisório onde se calcula uma tabela local de volumes, por meio do método das curvas harmonizadas, a partir de 839 árvores (em pé). O desvio agregado registrado é de 1,12% e o desvio médio de 3,3%.

Posteriormente, LAFFITTE , MEZZOTTONI e BONILLA (1964) construíram a primeira tabela de volumes "standard" de "Pinus marítimo" na América Latina, à partir de 849 árvores, computando a altura até um diâmetro máximo de 8 cm. Utilizou-se a fórmula logarítmica de Schumacher, a qual deu origem a equação seguinte, deduzida pelo método dos quadrados mínimos:

$$\text{Log V} = \text{log } 0,00012568 + 2,2944 \text{ log D} + 0,2490 \text{ log H} .$$

Finalmente, BONILLA , ROSS e BUXEDAS , construíram duas tabelas locais de volumes comerciais para "Pinus marítimo", uma para madeira de serraria (diâmetro do tópo = 20 cm.) e outra para polpa (entre 10 e 20 cm.) à partir de 615 e 816 árvores respectivamente. Utilizou-se o método das curvas harmonizadas, apresentando os seguintes testes de precisão:

	Desvio agregado	Desvio médio
Madeira de serraria	0,45%	1,30%
Madeira para polpa	0,58%	2,06%

3 - MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 - Materiais

3.1.1 - Descrição do local

A totalidade das árvores - 816 - foram cortadas no Parque Nacional "Franklin D. Roosevelt", Carrasco, (Departamento de Canelones), situado no Km 17 da estrada que une Montevideo a Punta del Este.

3.1.1.1 - Solo

O solo é arenoso com ondulações leves, porém, podem se encontrar dunas de até 10 m. de altura, principalmente na costa marítima. As plantações tiveram início no ano de 1916, delineando-se amplas avenidas e caminhos laterais e de circunvalação, os quais limitam talhões nunca maiores de 10 ha. Os talhões são geralmente puros, predominando aqueles onde se plantou "Pinus marítimo" e em segundo lugar, Eucalyptus sp. e Acacia longifolia. De acordo com BONILLA e BOTTAZZI (1964), há uma regeneração natural importante do "Pinus marítimo", a qual em média, alcança a quantidade de 12 plantinhas por metro quadrado, ainda quando de tamanho geralmente reduzido: 6 a 7 cm de altura e em alguns lugares isolados, até 15 cm.

O perfil de solo médio para esse mesmo bosque foi descrito por BONILLA, RAVA e ROLFO (1964) da seguinte maneira:

Solo de textura arenosa, com uma estrutura granular fina, encontrando-se raízes geralmente numa profundidade de 80 cm, e mais abaixo, somente pequenas raízinhas.

Horizonte A_{00} : Está formado por acículas e frutificações de "Pinus marítimo", como também por ramos finos. Sua espessura é comumente de 2 a 3 cm. Também se encontram micélios micorrízicos.

Horizonte A_{11} : É um horizonte mineral, mostrando inclusão de matéria orgânica. Espessura de 2 a 4 cm. Côr: 10 YR 5/1. (Segundo tabela

de Munsell).

Horizonte A_{12} : É o horizonte mineral por excelência, composto de areia quase pura. Carece de horizonte de carbonatos e apresenta manchas avermelhadas desde os 35 aos 70 cm de profundidade. Este horizonte se estende pelo menos até 1,50 m de profundidade. Côr: YR 6/3 . (Segundo tabela de Munsell).

O horizonte A_{12} está caracterizado pelas seguintes determinações: areia: 97,7% ; argila: 1,2% ; limo: 1,1% ; humus: 0,54% ; pH em água: 5,3 ; pH em ClK : 4,2 ; areia grossa (maior de 0,5 mm): 29,0% Os valores enumerados representam a média de 10 amostras.

3.1.1.2 - Clima

A zona pode ser definida climatologicamente pelos seguintes valores:

Precipitação	1000 mm anuais
Temperatura média anual:	16°8 C
Temperatura máxima absoluta:	43°2 C
Temperatura mínima absoluta:	- 4°0 C
Temperatura máxima média:	24°2 C
Temperatura mínima média:	10°5 C
Umidade relativa média:	74 %

3.1.1.3 - Vegetação

Segundo BONILLA e BOTTALZI (1964) , a composição e frequência da vegetação é variável de talhão em talhão, mas se nota uma clara predominância de Taraxacum officinale ("dente de leão") , seguindo em ordem de importância: Baccharis trimera ("carqueja") ; Triglochin bonariensis ("erva carniceira") ; Eryngium paniculatum ("caraguatá") ; Hydrocotyle bonariensis ("redondito de água") ; Cyperus rotundus ("pasto bolita") ; Plantago officinalis ; Andropogon condensatum

("pasto colorado") ; Senecio sellowii ; Achyrocline satureoides ("marcela fêmea") ; Panicum hians , etc.

3.1.2 - Características do povoamento florestal

De acordo com um inventário realizado por Beckmann , segundo BONILLA e BLOMANN (1964) , as características dasométricas médias do bosque, na época do corte das árvores que servem de base a este estudo eram as seguintes, aproximadamente.

Diâmetro (à altura do peito)	29,1 cm
Altura total	21,5 m
Número de árvores por hectare	708
Área basal	48,0 m ² /ha
Volume	467,0 m ³ /ha
Idade	34 anos
Incremento anual médio	14,0 m ³ /ha/ano .

Tomando-se em consideração estudos posteriores, BONILLA e BOTTAZZI (1964), pode-se estimar a seguinte estrutura do docel: árvores dominantes e codominantes: 75% ; intermediárias: 20% ; dominadas: 5% ; enquanto que a espessura das copas se pode estimar ao redor de 45% .

3.1.3 - As árvores em estudo

São estudadas 816 árvores, apresentadas no quadro n.º 1 , classificadas por classe diamétrica, oferecendo-se em cada uma destas, os dados seguintes: número de árvores , DAP médio , altura comercial média e volume médio:

QUADRO Nº 1

Classificação das Árvores por Classe Diamétrica

Classe Diamétrica (cm)	Número de Árvores	DAP médio (cm)	Altura Comercial média (m)	Volume médio (m ³)
14 (13 - 14,9)	3	13,7	4,0	0,046
16 (15 - 16,9)	18	15,8	6,3	0,083
18 (17 - 18,9)	26	17,8	8,5	0,131
20 (19 - 20,9)	43	19,7	11,4	0,203
22 (21 - 22,9)	64	21,8	13,7	0,280
24 (23 - 24,9)	108	23,7	15,4	0,358
26 (25 - 26,9)	92	25,7	16,8	0,427
28 (27 - 28,9)	118	27,5	17,5	0,518
30 (29 - 30,9)	95	29,7	18,5	0,610
32 (31 - 32,9)	80	31,6	18,9	0,695
34 (33 - 34,9)	47	33,6	19,9	0,830
36 (35 - 36,9)	41	35,7	20,1	0,955
38 (37 - 38,9)	31	37,5	19,5	1,015
40 (39 - 40,9)	11	39,8	21,6	1,226
42 (41 - 42,9)	11	41,8	20,4	1,362
44 (43 - 44,9)	8	43,9	23,0	1,657
46 (45 - 46,9)	9	45,5	23,1	1,325
48 (47 - 48,9)	4	47,9	23,0	1,928
50 (49 - 50,9)	7	50,0	24,3	2,290
Total	816			
média ponderada		28,1	16,8	0,582

Os dados individuais de diâmetro , altura e volume para cada árvore são apresentados no apêndice I .

3.1.4 - As tabelas de volumes "Standard"

3.1.4.1 - Características

Uma tabela de volumes "standard" pode ser definida como sendo uma tabela de dupla entrada na qual os volumes são classificados à partir do diâmetro e da altura, em contraposição com as tabelas locais, onde o volume se classifica com base somente nos diâmetros. Segundo BRUCE e SCHUMACHER (1950) as tabelas "standard" são preferidas sobre as locais, devido à que a estimação de volume das árvores por meio de uma curva sobre diâmetros, aplicadas a árvores individuais, é geralmente errônea, pois o volume de uma árvore está relacionado com outros fatores além do diâmetro, principalmente com a altura, o que é precisamente levado em conta, nas tabelas "standard". Claro que além do diâmetro e da altura há outros fatores que influem sobre o volume, tais como a forma, porcentagem de casca, etc., mas sua inclusão numa análise de regressão complica grandemente os cálculos, sem trazer, paralelamente, uma precisão substancialmente maior.

Segundo CHAPMAN e MEYER (1949) é necessário tomar-se de 300 a 2.000 árvores para se construir uma tabela "standard", com o objetivo de controlar o erro de amostragem, dependendo do tamanho da região para a qual a tabela é construída. Devido à tabela contida neste trabalho ser construída à partir de 816 árvores e sua zona de aplicação ser relativamente reduzida (costa marítima do Uruguai, com uma extensão menor de 10.000 km²) pode-se esperar um erro de amostragem realmente reduzido.

3.1.4.2 - Requisitos

De acordo com CHAPMAN e MEYER (1949), reconhece-se que o grau de erro de uma tabela de volume "standard" é incrementado nos seguintes casos:
a - Quando o volume das espécies individuais é tomado de uma tabela para grupos de espécies, tais como folhosas ou coníferas em geral, ou de uma tabela uni

versal, para todas as espécies.

- b - Quando diminui o tamanho da área a ser levantada a menos que as classes de sitio sejam determinadas e tabelas locais de volumes separadas, sejam aplicadas a cada caso.
- c - Quando diminui o número de árvores, a menos que o mesmo "standard" de segurança estatística seja aplicada para controlar o erro padrão da média, por aumento do número de árvores medidas.
- d - Quando o volume é estimado em pés madeiros, dado que o desvio padrão do volume em pés madeiros numa tabela de volume, é sempre maior que numa tabela expressa em pés ou metros cúbicos.

No presente trabalho diminuiu-se altamente o erro nos itens:

a , c e d , já que:

No item a - A tabela é para uma só espécie: "Pinus marítimo".

No item c - O número de árvores: 816 , é realmente elevado.

No item d . Estima-se o volume em metros cúbicos e não em pés madeiros.

Com respeito ao item b , cabe assinalar que o total de árvores foi cortada numa só localidade (Parque Nacional de Carrasco) devido à impossibilidade de se conseguir um número satisfatório de árvores para se cortar em outras localidades do país. De qualquer maneira, a zona citada é suficientemente representativa dos bosques de "Pinus marítimo" de nossas dunas costeiras, que é precisamente onde se planta mais intensamente esta espécie. Pelo que entendemos com os dados apresentados pode-se construir uma tabela de volume que proporcione uma idéia suficientemente aproximada da realidade volumétrica da citada conífera.

3.2 - Métodos

3.2.1 - Método de cubicação das árvores

Cada uma das 816 árvores foi cortada, tomando-se as seguintes medidas:

- a - DAP: Tomou-se o diâmetro com casca a 1,30 m de altura, medindo-se com compasso florestal. Posteriormente as árvores foram dispostas em classes diamétricas de 2 cm (Ver quadro n.º 1) .
- b - Altura: Tomou-se como altura comercial, a existente entre a superfície de corte e um diâmetro no tópo de 10 cm.
- c - Diâmetros ao longo do tronco: Tomaram-se as medidas diamétricas à partir do primeiro metro da superfície de corte e de dois em dois metros, ou seja, foram tomados os diâmetros a 1 m , 3 m , 5 m , etc. Portanto , cada árvore foi dividida em várias toras de 2 m , em cujo ponto médio, foi medido o diâmetro.

O cálculo do volume para cada árvore é obtido utilizando-se a fórmula de Huber: $V = \sum B_i \cdot L_i$, onde:

V = volume comercial,

B_i = área transversal na metade de cada tora,

L_i = comprimento de cada tora.

Devido ao comprimento das toras ser constante e igual a 2 m , a fórmula original transforma-se na seguinte, de uso prático:

$$V = 2 \sum B_i .$$

Os valores do volume comercial de cada árvore individual, são apresentados no Apêndice I .

3.2.2 - Métodos de construção de tabelas de volumes "standard"

Os métodos de construção das tabelas de volumes "standard" po -

dem ser classificados em duas grandes categorias:

- a - Gráficos: Dentro dos quais sobressaem nitidamente o de curvas harmonizadas e o de cartas de alinhamento.
- b - Matemáticos: Existe grande quantidade de equações relacionando o volume com diâmetro e altura (neste trabalho são citadas 18) , mas a solução de todas elas efetua-se por um processo matemático comum: geralmente o método preferido é o dos quadrados mínimos.

SPURR (1951) enumera os seguintes requisitos de um bom método de construção destas tabelas, reconhecendo ainda, que muita investigação é necessária, sobre este tema:

- a - Simplicidade: a qual pode ser expressa com base nos seguintes itens: desenvolvimento matemático relativamente reduzido; número de árvores não muito elevado; redução ao máximo do trabalho de computação; equipamento especial mínimo.
- b - Objetividade: como já assinalamos na introdução deste trabalho, na realidade nenhum método está livre do elemento humano, e portanto, da subjetividade. Nos métodos gráficos (curvas harmonizadas, cartas de alinhamento) a subjetividade provém do traçado manual da curva. Sob o argumento de que é preferível introduzir o elemento humano com a mesma magnitude em todos os dados, parece preferível o método dos quadrados mínimos ao dos gráficos, onde pode existir variações em certos setores da curva, somente. Realmente, a subjetividade só pode ser reduzida substancialmente se a relação pode ser expressa claramente por uma linha reta.
- c - Segurança: obtém-se quando se trabalha com um número suficiente de árvores. No presente trabalho utilizou-se o método dos quadrados mínimos, cujo desenvolvimento será exposto mais adiante.

3.2.3 - As Equações a Comparar

De acôrdo com a revisão bibliográfica efetuada e levando-se em conta principalmente os trabalhos de KORSUN (1955) , VAN SOEST (1959) , SIMPFENDORFER (1959) , LOJAN (1965) , HONER (1965) , SPURR (1951) , GOLDING e HALL (1961) , pode-se apreciar que muita pesquisa é necessária para se poder recomendar fórmulas com uma precisão aceitável, existindo às vêzes, contradições entre os resultados dos diversos autores. Neste trabalho, levando-se em conta a grande complexidade do problema, resolvemos comparar somente duas equações, uma logarítmica e outra aritmética. Para a escolha das equações, baseamos principalmente nos resultados obtidos por SPURR (1951) o qual encontrou para a fórmula de Schumacher os melhores resultados entre as logarítmicas e a Australiana e de Variável Combinada como as melhores entre as aritméticas. Devido à fórmula Australiana requerer o cálculo de quatro parâmetros e a de Variável Combinada somente duas, escolhemos esta última. Esta escolha é reforçada pelos estudos de GOLDING e HALL (1961) que inclusive levam a recomendar a Variável Combinada como a melhor fórmula para a construção de tabelas de volumes "standard". Em resumo , as equações a comparar são as seguintes:

LOGARÍTMICA: Fórmula de Schumacher:

$$\text{Log } V = a + b \log D + c \log H .$$

ARITMÉTICA: Variável Combinada:

$$V = a + b D^2 H .$$

A concepção da fórmula logarítmica foi desenvolvida por SCHUMACHER e DOS SANTOS HALL (1933) da seguinte maneira:

Se supusermos que a correlação entre a forma por um lado e o DAP e a altura por outro, não existe, a equação do volume de uma árvore pode ser escrita assim:

$$V = 0,7845 \cdot D^2 \cdot H \cdot F ,$$

onde

$$0,7854 = \pi/4 .$$

Isto raramente ocorre, pois a forma

$$F = \frac{\text{Volume Real}}{\text{Volume Aparente}}$$

ou seja $F = f$ (volume real), sendo êste, dependente do diâmetro e da altura.

Então a maneira correta de se expressar a relação mostrada na equação anterior é:

$$V = a \cdot D^b \cdot H^c ,$$

ou o que é o mesmo,

$$\log V = \log a + b \log D + c \log H .$$

3.2.4 - Análise estatística

A análise estatística dos dados apresentados neste trabalho consta dos passos que se enumeram a seguir:

- a - Estimação dos parâmetros para ambas equações, três na equação logarítmica (a , b , c) e dois na equação aritmética (a , b) . Determina-se também as variâncias, covariâncias e a significância de tais parâmetros, mediante um teste t , bem como seus intervalos de confiança.
- b - Análise de variância da regressão para cada uma das equações estudadas, com o propósito de determinar a sua significância.
- c - Realização de provas de precisão dos valores obtidos: coeficientes de correlação simples, coeficientes de correlação total, erro padrão da estimação.
- d - Determinação de um índice de ponderação para tornar comparáveis, os erros padrões das equações logarítmica e aritmética.

Quase todos os cálculos mencionados nos itens a , b , c e d , foram simplificados pela utilização de um programa Fortran, estruturado pelos ^{OS} ^{OS} Roberto Simonato Moraes e Vivaldo Francisco da Cruz, da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", o qual é apresentado no Apêndice II .

Os dados referentes ao DAP , altura e volume para cada uma das 816 árvores, foram registrados em 177 cartões perfurados IBM , o que demandou um tempo de 4 horas e 20 minutos, aproximadamente, o que significa uma média horária de 41 cartões, contendo dados de 190 árvores.

Os dados e o programa Fortran foram processados no Computador Eletrônico IBM 1620 do Instituto de Pesquisa Matemática da Universidade de São Paulo, obtendo-se os resultados que são expostos no capítulo correspondente.

Apesar de que a computação eletrônica permite prescindir do desenvolvimento dos métodos estatísticos utilizados para a solução do problema proposto, decidimos dar ênfase especial a eles, dada a sua extraordinária importância conceitual, desenvolvendo em cada caso, em forma ampla, as distintas etapas dos respectivos processos.

3.2.4.1 - Determinação dos parâmetros e suas variâncias, covariâncias, significâncias e intervalos de confiança

O desenvolvimento matemático deste item, está intimamente relacionado com Álgebra de Matrizes e nos baseamos especialmente em F. PIMENTEL GOMES e I. R. NOGUEIRA (1964) .

3.2.4.1.1 - Equação da Variável Combinada

a - Determinação dos parâmetros

$$V = \hat{a} + \hat{b} \cdot D^2 H .$$

Do ponto de vista estatístico, o diâmetro e a altura atuam como uma variável única: $D^2 H$, a qual, com propósito de simplificação, chamaremos X . Portanto:

$$V = \hat{a} + \hat{b} X .$$

A esta equação corresponde o modelo matemático:

$$Y_i = a + b X_i + e_i ,$$

ou seja:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= a + b X_1 + e_1 \\
Y_2 &= a + b X_2 + e_2 \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
Y_N &= a + b X_N + e_N \quad ,
\end{aligned}$$

o qual, matricialmente pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & X_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_N \end{bmatrix} \\
Y &= X \beta + \mathcal{E}
\end{aligned}$$

Para determinar as estimativas dos parâmetros a e b , devemos minimizar o resíduo, dado por $\mathcal{E}'\mathcal{E}$, posto que

$$\Sigma e_i^2 = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_N \end{bmatrix} = \mathcal{E}'\mathcal{E} .$$

Logo, sendo $Z = \mathcal{E}'\mathcal{E}$ e como $\mathcal{E} = Y - X \beta$, teremos

$$Z = (Y - X \beta)'(Y - X \beta) = (Y' - \beta' X')(Y - X \beta)$$

$$Z = Y' Y - Y' X \beta - \beta' X' Y + \beta' X' X \beta .$$

Sendo $Y' X \beta$ e $\beta' X' Y$, matrizes de dimensões 1×1 e transpostas entre si, elas são iguais. Portanto:

$$Z = Y' Y - 2 \beta' X' Y + \beta' X' X \beta .$$

Para obter as equações normais, a diferencial de Z deve ser tomada como idênticamente nula e como a diferencial de uma matriz é a matriz da diferencial, teremos:

$$dZ = 0 - 2 d\beta' X' Y + d\beta' X' X \beta + \beta' X' X d\beta$$

Sendo $d\beta' X' X \beta = \beta' X' X d\beta$ por serem matrizes transpostas 1×1 , teremos:

$$dZ = - 2 d\beta' X' Y + 2 d\beta' X' X \beta = 2 d\beta' (X' X \beta - X' Y) .$$

Para obter o valor de β que minimize a soma de quadrados do resíduo, devemos fazer $dZ \equiv 0$, mas como $d\beta'$ é arbitrário, isto exige:

$$X' X \hat{\beta} = X' Y = 0$$

e portanto:

$$X' X \hat{\beta} = X' Y \quad (1)$$

Esta igualdade, para esse modelo, pode ser expressa assim:

$$\begin{bmatrix} N & \Sigma X \\ \Sigma X & \Sigma X^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma Y \\ \Sigma X Y \end{bmatrix}$$

$$X' X \cdot \hat{\beta} = X' Y ,$$

$X' X$ gera uma matriz simétrica S , portanto

$$S \hat{\beta} = X' Y$$

$$\therefore S^{-1} S \hat{\beta} = S^{-1} X' Y$$

$$I \hat{\beta} = S^{-1} X' Y ,$$

e finalmente,

$$\hat{\beta} = S^{-1} X' Y \quad (2)$$

Antes de seguirmos adiante, devemos provar que a estimativa $\hat{\beta}$

de β é imparcial, o que pode ser demonstrado da seguinte maneira:

$$\hat{\beta} = S^{-1} X' Y$$

$$\hat{\beta} = S^{-1} X' (X \beta + \mathcal{E})$$

$$\hat{\beta} = S^{-1} X' X \beta + S^{-1} X' \mathcal{E}$$

$$\hat{\beta} = S^{-1} S \beta + S^{-1} X' \mathcal{E}$$

$$\hat{\beta} = \beta + S^{-1} X' \mathcal{E}$$

$$\therefore E(\hat{\beta}) = \beta + S^{-1} X E(\mathcal{E}) ,$$

como

$$E(\hat{\epsilon}) = 0 ,$$

temos

$$E(\hat{\beta}) = \beta + S^{-1} X' \epsilon ,$$

ou seja finalmente,

$$E(\hat{\beta}) = \beta . \quad (3)$$

Efetuada esta demonstração voltemos atrás, à fórmula (2) :

$\hat{\beta} = S^{-1} X' Y$, a qual pode ser desenvolvida e expressa da maneira seguinte:

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Sigma X^2}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} & \frac{-\bar{X}}{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}} \\ \frac{-\bar{X}}{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}} & \frac{1}{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma Y \\ \Sigma X Y \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = S^{-1} \cdot X' Y$$

onde S^{-1} é a inversa de S , ou seja, da matriz

$$\begin{bmatrix} N & \Sigma X \\ \Sigma X & \Sigma X^2 \end{bmatrix}$$

$$X' X = S .$$

A partir da expressão matricial: $\hat{\beta} = S^{-1} X' Y$, obtemos os valores respectivos dos coeficientes, ou seja:

$$\hat{a} = \frac{(\Sigma X^2)(\Sigma Y) - (\Sigma X)(\Sigma X Y)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} . \quad (4)$$

$$\hat{b} = \frac{N \Sigma X Y - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} . \quad (5)$$

Na prática, muitas vezes se calcula \hat{a} , a partir de \hat{b} , ao invés de determiná-lo diretamente, em cujo caso se pode demonstrar que se tem o seguinte valor:

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b} \bar{X} \quad . \quad (6)$$

Por outro lado, costuma-se expressar \hat{b} como:

$$\hat{b} = \frac{\Sigma X Y - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}}{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}} \quad .$$

b - Determinação das variâncias e da covariância

Esta determinação pode ser efetuada a partir da chamada matriz de variâncias e covariâncias, ou também denominada matriz de dispersão, geralmente simbolizada pela letra D. Neste caso:

$$D = \begin{bmatrix} V(\hat{a}) & \text{Cov}(\hat{a}, \hat{b}) \\ \text{Cov}(\hat{a}, \hat{b}) & V(\hat{b}) \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} (\hat{a} - a)^2 & (\hat{a} - a)(\hat{b} - b) \\ (a - b)(\hat{b} - b) & (\hat{b} - b)^2 \end{bmatrix} ,$$

ou seja:

$$D = E \begin{bmatrix} (\hat{a} - a) \\ (\hat{b} - b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\hat{a} - a)(\hat{b} - b) \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} (\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)' \end{bmatrix} ,$$

pois demonstramos que

$$E(\hat{\beta}) = \beta \quad .$$

Quando a matriz $X'X = S$ é não singular, como neste caso, a obtenção da matriz D é relativamente simples. Para isso partimos de:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= S^{-1} X' Y = S^{-1} X' (X \beta + \xi) = S^{-1} X' X \beta + S^{-1} X' \xi \\ &= S^{-1} S \beta + S^{-1} X' \xi = \beta + S^{-1} X' \xi . \end{aligned}$$

Portanto

$$\hat{\beta} - \beta = S^{-1} X' \xi \quad ,$$

e

$$D = E \left[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)' \right] ,$$

será igual a

$$\begin{aligned} D &= E \left[(S^{-1} X' \xi)(\xi' X S^{-1}) \right] \\ &= S^{-1} X' E (\xi \xi') X S^{-1} . \end{aligned}$$

Sendo

$$\xi \xi' = \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & \dots & e_1 e_N \\ e_2 e_1 & e_2^2 & \dots & e_2 e_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_1 e_N & e_2 e_N & \dots & e_N^2 \end{bmatrix} ,$$

temos que:

$$E (\xi \xi') = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 I = \sigma^2 .$$

Portanto

$$\begin{aligned} D &= \sigma^2 \cdot S^{-1} X' X S^{-1} \\ &= \sigma^2 \cdot S^{-1} S S^{-1} \\ &= \sigma^2 \cdot I \cdot S^{-1} \end{aligned}$$

e finalmente:

$$D = \sigma^2 S^{-1} . \quad (7)$$

Como S^{-1} já é conhecida, obtemos imediatamente o valor da matriz D e portanto, das variâncias de \hat{a} e de \hat{b} e a covariância de (\hat{a}, \hat{b}) , que serão iguais a:

$$\hat{V}(\hat{a}) = \frac{\sum X^2}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} s^2 . \quad (8)$$

$$\hat{V}(\hat{b}) = \frac{1}{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}} s^2 \quad (9)$$

$$\text{C\^ov}(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{-\bar{X}}{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}} s^2 \quad (10)$$

c - Testes de significância

Um teste t pode ser aplicado tanto para \hat{a} como para \hat{b} , com o propósito de determinar a significância de tais parâmetros, ou seja:

$$t_a = \frac{\hat{a} - 0}{s(\hat{a})} \quad (11)$$

$$t_b = \frac{\hat{b} - 0}{s(\hat{b})} \quad (12)$$

onde o número de graus de liberdade é dado pelo mesmo número correspondente à estimativa da variância: s^2 (que será calculado à frente).

d - Intervalos de confiança

Para as estimativas dos parâmetros \hat{a} e \hat{b} , podem ser calculados intervalos de confiança que estarão compreendidos entre os limites:

$$L_a = \hat{a} \pm t s(\hat{a}) \quad (13)$$

$$L_b = \hat{b} \pm t s(\hat{b}) \quad (14)$$

onde o número de graus de liberdade para t , de maneira análoga ao caso anterior, é igual aos correspondentes a s^2 .

3.2.4.1.2 - Equação de Schumacher

a - Determinação dos parâmetros

A equação de Schumacher é expressa por meio da seguinte equação:

$$\log V = \hat{a} + \hat{b} \log D + c \log H \quad ,$$

a qual pode ser simplificada, substituindo-se $\log V$, $\log D$ e $\log H$, por Y_i , X_i e Z_i , respectivamente. Desta maneira, obtemos o seguinte modelo matemático:

$$Y_i = a + b X_i + c Z_i + e_i .$$

De maneira que cada valor observado Y_i , pode ser representado do seguinte modo:

$$Y_1 = a + b X_1 + c Z_1 + e_1$$

$$Y_2 = a + b X_2 + c Z_2 + e_2$$

.....

$$Y_N = a + b X_N + c Z_N + e_N ,$$

que, na forma matricial pode ser expressado da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Z_1 \\ 1 & X_2 & Z_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 1 & X_N & Z_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}$$

$$Y = X \beta + \epsilon$$

Segundo vimos na análise efetuada a equação da Variável Combinada, se demonstra que o vetor dos parâmetros $\hat{\beta}$, pode ser obtido da seguinte maneira:

$$\hat{\beta} = S^{-1} X' Y .$$

Igualmente neste caso, pode-se demonstrar que $E(\hat{\beta}) = \beta$. Para se simplificar grandemente os cálculos, se as variáveis X_i e Z_i , são substituídas por $x_i = (X_i - \bar{X})$ e $z_i = (Z_i - \bar{Z})$, respectivamente, de maneira que o modelo matemático toma a seguinte forma:

$$Y_i = a + b x_i + c z_i + e_i .$$

Para se obter S^{-1} , necessitamos calcular $X' X = S$, cujo va-

lor é:

$$S = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma x^2 & \Sigma x z \\ 0 & \Sigma x z & \Sigma z^2 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa, S^{-1} , pode ser calculada, portanto, sem maiores dificuldades, obtendo-se

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/N & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Sigma z^2}{W} & -\frac{\Sigma x z}{W} \\ 0 & -\frac{\Sigma x z}{W} & \frac{\Sigma x^2}{W} \end{bmatrix},$$

onde $W = \Sigma x^2 \cdot \Sigma z^2 - (\Sigma x z)^2$.

Portanto, à partir da fórmula (2), podemos calcular rapidamente as estimativas dos parâmetros, já que as matrizes S^{-1} , X' e Y são conhecidas, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/N & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Sigma z^2}{W} & -\frac{\Sigma x z}{W} \\ 0 & -\frac{\Sigma x z}{W} & \frac{\Sigma x^2}{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ z_1 & z_2 & \dots & z_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_N \end{bmatrix}$$

$\hat{a} = S^{-1} \cdot X' \cdot Y$

De onde se obtêm os valores seguintes:

$$\hat{a} = \frac{\Sigma Y}{N} \tag{15}$$

$$\hat{b} = \frac{(\sum z^2 \cdot \sum x Y) - (\sum x z \cdot \sum z Y)}{W} \quad (16)$$

$$\hat{c} = \frac{(\sum x^2 \cdot \sum z Y) - (\sum x z \cdot \sum x Y)}{W} \quad (17)$$

b - Determinação das variâncias e covariâncias

Como já foi demonstrado na equação anterior, a matriz de variâncias e covariâncias, D , é obtida pela fórmula (7), ou seja:

$$D = S^{-1} \sigma^2$$

Como a matriz S^{-1} já foi determinada, é fácil apresentar os valores das variâncias e das covariâncias:

$$\hat{V}(\hat{a}) = \frac{s^2}{n} \quad (18)$$

$$\hat{V}(\hat{b}) = \frac{\sum z^2}{W} \cdot s^2 \quad (19)$$

$$\hat{V}(\hat{c}) = \frac{\sum x^2}{W} \cdot s^2 \quad (20)$$

$$\text{Cov}(\hat{a}, \hat{b}) = \text{Cov}(\hat{a}, \hat{c}) = 0 \quad (21)$$

$$\text{Cov}(\hat{b}, \hat{c}) = - \frac{\sum x z}{W} \quad (22)$$

Antes de seguir adiante, devemos fazer um comentário: como se viu, utilizando-se $x_i = (X_i - \bar{X})$ e $z_i = (Z - \bar{Z})$, simplificamos grandemente o cálculo, ao facilitar a inversão da matriz S e chegando por êsse caminho, a obter $\text{Cov}(\hat{a}, \hat{b}) = \text{Cov}(\hat{a}, \hat{c}) = 0$, devido ser $\sum x = 0$. O programa Fortran, porém, foi estruturado tendo-se em conta as variáveis originais X_i e Z_i , já que a simplificação na inversão da matriz apresenta pouca importância no processo de

computação eletrônica. Por essa razão, quando apresentarmos os resultados obtidos poderemos observar que $Cov(\hat{a}, \hat{b})$ e $Cov(\hat{a}, \hat{c})$ não são nulas, o que, em virtude da explicação apresentada anteriormente, não implica uma contradição.

c - Testes de significância

Pode-se aplicar o teste t para determinar a significação dos parâmetros, ou seja:

$$t_a = \frac{\hat{a} - 0}{s(\hat{a})} \quad (23)$$

$$t_b = \frac{\hat{b} - 0}{s(\hat{b})} \quad (24)$$

$$t_c = \frac{\hat{c} - 0}{s(\hat{c})} \quad (25)$$

O número de graus de liberdade para t é dado pelos graus correspondentes à estimativa da variância: s^2 (que será calculada mais à frente).

d - Intervalos de confiança

Para as estimativas dos parâmetros, \hat{a} , \hat{b} e \hat{c} , podem ser calculados intervalos de confiança, que estarão compreendidos entre os limites:

$$L_a = \hat{a} \pm t s(\hat{a}) \quad (26)$$

$$L_b = \hat{b} \pm t s(\hat{b}) \quad (27)$$

$$L_c = \hat{c} \pm t s(\hat{c}) \quad (28)$$

O número de graus de liberdade para t , é igual aquele para os testes de significância.

3.2.4.2 - Análise da Variância da Regressão

Do mesmo modo que para a estimação dos parâmetros, esta análise está baseada em Álgebra de Matrizes, de acordo com PIENTEL GCI ES e I. R. NOGUEIRA (1964).

3.2.4.2.1 - Equação da Variável Combinada

Como já foi expresso, a soma de quadrados do resíduo é forneci-

da por

$$\begin{aligned} SQR &= \varepsilon' \varepsilon = (Y - \hat{Y})'(Y - \hat{Y}) \\ &= (Y' - \hat{Y}')(Y - \hat{Y}) \\ &= Y' Y - Y' \hat{Y} - \hat{Y}' Y + \hat{Y}' \hat{Y} \end{aligned}$$

sendo:

$$\hat{Y} = X \hat{\beta} \text{ ,}$$

fica,

$$SQR = Y' Y - Y' X \hat{\beta} - \hat{\beta}' X' Y + \hat{\beta}' X' X \hat{\beta} \text{ ,}$$

mas:

$$Y' X \hat{\beta} = \hat{\beta}' X' Y \quad (\text{por serem transpostas } 1 \times 1)$$

$$\hat{\beta}' X' X \hat{\beta} = \hat{\beta}' X' Y \quad (\text{pois } X' X \hat{\beta} = X' Y) \text{ .}$$

Então, temos finalmente:

$$SQR = Y' Y - \hat{\beta}' X' Y \quad (29)$$

Portanto, usando o modelo: $Y_i = a + b x_i + e_i$, teremos:

$$\begin{aligned} SQR &= \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{a} & \hat{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma Y \\ \Sigma x Y \end{bmatrix} \\ &= Y' \cdot Y - \hat{\beta} \cdot X' Y \end{aligned}$$

$$SQR = \Sigma Y^2 - (\hat{a} \Sigma Y + \hat{b} \Sigma x Y)$$

$$= \Sigma Y^2 - \left(\frac{\Sigma Y \cdot \Sigma Y}{N} + \hat{b} \Sigma x Y \right)$$

$$= \Sigma Y^2 - \left[\frac{(\Sigma Y)^2}{N} + \frac{(\Sigma x Y)^2}{\Sigma x^2} \right]$$

e finalmente:

$$SQR = \left[\Sigma Y^2 - C \right] - \left[\frac{(\Sigma x Y)^2}{\Sigma x^2} \right] \quad (30)$$

S Q Total - S Q Regressão Linear .

Um problema importante que acontece imediatamente é o do número de graus de liberdade para SQR, os quais podem ser calculados do modo seguinte:

$$\begin{aligned} E(SQR) &= E \left\{ \left[\Sigma Y^2 - C \right] - \left[\frac{(\Sigma x Y)^2}{\Sigma x^2} \right] \right\} \\ &= E \left\{ \left[\Sigma (Y_i - \bar{Y})^2 \right] - \left[\frac{(\Sigma x Y)^2}{\Sigma x^2} \right] \right\} . \end{aligned}$$

Sendo:

$$Y_i = a + b x_i + e_i \quad , \quad \bar{Y} = a + \bar{e} .$$

Então

$$(Y_i - \bar{Y}) = b x_i + (e_i - \bar{e}) \quad ,$$

e,

$$\begin{aligned} E \left[\Sigma (Y_i - \bar{Y})^2 \right] &= E \left\{ \Sigma \left[b x_i + (e_i - \bar{e}) \right]^2 \right\} \\ &= E \left[b^2 \Sigma x^2 + 2 b \Sigma x (e - \bar{e}) + \Sigma (e - \bar{e})^2 \right] . \end{aligned}$$

Como

$$E(e - \bar{e}) = 0$$

$$E \left[(e - \bar{e})^2 \right] = \frac{N - 1}{N} \sigma^2 ,$$

temos:

$$E \left[\Sigma (Y_i - \bar{Y})^2 \right] = b^2 \Sigma x^2 + N \cdot \frac{N - 1}{N} \sigma^2$$

e finalmente:

$$E \left[\Sigma (Y_i - \bar{Y})^2 \right] = b^2 \Sigma x^2 + (N - 1) \sigma^2 .$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} E \left[\frac{(\sum x y)^2}{\sum x^2} \right] &= \frac{1}{\sum x^2} E \left\{ \left[\sum x (a + b x + e) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\sum x^2} E \left[(a \sum x + b \sum x^2 + \sum x e)^2 \right] . \end{aligned}$$

Como $E(\sum x) = 0$, temos que:

$$\begin{aligned} E \left[\frac{(\sum x Y)^2}{\sum x^2} \right] &= \frac{1}{\sum x^2} \cdot E \left[(b \sum x^2 + \sum x e)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\sum x^2} E \left\{ \left[b^2 (\sum x^2)^2 + 2 b \sum x^2 \cdot \sum x e + (\sum x e)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

Como

$$E(\sum x e) = 0 \quad \text{e} \quad E \left[(\sum x e)^2 \right] = \sigma^2 \cdot \sum x^2 ,$$

teremos:

$$E \left[\frac{(\sum x Y)^2}{\sum x^2} \right] = \frac{1}{\sum x^2} \cdot E \left[(b \sum x^2 + \sum x e)^2 \right] ,$$

e finalmente:

$$E \left[\frac{(\sum x Y)^2}{\sum x^2} \right] = b^2 \sum x^2 + \sigma^2 .$$

Portanto:

$$\begin{aligned} E(SQR) &= E \left[\sum (Y_i - \bar{Y})^2 \right] - E \left[\frac{(\sum x Y)^2}{\sum x^2} \right] \\ &= b^2 \sum x^2 + (N - 1) \sigma^2 - b^2 \sum x^2 - \sigma^2 \end{aligned}$$

ou seja, finalmente:

$$E(SQR) = (N - 2) \sigma^2 \quad (31)$$

Segue-se portanto, que o número de graus de liberdade do resíduo é igual a $(N - 2)$, correspondendo $(N - 1)$ ao total e um à regressão linear.

Finalmente, o quadro da análise da variância pode ser expresso, para este caso particular, do seguinte modo:

Causas de Variação	Soma de Quadrados	Graus de Liberd.	Q. Médio
Regressão Linear	$\frac{(\sum x Y)^2}{\sum x^2}$	1	Q M R L
Resíduo	S Q T - S Q R L	814	Q M R
Total	$\sum Y^2 - C$	815	

3.2.4.2.2 - Equação de Schumacher

Partindo do modelo: $Y_i = a + b x_i + c z_i + e_i$, e levando em conta a fórmula geral (39): $SQR = Y' Y - \hat{\beta}' X' Y$, temos:

$$SQR = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{a} & \hat{b} & \hat{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum x Y \\ \sum z Y \end{bmatrix}$$

$$= Y' Y - \hat{\beta}' X' Y$$

Portanto:

$$\begin{aligned} SQR &= \sum Y^2 - (\hat{a} \sum Y + \hat{b} \sum x Y + \hat{c} \sum z Y) \\ &= \sum Y^2 - \left(\frac{\sum Y}{N} \cdot \sum Y + \hat{b} \sum x Y + \hat{c} \sum z Y \right) \\ &= (\sum Y^2 - C) - (\hat{b} \sum x Y + \hat{c} \sum z Y) \quad (32) \\ &= SQR \text{ Total} - SQR \text{ Regressão Linear} . \end{aligned}$$

O ponto referente a determinação dos graus de liberdade do resíduo, apresenta-se mais complexo que no caso anterior, podendo ser deduzido de acordo com a seguinte marcha:

$$E(SQR) = E(Y' Y - \hat{\beta}' X' Y) = E(Y' Y) - E(\hat{\beta}' X' Y) .$$

Por um lado

$$\begin{aligned} E(Y'Y) &= E[(\beta'X' + \xi')(X\beta + \xi)] \\ &= E[\beta'X'X\beta + \beta'X'\xi + \xi'X\beta + \xi'\xi] \end{aligned}$$

Como $E(\xi) = 0$; $X'X = S$

$$E(Y'Y) = \beta' S \beta + E(\xi'\xi)$$

$$E(Y'Y) = \beta' S \beta + N \sigma^2 .$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}'X'Y) &= E[Y'X\hat{\beta}] = E[Y'XS^{-1}XY] \\ &= E[(\beta'X' + \xi')XS^{-1}X(X\beta + \xi)] \\ &= E[\beta'X'XS^{-1}X\beta + \beta'X'XS^{-1}X\xi + \xi'XS^{-1}X\beta + \xi'XS^{-1}X\xi] \end{aligned}$$

Como $E(\xi) = 0$, temos:

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}'X'Y) &= \beta'X'XS^{-1}X\beta + E(\xi'XS^{-1}X\xi) \\ &= \beta' S S^{-1} S \beta + E(\xi'XS^{-1}X\xi) , \end{aligned}$$

e finalmente:

$$E(\hat{\beta}'X'Y) = \beta' S \beta + E(\xi'XS^{-1}X\xi) .$$

Como

$$E(SQR) = E(Y'Y) - E(\hat{\beta}'X'Y) ,$$

teremos:

$$\begin{aligned} E(SQR) &= \beta' S \beta + N \sigma^2 - \beta' S \beta + E(\xi'XS^{-1}X\xi) \\ &= N \sigma^2 - E(\xi'XS^{-1}X\xi) . \end{aligned}$$

Denominando A , à matriz $XS^{-1}X'$, podemos aplicar a propriedade $E(\xi' A \xi) = \sigma^2 \cdot \text{tr} \cdot A$, onde $\text{tr} \cdot A$ é o traço da matriz quadrada A , ou seja, a soma dos termos da diagonal da mencionada matriz. Por outro lado, pode demonstrar-se que: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, ou seja, neste caso:

$$\text{tr}(S X^{-1} X') = \text{tr}(S^{-1} X' X) .$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 E(SQR) &= \sigma^2 [N - \text{tr}(S^{-1} X' X)] \\
 &= \sigma^2 [N - \text{tr}(S^{-1} S)] \\
 &= \sigma^2 [N - \text{tr}(I)] .
 \end{aligned}$$

A matriz I, neste caso, tem traço igual a 3, portanto:

$$E(SQR) = \sigma^2 (N - 3) \quad (33)$$

Segue-se portanto, que o número de graus de liberdade para o resíduo é igual a (N - 3), correspondendo (N - 1) ao total e dois a regressão linear.

Finalmente, o quadro da análise da variância pode ser expresso, para este caso particular, do seguinte modo:

Causas de Variação	Soma de Quadrados	G. L.	Q. M.
Regressão Linear	$\hat{b} x Y + \hat{c} z Y$	2	Q I. R L
Resíduo	$S Q T - S Q R L$	813	Q M. R
Total	$\sum Y^2 - C$	815	

3.2.4.3 - Precisão das tabelas de volumes

Quando uma tabela de volume é construída, deve ser submetida a provas ou testes que nos proporcionam uma medida de sua precisão.

Se a construção é efetuada por meio de um método gráfico, SPURR (1951) recomenda que se proceda às seguintes determinações.

- a - Desvio Agregado: É a diferença entre a soma dos volumes reais e a dos estimados, expressa em porcentagem destes últimos. Indica a liberdade da tabela, com respeito à distorção subjetiva ("bias"), e não deve exceder, ordinariamente a 1%.
- b - Desvio Médio: É a soma dos valores absolutos das diferenças entre cada um dos volumes reais e o respectivo volume estimado, expresso em porcentagem da soma

dos volumes estimados. Indica fundamentalmente a variação inerente aos dados utilizados e comumente é da ordem de 10%. Quando mais de um método de construção é utilizado para a mesma série de dados, o desvio médio nos permite estabelecer um confronto sobre a precisão dos mesmos.

Quando se trabalha com o método dos quadrados mínimos, de acordo com SPURR (1951) e HUSCH (1963), a precisão da tabela é verificada pelo desvio padrão da estimação.

c - Desvio Padrão da Estimação: Este índice é preferível dos autores, já que nos dá a precisão em termo dos quadrados dos desvios, ao invés de se tomar os próprios desvios.

Também é denominado "desvio padrão da regressão" o qual é reconhecido como a medida padrão do grau da precisão do ajuste de equações.

O desvio padrão da estimação pode ser calculado, determinando a média dos quadrados dos desvios dos valores reais em relação aos estimados da variável dependente. Porém, se se efetuou a análise de variância da regressão, como no presente caso, pode ser achado facilmente, extraindo-se a raiz quadrada do quadrado médio residual.

d - Coefficientes de Correlação: Os coeficientes de correlação fornecem medidas relativas ao grau de precisão. Na equação da variável combinada, só existe um coeficiente de correlação, uma vez que há uma variável dependente (V) e uma independente ($D^2 H$). Por outro lado, na equação de Schumacher existem quatro coeficientes de correlação: três simples ou seja, volume vs. diâmetro; volume vs. altura e altura vs. diâmetro, e um múltiplo, levando em conta as 3 variáveis conjuntamente.

3.2.4.4 - Coefficientes de correlação

3.2.4.4.1 - Equação da Variável Combinada

Se designarmos por V o volume e por \bar{X} a expressão $D^2 n$ (diâmetro ao quadrado pela altura) e se considerarmos que ambas são variáveis aleatórias com distribuição normal (m_1, σ_1^2) e (m_2, σ_2^2) respectivamente, baseando-nos em PIMENTEL GOMES e I. N. NOGUEIRA (1964) podemos deduzir o valor do coeficiente de correlação r , que será:

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{(\sum x_i^2)(\sum y_i^2)}} \quad (34)$$

onde:

$$x_i = X_i - \bar{X}$$

$$y_i = Y_i - \bar{Y} \quad .$$

A partir da fórmula (34) estamos perfeitamente capacitados para calcular o coeficiente de correlação. Por outro lado, verifica-se que a sua determinação pode ser obtida a partir dos dados da própria análise de variância como veremos a seguir.

O modelo matemático

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b} x$$

$$= \bar{Y} + \hat{b} x \quad ,$$

ou

$$\hat{y} = \hat{b} x \quad (35)$$

onde

$$x = X - \bar{X} \quad \text{e} \quad \hat{y} = \hat{Y} - \bar{Y} \quad .$$

Podemos correlacionar o \underline{y} observado com o estimado, através de (35), pela fórmula

$$r = \frac{\sum y \hat{y}}{\sqrt{(\sum y^2)(\sum \hat{y}^2)}} \quad (36)$$

Esta fórmula tem a grande vantagem de que seu uso é completamente geral, podendo ser empregada tanto para a regressão simples como para a múltipla.

De conformidade com a (35) podemos exprimir a fórmula (36) como se segue.

$$r = \frac{\sum y \hat{y}}{\sqrt{(\sum y^2)(\sum \hat{y}^2)}} = \frac{\sum y \cdot \hat{b} x}{\sqrt{(\sum y^2)(\sum \hat{b}^2 x^2)}} \\ = \frac{\hat{b} \sum x y}{\sqrt{(\sum y^2) \hat{b}^2 (\sum x^2)}} \quad (37)$$

donde se conclui que a (37) é perfeitamente equivalente a (34).

Como sabemos,

$$\sum y^2 = S Q \text{ Total} ,$$

e a comparação das equações (36) e (37) nos mostra que:

$$\sum y \hat{y} = \hat{b} \sum x y = S Q \text{ Regressão Linear}$$

e,

$$\sum \hat{y}^2 = \hat{b}^2 \sum x^2 = \hat{b} \frac{\sum x y}{\sum x^2} \cdot \sum x^2 \\ = \hat{b} \sum x y = S Q \text{ Regressão Linear}$$

conclui-se pois, que

$$r = \frac{S Q R \text{ Linear}}{\sqrt{(S Q \text{ Total})(S Q R \text{ Linear})}}$$

ou ainda,

$$r = \sqrt{\frac{S Q R \text{ Linear}}{S Q \text{ Total}}} \quad (38)$$

Resta apenas determinar a significância do coeficiente r , que pode ser obtida através do teste F e que por se tratar de um único grau de liberdade para a regressão, coincide com o teste t, de acordo com a seguinte fórmula:

$$t = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \cdot \sqrt{N - 2}$$

com $N - 2$ graus de liberdade.

3.2.4.4.2 - Equação de Schumacher

Consideremos

$$Y = \log V$$

$$X = \log D$$

$$Z = \log H .$$

Se admitirmos que X , Y e Z são variáveis aleatórias com distribuição normal (m_1, σ_1^2) , (m_2, σ_2^2) e (m_3, σ_3^2) respectivamente, de acordo com PIMENTEL GOMES e I. R. FOGUEIRA (1964), obtemos para os coeficientes de correlação simples, os valores seguintes:

Entre volume e diâmetro

$$R_{XY} = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{(\sum x_i^2)(\sum y_i^2)}} \quad (40)$$

Entre diâmetro e altura

$$R_{XZ} = \frac{\sum x_i z_i}{\sqrt{(\sum x_i^2)(\sum z_i^2)}} \quad (41)$$

Entre volume e altura

$$R_{YZ} = \frac{\sum y_i z_i}{\sqrt{(\sum y_i^2)(\sum z_i^2)}} \quad (42)$$

onde:

$$x_i = X_i - \bar{X}$$

$$y_i = Y_i - \bar{Y}$$

$$z_i = Z_i - \bar{Z} .$$

A significância dos coeficientes de correlação simples pode ser determinada através do teste F , com 2 e $N - 3$ graus de liberdade, respectivamente.

te, sendo o valor de F dado pela fórmula:

$$F = \frac{r^2 (N - 3)}{(1 - r^2) 2} \quad (43)$$

Resta determinar o coeficiente de correlação múltipla R ; para isto, consideremos o modelo matemático

$$Y_i = a + b x_i + c z_i + e_i ,$$

a partir do qual obtemos a equação

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b} x_i + \hat{c} z_i .$$

Se aplicarmos à equação acima, a fórmula geral (36) , obteremos:

$$R = \frac{\sum y \hat{y}}{\sqrt{(\sum y^2)(\sum \hat{y}^2)}} \\ = \frac{\sum Y \hat{Y} - (1/N)(\sum Y)(\sum \hat{Y})}{\sqrt{[\sum (Y - \bar{Y})^2][\sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2]}}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \sum Y \hat{Y} &= \sum Y (\bar{Y} + \hat{b} x + \hat{c} z) \\ &= \bar{Y} \sum Y + \hat{b} \sum x Y + \hat{c} \sum z Y \\ &= (1/N)(\sum Y)^2 + SQR \text{ Linear} . \end{aligned}$$

Verifica-se pois que o numerador de R será igual à soma de quadrados da regressão linear.

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \sum (Y - \bar{Y})^2 &= SQ \text{ Total} \\ \sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2 &= \sum (\hat{b} x + \hat{c} z)^2 \\ &= \hat{b}^2 \sum (x^2 + x z) + \hat{c}^2 \sum (x z + z^2) \\ &= \hat{b} (\hat{b} \sum x^2 + \hat{c} \sum x z) + \hat{c} (\hat{b} \sum x z + \hat{c} \sum z^2) . \end{aligned}$$

Entretanto, pelas equações normais dos parâmetros da regressão múltipla temos:

$$\hat{b} \sum x^2 + \hat{c} \sum x z = \sum x Y$$

$$\hat{b} \sum x z + \hat{c} \sum z^2 = \sum z Y$$

logo, virá:

$$\begin{aligned} \sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2 &= \hat{b} \sum x Y + \hat{c} \sum z Y \\ &= S Q \text{ Regressão.} \end{aligned}$$

Assim, teremos:

$$R = \frac{S Q R \text{ Linear}}{\sqrt{(S Q \text{ Total})(S Q R \text{ Linear})}} = \sqrt{\frac{S Q R \text{ Linear}}{S Q \text{ Total}}} \quad (44)$$

ou seja, obtemos a mesma fórmula (38), deduzida para a equação da Variável Combinada.

A significância de R pode ser verificada através de diversos métodos, dentre eles o teste F,

$$F = \frac{Q M R \text{ Linear}}{Q M \text{ Resíduo}} \cdot$$

Mas, pela fórmula (44), temos:

$$S Q R \text{ Linear} = R^2 S Q \text{ Total}$$

e facilmente se comprova que

$$S Q \text{ Resíduo} = (1 - R^2) S Q \text{ Total} .$$

Portanto

$$\begin{aligned} F &= \frac{S Q R \text{ Linear}}{S Q \text{ Resíduo}} \cdot \frac{N - 3}{2} \\ &= \frac{R^2 S Q \text{ Total}}{(1 - R^2) S Q \text{ Total}} \cdot \frac{N - 3}{2} \end{aligned}$$

donde, finalmente

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{N - 3}{2} \quad (45)$$

O valor de F obtido em (45) deve ser confrontado com o da tabela respectiva com 2 e $(N - 3)$ graus de liberdade.

3.2.4.1 - Ponderação do desvio padrão da fórmula logarítmica

O emprêgo do método dos quadrados mínimos na construção de tabelas de volumes "standard", está atualmente muito difundido. Isso se deve principalmente ao fato de que dada uma determinada equação, seu ajuste por êsse método não apresenta distorção subjetiva ("bias") o que não ocorre com os métodos gráficos que envolvem um traçado manual das respectivas curvas. Entretanto, a objetividade do ajuste matemático tem como contra parte outros fatores negativos, principalmente a escolha da equação para a construção da tabela, a qual é necessariamente subjetiva. Portanto é de grande importância a determinação de um índice que permita escolher uma entre várias equações comparadas. O índice clássico de ajuste é o desvio padrão da estimação (raiz quadrada do quadrado médio residual), o qual pode ser usado quando as equações a comparar têm a mesma variável dependente, porém, não é conveniente quando estas diferem.

No presente trabalho, as duas equações estudadas: a de Schumacher ($\log V = a + b \log D + c \log H$) e a da Variável Combinada ($V = a + b D^2 + c H$) apresentam, precisamente, diferentes variáveis dependentes ($\log V$ e V). Quando êstes casos se apresentam, para se tornar possível a comparação faz-se necessário ponderar o referido desvio padrão.

Todas as estimações realizadas pelo método dos quadrados mínimos com "pêso" igual à unidade são equivalentes a estimações de máxima verossimilhança, sob a hipótese de que os êrros residuais são distribuídos normalmente, independentes e homocedásticos. Por isso, os coeficientes estimados pela

aplicação do método dos quadrados mínimos, são aqueles que tornam máxima a verossimilhança da amostra observada. Parece pois razoável dar um passo adiante e avaliar estas máximas verossimilitudes para as equações consideradas, utilizando-as para determinar a equação mais apropriada. Os requisitos de independência, normalidade e homocedasticidade podem parecer resuscitativos porém, na realidade são de grande importância. Com efeito, a independência dos resíduos é uma condição necessária para a linearidade; a existência da normalidade simplifica os enunciados de probabilidades; enquanto um desvio padrão constante assegura estimativas eficientes dos coeficientes de regressão.

Este método de trabalho é desenvolvido por FURIVAL (1961), consistindo o procedimento usual em formar o produto lógico da função de densidade no espaço amostral da variável dependente. As funções construídas dessa maneira são comparáveis somente no mesmo espaço amostral, porém a função de densidade no espaço amostral de alguma função de volume, $f(V)$, pode ser transformada no espaço do volume (V) pela multiplicação da derivada primeira de $f(V)$.

No presente trabalho, as funções de densidade são as seguintes:

a - Variável combinada

$$P_1(V) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(V - a - b D^2 H)^2}{2\sigma_1^2}}$$

b - Schumacher:

$$P_2(\log V) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log V - a - b \log D - c \log H)^2}{2\sigma_2^2}}$$

onde os resíduos para cada equação são supostos com distribuição normal, independentes e homocedásticos.

Os espaços amostrais correspondentes são: Volume (V) e logaritmo do volume (log V), razão pela qual a derivada necessária para transformar $P_2(\log V)$ no espaço amostral do volume (V) é:

$$\frac{d(\log V)}{d(V)} = \frac{\log e}{V}$$

e portanto:

$$P_2(V) = \frac{\log e}{V \cdot \sigma^2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log V - a - b \log D - c \log H)^2}{2\sigma^2}}$$

Com as duas funções de densidade no mesmo espaço amostral, as funções de máxima verossimilitude, podem ser formadas a partir de seus produtos lógicos:

$$L_1(V) = \text{II } P_1(V) = \frac{1}{(\sigma_1 \cdot \sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\sum (V - a - b - D^2 H)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$L_2(V) = \text{II } P_2(V) = \frac{(\log e)^n}{(\text{II } V)(\sigma_2 \sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\sum (\log V - a - b \log D - c \log H)^2}{2\sigma_2^2}}$$

As máximas verossimilitudes (L_1 e L_2), podem ser avaliadas pela substituição de σ^2 pela sua estimativa s^2 , que se obtém dividindo a soma de quadrados do resíduo por $n - r$, onde n é o número de observações e r o número de parâmetros da equação de regressão.

Assim, se

$$s^2 = \frac{\text{S Q Resíduo}}{n - r}$$

virá:

$$\text{S Q Resíduo} = (n - r) s^2$$

e conseqüentemente, o expoente de g será

$$\frac{(n - r) s^2}{2 s^2} = \frac{n - r}{2}$$

Portanto:

$$L_1 = \frac{1}{(s_1 \sqrt{\frac{n-r}{2} \pi})^n} \cdot e^{-\left(\frac{n-r}{2}\right)}$$

e

$$L_2 = \frac{(\log e)^n}{(II V) (s_2 \sqrt{\frac{n-r}{2} \pi})^n} \cdot e^{-\left(\frac{n-r}{2}\right)}$$

Como neste caso interessam mais os valores relativos do que os absolutos, podemos eliminar o valor comum a ambas as fórmulas, ou seja

$$\left[\frac{1}{(s_1 \sqrt{\frac{n-r}{2} \pi})^n} \cdot e^{-\left(\frac{n-r}{2}\right)} \right]$$

resultando assim uma função unívoca da verossimilitude.

Invertendo os termos, temos:

$$K_1 = s_1^n$$

$$K_2 = \frac{II V \cdot s_2^n}{(\log e)^n}$$

Finalmente, extraíndo a raiz enésima, virá:

$$I_1 = s_1$$

$$I_2 = \frac{\sqrt[n]{II V} \cdot s_2}{\log e} = \frac{\bar{V}}{\log e} \cdot s_2$$

onde \bar{V} = média geométrica.

Os índices de ajuste (I) são de ordem inversa em comparação com os de máxima verossimilitude: um valor grande indica um ajuste ótimo e vice-versa.

Do exposto anteriormente, resulta que a equação sugerida para o índice de ajuste pode ser representada, de um ponto de vista geral, da seguinte maneira:

$$I = s \cdot \frac{1}{f'(V)} \quad (46)$$

O índice I se reduz à estimação usual do desvio padrão, quando a variável independente é o volume, como na equação da Variável Combinada. Quando a variável independente é alguma função do volume, como ocorre na fórmula de Schumacher, o índice pode ser considerado como um desvio padrão ponderado, transformado à unidades de volume; para computar o índice neste caso, aplicamos a fórmula já referida em I_2 , ou seja:

$$I_2 = \frac{\bar{V}}{\log e} s_2 \quad (47)$$

onde a média geométrica \bar{V} , deve ser calculada da seguinte maneira:

$$\bar{V} = \text{antilog} \left(\frac{\sum \log V}{n} \right) \quad (48)$$

4 - RESULTADOS

4.1 - resultados da análise Estatística

4.1.1 - Equação da Variável Combinada (V - a + b D² H) .

Equação obtida:

$$V = 0,02984 + 0,0000361 D^2 \cdot H$$

	P A R Â M E T R O S	
	a	b
Estimativas	0,02984	0,0000361
Variâncias	0,00001986	5,8549 x 10 ⁻¹⁴
Teste t	6,70 ***	149,11 ***
Intervalos de confiança inferiores	0,02122	0,00003561
Intervalos de confiança superiores	0,03846	0,00003655

Covariância (â , b) - = 0,0000000008953

Análise de Variância

Causas de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	Prova F
Regressão Linear	1	111,84	111,84	22.233,77 ***
Resíduo	314	4,09	0,00503	
Total	315	115,93		

Coefficiente de correlação: r = 0,991 ***

Desvio padrão da estimação: I₁ = 0,0709

4.1.2 - Equação de Schumacher ($\log V = a + b \log D + c \log H$)

Equação obtida:

$$\log V = 3,9356 + 1,8192 \log D + 0,8265 \log H .$$

	P A R Â M E T R O S		
	a	b	c
Estimativas	3,9356	1,8192	0,8265
Variâncias	0,003691	0,000823	0,000478
teste t	149,15 ***	63,41 ***	37,79 ***
Intervalos de confiança inferiores	3,8156	1,7543	0,7814
Intervalos de confiança superiores	4,0556	1,8741	0,8716

Covariâncias: Cov (\hat{a} , \hat{b}) = - 0,001357

Cov (\hat{a} , \hat{c}) = 0,000295

Cov (\hat{b} , \hat{c}) = - 0,000491

Análise de Variância

Causas de Variação	G. L.	S. Q.	C. M.	Prova F
Regressão Linear	2	332,60	166,30	11.897,18 ***
Resíduo	813	11,36	0,01398	
Total	815	343,96		

Coefficientes de correlação: Total: R = 0,992 ***

Simple: $r_{VD} = 0,953$ ***

$r_{VH} = 0,899$ ***

$r_{DH} = 0,782$ ***

Desvio padrão da estimação: $I_2 = 0,1084$.

4.2 Construção das Tabelas de Volumes

4.2.1 Equação da Variável Combinada

(quadro Nº 2 - Tabela de Volumes "Standard" de "Pinus pinaster Att.")

(Volumes expressos em metros cúbicos)

Equação obtida:

$$V = 0,02984 + 0,000361 D^2 H$$

Classe dia- métrica (cm)	A l t u r a (m)				
	10	15	20	25	30
16	0,122	0,169	0,215		
18	0,147	0,205	0,264		
20	0,174	0,247	0,319		
22	0,205	0,292	0,379		
24	0,238	0,342	0,446	0,550	
26	0,274	0,396	0,518	0,640	
28	0,313	0,455	0,596	0,733	
30		0,517	0,680	0,842	
32		0,584	0,769	0,954	1,139
34		0,656	0,865	1,073	1,282
36		0,732	0,966	1,200	1,434
38		0,812	1,073	1,333	1,594
40		0,896	1,185	1,474	1,753
42			1,310	1,622	1,940
44			1,428	1,777	2,127
46			1,558	1,940	2,322
48			1,693	2,109	2,525
50			1,835	2,286	2,738

4.2.2 = Equação de Schumacher

Quadro nº 3 = Tabela de Volumes "Standard" de "Pinus pinaster Ait."

(Volumes expressos em metros cúbicos)

Equação obtida:

$$\log V = - 3,9356 + 1,8192 \log D + 0,8265 \log H$$

Classe diamétrica (cm)	A l t u r a (m)				
	10	15	20	25	30
16	0,121	0,168	0,209		
18	0,150	0,209	0,265		
20	0,181	0,253	0,321		
22	0,215	0,301	0,382		
24	0,252	0,352	0,448	0,539	
26	0,292	0,407	0,518	0,622	
28	0,334	0,467	0,593	0,713	
30		0,529	0,672	0,807	
32		0,595	0,756	0,908	1,054
34		0,664	0,843	1,014	1,175
36		0,736	0,936	1,125	1,306
38		0,813	1,033	1,242	1,442
40		0,891	1,132	1,362	1,581
42			1,239	1,489	1,730
44			1,352	1,626	1,888
46			1,462	1,758	2,042
48			1,581	1,901	2,208
50			1,746	2,099	2,438

5 - DISCUSSÃO

De acôrdo com os resultados obtidos, as equações estimadas foram as seguintes:

$$\text{Variável Combinada: } V = 0,02984 + 0,000361 D^2 H$$

$$\text{Schumacher: } \log V = -3,9356 + 1,8192 \log D + 0,8265 \log H .$$

Todas as estimativas dos parâmetros obtidas, apresentaram provas t significativas ao nível de 1%.

Os intervalos de confiança para as estimativas dos parâmetros são muito precisos (amplitude do intervalo $\sim 10\%$), exceto para \hat{a} , na equação da Variável Combinada (amplitude do intervalo $\sim 30\%$).

A prova F da análise de variância da regressão, apresenta, para as duas equações, resultados significativos ao nível de 1%.

Finalmente, o coeficiente de correlação para a equação da Variável Combinada, é significativo ao nível de 1%, do mesmo modo que o coeficiente de correlação total e os simples, correspondentes à equação de Schumacher.

Do exposto anteriormente, que pode ser observado com maior detalhe no ponto 4.1, deduz-se a grande precisão com que êste trabalho foi desenvolvido, o qual é devido, sem dúvida, ao fato de que o número de árvores analisadas é alto: 816. Por outra parte, a variabilidade entre árvores está também consideravelmente reduzida, dado que todas as árvores em estudo, foram cortadas numa área limitada, com condições ambientais muito homogêneas.

Nos quadros nº 2 e nº 3, apresentam-se as tabelas de volumes "standard" calculadas pelas equações da Variável Combinada e a de Schumacher, respectivamente. Como se pode observar, existem diferenças, de importância variável, na estimação dos volumes. Para a classe diamétrica 16, nota-se uma leve superioridade da Variável Combinada, porém, para diâmetros maiores, a de Schuma-

ner fornece estimações mais altas, as que na classe diamétrica 10 , apresentam-se em forma ascendente, sendo as diferenças de ordem de 2 a 7% . Na classe altimétrica 15 , quando o diâmetro alcança os 40 cm , a Variável Combinada começa a fornecer estimações ligeiramente maiores, de ordem de 2 a 3% . Na classe altimétrica 20 , a equação de Schumacher apresenta volumes maiores, porém de pouca importância, somente na faixa compreendida entre os 18 e 26 cm , logo inverte-se a situação, com diferença entre 2 a 5% . Nas classes altimétricas 25 e 30 a equação da Variável Combinada fornece, sempre, estimações maiores: 4 a 9% e 8 a 12% , respectivamente.

Em geral, quando o diâmetro e a altura são maiores de 40 cm ou 20 m., respectivamente, a equação da Variável Combinada oferece valores consideravelmente maiores que a de Schumacher (mais de 5%).

De acordo ao exposto no ponto 3.2.4.4 , a comparação entre as duas equações pode ser efetuada por intermédio dos respectivos erros padrões da estimação, devidamente ponderados. Os valores obtidos para os referidos erros padrões são os seguintes:

$$\text{Variável Combinada: } I_1 = 0,0709$$

$$\text{Schumacher: } I_2 = 0,1084 .$$

Portanto, conclui-se que a equação da Variável Combinada apresenta uma melhor estimação dos volumes, em comparação com a de Schumacher.

Os resultados obtidos concordam com os de GOLDING e HALL (1961), os quais realizaram comparações de 25 equações em Pinus banksiana , Picea glauca e Populus tremuloides e destacaram a fórmula da Variável Combinada, atendendo simultaneamente à precisão e à facilidade de uso.

Em comparação com os resultados de SPURR (1951) em Picea , existam discrepâncias, já que no conjunto das séries de dados estudados, não verificou

diferenças significativas entre estas fórmulas. Devemos assinalar, porém, que o citado autor não esclareceu suas conclusões, já que apresenta os erros padrões da estimação (em pés cúbicos), sem transformação para as fórmulas logarítmicas: 0,024 ; 0,048 e 0,049 , para cada uma das séries estudadas, enquanto que os valores respectivos para a equação da Variável Combinada foram: 1,00 , 5,28 e 7,97 . Portanto não é possível aprofundar mais acerca de tais resultados.

A procedência da semente e as condições ambientais influem sem dúvida, sobre os hábitos de crescimento duma espécie determinada, modificando , portanto, a relação: volume versus diâmetro e altura . Por outro lado esta relação também é diferente de espécie em espécie. Como já foi visto na revisão bibliográfica, alguns esforços foram realizados com o propósito de esclarecer esta situação e determinar se existe uma equação que seja a melhor para todos os casos ou se cada caso ou grupo de casos, exige uma solução particular. Porém, os resultados obtidos indicam que muitas pesquisas em todas as regiões florestais são ainda necessárias para remover as dúvidas existentes.

A presente tese, é apenas uma contribuição referente a uma só espécie florestal (Pinus pinaster L.) , duas equações (Variável Combinada e Schumacher) , e uma região (costa marítima do Uruguai).

6 - CONCLUSÕES

- 6.1 - As provas t das estimativas dos parâmetros, as provas F da análise de variância de regressão e os coeficientes de correlação, demonstram uma precisão muito alta, registrando-se em todos os casos, valores significativos ao nível de 1% , enquanto que os intervalos de confiança das estimativas têm, exceto um caso isolado, um grau de precisão excelente.
- 6.2 - A fórmula da Variável Combinada ($V = a + b D^2 H$) demonstrou ser mais precisa que a de Schumacher ($\log V = a + b \log D + c \log H$) .
- 6.3 - As diferenças mais grandes entre as estimações fornecidas pelas duas fórmulas, ocorrem para árvores grandes (mais de 40 cm. de diâmetro ou 20 m. de altura), nas quais, dentro dos limites das tabelas calculadas, registram-se diferenças entre 5 a 12% favoráveis à Variável Combinada. Para árvores com dimensões menores que as citadas, as estimações obtidas pelas duas fórmulas são bastante similares, com uma diferença que, salvo exceções, não vão além de 4% , favorável a uma ou outra equação.
- 6.4 - Quanto a determinação das equações é efetuada usando a computação eletrônica, como neste caso, o tempo requerido é praticamente o mesmo para as duas fórmulas. Porém, quando não se tem essa facilidade, a equação de Schumacher, por requerer o manejo dos logaritmos e além disso por ter três parâmetros em vez de dois, demanda um tempo consideravelmente maior (não menos do triplo), o que a faz pouco recomendável, em comparação com a Variável Combinada.

6.5 - É necessário continuar pesquisando sobre este tema, estudando diferentes espécies e condições ambientais, como assim mesmo comparar outras fórmulas. Segundo os estudos de SPURR (1951) e Stoute, seria interessante comprovar a precisão da equação Australiana ($V = a + b D^2 + c H + d H^2$), ainda que esta fórmula tem o inconveniente de apresentar quatro parâmetros.

Conclusão Final

Determinou-se para a espécie "Pinus marítimo" (Pinus pinaster Mill.) do Parque Nacional de Carrasco (Uruguai), que uma tabela de volumes "standard", é obtida duma maneira mais precisa e geralmente mais rápida, utilizando a equação da Variável Combinada, em comparação com a de Schumacher. Mais pesquisas são necessárias considerando outras fórmulas, espécies e condições ambientais.

7 - RESUMO

Comparam-se duas equações para a construção de tabelas de volumes "standard": a da Variável Combinada ($V = a + b D^2 h$) e a de Schumacher ($\log V = a + b \log D + c \log h$), com o objetivo de determinar qual delas tem maior precisão para estimar os volumes comerciais (diâmetro do tópo - 10 cm) de "Pinus marítimo" (Pinus pinaster Mill.).

O material experimental está constituído por 816 árvores, cortados no Parque Nacional de Garrasco (Uruguai), os quais têm as seguintes características geométricas, em promedio:

Diâmetro (à altura do peito)	21,1 cm
altura comercial (diâmetro do tópo - 10 cm)	13,8 m
Volume comercial (com casca)	0,582 m ³

A determinação do volume de cada árvore foi efetuada usando a fórmula de Huber, com intervalos de mensura de 2 metros.

De acordo com um inventário realizado, as características dasométricas do bosque ao qual pertence a amostra mencionada, são as seguintes, em forma aproximada:

Diâmetro (à altura do peito)	29,1 cm
Altura total	21,5 m
Número de árvores por hectare	703
Área basal	43,0 m ² /ha
Volume	467,0 m ³ /ha
Idade	34 anos
Incremento anual médio	14,0 m ³ /ha/ano .

O solo do mencionado bosque é muito arenoso (97,7% de areia) e com ondulações suaves, predominando dentro de seu estágio menor a espécie Para acum officinale ('dente de leão').

A análise estatística foi efetuada utilizando um programa Fortran, o qual foi processado no Computador Eletrônico IBM 1620 do Instituto de Pesquisas Matemáticas da Universidade de São Paulo.

As provas t das estimativas dos parâmetros, as provas F da análise de variância da regressão e os coeficientes de correlação, nas duas equações, demonstram uma precisão muito alta, encontrando-se em todos os casos, valores significativos ao nível 1%, enquanto que os intervalos de confiança têm, exceto um caso, um grau de precisão excelente.

Determinou-se, para o caso em estudo, que uma tabela de volumes "standard" é obtida de uma maneira mais precisa e geralmente mais rápida, usando a equação da Variável Combinada, em comparação com a de Schumacher. As diferenças mais grandes entre as duas fórmulas ocorrem para árvores grandes (mais de 40 cm de diâmetro ou 20 m. de altura), nas quais registram-se diferenças favoráveis à Variável Combinada, da ordem de 5 - 12%. Para árvores com dimensões menores as diferenças não vão além de 4%, favorável a uma ou outra fórmula.

Entende-se que mais pesquisas neste campo são necessárias, considerando outras fórmulas, espécies e condições ambientes.

8 - SUMMARY

Two equations for the calculation of standard tables of volumes are compared, namely, the equation of Combined Variable ($V = a + b D^2 h$), and Schumacher's equation ($\log V = a + b \log D + c \log h$), with the aim of determining which one is better to estimate commercial volumes, with top diameter equal to 10 cm., in trees of "Pinus pinaster L.t."

The data studied were obtained from 316 trees, cut down from the Parque Nacional de Carrasco (Uruguay), with the following dasometric averages:

Diameter (at breast height)	25.1 cm.
Commercial height (top diameter = 10 cm.)	16.8 m.
Commercial volume (with bark)	0.532 m ³ .

The volume of each tree was determined by Huber's formula, with measures at intervals of 2 m.

According to an inventory carried out, the dasometric characteristics of the forest are approximately the following:

Diameter	29.1 cm.
Total height	21.5 m.
Number of trees per hectare	708
Basal area	48.0 m ² /ha.
Volume	467.0 m ³
Age	34 years
Average annual increment	14.0 m ³ /ha/year.

The soil is very sandy (97.7% of sand), with slight inclination, and with natural vegetation mainly of Taraxacum officinale.

To carry out the statistical analysis, a program, in Fortran, was prepared and the data processed in the IBM 1620 of the Instituto de Pesquisas Matemáticas, of the University of São Paulo.

The t and F tests applied to the estimates of the parameters, and the coefficients of correlation in both equations show that a high precision was attained. In all cases significance was proved at the 0.1% level of probability. On the other hand, the confidence intervals were rather short, except in one case.

For the case studied, the standard table of volumes can be obtained more precisely, and generally quicker, with the aid of the equation of Combined Variable, as compared to Schumacher's formula. The highest differences between these equations occur for big trees (over 40 cm. in diameter, or 20 m. in height), when the equation of combined variable gives values 5 to 12% higher. For trees of smaller dimensions, differences are less than 4% between the formulas.

More research is needed on this topic, taking in account other formulas, species and ecological conditions.

9 - BIBLIOGRAFIA

- 1 - BONILLA, J. A. e J. A. Bottazzi - 1964 - Primera Contribución Dasométrica. Evaluación de los Rendimientos del Pino Marítimo en la Zona de Carrasco. Fac. Agr. Montevideo. Bol. Dep. For. 9: (1-20).
- 2 - BONILLA, J. A. , M. Rolfo e C. Rava - 1964 - Quinta Contribución Dasométrica. Evaluación de la Calidad de Sitio del Pino Marítimo en la Zona de Carrasco em Base a Características Edafológicas. Fac. Agr. Montevideo. Bol. Dep. For. 12: (1-9).
- 3 - BONILLA, J. A. e R. Beckman - 1964 - Sexta Contribución Dasométrica. Evaluación de los Rendimientos del Pino Marítimo en la Zona de Carrasco (2ª parte). Fac. Agr. Montevideo. Bol. Dep. For. 12: (10-19).
- 4 - BONILLA, J. A. , P. Ross e M. Buxedas - Tablas de Volúmenes Comerciales de Pino Marítimo (Pinus pinaster Ait.) . Fac. Agr. Montevideo. 13 p. (em prelo).
- 5 - BRUCE, D. e F. X. Schumacher - 1950 - Forest Mensuration. 3ª ed. Mc Graw-Hill. 483 p.
- 6 - CHAPMAN, H. e W. Meyer - 1949 - Forest Mensuration. Mc Graw-Hill. 522 p.
- 7 - FURNIVAL, G. M. - 1961 - An Index for Comparing Equations Used in Constructing Volumes Tables. Forest Science 7: (337-41).
- 8 - GOLDING, D. L. e O. F. Hall - 1961 - Tests of Precision of Cubic Foot Tree Volume Equations. Forest Chronicle 37: (123-32)
- 9 - HEINSDIJK, D. - 1959 - Volumes do Pinheiro. Serviço Florestal. Rio de Janeiro. Bol. Serv. Flor. 1: (1-40).
- 10 - HELIRIGL, B. - 1964 - Osservazioni Teoriche Sulle Equazioni Stereometriche. Ital. For. Mont. 19: (225-53).
- 11 - HONER, T. G. - 1965 - A New Total Cubic Foot Volumen Function. Forest Chronicle 41: (476-93).

- 12 - HUSCH, B. - 1963 - Forest Mensuration and Statistics. The Ronald Press.
474 p.
- 13 - IMPERIAL FORESTRY BUREAU - 1940/1966 - Forestry Abstracts. Oxford.
- 14 - INSTITUTO FLORESTAL - 1962 - Tablas de Volumen para Pinus radiata em Chile. Santiago. Boletim Técnico 1: (1-30).
- 15 - KORSUN, F. [Stem Volume as a Function of Height and D. B. H.] - 1955 - Vuzkum. Ost. Lesn. C S R, N.º 8. Citado em Forestry Abstracts 19: (Resumo n.º 3.270).
- 16 - LAFFITTE, J. C. , C. Mezzotoni e J. A. Bonilla - 1964 - Segunda Contribución Dasmétrica. Tablas de Volumen Standard para Pinus pinaster. Fac. Agr. Montevideo. Bol. Dep. For. 10: (1-9).
- 17 - LEIGHTON, J. G. - 1957 - Tablas de Volumen para Pino Insigne. Chile. Bosq. Maderas 1: (39-44).
- 18 - LOJAN, L. - 1966 - Una Fórmula para Estimar Volúmenes de um Bosque Tropical Húmido. Turrialba 16: (67-72).
- 19 - LONGHI, G. - 1952 - Tavola di Cubatura dei Pino Nero, Pino Domestico e Pino Marittimo dei Boschi Amiliani. Ital. For. Mont. 7: (104-5).
- 20 - MORETTI FILHO, J. - 1962 - Normas e Recomendações para a Preparação de Trabalhos Científicos. E. S. A. "Luiz de Queiroz". Piracicaba. Boletim de Divulgação n.º 2: (1-34).
- 21 - PARDÉ, J. - 1961 - Dendrométrie. Ecole Nationale des Eaux et Forêts. 350 p.
- 22 - PIMENTEL GOMES, F. e Izaias R. Nogueira - 1963 - Cálculo Diferencial. 4.ª ed. E. S. A. "Luiz de Queiroz". Piracicaba. 118 p.
- 23 - PIMENTEL GOMES, F. e Izaias R. Nogueira - 1964 - Regressão e Covariância. E. S. A. "Luiz de Queiroz". Piracicaba. 45 p.
- 24 - PIMENTEL GOMES, F. - 1966 - Curso de Estatística Experimental. 3.ª edição. 404 p. + 15 tabelas. Piracicaba. SP.
- 25 - REIS, J. - 1966 - Preparo de Artigos Técnicos - Redação Técnica - E. S. A. "Luiz de Queiroz". 46 p.

- 26 - RUIZ - DANA LARRARTE, J. M. - 1963 - Estudio de los Cocientes de Forma de Pinus sylvestris y Pinus pinaster en Galicia. Tablas de Volúmenes para estas Especies. Montes 19: (485-96).
- 27 - SCHUMACHER, F. K. e F. Santos Hall - 1933 - Logarithmic Expression of Timber - Tree Volume. Journ. Agr. Res. 47: (719-34).
- 28 - SIMPFENDORFER, K. J. - 1959 - Tree Volume Equations. For. Comm. of Victoria. Australia. For. Techn. Pap. 2: (15-19).
- 29 - SOEST, J. Van - 1959 - Stem Form and Volume of Japanese Larch in the Netherlands. Wageningen. Uitver. Versl. Bosbou. 4: (1-75).
- 30 - SOULOUMIAC, P. - 1947 - Application des Méthodes Statistiques a l'Établissement d'un Tarif de Cubage. Rev. Eaux, For. 55: (649-67).
- 31 - SPURR, S. - 1951 - Forest Inventory. The Ronald Press. 1.^a ed. 476 p.
- 32 - VERUETTE FUENTES, J. - 1963 - Elaboración de una Tabla Fotogramétrica de Volúmenes para los Bosques de Coníferas del Estado de Durango. Inst. Nac. Inv. For. México. Boletín Técnico 5: (1-36).
- 33 - WAUTHOZ, L. - 1964 - Du Cubage des Arbres en Fonction du Paramètre de Forme. Bull. Soc. For. Belg. 71: (365-93).

A P E N D I C E IDADOS DAS ÁRVORES EM ESTUDO

Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)	Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)
1	35,0	20	0,750	31	33,0	20	0,851
2	40,3	22	1,128	32	28,0	16	0,490
3	31,4	18	0,504	33	26,1	18	0,534
4	30,3	18	0,593	34	32,3	20	0,781
5	35,0	20	0,816	35	26,0	20	0,635
6	27,1	22	1,041	36	31,0	20	0,725
7	35,3	20	0,894	37	27,0	16	0,484
8	27,0	18	0,488	38	32,2	20	0,860
9	22,0	16	0,297	39	28,2	16	0,423
10	20,1	16	0,300	40	16,0	6	0,079
11	35,1	22	1,074	41	24,3	16	0,365
12	24,5	18	0,442	42	30,3	18	0,644
13	33,0	22	0,899	43	36,0	20	0,999
14	29,5	20	0,689	44	37,0	20	1,062
15	25,0	16	0,398	45	27,3	20	0,584
16	29,0	18	0,550	46	33,3	22	1,014
17	30,0	20	0,699	47	29,1	20	0,542
18	48,3	22	1,806	48	32,0	20	0,703
19	34,4	20	0,691	49	38,0	22	1,348
20	30,0	20	0,602	50	30,3	22	0,732
21	24,1	16	0,379	51	29,3	20	0,590
22	32,1	20	0,654	52	32,0	20	0,786
23	32,3	18	0,682	53	30,2	20	0,748
24	32,2	20	0,721	54	31,2	20	0,639
25	28,3	14	0,416	55	36,3	22	1,095
26	23,0	16	0,363	56	26,3	18	0,464
27	30,0	20	0,643	57	26,1	20	0,597
28	34,0	22	0,956	58	22,1	18	0,353
29	36,3	20	0,896	59	22,1	16	0,295
30	29,3	14	0,423	60	27,2	20	0,527

(continuação).

Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)	Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)
61	28,2	16	0,401	91	29,3	16	0,462
62	31,3	22	0,752	92	26,2	18	0,456
63	36,1	20	1,085	93	31,4	18	0,427
64	21,3	14	0,270	94	33,4	20	0,817
65	30,0	18	0,680	95	34,3	20	0,807
66	30,0	20	0,697	96	24,3	14	0,298
67	27,3	20	0,578	97	25,0	16	0,413
68	28,8	18	0,568	98	31,1	20	0,713
69	29,2	20	0,731	99	39,1	22	1,151
70	43,1	22	1,575	100	26,2	16	0,450
71	29,1	18	0,533	101	36,0	20	0,877
72	23,1	12	0,252	102	31,0	16	0,587
73	35,4	20	0,853	103	32,2	20	0,764
74	30,0	18	0,559	104	33,3	18	0,724
75	31,2	16	0,586	105	34,1	20	0,843
76	25,2	18	0,429	106	32,4	20	0,765
77	25,3	18	0,420	107	3,1	18	0,664
78	27,2	16	0,403	108	32,4	20	0,705
79	37,3	22	1,295	109	45,0	24	1,777
80	24,3	16	0,405	110	36,3	20	0,965
81	25,3	18	0,422	111	23,0	16	0,371
82	23,0	16	0,336	112	32,6	20	0,728
83	24,0	20	0,477	113	27,2	18	0,501
84	23,1	16	0,324	114	20,3	12	0,216
85	24,4	18	0,411	115	21,4	12	0,228
86	26,4	14	0,367	116	27,0	16	0,432
87	36,0	22	1,131	117	23,0	16	0,332
88	31,4	18	0,640	118	33,3	18	0,710
89	29,1	16	0,525	119	25,0	12	0,299
90	27,6	14	0,440	120	29,2	16	0,441

(continuação)

Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)	Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)
121	35,0	18	0,755	151	32,1	22	0,755
122	30,2	16	0,484	152	36,2	22	1,072
123	27,2	16	0,470	153	24,2	16	0,354
124	27,2	14	0,323	154	28,2	18	0,559
125	46,2	22	1,545	155	36,0	20	1,071
126	36,4	22	1,183	156	31,4	18	0,736
127	31,1	20	0,763	157	30,3	20	0,604
128	30,0	14	0,472	158	29,4	18	0,493
129	29,0	20	0,604	159	37,2	20	1,057
130	39,2	20	0,670	160	28,0	20	0,606
131	35,4	22	0,943	161	30,4	20	0,631
132	29,4	20	0,708	162	28,3	18	0,536
133	41,0	22	1,241	163	30,1	20	0,742
134	33,0	22	0,828	164	23,1	16	0,348
135	35,0	20	0,753	165	29,1	20	0,623
136	29,6	18	0,557	166	29,3	16	0,470
137	25,2	18	0,388	167	31,6	18	0,616
138	30,2	20	0,690	168	42,0	12	0,700
139	30,4	22	0,732	169	31,0	18	0,672
140	36,3	22	1,030	170	42,1	20	1,265
141	25,1	18	0,422	171	36,1	20	0,867
142	27,4	20	0,565	172	29,1	20	0,658
143	33,3	20	0,797	173	36,2	18	0,842
144	28,1	18	0,560	174	30,2	20	0,671
145	29,0	18	0,564	175	37,0	22	0,995
146	34,3	20	0,954	176	31,3	20	0,706
147	26,4	16	0,426	177	27,2	20	0,568
148	30,4	20	0,656	178	24,0	18	0,404
149	37,3	20	1,052	179	38,1	22	1,238
150	25,0	18	0,441	180	25,3	18	0,458

(continuação)

Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)	Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)
181	33,4	20	0,718	211	34,0	20	0,904
182	26,2	18	0,483	212	29,0	20	0,620
183	32,2	18	0,663	213	33,4	20	0,861
184	31,3	20	0,728	214	37,2	20	1,059
185	42,4	20	1,146	215	25,4	18	0,488
186	34,0	20	0,848	216	37,0	18	0,960
187	33,3	22	0,857	217	36,3	20	0,886
188	25,0	18	0,415	218	38,3	20	1,222
189	27,3	20	0,546	219	32,4	20	0,876
190	27,0	18	0,485	220	44,4	20	1,406
191	34,0	20	0,853	221	33,2	20	0,864
192	36,2	18	0,784	222	50,8	26	2,338
193	40,6	20	1,004	223	34,3	20	0,934
194	28,2	20	0,684	224	32,4	20	0,805
195	24,3	18	0,420	225	36,0	22	1,110
196	27,3	18	0,615	226	31,1	22	0,860
197	27,1	16	0,423	227	26,2	16	0,428
198	22,3	16	0,349	228	27,6	18	0,416
199	33,0	20	0,774	229	30,2	18	0,637
200	25,3	18	0,462	230	31,3	20	0,804
201	28,2	18	0,592	231	32,4	20	0,756
202	30,0	16	0,504	232	33,4	22	0,972
203	23,1	14	0,342	233	32,1	18	0,602
204	33,1	20	0,850	234	33,4	20	0,862
205	27,4	20	0,595	235	27,3	18	0,496
206	30,1	18	0,663	236	32,0	20	0,784
207	30,2	18	0,650	237	29,2	18	0,514
208	27,2	18	0,514	238	38,2	20	1,124
209	37,0	18	0,771	239	37,2	22	1,164
210	40,3	20	1,259	240	26,1	18	0,292

(continuação).

Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)	Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)
241	34,2	20	0,943	271	24,4	18	0,435
242	33,1	20	0,799	272	17,2	8	0,125
243	39,1	20	1,014	273	26,0	18	0,422
244	25,6	16	0,385	274	33,1	18	0,659
245	30,3	18	0,568	275	30,1	20	0,645
246	27,2	16	0,440	276	26,3	16	0,362
247	26,0	16	0,419	277	35,1	20	0,802
248	32,1	18	0,629	278	21,0	10	0,182
249	37,0	22	0,986	279	26,3	16	0,399
250	23,0	14	0,251	280	16,0	8	0,109
251	31,0	16	0,516	281	27,0	18	0,500
252	20,0	16	0,264	282	31,1	20	0,597
253	20,2	10	0,166	283	34,4	20	0,809
254	33,2	20	0,713	284	23,3	22	0,503
255	28,2	18	0,502	285	28,1	20	0,565
256	30,1	18	0,592	286	44,0	22	1,615
257	31,0	16	0,568	287	38,2	20	1,031
258	25,0	16	0,376	288	36,0	22	1,079
259	24,2	12	0,241	289	28,7	16	0,419
260	27,2	18	0,468	290	24,1	18	0,313
261	21,3	16	0,289	291	29,3	22	0,681
262	29,3	18	0,551	292	37,4	22	1,112
263	29,3	18	0,563	293	31,4	22	0,734
264	29,1	20	0,654	294	30,0	16	0,563
265	26,3	18	0,480	295	28,4	20	0,566
266	37,1	18	0,757	296	37,0	20	0,789
267	30,2	18	0,638	297	24,3	18	0,396
268	37,0	20	0,945	298	30,2	20	0,606
269	25,2	18	0,459	299	31,2	18	0,666
270	27,0	14	0,359	300	27,3	18	0,494

(continuação)

Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)	Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)
301	20,0	10	0,157	331	22,4	14	0,292
302	23,2	16	0,349	332	24,0	14	0,288
303	37,1	14	1,001	333	28,3	20	0,535
304	24,1	18	0,445	334	24,2	16	0,351
305	27,0	18	0,509	335	30,0	18	0,606
306	22,4	14	0,264	336	26,3	20	0,521
307	28,0	14	0,447	337	25,1	16	0,379
308	32,1	18	0,654	338	26,1	18	0,400
309	28,0	16	0,484	339	27,4	20	0,548
310	35,1	22	1,067	340	24,0	16	0,360
311	21,4	14	0,254	341	29,0	18	0,480
312	25,4	20	0,462	342	33,4	20	0,764
313	38,2	20	0,961	343	21,4	14	0,285
314	27,1	14	0,401	344	19,0	12	0,205
315	26,3	20	0,508	345	28,0	18	0,437
316	23,2	12	0,249	346	23,1	16	0,355
317	25,0	14	0,337	347	25,0	16	0,344
318	28,4	20	0,558	348	19,1	10	0,160
319	34,1	20	0,776	349	21,3	12	0,236
320	36,3	20	0,894	350	27,3	18	0,482
321	26,3	18	0,440	351	23,4	12	0,255
322	19,0	12	0,205	352	28,4	18	0,570
323	26,0	18	0,420	353	23,4	14	0,283
324	27,2	18	0,537	354	27,3	18	0,486
325	24,3	14	0,363	355	25,3	18	0,507
326	31,1	20	0,741	356	23,0	16	0,351
327	32,2	20	0,589	357	19,0	12	0,191
328	36,2	20	0,998	358	22,2	12	0,255
329	25,2	18	0,507	359	24,3	14	0,339
330	28,4	18	0,533	360	20,0	12	0,200

(continuação)

Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)	Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)
361	24,1	16	0,404	391	22,0	14	0,269
362	29,0	18	0,533	392	27,2	16	0,449
363	28,0	18	0,500	393	24,2	14	0,301
364	26,3	18	0,432	394	21,0	14	0,242
365	27,2	18	0,517	395	29,0	20	0,589
366	34,2	20	0,831	396	28,3	20	0,597
367	29,1	20	0,665	397	36,1	22	1,061
368	19,4	14	0,261	398	32,3	18	0,672
369	24,2	16	0,359	399	23,4	14	0,318
370	33,0	20	0,917	400	25,2	18	0,445
371	28,0	14	0,407	401	23,2	14	0,280
372	28,3	18	0,500	402	19,3	14	0,240
373	21,3	14	0,249	403	22,3	14	0,296
374	34,3	20	0,811	404	22,2	14	0,288
375	30,1	20	0,742	405	31,0	16	0,510
376	22,2	12	0,241	406	24,4	14	0,289
377	30,3	18	0,684	407	15,3	6	0,083
378	27,4	18	0,467	408	27,0	16	0,390
379	25,2	14	0,320	409	26,0	16	0,416
380	28,4	18	0,556	410	27,2	16	0,466
381	19,0	8	0,134	411	24,3	16	0,369
382	26,3	18	0,513	412	22,4	14	0,283
383	25,4	16	0,408	413	31,0	18	0,607
384	22,3	14	0,270	414	34,0	18	0,705
385	31,1	20	0,679	415	33,0	20	0,787
386	31,1	20	0,725	416	21,4	10	0,194
387	29,2	18	0,613	417	22,1	12	0,255
388	20,0	10	0,164	418	25,3	18	0,405
389	29,1	18	0,601	419	32,3	20	0,854
390	22,4	16	0,367	420	17,4	12	0,169

(continuação)

Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)	Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)
421	25,0	14	0,405	451	22,0	12	0,344
422	25,1	16	0,377	452	21,4	16	0,341
423	33,0	20	0,816	453	24,1	16	0,405
424	22,2	14	0,275	454	31,0	20	0,765
425	37,3	14	0,842	455	27,0	18	0,553
426	19,2	14	0,238	456	29,2	18	0,705
427	27,2	14	0,381	457	30,0	18	0,592
428	18,4	10	0,148	458	25,1	16	0,357
429	32,4	20	0,790	459	25,0	18	0,519
430	22,2	14	0,260	460	29,4	20	0,708
431	23,3	16	0,373	461	23,3	14	0,357
432	17,4	12	0,173	462	27,1	20	0,560
433	21,0	14	0,269	463	24,1	18	0,398
434	29,4	18	0,587	464	28,1	18	0,636
435	26,2	16	0,426	465	24,0	16	0,386
436	26,3	18	0,440	466	31,2	18	0,723
437	28,2	18	0,798	467	32,1	20	0,703
438	20,2	16	0,314	468	32,1	18	0,769
439	41,1	18	1,472	469	27,2	18	0,543
440	30,3	20	0,713	470	28,0	16	0,542
441	20,2	10	0,198	471	25,2	18	0,411
442	20,3	16	0,294	472	24,1	18	0,384
443	29,2	18	0,516	473	23,1	18	0,438
444	24,0	16	0,493	474	34,4	20	0,966
445	27,1	18	0,545	475	23,0	16	0,381
446	21,2	12	0,240	476	22,0	16	0,320
447	25,2	16	0,391	477	30,1	18	0,638
448	32,3	18	0,749	478	27,2	20	0,569
449	24,3	16	0,437	479	21,4	14	0,278
450	36,0	16	1,091	480	20,0	14	0,260

(continuação)

Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)	Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)
481	31,0	20	0,703	511	27,2	20	0,561
482	28,3	18	0,537	512	23,0	16	0,350
483	24,0	16	0,357	513	31,0	20	0,777
484	17,3	12	0,190	514	30,0	14	0,552
485	28,0	14	0,405	515	42,0	18	1,184
486	19,0	14	0,253	516	22,1	16	0,337
487	31,1	18	0,673	517	28,3	20	0,660
488	29,3	20	0,701	518	25,3	18	0,504
489	28,4	20	0,647	519	23,3	18	0,390
490	23,0	14	0,304	520	28,2	22	0,721
491	22,0	16	0,358	521	26,1	20	0,525
492	23,2	14	0,276	522	27,0	20	0,520
493	24,0	14	0,376	523	27,3	18	0,571
494	26,0	18	0,549	524	30,1	22	0,814
495	22,0	14	0,312	525	25,2	20	0,478
496	17,2	10	0,157	526	25,2	20	0,466
497	26,0	18	0,464	527	30,2	22	0,832
498	26,4	18	0,408	528	32,3	22	0,984
499	22,0	16	0,393	529	23,3	18	0,314
500	21,0	16	0,354	530	33,2	22	0,810
501	27,4	18	0,672	531	30,0	22	0,385
502	25,0	20	0,557	532	36,0	20	1,119
503	20,0	12	0,266	533	45,0	22	1,936
504	26,0	14	0,452	534	23,4	18	0,436
505	24,2	14	0,348	535	26,0	18	0,532
506	27,0	20	0,682	536	20,3	14	0,293
507	29,2	20	0,727	537	19,1	16	0,272
508	27,0	16	0,480	538	21,0	16	0,309
509	30,2	22	0,663	539	23,2	18	0,427
510	23,0	18	0,374	540	23,1	20	0,432

(continuação)

Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)	Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)
541	27,4	18	0,582	571	26,4	18	0,466
542	19,4	14	0,266	572	23,0	16	0,349
543	32,0	20	0,825	573	28,1	18	0,579
544	27,2	10	0,330	574	22,3	18	0,415
545	36,1	22	1,194	575	24,2	18	0,446
546	34,0	16	0,757	576	27,2	18	0,555
547	28,2	18	0,611	577	24,4	16	0,402
548	38,1	14	1,074	578	26,2	14	0,410
549	32,2	20	0,733	579	26,2	20	0,614
550	34,2	22	1,062	580	22,4	14	0,303
551	30,4	20	0,640	581	23,9	14	0,348
552	19,0	14	0,249	582	37,2	22	1,143
553	29,3	18	0,605	583	26,6	16	0,464
554	23,3	16	0,360	584	33,4	16	0,693
555	29,1	14	0,452	585	24,3	18	0,453
556	21,2	16	0,353	586	27,3	18	0,530
557	33,3	16	1,013	587	25,0	14	0,348
558	23,1	16	0,158	588	28,3	22	0,650
559	21,4	16	0,308	589	30,2	18	0,704
560	24,3	20	0,471	590	22,4	16	0,366
561	23,0	16	0,376	591	24,0	16	0,383
562	22,0	18	0,375	592	26,3	18	0,444
563	25,0	18	0,458	593	27,0	18	0,526
564	20,1	14	0,264	594	35,0	16	0,830
565	30,2	20	0,707	595	24,1	16	0,455
566	30,0	20	0,676	596	29,4	16	0,564
567	24,2	16	0,392	597	23,0	16	0,336
568	31,1	20	0,843	598	30,4	20	0,742
569	29,3	20	0,755	599	24,2	20	0,491
570	26,4	18	0,513	600	22,1	16	0,351

(continuação)

Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)	Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)
601	26,0	20	0,552	631	25,2	18	0,472
602	24,4	20	0,555	632	27,0	16	0,451
603	18,1	12	0,197	633	28,3	18	0,529
604	24,0	18	0,435	634	37,2	22	0,992
605	28,0	16	0,458	635	38,2	20	1,021
606	35,4	16	1,019	636	28,0	18	0,510
607	25,4	14	0,361	637	19,3	8	0,135
608	28,3	18	0,535	638	20,2	10	0,185
609	28,0	18	0,539	639	18,0	8	0,122
610	31,0	14	0,481	640	26,2	12	0,354
611	32,2	16	0,704	641	24,4	12	0,353
612	33,0	20	0,746	642	26,2	12	0,325
613	31,4	20	0,649	643	27,0	16	0,437
614	31,4	18	0,681	644	22,0	12	0,222
615	35,0	16	0,740	645	23,3	12	0,248
616	27,0	16	0,420	646	18,0	10	0,146
617	26,2	14	0,355	647	28,4	16	0,565
618	32,0	22	0,711	648	24,0	14	0,351
619	25,6	14	0,307	649	20,2	8	0,162
620	23,0	14	0,311	650	35,0	16	0,740
621	27,0	18	0,508	651	20,2	12	0,197
622	23,4	18	0,401	652	20,0	12	0,266
623	20,1	12	0,221	653	20,1	10	0,204
624	24,0	16	0,356	654	23,2	12	0,269
625	24,4	16	0,390	655	27,0	14	0,389
626	30,2	18	0,527	656	31,1	14	0,546
627	31,0	18	0,584	657	18,1	8	0,121
628	27,0	18	0,424	658	21,4	12	0,237
629	37,0	18	0,796	659	21,4	12	0,231
630	26,0	18	0,444	660	22,1	12	0,239

(continuação)

Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)	Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)
661	26,4	16	0,455	691	23,3	8	0,173
662	19,2	10	0,171	692	16,2	8	0,114
663	15,1	4	0,056	693	15,4	6	0,079
664	26,2	14	0,391	694	21,3	8	0,159
665	24,2	13	0,420	695	26,2	14	0,390
666	18,1	10	0,148	696	30,2	18	0,608
667	13,2	4	0,044	697	24,4	12	0,342
668	26,2	14	0,404	698	32,1	16	0,541
669	17,2	6	0,092	699	26,1	14	0,368
670	40,0	18	0,993	700	17,2	6	0,087
671	28,4	16	0,525	701	23,4	10	0,240
672	37,0	16	0,757	702	19,1	10	0,166
673	27,2	14	0,439	703	23,0	14	0,302
674	28,0	16	0,457	704	25,2	14	0,359
675	24,3	14	0,371	705	21,0	10	0,181
676	16,4	6	0,092	706	23,2	12	0,246
677	20,0	10	0,167	707	30,0	16	0,535
678	28,0	16	0,347	708	16,3	4	0,065
679	31,0	16	0,562	709	22,2	12	0,258
680	18,4	8	0,147	710	32,4	16	0,553
681	25,2	14	0,350	711	16,4	6	0,082
682	24,1	12	0,282	712	25,0	14	0,370
683	15,2	4	0,060	713	38,2	18	0,850
684	21,3	14	0,266	714	21,1	12	0,215
685	17,2	6	0,093	715	22,1	10	0,200
686	16,4	6	0,100	716	27,4	10	0,313
687	30,3	16	0,523	717	45,2	16	1,326
688	15,3	4	0,055	718	31,1	16	0,614
689	16,2	4	0,060	719	27,0	14	0,369
690	24,0	12	0,255	720	23,0	12	0,248

(continuação)

Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)	Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)
721	20,3	8	0,159	751	20,3	8	0,156
722	26,2	14	0,347	752	20,1	8	0,142
723	22,4	12	0,267	753	23,0	12	0,250
724	16,1	6	0,084	754	23,1	10	0,216
725	16,1	6	0,102	755	30,2	14	0,536
726	21,0	8	0,143	756	24,2	14	0,339
727	17,0	8	0,112	757	25,1	12	0,297
728	17,1	8	0,116	758	19,1	8	0,128
729	28,0	20	0,667	759	18,2	8	0,130
730	22,3	16	0,445	760	22,4	10	0,195
731	23,2	16	0,358	761	18,4	6	0,108
732	22,3	14	0,276	762	16,4	6	0,087
733	18,2	10	0,163	763	18,0	8	0,113
734	25,0	18	0,391	764	21,1	10	0,197
735	32,1	18	0,695	765	18,2	6	0,098
736	29,4	18	0,577	766	16,3	8	0,103
737	19,1	8	0,143	767	24,2	18	0,420
738	30,0	12	0,399	768	24,0	16	0,375
739	18,1	10	0,127	769	27,0	18	0,535
740	17,0	8	0,085	770	36,0	20	0,971
741	24,0	14	0,335	771	35,0	22	0,942
742	29,0	16	0,236	772	14,0	4	0,047
743	16,3	14	0,176	773	35,0	20	0,917
744	18,3	6	0,139	774	32,0	16	0,512
745	15,4	6	0,102	775	31,0	16	0,556
746	23,3	12	0,257	776	38,1	20	0,997
747	20,0	6	0,126	777	39,1	20	0,996
748	22,1	10	0,220	778	33,0	22	0,850
749	22,1	10	0,171	779	33,1	16	0,592
750	19,2	8	0,141	780	24,0	14	0,319

(continuação)

Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)	Árvore Número	D (cm)	H (m)	V (m ³)
781	35,1	20	0,849	790	44,7	22	1,577
782	26,2	20	0,658	791	39,7	26	1,585
783	32,0	20	0,777	792	40,6	26	1,606
784	32,0	20	0,819	793	42,4	24	1,872
785	28,0	16	0,474	794	49,2	26	2,652
786	24,0	14	0,297	795	45,0	26	2,010
787	36,3	20	0,926	796	44,6	24	1,914
788	29,0	18	0,465	797	41,1	24	1,626
789	49,0	24	2,097	798	46,2	26	2,220
790	44,7	22	1,577	799	48,2	24	1,812
791	39,7	26	1,585	800	42,0	22	1,506
792	40,6	26	1,606	801	42,0	22	1,505
793	42,4	24	1,872	802	39,6	22	1,264
794	49,2	26	2,652	803	47,4	24	2,018
795	45,0	26	2,010	804	43,4	24	1,700
796	44,6	24	1,914	805	39,7	22	1,387
797	41,1	24	1,626	806	49,8	22	2,223
798	46,2	26	2,220	807	41,5	22	1,460
				808	50,8	22	1,935
				809	47,8	22	2,115
				810	45,0	22	1,810
				811	50,2	24	2,300
				812	44,0	24	1,862
				813	43,0	26	1,604
				814	46,2	26	2,131
				815	45,4	24	1,558
				816	50,5	26	2,485

```

C   REGRESSAO MULTIPLA - PROGRAMA FORTRAN
      DIMENSION A(4,5),B(5),IP(5),IND(5,2),U(4)
      READ 2,M,N
      2 FORMAT (I5,I5)
      LL=1
      J=M+1
      DO 1 I=1,M
      DO 1 K=1,J
1     A(I,K)=0.
      Y=0.
      B(1)=1.
      DO 4 L=1,N
      DO 61 KK=2,J
61    READ 60,B(KK)
      IF(SFENSE SWITCH 1)300,301
300  B(2)=B(2)*B(2)*B(3)
      B(3)=B(4)
      B(4)=0.
      GO TO 302
301  DO 303 K=2,J
303  B(K)=LOG(B(K))
302  DO 3 I=1,M
      DO 3 K=1,J
      3 A(I,K)=A(I,K)+B(I)*B(K)
      4 Y=Y+B(J)*B(J)
      GO TO 227
228  DO 5 K=1,M
      P(K)=0.
      5 IP(K)=0.
      LL=2

```

```
DO 17 I=1,M
T=0.
DO 10 K=1,M
IF(IP(K)-1)6,10,6
6 DO 9 L=1,M
IF(IP(K)-1)7,9,201
7 IF(ABS(T)-ABS(A(K,L)))8,9,9
8 IL=K
IC=L
T=A(K,L)
9 CONTINUE
10 CONTINUE
IP(IC)=IP(IC)+1
IF(IL-IC)11,13,11
11 DO 12 LJ=1,M
T=A(IL,LJ)
A(IL,LJ)=A(IC,LJ)
12 A(IC,LJ)=T
13 IND(I,1)=IL
IND(I,2)=IC
B(I)=A(IC,IC)
A(IC,IC)=1
DO 14 LJ=1,M
14 A(IC,LJ)=A(IC,LJ)/B(I)
DO 17 LI=1,M
IF(LI-IC)15,17,15
15 T=A(LI,IC)
A(LI,IC)=0.
DO 16 L=1,M
16 A(LI,L)=A(LI,L)-A(IC,L)*T
```

```
17 CONTINUE
   DO 20 I=1,M
   L=M+1-I
   IF (IND(L,1)-IND(L,2))18,20,18
18 JL=IND(L,1)
   JC=IND(L,2)
   DO 19 K=1,M
   T=A(K,JL)
   A(K,JL)=A(K,JC)
   A(K,JC)=T
19 CONTINUE
20 CONTINUE
201 DO 21 I=1,M
   U(I)=0.
   DO 21 K=1,M
21 U(I)=U(I)+A(I,K)*A(K,J)
   R=0.
   GO TO 227
229 DO 22 K=1,M
22 R=R+U(K)*A(K,J)
   EME=M
   ENE=N
   S=Y-R
   T=Y-A(1,J)*A(1,J)/ENE
   R=T-S
   GLP=EME-1.
   GLS=ENE-EME
   GLT=ENE-1
   QS=S/GLS
   QP=R/GLP
```

```

F=QR/QS
PUNCH 32,R,QR,F
PUNCH 32,S,QS,T
R0=SQRT(R/T)
PUNCH 35,R0
DO 23 I=1,M
A(I,I)=A(I,I)*QS
B(I)=U(I)/SQRT(A(I,I))
23 PUNCH 37,I,U(I),A(I,I),B(I)
DO 24 I=1,M
L=I+1
IF(L-M)58,58,82
58 DO 24 K=L,M
A(I,K)=A(I,K)*QS
24 PUNCH 39,I,K,A(I,K)
82 STOP
227 DO 71 I=1,M
DO 71 K=1,M,3
71 PUNCH 73,A(I,K),A(I,K+1),A(I,K+2)
DO 72 I=1,M,3
72 PUNCH 73,A(I,J),A(I+1,J),A(I+2,J)
GO TO (228,229), LL
35 FORMAT (18HCORRELAÇÃO TOTAL =,F10.7/)
39 FORMAT (//2H (,I3.1H,,I3.1H),2X,E14.8)
32 FORMAT (3F18.7)
73 FORMAT (4E18.7)
37 FORMAT (I4,E18.7,E18.7,E18.7)
60 FORMAT (I77)
END

```


ERRATA

Pág.	Linha	
24	7	Em lugar de: $X' X \hat{\beta} = X' Y = 0$ Corrija-se: $X' X \hat{\beta} - X' Y = 0$
34	13	Em lugar de: $E \left[\sum (Z_i - \bar{Y})^2 \right] = E \sum \left[b x_i + (e_i - \bar{e})^2 \right]$ Corrija-se: $E \left[\sum (Y_i - \bar{Y})^2 \right] = E \sum \left[b x_i + (e_i - \bar{e}) \right]^2$
35	8	Suprimir a fórmula: $E \left[\frac{(\sum x Y)^2}{\sum x^2} \right] = \frac{1}{\sum x^2} \cdot E \left[(b \sum x^2 + \sum x e)^2 \right]$
37	8	Em lugar de: $E (\hat{\beta}' X' Y) = E \left[Y' X \hat{\beta} \right] = E \left[Y' X S^{-1} X Y \right]$ Corrija-se: $E (\hat{\beta}' X' Y) = E \left[Y' X S^{-1} X' Y \right]$
39	8	Em lugar de: autores Corrija-se: anteriores
47	16	Em lugar de: quanto Corrija-se: quando
67	18	Em lugar de: 3,1 Corrija-se: 31,1