

CONSTRUÇÃO DE FRAÇÕES DE FATORIAIS DE RESOLUÇÃO III

ELENICE BIAZI

(Bacharel em Matemática)

Orientador: Prof. Dr. CÁSSIO ROBERTO DE MELO GODOI

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia - Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Fevereiro - 1985

A meus pais

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Doutor Cássio Roberto de Melo Godoi, pela sugestão e orientação precisa dessa dissertação e pela amizade.

- Aos Professores Doutores Humberto de Campos e Dilermando Perecin, pelo incentivo, consideração e sugestões oportunas.

- Aos meus pais, pela confiança constante, demonstrada com afeto, dedicação e estímulo.

- Aos meus irmãos Carlos e Vanda, pela convivência amiga e incentivadora, e ainda, à Vanda, pelas valiosas observações gramaticais na redação dessa dissertação.

- Ao Alencastro, pelo apoio e estímulo.

- Aos amigos do ICMSC/USP, ESALQ/USP e IPEA/UNESP, que de uma maneira ou de outra colaboraram para a realização dessa dissertação.

A Denize Valério, pela eficiência no trabalho de datilografia e a Akemi Shimazaki, pela elaboração de tabelas e gráficos.

3.2. Confundimento em experimentos fatoriais	42
3.2.1. Confundimentos em experimentos fatoriais 2^n . . .	43
3.2.1.1. Modelos e estimação	43
3.2.1.2. Confundimento de delineamentos 2^n em 2^k blocos com 2^{n-k} unidades .	51
3.2.2. Confundimento nos delineamentos da série 3^n	58
3.2.3. Confundimento no sistema p^n . .	59
3.2.3.1. Planejamento de sistemas de confundi- mento em blocos com p^s elementos	60
3.2.3.2. A enumeração dos sistemas de con- fundimento em p^n	63
3.2.3.3. Elementos dos blocos .	68
3.2.4. Sistemas de confundimento em condições especiais	71
3.2.4.1. Os teoremas de Fisher	72
3.3. Os fatoriais fracionados	74
3.3.1. Os fatoriais fracionados 2^{n-k}	74
3.3.1.1. Descrição de bloco principal, fra- ção 2^{n-k} , conjunto de aliados	74
3.3.1.2. Classificação de frações	81
3.3.1.3. Algumas frações 2^{n-k} . Frações sa- turadas	82
3.3.1.4. Análise de frações 2^{n-k}	87
3.3.2. Fatoriais fracionados das séries 3^n	87

3.3.3. Extensão do teorema de Fisher	91
4. CORPOS DE GALOIS.	92
4.1. Corpos finitos	92
4.2. Corpos de Galois	95
4.3. Uso da teoria de Galois	100
5. PLANOS DE EFEITOS PRINCIPAIS	111
5.1. O uso de delineamentos reduzidos	111
5.1.1. Delineamentos ótimos e eficientes	111
5.1.2. Os planos de efeitos principais na série 2^n	116
5.2. Planos para experimentos fatoriais simétricos 2^k	121
5.2.1. Construção de um fatorial 2_{III}^{k-m}	122
5.2.2. Aplicação numérica	127
5.2.3. Construção da fração 2_{III}^{k-m} quando o delinea- mento não está saturado	134
5.3. Delineamentos ótimos de Plackett e Burman	137
5.3.1. Existência de matrizes de delineamentos ótimos	138
5.3.1.1. Definições e teoremas para cons- truir as matrizes de Hadamard	139
5.3.1.2. Método de construção das matrizes de Hadamard	142

5.3.2. Procedimento experimental	147
5.3.2.1. Matriz cíclica	147
5.3.2.2. Aplicação numérica	151
5.3.3. Algumas linhas dos delineamentos de Plackett e Burman	152
5.3.4. O caso particular $N = 92$	154
5.4. Planos para experimentos fatoriais simétricos s^n	155
5.4.1. Construção de um plano de efeitos princi- pais s^{n-k}	157
5.5. Planos de efeitos principais e arranjos ortogonais de resistência dois	159
5.5.1. Arranjos ortogonais de resistência dois	159
5.5.2. Construção de planos de efeitos principais para $\left[\frac{2(s^n-1)}{(s-1)} - 1 \right]$ fatores em $2s^n$ combinações de tratamentos	161
5.5.2.1. Notações e definições preliminares	161
5.5.2.2. Desenvolvimento de um exemplo ilus- trativo com mais algumas definições	163
5.5.2.3. Outros arranjos ortogonais de re- sistência dois	172
5.6. Planos de efeitos principais para experimentos fa- toriais assimétricos	173

5.6.1. Condição para que as frequências sejam proporcionais	173
5.6.2. Planos para experimentos fatoriais assimétricos	175
5.6.2.1. Descrição do método de colapso	175
5.6.2.2. Ilustração do método de colapso	176
5.6.2.3. Outras cadeias de correspondência.	179
5.6.2.4. Análise de um plano de efeitos principais para fatoriais assimétricos .	182
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	187
7. BIBLIOGRAFIA	191

CONSTRUÇÃO DE FRAÇÕES DE FATORIAIS DE RESOLUÇÃO III

Autor: Elenice Biazi

Orientador: Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi

R E S U M O

Este estudo apresenta os elementos para se obter a análise de um experimento fatorial, em que é feita uma redução no número de parcelas experimentais.

É apresentado um desenvolvimento teórico sobre experimentos fatoriais, confundimento em experimentos fatoriais, frações de fatoriais e teoria de Galois. Essas noções são necessárias para a apresentação de uma sistematização de alguns delineamentos apropriados para estudar efeitos principais.

É mostrado como confundir efeitos principais e interações com blocos nos fatoriais, e depois como confundir interações de ordem maior ou igual a dois, de forma conveniente. Esse confundimento é garantido pela existência de um teorema de Fisher. Por esse teorema toda interação na relação de identida-

de tem no mínimo três letras. Os planos que satisfazem essa condição são chamados de planos de resolução III.

São apresentados também os planos onde não é possível estabelecer uma relação de identidade, mas estimam efeitos principais. Estes são os delineamentos ótimos, os arranjos ortogonais de resistência dois e os planos de efeitos principais para experimentos fatoriais assimétricos.

É feita uma comparação entre os métodos destacando-se as vantagens e desvantagens, bem como a adequação de cada um. E também indicam-se outras formas de delineamento experimental que poderiam ser usadas como planos de efeitos principais.

CONSTRUCTION OF THE FRACTIONAL FACTORIAL OF RESOLUTION III

Author: Elenice Biazi

Adviser: Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi

S U M M A R Y

This study shows how to obtain the analysis of a factorial experiment, where a reduction in number of the treatment combinations is applied.

The study presents a theoretical development of factorial experiments, confounding in factorial experiments, fractional factorials and Galois's theory. These are necessary to present a systematic study of some of the experimental designs that are appropriate to understand the main effects.

It is shown how to confound the effects and interactions with blocks in the factorials, and then how to confound the interactions of the order greater than or equal to two, in a convenient form. This confounding is guaranteed by the existence of the Fisher's theorem. This theorem defines that

all interactions in relation to the identity have at least three letters. In order to satisfy this condition, the plans are called the Plans of Resolution III.

The study also presents the plans, when it is not possible to establish an identity relation, however they estimate main effects. These are the Optimum Factorial Designs, the Orthogonal Arrays of Strength Two and the Main-Effects Plans for Asymmetrical Factorial Experiments.

Different methods are compared showing mainly their advantages and disadvantages and then selecting the adequacy of each one. Also is indicated other forms of experimental designs that can be considered as main-effects plan.

1. INTRODUÇÃO

Em experimentação existem situações nas quais se deseja estudar, simultaneamente, muitos fatores diferentes. Para esses casos é necessária a utilização de um delineamento apropriado, de tal maneira que possibilite a estimação de todos os fatores envolvidos. Como obter esse delineamento? Uma resposta a essa questão pode ser dada pelo delineamento fatorial completo, onde os fatores são analisados em todas as combinações possíveis.

Entretanto, para se obter a análise de um experimento sem dificuldades, é necessário que o número de fatores não seja muito grande, pois, se isso acontecer, cada vez que se adicionar um fator o número de combinações aumentará muito de acordo com o número de níveis considerado. Assim, com um número grande de combinações de tratamentos, o experimento pode tornar-se irrealizável, pois deve ser levado em conta o custo de experimentação e a viabilidade de se fazer todas as medições.

Busca-se, então, uma alternativa viável para o delineamento fatorial completo. Quando o erro experimental é grande, ou quando se espera um efeito apreciável das interações de alta ordem, essa alternativa não existe. Contudo, frequentemente, o erro experimental e as interações de alta ordem são de mesma grandeza. Em tais casos, o delineamento fa

torial completo é desnecessário. Uma situação experimental alternativa para tais casos é o uso de delineamentos fatoriais fracionados.

Os delineamentos fatoriais fracionados são empregados nos casos em que se necessita ignorar efeitos de interações, usando apenas um pequeno número de parcelas. Esses delineamentos consistem em confundir os efeitos principais com efeitos de interações de menor interesse, todavia sem ignorar totalmente os efeitos destes últimos.

Os delineamentos fracionados são, por conveniência, divididos em tipos, de acordo com a ordem das interações confundidas. São considerados três tipos de delineamentos: de planejamento de resolução III, IV e V.

Neste estudo estão sendo considerados apenas os delineamentos de resolução III, que, em poucas palavras, são os delineamentos apropriados para estudar efeitos principais.

Não existe um procedimento geral único para reduzir um delineamento fatorial a um plano de resolução III. Muitos pesquisadores conseguiram métodos diferentes para planos de tal tipo, alguns em casos extremamente particulares.

Apresentamos uma sistematização de alguns planos de resolução III. São pesquisados também os planos de efeitos principais, arranjos ortogonais de resistência dois, e delineamentos ótimos, como métodos para obtenção da análise de efeitos principais. A apresentação do assunto tem finalidade didática.

tica procurando ser simples e objetiva.

Antes da descrição de tais métodos serao mencionadas algumas noções e notações de experimentos fatoriais, com fundamento e fatoriais fracionados, necessárias à condução do estudo.

A contribuição da teoria de Galois é muito extensa e, por isso está incluído neste trabalho um capítulo com as noções sobre essa teoria e suas aplicações.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Como este trabalho consiste em uma reunião de métodos, é indicada a seguir a fonte bibliográfica onde cada assunto discutido é tratado especificamente, e, às vezes, mais detalhadamente.

Começamos com YATES (1935), que, com seu artigo sobre experimentos complexos, descreve com detalhes o delineamento e a análise de experimentos fatoriais. Primeiramente ele descreve o sistema 2^3 e depois os sistemas 2^n e 3^n .

BOSE e KISHEN (1940) estudam o problema do confundimento em experimentos fatoriais simétricos s^m , onde s é um inteiro primo positivo ou uma potência de um primo e m qualquer inteiro positivo. Enunciam o princípio da interação generalizada no arranjo fatorial s^m , e usam este importante princípio na demonstração de um método geral para formar arranjos confundidos. Com esses arranjos é possível dividir $s^m - 1$ graus de liberdade, pertencentes aos efeitos principais e interações, em $(s^m - 1)/(s - 1)$ conjuntos de $(s - 1)$ graus de liberdade. Mostram que essa divisão é executada identificando as s^m combinações de tratamentos com os pontos da Geometria Euclidiana Finita $GE(m, p^n)$.

FISHER (1942) propõe o desenvolvimento da conexão de sistemas de confundimento com grupos Abelianos, para provar uma proposição geral que limita o tamanho mínimo do bloco

desejado ao número de fatores envolvidos e providencia, ainda, um catálogo de sistemas de confundimento até 15 fatores.

Também podem ser encontrados em FINNEY (1945), princípios de experimentos fatoriais fracionados, usando a teoria de grupos Abelianos, e com referências particulares aos sistemas 2^n e 3^n .

Ainda sobre fatoriais fracionados, KEMPTHORNE (1979) apresenta um método geral para examinar delineamentos p^n bem como um método para conseguir repetições fracionadas e confundimento para alguns tipos de experimentos fatoriais. Indica também a equivalência formal entre os dois tipos de redução de delineamento e discute as implicações desta equivalência.

BROWNLEE, KELLY e LORAINE (1948) apresentam arranjos de confundimento com fatores em 2 níveis. Ele seleciona o subgrupo de aliados e o subgrupo de confundimento e forma o bloco principal com os tratamentos cujos símbolos são ortogonais a ambos os subgrupos. Os blocos subsequentes podem ser obtidos multiplicando o bloco principal por símbolos ortogonais ao do subgrupo que não ocorreu previamente.

RAGHAVARAO (1971), em livro texto, estuda o confundimento de experimentos fatoriais simétricos e resultados relacionados. Estuda o caso de experimentos fatoriais da forma $p^m \times q^n$ onde podemos confundir r efeitos e interações de fatores independentes em q níveis, em blocos de tamanho $p^{m-r} q^{n-s}$.

Ele mostra que, para os experimentos fatoriais assimétricos, ocorre perda relativa de informação nas interações afetadas.

ZONTA (1980) desenvolve um método sistemático de confundimento para os fatoriais da série 2^n e através de duas propriedades deste, estendeu o estudo para as séries 3^n , 3×2^n , $3^2 \times 2^n$ e $3^3 \times 2^n$.

Em livro texto, KEMPTHORNE (1979), edição original de 1952, apresenta conceitos fundamentais para descrição e análise de experimentos fatoriais, mostrando os fatoriais 2^n , 3^n e s^n . Para os fatoriais s^n é encontrado o arranjo de n fatores, cada um com p^m níveis em blocos com $(p^m)^s$, baseado num caso especial da teoria de grupos de Galois.

Sobre a teoria algébrica informamos que, em CAR MICHAEL (1956), são encontradas noções sobre corpos finitos, corpos de Galois e existência de corpos de Galois.

Sobre os planos de efeitos principais, HOTELLING (1944a) apresenta alguns aperfeiçoamentos na técnica experimental de delineamentos de pesagens (do inglês, weighing designs), proposta inicialmente por YATES (1937), que consiste em pesar grupos de p objetos, N vezes, $p \leq N$. Mostrou que os pesos individuais podem ser determinados com mais segurança, fazendo pesagens dos objetos em combinações, do que pesando cada um separadamente.

KISHEN (1945), MOOD (1946), RAGHAVARAO (1959), YANG (1966 e 68), MARGOLIN (1969) também discutem os princípios básicos da teoria dos delineamentos de experimentos, que são eficientes para estimar os pesos desconhecidos reais de p objetos através das médias de um número N de pesagens, previamente estabelecido.

PLACKETT e BURMAN (1946) fazem uma seleção de N parcelas do delineamento fatorial completo, possibilitando a estimação de efeitos principais com precisão máxima, como se a atenção estivesse concentrada na variação de um único componente através de N parcelas. Esse delineamento reduzido com N parcelas, permite a exploração de $k = N-1$ fatores, onde N é um múltiplo de quatro. Eles apresentam as matrizes de delineamento para $4 < N \leq 100$, exceto para o caso isolado $N = 92$.

BAUMERT, GOLOMB e HALL (1962) resolvem o caso $N = 92$ para os delineamentos de PLACKETT e BURMAN (1946).

BOX e HUNTER (1961), em amplo estudo sobre fatoriais propõem a divisão dos delineamentos fracionados em classes especiais, às quais dão o nome de Resolução III, IV e V e descrevem um método para obtenção de efeitos principais para os delineamentos fracionados 2^{k-p} .

ADDELMAN e KEMPTHORNE (1961) apresentam um método de construção de planos de efeitos principais para experimentos fatoriais simétricos que podem distribuir $[2(s^n-1)/(s-1) - 1]$ fatores, cada um em $s = p^m$ níveis, onde p é um

primo, com $2s^n$ combinações de tratamentos. Como planos de efeitos principais são arranjos ortogonais de resistência dois, o método apresentado permite a construção de arranjos ortogonais $(2s^n, 2(s^n - 1)/(s - 1) - 1, s, 2)$.

RAO (1947) é quem primeiro introduz o conceito de arranjos ortogonais.

DANIEL (1962) apresenta noções sobre elementos de confundimento e classifica os planos experimentais pelo seu grau mínimo de confundimento. Assim, planos que confundem efeitos principais com interações duplas são chamados de planos de 3 letras, desde que a menor interação no seu subgrupo de aliados (do latim, "alias") contenha 3 letras.

ADDELMAN (1962) descreve planos para experimentos fatorais assimétricos que fornecem estimadores não correlacionados de todos os efeitos principais quando as interações estão desprezadas. A construção desses planos é baseada no princípio das frequências proporcionais dos níveis dos fatores.

Em JOHN (1971), livro texto, podemos encontrar noções gerais sobre planos de efeitos principais, planos de resolução III e arranjos ortogonais de resistência dois. Ele apresenta o modelo para estimação de efeitos principais em de lineamentos reduzidos e orienta a análise desse tipo de experimento.

3. CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE EXPERIMENTOS FATORAIS

3.1. Experimentos fatorais completos

Os experimentos fatorais são usados quando temos fatores diferentes influenciando sobre uma característica em estudo e desejamos testar as diferentes combinações desses fatores em vários níveis.

Um experimento fatorial com n fatores é representado assim

onde s_i , $i = 1, 2, \dots, n$, representa o número de níveis com que o i -ésimo fator é experimentado.

O número de combinações de tratamentos é igual a $s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_n$, e são distribuídos $s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_n - 1$ graus de liberdade entre elas.

Se $s_1 = s_2 = \dots = s_n$ o experimento é simétrico e é chamado de fatorial s^n . Caso contrário o experimento é assimétrico.

Em experimentos fatoriais a soma de quadrados de tratamentos pode ser desmembrada segundo contrastes ortogonais, cada um com um único grau de liberdade, correspondentes aos efeitos principais e interações de todos os n fatores.

Um contraste representa um efeito principal do

i -ésimo fator se, os coeficientes da função linear, que o representa, dependem somente dos níveis deste i -ésimo fator e tomado sobre todos os demais fatores. Existem $s_i - 1$ contrastes ortogonais representando o efeito principal do i -ésimo fator.

Um contraste representa uma interação de dois fatores i e j (ou de 1.^a ordem) se:

- a) os coeficientes da função linear que representa o contraste dependem somente dos níveis dos fatores i e j ;
- b) o contraste é ortogonal a qualquer contraste representando o efeito principal dos fatores i e j .

Existem $(s_i - 1)(s_j - 1)$ contrastes ortogonais representando a interação dupla do i -ésimo e j -ésimo fatores.

Por indução, dizemos que um contraste pertence à interação de $(r - 1)$.^a ordem de r fatores, digamos i_1^0, \dots, i_r^0 se:

- a) os coeficientes da função linear que representa o contraste dependem somente dos níveis dos fatores i_1, i_2, \dots, i_r ;
- b) o contraste é ortogonal a todos os contrastes pertencendo a todos os possíveis efeitos principais e interações dos fatores. Podemos dizer que existem

contrastes ortogonais representando a interação de r fatores i_1, i_2, \dots, i_r .

Mostraremos agora mais alguns conceitos aplicados a níveis particulares e, ao final, será feita a generalização desses conceitos para a forma geral de experimentos fatoriais.

3.1.1. Séries de fatoriais 2^n

3.1.1.1. Modelo e estimação

Consideremos um experimento com 2 fatores A e B em 2 níveis (que podem ser inferior e superior, ou ausência e presença). Temos, neste caso, um experimento fatorial simétrico com $s = 2$ e $n = 2$. As combinações de tratamento que podem ser obtidas, são:

(1), a, b e ab

(1): indica que os dois fatores estão no nível inferior

a : indica que o fator A está no nível superior e o fator B está no nível inferior

e assim por diante.

Também é usada a notação (1), a, b e ab para indicar a média das observações tomadas nas respectivas combinações de tratamento.

Existem r observações em cada combinação de níveis de A e de B. Assim, para esse caso, um modelo será:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk} \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, \quad 1 < k < r$$

sendo

Y_{ijk} : a k-ésima observação no i-ésimo nível de A e j-ésimo nível de B

μ : média geral

α_i : efeito principal do i-ésimo nível de A

β_j : efeito principal do j-ésimo nível de B

$(\alpha\beta)_{ij}$: termo interação

e_{ijk} : termo erro

r : número de repetições

O modelo pode ser escrito na forma reparametrizada

$$Y = X\theta + E$$

onde

Y : vetor com $4r$ linhas

X : matriz de delineamento com $4r$ linhas e 4 colunas

θ : vetor de 4 parâmetros

E : vetor de erros aleatórios

Temos

	B_0	B_1
A_0	$y_{11\cdot}$	$y_{12\cdot}$
A_1	$y_{21\cdot}$	$y_{22\cdot}$

com k repetições, isto é
 $1 \leq k \leq r$

y_{ij} representa o total de
 observações no i -ésimo
 nível de A e j -ésimo
 nível de B

Escrevendo a matriz de delineamento X e o vetor de obser-
 vações Y

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mu & \alpha & \beta & \alpha\beta \\ +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{array} \end{array} \quad Y = \begin{array}{c} \begin{array}{c} y_{111} \\ y_{112} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{11r} \\ y_{212} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{21r} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{12r} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{22r} \end{array} \end{array}$$

Na estimação de mínimos quadrados dos parâmetros chegamos às equações normais.

$$X'Y = X'X\theta$$

A matriz $X'X$ tem posto 4

$$X'X = \begin{vmatrix} 4r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4r \end{vmatrix} \quad X'Y = \begin{vmatrix} Y_{\dots} \\ Y_{21.} + Y_{22.} - Y_{11.} - Y_{12.} \\ Y_{12.} + Y_{22.} - Y_{11.} - Y_{21.} \\ Y_{11.} + Y_{22.} - Y_{21.} - Y_{12.} \end{vmatrix}$$

$$E(\bar{y}_{\dots}) = \mu$$

portanto $\hat{\mu} = \bar{y}_{\dots}$

$$E(Y_{21.} + Y_{22.} - Y_{11.} - Y_{12.}) = 2r\mu + 2r\alpha - 2r\mu + 2r\alpha = 4r\alpha$$

$$\frac{Y_{21.} + Y_{22.} - Y_{11.} - Y_{12.}}{r} = 4\hat{\alpha}$$

$$a + ab - (1) - b = 4\hat{\alpha}$$

A expressão $ab + a - b - (1)$ é chamada de con
traste \hat{A}

$$E(Y_{12.} + Y_{22.} - Y_{11.} - Y_{21.}) = 4r\beta$$

$$\frac{Y_{12.} + Y_{22.} - Y_{11.} - Y_{21.}}{r} = 4\hat{\beta}$$

$$b + ab - (1) - a = 4\hat{\beta}$$

A expressão $ab - a + b - (1)$ é chamada de contraste \hat{B} .

$$Y_{11.} + Y_{22.} - Y_{11.} - Y_{12.} = 4(\hat{\alpha\beta})$$

$$(1) + ab - a - b = 4\hat{\alpha\beta}$$

A expressão $ab - a - b + (1)$ é chamada de contraste AB .

Simbolicamente, os contrastes podem ser escritos

$$(a - 1)(b + 1) = \hat{A}$$

$$(a + 1)(b - 1) = \hat{B}$$

$$(a - 1)(b - 1) = AB$$

Estes três contrastes são mutuamente ortogonais.

Uma forma alternativa para escrever o modelo é associar os fatores A e B a duas coordenadas: X_1 e X_2 .

X_1 : tem o valor +1 quando A está no nível superior

X_1 : tem o valor -1 quando A está no nível inferior.

Analogamente

$X_2 = +1$ para o maior B

$X_2 = -1$ para o menor B

As quatro combinações de tratamentos são, portanto

$(-1, -1)$; $(+1, -1)$; $(-1, +1)$; $(+1, +1)$.

E podemos escrever o novo modelo

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{12} X_1 X_2 + e_{ij}$$

sendo $\beta_0 = \mu$, $\beta_1 = \alpha$, $\beta_2 = \beta$ e $\beta_{12} = (\alpha\beta)$

Para 3 fatores A, B e C (sem repetição)

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{ijk} \quad (2)$$

e, procedendo como para o caso de dois fatores podemos chegar a

$$8\hat{\mu} = abc + ab + ac + bc + a + b + c + (1)$$

$$8\hat{\alpha} = abc + ab + ac - bc - a - b + c + (1)$$

$$8(\hat{\alpha}\beta) = abc + ab - ac - bc - a - b + c + (1)$$

que podem ser escritas simbolicamente como

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1), (a - 1)(b + 1)(c + 1) \text{ e } (a - 1)(b - 1)(c + 1)$$

Os oito termos interação $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ têm o mesmo valor absoluto. Se eles não são todos nulos, quatro deles são positivos e os outros quatro são negativos.

A restrição

$$\sum_i \sum_j (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = \sum_i \sum_k (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = \sum_j \sum_k (\alpha\beta\gamma)_{ijk} =$$

nos leva a

$$\begin{aligned} (\alpha\beta\gamma)_{222} &= -(\alpha\beta\gamma)_{221} = -(\alpha\beta\gamma)_{212} = -(\alpha\beta\gamma)_{122} = (\alpha\beta\gamma)_{211} = \\ &= (\alpha\beta\gamma)_{121} = (\alpha\beta\gamma)_{112} = -(\alpha\beta\gamma)_{111} = (\alpha\beta\gamma) \end{aligned}$$

portanto

$$8(\alpha\beta\gamma) = abc - bc - ac - ab + a + b + c - (1)$$

Alternativamente, podemos escrever o modelo como

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_{13} X_1 X_3 + \beta_{23} X_2 X_3 + \beta_{123} X_1 X_2 X_3$$

Então

$$\begin{aligned} 8\beta_{123} &= \sum (\text{valor das observações onde } X_1 X_2 X_3 = 1) - \\ &\quad - \sum (\text{valor das observações onde } X_1 X_2 X_3 = -1) = 8(\alpha\beta\gamma) \end{aligned}$$

Simbolicamente, temos:

$$8(\sigma\beta\gamma) = 8\beta_{123} = (a - 1)(b - 1)(c - 1)$$

De uma forma geral, os efeitos e interações num delineamento 2^n podem ser representados por

$$\bar{x} = r^{-1} 2^{-(n-1)} (a + 1)(b + 1)(c + 1)$$

onde r é o número de repetições de cada combinação de tratamentos e o sinal entre parênteses é positivo se a letra maiúscula correspondente não está contida em X e negativo se está contida em X .

3.1.1.2. A forma geral de apresentar delineamentos 2^n

Nesse sistema são testadas todas as combinações de n fatores, cada um em dois níveis. A totalidade das combinações de tratamentos pode ser representada geometricamente num sistema de coordenadas n -dimensional de comprimento unitário. Tomando os n fatores e n eixos mutuamente ortogonais, x_1, x_2, \dots, x_n , teremos o ponto $(0, 0, 0, \dots, 0)$ como sendo o tratamento controle; $(1, 0, 0, \dots, 0)$ o primeiro fator no nível superior e todos os outros fatores no nível mais baixo, e assim por diante.

Por exemplo, o fatorial 2^3 , com os fatores A, B e C representados, respectivamente, nos eixos x_1, x_2, x_3 .

$$\begin{array}{c} x_2 \\ | \\ (0.1.0) \end{array}$$

$$(1.0.1)$$

O efeito do tratamento A é a diferença das médias dos pontos que contêm x_1 e as médias dos pontos que não contêm x_1 ou seja, é a diferença entre a média dos pontos que estão no plano $x_1 = 1$ e a média daqueles que estão no plano $x_1 = 0$. A interação de A e B é a diferença entre as médias dos pontos representados por $x_1 = 1, x_2 = 1$ ou $x_1 = 0, x_2 = 0$ e aqueles representados por $x_1 = 0, x_2 = 1$ e $x_1 = 1, x_2 = 0$.

Também podemos escrever os efeitos e interações como equações algébricas, cujas operações obedecem à aritmética modular, a qual será explicada mais adiante. Assim, a interação de A e B é a diferença entre as médias dos pontos representados por

$$x_1 + x_2 = 0 \pmod{2}$$

e aqueles para os quais

$$x_1 + x_2 = 1 \pmod{2}$$

Analogamente, a interação tripla de A, B e C é a diferença entre as médias dos pontos para os quais

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \pmod{2}$$

e aqueles para os quais

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \pmod{2}$$

Este processo pode ser continuado até a interação de A_1, A_2, \dots, A_n que é a diferença entre a média dos pontos para os quais

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 0 \pmod{2}$$

e a média dos pontos para os quais

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \pmod{2}$$

3.1.1.3. A análise de experimentos fatoriais 2^n

Em geral, num experimento 2^n com r repetições, um efeito ou interação X é estimado pela média de $r2^{n-1}$ observações menos a média de $r2^{n-1}$ observações. Então, a variância desse efeito é dada por

$$\text{Var}(\bar{X}) = \left(\frac{1}{r2^{n-1}} + \frac{1}{r2^{n-1}} \right) \sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{r2^{n-2}}$$

A tabela de análise de variância é constituída as
 sim:

Fonte da Variação	G. L.
Repetições (Blocos)	$r - 1$
Tratamentos	$2^n - 1$
Efeitos Principais	1, $\overset{n}{(1)}$ linhas
Interações de 2 fatores	1, $\overset{n}{(2)}$ linhas
.	.
.	.
.	.
Interações de n fatores	1, $\overset{n}{(n)}$ linha
Repetição x Tratamentos	$(r - 1)(2^n - 1)$
Total	$r2^n - 1$

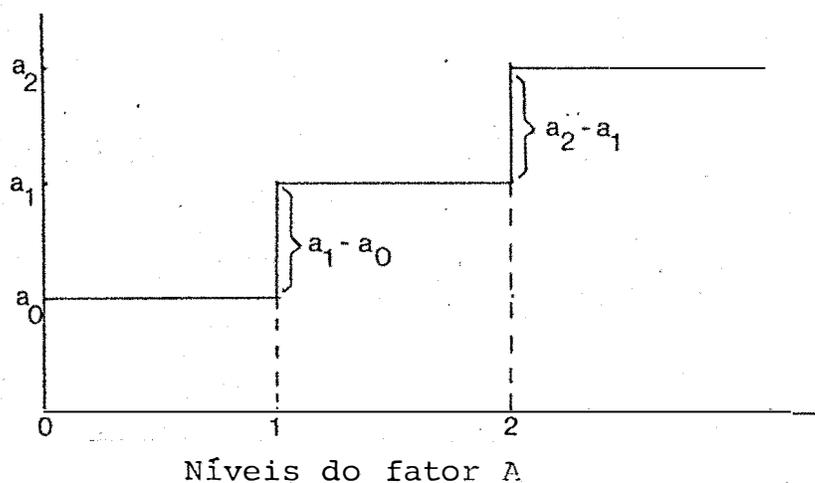
Para calcular os estimadores dos efeitos e suas somas de quadrados correspondentes para o fatorial geral 2^n , é usado um procedimento sistemático, denominado Procedimento

de Yates. A descrição do método não será feita aqui e pode ser encontrada num boletim^(*) referente a um seminário por nós apresentado.

3.1.2. Séries de fatoriais 3^n

3.1.2.1. Efeitos principais e interações

Vamos considerar, inicialmente, que estamos tratando com fatores quantitativos e os níveis igualmente espaçados 0, 1, 2 correspondam aos níveis de um fator. Supondo que os dados estejam representados num gráfico como abaixo



(*) BIAZI, E. - Procedimento de Yates para Ensaios Fatoriais - Seminário apresentado em 1982 no Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ - USP - Piracicaba.

Existem duas reações para um mesmo estímulo do fator, $a_1 - a_0$ do nível 0 para o nível 1 e $a_2 - a_1$ do nível 1 para o nível 2. Podemos tomar a soma destas como o efeito total do fator, ou seja

$$(a_2 - a_1) + (a_1 - a_0) = 2A_L$$

$$\frac{1}{2}(a_2 - a_0) = A_L \quad (\text{efeito linear médio de A})$$

Como uma medida da diminuição da reação quando o nível cresce, podemos tomar

$$(a_2 - a_1) - (a_1 - a_0) = 2A_Q$$

$$\frac{1}{2}(a_2 - 2a_1 + a_0) = A_Q \quad (\text{efeito quadrático médio de A})$$

- Interações

Considerando agora dois fatores A e B, cada um em 3 níveis 0, 1, 2. A interação desses fatores é a interação de uma tabela 3x3.

		A		
		0	1	2
B	0	00	01	02
	1	10	11	12
	2	20	21	22

Temos $(3 - 1)(3 - 1) = 4$ graus de liberdade para contrastes. Uma das mais úteis subdivisões em contrastes com um único grau de liberdade cada um é

$$\hat{A}_{LL}^B = \frac{1}{2}(a_2 - a_0)(b_2 - b_0) = \frac{1}{2}(a_2b_2 - a_0b_2 - a_2b_0 + a_0b_0)$$

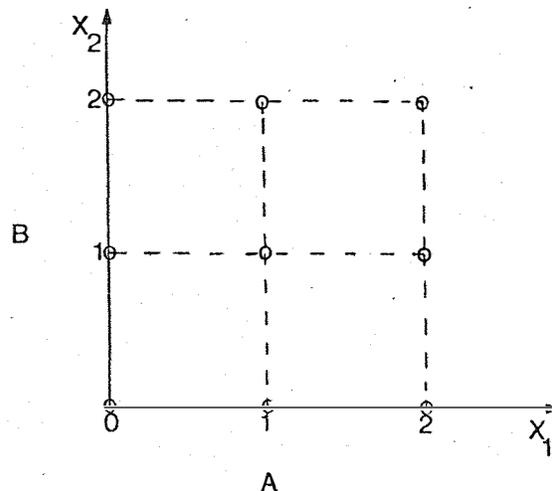
$$\hat{A}_{QL}^B = \frac{1}{4}(a_2 - 2a_1 + a_0)(b_2 - b_0) = \frac{1}{4}(a_2b_2 - a_2b_0 - 2a_1b_2 + 2a_1b_0 + a_0b_2 - a_0b_0)$$

$$\hat{A}_{LQ}^B = \frac{1}{4}(a_2 - a_0)(b_2 - 2b_1 + b_0) = \frac{1}{4}(a_2b_2 - a_2b_0 - 2a_2b_1 + 2a_0b_1 + a_2b_2 + a_2b_0)$$

$$\hat{A}_{QQ}^B = \frac{1}{8}(a_2 - 2a_1 + a_0)(b_2 - 2b_1 + b_0) =$$

$$= \frac{1}{8}(a_2b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_0 - 2a_1b_2 + 4a_1b_1 - 2a_1b_0 + a_0b_2 - 2a_0b_1 + a_0b_0)$$

Representando o fatorial 3^2 , com os fatores A e B num sistema com dois eixos ortogonais X_1 e X_2 .



Quadro de contrastes do experimento fatorial 3^2

A	B		A_L	A_Q	B_L	B_Q	$A_L B_L$	$A_L B_Q$	$A_Q B_L$	$A_Q B_Q$
0	0	(1)	-	+	-	+	+	-	-	+
0	1	b	-	+		-2		+2		-2
0	2	b_2	-	+	+	+	-	-	+	+
1	0	a		-2	-	+			+2	-2
1	1	ab		-2		-2				+4
1	2	ab_2		-2	+	+			-2	-2
2	0	a_2	+	+	-	+	-	-	-	+
2	1	$a_2 b$	+	+		-2		-2		-2
2	2	$a_2 b_2$	+	+	+	+	+	+	+	+

A pode ser decomposto em:

$$\hat{A}_L = \frac{1}{3} [(\text{soma de todas as combinações de tratamentos para as quais } X_1 = 2, \text{ mod } 3) - (\text{soma de todas as combinações de tratamentos para as quais } X_1 = 0, \text{ mod } 3)]$$

$$\hat{A}_Q = \frac{1}{6} [(\text{soma de todas as combinações de tratamentos para as quais } X_1 = 2, \text{ mod } 3) - 2(\text{soma de todas as combinações de tratamentos para as quais } X_1 = 1, \text{ mod } 3) + (\text{soma de todas as combinações de tratamentos para as quais } X_1 = 0, \text{ mod } 3)].$$

Os 2 graus de liberdade correspondentes ao efeito A e interações AB e AB^2 são dados pelos 3 conjuntos de combinações de tratamentos a seguir.

Efeito A

	A_0	A_1	A_2
	$X_1 = 0$	$X_1 = 1$	$X_1 = 2$
	0 0	1 0	2 0
	0 1	1 1	2 1
	0 2	1 2	2 2

Interação AB

	AB_0	AB_1	AB_2
	$X_1 + X_2 = 0$	$X_1 + X_2 = 1$	$X_1 + X_2 = 2$
	0 0	0 1	1 1
	1 2	1 0	0 2
	2 1	2 2	2 0

Interação AB^2

	AB_0^2	AB_1^2	AB_2^2
	$X_1 + 2X_2 = 0$	$X_1 + 2X_1 = 1$	$X_1 + 2X_2 = 2$
	0 0	0 2	0 1
	1 1	1 0	1 2
	2 2	2 1	2 0

Agora, vejamos se tivéssemos especificado os contrastes.

$$BA : X_2 + X_1 = 0, 1, 2 \pmod{3}$$

$$A^2B : 2X_1 + X_2 = 0, 1, 2 \pmod{3}$$

$$BA^2 : X_2 + 2X_1 = 0, 1, 2 \pmod{3}$$

Mas as soluções da equação

$$X_2 + 2X_1 = 0 \pmod{3}$$

são as mesmas da equação

$$2(X_2 + 2X_1) = 0 \pmod{3}$$

$$\text{ou } 2X_2 + 4X_1 = 0 \pmod{3}$$

$$\text{ou } X_1 + 2X_2 = 0 \pmod{3}$$

Analogamente, as soluções das equações

$$X_2 + 2X_1 = 1, 2 \pmod{3}$$

são as mesmas das equações

$$X_1 + 2X_2 = 1, 2 \pmod{3}$$

Os grupos dados pelos símbolos AB^2 e BA^2 são os mesmos. Convencionou-se, então, que a potência da primeira letra de uma interação seja sempre igual a um.

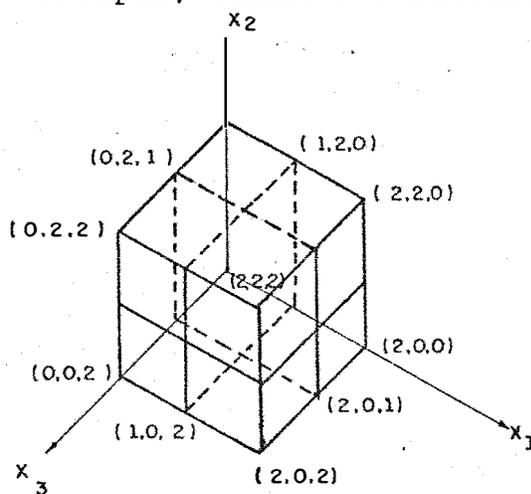
Uma observação deve ser feita:

$$AB \neq A_L B_L \quad \text{e} \quad AB^2 \neq A_L B_Q$$

3.1.2.2. A forma geral para apresentar delineamentos 3^n

Neste sistema são testados n fatores, cada um em 3 níveis. As combinações de tratamentos podem ser representadas geometricamente num sistema de coordenadas n -dimensional contendo, cada eixo, três pontos. Tomando os n eixos mutuamente ortogonais x_1, x_2, \dots, x_n , teremos o ponto $(0, 0, \dots, 0)$ como sendo o tratamento controle, $(1, 0, 0, \dots, 0)$ como sendo o primeiro fator no segundo nível e os outros fatores no nível mais baixo; $(2, 0, 0, \dots, 0)$ como sendo o primeiro fator no nível mais alto e os outros no nível mais baixo, e assim por diante.

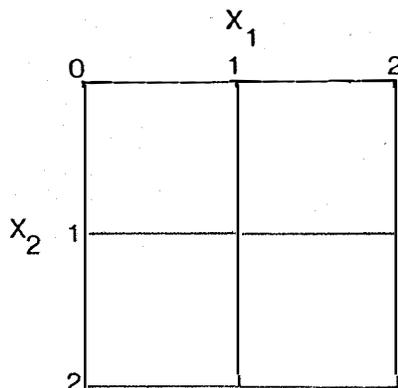
Por exemplo, tomando o fatorial 3^3



Os contrastes e interações podem ser descritos como para o sistema 2^n com algumas pequenas modificações.

Qualquer contraste no sistema 3^n envolve comparações dos três totais de dados de 3^{n-1} pontos e pode ser representado pela comparação das diferenças entre os dados dos pontos que estão em 3 conjuntos de hiper-planos paralelos.

Por exemplo, se $n = 2$ o reticulado apresenta-se assim



Os efeitos principais do fator A são contrastes entre os totais de dados dos pontos representados por

$$x_1 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_1 = 2 \quad (\text{mod } 3)$$

A interação AxB que conta com 4 graus de liberdade pode ser dividida em duas partes com dois graus de liberdade cada, a interação AB , obtida dos totais referentes a

$$x_1 + x_2 = 0, 1, 2 \quad (\text{mod } 3)$$

e a interação AB^2 , obtida dos totais referentes a

$$x_1 + 2x_2 = 0, 1, 2 \pmod{3}$$

Em resumo:

- Os efeitos e interações para um delineamento 3^2 são dados em pares de graus de liberdade pelas comparações entre 3 conjuntos de combinações de tratamentos, como segue:

$$\text{Interação} \left\{ \begin{array}{l} A : x_1 = 0, 1, 2 \\ B : x_2 = 0, 1, 2 \\ AB : x_1 + x_2 = 0, 1, 2 \\ AB^2 : x_1 + 2x_2 = 0, 1, 2 \end{array} \right\} \pmod{3}$$

Para 3 fatores, temos os resultados mostrados abaixo

Efeito ou Interação	Equação (= 0, 1, 2)
A	x_1
B	x_2
AB	$x_1 + x_2$
AB^2	$x_1 + 2x_2$
C	x_3
AC	$x_1 + x_3$
AC^2	$x_1 + 2x_3$
BC	$x_2 + x_3$
BC^2	$x_2 + 2x_3$
8g . l. $\left\{ \begin{array}{l} ABC \\ ABC^2 \\ AB^2C \\ AB^2C^2 \end{array} \right.$	$x_1 + x_2 + x_3$
	$x_1 + x_2 + 2x_3$
	$x_1 + 2x_2 + x_3$
	$x_1 + 2x_2 + 2x_3$

Deve ser observado que os 8 graus de liberdade para as interações triplas são subdivididos em 4 conjuntos de 2 graus de liberdade cada um.

Para 4 fatores, serão colocadas apenas as equações que correspondem às interações de 4 fatores. Temos 8 conjuntos com 2 graus de liberdade que estão mostrados abaixo.

Interações 4 fatores	Equação	
ABCD	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$	} = 0,1,2 (mod 3)
ABCD ²	$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4$	
ABC ² D	$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4$	
ABC ² D ²	$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$	
AB ² CD	$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$	
AB ² CD ²	$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$	
AB ² C ² D	$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$	
AB ² C ² D ²	$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4$	

Para o sistema 3^n temos $(3^n - 1)/2$ símbolos, cada um representando $2g \cdot l$.

3.1.2.3. A análise de experimentos fatoriais 3^n

A análise da variância ficará:

Fonte de Variação	G. L.
Repetições (Blocos)	$r - 1$
Efeitos Principais	$2, \binom{n}{1}$ linhas
Interações 2-fatores	$4, \binom{n}{2}$ linhas
Interações 3-fatores	$8, \binom{n}{3}$ linhas
·	· · ·
·	· · ·
·	· · ·
Interações n-fatores	$2^n, \binom{n}{n}$ linha
Repetição x Tratamentos	$(r-1)(3^n-1)$
Total	$r3^n-1$

Como para os delineamentos fatoriais 2^n , os estimadores dos efeitos e interações e suas somas de quadrados correspondentes podem, no fatorial 3^n , ser obtidos utilizando o procedimento de YATES (1937).

Até agora, para os delineamentos fatoriais 3^n , falou-se apenas em níveis com espaçamentos iguais. Para este caso, a obtenção dos estimadores através do procedimento sistemático de YATES baseia-se no uso dos polinômios ortogonais.

Será apresentado agora um meio de se usar os coeficientes dos contrastes ortogonais para espaçamentos desejados

iguais. Isso será feito através de um exemplo, mas pode ser facilmente estendido para número de fatores diferentes e mesmo níveis diferentes.

No quadro abaixo estão os coeficientes para n níveis igualmente espaçados - 3 níveis.

X	Linear		Quadrático		
	$\alpha + \beta X$	Coefficientes ⁽¹⁾	$\alpha + \beta X + \gamma X^2$	Lin x Quadr	Coefficientes ⁽²⁾
0	α	-1	α	$-\alpha$	1/3 1
1	$\alpha + \beta$	0	$\alpha + \beta + \gamma$	0	-2/3 \Leftrightarrow -2
2	$\alpha + 2\beta$	1	$\alpha + 2\beta + 4\gamma$	$\alpha + 2\beta + 4\gamma$	1/3 1
Σ	$3\alpha + 3\beta$	0	$3\alpha + 3\beta + 5\gamma$	$2\beta + 4\gamma$	0 0

(1) O somatório das equações lineares, em relação a X deve ser zero.

$$\alpha + (\alpha + \beta) + (\alpha + 2\beta) = 3\alpha + 3\beta = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0$$

se escolhermos $\alpha = -1$, temos $\beta = 1$

$$(2) \begin{cases} 3\alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \\ 2\beta + 4\gamma = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 3\alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

para $\beta = -2$, temos $\gamma = 1$ e $\alpha = 1/3$

No quadro abaixo estão os coeficientes para espaçamentos desiguais - 3 níveis.

X	Linear		Quadrático		
	$\alpha + \beta X$	Coeficientes (1)	$\alpha + \beta X + \gamma X^2$	Lin x Quadr	Coeficientes (2)
0	α	-4	α	-4α	6 2
1	$\alpha + \beta$	-1	$\alpha + \beta + \gamma$	$-\alpha - \beta - \gamma$	-9 \Leftrightarrow -3
3	$\alpha + 3\beta$	5	$\alpha + 3\beta + 9\gamma$	$5\alpha + 15\beta + 45\gamma$	3 1
Σ	$3\alpha + 4\beta$		$3\alpha + 4\beta + 10\gamma$	$14\beta + 44\gamma$	

(1) Para os coeficientes lineares, fazemos

$$3\alpha + 4\beta = 0$$

$$\text{se } \alpha = -4 \Rightarrow \beta = 3$$

(2) Para os coeficientes quadráticos, fazemos

$$\begin{cases} 3\alpha + 4\beta + 10\gamma = 0 \\ 14\beta + 44\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\text{se } \beta = -22 \Rightarrow \gamma = 7 \quad \text{e} \quad \alpha = 6$$

Considerando agora um exemplo para valores repetidos de X - 3 níveis

X	$\alpha + \beta X$	Coeficientes ⁽¹⁾	$\alpha + \beta X + \gamma X^2$	Lin x Quadr	Coeficientes ⁽²⁾
0	α	-1	α	$-\alpha$	1 -1
0	α	-1	α	$-\alpha$	1 -1
1	$\alpha + \beta$	0	$\alpha + \beta + \gamma$	0	-4 \Leftrightarrow 0
2	$\alpha + 2\beta$	1	$\alpha + 2\beta + 4\gamma$	$\alpha + 2\beta + 4\gamma$	1 1
2	$\alpha + 2\beta$	1	$\alpha + 2\beta + 4\gamma$	$\alpha + 2\beta + 4\gamma$	1 1
Σ	$5\alpha + 5\beta$		$5\alpha + 5\beta + 9\gamma$	$4\beta + 8\gamma$	

(1) Coeficientes lineares

$$5\alpha + 5\beta = 0$$

$$\text{se } \alpha = -1 \Rightarrow \beta = 1$$

(2) $9\gamma = 0$

$$= 0$$

$$\text{se } \gamma = 0 \Rightarrow \beta = -10 \quad \text{e} \quad \alpha = 1$$

Aplicação dessa técnica a um experimento fatorial 3^2 .

x_1	A		x_2	B		$\theta_{LL}^{A,B}$	$\theta_{LQ}^{A,B}$	$\theta_{QL}^{A,B}$	$\theta_{QQ}^{A,B}$
	Linear θ_{AL}	Quadr θ_{AQ}		Linear θ_{BL}	Quadr θ_{BQ}				
0	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1
0	-1	1	1	0	-2	0	2	0	-2
0	-1	1	2	1	1	-1	-1	1	1
1	0	-2	0	-1	1	0	0	2	-2
1	0	-2	1	0	-2	0	0	0	4
1	0	-2	2	1	1	0	0	-2	-2
2	1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1
2	1	1	1	0	-2	0	-2	0	-2
2	1	1	2	1	1	1	1	1	1
$\sum \theta_i^2$	6	18		6	18	4	12	12	36

$$\sum_{A_{L_i}} \theta_{L_i}^2 = 6 ; \quad \sum_{A_{Q_i}} \theta_{Q_i}^2 = 6 ; \quad \sum_{B_{L_i}} \theta_{L_i}^2 = 6 ; \quad \sum_{B_{Q_i}} \theta_{Q_i}^2 = 6$$

$$\sum_{(A,B)_{LL_i}} \theta_{L_i}^2 \theta_{L_i}^2 = 4 ; \quad \sum_{(A,B)_{LQ_i}} \theta_{L_i}^2 \theta_{Q_i}^2 = 4 ; \quad \sum_{(A,B)_{QL_i}} \theta_{Q_i}^2 \theta_{L_i}^2 = 4 ;$$

$$\sum_{(A,B)_{QQ_i}} \theta_{Q_i}^2 \theta_{Q_i}^2 = 4 ;$$

$$\lambda_{L L}^A = 1 \quad ; \quad \lambda_{L Q}^A = 3 \quad ; \quad \lambda_{L L}^B = 1 \quad ; \quad \lambda_{L Q}^B = 3 \quad ;$$

$$\lambda_{L L}^{A B} = 1 \quad ; \quad \lambda_{L Q}^{A B} = 3 \quad ; \quad \lambda_{Q L}^{A B} = 3 \quad ; \quad \lambda_{Q Q}^{A B} = 9$$

são definidos:

$$\lambda_L = \frac{\sum \theta_{L_i}^2}{\sum \theta_{L_i}^2 X_i^2} \quad , \quad \lambda_Q = \frac{\sum \theta_{Q_i}^2}{\sum \theta_{Q_i}^2 X_i^2} \quad , \text{ etc...}$$

Na análise de regressão correspondente recordamos que

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{E}$$

o que implica

$$\underline{\beta} = (X'X)^{-1} X'\underline{Y}$$

Então, temos

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ A_L \\ \frac{1}{3} A_Q \\ B_L \\ \frac{1}{3} B_Q \\ \hat{A}_L^B \\ \frac{1}{3} \hat{A}_L^B Q \\ \frac{1}{3} \hat{A}_Q^B L \\ \frac{1}{9} \hat{A}_Q^B Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ [A_L] \\ [A_Q] \\ [B_L] \\ [B_Q] \\ [A_L^B L] \\ [A_L^B Q] \\ [A_Q^B L] \\ [A_Q^B Q] \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \frac{1}{\lambda A_L} \hat{A}_L \\ \frac{1}{\lambda A_Q} \hat{A}_Q \\ \frac{1}{\lambda B_L} \hat{B}_L \\ \frac{1}{\lambda B_Q} \hat{B}_Q \\ \frac{1}{\lambda A_L B_L} \hat{A}_L^B \\ \frac{1}{\lambda A_L B_Q} \hat{A}_L^B \\ \frac{1}{\lambda A_Q B_L} \hat{A}_Q^B \\ \frac{1}{\lambda A_Q B_Q} \hat{A}_Q^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{A_L}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{A_Q}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma_{B_L}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{B_Q}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{A_L B_L}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{A_L B_Q}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{A_Q B_L}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{A_Q B_Q}^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

(X'Y)

3) por convenção, o coeficiente do primeiro $x_i \neq 0$ é igual à unidade.

Os conjuntos dados pelas equações

$$\lambda(\sum \alpha_i x_i) = j \pmod{p}, \quad j = 0, 1, \dots, p-1$$

$$\lambda = 1, \dots, p-1$$

serão os mesmos conjuntos dados por

$$\sum \alpha_i x_i = k \pmod{p}$$

porque existe uma única solução de k para a equação

$$\lambda k = j \pmod{p}$$

e essa solução é um dos números entre 0 e $p-1$.

Podemos fazer a expressão

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

corresponder ao símbolo

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ A & B & C & \dots \end{matrix}$$

para denotar o conjunto com $(p-1)$ graus de liberdade restringindo a potência da primeira letra que aparece à unidade. Desta forma, por exemplo, num fatorial 5^3 , temos $\frac{5^3 - 1}{5 - 1} = 31$ conjuntos com 4 graus de liberdade, que são distribuídos da seguinte maneira, a partir das equações

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0, 1, 2, 3, 4 \pmod{5},$$

$$\text{com } \alpha_i = 0, 1, 2, 3, 4$$

Efeitos Principais: A, B, C.

Interações 2-fatores: a e b - AB, AB², AB³, AB⁴

a e c - AC, AC², AC³, AC⁴

b e c - BC, BC², BC³, BC⁴

Interações 3-fatores: ABC, ABC², ABC³, ABC⁴

AB²C, AB²C², AB²C³, AB²C⁴

AB³C, AB³C², AB³C³, AB³C⁴

AB⁴C, AB⁴C², AB⁴C³, AB⁴C⁴

3.2. Confundimento em experimentos fatoriais

A noção usual de agrupamento em blocos considera as situações nas quais os blocos são completos, o que significa que cada bloco contém tantos pontos experimentais quantos forem os tratamentos ou combinações de tratamentos. Voltaremos nossa atenção, agora, para a situação que surge num experimento fatorial, quando o tamanho do bloco é muito pequeno para conter um grupo com todas as combinações de tratamentos, mas é

suficientemente grande para conter alguma fração delas.

3.2.1. Confundimento em experimentos fatoriais 2^n

3.2.1.1. Modelos e Estimação

Inicialmente, vamos considerar um experimento 2^2 em 2 blocos com 2 pontos cada um.

O modelo incluindo efeito de blocos é

$$Y_{ijg} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{12} X_1 X_2 + \delta_g + e_{ijg}$$

onde

Y_{ijg} : valor observado no i -ésimo nível de A, j -ésimo nível de B, g -ésimo bloco.

δ_g : é o efeito do g -ésimo bloco (fixado)

Restrição:

$$\sum_g \delta_g = 0 \Rightarrow \delta_1 + \delta_2 = 0 \quad \text{e portanto} \quad \begin{cases} \delta_1 = -\delta \\ \delta_2 = +\delta \end{cases}$$

se a divisão em blocos for

I : (1) , a

II : b , ab

Os pontos experimentais no bloco I estão ambos no menor nível de B.

Os pontos experimentais no bloco II estão ambos no maior nível de B.

Matricialmente

$$\begin{array}{c}
 \beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_{12} \quad \delta \\
 \\
 X = \begin{bmatrix} +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \quad \tilde{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ Y_{12} \\ Y_{22} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad X'\tilde{Y} = \begin{bmatrix} Y_{..} \\ -Y_{11} + Y_{21} - Y_{12} + Y_{22} \\ -Y_{11} - Y_{21} + Y_{12} + Y_{22} \\ Y_{11} - Y_{21} - Y_{12} + Y_{22} \\ -Y_{11} - Y_{21} + Y_{12} + Y_{22} \end{bmatrix}$$

$$E(Y_{..}) = 4\mu$$

$$E(Y_{22} + Y_{21} - Y_{11} - Y_{12}) = 2\mu + 2\beta_1 - 2\mu + 2\beta_1 = 4\beta_1$$

$$E\{\hat{A}\} = E(Y_{22} + Y_{21} - Y_{11} - Y_{12}) = 4\beta_1$$

$$E(Y_{22} + Y_{12} - Y_{11} - Y_{21}) = 2\mu + 2\beta_2 + 2\delta - 2\mu + 2\beta_2 + 2\delta = 4\beta_2 + 4\delta$$

$$E\{\hat{B}\} = E(Y_{22} + Y_{12} - Y_{11} - Y_{21}) = 4\beta_2 + 4\delta$$

$$e \quad E\{\hat{AB}\} = E(Y_{22} + Y_{11} - Y_{21} - Y_{12}) = 4\beta_{12}$$

Podemos observar que, somente na esperança do contraste \hat{B} , o efeito de bloco está presente. Embora ambos os pontos, em um bloco, estejam no maior nível de B e ambos os pontos, no outro bloco, estejam no menor nível de B, não é possível afirmar, olhando o contraste B, se as diferenças observadas resultam do efeito B, das diferenças entre blocos, ou da combinação de ambos.

Por outro lado, cada bloco contém uma combinação de tratamentos no maior nível de A e uma no menor nível de A, e, portanto, os efeitos de blocos δ cancelam-se, e também cancelam-se para o contraste AB. Podemos dizer, então, que o efeito B está completamente confundido com blocos.

Considerando, agora, o delineamento 2^3 dividido em 2 blocos com 4 parcelas cada um. Esta divisão não é única, poderia ser feita em mais blocos com menos parcelas cada um.

Sejam

(1), a, b, c, ab, ac, bc, abc

as combinações de tratamentos do 2^3

No mesmo bloco em que estiver o tratamento con trole (1), podemos colocar 3 combinações de tratamentos entre 7, e isto pode ser feito de 35 maneiras diferentes.

Uma possibilidade é esta:

1º bloco : (1), a, b, c

2º bloco : ab, ac, bc, abc

Vamos calcular o valor esperado do contraste en tre totais de blocos.

O modelo para o delineamento 2^3 é

$$Y_{ijklg} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_{13} X_1 X_3 + \beta_{23} X_2 X_3 + \beta_{123} X_1 X_2 X_3 + \delta_g + e_{ijklg}$$

$$X = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{123} & \delta \\ +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \quad \tilde{Y} = \begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{211} \\ Y_{121} \\ Y_{112} \\ Y_{221} \\ Y_{212} \\ Y_{122} \\ Y_{222} \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & | & 0 \\ \hline 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 8 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} Y_{111} - Y_{211} - Y_{121} + Y_{112} + Y_{221} - Y_{212} - Y_{122} + Y_{222} \\ -Y_{111} + Y_{211} - Y_{121} - Y_{112} + Y_{221} + Y_{212} - Y_{122} + Y_{222} \\ -Y_{111} - Y_{211} + Y_{121} - Y_{112} + Y_{221} - Y_{212} + Y_{122} + Y_{222} \\ -Y_{111} - Y_{211} - Y_{121} + Y_{112} - Y_{221} + Y_{212} + Y_{122} + Y_{222} \\ Y_{111} - Y_{211} - Y_{121} + Y_{112} + Y_{221} - Y_{212} - Y_{122} + Y_{222} \\ Y_{111} - Y_{211} + Y_{121} - Y_{112} - Y_{221} + Y_{212} - Y_{122} + Y_{222} \\ Y_{111} + Y_{211} - Y_{121} - Y_{112} - Y_{221} - Y_{212} + Y_{122} + Y_{222} \\ -Y_{111} + Y_{211} + Y_{121} + Y_{112} - Y_{221} - Y_{212} - Y_{122} + Y_{222} \\ -Y_{111} - Y_{211} - Y_{121} - Y_{112} + Y_{221} + Y_{212} + Y_{122} + Y_{222} \end{bmatrix}$$

O valor esperado do contraste entre totais de
blocos é:

$$\begin{aligned}
E\{abc + ab + ac + bc - a - b - c - (1)\} &= \\
&= 4\mu + 2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 - 2\beta_{123} + 4\delta - (4\mu - 2\beta_1 - 2\beta_2 - 2\beta_3 + 2\beta_{123} - 4\delta) \\
&= 4\beta_1 + 4\beta_2 + 4\beta_3 + 8\delta
\end{aligned}$$

A esperança do contraste A é

$$\begin{aligned}
E\{\hat{A}\} &= E(Y_{222} + Y_{211} + Y_{221} + Y_{212} - Y_{111} - Y_{121} - Y_{112} - Y_{122}) = \\
&= 2\mu + 2\beta_1 + 2\beta_{23} + 2\beta_{123} + 2\mu + 2\beta_1 - 2\beta_{23} - 2\beta_{123} + 2\delta - \\
&- (2\mu - 2\beta_1 + 2\beta_{23} - 2\beta_{123} + 2\mu - 2\beta_1 - 2\beta_{23} + 2\beta_{123} - 2\delta) = \\
&= 8\beta_1 + 4\delta
\end{aligned}$$

A esperança do contraste AB é

$$\begin{aligned}
E\{\hat{AB}\} &= E(Y_{222} + Y_{221} + Y_{112} + Y_{111} - Y_{211} - Y_{121} - Y_{212} - Y_{122}) = \\
&= 2\mu + 2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_{12} + 2\delta + 2\mu - 2\beta_1 - 2\beta_2 + 2\beta_{12} - 2\delta - \\
&- 2\mu + 2\beta_3 + 2\beta_{12} - 2\beta_{123} + 2\delta - 2\mu - 2\beta_3 + 2\beta_{12} + 2\beta_{123} - 2\delta = \\
&= 8\beta_{12}
\end{aligned}$$

$$e \quad E\{\hat{B}\} = 8\beta_2 + 4\delta \quad ; \quad E\{\hat{C}\} = 8\beta_3 + 4\delta \quad ; \quad E\{\hat{BC}\} = 8\beta_{23}$$

$$E\{\hat{AC}\} = 8\beta_{13} \quad ; \quad E\{\hat{ABC}\} = 8\beta_{123}$$

Todos os 3 efeitos principais estão confundidos com blocos.

Contudo, podemos arranjar o agrupamento de modo que somente um dos efeitos esteja completamente confundido com blocos. Isto pode ser feito tomando qualquer um dos sete contrastes para estimação de efeitos e colocando, em um bloco, todas as combinações de tratamentos que aparecem com sinal positivo no contraste e, no outro bloco, aquelas combinações de tratamentos que têm um sinal negativo. Assim, se desejarmos confundir ABC com blocos, lembrando que

$$8\beta_{123} = abc - bc - ac - ab + a + b + c - (1)$$

a divisão será:

	<u>bloco I</u>			<u>bloco II</u>			
abc	1	1	1	bc	0	1	1
a	1	0	0	ac	1	0	1
b	0	1	0	ab	1	1	0
c	0	0	1	(1)	0	0	0

Em cada bloco existem exatamente dois pontos no nível maior de A e dois no nível menor; e o mesmo é verdadeiro para B e C. Se fizermos a esperança dos contrastes \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} veremos que agora ela não conterà mais o efeito δ de blocos. Este efeito só aparecerá na esperança do contraste \hat{ABC} .

O bloco I é composto com todas as combinações de tratamentos com sinais positivos no contraste ABC; será chamado então de conjunto de pontos definidos por

$$I = + ABC$$

Pode ser também o conjunto de pontos para o qual

$$x_1 x_2 x_3 = +1 \quad , \quad \text{se fizermos} \quad x_i = \pm 1$$

ou

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \pmod{2} \quad , \quad \text{se fizermos} \quad x_i = 0, 1$$

E o outro bloco contém o conjunto de pontos definidos por

$$I = - ABC \quad , \quad \text{ou} \quad x_1 x_2 x_3 = -1 \quad \text{ou ainda}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \pmod{2} .$$

Em geral, para um efeito qualquer X, o conjunto de pontos que têm sinais positivos (ou negativos) no contraste X é chamado de conjunto (ou fração) dos pontos 2^n definidos por

$$I = + X \text{ (ou } I = - X) .$$

O contraste escolhido é chamado contraste definição da forma de confundimento.

A análise de um experimento fatorial 2^n pode ser feita usando o algoritmo de Yates, com exceção da soma de qua

drados do contraste definição, que é descartada, desde que ela seja não-tendenciosa para os efeitos de blocos.

A estrutura de análise de variância para um experimento 2^3 em 2 blocos com 4 observações repetidas r vezes, confundindo ABC é

F.V.	G.L.	
Repetições	$r-1$	Blocos (ABC) 1
Blocos/Repetições	r	Blocos x Repet. ($r-1$)
Tratamentos	6	
A	1	
B	1	
AB	1	
C	1	
AC	1	
BC	1	
Repetições x Tratam.	$6(r-1)$	
Total	$8r - 1$	

3.2.1.2. Confundimento de fatoriais 2^n em 2^k blocos com 2^{n-k} unidades

Num delineamento 2^n , o conjunto com todos os efeitos mais o elemento unidade I é dado por

$I, A, B, C, \dots, AB, AC, \dots, ABC, \dots$

Esses elementos com a condição

$$A^2 = B^2 = \dots = I$$

formam um grupo multiplicativo Abeliano de ordem 2^n .

O produto dos efeitos ABC, ABD é

$$(ABC)(ABD) = A^2 B^2 CD = CD$$

Esse produto CD é chamado de interação generalizada de ABC e ABD .

Poderíamos escrever

$$(x_1 x_2 x_3)(x_1 x_2 x_4) = x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 = x_3 x_4,$$

desde que $x_1^2 = x_2^2 = 1$, em cada unidade experimental.

Um grupo análogo é formado pelas combinações de tratamentos com (1) como a identidade e a condição

$$a^2 = b^2 = c^2 = \dots = (1)$$

A divisão de um experimental fatorial 2^n pode se efetuar da seguinte maneira:

2 blocos com 2^{n-1} observações
 4 blocos com 2^{n-2} observações
 8 blocos com 2^{n-3} observações

 2^m blocos com 2^{n-m} observações , $n \geq m$

Supondo que estamos querendo dividir um experimento 2^n em 4 blocos, confundindo ABC e ABD.

No 1º bloco são colocados todos os pontos com

$$x_1 x_2 x_3 = +1 \quad \text{e} \quad x_1 x_2 x_4 = +1$$

ou

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \pmod{2} \quad \text{e} \quad x_1 + x_2 + x_4 = 1 \pmod{2}$$

No 2º bloco são colocados todos os pontos com

$$x_1 x_2 x_3 = +1 \quad \text{e} \quad x_1 x_2 x_4 = -1$$

ou

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \pmod{2} \quad \text{e} \quad x_1 + x_2 + x_4 = 0 \pmod{2}$$

e assim por diante.

$$\text{Mas, sendo } x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_4 = +1$$

também será

$$x_3 x_4 = (x_1 x_2 x_3) (x_1 x_2 x_4) = 1$$

Portanto

	Bloco I	Bloco II	Bloco III	Bloco IV
$x_1 x_2 x_3$	+1	+1	-1	-1
$x_1 x_2 x_4$	+1	-1	+1	-1
$x_3 x_4$	+1	-1	-1	+1

Cada um dos blocos contém 2^{n-2} pontos. Os contrastes dos totais de blocos são:

$I + II - III - IV$ é o contraste ABC

$I - II + III - IV$ é o contraste ABD

$I - II - III + IV$ é o contraste CD

Portanto com essa blocagem deixaremos de poder estimar essas 3 interações sendo no entanto possível estimar os demais efeitos pois nenhum outro efeito está confundido com blocos.

Agora vamos supor $n = 5$ e a mesma divisão em blocos, ou seja, um delineamento 2^5 em 4 blocos com 8 unidades cada.

Os efeitos escolhidos para serem confundidos são ABC e ADE. Já sabemos que $(ABC) \times (ADE) = A^2 BCDE = BCDE$ também está confundida. E queremos escrever os blocos.

Neste momento é necessário definir bloco principal ou sub-grupo intra-bloco. Este é definido como o bloco que contém o tratamento controle (1).

Então, o que deve ser feito em primeiro lugar é encontrar o bloco principal, fazendo

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0 \pmod{2} \text{ confundindo ABC}$$

$$X_1 + X_4 + X_5 = 0 \pmod{2} \text{ confundindo ADE}$$

resultando também o confundimento de BCDE

$$X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 0 \pmod{2}$$

Para os demais blocos tomamos as outras 3 combinações das 2 somas

$$X_1 + X_2 + X_3 \quad \text{e} \quad X_1 + X_4 + X_5$$

Bloco I	Bloco II	Bloco III	Bloco IV
ABCDE	ABCDE	ABCDE	ABCDE
00000	00001	00100	00101
00011	00010	00111	00110
01100	01101	01000	01001
01111	01110	01011	01010
10110	10111	10010	10011
10101	10100	10001	10000
11010	11011	11110	11111
11001	11000	11101	11100
$X_1 + X_2 + X_3 = 0$	$X_1 + X_2 + X_3 = 0$	$X_1 + X_2 + X_3 = 1$	$X_1 + X_2 + X_3 = 1$
$X_1 + X_4 + X_5 = 0$	$X_1 + X_4 + X_5 = 1$	$X_1 + X_4 + X_5 = 0$	$X_1 + X_4 + X_5 = 1$

Podemos observar que o 2º bloco é igual ao 1º, somando-se 1 a todos os elementos da coluna correspondente a E, o 3º bloco é igual ao 1º, somando-se 1 à coluna C, o 4º bloco é igual ao 1º, somando-se 1 a ambas as colunas C e D. Então,

	ABC	ADE	BCDE
Bloco I	-	+	-
Bloco II	-	-	+
Bloco III	+	+	+
Bloco IV	+	-	-

As interações ABC e ADE são as geradoras deste delineamento. Em geral, se existem 2^m blocos no arranjo de confundimento, são necessários m geradores.

De uma forma geral, seja X e Y dois efeitos. Podemos dividir o delineamento 2^n em 2^2 blocos, cada um de tamanho 2^{n-2} , associando ao bloco I (bloco principal) todos os pontos que têm sinais positivos nos contrastes X e Y, ao bloco II, todos os pontos que têm sinais positivos no contraste X e sinais negativos no contraste Y, e assim por diante. A interação generalizada XY também estará confundida com blocos e estes serão os três únicos efeitos confundidos.

Para dividir o delineamento em 8 blocos de tamanho 2^{n-3} , tomamos um 3º efeito W, diferente de XY. O bloco principal conterá todos os 2^{n-3} pontos que têm sinais positi

vos nos contrastes X, Y e W. Os 7 efeitos confundidos serao X, Y, XY, W, XW, YW e XYW.

Por exemplo, dividindo o fatorial 2^5 em 2^3 blocos com 2^2 unidades cada. Como $m = 3$, são necessários 3 geradores que podem ser

ABC, ABD, BCE

dando as interações generalizadas

CD, AE, ACDE, BDE.

Temos um total de 7 ou $2^m - 1$ efeitos confundidos.

No caso geral de 2^k blocos, tomamos para contrast
es definições um conjunto com k geradores independentes

X, Y, W, Z, ...

pelos quais definimos k efeitos tais que nenhum deles seja a interação generalizada dos outros. Os blocos são então os 2^k conjuntos obtidos tomando as intersecções de conjuntos definidos por

$$I = \pm X, \quad I = \pm Y, \quad I = \pm W, \quad \dots$$

O conjunto completo de efeitos confundidos é com
posto pelos geradores e todas as possíveis interações generalizadas que podem ser derivadas deles.

3.2.2. Confundimento nos delineamentos da série 3^n

Vamos considerar um experimento 3^3 . As somas de quadrados, para cada um das interações de 2 fatores e interações de 3 fatores, podem ser subdivididas em componentes com 2 graus de liberdade. O procedimento leva a um método de confundimento para dividir os 27 pontos em 3 blocos de 9 pontos cada.

Por exemplo, se quisermos confundir AB^2C^2 com blocos, devemos distribuir assim

Bloco I	Bloco II	Bloco III
$x_1+2x_2+2x_3 = 0 \pmod{3}$	$x_1+2x_2+2x_3 = 1 \pmod{3}$	$x_1+2x_2+2x_3 = 2 \pmod{3}$
0 0 0	0 0 2	0 0 1
0 1 2	0 1 1	0 1 0
0 2 1	0 2 0	0 2 2
1 0 1	1 0 0	1 0 2
1 1 0	1 1 2	1 1 1
1 2 2	1 2 1	1 2 0
2 0 2	2 0 1	2 0 0
2 1 1	2 1 0	2 1 2
2 2 0	2 2 2	2 2 1

Lembramos que a combinação de tratamento $a_2b_1c_1$, por exemplo, é escrita como 211.

Confundindo dois dos componentes da interação de 3 fatores para obter 9 blocos com 3 pontos cada, também confundimos um efeito principal. Se tomarmos, por exemplo, os 3 pontos para os quais

$$x_1 + x_2 + x_3 = i \pmod{3} \quad \text{e} \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 = j \pmod{3},$$

também temos

$$2x_1 = i + j \pmod{3} \quad \text{ou} \quad x_1 = 2(i+j) \pmod{3}$$

Podemos evitar o confundimento de efeitos principais confundindo componentes de interações entre dois fatores, tais como AB, AC e BC .

Para um fatorial 3^n em 3^{n-m} blocos com 3^m unidades, existem $n-m$ geradores, por exemplo, para um

3^n em 3 blocos de 3^{n-1} unidades, tem-se 1 gerador
 3^n em 3^2 blocos de 3^{n-2} unidades, tem-se 2 geradores

 3^n em 3^m blocos de 3^{n-m} unidades, tem-se m geradores

3.2.3. Confundimento no sistema p^n

BOSE e KISHEN (1940) e BOSE (1947) descreveram um procedimento geral para confundimento em um experimento fa

torial p^n , onde p é um número primo ou uma potência de um número primo.

Os únicos divisores de p^n são da forma p^s , onde $s \leq n$, portanto tomamos blocos iguais de tamanho p^s . A variação do erro é geralmente uma função do tamanho do bloco numa situação experimental particular. Então, para a análise em questão, buscamos a homogeneidade do erro. Portanto, é vantajoso ter blocos de tamanhos iguais.

3.2.3.1. Planejamento de sistemas de confundimento em blocos com p^s elementos

Inicialmente, vamos lembrar uma regra da interação generalizada, a qual já foi mencionada nos casos $p = 2$ e $p = 3$.

A regra geral de interação generalizada pode ser enunciada como segue:

Se os efeitos ou interações representados por X e Y estão completamente confundidos com blocos, então, também estão confundidos os $(p-1)$ conjuntos de $(p-1)$ graus de liberdade representados por

$$XY, XY^2, \dots, XY^{p-1}$$

onde estes símbolos são escritos em termos das letras ABC, etc. ..., a p -ésima potência de qualquer letra é substituída pela

unidade, e o símbolo resultante deve ser elevado a tal potência, como se faz com a primeira letra, na qual tem-se uma potência da unidade. Isto pode ser provado da seguinte forma:

Seja X correspondendo às equações:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0, = 1, \dots, = (p-1) \pmod{p}$$

e Y correspondendo às equações:

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n = 0, = 1, \dots, = (p-1) \pmod{p}$$

Como X e Y estão completamente confundidos com blocos, o conjunto formado pelos elementos de qualquer um desses blocos, satisfaz às equações:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = i \pmod{p}$$

e

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n = j \pmod{p}$$

onde $i, j = 0, 1, \dots, p-1$.

Para cada um desses conjuntos podemos combinar as equações escrevendo

$$(\alpha_1 + \lambda\beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \lambda\beta_2)x_2 + \dots + (\alpha_n + \lambda\beta_n)x_n = i + \lambda j \pmod{p}$$

onde $\lambda = 1, \dots, p-1$.

Os coeficientes $\alpha_i + \lambda\beta_i$ devem ser reduzidos módulo p, para qualquer i. E podemos fazer essa equação corres

ponder a

$$XY^\lambda$$

Portanto, os conjuntos formados pelos valores que compõem cada bloco assumem um valor constante para qualquer uma das equações correspondendo a XY^λ , onde $\lambda = 1, \dots, p-1$. O efeito ou interação XY é então confundido com blocos para estes valores de λ .

Por exemplo, o fatorial 3^4 , confundindo ABC e AB^2D em 3^2 blocos com 3^2 unidades cada

$$ABC : x_1 + x_2 + x_3 = i \pmod{3}, \quad i = 0, 1, 2$$

$$AB^2D ; x_1 + 2x_2 + x_4 = j \pmod{3}, \quad j = 0, 1, 2$$

$$(x_1 + x_2 + x_3) + \lambda(x_1 + 2x_2 + x_4) = 1 + \lambda j \pmod{3}, \quad \lambda = 1, 2$$

$$(1 + \lambda)x_1 + (1 + 2\lambda)x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 + \lambda j \pmod{3}$$

se $\lambda = 1$

$$2x_1 + x_3 + x_4 = i + j \pmod{3}$$

Como já foi visto na secção 3.1.2.1., convencionou-se que o coeficiente da 1.^a letra de uma equação seja sempre igual à unidade. Para transformar essa equação em outra equivalente, cuja forma seja a desejada, fazemos:

$$2(2x_1 + x_3 + x_4) = 2(i + j) \pmod{3}$$

ficando

$$x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 2(i + j) \pmod{3}$$

Esta equação tem o mesmo conjunto de soluções que a anterior e corresponde à interação AC^2D^2 .

Se $\lambda = 2$

$$2x_2 + x_3 + 2x_4 = i + 2j \pmod{3}$$

fazemos

$$2(2x_2 + x_3 + 2x_4) = 2(i + 2j) \pmod{3}$$

ficando

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 2i + j \pmod{3}$$

e corresponde à interação BC^2D .

3.2.3.2. A enumeração dos sistemas de confundimento em p^n

O número total de sistemas de confundimento para um sistema p^n em blocos com p^s unidades é igual a

$$\frac{(p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{n-s-1})}{(p^{n-s} - 1)(p^{n-s} - p) \dots (p^{n-s} - p^{n-s-1})}$$

o que pode ser verificado, sabendo-se que os efeitos e interações são gerados a partir da escolha de $(n-s)$ efeitos e interações.

Estes $(n-s)$ efeitos são independentes, porque nenhum deles é resultado de interações generalizadas.

O primeiro efeito pode ser escolhido de $\left(\frac{p^n - 1}{p - 1}\right)$ maneiras, porque um efeito com a equação

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = i \pmod{p}$$

$$i = 0, 1, \dots, p-1$$

é equivalente a

$$\lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = \lambda i \pmod{p}$$

$$\lambda = 1, \dots, p-1$$

Existem $p-1$ equações com o mesmo conjunto de soluções.

O segundo efeito a ser escolhido deve ser tomado a partir dos $p^{n-1} - (p-1) = p^{n-1} - p$ efeitos restantes. E pode ser tomado de $\frac{p^n - p}{p - 1}$ maneiras.

Para escolher o terceiro efeito, devemos lembrar que já foram retirados $2(p-1)$ efeitos e $(p-1)^2$ interações generalizadas de p^{n-1} efeitos, restando então

$$p^{n-1} - [2(p-1) + (p-1)^2] = p^n - p^2$$

E este pode ser tomado de $\frac{p^n - p^2}{p - 1}$ maneiras, e assim por diante.

Ao final, teremos o número total de sistemas de confundimento gerados desta forma, igual a

$$\left(\frac{p^n - 1}{p - 1}\right) \left(\frac{p^n - p}{p - 1}\right) \left(\frac{p^n - p^2}{p - 1}\right) \dots \left(\frac{p^n - p^{n-s-1}}{p - 1}\right)$$

Contudo, um sistema qualquer será enumerado de

$$\left(\frac{p^{n-s} - 1}{p - 1}\right) \left(\frac{p^{n-s} - p}{p - 1}\right) \dots \left(\frac{p^{n-s} - p^{n-s-1}}{p - 1}\right)$$

maneiras diferentes.

Portanto, o número de sistemas distintos é fixado.

Vejamos alguns exemplos

1) Em primeiro lugar, consideremos o fatorial 5^2 e a divisão em 5 blocos com 5 elementos. Temos então, o número total de sistemas de confundimento igual a

$$\frac{5^2 - 1}{5 - 1} = 6$$

Sejam A e B os dois fatores. Em cada um desses sistemas será confundido A, B, AB, AB², AB³ ou AB⁴. A divisão dos 16 graus de liberdade para a interação de a e b em 4 conjuntos de 4 graus de liberdade é inteiramente formal e, algumas vezes, puramente um plano matemático.

Pode ser realizado um experimento apropriado para obter informações sobre todos os componentes. Ele será feito com 4 repetições e os seguintes confundimentos:

- 1.^a repetição : confundir AB
- 2.^a repetição : confundir AB²
- 3.^a repetição : confundir AB³
- 4.^a repetição : confundir AB⁴

Esse delineamento daria informação completa sobre os efeitos principais e 3/4 de informação relativa sobre a interação.

Num experimento com 6 repetições, confundindo A, B, AB, AB², AB³ e AB⁴ em cada uma das repetições temos informações mais amplas sobre os efeitos principais e interações duplas.

2) Em segundo lugar, considerando o experimento fatorial 5³ dividido em 5² blocos com 5 elementos. O número de sistemas é

$$\left(\frac{5^3 - 1}{5^2 - 1} \right) \left(\frac{5^3 - 5}{5^2 - 5} \right) = \frac{124.120}{24.20} = 31$$

Sejam A, B e C os três fatores. Os sistemas de confundimento são dos seguintes tipos:

- I : A, B, AB, AB², AB³, AB⁴ - são 3 sistemas
- II : A, BCⁱ, com produtos (i = 1,2,3,4) - são 12 sistemas
- III : ABⁱ, BC^j, com produtos (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4) - são 16 sistemas

Tomando, por exemplo, o sistema do tipo II

$$A, BC^2, ABC^2, AB^2C^4, AB^3C, AB^4C^3$$

É fácil verificar que temos uma enumeração completa. Os sistemas do tipo A, ABⁱC^j com produtos contidos no tipo II, por exemplo, A, AB²C³, fornece como produto

$$\begin{aligned} AAB^2C^3 &= A^2B^2C^3 = (A^2B^2C^3)^3 = ABC^4 \\ A^2AB^2C^3 &= A^3B^2C^3 = (A^3B^2C^3)^2 = AB^4C \\ A^3AB^2C^3 &= A^4B^2C^3 = (A^4B^2C^3)^4 = AB^3C^2 \\ A^4AB^2C^3 &= A^5B^2C^3 = B^2C^3 = (B^2C^3)^3 = BC^4 \end{aligned}$$

Poderíamos efetuar o experimento com 2 repetições e os seguintes confundimentos:

- 1.^a repetição : confundir AB², BC³, AB³C³, ABC⁴, AC⁴, ABC²
(24 g. .)
- 2.^a repetição : confundir AB, BC², AB²C², AB³C⁴, AB⁴C, AC³
(24 g. .)

Com este delineamento obtém-se informação comple

ta sobre os efeitos principais, todas as interações duplas e todas as interações triplas; 1/2 informação sobre AB , AB^2 , AC^3 , AC^4 , BC^2 , BC^3 , AB^2C^2 , AB^3C^3 , ABC^2 , AB^3C^4 e informação nula sobre AB^4C .

3.2.3.3. Elementos dos blocos

Os componentes de cada bloco podem ser obtidos através do bloco principal ou subgrupo intrabloco, como já foi visto para os casos particulares 2^n e 3^n . Consideramos o bloco para o qual as duas equações estão satisfeitas:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \pmod{p}$$

$$\sum_{i=1}^n \beta_i x_i = 0 \pmod{p}$$

A combinação de tratamento $(0, 0, 0, \dots, 0)$ satisfaz estas equações. Se (y_1, y_2, \dots, y_n) e (z_1, z_2, \dots, z_n) satisfazem as equações, então também satisfazem as combinações de tratamentos

$$(\lambda y_1 + \mu z_1, \lambda y_2 + \mu z_2, \dots, \lambda y_n + \mu z_n)$$

onde λ e μ assumem valores de 1 a $(p-1)$, e cada termo $(\lambda y_i + \mu z_i)$

é redutível módulo p . As combinações de tratamentos que estão neste bloco formam então um bloco, e $(0, 0, \dots, 0)$ é chamado de elemento unitário e a lei de combinações é a adição de coordenadas com redução módulo p .

Os elementos deste bloco são conhecidos como o subgrupo intrabloco. Se (x_1, x_2, \dots, x_n) é um elemento do subgrupo intrabloco e (y_1, y_2, \dots, y_n) está no bloco dado pelas equações

$$\sum \alpha_i x_i = k \pmod{p}$$

$$\sum \beta_i x_i = \ell \pmod{p}$$

então a combinação de tratamentos $(x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$ está no bloco, no qual suas coordenadas satisfazem as mesmas equações que (y_1, \dots, y_n) e, portanto, os outros blocos são gerados por adição.

Como exemplo de confundimento, consideremos o uso de blocos com 9 elementos num sistema 3^4 . Suponha que as interações confundidas são

$$ABC, AB^2D, AC^2D^2 \text{ e } BC^2D \quad (8 \text{ g.l.})$$

O subgrupo intrabloco consiste das combinações de tratamentos satisfazendo

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \pmod{3}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \pmod{3}$$

que são as combinações de tratamentos:

0 0 0 0	1 0 2 2	2 0 1 1
0 1 2 1	1 1 1 0	2 1 0 2
0 2 1 2	1 2 0 1	2 2 2 0

O conjunto todo com 9 blocos é então mostrado na tabela abaixo.

Podemos notar que este grupo é gerado por 0121 e 1022. Chamando-os x e y , temos:

0000, x , $2x$, y , $x+y$, $2x+y$, $2y$, $x+2y$, $2x+2y$

Blocagem do 3^4

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
0000	1000	2000	0100	0200	0010	0020	0001	0002
0121	1121	2121	0221	0021	0101	0111	0122	0120
0212	1212	2212	0012	0112	0222	0202	0210	0211
1022	2022	0022	1122	1222	1002	1012	1020	1021
1110	2110	0110	1210	1010	1120	1100	1111	1112
1201	2201	0201	1001	1101	1211	1221	1202	1200
2011	0011	1011	2111	2211	2021	2001	2012	2010
2102	0102	1102	2202	2002	2112	2122	2100	2101
2220	0220	1220	2020	2120	2200	2210	2221	2222

Temos:

$$\begin{aligned}
 2x + 2y &= 2(0121) + 2(1022) \\
 &= (0212) + (2011) \\
 &= 2220
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x + 2y &= (0121) + 2(1022) = \\
 &= (0121) + (2011) = \\
 &= 2102 .
 \end{aligned}$$

Podemos ver que, de uma maneira geral, para obtermos o sistema de confundimento, precisamos encontrar inicialmente o subgrupo intrabloco.

3.2.4. Sistemas de confundimento em condições especiais

Suponhamos, agora, que estejamos interessados em sistemas de confundimento onde nenhum efeito principal ou interações duplas estejam confundidos com blocos; nenhum efeito principal ou interações duplas e triplas estejam confundidos com blocos, etc...

Um caminho mais simples a ser adotado para este problema será visto através de um experimento 2^7 em 16 blocos com 8 unidades cada.

Em primeiro lugar, desejamos confundir ABCDE, que pode ser chamado de gerador 1, e então tentamos selecionar um novo gerador ABF, que será o gerador 2. Sabemos então que a interação generalizada ABCDE x ABF = CDEF está também confundida. Podemos notar que não foi envolvida nenhuma interação com menos

de 3 fatores. Agora, as interações BDE ou BDF não podem ser escolhidas porque

$$ABCDE \times BDE = AC$$

$$ABF \times BDF = AD$$

ou seja, cada um deles confunde uma interação dupla. E, experimentando agora ACG como o 3º gerador, obtemos as interações generalizadas adicionais: BDEG, BCFG e ADEFG. Necessitamos ainda de uma interação adicional e então o problema torna-se complicado.

Para auxiliar na resolução deste problema, e de outros deste tipo, vamos ver os teoremas de Fisher, que garantem a existência de sistemas de confundimento especiais.

3.2.4.1. Os teoremas de Fisher

Primeiro teorema de Fisher

Para um fatorial 2^n em 2^{n-m} blocos de 2^m observações cada um, tal que nenhum efeito principal ou interações duplas estejam confundidas com blocos, tem-se

$$n \leq 2^m - 1$$

Desde que a desigualdade esteja satisfeita, pode

mos sempre encontrar um confundimento satisfatório.

Por exemplo: O fatorial 2^7 em 2^4 blocos de 2^3 unidades

$$n = 2^3 - 1 = 7$$

desde que $m = 3$, n é máximo.

n	m	2^m	$2^m - 1$
atê 3	2	2^2	$2^2 - 1$
atê 7	3	2^3	$2^3 - 1$
atê 15	4	2^4	$2^4 - 1$
.			

Segundo teorema de Fisher

Em um fatorial 2^n , dividido em 2^{n-m} blocos de 2^m observações, existe um arranjo, tal que nenhum efeito principal, interações duplas ou interações de 3 fatores estejam confundidos com efeito de blocos, se

$$2^{m-1} \geq n$$

Exemplo: O fatorial 2^8 em 2^3 blocos com 2^5 unidades

$$n - m = 1, m = 7 \quad e \quad 2^{7-1} = 2^6 > 8$$

$$n - m = 4, m = 4 \quad e \quad 2^{4-1} = 2^3 = 8$$

logo, para $n = 8$, $m = 4$ é o mínimo.

n	n-m	m	2^{m-1}
até 4	1	3	2^2
até 8	4	4	2^{4-1}
até 16	11	5	2^{5-1}
.....

As aplicações dos teoremas e os sistemas de confundimento obtidos serão vistos posteriormente na discussão de planos de efeitos fatoriais.

3.3. Os fatoriais fracionados

3.3.1. Os fatoriais fracionados 2^{n-k}

3.3.1.1. Descrição de bloco principal, fração 2^{n-k} , conjunto de aliados.

Dividindo-se um delineamento 2^5 em 2^2 blocos com 2^3 unidades, cada bloco constituirá uma fração, chamada de fração 2^{5-2} .

Sejam A, B, C, D e E os cinco fatores. Confundido por exemplo, ABD e ACE, também está confundido BCDE. (3 g. l).

O bloco principal ou o subgrupo intrabloco consiste de todas as combinações de tratamentos satisfazendo

$$x_1 + x_2 + x_4 = 0 \pmod{2}$$

$$x_1 + x_3 + x_5 = 0 \pmod{2}$$

Bloco I	Bloco II (xd)	Bloco III (xe)	Bloco IV (xde)
00000 (1)	00010 d	00001 e	00011 de
11100 abc	11110 abcd	11101 abce	11111 abcde
11001 abe	11011 abde	11000 ab	11010 abd
10110 acd	10100 ac	10111 acde	10101 ace
10011 ade	10001 ae	10010 ad	10000 a
01010 bd	01000 b	01011 bde	01001 be
01111 bcde	01101 bce	01110 bcd	01100 bc
00101 ce	00111 cde	00100 c	00110 cd

O bloco II é formado a partir do bloco I, adicionando-se 1 à coluna correspondente ao fator d, ou multiplicando-se as combinações de tratamentos por d. Da mesma forma são construídos os outros dois blocos, adicionando-se 1 de forma conveniente.

Também poderíamos escrever desta maneira: bloco

principal consiste dos pontos para os $x_1 x_2 x_4 = -1$ e $x_1 x_2 x_5 = -1$. Multiplicando estas equações por x_4 e x_5 , respectivamente, e notando que $x_4^2 = x_5^2 = 1$, temos $x_4 = -x_1 x_2$, $x_5 = -x_1 x_3$.

Podemos também escrever o bloco principal como um delineamento básico 2^3 nos fatores A, B e C.

A	B	C	D		E
x_1	x_2	x_3	$x_4 = -x_1 x_2$		$x_5 = -x_1 x_3$
0	0	0	0	0	(1)
0	0	1	0	1	ce
0	1	0	1	0	bd
0	1	1	1	1	bcde
1	0	0	1	1	ade
1	0	1	1	0	acd
1	1	0	0	1	abe
1	1	1	0	0	abc

2^3 completo

e então adicionamos os outros dois fatores D e E, colocando $x_4 = x_1 + x_2 \pmod{2}$ e $x_5 = x_1 + x_3 \pmod{2}$, ou $x_4 = -x_1 x_2$ e $x_5 = -x_1 x_3$. Analogamente, o segundo bloco seria obtido fazendo $x_4 = +x_1 x_2$ e $x_5 = -x_1 x_3$, o terceiro bloco fazendo $x_4 = -x_1 x_2$ e $x_5 = +x_1 x_3$; e o quarto bloco fazendo

$$x_4 = +x_1 x_2 \quad e \quad x_5 = +x_1 x_3.$$

O termo fração regular 2^{n-k} é usado para descrever somente aqueles conjuntos com 2^{n-k} combinações de tratamentos que poderiam ocorrer no mesmo bloco quando o fatorial completo é dividido em 2^k blocos confundindo exatamente $2^k - 1$ efeitos. Portanto, podemos definir uma fração 2^{n-k} como um conjunto com 2^{n-k} pontos que constituem um subgrupo do grupo de combinações de tratamentos.

No delineamento 2^5 descrito acima, o bloco principal é a fração definida por

$$I = -ABD = -ACE = +BCDE$$

As outras frações são definidas por

$$I = +ABD = -ACE = -BCDE$$

$$I = -ABD = +ACE = -BCDE$$

$$I = +ABD = +ACE = +BCDE$$

O termo fração principal é usado, algumas vezes, para indicar a fração que contém (1), por analogia ao bloco principal.

BOX e HUNTER (1961) usam o termo fração principal para indicar a fração na qual todos os contrastes definições têm sinais positivos. No nosso exemplo poderia ser a fra

ção contendo de, a, be, abd, cd, ace, bc e abcde. Vamos considerar agora a fração em mais detalhe .

Para cada combinação de tratamento na fração é mantida a relação

$$1 = x_1 x_2 x_4 = x_1 x_3 x_5 = x_2 x_3 x_4 x_5$$

e multiplicando por x_1 , e recordando que $x_1^2 = 1$, temos

$$x_1 = x_2 x_4 = x_3 x_5 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$

em cada ponto, portanto A, BD, CE e ABCDE são indistinguíveis.

Os quatro efeitos nessa relação constituem um conjunto de ligados (do latim, "alias").

Existem 2^{n-k} conjuntos aliados e cada conjunto tem 2^{n-k} elementos. Cada efeito é ligado com os efeitos do mesmo conjunto, mas não com outros.

No exemplo descrito, temos os conjuntos de aliados:

$$\{(1), x_1 x_2 x_4, x_1 x_3 x_5, x_2 x_3 x_4 x_5\}$$

$$\{x_1, x_2 x_4, x_3 x_5, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5\}$$

$$\{x_2, x_1 x_4, x_1 x_2 x_3 x_5, x_3 x_4 x_5\}$$

$$\{x_3, x_1 x_2 x_3 x_4, x_1 x_5, x_2 x_4 x_5\}$$

$$\{x_4, x_1 x_2, x_1 x_3 x_4 x_5, x_2 x_3 x_5\}$$

$$\{x_5, x_1x_2x_4x_5, x_1x_3, x_2x_3x_4\}$$

$$\{x_2x_3, x_1x_3x_4, x_1x_2x_5, x_4x_5\}$$

$$\{x_2x_5, x_1x_4x_5, x_1x_2x_3, x_3x_4\}$$

Seja

$$\beta' = (\beta_0, \beta_{124}, \beta_{135}, \beta_{2345}, \beta_1, \beta_{24}, \beta_{35}, \beta_{12345}, \dots)$$

β' : vetor dos efeitos escritos por ordem dos conjuntos de aliados.

Seja $X'X$ a matriz produto-cruzado nas equações normais consistindo de matrizes quadradas $8J_4$ (J_4 é uma matriz quadrada de ordem 4 com todos os elementos unitários) ao longo da diagonal principal e zeros nas demais. O posto de $X'X$ é 8. Pode ser obtida uma matriz de posto completo escolhendo-se um efeito de cada um dos conjuntos de aliados e riscando as linhas e colunas remanescentes. Se o modelo reduzido escolhido inclui somente a média, os cinco efeitos principais, as interações BC ou DE, e CD ou BE, as equações de quadrados mínimos correspondentes têm um único conjunto de soluções.

O contraste A desta fração é

$$(a + abd + ace + abcde - de - be - cd - bc)$$

Sua esperança é

$$8(\beta_1 + \beta_{24} + \beta_{35} + \beta_{12345})$$

portanto, quando usamos o contraste para estimar A, estamos es
timando

$$A + BD + CE + ABCDE$$

As outras frações dão cadeias do tipo

$$A \pm BD \pm CE \pm ABCDE$$

com os sinais correspondendo aos sinais do contraste definição.
O conjunto completo de cadeias de aliados é

I + ABD + ACE + BCDE	A + BD + CE + ABCDE
B + AD + ABCE + CDE	AB + D + BCE + ACDE
C + ABCD + AE + BDE	AC + BCD + E + ABDE
BC + ACD + ABE + DE	ABC + CD + BE + ADE

Para estimar A é necessário estabelecer que BD, CE e ABCDE são nulos. Portanto, se planejarmos usar esta fração com a intenção de estimar A, precisamos decidir antecipadamente que as outras interações serão desprezadas.

A decisão de ignorar a interação de 5 fatores não causará problemas, mas não é prudente afirmar, sem verificação posterior, que as interações duplas BC e CE serão desprezíveis. Se estas duas interações particulares são as únicas que interessam ao experimentador, ele pode evitar essa dificuldade es

colhendo uma fração diferente tal como 2^{5-2} definida por

$$I = \underline{+} ABC = \underline{+} ADE = \underline{+} BCDE$$

As duas interações estarão, então, aliadas uma à outra, mas não a qualquer um dos efeitos principais. Não existe uma fração 2^{5-2} na qual a média, os 5 efeitos principais, BD e CE possam ser todos estimados. Se, por outro lado, o experimentador não decide previamente, para a condução do experimento, que qualquer uma das interações pode ser ignorada, ele não pode estimar, sem tendenciosidade, os cinco efeitos principais de qualquer fração 2^{5-2} . Neste caso terá que transformar em um experimento maior, ou então omitir um dos fatores.

3.3.1.2. Classificação de frações

As frações de fatoriais podem ser classificadas em três tipos mais importantes. Usaremos a nomenclatura de BOX e HUNTER (1961) para diferenciar essas classes, que são:

Delineamento de resolução III: nestes delineamentos nenhum efeito principal está confundido com qualquer outro efeito principal, mas efeitos principais estão confundidos com interações de 2.^a ordem e interações de 2.^a ordem com qualquer outra. Um delineamento 2^5 que pode ser reduzido a um 2^3 é de resolução III. E indica-se por 2^{5-2}_{III} .

Delineamentos de resolução IV: nestes delineamentos nenhum efeito principal está confundido com qualquer outro efeito principal ou interações de 2.^a ordem, mas as interações de 2.^a ordem estão confundidas com qualquer outra. Um delineamento 2^4 que pode ser reduzido a um 2^3 é de resolução IV. E indica-se por 2_{IV}^{4-1} .

Delineamentos de resolução V: nestes delineamentos nenhum efeito principal ou interações de 2.^a ordem estão confundidos com qualquer outro efeito principal ou interações de 2.^a ordem. Mas interações de 2.^a ordem estão confundidas com interações de 3.^a ordem. O delineamento é de resolução V e indica-se por 2_V^{5-1} .

3.3.1.3. Algumas frações 2^{n-k} . Frações saturadas

Veremos alguns exemplos de delineamentos fatoriais fracionados, aproveitando as passagens para introduzir alguns conceitos e nomenclaturas.

O delineamento 2^{3-1}

A fração 2^{3-1} é a menor do tipo 2^{n-k} e contém quatro pontos

I		II	
I = ABC		I = - ABC	
a	1 0 0	(1)	0 0 0
b	0 1 0	ab	1 1 0
c	0 0 1	ac	1 0 1
abc	1 1 1	bc	0 1 1

Na primeira fração

$$\begin{array}{l}
 I = ABC \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = BC \\ B = AC \\ C = AB \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{cada efeito principal está} \\ \text{ligado com uma interação du} \\ \text{pla} \end{array}
 \end{array}$$

Também na segunda fração, cada efeito principal é associado a uma interação dupla. Ambas as frações são planos de 3 letras.

Na primeira fração, os estimadores dos efeitos principais são

$$\hat{\beta}_1 = \frac{abc + a - b - c}{4} \quad \text{com esperança } \beta_1 + \beta_{23}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{abc + b - a - c}{4} \quad \text{com esperança } \beta_2 + \beta_{13}$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{abc + c - a - b}{4} \quad \text{com esperança } \beta_3 + \beta_{13}$$

A variância de cada estimador é $\sigma^2/4$.

Delineamentos com 8 pontos experimentais

As duas frações 2^{4-1} são planos de 4 letras com 8 pontos. Cada um dos efeitos principais está aliado a uma interação de 3 fatores.

Para a primeira fração temos

$$I = +ABCD \quad \text{então} \quad \left\{ \begin{array}{l} A = BCD \\ B = ACD \\ C = ABD \\ D = ABC \end{array} \right.$$

e as interações duplas estão ligadas em pares

$$AB = CD$$

$$AC = BD$$

$$AD = BC$$

Se é possível conhecer, de antemão, que um dos quatro fatores não interage com qualquer um dos outros, as interações envolvendo este fator podem ser suprimidas e, então, as outras três interações duplas serão estimadas.

Delineamentos com 16 pontos experimentais

As frações 2^{5-1} definidas por $I = + ABCDE$ ou $I = - ABCDE$ formam delineamento de resolução V.

Na primeira fração: $I = + ABCDE$

A = BCDE	AB = CDE	BD = ACE
B = ACDE	AC = BDE	BE = ACD
C = ABDE	AD = BCE	CD = ABE
D = ABCE	AE = BCD	CE = ABD
E = ABCD	BC = ADE	DE = ABC

Cada efeito principal está ligado a uma interação de quatro fatores; cada interação de 2 fatores está ligada a uma interação de 3 fatores. Existem 5 efeitos principais e 10 interações duplas. Portanto, existem tantos efeitos principais a serem estimados quantos são os graus de liberdade.

Análise de Variância

F.V.	G.L.
Efeitos principais	5
Interações duplas	10
Erro	0
Total	15

Um plano desta forma é saturado, a menos que se

considere as interações duplas como insignificantes, porque nossa estimativa do erro não tem graus de liberdade.

Isso não acontece na fração 2^{6-1} , que envolve 32 combinações de tratamentos para as quais $I = ABCDEF$.

Análise de Variância

F.V.	G.L.
Efeitos principais	6
Interações duplas	15
Erro	10
Total	31

Nesta fração estamos considerando como nulas as interações de 5 fatores, ligadas aos efeitos principais, as interações de 4 fatores, ligadas às interações duplas e às interações de 3 fatores.

Definição: Uma fração na qual cada grau de liberdade é usado para estimar um efeito, é uma fração saturada.

3.3.1.4. Análise de frações 2^{n-k}

Restringir-nos-emos apenas a indicar o caminho a ser seguido para efetuar tal análise. As aplicações serão vistas posteriormente, quando serão analisados vários tipos de delineamentos.

A técnica geral consiste em considerar a fração 2^{n-k} como um fatorial completo num conjunto com $(n-k)$ dos fatores, aplicar o algoritmo de YATES (1937) e, então, incorporar os outros fatores na última coluna.

Por exemplo, na fração 2^{4-1} definida por $I=ABCD$, procedemos como se o delineamento fosse um delineamento 2^3 em A, B e C. Aplicamos o algoritmo de YATES (1937) para o delineamento básico 2^3 , ignorando D até escrevermos os efeitos na última coluna da tabela, que é conseguida fazendo $x_4 = x_1x_2x_3$. Poderia ser aplicado o algoritmo ao 2^3 em A, B e D ou A, C e D, ou em B, C e D.

3.3.2. Fatoriais fracionados das séries 3^n

Seja a fração 3^{n-1} , que é equivalente a escolher um bloco entre os 3 blocos contendo 3^{n-1} combinações de tratamentos.

Se $n = 4$, temos a fração 3^{4-1} contendo 27 combi-

nações de tratamentos.

Escolhendo a relação de identidade

$$I = ABC^2D_0$$

é o mesmo que escrever

$$X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 0 \pmod{3}$$

temos

$$\begin{aligned} A &= A(ABC^2D) = A(ABC^2D)^2 = A(A^2B^2CD^2) = \\ &= B^2CD^2 = (B^2CD^2)^2 = BC^2D \end{aligned}$$

Agora vamos procurar uma fração 3^{4-2} tal que os efeitos principais ou interações duplas não apareçam na relação de identidade. O procedimento consiste em escrever o 3^2 completo e depois associar as colunas restantes fazendo multiplicações convenientes.

Se a relação de identidade completa for

$$I = ABC_0^2 = AB^2D_0^2 = ACD_0 = BCD_0^2$$

onde as duas primeiras são escolhidas e as outras são obtidas assim

$$(ABC^2)(AB^2D^2) = A^2C^2D^2 = (A^2C^2D^2)^2 = ACD_0$$

e

$$(ABC^2)(AB^2D^2)^2 = (ABC^2)(A^2BD) = B^2C^2D = (B^2C^2D)^2 = BCD_0^2$$

A	B	C	D
x_1	x_2	$x_1 x_2$	$x_1 x_2^2$
0	0	0	0
0	1	1	2
0	2	2	1
1	0	1	1
1	1	2	0
1	2	0	2
2	0	2	2
2	1	0	1
2	2	1	0

} A_0

} A_1

} A_2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \pmod{3} & \rightarrow ABC_0^2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0 \pmod{3} & \rightarrow AB^2D_0^2 \end{cases}$$

somando as duas equações temos

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \pmod{3}$$

multiplicando por 2

$$x_1 + x_3 + x_4 = 0 \pmod{3} \rightarrow ABD_0$$

e

$$+ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 & (\text{mod } 3) \\ 2(x_1 + 2x_2 + 2x_4) = 0 & (\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

ou

$$2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \quad (\text{mod } 3)$$

fazendo

$$2(2x_2 + 2x_3 + x_4) = 0 \quad (\text{mod } 3)$$

$$x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \quad (\text{mod } 3) \quad + \quad BCD_0^2$$

Tomando a relação definição

$$I = ABC^2 = AB^2D^2 = ACD = BCD^2$$

e multiplicando por A

$$A = A^2BC^2 = A^2B^2D^2 = A^2CD = ABCD^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = (A^2BC^2)^2 = (A^2B^2D^2)^2 = (A^2CD)^2 = ABCD^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = AB^2C = ABD = AC^2D^2 = ABCD^2 \quad (*)$$

e novamente multiplicando por A²

$$A^2 = A^3BC^2 = A^3B^2D^2 = A^3CD = A^2BCD^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = BC^2 = B^2D^2 = CD = A^2BCD^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A^2)^2 = BC^2 = (B^2D^2)^2 = CD = (A^2BCD^2)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = BC^2 = BD = CD = AB^2C^2D \quad (**)$$

Devido a (*) e (**) todo efeito estima, portanto, 9 efeitos. Podemos ver esses confundimentos mais facilmente, como segue:

Conjunto A_0	BD_0	$AC^2D_0^2$	$AB^2C^2D_0$	AB^2C_0	etc ...
Conjunto A_1	$\Leftrightarrow BD_1$	$\Leftrightarrow AC^2D_1^2$	$\Leftrightarrow AB^2C^2D_1$	$\Leftrightarrow AB^2C_1$	\Leftrightarrow etc...
Conjunto A_2	BD_2	$AC^2D_2^2$	$AB^2C^2D_2$	AB^2C_2	etc...

Os dois graus de liberdade da comparação entre A_0 , A_1 e A_2 são equivalentes a qualquer uma das outras nove comparações.

3.3.3. Extensão do teorema de Fisher

Seja s um inteiro primo positivo. Para se distribuir s^{n-k} combinações de tratamentos em s^k blocos e não confundir efeitos principais com interações de segunda ordem, é suficiente que

$$\frac{s^{n-k} - 1}{s - 1} \geq n$$

4. CORPOS DE GALOIS

4.1. Corpos finitos

Seja $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{s-1}\}$ um conjunto com s ($s > 1$) elementos ou marcas.

Este conjunto forma um grupo Abeliano de ordem s , com a operação definida por

$$+ : U \times U \rightarrow U \quad (\text{adição})$$

$$(u_i, u_j) \rightarrow u_i \cdot u_j$$

Se as propriedades seguintes estiverem satisfeitas

a) $(u_i + u_j) + u_k = u_i + (u_j + u_k)$ (lei associativa)

b) $u_i + u_j = u_j + u_i$ (lei comutativa)

c) Existe uma marca u_0 em U tal que

$$u_i + u_0 = u_i = u_0 + u_i \quad \text{para todo } u_i \text{ em } U \text{ (elemento neutro)}$$

d) Para qualquer u_i em U , existe uma marca u_i' em U tal que

$$u_i + u_i' = u_0 = u_i' + u_i \quad (\text{elemento inverso em relação a } +)$$

Agora, definindo outra operação em U

$$. : U \times U \rightarrow U$$

$$(u_i, u_j) \quad u_i \cdot u_j \quad (\text{multiplicação})$$

Se as propriedades a), b), c) e d) estiverem satisfeitas para U com a operação . , o conjunto U com esta operação forma um grupo Abelianano,

Finalmente, se U com a operação + é um grupo Abelianano, U com a operação . é um grupo Abelianano e, se a seguinte propriedade distributiva estiver satisfeita:

$$e) \quad u_i(u_j + u_k) = u_i u_j + u_i u_k \quad \text{para quaisquer } u_i, u_j \text{ e } u_k \text{ em } U.$$

U forma um corpo de ordem s.

Por exemplo: Grupo dos inteiros módulo n

$$\text{Seja } A = Z = \{ \dots, -m, \dots, -1, 0, 1, \dots, m, \dots \}$$

e seja n um número inteiro arbitrário.

Definindo uma relação de equivalência em Z do seguinte modo:

$$z, z' \in Z, \quad z \sim z' \Leftrightarrow z - z' \quad \text{é um múltiplo inteiro de } n.$$

Essa relação de equivalência é chamada de con-
gruência módulo n e é indicada por $\equiv (\text{mod } n)$.

Assim,

$$z, z' \in \mathbb{Z}, \quad z \equiv z' \pmod{n} \iff z - z' = kn, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Calculando a classe \bar{z} , $z \in \mathbb{Z}$, relativamente a \pmod{n} .

$$\text{Se } z \in \mathbb{Z}, \quad \bar{z} = \{a \in \mathbb{Z} : a \equiv z \pmod{n}\} \quad \text{e}$$

$$a \in \bar{z} \iff a \equiv z \pmod{n} \iff a - z = kn, \quad k \in \mathbb{Z} \iff a = z + kn, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Daí segue que: } \bar{z} = \{z + kn : k \in \mathbb{Z}\}$$

Se $n > 0$, a relação $\equiv \pmod{n}$ nos fornece exatamente n classes distintas, que são $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}$.

Assim, por exemplo, $a \equiv \pmod{3}$ nos fornece exatamente $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ que são classes deixando respectivamente restos zero, 1 e 2 na divisão por 3.

E agora vamos definir conjunto quociente: seja \sim uma relação de equivalência em um conjunto A . Chamamos de conjunto quociente de A pela relação de equivalência \sim , e denotamos por A/\sim , ao conjunto de todas as classes de equivalência relativamente à relação \sim .

Assim,

$$A/\sim = \{\bar{x} : x \in A\}$$

Na relação $\equiv (\text{mod } n)$, $n > 0$, em \mathbb{Z} temos

$\mathbb{Z}/\equiv (\text{mod } n) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$ que também será representado por $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$

De agora em diante vamos considerar $n = p$, um número primo, então

$$U = \mathbb{Z}_n$$

onde

$$u_0 = 0 = \bar{0}, \quad u_1 = 1 = \bar{1}, \quad \dots, \quad u_p = p-1 = \overline{p-1}$$

Estas marcas com as operações $+$ e \cdot constituem um corpo finito de ordem p .

4.2. Corpos de Galois

Galois desenvolveu as propriedades de uma forma particular de corpos finitos, conhecidos como corpos de Galois, que na verdade exaure todos os corpos finitos.

Seja U um corpo. Definimos o anel de polinômios $U\{x\}$ como sendo o conjunto de todos os elementos da forma

$$f(x) = \sum_{i=0}^n u_i x^i$$

onde $u_i \in U$ para $i = 0, 1, \dots, n$ e temos $f(x) = 0$ se, e somente se, $u_i = 0$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

As operações em $U[x]$ são definidas da seguinte maneira:

$$\text{Sejam } f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

adição de polinômios:

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$$

multiplicação de polinômios

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k$$

onde

$$c_k = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + a_{k-2} b_2 + \dots + a_0 b_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

Afirmamos que $U[x]$ é um anel com estas operações, sua multiplicação é comutativa e possui um elemento unidade.

No polinômio $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$, se $a_n \neq 0$,

dizemos que n é o grau de $f(x)$. E a notação é $\text{gr } f(x)$.

Algoritmo da divisão

Seja $f(x)$ e $g(x)$ dois polinômios com coeficientes num corpo U , com $f(x) \neq 0$, então existe um único par $(q(x), r(x))$, de polinômios em $U[x]$, tal que

$$f(x) = p(x) q(x) + r(x) \quad \text{onde}$$

$$\text{gr } q(x) < n, \quad \text{se } r \neq 0$$

Consideremos agora o conjunto

$$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$$

Seja

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_p$$

$F(x)$: qualquer polinômio com coeficientes inteiros

Pelo algoritmo da divisão

$$F(x) = P(x) Q(x) + R(x), \quad \text{com } \text{gr } R(x) < \text{gr } Q(x)$$

Podemos escrever o resto da divisão de $F(x)$ por $P(x)$ como

$$R(x) = f(x) + p \cdot q(x)$$

onde

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}, \quad a_i \in \mathbb{Z}_p \quad e$$

$q(x)$: polinômio com coeficientes inteiros

Então, temos

$$F(x) = P(x) \cdot Q(x) + f(x) + p \cdot q(x)$$

Chamamos $f(x)$ o resíduo de $F(x)$ modulus p e $P(x)$ e escrevemos

$$F(x) \equiv f(x) \pmod{[p, P(x)]}$$

Esta é uma congruência com duplo módulo.

As funções $F(x)$ que podem ser obtidas, fixando $f(x)$ e variando $q(x)$ e $Q(x)$ de todas as maneiras possíveis, mas sem alterar as propriedades, formam uma classe de resíduos que é completamente determinada por $f(x)$, p e $P(x)$.

E podemos escrever o seguinte lema:

"Dois polinômios em x com coeficientes inteiros são congruentes modulus p e $P(x)$ se, e somente se, eles pertencem à mesma classe de resíduos modulus p e $P(x)$."

O número de funções da forma $f(x)$ com as restrições indicadas é igual a p^n , desde que cada um dos n coeficientes independentes a_i seja qualquer um dos p valores. Portanto, o número de classes de resíduo modulus p e $P(x)$ é também igual a p^n .

Se cada a_i for zero, a classe correspondente se rá C_0 , classe zero.

Se tivermos

$$F_i(x) = f_i(x) + pq_i(x) + P(x)Q(x) \quad (i = 1, 2)$$

então é óbvio que, a classe a que qualquer uma das funções $F_1(x) + F_2(x)$, $F_1(x) - F_2(x)$, $F_1(x)F_2(x)$ pertença, é completamente determinada pela função correspondente $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$, $f_1(x)f_2(x)$. Portanto, as classes de resíduo módulo p e $P(x)$ combinam unicamente sob adição, subtração e multiplicação.

Para que a divisão de uma classe arbitrária por qualquer classe C diferente da classe C_0 conduza a uma 3.^a classe, é necessário que

$$C_i C = C_0 \Rightarrow C_i = C_0$$

E para que isso aconteça, é necessário que p seja um número primo, como pode ser visto facilmente a partir de uma consideração das classes para as quais os coeficientes a_1, a_2, \dots, a_{n-1} do correspondente $P(x)$ sejam todos nulos. É necessário também que $P(x)$ seja irredutível módulo p , isto é, não possa ser expresso na forma

$$P(x) = P_1(x) P_2(x) + p P_3(x)$$

onde os $P_i(x)$ são polinômios em x com coeficientes inteiros, os graus de $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são positivos e menores que o grau de $P(x)$.

Se $P(x)$ é redutível módulo p , temos uma equa

ção da forma precedente, e então as classes correspondentes a $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são ambas diferentes de C_0 enquanto que seu produto é C_0 . Portanto, para que as classes de resíduos constituam um corpo finito é necessário que p seja um número primo e que $P(x)$ seja irredutível módulo p .

Teorema: As classes de resíduos módulo p e $P(x)$ formam um corpo finito de ordem p^n quando, e somente quando, p é um número primo e $P(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros, irredutível e de grau n módulo p .

A prova deste teorema pode ser encontrada em CARMICHAEL (1956).

O corpo finito formado por estas p^n classes de resíduos é chamado corpo de Galois de ordem p^n . É denotado pelo símbolo $GF[p^n]$.

4.3. Uso da teoria de Galois

Desejamos encontrar as classes de resíduos para $GF[3^2]$, ou seja $p = 3$ e $n = 2$.

As classes de resíduos podem ser representadas pelas funções $f_i(x)$, que são denotadas por u_0, u_1, \dots, u_{s-1} , onde $s = p^n$.

Como

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}, \quad a_i = 0, 1, \dots, p-1$$

e neste exemplo $n = 2, p = 3$, as funções $f(x)$ possíveis são da forma

$$f(x) = a_0 + a_1x, \quad a_i = 0, 1, 2$$

ou

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & u_0 \\ 1 & u_1 \\ 2 & u_2 \\ x & u_3 \\ 1+x & u_4 \\ 2+x & u_5 \\ 2x & u_6 \\ 1+2x & u_7 \\ 2+2x & u_8 \end{array} \right.$$

Os polinômios $P(x)$ de grau $n = 2$ possíveis são da forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \text{onde } a_0, a_1, a_2 = 0, 1, 2$$

Como $P(x)$ deve ser irredutível módulo 3, podemos excluir os casos em que $a_0 = 0$. Tomando então $a_0 = 1$, temos como funções possíveis

$$P(x) = 1 + a_1x + a_2x^2$$

Verificamos, por exclusão, que $P(x) = x^2 + 1$ é irreduzível

$$P(x) = 1 + x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow P(x) = 1 \pmod{3} \\ x = 1 \Rightarrow P(x) = 2 \pmod{3} \\ x = 2 \Rightarrow P(x) = 2 \pmod{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{não possui raiz} \Rightarrow \text{não} \\ \text{é fatorável} \end{array}$$

portanto é irreduzível módulo 3.

Mas $P(x) = 1 + x + x^2$ não é irreduzível, pois:

$$\left. \begin{array}{l} P(0) = 1 \\ P(1) = 0 \\ P(2) = 1 \end{array} \right\} \text{ possui uma raiz} \Rightarrow \text{é fatorável}$$

Como $P(1) = 0$, e $x = 1$ é o único valor que anula o polinômio de 2º grau $x^2 + x + 1$, temos que 1 é raiz dupla, logo $x^2 + x + 1 = (x + 2)^2 \pmod{3}$.

Tomemos qualquer polinômio, digamos

$$F(x) = 5x^3 + 2x^2 + 4x + 1$$

Pelo algoritmo da divisão

$$F(x) = \underbrace{(x^2 + 1)}_{P(x)} \underbrace{(5x + 2)}_{Q(x)} + \underbrace{3(-x - 1)}_{pq(x)} + \underbrace{2x + 2}_{f(x)}$$

Se $P(x)$ é irreduzível, então $f_1(x)$ forma grupo.

Agora enumeramos os polinômios $P(x)$ da forma

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \quad (\alpha_2 \neq 0)$$

$$P(x) = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = x \cdot x \\ 2x^2 = 2x \cdot x \\ x + x^2 = x(1 + x) \\ 2x + x^2 = x(2 + x) \\ 2x + 2x^2 = 2x(2 + x) \\ \hline 1 + x^2 \quad \text{irredutível} \\ 1 + 2x^2 = (1 + x)(1 + 2x) \\ 1 + x + x^2 = 1 + 4x + 4x^2 = (1 + 2x)^2 \\ 1 + x + 2x^2 \quad \text{irredutível} \\ 1 + 2x + x^2 = (1 + x)^2 \\ 1 + 2x + 2x^2 \quad \text{irredutível} \\ \hline 2 + x^2 = 2 + 3x + x^2 = (2 + x)(1 + x) \\ 2 + 2x^2 \quad \text{irredutível} \\ 2 + x + x^2 \quad \text{irredutível} \\ 2 + x + 2x^2 = 2 + 4x + 2x^2 = 2(1 + x)^2 \\ 2 + 2x + x^2 \quad \text{irredutível} \\ 2 + 2x + 2x^2 = 2 + 8x + 8x^2 = 2(1 + 2x)^2 \end{array} \right.$$

Escolhendo $P(x) = 1 + x + 2x^2$

$$P(x) = 0 \rightarrow 1 + x + 2x^2 = 0$$

$$2x^2 = -x - 1$$

$$2(2x^2) = -2x - 2 = x + 1 \quad (\text{somando-se } 3x+3)$$

Agora necessitamos derivar as tabelas de adição e multiplicação. Escrevemos:

$$f(x) = b_0 + b_1x$$

u_i	$f(x)$	y^j
u_0	0	
u_1	1	y^8
u_2	2	y^4
u_3	x	$y^{(*)}$
u_4	$1 + x$	y^2
u_5	$2 + x$	y^7
u_6	$2x$	y^5
u_7	$1 + 2x$	y^3
u_8	$2 + 2x$	y^6

(*) marca primitiva (gerador)

Existe um teorema que diz que todos os elementos do grupo, exceto o elemento zero (u_0), podem ser representados como potências de um elemento que é de tipo especial, conhecido como marca primitiva. As representações em termos de u_i podem ser usadas para formar a tabela da adição e a representação em termos de y^j podem ser usadas para formar a tabela da multiplicação como segue:

Tabela de adição

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	4	5	3	7	8	6	1	2	0
5	5	3	4	8	6	7	2	0	1
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	7	8	6	1	2	0	4	5	3
8	8	6	7	2	0	1	5	3	4

Cada polinômio u_i é indicado na tabela pelo índice i . Os resultados das operações também estão indicados pelo índice do polinômio resultante. Assim:

$$2 + 5 = u_2 + u_5 = 2 + (2 + x) = 4 + x = 1 + x = u_4 = 4$$

então

$$2 + 5 = 4$$

Tabela de multiplicação

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	1	6	8	7	3	5	4
3	0	3	6	4	7	1	8	2	5
4	0	4	8	7	2	3	5	6	1
5	0	5	7	1	3	8	2	4	6
6	0	6	3	8	5	2	4	1	7
7	0	7	5	2	6	4	1	8	3
8	0	8	4	5	1	6	7	3	2

Também aqui cada polinômio u_i é representado pelo seu índice i , e a seguir procuramos os polinômios y^j correspondentes. Assim

$$3 \times 4 = u_3 \times u_4 = y \cdot y^2 = y^3 = u_7 = 7$$

$$1 \times 1 = u_1 \times u_1 = y^8 \cdot y^8 = y^{16} = y^8 = u_1 = 1 ,$$

utilizando o fato que $y^{p^n-1} = 1$.

Aplicação da teoria de Galois para formar a fração principal de um delineamento fatorial fracionado.

Queremos construir um delineamento 4^5 em $4^2 = 16$ observações, através de um $GF(2^2)$.

Em primeiro lugar, vamos construir o $GF(2^2)$.

Temos $p = 2$, $n = 2$.

Os polinômios da forma $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ são:

$$\begin{aligned}x^2 &= x \cdot x \\1 + x^2 &= (1 + x)(1 + x) \\x + x^2 &= x(1 + x) \\1 + x + x^2 &\text{ irredutível}\end{aligned}$$

Somente $P(x) = 1 + x + x^2$ é irredutível.

Fazemos $P(x) = 0 \Rightarrow 1 + x + x^2 = 0$

$$x^2 = -x - 1 = x + 1 \quad (\text{so mando-se } 2x + 2)$$

$$f(x) = b_0 + b_1x$$

(*) $y = x$: marca primitiva

u_i	$f(x)$	y^j
u_0	0	
u_1	1	y^3
u_2	x	$y^{(*)}$
u_3	$1 + x$	y^2

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

I

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

II

Para formar o bloco principal, escrevemos todas as combinações de tratamentos para 2 fatores em 4 níveis ($16 = 4^2$). E, em seguida, obtemos as outras três colunas pelos métodos explorados anteriormente, mas usando as operações indicadas nas tabelas I e II.

A	B	AB	AB^2	AB^3
x_1	x_2	x_1+x_2	x_1+2x_2	x_1+3x_2
0	0	0	0	0
0	1	1	2	3
0	2	2	3	1
0	3	3	1	2
1	0	1	1	1
1	1	0	3	2
1	2	3	2	0
1	3	2	0	3
2	0	2	2	2
2	1	3	0	1
2	2	0	1	3
2	3	1	3	0
3	0	3	3	3
3	1	2	1	0
3	2	1	0	2
3	3	0	2	1
A	B	C	D	E

Então, para $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ em $x_1 + 3x_2$, temos

$$0 + 3 \cdot 1 = 0 + 3 = 3$$

$x_1 + 2x_2$, com $x_1 = 1$, $x_2 = 2 \Rightarrow 1 + 2(2) = 1 + 3 = 2$

As relações de identidade são:

$$I = ABC_0 = AB^2D_0 = AB^3E_0$$

Se tivéssemos usado incorretamente mod 4 em vez de $GF(2^2)$ as três últimas colunas não seriam ortogonais, pois "mod 4" não forma corpo.

5. PLANOS DE EFEITOS PRINCIPAIS

5.1. O uso de delineamentos reduzidos

5.1.1. Delineamentos Ótimos e eficientes

Considerando novamente o modelo (2) visto na secção 3.1.1.1.

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ij} + (\alpha\beta)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{ijk}$$

Naquele experimento fatorial 2^3 , sem repetição, o número de observações, que chamaremos de N , é menor ou igual a 8. Então, tendo N observações, desejamos estimar os efeitos que não podem ser ignorados. Para isso precisamos resolver um sistema com N equações lineares representadas pelo modelo acima.

As equações sempre envolvem a média μ , por isso, para estimar n efeitos, é necessário ter, ao menos, $n+1$ observações.

Se estivermos interessados apenas nos efeitos principais, e então $n = 3$, devemos ter um número de observações maior ou igual a 4.

Esse conjunto de observações poderia ser:

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} Y_{(1)} \\ Y_A \\ Y_B \\ Y_C \end{bmatrix} \quad X = \begin{array}{c} \mu \quad A \quad B \quad C \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ou então, poderíamos escolher

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} Y_C \\ Y_A \\ Y_B \\ Y_{ABC} \end{bmatrix} \quad X = \begin{array}{c} \mu \quad A \quad B \quad C \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$X'X = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad (X'X)^{-1} = \begin{vmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{vmatrix}$$

Observamos que, nesse caso, a matriz de delimitação é a mesma que foi mostrada no fatorial 2^2 , modelo (1) da secção 3.1.1.1.

Se o número de observações para estimar $n = 3$ efeitos, for maior que 4, a solução não será única

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{(1)} \\ Y_A \\ Y_B \\ Y_C \\ Y_{AB} \\ Y_{AC} \\ Y_{BC} \\ Y_{ABC} \end{bmatrix} \quad X = \begin{array}{c} \mu \quad A \quad B \quad C \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

Comparando-se $(X'X)^{-1} = \frac{1}{4} I_4$, do experimento com 4 observações com a outra de 8 observações, verifica-se que quanto maior o número de observações, maior a precisão do experimento.

A matriz de variância-covariância dos estimadores é dada por

$$D = (X'X)^{-1} \sigma^2$$

onde, σ^2 é a variância dos erros das observações (assumindo-se igual para todas).

A variância do erro na estimação de um efeito dependerá do delineamento do experimento. Mas, será sempre da forma σ^2/t_i , onde t_i é chamado de precisão constante.

Nos dois exemplos que vimos, verifica-se

$$\frac{\sigma^2}{t_i} = \frac{\sigma^2}{4} \quad \text{para o fatorial } 2^3 \text{ com 4 observações e}$$

$$\frac{\sigma^2}{t_i} = \frac{\sigma^2}{8} \quad \text{para o fatorial } 2^3 \text{ com 8 observações}$$

t_i pode crescer indefinidamente, à medida em que N cresce. E

o nosso objetivo é encontrar delineamentos que maximizem todos os t_i simultaneamente, para um dado N . Estes serão chamados de delineamentos ótimos. Como exemplo, vejamos o 2^3 , onde já foi mostrado que, quanto maior o número de parcelas, maior a precisão do experimento.

Por outro lado, o experimento deve ser eficiente. A eficiência da variância de uma fração de fatorial é obtida comparando-se as médias das variâncias dos estimadores de efeitos com a menor variância que poderia ser esperada, com os fatores nos níveis ± 1 . Por exemplo, para um efeito principal tal como A , a variância mínima do estimador de A , digamos \hat{A} , é obtida quando metade dos pontos estão em $x_1 = +1$ e metade estão em $x_1 = -1$, a variância é, então,

$$\text{Var}(\hat{A}) = \sigma^2/N$$

As frações do tipo 2^{n-k} têm 100% de eficiência da variância.

A eficiência dos graus de liberdade é a razão do número de efeitos estimados com o número de graus de liberdade no delineamento. As frações 2^{5-1} têm 100% de eficiência dos graus de liberdade para estimar efeitos principais e interações de 1.^a ordem.

No caso de 3 efeitos estimados, através de 8 observações temos eficiência dos graus de liberdade igual a 3/7.

Os delineamentos em que utilizamos $n+1$ observações para estimar n efeitos são chamados de saturados. Os deli

neamentos saturados têm 100% de eficiência dos graus de liberdade.

5.1.2. Os planos de efeitos principais na série 2^n

Considerando as afirmações feitas até aqui, passaremos a estudar os planos de efeitos principais, onde as interações de primeira ordem estão ligadas aos efeitos principais, e as interações de maior ordem são consideradas nulas.

O modelo para efeitos principais é

$$E(Y_j) = \beta_0 + \sum_i \beta_i x_{ji}$$

com N observações e n fatores

$x_{ji} = \pm 1$: valor de x_i na j -ésima observação

Podemos escrever

$$E(\underline{y}) = D\underline{\beta}$$

onde

$$D = (\underline{1}, X) \quad \text{e} \quad \underline{\beta}' = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

Desejamos encontrar um delineamento tal que a matriz $D'D$ seja diagonal, e cujos elementos (dessa diagonal) sejam iguais a N. Portanto, necessitamos que $D'D = N I$, e os ve

Na matrix X não há ortogonalidade

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & -4 & -6 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 4 & 0 & 8 & 4 & 4 & 6 \\ -4 & 4 & 0 & 4 & 4 & 8 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 & 6 \\ -6 & 2 & 2 & 2 & 6 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & -1/2 & -1/2 & -1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & -1/2 & -1/4 & -1/2 & 1/2 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & -1/2 & -1/4 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 & -1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & -1 \\ 1/4 & -1/4 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (I)$$

Na matriz X de delineamento, não ortogonali-

dade entre as colunas e a matriz $X'X$ não é diagonal. Não há balanceamento entre os sinais + e - na matriz X , e as variâncias σ^2/t_i dos efeitos principais não têm os t_i maximizados simultaneamente.

Agora, se o conjunto de observações fosse dado por

$$\begin{array}{c}
 \tilde{Y} = \\
 \left[\begin{array}{c}
 \text{def} \\
 \text{afg} \\
 \text{beg} \\
 \text{abd} \\
 \text{cdg} \\
 \text{ace} \\
 \text{bcf} \\
 \text{abcdefg}
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 X = \\
 \begin{array}{cccccccc}
 \mu & A & B & C & D & E & F & G \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e } (X'X)^{-1} = \frac{1}{8} I_8 \quad (\text{II})$$

Nesse caso, a matriz X de delineamento satisfaz as condições de ortogonalidade, e as variâncias dos efeitos σ^2/t_i , têm os t_i maximizados.

Comparando (I) e (II), notamos que a segunda apresenta as seguintes vantagens em relação à primeira:

- as variâncias são menores e iguais
- não há covariância entre as estimativas dos efeitos dos fatores principais.

O problema agora é: como obter o conjunto de observações que possibilite tal delineamento?

Os passos a seguir consistem no fracionamento de

experimentos fatoriais para obter planos de efeitos principais, por meio de métodos diferentes.

5.2. Planos para experimentos fatoriais simétricos 2^k

Dado um experimento fatorial completo 2^k , e desejando estudar apenas os efeitos principais, podemos reduzir esse experimento a um delineamento com N combinações de tratamentos, sendo $N = k+1$. O método utilizado é descrito por BOX e HUNTER (1961).

O número de parcelas do delineamento reduzido é uma potência de dois, $N = 2^n$.

Então, se

$k = 3 \Rightarrow$ redução: 2^3 em $N = 4 = 2^2$ parcelas

$k = 7 \Rightarrow$ redução: 2^7 em $N = 8 = 2^3$ parcelas

$k = 15 \Rightarrow$ redução: 2^{15} em $N = 16 = 2^4$ parcelas

.....

$k = 2^n - 1 \Rightarrow$ redução: $2^{(2^n - 1)}$ em $N = 2^n$ parcelas

5.2.1. Construção de um fatorial 2^{k-m}_{III}

Vamos desenvolver um fatorial 2^{k-m}_{III} . A ilustração do procedimento será feita através de um delineamento fatorial com 7 fatores em 2 níveis. Assim, veremos a construção de um plano de efeitos principais 2^{7-4}_{III} . Os fatores são A, B, C, D, E, F e G.

1) Tomamos todas as combinações de tratamentos para o delineamento completo 2^{k-m} .

O fatorial completo 2^3 tem as seguintes combinações de tratamentos:

$$X_1, X_2, X_3, X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3 \text{ e } X_1X_2X_3$$

As seguir, organizamos uma tabela onde aparecem todas as observações para esse delineamento.

	X_1	X_2	X_3
(1)	—	—	—
a	+	—	—
b	—	+	—
ab	+	+	—
c	—	—	+
ac	+	—	+
bc	—	+	+
abc	+	+	+

2) Nos fatoriais completos 2^n , temos n fatores e 2^n combinações de tratamentos. No nosso exemplo, o 2^3 completo tem 3 fatores e 8 combinações de tratamentos. Agora, a partir do delineamento 2^3 , vamos obter o delineamento reduzido 2^{7-4}_{III} , fazendo as seguintes associações:

$$A = X_1, \quad B = X_2, \quad C = X_3, \quad D = X_4 = X_1 X_2$$

$$E = X_5 = X_1 X_3, \quad F = X_6 = X_2 X_3, \quad G = X_7 = X_1 X_2 X_3$$

Para preencher a nova tabela, os sinais - e + são colocados de acordo com a multiplicação dos fatores envolvidos em cada solução.

Assim, teremos a seguinte fração do delineamento 2^7 , que será o delineamento reduzido:

combinações de tratamentos	A	B	C	D	E	F	G
	X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$	$X_1 X_2 X_3$
def	-	-	-	+	+	+	-
afg	+	-	-	-	-	+	+
beg	-	+	-	-	+	-	+
abd	+	+	-	+	-	-	-
cdg	-	-	+	+	-	-	+
ace	+	-	+	-	+	-	-
bcf	-	+	+	-	-	+	-
abcdefg	+	+	+	+	+	+	+

3) As identificações feitas com as interações generalizadas em 2), são as relações geradoras. Assim, no 2^7 :

$$I = ABD = X_1 X_2 (X_1 X_2)$$

$$I = ACE = X_1 X_3 (X_1 X_3)$$

$$I = BCF = X_2 X_3 (X_2 X_3)$$

$$I = ABCG = X_1 X_2 X_3 (X_1 X_2 X_3)$$

4) Lembrando que $I^2 = I$, podemos operar essas relações geradoras duas a duas, depois três a três, e assim por diante até conseguir uma única relação envolvendo I, e ao final tem-se a relação definição completa.

No fatorial 2^7

- duas a duas

$$\begin{aligned} I = ABD \times ACE &= [X_1 X_2 (X_1 X_2)] [X_1 X_3 (X_1 X_3)] = X_1^2 X_2 X_3 (X_1 X_2) (X_1 X_3) = \\ &= X_2 X_3 (X_1 X_2) (X_1 X_3) = BCDE \end{aligned}$$

$$I = ABD \times BCF = [X_1 X_2 (X_1 X_2)] [X_2 X_3 (X_2 X_3)] = X_1 X_3 (X_1 X_2) (X_2 X_3) = ACDF$$

$$I = ABD \times ABCG = [X_1 X_2 (X_1 X_2)] [X_1 X_2 X_3 (X_1 X_2 X_3)] = X_3 (X_1 X_2) (X_1 X_2 X_3) = CDG$$

$$I = ACE \times BCF = ABEF$$

$$I = ACE \times ABCG = BEG$$

$$I = BCF \times ABCG = AFG$$

- três a três

$$I = ABD \times ACE \times BCF = A^2 B^2 C^2 DEF = DEF$$

$$I = ABD \times ACE \times ABCG = A^3 B^2 C^2 DEG = ADEG$$

$$I = ABD \times BCF \times ABCG = A^2 B^3 C^2 FGD = BDFG$$

$$I = ACE \times BCF \times ABCG = A^2 B^2 C^3 EFG = CEFG$$

- quatro a quatro

$$I = ABD \times ACE \times BCF \times ABCG =$$

$$= A^3 B^3 C^3 DEFG = ABCDEFG$$

- relação definição completa (com os geradores grifados)

$$I = \underline{ABD} = \underline{ACE} = \underline{BCF} = \underline{ABCG} = BCDE = ACDF = CDG = ABEF = BEG =$$

$$= AFG = DEF = ADEG = BDFG = CEFG = ABCDEFG$$

Nessa relação, o menor grupo de letras contém 3 símbolos. Em geral, o número de letras do menor grupo da rela-

ção definição completa determina a resolução de um experimento.

Através da relação definição, pode-se descobrir os efeitos que estão ligados aos efeitos principais; para isso multiplica-se a relação definição completa por cada um dos efeitos principais.

Efeitos ligados a

$$\begin{aligned} A &= BD = CE = ABCF = BCG = ABCDE = CDF = ACDG = BEF = ABEG = \\ &= FG = ADEF = DEG = ABDFG = ACEFG = BCDEFG \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= AD = ABCE = CF = ACG = CDE = ABCDF = BCDG = AEF = EG = \\ &= ABFG = BDEF = ABDEG = DFG = BCEFG = ACDEFG \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= ABDC = AE = BF = ABG = BDE = ADF = DG = ABCDEF = BCEG = \\ &= ACFG = CDEF = ACDEG = BCDFG = EFG = ABDEFG \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= AB = ACDE = BDEF = ABCDG = BCE = ACF = CG = ABDEF = BDEG = \\ &= ADFG = EF = AEG = BEG = CDEFG = ABCEFG \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= ABDE = AC = BCEF = ABCEG = BCD = ACDEF = CDEG = ABF = BG = \\ &= AFEG = DF = ADG = BDEFG = CFG = ABCDFG \end{aligned}$$

F = ABDF = ACEF = BC = ABCFG = BCDEF = ACD = CDFG = ABE =
 = BEFG = AG = DF = ADEFG = BDG = CEG = ABCDEG

G = ABDG = ACEG = BCFG = ABC = BCDEG = ACDFG = CD = ABEFG =
 = BE = AF = DEFG = ADE = BDF = CEF = ABCDEF

5.2.2. Aplicação numérica

Supondo-se o seguinte estudo^(*) de 7 variáveis, nos seus níveis correspondentes, para avaliar sua influência sobre a resistência mecânica de um determinado aço.

- A : temperatura de austenitização (830°C e 950°C)
- B : tempo de austenitização (30 min e 120 min)
- C : tempo de incubação isoterma (3 min e 10 min)
- D : taxa de deformação (0,127 pol/min e 2 pol/min)
- E : % de deformação (50% e 80%)
- F : variação da temperatura (1°C/s e 7°C/s)
- G : temperatura de deformação (450°C e 600°C)

(*) Exemplo retirado de: BRINCK, V. et alii (1976) - Planejamento e análise racional de experimentos tecnológicos. Ipatinga, USIMINAS (mimeografado).

Podemos escrever $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y = \frac{1}{8} X'Y$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \\ \hat{C} \\ \hat{D} \\ \hat{E} \\ \hat{F} \\ \hat{G} \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -86,9 \\ 17,5 \\ -57,1 \\ 50,9 \\ -3,5 \\ 77,3 \\ 128,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10,8625 \\ 2,1875 \\ -7,1375 \\ 6,3625 \\ -0,4375 \\ 9,6625 \\ 16,0875 \end{bmatrix}$$

A análise desse delineamento é incompleta pois o delineamento é saturado. Os estimadores -10,8625; -7,1375 ; 6,3625; 9,6625 e 16,0875 são muito grandes, quando comparados com os outros. Isso pode estar acontecendo por duas razões: os efeitos principais A, C, D, F e G são significativos ou as interações ligadas a esses efeitos são importantes. Decide-se então repetir o experimento trocando-se os sinais da matriz de delineamento. A matriz com sinais inversos é conhecida como fração alternativa. As relações definições são, então

$$I = - ABCD \quad , \quad I = - BCE \quad , \quad I = - ACF \quad , \quad I = - ABG$$

E o delineamento é o seguinte:

$$\begin{array}{c}
 \tilde{Y} = \\
 \left[\begin{array}{c}
 \text{abcd} \\
 \text{bcfg} \\
 \text{aceg} \\
 \text{cdef} \\
 \text{abef} \\
 \text{bdeg} \\
 \text{adfg} \\
 (1)
 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c}
 125,5 \\
 154,4 \\
 158,8 \\
 153,1 \\
 118,1 \\
 157,0 \\
 146,0 \\
 95,7
 \end{array} \right] X = \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} & \text{F} & \text{G} \\
 \begin{array}{c}
 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
 -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
 -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
 -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Com essa matriz são obtidos os estimadores dos efeitos principais

$$\hat{\beta} = \begin{array}{c}
 \hat{A}' \\
 \hat{B}' \\
 \hat{C}' \\
 \hat{D}' \\
 \hat{E}' \\
 \hat{F}' \\
 \hat{G}'
 \end{array} = \frac{1}{8} \begin{array}{c}
 -12,2 \\
 1,8 \\
 74,6 \\
 55,0 \\
 65,0 \\
 35,0 \\
 123,4
 \end{array} = \begin{array}{c}
 -1,525 \\
 0,225 \\
 9,325 \\
 6,875 \\
 8,125 \\
 4,375 \\
 15,425
 \end{array}$$

Consideremos o efeito principal A. Como, a este efeito estão ligadas as interações de 2.^a ordem BG, CF e DE, o estimador \hat{A} de A, na realidade fornece um estimador (\hat{l}_A) da combinação dos efeitos A + BG + CF + DE. Então, para todos os efeitos, tem-se

$$\hat{l}_A = \hat{A} + \hat{BG} + \hat{CF} + \hat{DE} = -10,8625$$

$$\hat{l}_B = \hat{B} + \hat{CE} + \hat{AG} + \hat{DF} = 2,1875$$

$$\hat{l}_C = \hat{C} + \hat{BE} + \hat{AF} + \hat{DG} = -7,1375$$

$$\hat{l}_D = \hat{D} + \hat{AE} + \hat{BF} + \hat{CG} = 6,3625$$

$$\hat{l}_E = \hat{E} + \hat{DC} + \hat{AD} + \hat{FG} = -0,4375$$

$$\hat{l}_F = \hat{F} + \hat{AC} + \hat{BD} + \hat{EG} = 9,6625$$

$$\hat{l}_G = \hat{G} + \hat{CD} + \hat{AB} + \hat{EF} = 16,0875$$

Da mesma forma, os estimadores ($\hat{l}'_A, \hat{l}'_B, \hat{l}'_C, \hat{l}'_D, \hat{l}'_E, \hat{l}'_F, \hat{l}'_G$) também são combinações dos efeitos principais e interações de 2.^a ordem. Assim,

$$\hat{\ell}'_A = -\hat{A} + \hat{B}G + \hat{C}F + \hat{D}E = 1,525$$

$$\hat{\ell}'_B = -\hat{B} + \hat{C}E + \hat{A}G + \hat{D}F = -0,225$$

$$\hat{\ell}'_C = -\hat{C} + \hat{B}E + \hat{A}F + \hat{D}G = -9,325$$

$$\hat{\ell}'_D = -\hat{D} + \hat{A}E + \hat{B}F + \hat{C}G = -6,875$$

$$\hat{\ell}'_E = -\hat{E} + \hat{D}C + \hat{A}D + \hat{F}G = -8,125$$

$$\hat{\ell}'_F = -\hat{F} + \hat{A}C + \hat{B}D + \hat{E}G = -4,375$$

$$\hat{\ell}'_G = -\hat{G} + \hat{C}D + \hat{A}B + \hat{E}F = -15,425$$

Adicionando e subtraindo as combinações lineares $\hat{\ell}$ e $\hat{\ell}'$ obtemos os estimadores não confundidos de todos os efeitos.

$$(\hat{B}G + \hat{C}F + \hat{D}E) = \frac{\hat{\ell}_A + \hat{\ell}'_A}{2} = -4,6687$$

$$\hat{A} = \frac{\hat{\ell}_A - \hat{\ell}'_A}{2} = -6,1937$$

$$(\hat{C}E + \hat{A}G + \hat{D}F) = \frac{\hat{\ell}_B + \hat{\ell}'_B}{2} = 0,9812$$

$$\hat{B} = \frac{\hat{\ell}_B - \hat{\ell}'_B}{2} = 1,2062$$

$$(\hat{B}E + \hat{A}F + \hat{D}G) = \frac{\hat{\ell}_C + \hat{\ell}'_C}{2} = -8,2312$$

$$\hat{C} = \frac{\hat{\ell}_C - \hat{\ell}'_C}{2} = 1,0937$$

$$(\hat{A}E + \hat{B}F + \hat{C}G) = \frac{\hat{\ell}_D + \hat{\ell}'_D}{2} = -0,2562$$

$$\hat{D} = \frac{\hat{\ell}_D - \hat{\ell}'_D}{2} = 6,6187$$

$$(\widehat{BC} + \widehat{AD} + \widehat{FG}) = \frac{\hat{l}_E + \hat{l}'_E}{2} = -4,2812$$

$$\widehat{E} = \frac{\hat{l}_E - \hat{l}'_E}{2} = 3,8437$$

$$(\widehat{CD} + \widehat{AB} + \widehat{EF}) = \frac{\hat{l}_F + \hat{l}'_F}{2} = 2,6437$$

$$\widehat{F} = \frac{\hat{l}_F - \hat{l}'_F}{2} = 7,0187$$

$$(\widehat{CD} + \widehat{AB} + \widehat{EF}) = \frac{\hat{l}_G + \hat{l}'_G}{2} = 0,33125$$

$$\widehat{G} = \frac{\hat{l}_G - \hat{l}'_G}{2} = 15,7563$$

As estimativas dos efeitos -6,1937; 6,6187; 7,0187 , 15,7563 associados aos fatores A, D, F e G, respectivamente , e a estimativa do efeito -8,2313 associado com a combinação linear BE + AF + DG foram provavelmente reais. O efeito -4,67 foi grande, possivelmente porque ambos os fatores B e G têm efeitos significativos, e então interagiram. Analogamente, os fatores A e F interagiram contribuindo para o alto valor do efeito -8,2312, os fatores A e E, C e G interagiram contribuindo para o valor do efeito +7,0187, e o efeito -4,2812 dependem da interação dos fatores A e D, e F e G.

Há fortes indicações de que os fatores tempo de austenitização (B) e tempo de incubação isotermal (C), não influem na resistência mecânica do aço, mas os demais são de grande importância, inclusive suas interações.

5.2.3. Construção da fração 2_{III}^{k-m} quando o delineamento não está saturado.

Foi mostrada em 5.2.1. a redução de um delineamento em que se deseja estudar $k = N-1$ variáveis em N combinações de tratamentos, $N = 2^n$ e $k = 3, 7, 15, \dots, 2^n-1$.

Para valores intermediários de k , os delineamentos de resolução III podem ser obtidos, pela omissão de variáveis do delineamento de resolução III, cuja ordem é a maior mais próxima. Por exemplo, para testarmos 6 fatores em 8 combinações de tratamentos, pode ser usado um delineamento 2_{III}^{7-4} , eliminando qualquer coluna da matriz de delineamento. As relações de ligações remanescentes manter-se-ão, com exceção de todas as palavras contendo características associadas com as variáveis abandonadas, que serão omitidas da estrutura de ligação, e de qualquer estimador das combinações lineares.

Por exemplo, eliminando as colunas 6 e 7 da fração 2_{III}^{7-4} , em que a relação de identidade é $I = ABD = ACE = BCF = ABCG$, tem-se o delineamento 2_{III}^{5-2} .

ct.	A	B	C	D	E
de	-1	-1	-1	1	1
a	1	-1	-1	-1	-1
be	-1	1	-1	-1	1
abd	1	1	-1	1	-1
cd	-1	-1	1	1	-1
ace	1	-1	1	-1	1
bc	-1	1	1	-1	-1
abcde	1	1	1	1	1

Uma aplicação numérica para esse caso pode ser feita com um estudo de 5 fatores em 2 níveis cada um. Os dados foram extraídos de KEMPTHORNE (1979) e trata-se de um experimento conduzido em Rothamsted para determinar o efeito de certos fertilizantes aplicados em raízes de beterrabas. Os fatores são

A : sulfato de amônia

B : superfosfato

C : cloreto de potássio

D : sal agrícola

E : adubo animal

Vamos utilizar a fração dada anteriormente, para escrever esse delineamento.

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \text{de} \\ \text{a} \\ \text{be} \\ \text{abd} \\ \text{cd} \\ \text{ace} \\ \text{bc} \\ \text{abcde} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1104 \\ 1108 \\ 1008 \\ 1312 \\ 1000 \\ 1328 \\ 692 \\ 1508 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Os efeitos ligados aos efeitos principais são

$$A = BD = CE = ABCDE$$

$$B = AD = ABCE = CDE$$

$$C = ABCD = AE = BDE$$

$$D = AB = ACDE = BCE$$

$$E = ABDE = AC = BCD$$

As estimativas desses efeitos principais são:

$$\hat{A} = 363; \quad \hat{B} = -5; \quad \hat{C} = -1, \quad \hat{D} = 197; \quad \hat{E} = 209.$$

5.3. Delineamentos Ótimos de Plackett e Burman

O número de parcelas (N) do delineamento reduzido é um múltiplo de 4.

Esses delineamentos com $N = 4\lambda$, λ inteiro, são construídos por um método diferente devido a PLACKETT e BURMAN (1946). Neste caso são encontrados os seguintes tipos de reduções:

Se

$k = 3 \Rightarrow$ redução : 2^3 em $N = 4 = 1.4$ parcelas

$k = 7 \Rightarrow$ redução : 2^7 em $N = 8 = 2.4$ parcelas

$k = 11 \Rightarrow$ redução : 2^{11} em $N = 12 = 3.4$ parcelas

$k = 15 \Rightarrow$ redução : 2^{15} em $N = 16 = 4.4$ parcelas

.....

$k = 4\lambda - 1 \Rightarrow$ redução : $2^{4\lambda-1}$ em $N = 4\lambda$ parcelas

O método de PLACKETT e BURMAN (1946) consiste na construção de matrizes de delineamento para os valores $N = 4k$ até 100, excetuando-se o caso $N = 92$, este é resolvido por BAUMERT, GOLOMB e MARSHALL (1961).

Serão explicadas a seguir as condições de existência de tais matrizes.

5.3.1. Existência de matrizes de delineamentos ótimos

Como já vimos, dada a matriz de delineamento X , com N linhas e n colunas, o modelo para efeitos principais, na forma matricial é

$$E(\underline{Y}) = H\underline{\beta} \quad , \quad \text{onde } H = (\underline{1} \ X)$$

e

$$\underline{\beta}' = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

Deve ser encontrado um delineamento tal que

$$H'H = NI$$

e os vetores colunas de X sejam ortogonais entre si, e ortogonais a $\underline{1}' = (1, 1, \dots, 1)$.

Seja \underline{X}_i a i -ésima coluna de X . Se $\underline{1}'\underline{X}_i = c_i$ \underline{X}_i é definido por MARGOLIN (1967) como um vetor coluna de valor c_i . Se $c_i = 0$, \underline{X}_i é um vetor coluna de soma nula, e se $c_i \neq 0$, \underline{X}_i é um vetor coluna de soma não nula.

$$H'H = \begin{pmatrix} \underline{1}' \\ \underline{X}' \end{pmatrix} (\underline{1} \ X) = \begin{pmatrix} \underline{1}'\underline{1} & \underline{1}'X \\ \underline{X}'\underline{1} & \underline{X}'X \end{pmatrix}$$

Para que $H'H$ seja diagonal, devemos ter

$$1) \quad \underline{1}'X = \underline{0}' \quad \text{e} \quad \underline{X}'\underline{1} = \underline{0}, \quad \text{onde} \quad \underline{0}' = (0, 0, \dots, 0).$$

$$2) \quad \tilde{x}_i' \tilde{x}_j = 0, \quad \text{para } i \neq j.$$

Se $n = N-1$, que é o maior número de fatores em dois níveis, que pode conter o delineamento, o problema de encontrar um delineamento adequado torna-se em encontrar uma matriz H com N linhas e N colunas com as seguintes propriedades:

- i) cada elemento é ± 1
- ii) uma coluna de H é $\underline{1} = (1, 1, \dots, 1)$
- iii) $\frac{\underline{1}}{N} H$ é ortogonal

Uma matriz assim é chamada matriz de Hadamard.

5.3.1.1. Definições e teoremas para construir as matrizes de Hadamard.

● método de construção de uma matriz de Hadamard é devido a PALEY (1933). Esse método depende da teoria de corpos finitos de Galois, e das definições e teoremas a seguir:

Definição: Seja a um elemento não nulo do corpo finito $GF(p^m)$; a é um resíduo quadrático (RQ) do corpo se existe um elemento b no corpo tal que $a = b^2$, e caso contrário a

é um resíduo não quadrático (RNQ).

Teorema 1: O número de resíduos quadráticos e resíduos não quadráticos são iguais ($p > 2$).

Demonstração

$$\begin{aligned} \text{Para todo } b &= \alpha^u \quad \text{onde } \alpha^{q-1} = 1 \\ a = b^2 &= (\alpha^u)^2 = \alpha^{2u} = \alpha^{2u - \lambda(q-1)}, \quad \lambda : \text{inteiro} \\ & \qquad \qquad \qquad q = p^m \end{aligned}$$

Mas $(q-1)$ é par, pois $p > 2$.

Portanto somente potências pares de α são RQ.

Portanto existem $\frac{1}{2}(q-1)$ RQ e $\frac{1}{2}(q-1)$ RNQ.

Definição: Função de Legendre $\chi(a)$

$$\chi(0) = 0$$

$$\chi(a) = +1, \quad \text{se } a \text{ é um RQ}$$

$$\chi(a) = -1, \quad \text{se } a \text{ é um RNQ}$$

Segue, do teorema 1, que $\chi(a) = 0$, somando sobre todo $a \in \text{GF}(p^m)$.

Teorema 2: $\chi(a) \chi(b) = \chi(ab)$

Demonstração:

Se $a = 0$ ou $b = 0$, é trivial.

Por outro lado

Se $a = \alpha^u$ e $b = \alpha^v$, $\alpha \neq 0$

$$ab = \alpha^{u+v}$$

a , b e ab são RQ se, e somente se $(u + v)$ é par, ou seja, u e v são de mesma paridade. Isto prova o resultado.

$$\text{Teorema 3: } \chi(-1) = \begin{cases} +1 & \text{se } q = 4t+1, \quad t \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{se } q = 4t-1, \quad t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Demonstração:

Para que $\chi(-1) = +1$, -1 deve ser RQ.

$$\text{Se } \alpha^q = \alpha \Rightarrow \alpha^{q-1} = +1$$

Portanto $\alpha^{\frac{1}{2}(q-1)} = \pm 1 = -1$, desde que as potências de α sejam distintas até α^{q-1} .

Portanto -1 é um RQ se, e somente se, $\frac{1}{2}(q-1)$ é par e igual a $2t$.

$$\text{Logo, } q = 4t + 1$$

Teorema 4: Sejam u e v dois elementos de $\text{GF}(p^m)$, $u \neq v$, $p > 2$. Então somando sobre todo $j \in \text{GF}(p^m)$, tem-se

$$\sum \chi(j-u) \chi(j-v) = -1$$

Não será feita aqui a demonstração deste teorema.

5.3.1.2. Método de construção das matrizes de Hadamard

Usaremos os resultados anteriores para construir uma matriz de Hadamard de ordem N com $N = p^m + 1 = 4k$.

1) Considerando a matriz $X = (x_{ij})$, $i, j, = 0, 1, 2, \dots, p$ com $p+1$ linhas e p colunas, onde $p = 4t - 1$.

$$x_{i0} = x_{0j} = -1$$

$$x_{ij} = \chi(j - i) \quad (i \neq 0, j \neq 0, i \neq j)$$

$$x_{ii} = +1$$

Considerando a matriz $H = (\underline{1}, X)$. Para esta matriz, temos

$$\begin{aligned} \underline{1}'X_i &= x_{0i} + x_{1i} + \dots + x_{ii} + \dots + x_{pi} = \\ &= -1 + 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \chi(j - i) = 0 \quad (\text{teo 1}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X'_i X_j &= x_{0i}x_{0j} + x_{1i}x_{1j} + \dots + x_{ii}x_{ij} + \dots + x_{ji}x_{jj} + \dots \\ &= 1 - \chi(j - i) - \chi(i - j) + \sum_{h=1}^p \chi(h - i)(h - j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{teo 4} \\ &= 1 - \chi(j - i) - \chi(i - j) - 1 \end{aligned}$$

Mas, com $p = 4t - 1$, pelo teo 3, temos

$$\chi(j - i) = \chi(-1) \chi(i - j) = -\chi(i - j)$$

portanto

$$X'_i X_j = 0$$

A matriz H é então ortogonal.

2) Para construir H de ordem $p^{m+1} = 4t$, associamos as linhas e colunas (exceto a 1.^a) com os elementos de $GF(p^m)$ e a prova segue como antes.

Uma matriz H assim construída é uma matriz de Hadamard.

3) Se H é uma matriz de Hadamard de ordem N

$$H^* = \begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix}$$

é uma matriz de Hadamard de ordem $2N$. Portanto pode ser construído um delineamento para $2N-1$ fatores em $2N$ parcelas, a partir de um delineamento para $N-1$ fatores em N parcelas. Mas geralmente, uma matriz H , de ordem $2^h(p^m+1)$, onde $p^m = 4t - 1$ ou 2^h , pode ser construída por dobramentos sucessivos.

4) Se $p^n = 4t + 1$, (p^n+1) não é divisível por 4. Mas, uma matriz H de ordem $2(p^n+1)$ pode ser obtida através de uma pequena modificação do método.

Considerando a matriz $A = (a_{ij})$, $(i, j = 0, 1, 2, \dots, p^n)$ de ordem (p^n+1) , onde $p^n = 4t + 1$.

$$a_{i0} = a_{0j} = +1 \quad (i \neq 0, j \neq 0)$$

$$a_{ij} = \chi(u_j - u_i) \quad (i \neq 0, j \neq 0), \text{ onde } u_i \text{ é o elemento de } GF(p^n) \text{ associado a } (1+1)^i \text{ linha e coluna de } A, i = 1, 2, \dots, p^n.$$

$$a_{00} = 0$$

A matriz A assim construída, é ortogonal.

Agora, substituindo

$$+1 \text{ pela sub-matriz} \quad C = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-1 \text{ pela sub-matriz} \quad -C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

$$0 \text{ pela sub-matriz} \quad B = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

A nova matriz H formada é de ordem $2(p^n+1)$.

Considere os produtos escalares das $(2i_1 + 1)^a$ e $(2i_1 + 2)^a$ linhas com as $(2i_2 + 1)^a$ e $(2i_2 + 2)^a$ linhas.

Esta é uma matriz $(2 \times 2)_{M_{i_1 i_2}}$

$$\text{Agora } M_{i_1 i_2} = \sum (a_{i_1 j} C) (a_{i_2 j} C') + (B) (b_{i_2 i_1} C') + (b_{i_1 i_2} C) (B')$$

$$[j \neq i_1, j \neq i_2]$$

$$M_{i_1 i_2} = CC' \sum_{j=0}^{p^n} a_{i_1 j} a_{i_2 j} + \chi(u_{i_1} - u_{i_2}) (BC' + CB')$$

$$[j \neq i_1, j \neq i_2]$$

pelos teoremas 2 e 3 para $p^n = 4t + 1$

$$M_{i_1 i_2} = CC'0 + \chi(u_{i_1} - u_{i_2}) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

desde que $\sum_{j=0}^{p^n} a_{i_1 j} a_{i_2 j} = 0$, pela ortogonalidade de A,

e os termos omitidos anulam-se $= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Finalmente, é claro que as $(2_{i_1} + 1)^a$ e $(2_{i_1} + 2)^a$ linhas são ortogonais entre si.

Portanto H é ortogonal e do tipo exigido.

E portanto, por dobramentos sucessivos, podemos obter as matrizes de ordem $2^h(p^n + 1)$ onde $p^n = 4t + 1$.

5) Em resumo, temos:

Se $N = 2^h(p^n + 1) = 4k$, onde p é um número primo ímpar ou zero, pode ser construída uma matriz ortogonal H_N , cujos elementos são +1 e -1.

As matrizes construídas por estes métodos incluem todos os valores de $N = 4k$ até 100, excetuando-se 92.

PLACKETT e BURMAN (1946) usaram o método modificado para obter os delineamentos $N = 52, 76$ e 100 . Para $N = 36$, o delineamento foi obtido por tentativa.

Observamos que, se $N = p+1$, isto é, $m = 1$, então, excetuando-se a última coluna que representa o tratamento controle (1), X é uma matriz cíclica. Temos $x_{i+1,j+1} = x_{i,j}$ e então é apresentada uma listagem com apenas a primeira linha (ou coluna) de cada matriz.

5.3.2. Procedimento experimental

5.3.2.1. Matriz cíclica

Vamos supor um experimento com 9 fatores em 2 níveis. Desejando um experimento no qual os efeitos principais podem ser determinados com uma precisão três vezes tão grande quanto com o qual o fator pode ser medido, necessitamos então de um delineamento com $N = 12 = 3.4$ combinações de tratamentos e 2 níveis. Consultando a tabela da secção 5.3.3., pode ser encontrado o delineamento representado simbolicamente como segue:

1. Tomamos a linha indicada na tabela para $N = 12$:

+ + - + + + - - - + -

Esta vai ser a primeira coluna (ou linha) do de lineamento completo gerado a seguir.

2. Movemos a linha ciclicamente por 10 vezes e adicionamos uma linha final de sinais negativos, portanto:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | - | + | - | - | - | + | + | + | - | + |
| 2 | + | + | - | + | - | - | - | + | + | + | - |
| 3 | - | + | + | - | + | - | - | - | + | + | + |
| 4 | + | - | + | + | - | + | - | - | - | + | + |
| 5 | + | + | - | + | + | - | + | - | - | - | + |
| 6 | + | + | + | - | + | + | - | + | - | - | - |
| 7 | - | + | + | + | - | + | + | - | + | - | - |
| 8 | - | - | + | + | + | - | + | + | - | + | - |
| 9 | - | - | - | + | + | + | - | + | + | - | + |
| 10 | + | - | - | - | + | + | + | - | + | + | - |
| 11 | - | + | - | - | - | + | + | + | - | + | + |
| 12 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |

Observação: Para obter a primeira linha ou coluna dessa matriz de Hadamard, onde $12 = 11 + 1$. ($p = 11$), construímos o $GF(11) = 0, 1, 2, \dots, 10$. Os resíduos quadráticos deste conjunto são $1^2 = 10^2 = 1$, $2^2 = 9^2 = 4$, $3^2 = 8^2 = 9$, $4^2 = 7^2 = 5$, $5^2 = 6^2 = 3$.

Então

$$\chi(z) = +1 \quad \text{para } z = 1, 3, 4, 5, 9$$

e

$$\chi(z) = -1 \quad \text{para } z = 2, 6, 7, 8, 10$$

Assim

$$x_{11} = +$$

$$x_{12} = \chi(2-1) = \chi(1) = +$$

$$x_{13} = \chi(3-1) = \chi(2) = -$$

$$x_{14} = \chi(4-1) = \chi(3) = +$$

$$x_{15} = \chi(5-1) = \chi(4) = +$$

$$x_{16} = \chi(6-1) = \chi(5) = +$$

$$x_{17} = \chi(7-1) = \chi(6) = -$$

$$x_{18} = \chi(8-1) = \chi(7) = -$$

$$x_{19} = \chi(9-1) = \chi(8) = -$$

$$x_{1,10} = \chi(10-1) = \chi(9) = +$$

$$x_{1,11} = \chi(11-1) = \chi(10) = -$$

Podemos tomar as linhas deste delineamento como referentes às parcelas e as colunas como fatores ou componentes. No caso em questão existem 9 componentes, portanto somente 9 colunas são necessárias. E assim, selecionando 9 colunas quaisquer, digamos as primeiras nove, obtemos:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | - | + | - | - | - | + | + | + |
| 2 | + | + | - | + | - | - | - | + | + |
| 3 | - | + | + | - | + | - | - | - | + |
| 4 | + | - | + | + | - | + | - | - | - |
| 5 | + | + | - | + | + | - | + | - | - |
| 6 | + | + | + | - | + | + | - | + | - |
| 7 | - | + | + | + | - | + | + | - | + |
| 8 | - | - | + | + | + | - | + | + | - |
| 9 | - | - | - | + | + | + | - | + | + |
| 10 | + | - | - | - | + | + | + | - | + |
| 11 | - | + | - | - | - | + | + | + | + |
| 12 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |

Os componentes (fatores) são A, B, C, D, E, F, G, H, I: o sinal + correspondendo ao componente E na parcela 3 significa que, naquela parcela, o componente 5 aparece no seu valor extremo; o sinal - correspondendo ao componente C na parcela 9 significa que, naquela parcela, o componente aparece no seu valor nominal; e analogamente. Pode ser visto que cada componente aparece 6 vezes no valor extremo e 6 vezes no valor nominal, portanto os arranjos são simétricos.

Para construir um delineamento para $k = 27$, $N = 28$, os três blocos A, B, C ilustrados na tabela da secção 5.3.3. são escritos ciclicamente da seguinte maneira:

| | | |
|---|---|---|
| A | B | C |
| C | A | B |
| B | C | A |

e as 27 linhas são seguidas por uma linha de sinais negativos.

5.3.2.2. Aplicação numérica

Para o mesmo exemplo, usado na secção 5.2.3., que é um experimento com 5 fatores em 8 combinações de tratamentos, construiremos a matriz de Hadamard com $N = 8$.

Da tabela na secção 5.3.3. retiramos a linha para $N = 8$: + + + - + - - e construímos a matriz

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | - | - | + | - | + | + |
| 2 | + | + | - | - | + | - | + |
| 3 | + | + | + | - | - | + | - |
| 4 | - | + | + | + | - | - | + |
| 5 | + | - | + | + | + | - | - |
| 6 | - | + | - | + | + | + | - |
| 7 | - | - | + | - | + | + | + |
| 8 | - | - | - | - | - | - | - |

Como nos interessa apenas 5 colunas, abandonamos as duas últimas ficando com

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} ad \\ abe \\ abc \\ bcd \\ acde \\ bde \\ ce \\ (1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1008 \\ 1284 \\ 984 \\ 860 \\ 1468 \\ 996 \\ 896 \\ 740 \end{bmatrix} \quad X = \begin{matrix} & A & B & C & D & E \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

E os estimadores dos efeitos principais são:

$$\hat{S} = 156,5 \quad ; \quad \hat{P} = 1,5 \quad ; \quad \hat{R} = 22,5 \quad ; \quad \hat{N} = 53,5 \quad ; \quad \hat{D} = 131,5.$$

5.3.3. Algumas linhas dos delineamentos de Plackett e Burman

$$N = 8 \quad : \quad + + + - + - -$$

$$N = 12 \quad : \quad + + - + + + - - - + -$$

$$N = 16 \quad : \quad + + + + - + - + + - - + - - -$$

$$N = 20 \quad : \quad + + - - + + + + - + - + - - - - + + -$$

N= 24. + + + + + - + - + + - - + + - - + - + - - - -

N= 28.

| | A | B | C |
|--|-------------------|-------------------|-------------------|
| | + - + + + + - - - | - + - - - + - - + | + + - + - + + - + |
| | + + - + + + - - - | - - + + - - + - - | - + + + + - + + - |
| | - + + + + + - - - | + - - - + - - + - | + - + - + + - + + |
| | - - - + - + + + + | - - + - + - - - + | + - + + + - + - + |
| | - - - + + - + + + | + - - - - + + - - | + + - - + + + + - |
| | - - - - + + + + + | - + - + - - - + - | - + + + - + - + + |
| | + + + - - - + - + | - - + - - + - + - | + - + + - + + + - |
| | + + + - - - + + - | + - - + - - - - + | + + - + + - - + + |
| | + + + - - - - + + | - + - - + - + - - | - + + - + + + - - |

N= 32. - - - - + - + - + + + - + + - - - + + + + + - - + + - + - - +

N= 36. (OBTIDO POR TENTATIVA).

- + - + + + - - - + + + + + - + + + - - + - - - - + - + - + + - - + -

N= 40. DELINEAMENTO DUPLO PARA N= 20.

N= 44.

+ + - - + + - - + + + + + + + - - - + - + + + - - - - + - - - + + - + + - + + -

N= 48.

+ + + + + - + + + + - - + - + - + + + - - + - - + + - + + - - + + + - + + - - - + - - - -

N= 56. DELINEAMENTO DUPLO PARA N= 28 .

N= 60.

+ + - + + + - + - + - - + - - + + + - + + + - - + + + + - - - - - + + - - - + - - - -
 + + - + + - - + - + - - - + -

N= 64. DELINEAMENTO DUPLO PARA N= 32.

5.3.4. O caso particular N = 92

WILLIAMSON (1944), conseguiu uma matriz de Hadamard de ordem 172, incorporando um automorfismo especial de ordem 3.

BAUMERT, GOLOMB e HALL (1962) aplicaram o método de WILLIAMSON a uma matriz de ordem $4t = 92$. Essa matriz H tem a forma:

$$H = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & -D & C \\ -C & D & A & -B \\ -D & -C & B & A \end{bmatrix}$$

onde cada uma das A, B, C, D é uma matriz 23×23 simétrica cíclica. E a primeira linha de cada uma dessas matrizes é dada abaixo

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A | + | + | - | - | - | + | - | - | - | + | - | + | + | - | + | - | - | - | + | - | - | - | + |
| B | + | - | + | + | - | + | + | - | - | + | + | + | + | + | + | - | - | + | + | - | + | + | - |
| C | + | + | + | - | - | - | + | + | - | + | - | + | + | - | + | - | + | + | - | - | - | + | + |
| D | + | + | + | - | + | + | + | + | + | - | - | - | - | - | - | + | - | + | + | + | - | + | + |

5.4. Planos para experimentos fatoriais simétricos s^n

Veremos agora uma forma mais geral do delineamento descrito em 5.2.

Com a teoria sobre fatoriais fracionados já vista até aqui, e com o caso mais simples 2^n , podemos construir planos de efeitos principais ortogonais para experimentos fatoriais simétricos envolvendo $\frac{s^n-1}{s-1}$ fatores, cada um em s níveis, com s^n combinações de tratamentos, onde s é um primo ou uma potência de um número primo.

Então, podem ser feitas as reduções como mostra a tabela a seguir:

Tabela de Delineamentos Reduzidos

| s | delineamento completo | número de fatores | delineamento reduzido |
|---|-----------------------------------|---------------------|-----------------------|
| 2 | 2^3 | 3 | 2^2 |
| | 2^7 | 7 | 2^3 |
| | | | |
| | $2(2^n-1)$ | 2^n-1 | 2^n |
| 3 | 3^4 | 4 | 3^2 |
| | 3^{13} | 13 | 3^3 |
| | | | |
| | $3\left(\frac{3^n-1}{2}\right)$ | $\frac{3^n-1}{2}$ | 3^n |
| 4 | 4^5 | 5 | 4^2 |
| | 4^{21} | 21 | 4^3 |
| | | | |
| | $4\left(\frac{4^n-1}{3}\right)$ | $\frac{4^n-1}{3}$ | 4^n |
| 5 | $5\left(\frac{5^n-1}{4}\right)$ | $\frac{5^n-1}{4}$ | 5^n |
| • | | | |
| • | | | |
| • | | | |
| s | $s\left(\frac{s^n-1}{s-1}\right)$ | $\frac{s^n-1}{s-1}$ | s^n |

O delineamento reduzido tem $\frac{s^n-1}{s-1}$ fatores em s níveis. As combinações de tratamentos de um plano de efeitos principais para $\frac{s^n-1}{s-1}$ fatores em s^n observações podem ser obtidas, escolhendo-se n combinações de tratamentos de um fatorial completo s^n e gerando-se os fatores remanescentes pelas interações do experimento s^n .

5.4.1. Construção de um plano de efeitos principais s^{n-k}

Vamos representar os n fatores do plano fatorial s^n , onde $s = p^m$ e p é um número primo, por:

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

e suas interações generalizadas por

$$X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}, \text{ onde } k_i \in GF(p^m)$$

e lembrando que, por convenção, a potência do primeiro fator que aparece numa interação é igual à unidade.

Para demonstrar a construção de um plano de efeitos principais ortogonais, faremos uma ilustração com um plano para os quatro fatores A, B, C e D, cada um tendo 3 níveis, em 9 combinações de tratamentos.

Então, neste exemplo, temos $s = 3$, $n = 2$ e

$$\frac{s^n-1}{s-1} = 4.$$

Representamos os fatores A e B por X_1 e X_2 do plano fatorial 3^2 e os fatores C e D serão as interações generalizadas do plano 3^2 : X_1X_2 e $X_1X_2^2$.

| A | B | C | D |
|-------|-------|----------|------------|
| X_1 | X_2 | X_1X_2 | $X_1X_2^2$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 2 |
| 0 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 0 |

As relações de identidade são ABC^2 e ACD , pois

$$ABC^2 = X_1X_2(X_1X_2)^2 = X_1^3X_2^3 = I$$

$$ACD = X_1(X_1X_2)(X_1X_2^2) = X_1^3X_2^3 = I$$

5.5. Planos de efeitos principais e arranjos ortogonais de resistência dois.

5.5.1. Arranjos ortogonais de resistência dois

Sejam k fatores em $s = p^m$ níveis, onde p é um número primo. Um arranjo ortogonal de resistência d , de tamanho N , com k fatores e s níveis consiste em um subconjunto com N combinações de tratamentos de um experimento fatorial s^k com a seguinte propriedade: todas as s^d combinações de tratamentos, correspondentes a quaisquer d fatores escolhidos entre k , ocorrem um igual número de vezes no subconjunto. A notação para o arranjo pode ser a seguinte: (N, k, s, d) .

Os planos para experimentos fatoriais simétricos fracionados, que serão desenvolvidos a seguir, são arranjos ortogonais de resistência dois. Chamamos estes planos de planos de efeitos principais porque eles permitem estimação ortogonal de todos os efeitos principais quando as interações estão desprezadas.

Como exemplo de um arranjo ortogonal de resistência dois, vamos escrever um fatorial 2^4 :

| A | B | C | D | AB | AC | AD | BC | BD | CD | ABC | ABD | ACD | BCD | ABCD |
|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Escolhendo duas colunas quaisquer, por exemplo as duas indicadas pelos retângulos, podemos observar que toda

combinação de tratamentos neste 2^2 acontece o mesmo número de vezes.

Temos 00, 01, 10, 11 em 4 vezes cada uma.

5.5.2. Construção de planos de efeitos principais para
 $[2(s^n-1)/(s-1) - 1]$ fatores em $2 s^n$ combinações
de tratamentos.

Foi mostrada a existência por ADDELMAN e KEMP - THORNE (1961), de planos de efeitos principais para $[2(s^n-1)/(s-1) - 1]$ fatores, cada um em $s = p^m$ níveis, com $2 s^n$ combinações de tratamentos, usando a teoria de grupos de Galois.

Na obtenção de um plano deste tipo, além da teoria algébrica, são necessárias mais algumas definições que faremos adiante. Utilizaremos um exemplo para auxiliar na demonstração do método em estudo.

5.5.2.1. Notações e definições preliminares

Vamos representar os n fatores por

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

e suas interações generalizadas por

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_n X_n, \quad k_i \in \text{GF}(p^m)$$

e o coeficiente do primeiro fator que aparece numa interação é a unidade.

Já sabemos como construir um s^n para estudar $\frac{s^m-1}{s-1}$ fatores.

Sejam u_0, u_1, \dots, u_{s-1} os elementos de $\text{GF}(p^m)$ e sejam $u_0^2, u_1^2, \dots, u_{s-1}^2$ os elementos de $\text{GF}^2(p^m)$ que é o conjunto dos quadrados dos elementos de $\text{GF}(p^m)$. Por exemplo, se $p^m = s = 3$

$$\text{GF}(3) = \{0, 1, 2\}$$

$$\text{GF}^2(3) = \{0, 1\}$$

Definição: Dois fatores X_i e X_j são ortogonais entre si, se cada nível de X_i ocorre o mesmo número de vezes com todo nível de X_j .

Definição: Dois fatores X_i e X_j são semi-ortogonais entre si se:

a) para p ($s = p^m$) um número primo ímpar, um nível de X_j ocorre s^{n-2} vezes e $\frac{1}{2}(s-1)$ níveis de X_j ocorrem $2 s^{n-2}$ vezes com cada nível de X_i .

b) para $p = 2$, $\frac{1}{2} s$ níveis de cada X_j ocorrem $2 s^{n-2}$ vezes com

cada nível de X_i .

5.5.2.2. Desenvolvimento de um exemplo ilustrativo com mais algumas definições.

Considerando um experimento fatorial 3^7 , queremos estudá-lo com $18 = 2 \cdot 3^2$ combinações de tratamentos. Já vimos, na secção 5.4., como obter um fatorial 3^4 em 3^2 combinações de tratamentos.

$$\text{Então começamos com } \frac{s^n - 1}{s - 1} = \frac{3^2 - 1}{3 - 1} = 4$$

fatores em 3^2 combinações de tratamentos e adicionamos s fatores para obter $\frac{s^n - 1}{s - 1} + s = 2s + 1 = 7$ fatores, como segue:

| A | B | C | D | E | F | G |
|-------|-------|-----------|------------|-------------|-----------------|------------------|
| A | B | AB | AB^2 | | | |
| X_1 | X_2 | X_1+X_2 | X_1+2X_2 | $X_1^2+X_2$ | $X_1^2+X_1+X_2$ | $X_1^2+2X_1+X_2$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 |

Neste plano, as três últimas colunas não são ortogonais em relação às três primeiras colunas. Para verificar a semi-ortogonalidade podemos tomar, por exemplo, as duas colunas relativas a C e a F.

| <u>C</u> | <u>F</u> | | <u>C</u> | <u>F</u> |
|-----------------------------|-----------------------------------|-----------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| <u>x_1+x_2</u> | <u>$x_1^2+x_1+x_2$</u> | | <u>x_1+x_2</u> | <u>$x_1^2+x_1+x_2$</u> |
| 0 | 0 | | 0 | 0 |
| 1 | 1 | | 0 | 1 |
| 2 | 2 | | 0 | 1 |
| 1 | 2 | | 1 | 1 |
| 2 | 0 | \longleftrightarrow | 1 | 2 |
| 0 | 1 | | 1 | 2 |
| 2 | 0 | | 2 | 2 |
| 0 | 1 | | 2 | 0 |
| 1 | 2 | | 2 | 0 |

Neste exemplo, $s^n = 3^2$, logo $p = 3$ um número primo ímpar. Nas colunas C e F notamos que um nível de C ocorre $s^{n-2} = 3^{2-2} = 1$ vez com um nível de F e $\frac{s-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$ nível de C ocorre $2 s^{n-2} = 2 \cdot 3^0 = 2$ vezes com um nível de F.

Portanto, o plano que já foi construído é chamado de semi-plano. Devemos adicionar 9 combinações de tratamen-

tos a este semi-plano para obter o plano desejado. Estas combinações de tratamentos serão adicionadas de tal forma que aqueles fatores que são ortogonais no primeiro semi-plano, no exemplo os 4 primeiros fatores, sejam ortogonais também no segundo semi-plano. E, de forma que os fatores que são semi-ortogonais no primeiro semi-plano, no exemplo, os três últimos fatores, sejam semi-ortogonais no segundo semi-plano, mas de modo inverso. Vejamos, no exemplo, o que isto quer dizer. Tomando novamente as colunas C e F, vamos escrevê-las no primeiro e segundo semi-planos.

| Primeiro Semi-Plano | | Segundo Semi-Plano | |
|---------------------|-----------------|--------------------|-----------------|
| C | F | C | F |
| X_1+X_2 | $X_1^2+X_1+X_2$ | X_1+X_2 | $X_1^2+X_1+X_2$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 2 |
| 0 | 1 | 0 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |

Os fatores do segundo semi-plano podem ser re-
presentados por:

$$X_1, X_2, X_1+X_2+b_1, X_1+2X_2+b_2, \dots, X_1+(s-1)X_2+b_{s-1},$$

$$kX_1^2+X_2, kX_1^2+k_1X_1+X_2+c_1, kX_1^2+k_2X_1+X_2+c_2,$$

$$\dots, kX_1^2+k_{s-1}X_1+X_2+c_{s-1}.$$

Os coeficientes $b_1, b_2, \dots, b_{s-1}, k, k_1, k_2, \dots, k_{s-1}, c_1, c_2, \dots, c_{s-1}$ são elementos de $GF(p^m)$. E as regras são:

Para p primo ímpar

1) k é um elemento de $GF(p^m)$, mas não é elemento de $GF^2(p^m)$.

No exemplo, $k = 2$ pois $s = p^m = 3^1$.

2) $b_i = \frac{k-i}{4k-i}$ com todas as operações efetuadas em $GF(p^m)$.

3) $k_i = i k$ com todas as operações efetuadas em $GF(p^m)$.

4) $c_i = \frac{i^2(k-1)}{4}$ com todas as operações efetuadas em $GF(p^m)$.

Para $p = 2$

- 1) $k = 1$
- 2) $k_i = i$
- 3) b_i e c_i serão obtidos por tentativas.

Neste último caso, $p = 2$, uma forma mais adequada para estudar o problema é através do uso de matrizes duplas de Hadamard.

No exemplo, em que já construímos o semi-plano, estamos trabalhando com $GF(3^1)$, então temos: $k = 2$, desde que $GF(3) = 0, 1, 2$ e $GF^2 = 0, 1$

$$b_1 = \frac{2-1}{4(2)(1)} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} = 1 \cdot 2 = 2, \text{ desde que } 2 \cdot 2 = 1 \pmod{3}$$

$$b_2 = \frac{2-1}{4(2)(2)} = \frac{1}{16} = \frac{1}{1} = 1 \pmod{3}$$

$$k_1 = 1 \cdot k = 2$$

$$k_2 = 2 \cdot k = 4 = 1 \pmod{3}$$

$$c_1 = \frac{1^2(2-1)}{4} = \frac{1}{1} = 1$$

$$c_2 = \frac{2^2(2-1)}{4} = \frac{4}{4} = \frac{1}{1} = 1$$

E podemos escrever o segundo semi-plano completo

Segundo Semi-Plano

| A | B | C | D | E | F | G |
|-------|-------|-------------|-------------|--------------|---------------------|--------------------|
| X_1 | X_2 | X_1+X_2+2 | X_1+X_2+1 | $2X_1^2+X_2$ | $2X_1^2+2X_1+X_2+1$ | $2X_1^2+X_1+X_2+1$ |
| 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Para formar o plano de efeitos principais completo 3^7 em 18 combinações de tratamentos, devemos tomar os

dois semi-planos juntamente. Na tabela da página 171, mostramos esse plano.

Comparando novamente as colunas C e F, neste plano total com 18 combinações de tratamentos, as combinações, já arranjadas para melhor verificação, são: 00, 00, 11, 11, 22, 22, 12, 12, 01, 01, 20, 20, 21, 21, 02, 02, 12, 12. Cada combinação aparece duas vezes, logo as colunas são ortogonais.

Neste plano total, os sete fatores constituem o número máximo de fatores, em 3 níveis, que podem ser adaptados em 18 combinações de tratamentos.

Usando a notação de arranjo ortogonal de resistência d , que é (N, k, s, d) , podemos dizer que foi gerado um $(18, 7, 3, 2)$.

Plano de efeitos principais para o 3^7 em 18 combinações de tratamentos.

| A | B | C | D | E | F | G |
|-------|-------|-------------|-------------|--------------|---------------------|--------------------|
| | | X_1+X_2 | X_1+2X_2 | $X_1^2+X_2$ | $X_1^2+X_1+X_2$ | $X_1^2+2X_1+X_2$ |
| X_1 | X_2 | X_1+X_2+2 | X_1+X_2+1 | $2X_1^2+X_2$ | $2X_1^2+2X_1+X_2+1$ | $2X_1^2+X_1+X_2+1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

5.5.2.3. Outros arranjos ortogonais de resistência dois

Se desejarmos gerar um $(54, 25, 3, 2)$ podemos proceder da seguinte maneira:

1) Para 3 fatores, sabemos como obter um 3^{13} em 3^3 combinações de tratamentos usando o procedimento usual (construir o 3^3 e reclassificar as colunas).

2) O primeiro semi-plano é gerado por:

$$X_1, X_2, X_1+X_2, X_1+2X_2, X_3, X_1+X_3, X_1+2X_3, X_2+X_3, X_2+2X_3,$$

$$X_1+X_2+X_3, X_1+X_2+2X_3, X_1+2X_2+X_3, X_1+2X_2+2X_3.$$

Estas 13 colunas são ortogonais e a elas adicionamos as 12 colunas seguintes.

$$X_1^2+X_2, X_1^2+X_1+X_2, X_1^2+2X_1+X_2, X_1^2+X_3, X_1^2+X_1+X_3, X_1^2+2X_1+X_3,$$

$$X_1^2+(X_2+X_3), X_1^2+X_1+(X_2+X_3), X_1^2+2X_1+(X_2+X_3), X_1^2+(X_2+2X_3),$$

$$X_1^2+X_1+(X_2+2X_3), X_1^2+2X_1+(X_2+2X_3).$$

O primeiro semi-plano é um 3^{25} em 3^3 combinações de tratamentos, onde nem todos os fatores são ortogonais.

2) O segundo semi-plano é obtido de maneira análoga aquele do plano menor obtido no exemplo anterior.

Alguns dos arranjos ortogonais mais úteis que podem ser construídos, usando o procedimento descrito, são:

(32, 9, 4, 2), (128, 41, 4, 2), (50, 11, 5, 2),
 (250, 61, 5, 2), (98, 15, 7, 2), (128, 17, 8, 2) e
 (162, 19, 9, 2).

Os arranjos (18, 7, 3, 2) e (32, 9, 4, 2) foram construídos por BOSE e BUSH (1952), utilizando outros procedimentos.

5.6. Planos de efeitos principais para experimentos fatoriais assimétricos.

5.6.1. Condição para que as frequências sejam proporcionais

A condição necessária e suficiente para que os estimadores de efeitos principais de dois fatores quaisquer sejam não correlacionados é que os níveis de um fator ocorram ,

com cada um dos níveis de outro fator, com frequências proporcionais. Esta condição foi provada por PLACKETT (1946) e ADDELMAN (1960).

Considerando dois fatores A e B, ocorrendo em r e s níveis, respectivamente. Seja

N : número de observações no plano

$n_{i\cdot}$: número de vezes que o nível i do fator A ocorre no plano

$n_{\cdot j}$: número de vezes que o nível j do fator B ocorre no plano

n_{ij} : número de vezes que o nível i do fator A ocorre com o nível j do fator B.

Portanto,

$$\sum_j n_{ij} = n_{i\cdot} \quad , \quad \sum_i n_{ij} = n_{\cdot j} \quad \text{e} \quad \sum_{i,j} n_{ij} = N$$

É uma condição necessária e suficiente para que os estimadores dos componentes de dois fatores A e B sejam ortogonais entre si e também à média, μ , num arranjo fatorial, é:

$$n_{ij} = \frac{n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}}{N}$$

Usando a condição de frequências proporcionais, ADDELMAN (1962) mostrou que é possível derivar várias classes

de planos de efeitos principais ortogonais para experimentos fatoriais assimétricos. É o que veremos a seguir.

5.6.2. Planos para experimentos fatoriais assimétricos

5.6.2.1. Descrição do método de colapso

Temos

t_1 fatores em s_1 níveis

t_2 fatores em s_2 níveis

.....

t_k fatores em s_k níveis

em s_1^n observações, onde s_1 é um primo ou a potência de um primo, e

$$s_1 > s_2 > \dots > s_k \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^k t_i \leq \frac{(s_1^n - 1)}{s_1 - 1}$$

O procedimento para construir um plano de efeitos principais ortogonal para o experimento

$$s_1^{t_1} \times s_2^{t_2} \times \dots \times s_k^{t_k}$$

em s_1^n observações, consiste em causar o colapso de fatores, ocorrendo em s_1 níveis, para que se tornem fatores ocorrendo em s_i níveis ($i = 2, 3, \dots, k$), pela utilização de uma correspondência unívoca do conjunto de s_1 níveis ao conjunto com s_i níveis.

1º) Construimos um plano de efeitos principais ortogonal, para o experimento fatorial simétrico. Este plano envolve

$\frac{s_1^n - 1}{s_1 - 1}$ fatores, cada um em s_1 níveis, com s_1^n combinações de tratamentos, onde s_1 é um primo ou a potência de um primo.

2º) Causando o colapso dos níveis de t_2 desses fatores para s_2 níveis, onde $s_2 < s_1$, através de uma correspondência unívoca do conjunto de s_1 níveis ao conjunto de s_2 níveis.

3º) Analogamente, provocando o colapso dos níveis de t_3 dos fatores originais, onde $s_3 < s_2 < s_1$.

E assim por diante.

5.6.2.2. Ilustração do método de colapso

Mostraremos a construção de um plano de efeito principal ortogonal para o experimento fatorial $2^2 \times 3^2$ com 9

combinações de tratamentos.

19) Neste plano, temos $t_1 = 2$ e $s_1 = 3$, e $t_2 = 2$, $s_2 = 2$.

Então, construímos um plano de efeitos principais ortogonal pa

ra $\frac{s_1^2 - 1}{s_1 - 1} = \frac{3^2 - 1}{3 - 1} = 4$ fatores, cada um tendo $s_1 = 3$

níveis, em $s_1^n = 3^2 = 9$ combinações de tratamentos.

| A | B | C | D |
|-------|-------|-----------|-------------|
| X_1 | X_2 | $X_1 X_2$ | $X_1 X_2^2$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 2 |
| 0 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 0 |

29) Cada um dos dois primeiros fatores serão transformados, por

colapso, em fatores com 2 níveis usando a seguinte cadeia de correspondência:

| Fatores em 3 níveis | | Fatores em 2 níveis |
|---------------------|---|---------------------|
| 0 | → | 0 |
| 1 | → | 1 |
| 2 | → | 0 |

3º) As combinações de tratamentos, resultantes constituem um plano de efeitos principais ortogonais para o experimento $2^2 \times 3^2$.

| ct | A | B | C | D |
|-------------------------------|---|---|---|---|
| (1) | 0 | 0 | 0 | 0 |
| bcd ² | 0 | 1 | 1 | 2 |
| c ² d | 0 | 0 | 2 | 1 |
| acd | 1 | 0 | 1 | 1 |
| abc ² | 1 | 1 | 2 | 0 |
| ad ² | 1 | 0 | 0 | 2 |
| c ² d ² | 0 | 0 | 2 | 2 |
| bd | 0 | 1 | 0 | 1 |
| c | 0 | 0 | 1 | 0 |

Verificando a condição de frequências proporcionais

$$n_{ij} = \frac{n_{i.} \cdot n_{.j}}{N} \quad . \quad \text{Temos } N = 9, \quad n_{0.} = 6, \quad n_{1.} = 3,$$

$$n_{.0} = 3, \quad n_{.1} = 3, \quad n_{.2} = 3. \quad \text{Então,}$$

$$n_{00} = \frac{6 \times 3}{9} = 2 = n_{01} = n_{02} \quad \text{está correta} \quad e$$

$$n_{10} = \frac{3 \times 3}{9} = 1 = n_{11} = n_{12} \quad \text{está correta.}$$

A condição de frequências proporcionais não depende do tipo de cadeia de correspondência para estar satisfeita. A escolha dessa correspondência só tem influência na eficiência dos estimadores.

5.6.2.3. Outras cadeias de correspondência

1) Se para algum i , $s_1 = s_i^m$, então um fator com s_1 níveis pode ser transformado em $\frac{s_1-1}{s_1-1}$ fatores, cada um tendo s_1 níveis.

Desde que exista um plano de efeitos principais ortogo -

nal para $\frac{s_i^m - 1}{s_i - 1}$ fatores, cada um em s_i níveis, com $s_1 = s_i^m$

combinações de tratamentos, podemos trocar cada um dos s_1 níveis por uma das s_i^m combinações de tratamentos.

Por exemplo, $s_1 = 4 = 2^2 \Rightarrow s_i = 2$

logo, existe um plano de efeitos principais para

$\frac{s_1 - 1}{s_i - 1} = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$ fatores em $s_i = 2$ níveis cada um, em

$s_i^m = 2^2$ combinações de tratamentos. A cadeia de correspondência é

Fator em 4 níveis

Fatores em 2 níveis

| | | |
|---|---|-------|
| 0 | → | 0 0 0 |
| 1 | → | 0 1 1 |
| 2 | → | 1 0 1 |
| 3 | → | 1 1 0 |

Então, por exemplo, um experimento 4^5 com 4^2 combinações de tratamentos pode ser transformado em um plano de efeitos principais para o experimento $4^3 \times 2^6$ com 4^2 observações.

2) Para o experimento $s \times s_1^{t_1} \times s_2^{t_2} \times \dots \times s_k^{t_k}$ em $2 \times s_1^n$ com

combinações de tratamentos, onde s_1 é um primo ou uma potência de um primo.

$$s_1 > s_2 > \dots > s_k, \quad s_1 < s < 2 s_1 \quad e$$

$$1 + \sum_{i=1}^k t_i \leq \frac{(s_1^n - 1)}{s_1 - 1}$$

pode ser feito o seguinte:

a) Construiremos um plano de efeitos principais ortogonal para

$\frac{s_1^n - 1}{s_1 - 1}$ fatores cada um tendo s_1 níveis, em s_1^n observações.

b) Repetimos este plano e trocamos os níveis $0, 1, 2, \dots, (s_1-1)$ de um fator por $s_1, (s_1+1), (s_1+2), \dots, (2s_1-1)$, respectivamente, e adicionamos s_1^n combinações de tratamentos.

c) Transformamos os fatores apropriados para obter o plano desejado.

Por exemplo, tendo o experimento $5 \times 3^2 \times 2$ com $2 \cdot 3^2$ combinações de tratamentos.

Primeiro, construímos um plano para o fatorial

3^4 com 3^2 combinações de tratamentos. Chamando os 4 fatores de A, B, C e D, repetimos as 9 combinações de tratamentos, mas trocamos os níveis 0, 1 e 2 do fator, por exemplo, pelos níveis 3, 4 e 5 respectivamente, aos quais adicionamos nove combinações de tratamentos. As 2×3^2 combinações de tratamentos obtidas formam um plano de efeitos principais ortogonais para o experimento 6×3^3

5.6.2.4. Análise de um plano de efeitos principais para fatoriais assimétricos.

A notação matricial do modelo é

$$\underline{y} = X\underline{\beta} + \underline{e}$$

onde

$\underline{\beta}$: vetor de efeitos e interações.

Temos

$$\underline{\beta} = (X'X)^{-1} X' \underline{y} \quad \text{onde} \quad (X'X)^{-1} \quad \text{é a matriz de variância-covariância.}$$

Para ilustrar, vamos considerar o plano de efeitos principais para o experimento fatorial $2^2 \times 3^2$ cons-

truído em 5.6.2.2.

As observações Y_{ijklm} podem ser expressas em termos de efeitos principais como

$$Y_{ijklm} = \mu + a_i A + b_j B + c_{kL} C_L + c_{kQ} C_Q + d_{mL} D_L + d_{mQ} D_Q + e_{ijklm} \quad \text{onde}$$

A, B, C_L, C_Q, D_L, D_Q são os efeitos e $a_i, b_j, c_{kL}, c_{kQ}, d_{mL}, d_{mQ}$ são os coeficientes dos contrastes ortogonais que definem os efeitos correspondentes.

Assumimos os fatores como sendo quantitativos e os níveis igualmente espaçados.

Para um fator F , com níveis 0, 1 e 2, escrevemos

$$L = F_2 - F_0 \quad \text{efeito linear de } F$$

$$Q = F_2 - 2F_1 - F_0 = (F_2 - F_1) - (F_1 - F_0) \quad \text{efeito quadrático de } F$$

e podemos obter

$$F_2 - F_1 = \frac{L + Q}{2}$$

$$F_1 - F_0 = \frac{L - Q}{2}$$

A matriz de coeficientes, cuja forma de obtê-
-los já foi mostrada em 3.1.2.3 , é dada por

$$X = \begin{bmatrix} \mu & 1/3A & 1/3B & C_L & 1/3C_Q & D_L & 1/3D_Q \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E os estimadores dos efeitos e interações são

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ 1/3 \hat{A} \\ 1/3 \hat{B} \\ \hat{C}_L \\ 1/3 \hat{C}_Q \\ \hat{D}_L \\ 1/3 \hat{D}_Q \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 & 3 & -3 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & -3 & 3 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \\ Y_9 \end{bmatrix}$$

Com essas matrizes obtidas acima podemos ter, por exemplo, os seguintes valores:

$$\frac{1}{3} \hat{A} = \frac{1}{18} [-y_1 - y_2 - y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 2y_6 - y_7 - y_8 - y_9]$$

$$\text{e } v(\hat{A}) = \sigma^2/2$$

e também

$$\hat{C}_L = \frac{1}{6} [-y_1 + y_3 + y_5 - y_6 + y_7 - y_8]$$

$$\text{com } v(\hat{C}_L) = \sigma^2/6$$

A estrutura de análise de variância é dada por

| Fonte de Variação | G.L. |
|-------------------|------|
| A | 1 |
| B | 1 |
| C _L | 1 |
| C _Q | 1 |
| D _L | 1 |
| D _Q | 1 |
| Erro | 2 |
| Total | 8 |

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao se realizar este estudo, procuramos chamar a atenção para uma técnica que faz parte da teoria de confundimento, e que consiste em reduzir o número de observações de um experimento, de uma forma conveniente para fornecer resultados seguros. Essa técnica é muito pouco usada pela falta de literatura, sendo que, em nossa pesquisa, só encontramos estudos teóricos relativos a esse assunto. O interesse, então, consistiu em reunir as técnicas, apresentando exemplos, para tentar contribuir com aqueles que desejam uma experimentação mais econômica e mais prática.

Assim, foi mostrado como confundir efeitos e interações dos fatoriais, e depois foi mostrado como confundir interações de ordem maior ou igual a dois, entretanto sem perder suas informações.

Faremos agora algumas considerações sobre os métodos apresentados, e, também, chamaremos a atenção para alguns casos que não foram mencionados, mas que se enquadram como planos de efeitos principais.

O primeiro método estudado, o que permite reduzir de lineamentos fatoriais 2^k em delineamentos com N combinações de tratamentos, onde $N = k-1$ é o mais simples e de aplicação mais prática. (Basta determinarmos as relações de identidade e conseguirmos a relação definição completa, e a partir daí po

demos determinar os efeitos ligados aos efeitos principais). Este caso foi, intencionalmente, mais detalhado, pela sua simplicidade, para mostrar as vantagens que existem na redução do número de observações de um experimento.

Os delineamentos do primeiro caso também poderiam ser obtidos através das reduções conhecidas como delineamentos de Plackett e Burman, que constituem o segundo método apresentado neste estudo. Como foi visto, o número de parcelas do delineamento reduzido é um múltiplo de 4. A diferença entre estes dois primeiros casos pode ser apresentada através de um exemplo: Tendo 9 fatores em 2 níveis cada um, e desejando fazer uma redução no delineamento, poderíamos optar pelo primeiro método, e então precisaríamos construir uma fração 2_{III}^{15-11} , isto é, um delineamento com 16 parcelas experimentais. Já com o segundo método, existe a possibilidade de analisar 9 fatores em 2 níveis, fazendo $N = 12$ parcelas experimentais, como foi feito em 5.3.2.1., embora fique diminuída a precisão com que cada fator é experimentado.

O terceiro método é tratado como uma forma mais geral do que foi mostrado no primeiro, e podem ser vistas, pelo quadro 5.4., quão vantajosas são as reduções, se considerarmos que, à medida em que s aumenta, o número de combinações de tratamentos de um delineamento completo aumenta consideravelmente.

Os arranjos ortogonais de resistência dois, colocados como quarto método, são de obtenção mais trabalhosa, entretan-

to, permitem reduções maiores do que as que poderiam ser construídas com o terceiro método. Para comparação pode ser visto que um 3^7 é reduzido em um $2 \cdot 3^2 = 18$ combinações de tratamentos com o procedimento do 4º caso, e, por outro lado, precisaria de $3^3 = 27$ combinações de tratamentos no 3º caso.

O último caso apresentado, estabelece e ilustra o método de colapso para experimentos fatoriais assimétricos. Essa técnica é muito versátil porque permite várias reduções, para diversos tipos de delineamentos. Pela extensão deste trabalho, não foram apresentadas aplicações práticas de todas as cadeias de correspondência mencionadas. Mas, por considerarmos esta técnica de muito interesse, e entendermos ser esta pouco difundida, pretendemos realizar tais aplicações práticas posteriormente.

Um delineamento experimental que não foi apresentado antes, é mencionado agora como um plano de efeitos principais. Este tipo de delineamento é o quadrado latino. Dado um quadrado latino $s \times s$, podemos apresentar as linhas como s níveis de um fator e as colunas como s níveis de um segundo fator. Por não apresentar interações entre fatores, um quadrado latino de lado s pode ser visto como uma fração s^{3-2} de um fatorial s^3 . Como extensão, temos os quadrados greco-latinos que são planos de efeitos principais para 4 fatores e os quadrados hiper-greco-latinos que são planos de efeitos principais para 5 fatores.

Para continuação deste estudo, estamos coletando exemplos de aplicações com número muito grande de fatores, para mostrar as vantagens de um delineamento reduzido, e, inclusive, tentando adaptar o uso de computador para a obtenção das tabelas de corpos de Galois.

7. BIBLIOGRAFIA

- ADDELMAN, S. (1960). Fractional factorial plans. Tese nao publicada. Iowa State University of Science and Technology, Ames, Iowa.
- ADDELMAN, S. (1962). Orthogonal Main-Effect Plans for Asymmetrical Factorial Experiments. Technometrics. Washington, D.C., 4:21-46.
- ADDELMAN, S. e O. KEMPTHORNE (1961). Some Main Effects Plans and Orthogonal Array of Strength Two. Ann. Math. Statist., Ann Arbor, 32: 1167-1176.
- BAUMERT, L., S.W. GOLOMB e M. HALL (1962). The Discovery of an Hademard Matrix of Order 92. Bull. Amer. Math. Soc., Providence, 68: 237-238.
- BOSE, R.C. (1947). Mathematical Theory of the Symmetrical Factorial Design. Sankhyā, Calcutta, 8: 107-166.
- BOSE, R.C. e K. KISHEN (1940) - On the Problem of Confounding in the General Symmetric Factorial Design. Sankhyā, Calcutta, 5: 21-36.

BOSE, R.C. e K.A. BUSH (1952). Orthogonal Arrays of Strength Two e Three. Amer. Math. Stat. Ann. Arbor, 23: 508-524.

BOX, G.E.P. e J.S. HUNTER (1961). The 2^{k-p} Fractional Factorial Designs. Technometrics. Washington, D.C., 3, Part I: 311-352.

BROWNLIE, K.A., B.K. KELLY e P.K. LORAIN (1948). Fractional Replication Arrangements for Factorial Experiments with Factors at Two Levels. Biometrika, Cambridge, 35: 268-276.

CARMICHAEL, R.D. (1956). Introduction to the Theory of Groups of Finite Order. Dover Publications, Inc. Nova York.

COCHRAN, W.G. e G.M. COX (1957). Experimental Designs. 2.^a edição. John Wiley and Sons, Nova York.

DANIEL, C. (1962). Sequences of Fractional Replicates in the 2^{p-q} Series. J. Amer. Statist. Assoc. Washington, D.C. 57: 403-429.

DAVIES, O.L. e W.A. HAY (1950). The Construction and Uses of Fractional Factorial Designs in Industrial Research. Biometrics. Washington, D.C., 6:233-249.

FINNEY, D.J. (1945). The Fractional Replication of Factorial Arrangements. Annals of Engenics, Londres, 12:291-301.

- FISHER, R.A. (1942). The Theory of Confounding in Factorial Experiments in Relation to the Theory of Groups. Annals of Engenics. Londres, 11:341-353.
- FISHER, R.A. (1947). The Design of Experiments. 4.^a edição. Oliver and Boyd, Edinburgh.
- GUPTA, B.C. e A.M. MATHAI (1980). Regression and Analysis of Variance Techniques. UFRJ, Rio de Janeiro.
- HERSTEIN, I. (1970). Tópicos de Algebra. Editora da Universidade de São Paulo. São Paulo.
- HOTELLING, H. (1944). Some Improvements on Weighing and Other Experimental Techniques. Am. Math. Statist., Ann. Arbor 15: 297-306.
- JACY MONTEIRO, L.H. (1971). Elementos de Álgebra. Ao livro técnico S.A. Rio de Janeiro.
- JOHN, P.W.M. (1971). Statistical Design and Analysis of Experiments. The MacMillan Company. Nova York.
- KEMPTHORNE, O. (1979). The Design and Analysis of Experiments. 6.^a edição. John Wiley, Nova York.

- KISHEN, K. (1945). On the Design of Experiments for Weighing and Making Other Types of Measurements. Ann. Math. Statist., Ann Arbor, 16: 294-300.
- MARGOLIN, B.H. (1967). Systematic Methods of Analyzing $2^m 3^n$ Factorial Experiments with Applications. Technometrics. Washington, D.C., 9:245-260.
- MARGOLIN, B.H. (1969). Results on Factorial Designs of Resolution IV for the 2^n and $2^n 3^m$ Series. Technometrics. Washington, D.C., 11: 431-444.
- MASON, A.R. (1975). Notas de aula do curso ST-674 em North Carolina State University, Raleigh. Comunicação pessoal com o Prof. Cássio Roberto de Melo Godoi.
- MOOD, A.M. (1946). On Hotelling's Weighing Problem. Ann. Math. Statist., Ann Arbor, 17: 432-446.
- PALEY, R.E.A.C. (1933). On Orthogonal Matrices. J. Math. Phys., Nova York, 12:311-320.
- PLACKETT, R.L. (1946). Some Generalizations in the Multifactorial Designs. Biometrika, 33: 328-332.
- PLACKETT, R.L. e J.P. BURMAN (1946). The Design of Optimum Multifactorial Experiments. Biometrika, Cambridge, 33: 305-325.

- RAGHAVARAO, D. (1959). Some Optimum Weighing Designs. Ann. Math. Statist. Ann Arbor, 30: 295-303.
- RAGHAVARAO, D. (1971). Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments. John Wiley and Sons, Nova York.
- RAO, C.R. (1947). Factorial Experiments Derivable from Combinatorial Arrangements of Arrays. J. Roy. Stat. Soc., Suppl., Londres, 9: 128-139.
- STEEL, R.G.D. e J.H. TORRIE (1960). Principles and Procedures of Statistics. Mc Graw-Hill, Nova York.
- WILLIAMSON, J. (1944). Hadamard's Determinant Theorem and the Sum of Four Squares. Duke Math. J., 11: 65-81.
- YANG, C.H. (1966). Some Designs for Maximal (+1, -1) Determinant of Order $n \equiv 2 \pmod{4}$. Mathematics of Computation, Nova York, 20: 147-148.
- YANG, C.H. (1968). On Designs of Maximal (+1, -1) Matrices of Order $n \equiv 2 \pmod{4}$. Mathematics of Computation, Nova York, 22: 174-180.
- YATES, F. (1935). Complex Experiments. Jour. Roy. Stat. Soc., Suppl., Londres, 2: 181-247.

YATES, F. (1937). The Design and Analysis of Factorial Experi
ments. Imperial Bureau of Soil Science, Harpenden, England.

ZONTA, E.P. (1980). Um método de confundimento nos experimen-
tos fatoriais. Dissertação de Mestrado apresentada à ESALQ
-USP. Piracicaba.