

INVERSA GENERALIZADA DE MOORE-PENROSE
E SOLUÇÃO DE NORMA MÍNIMA EM DELINEAMENTOS EXPERIMENTAIS

MARIA DZALINA FERREIRA ALVES

Orientador: PROF. DR. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agrônômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Julho - 1990

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Livros da
Divisão de Biblioteca e Documentação - PCAP/USP

A474i Alves, Maria Izalina Ferreira
Inversa generalizada de Moore-Penrose e solução
de norma mínima em delineamentos experimentais. Pi
racicaba, 1990.

81p.

Diss. (Mestre) - ESALQ

Bibliografia.

1. Delineamento de experimento 2. Estatística ma-
temática 3. Modelo de Gaus-Markov 4. Modelo matemáti
co I. Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz,
Piracicaba.

CDD 519.5

INVERSA GENERALIZADA DE MOORE-PENROSE
E SOLUÇÃO DE NORMA MÍNIMA EM DELINEAMENTOS EXPERIMENTAIS

MARIA DZALINA FERREIRA ALVES

Aprovada em: 31.07.90

Comissão julgadora:

Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma

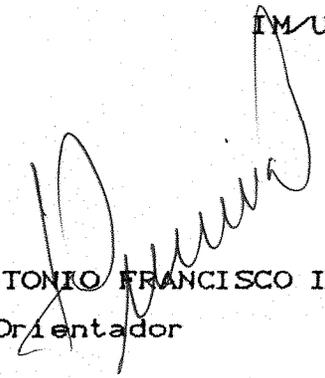
ESALQ/USP

Prof.^ª Dr.^ª Maria Cristina Stolf Nogueira

ESALQ/USP

Prof. Dr. João Riboldi

IM/UFRGS


Prof. Dr. ANTONIO FRANCISCO IEMMA
Orientador

A minha mãe, Diva,
pelas lutas e sacrifícios
empenhados para meu desenvolvimento.

A minha avó, Maria,
e as minhas irmãs, Lúcia e Rosa,
pelo apoio e carinho.

A minha filha, Rita,
por ser a motivação de
toda a caminhada.

A Tiemi, Rosana,
João e Gabriel,
pessoas que me fazem acreditar
que a amizade é feita de
amor incondicional.

D E D I C O

Ao Prof. Dr. F. Pimentel Gomes,
precursor da Estatística no Brasil,
que me despertou para esta área e
me concedeu a honra de sua confiança;

Ao Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma,
orientador, mestre, amigo,
que me estendeu a mão e me fez
caminhar até esta etapa;

MEUS AGRADECIMENTOS ESPECIAIS.

AGRADECIMENTOS

Aos Profs. Drs. Humberto de Campos e Décio Barbin, pela oportunidade de realização do Curso, apoio, compreensão, amizade e experiências transmitidas.

Ao Prof. Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi, pelas discussões e valiosas sugestões para a realização deste trabalho, e pelo apoio profissional.

Ao Prof. Dr. Izaias Rangel Nogueira, pelos valiosos e pacientes ensinamentos.

À Profa. Dra. Maria Cristina Stolf Nogueira, amiga, companheira, pelo apoio, colaboração e pelo agradável convívio profissional.

Ao Prof. Dr. Manuel Luiz Figueirôa, meu primeiro orientador, pelo incentivo em minha iniciação científica, ponto de partida para minha carreira profissional.

Ao Prof. Dr. Vivaldo Francisco da Cruz, pelo incentivo, colaboração, e ensinamentos transmitidos.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pela concessão da bolsa para realização do Curso.

Ao amigo Luiz Eloi Pinto Ferreira, *in memoriam*, pelo incentivo constante e pela lição de vida transmitida.

Aos amigos Marisa A.C. Duarte, Pedro Carvalho Rodrigues, Dinara X.W. Fernandez, Amauri de Almeida Machado e Andrés Enrique L. Reyes, pelo apoio e confiança incondicionais, em todas as etapas.

Aos amigos Mário Luiz Venturini, José Antônio Scarinci e Fernando de Souza, por tornarem a luta menos árdua.

À Profa. Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio e ao Prof. Dr. Waldemar Antonio Demétrio, pelo apoio em toda a jornada.

Aos colegas do Curso de Pós-Graduação, Olaf Andreas Bakke, Celso E. Peixoto, Ivani P. Otsubo e Lídia R.

de Carvalho, pelo companheirismo durante o curso; ao J. Maurício Mota, Rosa S. Mota e A. L. Guidoni, pelo companheirismo e auxílio no desenvolvimento final do trabalho.

A Rejane Alves, pela excelente digitação do trabalho, pela amizade e colaboração em todos os momentos.

Aos funcionários do Depto. de Matemática e Estatística da ESALQ, em especial ao Octávio Frassetto, pelo companheirismo, cooperação e amizade.

Às funcionárias da Seção de Pós-Graduação, sob a excelente coordenação da Sra. Dirce Alessi Pelegrini, pelas gentilezas e incentivo recebidos.

Aos funcionários do CIAGRI, pelas gentilezas e cooperação.

S U M Á R I O

	Página
RESUMO	vi
SUMMARY	xiii
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. O Problema	1
1.2. Objetivos	2
2. REVISÃO DE LITERATURA	4
3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	13
3.1. Conceitos Introdutórios Sobre a Inversa Generalizada de Moore-Penrose	13
3.1.1. Definição	14
3.1.2. Principais teoremas e propriedades	14
3.2. Estimação em Modelos Lineares Através da Inversa Generalizada de Moore-Penrose	17
3.2.1. Introdução	17
3.2.2. Um estimador não tendencioso para σ^2 no Modelo de Gauss-Markov	20
3.2.3. Estimação por ponto no modelo de Gauss-Markov	21
3.2.4. O teorema de Gauss-Markov	22
3.2.5. Estimação por intervalo no modelo de Gauss-Markov	23
3.2.6. Estimação por região no modelo de Gauss-Markov	23

	Página
3.2.7. Análise da variância	32
3.3. Formas Gerais de Inversas Generalizadas de Moore-Penrose em Delineamentos Experimentais..	32
3.3.1. Experimentos com um fator inteiramente casualizado (balanceado ou não)	33
3.3.2. Experimentos balanceados com dois fato- res, sem interação	38
3.3.3. Experimentos balanceados com dois fato- res cruzados, com interação	43
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	50
4.1. Experimento Não Balanceado com um Fator Intei- ramente Casualizado	50
4.2. Experimento Balanceado com Dois Fatores, Sem Interação	62
4.3. Experimento Balanceado com Dois Fatores, Com Interação	68
5. CONCLUSÕES	77
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	79

INVERSA GENERALIZADA DE MOORE-PENROSE E SOLUÇÃO DE NORMA MÍNIMA EM DELINEAMENTOS EXPERIMENTAIS

Autora: MARIA IZALINA FERREIRA ALVES

Orientador: Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma

R E S U M O

Neste trabalho são apresentadas formas gerais para obtenção de inversas generalizadas de Moore-Penrose para matrizes de delineamentos no modelo linear de Gauss-Markov. Tais formas são dependentes apenas do tamanho do subconjunto de parâmetros existentes no modelo adotado e do respectivo número de repetições.

Além das formas gerais para a inversa generalizada da matriz X do delineamento, X^+ , são apresentadas também as formas gerais do projetor $P = XX^+$, da matriz $H = X^+X$ e da matriz de variâncias e covariâncias para o estimador da função $\lambda'\theta$,

$$V[\lambda'\hat{\theta}] = \lambda'X^+X^+\lambda\sigma^2$$

Nesse contexto, são apresentadas formas gerais dessas matrizes para os delineamentos: com um fator inteiramente casualizado, com repetições constantes ou não; com dois fatores, balanceados, sem interação (podendo ser caracterizado como blocos ao acaso) e com dois fatores, balanceados, com interação (fatorial).

Para exemplificar as formas gerais propostas, foram tomados exemplos de livros textos da área de Modelos Lineares, confirmando os resultados numéricos obtidos pela metodologia proposta. Nesse sentido, obtiveram-se estimações por ponto, por intervalo, por região, e as somas de quadrados, através dos projetores ortogonais, para os três casos estudados.

Concluiu-se que as formas gerais realmente minimizam o problema numérico da obtenção da inversa de Moore-Penrose em delineamentos experimentais. Isso propicia simplificações relevantes no processo didático dos temas clássicos inerentes aos Modelos Lineares e correlatos, pois as formas das matrizes apresentam uma visão mais clara dos efeitos dos parâmetros envolvidos em cada modelo de delineamento experimental, além da facilidade de obtenção da análise de variância.

Dado que as formas gerais levam em conta apenas números fracionários relacionados com os parâmetros envolvidos no modelo, a precisão das estimações é maior que quando se trabalha com equações normais e reparametrizações.

Assim, concluiu-se que a maior contribuição dessas formas gerais, além do uso didático, seria sua utilização em programas computacionais, pois o ponto forte dessas formas é reduzir o tempo de processamento e os erros de arredondamento e ou truncamento.

THE MOORE-PENROSE GENERALIZED INVERSE AND MINIMUM NORM SOLUTION ON EXPERIMENTAL DESIGNS

Author: MARIA IZALINA FERREIRA ALVES

Adviser: Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma

S U M M A R Y

Simple and practical general ways to obtain Moore-Penrose generalized inverse for experimental designs, in Gauss-Markov linear model, depending only on the number of elements of each subset of parameters involved in the model are shown. General forms of matrices with the following designs were presented: the one factor balanced and unbalanced, two factors balanced without interaction (or randomized block design), and two factors balanced with interaction (factorial design).

General forms of Moore-Penrose matrices for the design matrix, X^+ , for the projector $P = XX^+$, for $H = X^+X$ and for variances and covariances matrix of the parametric estimable function $\lambda'e$, $V[\lambda'\hat{e}] = \lambda'X^+X^+\lambda\sigma^2$, are presented.

Examples from Linear Models text books were used to exemplify the general forms presented. They confirmed numerical results obtained through the proposed methodology. Point, interval and region estimations, and sum of

square through orthogonal projectors, for each of the three cases studied were obtained.

The general forms minimize the numerical problem on obtaining the Moore-Penrose inverse in experimental designs. This simplifies the didactic process on Linear Model and others related classic topics because the matrices forms presented a clearer vision of parameters effects, involved in each experimental design model, and ease obtaining of analysis of variance with the use of the orthogonal projectors.

These general forms take into account just fractionary numbers related to the model parameters. Therefore, estimates precision is majored when compared with the results obtained by normal equations and reparameterizations.

In addition to the didactic advantage of the general forms, we think that the computational methods of computer packages could gain in precision if they use the formulae developed.

1. INTRODUÇÃO

1.1. O Problema

Dado o modelo linear $y = X\theta + e$ (modelo linear de Gauss-Markov), é bem sabido que o correspondente sistema de equações normais, $X'Xe^\circ = X'y$, é sempre consistente. Além disso, se X é de posto coluna completo, como em geral ocorre em modelos de regressão, a menos de colinearidade, então $X'X$ é positiva definida, sendo portanto, não-singular e o sistema tem solução única. No entanto, se X não é de posto coluna completo, como em geral ocorre nos delineamentos experimentais, o sistema de equações normais é indeterminado.

Do ponto de vista teórico, essa indeterminação não apresenta problemas sérios, pois a invariância da aproximação de mínimos quadrados $\hat{y} = Xe^\circ$, para qualquer e° solução das equações normais, garante a invariância, por exemplo, das somas de quadrados e, a invariância de $\lambda'e^\circ$, se $\lambda'e$ é estimável, garante a invariância do "BLUE"¹, e assim por diante.

Vários métodos de obtenção das soluções e° são propostos na literatura. Dentre eles estão as reparametriza-

¹ "BLUE": "Best Linear Unbiased Estimator".

ções e as restrições nas soluções e/ou nos parâmetros, visando em geral obter soluções únicas através da estratégia de "completar" o posto coluna de X . Outra alternativa interessante pode ser obtida através do uso das inversas generalizadas. No entanto, se as inversas generalizadas de X têm sido amplamente usadas nas deduções teóricas, isto em geral não ocorre em problemas práticos, dada a apregoada dificuldade de sua obtenção. Nesse contexto está a inversa generalizada de Moore-Penrose, X^+ , que fornece a solução de norma mínima e o projetor ortogonal do vetor y de observações no espaço coluna de X , $P = XX^+$, além de simplificar sensivelmente a exposição teórica de temas como aqueles sobre formas quadráticas, estimação e testes, dentre outros. No entanto, na prática a inversa X^+ raramente é usada, sendo mesmo rejeitada por grande parte dos pesquisadores, dada a dificuldade de sua obtenção numérica. Nota-se, assim, um certo desencontro entre teoria e prática, em áreas como, por exemplo, a de Modelos Lineares, pois enquanto a teoria a tem utilizado com total generalidade, a prática está presa, em grande parte, aos modelos com restrição.

1.2. Objetivos

O objetivo central consiste em minimizar o problema numérico da obtenção da inversa generalizada de Moore-Penrose em delineamentos experimentais com um e dois

fatores, através de formas gerais simples e práticas, dependentes apenas do número de elementos de cada subconjunto de parâmetros envolvidos no modelo.

Espera-se, também, propiciar simplificações relevantes no processo didático da apresentação teórica dos temas clássicos inerentes aos modelos lineares e correlatos.

2. REVISÃO DE LITERATURA

O conceito de inversa generalizada de uma matriz (real ou complexa) $A_{m \times n}$ foi desenvolvido por MOORE (1920), no contexto de transformações lineares de espaço n -dimensional para m -dimensional com o uso de norma Euclidiana. Definiu que $A^+_{n \times m}$ é uma inversa generalizada de $A_{m \times n}$, se

$$AA^+ = P \quad [2.1]$$

onde P é o projetor de vetores do espaço m -dimensional no espaço gerado pelas colunas de A .

PENROSE (1955) em extensão ao trabalho de MOORE (1920) mostrou que, para toda matriz real $A_{m \times n}$ existe uma e uma só matriz $A^+_{n \times m}$ que satisfaz as quatro condições seguintes:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & AA^+A = A \\ \text{(ii)} \quad & A^+AA^+ = A^+ \\ \text{(iii)} \quad & (A^+A)' = A^+A \\ \text{(iv)} \quad & (AA^+)' = AA^+ \end{aligned} \quad [2.2]$$

A matriz A^+ assim definida é conhecida como a inversa generalizada de Moore-Penrose, e os autores apresentam, como um procedimento para sua obtenção, a forma

$$A^+ = C'(CC')^{-1} (B'B)^{-1} B' \quad [2.3]$$

onde $A=BC$ é uma fatoração de posto completo para a matriz A .

Segundo RAO (1961), o estudo de sistemas de equações lineares do tipo $Ax = y$, em Estatística, onde em geral a matriz X do planejamento (no modelo $y = X\theta + e$) é retangular e, nesse caso, se X não for posto coluna completo, então $X'X$ nas equações normais não é não-singular, tem recebido atenção no sentido da definição de uma inversa generalizada com propriedades similares àquelas de uma inversa de matrizes não-singulares.

RAO e MITRA (1971) afirmam que se existir uma inversa generalizada $A_{n \times m}^G$ de $A_{m \times n}$, tal que $A^G y$ é uma solução de mínimos quadrados de norma mínima, de $Ax = y$ inconsistente, então $A^G = A^+$ atende as quatro propriedades da inversa generalizada de Moore-Penrose. Ressalta que essas propriedades se cumprem porque a solução de norma mínima é única. Então, além de ser solução de mínimos quadrados ("LSS")², a melhor solução aproximada ("BAS")³ do sistema $Ax = y$ inconsistente é $x = A^+ y$.

ALBERT (1972) considera a inversa generalizada de Moore-Penrose como uma teoria elegante, chamando-a de pseudo-inversa. Ressalta sua aplicação no método dos quadrados mínimos, em equações lineares, na obtenção de projetores ortogonais, na análise de regressão e na programação linear. Afirma que o mais importante na sua utilização é a facilidade didática desses tópicos. Inclui em seu trabalho a familiaridade da inversa de Moore-Penrose com noções de li-

² "LSS": Least Square Solution.

³ "BAS": Best Approximate Solution.

mites, com as propriedades fundamentais de espaço euclidiano e as muitas aplicações em Probabilidade e Estatística.

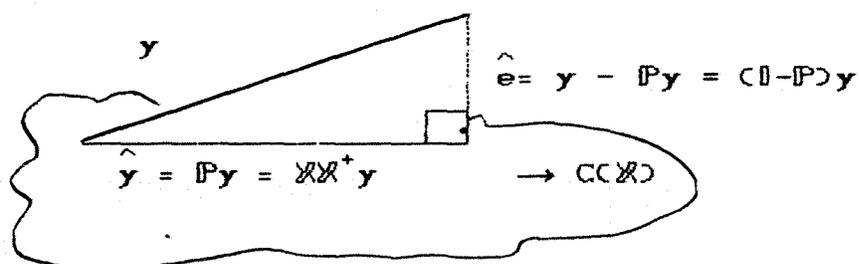
KRUSKAL (1974) mostra a superioridade das propriedades da inversa generalizada de Moore-Penrose em relação às demais, através de um estudo sobre a geometria das inversas generalizadas.

LOWERRE (1982) conclui que a inversa de Moore-Penrose e a decomposição por valores singulares de uma matriz são a base para muitos dos métodos modernos em regressão e análise da variância. Entre outras idéias, cita o uso da inversa de Moore-Penrose no estudo da covariância e sua importância na Estatística Matemática.

Tomando-se o modelo de Gauss-Markov, $y = X\theta + e$, a aproximação de mínimos quadrados para y pode ser dada por $\hat{y} = X\theta^0$, de modo único. Considerando que a solução de norma mínima para o sistema é dada por $\theta^0 = X^+y$, então,

$$\hat{y} = XX^+y. \quad [2.4]$$

Lembrando da definição de MOORE (1920), $XX^+ = P$, e se $\hat{y} = Py$, esse resultado nos garante verdadeira a decomposição do vetor y das observações na soma de dois vetores: o vetor \hat{y} do espaço coluna de X e o vetor $\hat{e} = y - \hat{y} = y - Py$, do complemento ortogonal do espaço coluna da matriz de delineamento X :



Para a análise de variância, usando o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
 \|y\|^2 &= \|\hat{y}\|^2 + \|\hat{e}\|^2 = \|XX^+y\|^2 + \|y - XX^+y\|^2 \\
 y'y &= (XX^+y)'(XX^+y) + (y - XX^+y)'(y - XX^+y) \\
 &= y'X^+X'XX^+y + y'y - y'XX^+y - y'X^+X'y + y'X^+X'XX^+y \\
 &= y'(XX^+)'XX^+y + y'y - y'XX^+y - y'(XX^+)'y + \\
 &\quad + y'(XX^+)'XX^+y \\
 y'y &= y'XX^+XX^+y + y'y - y'XX^+y - y'XX^+y + y'XX^+XX^+y \\
 &= y'XX^+y + y'y - 2y'XX^+y + y'XX^+y \\
 y'y &= y'Py + y'(I - P)y \qquad [2.5]
 \end{aligned}$$

que representam:

$$\text{SQ Total} = \text{SQ Parâmetros} + \text{SQ Resíduos.}$$

As somas de quadrados apresentadas na forma [2.5] facilitam em muito o estudo das formas quadráticas e de suas distribuições.

Nota-se, então, que teoricamente a inversa generalizada de Moore-Penrose simplifica sobremaneira as deduções, principalmente na área de Modelos Lineares e correlatos. Entretanto, a dificuldade de sua obtenção numérica tem limitado seu uso na prática.

RAO & MITRA (1971) apresentam um capítulo sobre métodos computacionais para obtenção de inversas generalizadas, através de: (a) fatoração de posto completo; (b) redução diagonal; (c) forma canônica de Hermite; (d) decomposição em valores singulares, e apresentam, entre as técnicas especiais, métodos de ortogonalização.

A fatoração de posto completo $A = BC$, que conduz a $A^+ = C'(CC')^{-1}(B'B)^{-1}B'$, pode ser pouco operacional, principalmente quando A tem grandes dimensões.

Para contornar esse problema, DWIVEDI (1975) propôs um algoritmo que permite a obtenção direta de B e C . Uma das excelentes propriedades do algoritmo é a convergência em $r[A]^4 = k$ passos. O uso desse algoritmo é facilitado sobremaneira através do sistema computacional ALGEMA, de DIAS (1988).

PESSOA (1986) estudou doze métodos diretos e dois métodos iterativos para cálculo da inversa generalizada de Moore-Penrose. Justifica este estudo por ter a inversa de Moore-Penrose a propriedade de que $x = A^+b$ é a única solução aproximada do sistema linear $Ax = b$ (consistente ou não), que minimiza tanto a norma euclidiana de x como os resíduos quadráticos $\|Ax - b\|^2$. Os métodos foram comparados em termos de utilização de memória computacional, tempo real de execução e precisão. A autora concluiu que os melhores métodos com relação aos parâmetros medidos foram o método iterativo de ordem $p=3$ (menor tempo de convergência), o método recursivo de Greville e o método de Gram-Schmidt, estes últimos apresentando maior precisão. Concluiu ainda que o método da decomposição em valores singulares é o que apresenta um dos maiores números de operações.

⁴ A notação $r[A]$ será utilizada para representar o posto ("rank") de uma matriz.

O método de ortogonalização de Gram-Schmidt testado pela autora (PESSOA, 1986) é o mesmo utilizado por NOGUEIRA (1978), que apresentou um método geral, prático, para obtenção de tabelas de polinômios ortogonais quando os níveis são ou não equidistantes. Este trabalho veio facilitar em muito a determinação dos polinômios ortogonais, principalmente para o caso de níveis não equidistantes.

GODOI *et alii* (1987) apresentam um sistema computacional de Modelos Lineares Multidimensionais e Álgebra de Matrizes (MOLIMUD), cujo módulo "Ortonormalização de Gram-Schmidt" executa a fatoração de uma matriz $A_{m \times n}$ em $A=UT$, permitindo, através de partição dessas matrizes, a obtenção de

$$A^+ = T'(TT')^{-1}U', \quad (2.6)$$

onde $T_{k \times n}$ é uma matriz trapezoidal, não singular, e $U_{m \times k}$ é uma matriz de colunas ortonormais, $(U'U) = I$.

A conscientização por parte dos pesquisadores das fortes propriedades da inversa generalizada de Moore-Penrose os tem levado a procurar formas gerais que diminuam as dificuldades de sua obtenção numérica.

Assim, por exemplo, segundo GRAYBILL (1969):

a) Se u é um vetor $n \times 1$,

$$u_{1 \times n}^+ = (1 / \sum_{i=1}^n u_i^2) u' \quad (2.7)$$

b) Se A é não singular, então

$$A^+ = A^{-1} \quad (2.8)$$

c) Se A é uma matriz $m \times n$ com $r[A] = k$, então:

$$i) \text{ se } k = n \Rightarrow A^+ = (A'A)^{-1}A' \text{ e } A^+A = I \quad [2.9]$$

(posto coluna completo)

$$ii) \text{ se } k = m \Rightarrow A^+ = A'(AA')^{-1} \text{ e } AA^+ = I \quad [2.10]$$

(posto linha completo)

LEMMA (1982, 1985, 1987) mostra, com objetivos didáticos, formas gerais da inversa generalizada de Moore-Penrose, com base nas matrizes uniformes e nas matrizes ortogonais de Helmert.

Usando propriedades da decomposição espectral, o autor mostra que, sendo A uniforme, então:

$$a.1) A^{-1} = \frac{1}{\lambda_1} hh' + \frac{1}{\lambda_2} H^*H^* \quad [2.11]$$

(se A é não-singular)

onde λ_1 e λ_2 são raízes características de A , λ_2 com multiplicidade $k-1$, e H é uma matriz de Helmert;

$$a.2) A^+ = \frac{1}{\lambda_2} H^*H^* \quad [2.12]$$

(se A não é não-singular)

Além disso, o autor mostra que, para os sistemas de equações normais reduzidas de experimentos com restrição na casualização, muitas vezes a inversa generalizada de Moore-Penrose de $X'X$ pode ser obtida diretamente, sem qualquer inversão explícita. Assim, por exemplo, se as equações normais reduzidas são dadas por $C\hat{\tau} = Q$, então:

b.1) nos experimentos em blocos casualizados:

$$C^+ = \frac{1}{b^2} C, \quad [2.13]$$

onde $C = X_2'(I - P_1)X_2$, e b é o número de blocos;

b.2) nos experimentos em blocos incompletos balanceados:

$$C^+ = \frac{k^2}{l^2 v^2} C, \quad [2.14]$$

onde k , l e v são constantes bem conhecidas dos experimentos em blocos incompletos balanceados (BIB);

b.3) nos látices balanceados:

$$C^+ = \frac{1}{l^2 v^2} C; \quad [2.15]$$

b.4) nos quadrados latinos:

$$C^+ = \frac{1}{v} C, \quad [2.16]$$

e assim por diante.

Em extensão aos trabalhos de IEMMA (1982, 1985, 1987), RIBOLDI (1988) apresenta a forma geral da inversa de Moore-Penrose para delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados:

$$C^+ = \Omega_{jj} = \begin{cases} \frac{k(s-1)}{\lambda_2 v^2} + \frac{k(n-1)}{n[r(k-1) + \lambda_1]}, & \text{se } j = j' \text{ e,} \\ \frac{k(s-1)}{\lambda_2 v^2} + \frac{k}{n[r(k-1) + \lambda_1]}, & \text{se } j \neq j' \text{ e } j \text{ e } j' \text{ são} \\ & \text{tratamentos do mesmo} \\ & \text{grupo (1-}^{\text{os}} \text{ associa-} \\ & \text{dos);} \\ -\frac{k}{\lambda_2 v^2}, & \text{se } j \text{ e } j' \text{ são trata-} \\ & \text{mentos de grupos di-} \\ & \text{ferentes (2-}^{\text{os}} \text{ asso-} \\ & \text{ciados);} \end{cases} \quad [2.17]$$

ALVES *et alii* (1987, 1988) propõem formas gerais para a inversa generalizada de Moore-Penrose da matriz X de delineamentos experimentais com um fator inteiramente casualizado, para casos balanceados ou não, dependentes apenas do número de elementos de cada subconjunto de parâmetros envolvidos no modelo.

Assim, assumindo a caracterização:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij},$$

onde:

$i = 1, \dots, a$ é o índice de "tratamentos",

$j = 1, \dots, R_i$ é o índice das repetições,

$$X^+ = \frac{1}{a+1} \begin{bmatrix} 1' \\ \hline X' \\ \alpha \end{bmatrix}_n \quad [2.18]$$

onde:

$$1'_n = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \frac{1}{R_1} & 1'_{R_1} & \frac{1}{R_2} & 1'_{R_2} & \dots & \frac{1}{R_a} & 1'_{R_a} \end{array} \right]$$

$$X'_{\alpha n} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \frac{1}{R_1} & D_{R_1}^{(1)} & \frac{1}{R_2} & D_{R_2}^{(2)} & \dots & \frac{1}{R_a} & D_{R_a}^{(a)} \end{array} \right]$$

$$D_{R_l}^{(l)} = (m_{ij}); \quad m_{ij} = \begin{cases} a, & \text{se } i = l, \quad l = 1, \dots, a \\ -1, & \text{se } i \neq l \end{cases}$$

ALVES e IEMMA (1989, 1990), em extensão ao trabalho anterior, apresentam formas gerais para a inversa generalizada de matrizes de delineamentos com mais de um fator, sem interação e com interação, também dependentes apenas dos parâmetros do modelo.

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

3.1. Conceitos Introdutórios Sobre a Inversa Generalizada de Moore-Penrose

A teoria de Modelos Lineares que inclui uma considerável parte de teoria e aplicações estatísticas, envolve a solução de sistemas do tipo

$$Ax = g \quad [3.1]$$

e funções das soluções.

Se $A_{(n)}$ é uma matriz $n \times n$, não-singular, isto é, se existe a inversa A^{-1} , a solução do sistema existe, e é dada de forma única por $x = A^{-1}g$.

Entretanto, em modelos de delineamentos experimentais, normalmente $A_{(n)}$ não é não singular ($\delta_{(A)} = 0$ ou \Leftrightarrow alguma raiz característica é nula ou $\Leftrightarrow A_{(n)}$ não é positiva definida), não existindo, portanto, A^{-1} . Frequentemente, A nem mesmo é quadrada e, conseqüentemente, não faz sentido falar em A^{-1} . Nestas situações ainda é possível encontrar uma solução para o sistema [3.1], adotando-se um conceito mais abrangente e menos restritivo de matriz inversa, o conceito de **INVERSA GENERALIZADA**.

Dentre as inversas generalizadas, destaca-se a inversa generalizada de Moore-Penrose, denotada por A^+ , con-

siderada como uma extensão do conceito de inversa de uma matriz não singular. Se A é não-singular então $A^+ = A^{-1}$.

3.1.1. Definição

Dada a matriz $A_{m \ n}$, $r[A] = k \leq \min\langle m, n \rangle$, então a matriz $A_{n \ m}^+$, de posto k , tal que:

$$i) AA^+A = A$$

$$ii) A^+AA^+ = A^+$$

$$iii) AA^+ = (AA^+)', \text{ isto é, } AA^+ \text{ é simétrica}$$

$$iv) A^+A = (A^+A)', \text{ isto é, } A^+A \text{ é simétrica}$$

[3.2]

é definida como a inversa generalizada de Moore-Penrose.

3.1.2. Principais teoremas e propriedades

Teorema 1: Se $A_{m \ n}$ é uma matriz nula, então $A_{n \ m}^+$ é uma matriz nula:

$$A_{n \ m}^+ = \phi_{n \ m}$$

Teorema 2: Para cada matriz $A_{m \ n}$ existe uma e uma só $A_{n \ m}^+$ que satisfaz às condições de Moore-Penrose:

i) Existência

i.1) Se $A_{m \ n} = \phi_{m \ n}$, pelo Teorema 1 existe $A_{n \ m}^+ = \phi_{n \ m}$

i.2) Se $A_{m \ n} \neq \phi_{m \ n}$ e se $r[A] = k > 0$, então existe $B_{m \ k}$

e $C_{k \ n}$, ambas de posto k , tal que $A_{m \ n} = \begin{matrix} B \\ m \ k \end{matrix} \begin{matrix} C \\ k \ k \end{matrix}$

(fatoração de posto completo).

Como B é de posto coluna completo e C é de posto linha completo, então $B'B$ e CC' são não-singulares.

$$\text{Seja } A^+ = C'(CC')^{-1} (B'B)^{-1} B'$$

$$a) AA^+A = B \underbrace{CC'(CC')^{-1}}_I \underbrace{(B'B)^{-1}B'B}_I C = BC = A$$

$$b) A^+AA^+ = C'(CC')^{-1} \underbrace{(B'B)^{-1}B'B}_I \underbrace{CC'(CC')^{-1}}_I (B'B)^{-1}B' \\ = C'(CC')^{-1} (B'B)^{-1}B' = A^+$$

$$c) AA^+ = B \underbrace{CC'(CC')^{-1}}_I (B'B)^{-1}B' = B(B'B)^{-1}B' \text{ (simétrica)}$$

$$d) A^+A = C'(CC')^{-1} \underbrace{(B'B)^{-1}B'B}_I C = C'(C'C)^{-1}C \text{ (simétrica)}$$

$$\therefore \text{ existe } A^+ = C'(CC')^{-1} (B'B)^{-1}B' \quad [3.3]$$

ii) Unicidade:

Sejam A_1^+ e A_2^+ "duas" inversas de Moore-Penrose de A . Assim,

$$a.1) AA_1^+A = A$$

$$b.1) AA_2^+A = A$$

$$a.2) A_1^+AA_1^+ = A_1^+$$

$$b.2) A_2^+AA_2^+ = A_2^+$$

$$a.3) AA_1^+ = (AA_1^+)'$$

$$b.3) AA_2^+ = (AA_2^+)'$$

$$a.4) A_1^+A = (A_1^+A)'$$

$$b.4) A_2^+A = (A_2^+A)'$$

Então,

$$AA_2^+ = AA_1^+AA_2^+ = (AA_1^+)'(AA_2^+)' = A_1^+A'A_2^+A' = A_1^+A' = (AA_1^+)' = AA_1^+ \\ \therefore AA_2^+ = AA_1^+$$

$$A_1^+A = A_1^+AA_2^+A = (A_1^+A)'(A_2^+A)' = A'A_1^+A'A_2^+ = A'A_2^+ = (A_2^+A)' = A_2^+A \\ \therefore A_1^+A = A_2^+A$$

Além disso,

$$\begin{aligned} A_1^+ &= A_1^+ A A_1^+ = A_2^+ A A_1^+ = A_2^+ A A_2^+ = A_2^+ \\ \therefore A_1^+ &= A_2^+ \end{aligned}$$

o que prova a unicidade da inversa generalizada de Moore-Penrose.

Principais Propriedades:

- P1) $(A^+)' = (A')^+$ e $(A^+)^+ = A$;
- P2) $(A'A)^+ = A^+A^+$; $(AA^+)^+ = AA^+$ e $(A^+A)^+ = A^+A$;
- P3) AA^+ , A^+A , $I - AA^+$ e $I - A^+A$ são simétricas e idempotentes;
- P4) $AA^+ = A(A'A)^-A' = AA^{\dagger} = P$ é o projetor ortogonal, invariante para qualquer escolha de $(A'A)^-$. Aqui os símbolos $(-)$ e (\dagger) referem-se às inversas generalizadas condicionais e de mínimos quadrados, respectivamente;
- P5) Se $r[A] = k$, então $r[A^+] = r[AA^+] = r[A^+A] = k$ e $r[\underset{(n)}{I - AA^+}] = n - k$;
- P6) Se $r[\underset{m}{A} \underset{n}{A}] = m$ (posto linha completo), então $A^+ = A'(AA')^{-1}$ e $AA^+ = I$;
- P7) Se $r[\underset{m}{A} \underset{n}{A}] = n$ (posto coluna completo), então $A^+ = (A'A)^{-1}A'$ e $A^+A = I$;
- P8) Se A é simétrica e idempotente, então $A^+ = A$;
- P9) Se $A = A_1 + A_2 + \dots + A_p$ e se $A_i A_i' = \phi$ e $A_i' A_i = \phi \Rightarrow A^+ = A_1^+ + A_2^+ + \dots + A_p^+$;
- P10) Se $\underset{m}{A} \underset{n}{A}$ é uma matriz com mn elementos iguais a 1, então $A^+ = \frac{1}{mn} A'$.

3.2. Estimação em Modelos Lineares Através da Inversa Generalizada de Moore-Penrose

3.2.1. Introdução

O modelo linear:

$$y_{n \times 1} = X_{n \times m} \theta_{m \times 1} + e_{n \times 1} \quad [3.4]$$

onde:

$y_{n \times 1}$ é um vetor de realizações de variáveis aleatórias;

$X_{n \times m}$ é uma matriz de elementos conhecidos (matriz do delineamento) de posto k , $k \leq \min(m, n)$;

$\theta_{m \times 1}$ é um vetor de parâmetros desconhecidos;

$e_{n \times 1}$ é um vetor de componentes aleatórios não observáveis, tal que $e \sim N(\phi; \sigma^2)$,

é definido como Modelo Linear ordinário de Gauss-Markov (G.M.), também chamado por alguns autores como de Modelo Gauss-Markov normal.

Serão abordados aqui apenas Modelos Lineares de delineamentos experimentais, portanto, a matriz X será sempre constituída de zeros e uns.

Teorema 3: Dado o Modelo Linear de Gauss-Markov, o sistema de equações normais é sempre consistente.

Seja $X'X\theta = X'y$ o sistema de equações normais.

Sabe-se que um sistema $Ax = g$ é consistente se e só se $AA^{-}g = g$.

Fazendo $A = X'X$ e $g = X'y$

e considerando que $X(X'X)^{-1}X' = XX^+$ (P.4), vem

$$X'X(X'X)^{-1}X'y = X'XX^+y = X'X^+X'y = X'y \quad [3.5]$$

Assim, é sempre possível obter soluções de mínimos quadrados para $X\theta = y$ inconsistente através de $X'X\theta = X'y$ consistente.

Se $y = X\theta + e$, $r \begin{bmatrix} X \\ n \\ p \end{bmatrix} = k$:

(a) $k = p \Rightarrow X$ tem posto coluna completo

$\Rightarrow X'X$ é positiva definida

$\Rightarrow X'X$ é matriz não-singular

\Rightarrow existe $(X'X)^{-1} \Rightarrow X'X\theta = X'y$ tem solução única

dada por

$$\hat{\theta} = \underbrace{(X'X)^{-1}}_{X^+} X'y = X^+y \quad [3.6]$$

Isto em geral ocorre em problemas de regressão, a menos de colinearidades.

Sendo $y = X\theta + e$, como em [3.4], então:

$$E[e] = \phi, \quad V[e] = \sigma^2 I$$

$$E[y] = E[X\theta + e] = X\theta \quad [3.7]$$

$$V[y] = V[X\theta + e] = V[e] = \sigma^2 I \quad [3.8]$$

$$\therefore y \sim N(X\theta; \sigma^2 I) \quad [3.9]$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} E[\hat{\theta}] &= E[(X'X)^{-1}X'y] = (X'X)^{-1}X'E[y] \\ &= X^+E[y] = X^+X\theta \end{aligned}$$

Mas, por P.7, sendo X de posto coluna completo, temos aqui $X^+X = I$, donde, [3.10]

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

Então se $r[\mathcal{X}] = p$, $\hat{\theta}$ é estimador não viciado de mínimos quadrados para θ .

$$\begin{aligned} V[\hat{\theta}] &= V[(\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-1}\mathcal{X}'y] \\ &= V[\mathcal{X}^+y] \\ &= \mathcal{X}^+V[y]\mathcal{X}^+, \\ &= \mathcal{X}^+\mathcal{X}^+\sigma^2 \end{aligned} \quad [3.11]$$

e dado que \mathcal{X} tem posto coluna completo, $\mathcal{X}^+\mathcal{X}^+ = (\mathcal{X}'\mathcal{X})^+$, então $V[\hat{\theta}]$ pode ser também escrita na forma

$$V[\hat{\theta}] = (\mathcal{X}'\mathcal{X})^+\sigma^2 \quad [3.12]$$

(b) $k < p \Rightarrow \mathcal{X}$ não tem posto coluna completo:

$\Rightarrow \mathcal{X}'\mathcal{X}$ não é definida positiva;

\Rightarrow não existe $(\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-1} \Rightarrow \mathcal{X}'\mathcal{X}\theta = \mathcal{X}'y$ é indeterminado.

Então, a menos de condições especiais: sob restrições, reparametrização, etc., não admite solução única.

Nesse caso, as soluções θ^0 não são estimadores não viciados para θ , mas sim para certas funções dos componentes de θ , dadas em $H\theta$:

$$\theta^0 = (\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-}\mathcal{X}'y \quad [3.13]$$

$$E[\theta^0] = (\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-}\mathcal{X}'\mathcal{X}\theta = H\theta \quad [3.14]$$

Assim, nesse modelo, os componentes de θ não são individualmente estimáveis, mas sim aquelas funções dadas através de H . Nesse caso, θ^0 não tem valor por si só, mas sim através de \mathcal{X} , pois $\mathcal{X}\theta^0$ é invariante.

3.2.2. Um Estimador não tendencioso para σ^2 no modelo de Gauss-Markov

Teorema 4: Um estimador não tendencioso para σ^2 no modelo linear de Gauss-Markov pode ser obtido de

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{e}^0)' (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{e}^0) = \frac{1}{n-k} \mathbf{y}' (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{y}$$

Seja

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-k} \|\hat{\mathbf{e}}\|^2 = \frac{1}{n-k} \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 = \frac{1}{n-k} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{e}^0\|^2 \\ &= \frac{1}{n-k} (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{X}\mathbf{e}^0)' (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{e}^0) \\ &= \frac{1}{n-k} [\mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}\mathbf{e}^0 - \mathbf{e}^0'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \mathbf{e}^0'\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{e}^0] \\ &= \frac{1}{n-k} [\mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\mathbf{e}^0'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \mathbf{e}^0'\mathbf{X}'\mathbf{y}] \\ &= \frac{1}{n-k} [\mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{e}^0'\mathbf{X}'\mathbf{y}] \end{aligned}$$

e, usando a solução de norma mínima,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-k} [\mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}^+\mathbf{X}'\mathbf{y}] \\ &= \frac{1}{n-k} [\mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}\mathbf{X}^+\mathbf{y}] \\ &= \frac{1}{n-k} [\mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{P}\mathbf{y}] \\ &= \frac{1}{n-k} \mathbf{y}'(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\hat{\sigma}^2] &= E\left[\frac{1}{n-k} \mathbf{y}'(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{y}\right] \\ &= \frac{1}{n-k} [\text{Tr}(\mathbf{I}-\mathbf{P})\sigma^2 + \mathbf{e}'\mathbf{X}'(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{X}\mathbf{e}] \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\mathbb{I}-P] &= \text{Tr}[\mathbb{I}] - \text{Tr}[P] \\ &= r[\mathbb{I}_{(n)}] - r[XX^*] \\ &= n - r[X] \\ &= n - k \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e'X'(\mathbb{I}-P)Xe &= e'X'Xe - e'X'PXe \\ &= e'X'Xe - e'X'XX^*Xe \\ &= e'X'Xe - e'X'Xe = \phi \end{aligned}$$

$$\therefore E[\hat{\sigma}^2] = \frac{1}{n-k} [(n-k)\sigma^2 + \phi] = \sigma^2 \quad [3.15]$$

3.2.3. Estimacão por ponto no modelo de Gauss-Markov

DEFINIÇÃO (RAO, 1945): Dado o modelo linear $y = X\theta + e$ (Gauss-Markov), então uma função paramétrica $\lambda'\theta$  dita estimável se e só se existir ao menos uma combinao linear das observaes, $a'y$, tal que $E[a'y] = \lambda'\theta$.

Teorema 5 (RAO, 1945): Uma condio necessária e suficiente para que uma funo paramétrica $\lambda'\theta$ seja estimável no modelo de Gauss-Markov  que $\lambda \in C(X')$.

Suficiente:

$$\lambda \in C(X') \Rightarrow \lambda'\theta \text{  estimável}$$

$$\lambda \in C(X') \Rightarrow \text{existe } a: X'a = \lambda \Rightarrow \lambda' = a'X$$

Pós-multiplicando por e :

$$\Rightarrow \lambda'\theta = a'Xe \Rightarrow \lambda'\theta = a'E[y] \Rightarrow \lambda'\theta = E[a'y]$$

Necessárias:

$\lambda' \theta$ estimável \Rightarrow existe a' tal que $E[a'y] = \lambda' \theta$

$$\Rightarrow a' E[y] = a' X \theta = \lambda' \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda \in C(X') \text{ ou } \lambda' \in C(X)$$

Colorário 1: Do Teorema 5 tem-se que:

$$\text{Se } \lambda' \theta \text{ estimável} \Leftrightarrow r[X'] = r[X' | \lambda] \quad (3.16)$$

3.2.4. O Teorema de Gauss-Markov

Teorema 6: Se $\lambda' \theta$ é estimável no modelo $y = X\theta + e$ (Gauss-Markov), então o "BLUE" de $\lambda' \theta$ é dado de modo único (invariante) por $\hat{\lambda' \theta} = \lambda' \theta^{\circ}$, onde θ° é qualquer solução das equações normais.

Prova: $\lambda' \theta$ estimável \Rightarrow existe $\rho: X' X \rho = \lambda \Rightarrow \lambda' = \rho' X' X$

Pós-multiplicando por θ° , tem-se

$$\lambda' \theta^{\circ} = \rho' X' X \theta^{\circ} = \rho' X' X X^+ y = \rho' X' X^+ X' y = \rho' X' y$$

Além disso,

$$E[\hat{\lambda' \theta}] = E[\lambda' \theta^{\circ}]$$

Usando a solução de norma mínima,

$$\begin{aligned} E[\hat{\lambda' \theta}] &= E[\lambda' \theta^{\circ}] \\ &= E[\lambda' X^+ y] \\ &= \lambda' X^+ E[y] = \lambda' X^+ X \theta \end{aligned}$$

e como $X' X \rho = \lambda \Rightarrow \lambda' = \rho' X' X$,

$$E[\hat{\lambda' \theta}] = \rho' X' X X^+ X \theta = \rho' X' X \theta = \lambda' \theta$$

$$\therefore E[\hat{\lambda' \theta}] = \lambda' \theta$$

ou seja, $\lambda' \theta^{\circ}$ é estimador não tendencioso para $\lambda' \theta$.

$$\begin{aligned}
 V(\hat{\lambda}'\theta) &= V(\lambda'e^0) = V(\lambda'X^+y) \\
 &= \lambda'X^+V(y)X^+\lambda \\
 &= \lambda'X^+X^+\lambda\sigma^2
 \end{aligned}$$

que é uma forma para variância do "BLUE" de $\lambda'e$ estimável, obtida através da solução de norma mínima, equivalente a $V(\hat{\lambda}'\theta) = \lambda'(X'X)^G\lambda\sigma^2$ encontrada na literatura.

Como $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k} y'(I-P)y$ é não tendencioso para σ^2 :

$$\hat{V}(\hat{\lambda}'\theta) = \lambda'X^+X^+\hat{\sigma}^2 \quad 3.171$$

3.2.5. Estimação por intervalo no modelo de Gauss-Markov

Seja $\lambda'e$ estimável no modelo de Gauss-Markov, com "BLUE" dado por $\hat{\lambda}'\theta = \lambda'e^0$. Dada a invariância de $\lambda'e^0$, $\forall e^0$ solução das equações normais, seja $\theta^0 = X^+y$.

Foi visto que

$$V(\lambda'e) = \lambda'X^+X^+\lambda\sigma^2$$

e que $\hat{\sigma}^2 = \text{QMR}^5 = \frac{y'(I-P)y}{n-k}$, onde P é o projetor ortogonal de y sobre o espaço coluna de X :

$$P = XX^+$$

Teorema 7: Se $\hat{\lambda}'\theta$ é estimável no modelo linear $y = X\theta + e$ (Gauss-Markov), então

$$\hat{\lambda}'\theta \sim N(\lambda'e; \lambda'(X'X)^- \lambda\sigma^2)$$

que pode ser denotado por:

⁵ QMR = Quadrado Médio do Resíduo.

$$\hat{\lambda}'\theta \sim N(\lambda'\theta; \lambda'X'X'\lambda\sigma^2), \quad [3.18]$$

como já provado anteriormente.

Teorema 8: Se $\lambda'\theta$ é estimável no modelo linear $y = X\theta + e$ (Gauss-Markov), então, $\hat{\lambda}'\theta$ e $y'(I-P)y$ são independentes.

Já foi visto que $\lambda'\theta = \rho'X'y$ e que $P = XX'$. Lembrando que duas formas quadráticas de variáveis aleatórias normais A_i e A_j são independentes se $A_i A_j = \phi$, $i \neq j$, tem-se:

$$\begin{aligned} \rho'X'(I-P) &= \rho'X'(I-XX') \\ &= \rho'X' - \rho'X'XX' \\ &= \rho'X' - \rho'X'X'^+X' \\ &= \rho'X' - \rho'X' = \phi \\ \therefore \hat{\lambda}'\theta \text{ e } y'(I-P)y &\text{ são independentes.} \end{aligned} \quad [3.19]$$

Isso garante a independência entre o "BLUE" de $\lambda'\theta$ e o quadrado médio do resíduo (QMR).

Teorema 9: Dado o modelo linear $y = X\theta + e$ (Gauss-Markov)

com ${}_n y_1$ e $r[X] = k$, então

$$\frac{(n-k)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{y'(I-P)y}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-k)}$$

Sabe-se que no modelo linear de Gauss-Markov

$$e \sim N(\phi; I\sigma^2) \quad \text{e} \quad y \sim N(X\theta; I\sigma^2).$$

$$\text{Seja } z = \frac{y - X\theta}{\sigma}$$

$$E[z] = \frac{1}{\sigma} E[y - X\theta] = \frac{1}{\sigma} [E(y) - X\theta] = \frac{1}{\sigma} [X\theta - X\theta] = 0$$

$$V[z] = \frac{1}{\sigma^2} E[(y - X\theta)^2] = \frac{1}{\sigma^2} [V(y)] = \frac{1}{\sigma^2} [\sigma^2] = 1$$

$$\therefore z \sim N(0; 1)$$

Ademais, é bem sabido que uma forma quadrática do tipo $z'Az \sim \chi^2_{(n-k)} \Leftrightarrow A$ for idempotente de posto k .

Seja $A = I - P$ e estudemos a forma quadrática $z'(I - P)z$.

$$\begin{aligned} z'(I - P)z &= \frac{(y - X\theta)'}{\sigma} (I - P) \frac{(y - X\theta)}{\sigma} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left[y'(I - P)y - y'(I - P)X\theta - \theta'X'(I - P)y + \theta'X'(I - P)X\theta \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left[y'(I - P)y - 2\theta'X'(I - P)y + \theta'X'(I - P)X\theta \right]. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \theta'X'(I - P) &= \theta'X' - \theta'X'P = \theta'X' - \theta'X'XX^+ \\ &= \theta'X' - \theta'X'X^+X' = \theta'X' - \theta'X' = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \theta'X'(I - P)X\theta &= \theta'X'X\theta - \theta'X'P\theta \\ &= \theta'X'X\theta - \theta'X'XX^+X\theta \\ &= \theta'X'X\theta - \theta'X'X^+X'X\theta \\ &= \theta'X'X\theta - \theta'X'X\theta = 0, \end{aligned}$$

portanto,

$$z'(I - P)z = \frac{1}{\sigma^2} \left[y'(I - P)y \right].$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (I-P)(I-P) &= I - IP - IP + IP \\ &= I - 2P + P = I - P \end{aligned}$$

$\therefore (I-P)$ é idempotente

[3.20]

Sendo assim,

$$\begin{aligned} r(I-P) &= \text{Tr}(I-P) = \text{Tr}(I) - \text{Tr}(P) \\ &= n - \text{Tr}(XX^+) \\ &= n - r(XX^+) \\ &= n - r(X) \\ &= n - k \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{(n-k)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{y'(I-P)y}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-k)}$$

Definição: Dadas as v.a. $z \sim N(0; 1)$ e $w \sim \chi^2_{(p)}$, z e w são independentes, então,

$$T = \frac{z}{\sqrt{w/p}} \sim t_{(p)}, \quad p = n - k$$

Teorema 10: Se $\lambda'e$ é estimável no modelo linear $y = X\theta + e$ (Gauss-Markov), então

$$\frac{\hat{\lambda}'e - \lambda'e}{\hat{\sigma} \sqrt{\lambda'(X'X)^{-1}\lambda}} \sim t_{(n-k)}$$

Substituindo $(X'X)^{-1}$ por X^+X^+ , como demonstrado anteriormente,

$$\frac{\hat{\lambda}'e - \lambda'e}{\hat{\sigma} \sqrt{\lambda'X^+X^+\lambda}} \sim t_{(n-k)}$$

Seja

$$z = \frac{\lambda' \hat{e} - \lambda' e}{\hat{\sigma} \sqrt{\lambda' X' X' \lambda}}$$

então

$$E[z] = \frac{1}{\hat{\sigma} \sqrt{\lambda' X' X' \lambda}} E[\lambda' \hat{e} - \lambda' e] = 0$$

pois já se comprovou que

$$E[\lambda' \hat{e}] = E[\lambda' e].$$

$$\begin{aligned} V[z] &= \frac{1}{\hat{\sigma}^2 \lambda' X' X' \lambda} V[\lambda' \hat{e} - \lambda' e] \\ &= \frac{1}{\hat{\sigma}^2 \lambda' X' X' \lambda} V[\lambda' \hat{e}] \\ &= \frac{1}{\hat{\sigma}^2 \lambda' X' X' \lambda} \hat{\sigma}^2 \lambda' X' X' \lambda = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore z \sim N(0; 1)$$

Por outro lado sabe-se que

$$w = \frac{(n-k) \hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} \sim \chi^2_{(n-k)}$$

Assim,

$$\begin{aligned} T &= \frac{z}{\sqrt{w/p}} = \frac{(\lambda' \hat{e} - \lambda' e) / \hat{\sigma} \sqrt{\lambda' X' X' \lambda}}{\sqrt{[(n-k) \hat{\sigma}^2] / \hat{\sigma}^2 (n-k)}} = \frac{\lambda' \hat{e} - \lambda' e}{\hat{\sigma} \sqrt{\lambda' X' X' \lambda}} \\ &= \frac{\lambda' \hat{e} - \lambda' e}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \lambda' X' X' \lambda}} = \frac{\lambda' \hat{e} - \lambda' e}{\sqrt{\hat{V}(\lambda' \hat{e})}} \sim t_{(n-k)} \end{aligned}$$

Sabendo-se que

$$T = \frac{\hat{\lambda}'e - \lambda'e}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\lambda}'e)}} \sim t_{(n-k)} \quad [3.21]$$

pode-se construir o intervalo de confiança (IC) para $\lambda'e$ estimável, tendo por base que:

$$P[-t \leq T \leq t] = 1 - \alpha, \text{ onde } t = t_{\alpha/2; (n-k)} .$$

Portanto,

$$P \left[-t \leq \frac{\hat{\lambda}'e - \lambda'e}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\lambda}'e)}} \leq t \right] = 1 - \alpha$$

$$P \left[\hat{\lambda}'e - t \sqrt{\hat{V}(\hat{\lambda}'e)} \leq \lambda'e \leq \hat{\lambda}'e + t \sqrt{\hat{V}(\hat{\lambda}'e)} \right] = 1 - \alpha$$

e assim:

$$IC[\lambda'e]_{1-\alpha} = \hat{\lambda}'e \pm t \sqrt{\hat{V}(\hat{\lambda}'e)}$$

$$IC[\lambda'e]_{1-\alpha} = \lambda'e \pm t \sqrt{[\lambda'X'X'\lambda] \hat{\sigma}^2} \quad [3.22]$$

3.2.6. Estimação por região no modelo de Gauss-Markov

Seja um conjunto de funções estimáveis, linearmente independentes $B'e$, então, $B'_{p \times m} e$ e $r[B'] = p$ (posto linha completo).

O "BLUE" de $B'e$ é dado por

$$\hat{B}'e = B'e^o = \begin{bmatrix} \lambda'_1 \\ \dots \\ \lambda'_p \end{bmatrix} e^o,$$

com

$$e^o = X^+ y, \quad \lambda^{\wedge} e \sim N(\lambda^{\wedge} e; \lambda^{\wedge} X^+ X^+ \lambda \sigma^2)$$

e, por analogia com $\lambda^{\wedge} e$:

$$\hat{B}' e \sim N(B' e; B' X^+ X^+ B \sigma^2) \quad (13.23)$$

Sendo B' de posto linha completo, então $B' X^+ X^+ B$ é positiva definida e, portanto, existe A não-singular tal que

$$[B' X^+ X^+ B]^{-1} = A' A$$

isto é,

$$B' X^+ X^+ B = A^{-1} A^{-1'}$$

Considerando

$$l = \frac{A(B^{\wedge} e - B' e)}{\sigma}$$

e estudando a forma quadrática de $l' l$,

$$\begin{aligned} E[l] &= \frac{1}{\sigma} (E[A(B^{\wedge} e - B' e)]) \\ &= \frac{1}{\sigma} (A[E(B^{\wedge} e)] - A[E(B' e)]) \\ &= \frac{1}{\sigma} (A B' e - A B' e) = \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V[l] &= \frac{1}{\sigma^2} (V[A(B^{\wedge} e - B' e)]) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (V[A(B^{\wedge} e)]) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (A[V(B^{\wedge} e)]A') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V[l] &= \frac{1}{\sigma^2} (A B' X^+ X^+ B A' \sigma^2) \\ &= A A^{-1} A^{-1'} A' = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore l \sim N(\phi; D) \quad e \quad l'l \sim \chi^2_{(p=r(B'))}$$

Mas,

$$\begin{aligned} l'l &= \frac{1}{\sigma^2} (B'\hat{e} - B'e)' A' A (B'\hat{e} - B'e) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (B'\hat{e} - B'e)' [B'X'X'B]^{-1} (B'\hat{e} - B'e) \sim \chi^2_p \end{aligned}$$

sendo p o número de funções linearmente independentes, isto é, o número de linhas de B' .

DEFINIÇÃO: Dadas as v.a. $w_1 \sim \chi^2_p$ e $w_2 \sim \chi^2_{(n-k)}$, então

$$W = \frac{w_1/p}{w_2/(n-k)} \sim F_{[p;(n-k)]}$$

Sejam

$$w_1 = \frac{1}{\sigma^2} (B'\hat{e} - B'e)' [B'X'X'B]^{-1} (B'\hat{e} - B'e) \sim \chi^2_p,$$

e

$$w_2 = \frac{(n-k)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-k)}$$

$$W = \frac{\{(1/\sigma^2) (B'\hat{e} - B'e)' [B'X'X'B]^{-1} (B'\hat{e} - B'e)\}/p}{\frac{(n-k)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}/(n-k)}$$

$$= \frac{1}{p\hat{\sigma}^2} \{(B'\hat{e} - B'e)' [B'X'X'B]^{-1} (B'\hat{e} - B'e)\} \sim F_{\alpha(p;n-k)}$$

DEFINIÇÃO: Define-se região de confiança para um conjunto de funções estimáveis, linearmente independentes, $B'e$, ao nível de confiança $1-\alpha$, como a região delimitada pelo elipsóide dado por:

$$(\hat{\mathbb{B}}'e - \mathbb{B}'e)' [\mathbb{B}'\mathbb{X}\mathbb{X}'\mathbb{B}]^{-1} (\hat{\mathbb{B}}'e - \mathbb{B}'e) \leq p \hat{\sigma}^2 F_{\alpha(p; n-k)}$$

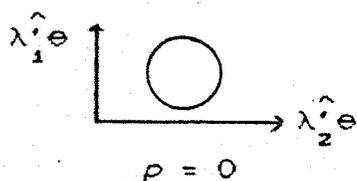
Se $p = 2$, a região de confiança é uma elipse.

Se $p > 2$, a região de confiança é um elipsóide no espaço R^p .

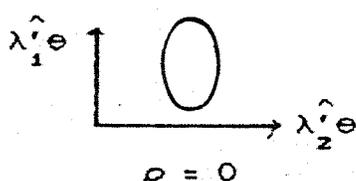
Assim, a região de confiança para as p funções paramétricas estimáveis é delimitada pelo elipsóide de centro $\hat{\mathbb{B}}'e = \mathbb{B}'e^0$, dado por:

$$(\hat{\mathbb{B}}'e - \mathbb{B}'e)' [\mathbb{B}'\mathbb{X}\mathbb{X}'\mathbb{B}]^{-1} (\hat{\mathbb{B}}'e - \mathbb{B}'e) \leq p \text{ QMR } F_{\alpha(p; n-k)} \quad (3.24)$$

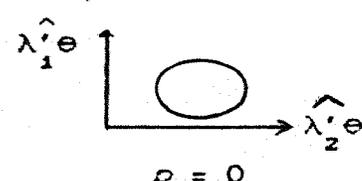
Ressalte-se que a matriz $[\mathbb{B}'\mathbb{X}\mathbb{X}'\mathbb{B}] \sigma^2$ fornece a matriz de variâncias e covariâncias das funções estimáveis $\mathbb{B}'e$. Assim, pela forma da matriz $[\mathbb{B}'\mathbb{X}\mathbb{X}'\mathbb{B}]$ pode-se conhecer a forma e a inclinação do elipsóide.



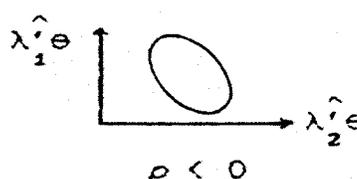
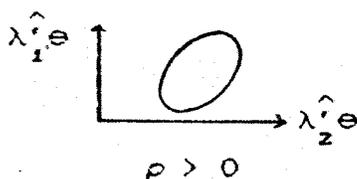
$$\hat{V}[\lambda_1] = \hat{V}[\lambda_2]$$



$$\hat{V}[\lambda_1] > \hat{V}[\lambda_2]$$



$$\hat{V}[\lambda_1] < \hat{V}[\lambda_2]$$



3.2.7. Análise da variância

A obtenção das somas de quadrados através das formas quadráticas dependem da caracterização do modelo em estudo, pois os projetores dependem do número de parâmetros envolvidos no modelo. Assim, serão apresentadas nos respectivos modelos propostos.

3.3. Formas Gerais de Inversas Generalizadas de Moore-Penrose em Delineamentos Experimentais

Dentre os diversos métodos numéricos para obtenção da inversa generalizada de Moore-Penrose, optou-se pelo método de Ortonormalização de Gram-Schmidt. Justifica-se essa escolha pela sua adaptação às matrizes de delineamentos e pela relação com as estimações e testes, que dependem de ortogonalidade.

Além disso, cada passo do algoritmo mostra matrizes relacionadas com os parâmetros envolvidos no modelo, bem como em cada projetor das formas quadráticas das somas de quadrados.

O método consiste na fatoração da matriz X do delineamento em $X_{n \times m} = U_{n \times k} \Pi_{k \times m}$.

A matriz U ortonormal, obtida pela aplicação do método de Gram-Schmidt nas colunas linearmente independentes de X , formando assim uma base ortonormal de $C(X)$. Assim,

$$(U'U) = I, (U'U)^{-1}U' = U'.$$

A matriz U é uma matriz trapezoidal obtida por:

$$U = U'X,$$

e a inversa de Moore-Penrose é dada por:

$$X^+ = U'(UU')^{-1}U'.$$

3.3.1. Experimentos com um fator inteiramente casualizado (balanceado ou não)

Dado o modelo linear $y = X\theta + e$, seja a caracterização

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$$

onde:

$i = 1, \dots, a$ é o índice de "tratamentos", e

$j = 1, \dots, r_i$ é o índice das repetições.

Nesse caso, a matriz X tem a forma:

$$\mathbb{X} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_\mu & \mathbb{X}_\alpha \\ \hline \mathbb{X}_\mu & \mathbb{X}_\alpha \end{array} \right]_{n \times (a+1)} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & & & \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} R_1 \\ \} R_2 \\ \} R_a \end{array} \right\} ; n = \sum_i^a R_i$$

onde $\mathbb{X}_\mu = \mathbf{1}_n$.

PROPOSIÇÃO 1a: A inversa generalizada de Moore-Penrose para a matriz \mathbb{X} de delineamentos com um fator inteiramente casualizado é dada por:

$$\mathbb{X}^+ = \frac{1}{a+1} \begin{bmatrix} \mathbf{1}'^* \\ \dots \\ \mathbb{X}'_\alpha^* \end{bmatrix}_n \tag{3.25}$$

onde:

$$\mathbf{1}'_n^* = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \frac{1}{R_1} \mathbf{1}'_{R_1} & \frac{1}{R_2} \mathbf{1}'_{R_2} & \dots & \frac{1}{R_a} \mathbf{1}'_{R_a} \end{array} \right] \tag{3.26}$$

$\mathbf{1}'_{R_i}$ é um vetor de uns;

$$\mathbb{X}'_{\alpha} = \left[\frac{1}{R_1} \mathbb{M}_{R_1}^{(1)} \mid \frac{1}{R_2} \mathbb{M}_{R_2}^{(2)} \mid \dots \mid \frac{1}{R_a} \mathbb{M}_{R_a}^{(a)} \right] \quad [3.27]$$

$$\mathbb{M}_{R_l}^{(l)} = (m_{ij}); \quad m_{ij} = \begin{cases} a, & \text{se } i = l; \\ -1, & \text{se } i \neq l. \end{cases} \quad l = 1, \dots, a \quad [3.28]$$

PROPOSIÇÃO 1b: $\mathbb{X}\mathbb{X}^+ = \mathbb{P}$, o projetor ortogonal do vetor y das observações sobre o espaço coluna de \mathbb{X} é dado por:

$$\mathbb{X}\mathbb{X}^+ = \left[\frac{1}{R_1} \mathbb{E}_{(R_1)} \right] \oplus \left[\frac{1}{R_2} \mathbb{E}_{(R_2)} \right] \oplus \dots \oplus \left[\frac{1}{R_a} \mathbb{E}_{(R_a)} \right] \quad [3.29]$$

$\mathbb{E}_{(R_l)}$ é uma matriz de uns;

PROPOSIÇÃO 1c: $\mathbb{X}^+\mathbb{X} = \mathbb{H}$, a matriz que explicita as funções básicas estimáveis do modelo e que auxilia na identificação das funções estimáveis através de $\lambda' = \lambda'\mathbb{H}$, é dada por:

$$\mathbb{X}^+\mathbb{X} = \frac{1}{a+1} \begin{bmatrix} a & \mathbf{1}'_a \\ \mathbf{1}_a & \mathbb{A}_{(a)} \end{bmatrix} \quad [3.30]$$

onde, a é um escalar;

$\mathbf{1}'_a$ é um vetor de uns;

$$A_{(a)} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \begin{cases} a, & \text{se } i=j; \\ -1, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad [3.31]$$

É fácil verificar que X^+ assim definida cumpre as propriedades da inversa generalizada de Moore-Penrose:

- a) $XX^+X = X$
- b) $X^+XX^+ = X^+$
- c) XX^+ é simétrica
- d) X^+X é simétrica

As formas quadráticas ficam bem caracterizadas quando substitui-se

$$e^o = X^+y \text{ em } y'y = e^{o'}X'y + (y'y - e^{o'}X'y),$$

resultando

$$\begin{aligned} y'y &= y'XX^+y + (y'y - y'XX^+y) \\ &= y'Py + y'(I-P)y \\ &= \text{SQ Parâmetros} + \text{SQ Resíduo}, \end{aligned}$$

onde P é o projetor ortogonal de y em $C(X)$, o sub-espaço dos parâmetros, e $I-P$ é o projetor ortogonal de y no complemento ortogonal ao espaço coluna de X , $C^\perp(X)$, o espaço resíduo.

Para a partição da soma de quadrados dos parâmetros, pode-se desdodrar, para a caracterização deste modelo, o projetor P , em:

$$P = P_\mu + P_\alpha \quad [3.32]$$

onde:

P_μ é o projetor ortogonal de y no espaço coluna de X_μ ;

P_α é o projetor ortogonal de y no espaço coluna de X_α .

$P = XX^+$, já definida em [3.29];

$$P_{\mu} = X_{\mu} X_{\mu}^+ = \frac{1}{n} E_{(n)}; \quad [3.33]$$

$$P_{\alpha} = P - P_{\mu} = X X^+ - \frac{1}{n} E_{(n)}; \quad [3.34]$$

$$\begin{aligned} (I-P) &= I_{(n)} - P = [I_{(R_1)} - \frac{1}{R_1} E_{(R_1)}] \oplus [I_{(R_2)} - \frac{1}{R_2} E_{(R_2)}] \oplus \dots \\ &\quad \oplus [I_{(R_{\alpha})} - \frac{1}{R_{\alpha}} E_{(R_{\alpha})}] \end{aligned} \quad [3.35]$$

Os projetores P_{μ} , P_{α} e $(I - P)$ são matrizes simétricas e idempotentes, tais que:

$$\begin{aligned} I_{(n)} &= P_{\mu} + P_{\alpha} + (I - P) \\ &= P_{\mu} + P_{\alpha} + I_{(n)} - P_{\mu} - P_{\alpha} \\ &= I_{(n)} \end{aligned}$$

As somas de quadrados, da maneira usual são obtidas por:

$$\begin{aligned} SQ_{\mu} &= y' P_{\mu} y = \text{correção} = C \\ SQ_{\alpha} &= y' P_{\alpha} y = y' P y - y' P_{\mu} y \\ SQ \text{ Total} &= y' y - y' P_{\mu} y \\ SQ \text{ Resíduo} &= y' (I - P) y \end{aligned} \quad [3.36]$$

e os graus de liberdade associados:

$$\begin{aligned} g.l.(\mu) &= r[X_{\mu}] \\ g.l.(\alpha) &= r[X_{\alpha}] - r[X_{\mu}] \\ g.l.(\text{Total}) &= r[I_{(n)}] - r[X_{\mu}] \\ g.l.(\text{Resíduo}) &= r[I_{(n)}] - r[X_{\alpha}] - r[X_{\mu}] = r[I_{(n)}] - r[X] \end{aligned} \quad [3.37]$$

A variância do estimador da função estimável $\lambda'\theta$ é dada por $V[\lambda'\hat{\theta}] = \lambda' X^+ X^+ \lambda \sigma^2$, onde:

$$X^+X^+ = \frac{1}{(a+1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \sigma & {}_1W'_a \\ \hline {}_aW_1 & Z_{(a)} \end{array} \right] \quad [3.38]$$

onde:

$$\sigma \text{ é um escalar} = \frac{1}{\sum_{j=1}^a R_j} \quad [3.39]$$

$${}_1W'_a = \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{a}{R_1} - \sum_{j=1}^a \frac{1}{R_j} & \dots & \frac{a}{R_a} - \sum_{j=1}^a \frac{1}{R_j} \end{array} \right] \quad [3.40]$$

$j=1, \dots, R_a.$

$$Z_{(a)} = (z_{ij}), \quad z_{ij} = \begin{cases} \frac{a^2}{R_i} + \sum_{j=1}^a \frac{1}{R_j}, & \text{se } i=j \\ \frac{1}{R_i} - \sum_{j=1}^a \frac{a}{R_j}, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad [3.41]$$

3.3.2. Experimentos balanceados com dois fatores, sem interação

Seja agora a caracterização

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$$

onde $i = 1, \dots, a$ é o índice do fator A, e $j = 1, \dots, b$ é o índice do fator B.

Observa-se que esta caracterização também pode ser tomada como a de blocos ao acaso.

Nesse caso, a matriz do delineamento fica:

$$X = \begin{array}{c} n \\ \hline [X_\mu \mid X_\alpha \mid X_\beta]_{a+b+1} \end{array}$$

onde X_μ e X_α são definidas como no item anterior, e

$$X'_\beta = [D_{(b)}^{(1)} \mid D_{(b)}^{(2)} \mid \dots \mid D_{(b)}^{(a)}],$$

onde $D_{(b)}$ é uma matriz identidade de ordem b .

PROPOSIÇÃO 2a: A inversa generalizada de Moore-Penrose para a matriz do delineamento balanceado de dois fatores, sem interação é dada por:

$$X^+ = \frac{1}{ab(ab+a+b)} \begin{bmatrix} ab1'' \\ \text{---} \\ X'_{\alpha} \\ \text{---} \\ X'_{\beta} \\ \text{---} \\ ab \end{bmatrix}_n \quad [3.42]$$

onde ab é um escalar;

$1''_{1 \ n}$ é um vetor de uns;

$$X'_{\alpha}_{ab} = H_{(a)} \otimes a 1'_{1 \ b} \quad [3.43]$$

$$H_{(a)} = (h_{ij}), \quad h_{ij} = \begin{cases} a(b+1) - 1, & \text{se } i = j, \\ -(b+1), & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad [3.44]$$

a é um escalar, e

$1'_{1 \ b}$ é um vetor de uns.

$$X'_{\beta}_{ab} = b 1'_{1 \ a} \otimes K_{(b)} \quad [3.45]$$

$$K_{(b)} = (k_{ij}), \quad k_{ij} = \begin{cases} b(a+1) - 1, & \text{se } i = j, \\ -(a+1), & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad [3.46]$$

b é um escalar, e

$1'_{1 \ a}$ é um vetor de uns.

PROPOSIÇÃO 2b: $XX^+ = P$, o projetor ortogonal do vetor y das observações sobre o espaço gerado pelas colunas da matriz do delineamento é dado por:

$$XX^+ = \frac{1}{ab} \left[I_{(a)} \otimes S_{(b)} + (E_{(a)} - I_{(a)}) \otimes R_{(b)} \right]_{ab} \quad [3.47]$$

onde:

$$S_{(b)} = (s_{ij}), \quad s_{ij} = \begin{cases} (a+b-1), & \text{se } i = j \\ a-1, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad [3.48]$$

$$R_{(b)} = (r_{ij}), \quad r_{ij} = \begin{cases} (b-1), & \text{se } i = j \\ -1, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad [3.49]$$

$E_{(a)}$ é uma matriz de uns;

$I_{(a)}$ é a matriz identidade.

PROPOSIÇÃO 2c: $X^+X = H$, a matriz que explicita as funções básicas estimáveis do modelo e que auxilia na identificação das funções estimáveis através de $\lambda' = \lambda'H$, é dada por:

$$X^+X = \frac{1}{ab+a+b} \left[\begin{array}{c|cc} ab & & \\ \dots & & \\ \dots & & \\ ab-1 & I_{(a)} & \begin{matrix} U_{(a)} \\ E'_a \end{matrix} \\ \dots & & \\ \dots & & \begin{matrix} E_b \\ Z_{(b)} \end{matrix} \end{array} \right] \quad [3.50]$$

onde ab é um escalar;

$$U_{(a)} = (u_{ij}), \quad u_{ij} = \begin{cases} (ab+a-1), & \text{se } i = j \\ -(b+1), & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad [3.51]$$

$$Z_{(b)} = (z_{ij}), \quad z_{ij} = \begin{cases} (ab+b-1), & \text{se } i = j \\ -(a+1), & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad [3.52]$$

$${}_{ab-1} T' = [b^{(1)} \dots b^{(a)} \mid a^{(1)} \dots a^{(b)}] \quad [3.53]$$

$E_{\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}}$ é uma matriz de uns.

Verifica-se que X^+ assim definida cumpre as propriedades da inversa generalizada de Moore-Penrose.

Para este modelo, o projetor P é desdobrado em:

$$\begin{aligned} P &= P_{\mu} + (P_{\alpha} - P_{\mu}) + (P_{\beta} - P_{\mu}) \\ P &= P_{\mu} + P_{\alpha} - P_{\mu} + P_{\beta} - P_{\mu} \end{aligned}$$

portanto,

$$P = P_{\alpha} + P_{\beta} - P_{\mu} \quad , \quad [3.54]$$

onde:

P_{μ} é o projetor ortogonal de y no espaço coluna de X_{μ} ;

P_{α} é o projetor ortogonal de y no espaço coluna de X_{α} ;

P_{β} é o projetor ortogonal de y no espaço coluna de X_{β} .

$P = XX^+$, já definido em [3.47];

$$P_{\mu} = \frac{1}{n} E_{(n)};$$

$$P_{\alpha} = I_{(a)} \otimes \frac{1}{b} E_{(b)}; \quad [3.55]$$

$$P_{\beta} = I_{(a)} \otimes \frac{1}{a} I_{(b)}; \quad [3.56]$$

$$\begin{aligned} (I-P) &= I_{(n)} - P = I_{(n)} - (P_{\alpha} + P_{\beta} - P_{\mu}) \\ &= I_{(n)} - P_{\alpha} - P_{\beta} + P_{\mu}. \end{aligned} \quad [3.57]$$

Os projetores assim definidos são matrizes simétricas e idempotentes, tais que:

$$\begin{aligned}
D_{(n)} &= P_{\alpha} + P_{\beta} - P_{\mu} + (I - P) \\
&= P_{\alpha} + P_{\beta} - P_{\mu} + [I - (P_{\alpha} + P_{\beta} - P_{\mu})] \\
&= P_{\alpha} + P_{\beta} - P_{\mu} + D_{(n)} - P_{\alpha} - P_{\beta} + P_{\mu} \\
&= D_{(n)}
\end{aligned}$$

As somas de quadrados, da maneira usual, são obtidas por:

$$\begin{aligned}
SQ_{\mu} &= y' P_{\mu} y = \text{correção} = C \\
SQ_{\alpha} &= y' P_{\alpha} y - y' P_{\mu} y \\
SQ_{\beta} &= y' P_{\beta} y - y' P_{\mu} y \\
SQ_{\text{Total}} &= y' y - y' P_{\mu} y \\
SQ_{\text{Resíduo}} &= y' (I - P) y
\end{aligned} \tag{3.58}$$

e os graus de liberdade associados:

$$\begin{aligned}
g.l.(\mu) &= r[X_{\mu}] \\
g.l.(\alpha) &= r[X_{\alpha}] - r[X_{\mu}] \\
g.l.(\beta) &= r[X_{\beta}] - r[X_{\mu}] \\
g.l.(\text{Total}) &= r[D_{(n)}] - r[X_{\mu}] \\
g.l.(\text{Resíduo}) &= r[D_{(n)}] - r[X_{\alpha}] - r[X_{\beta}] + r[X_{\mu}] \\
&= r[D_{(n)}] - r[X]
\end{aligned} \tag{3.59}$$

A variância do estimador da função estimável $\lambda'e$ é dada por $V[\hat{\lambda}'e] = \lambda' X^+ X^+ \lambda \sigma^2$, onde:

$$X^+ X^+ = \frac{1}{[ab(ab+a+b)]^2} \begin{bmatrix} ab1'' & ab1'' & ab1'' X_{\alpha}' & ab1'' X_{\beta}' \\ \hline X_{\alpha}' ab1'' & X_{\alpha}' X_{\alpha}' & X_{\alpha}' X_{\beta}' \\ X_{\beta}' ab1'' & X_{\beta}' X_{\alpha}' & X_{\beta}' X_{\beta}' \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

onde ab é um escalar e $1''$, X_{α}' e X_{β}' definidas na proposição 2a.

3.3.3. Experimentos balanceados com dois fatores cruzados, com interação

Seja agora a caracterização

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

onde:

$i = 1, \dots, a$ é o índice do fator α ,

$j = 1, \dots, b$ é o índice do fator β e,

$k = 1, \dots, r_i$ é o índice das repetições.

A matriz do delineamento neste caso é:

$$X = \begin{bmatrix} X_{\mu} & X_{\alpha} & X_{\beta} & X_{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{n \times (ab+ab+1)}$$

onde X_{μ} e X_{α} são definidas como anteriormente,

$$X_{\beta} = \begin{bmatrix} X_{\beta 1} \\ \vdots \\ X_{\beta a} \end{bmatrix} \quad X_{\beta l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix}} \right\} R_1 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix}} \right\} R_2 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix}} \right\} R_a$$

$l = 1, \dots, a, e$

$$X_{\alpha\beta} = [X_{\beta 1} \oplus X_{\beta 2} \oplus \dots \oplus X_{\beta a}]$$

PROPOSIÇÃO 3a: A inversa generalizada de Moore-Penrose para a matriz de delineamento com dois fatores, balanceado, com interação, é dada por:

$$X^+ = \frac{1}{fR(ab)} \begin{bmatrix} 1' \\ \hline X'_\alpha \\ \hline X'_\beta \\ \hline X'_{\alpha\beta} \end{bmatrix}_n \quad [3.61]$$

fab

onde f é o número de fatores envolvidos no modelo e R são as repetições de cada combinação dos dois fatores.

$$1'_{1n} = \left[1'_{1R}^{(1)} \mid 1'_{1R}^{(2)} \mid \dots \mid 1'_{1R}^{(ab)} \right] \quad [3.62]$$

$$X'_{\alpha n} = D_{(a)} \otimes 1'_{1b} \otimes 1'_{1R} \quad [3.63]$$

$$D_{(a)} = (m_{ij}), \quad m_{ij} = \begin{cases} a, & \text{se } i = j; \\ -1, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad [3.64]$$

$1'_{1b}$ e $1'_{1R}$ são vetores de uns.

$$X'_{\beta n} = \left[1'_{1a} \otimes D_{(b)} \otimes 1'_{1R} \right] \quad [3.65]$$

$$D_{(b)} = (n_{ij}), \quad n_{ij} = \begin{cases} b, & \text{se } i = j; \\ -1, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad [3.66]$$

$1'_{1a}$ e $1'_{1R}$ são vetores de uns.

$$\mathbb{X}'_{ab} \alpha \beta_n^* = \mathbb{D}_{(a)} \otimes \mathbb{O}_{(b)} \otimes \mathbb{1}'_{1R} + [\mathbb{E}_{(a)} - \mathbb{D}_{(a)}] \otimes \mathbb{Q}_{(b)} \otimes \mathbb{1}'_{1R} \quad [3.67]$$

$$\mathbb{O}_{(b)} = (o_{ij}), \quad o_{ij} = \begin{cases} ab, & \text{se } i = j \\ -a, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad [3.68]$$

$$\mathbb{Q}_{(b)} = (q_{ij}), \quad q_{ij} = \begin{cases} -b, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad [3.69]$$

PROPOSIÇÃO 3b: $\mathbb{X}\mathbb{X}^+ = \mathbb{P}$, o projetor ortogonal do vetor y das observações sobre o espaço gerado pelas colunas da matriz do delineamento é dado por:

$$\mathbb{X}\mathbb{X}^+ = \mathbb{D}_{(b)} \left[\frac{1}{R} \mathbb{E}_R^{(1)} \oplus \dots \oplus \frac{1}{R} \mathbb{E}_R^{(2)} \right] \quad [3.70]$$

onde $\mathbb{D}_{(b)}$ é uma matriz identidade de ordem b, e

\mathbb{E}_R é uma matriz de uns.

PROPOSIÇÃO 3c: $\mathbb{X}^+\mathbb{X} = \mathbb{H}$, a matriz que explicita as funções básicas estimáveis do modelo e que auxilia na identificação das funções estimáveis através de $\lambda' = \lambda'\mathbb{H}$, é dada por:

Neste modelo, o projetor $P = P_{\alpha, \beta}$, pois se considerarmos a combinação $\alpha\beta = \tau$, isto é, como num modelo com apenas um fator, $\alpha_1\beta_1 = \tau_1$, $\alpha_1\beta_2 = \tau_2$, ..., $\alpha_1\beta_b = \tau_b$, $\alpha_2\beta_1 = \tau_{b+1}$, ..., $\alpha_a\beta_b = \tau_{ab}$, teríamos o modelo:

$$y_{tu} = \mu + \tau_t + e_{tu} \quad , \quad t=1, \dots, ab; u=1, \dots, R_{ab}$$

similar ao anterior, com

$$P = P_{\mu} + P_{\tau}$$

No modelo em questão, são tomados separadamente os efeitos de α e β , e de sua interação, e o modelo fica:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

com

$$\begin{aligned} P &= P_{\alpha, \beta} = P_{\mu} + (P_{\alpha} - P_{\mu}) + (P_{\beta} - P_{\mu}) + (P_{\alpha\beta} - P_{\mu}) \\ &= P_{\mu} + P_{\alpha} - P_{\mu} + P_{\beta} - P_{\mu} + P_{\alpha\beta} - P_{\mu} \end{aligned}$$

$$\therefore P = P_{\alpha} + P_{\beta} + P_{\alpha\beta} - 2P_{\mu} \quad [3.78]$$

onde:

P_{μ} é o projetor ortogonal de y sobre $CC(X_{\mu})$;

P_{α} é o projetor ortogonal de y sobre $CC(X_{\alpha})$;

P_{β} é o projetor ortogonal de y sobre $CC(X_{\beta})$;

$P_{\alpha\beta}$ é o projetor ortogonal de y sobre $CC(X_{\alpha\beta})$.

$P = XX^+$, já definido em [3.70];

$$P_{\mu} = \frac{1}{n} E_{(n)};$$

$$P_{\alpha} = I_{(R)} \otimes \frac{1}{ab} E_{(b)}; \quad [3.79]$$

$$P_{\beta} = I_{(ab)} \otimes \frac{1}{Ra} E_{(a)}; \quad [3.80]$$

$$P_{\alpha\beta} = P_{\alpha, \beta} - (P_{\alpha} - P_{\mu}) - (P_{\beta} - P_{\mu}); \quad P = P_{\alpha, \beta}$$

$$= P_{\alpha, \beta} - P_{\alpha} + P_{\mu} - P_{\beta} + P_{\mu}$$

$$= P_{\alpha, \beta} - P_{\alpha} - P_{\beta} + 2P_{\mu}; \quad [3.81]$$

$$(\mathbb{I} - \mathbb{P}) = \mathbb{I}_{(n)} - \mathbb{P}_{\alpha, \beta} = \mathbb{I}_{(n)} - (\mathbb{P}_{\alpha} + \mathbb{P}_{\beta} + \mathbb{P}_{\alpha\beta} - 2\mathbb{P}_{\mu}) \quad [3.82]$$

Sendo esses projetores matrizes simétricas e idempotentes,

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{(n)} &= \mathbb{P}_{\alpha} + \mathbb{P}_{\beta} + \mathbb{P}_{\alpha\beta} - 2\mathbb{P}_{\mu} + (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \\ &= \mathbb{P}_{\alpha} + \mathbb{P}_{\beta} + \mathbb{P}_{\alpha\beta} - 2\mathbb{P}_{\mu} + [\mathbb{I} - (\mathbb{P}_{\alpha} + \mathbb{P}_{\beta} + \mathbb{P}_{\alpha\beta} - 2\mathbb{P}_{\mu})] \\ &= \mathbb{P}_{\alpha} + \mathbb{P}_{\beta} + \mathbb{P}_{\alpha\beta} - 2\mathbb{P}_{\mu} - \mathbb{I}_{(n)} + \mathbb{P}_{\alpha} + \mathbb{P}_{\beta} + \mathbb{P}_{\alpha\beta} + 2\mathbb{P}_{\mu} \\ &= \mathbb{I}_{(n)} \end{aligned}$$

As somas de quadrados, da maneira usual, são obtidas por:

$$\begin{aligned} \text{SQ}_{\mu} &= y' \mathbb{P}_{\mu} y = \text{correção} = C \\ \text{SQ}_{\alpha} &= y' \mathbb{P}_{\alpha} y - y' \mathbb{P}_{\mu} y \\ \text{SQ}_{\beta} &= y' \mathbb{P}_{\beta} y - y' \mathbb{P}_{\mu} y \\ \text{SQ}_{\alpha\beta} &= y' \mathbb{P}_{\alpha\beta} y - y' \mathbb{P}_{\mu} y \\ \text{SQ Total} &= y' y - y' \mathbb{P}_{\mu} y \\ \text{SQ Resíduo} &= y' (\mathbb{I} - \mathbb{P}) y \end{aligned} \quad [3.83]$$

e os graus de liberdade associados:

$$\begin{aligned} \text{g.l.}(\mu) &= r[\mathbb{X}_{\mu}] \\ \text{g.l.}(\alpha) &= r[\mathbb{X}_{\alpha}] - r[\mathbb{X}_{\mu}] \\ \text{g.l.}(\beta) &= r[\mathbb{X}_{\beta}] - r[\mathbb{X}_{\mu}] \\ \text{g.l.}(\alpha\beta) &= r[\mathbb{X}_{\alpha\beta}] - r[\mathbb{X}_{\alpha}] - r[\mathbb{X}_{\beta}] + r[\mathbb{X}_{\mu}] \\ \text{g.l.}(\text{Total}) &= r[\mathbb{I}_{(n)}] - r[\mathbb{X}_{\mu}] \\ \text{g.l.}(\text{Resíduo}) &= r[\mathbb{I}_{(n)}] - r[\mathbb{X}_{\alpha}] - r[\mathbb{X}_{\beta}] - r[\mathbb{X}_{\mu}] \\ &= r[\mathbb{I}_{(n)}] - r[\mathbb{X}] \end{aligned} \quad [3.84]$$

A variância do estimador da função estimável

$\lambda'e$ é dada por $V[\lambda'e] = \lambda' \mathbb{X}^+ \mathbb{X}^+ \lambda \sigma^2$, onde:

$$\mathcal{X}^+ \mathcal{X}^+ = \frac{1}{(\text{fRab})^2} \begin{bmatrix} 1' \cdot 1' & 1' \cdot \mathcal{X}'_{\alpha} & 1' \cdot \mathcal{X}'_{\beta} & 1' \cdot \mathcal{X}'_{\alpha\beta} \\ \mathcal{X}'_{\alpha} \cdot 1' & \mathcal{X}'_{\alpha} \cdot \mathcal{X}'_{\alpha} & \mathcal{X}'_{\alpha} \cdot \mathcal{X}'_{\beta} & \mathcal{X}'_{\alpha} \cdot \mathcal{X}'_{\alpha\beta} \\ \mathcal{X}'_{\beta} \cdot 1' & \mathcal{X}'_{\beta} \cdot \mathcal{X}'_{\alpha} & \mathcal{X}'_{\beta} \cdot \mathcal{X}'_{\beta} & \mathcal{X}'_{\beta} \cdot \mathcal{X}'_{\alpha\beta} \\ \mathcal{X}'_{\alpha\beta} \cdot 1' & \mathcal{X}'_{\alpha\beta} \cdot \mathcal{X}'_{\alpha} & \mathcal{X}'_{\alpha\beta} \cdot \mathcal{X}'_{\beta} & \mathcal{X}'_{\alpha\beta} \cdot \mathcal{X}'_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \quad [3.85]$$

sendo as matrizes componentes as mesmas definidas na proposição 3.a.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os exemplos aqui utilizados foram retirados de livros textos da área de Modelos Lineares, com a finalidade de comparação dos resultados com os obtidos pela metodologia proposta.

4.1. Experimento Não Balanceado com um Fator Inteiramente Casualizado

Para apresentação numérica deste caso, tomou-se um exemplo apresentado por IEMMA (1987, p. 114). Trata-se de um exemplo fictício de um experimento de competição de rações para engorda de suínos, conduzido inteiramente ao acaso. Os dados são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Ganho de peso, em kg, de suínos, em função de três tipos de aditivos à ração: t_1 = adição de uréia; t_2 = adição de óleo vegetal (1%); t_3 = adição de óleo vegetal (2%).

	t_1	t_2	t_3
R_1	5,0	6,0	9,0
R_2	4,0	7,0	8,0
R_3	3,0	8,0	10,0
R_4	4,0	-	-
TOTAIS	16,0	21,0	27,0
Médias	4,0	7,0	9,0
Variâncias	0,67	1,0	1,0

Dado o modelo linear $y = X\theta + e$, e assumindo a caracterização:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$$

sendo α_i o parâmetro representativo dos tratamentos, onde:

$i = 1, \dots, \alpha$ é o índice de "tratamentos" (α_i), e

$j = 1, \dots, R_i$ é o índice das repetições.

Nesse caso a matriz X do delineamento é dada

por:

$$X = [X_{\mu} | X_{\alpha}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times (\alpha+1)}$$

e pode-se escrever:

$$y = X\theta + e$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} 5,0 \\ 4,0 \\ 3,0 \\ 4,0 \\ 6,0 \\ 7,0 \\ 8,0 \\ 9,0 \\ 8,0 \\ 10,0 \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\alpha+1} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \\ e_{21} \\ e_{22} \\ e_{23} \\ e_{31} \\ e_{32} \\ e_{33} \end{bmatrix}_n$$

De acordo com a proposição 1a, a matrix X^+ tem

a forma:

$$X^+ = \frac{1}{\alpha+1} \begin{bmatrix} 1/R_1 & 1/R_1 & 1/R_1 & 1/R_1 & 1/R_2 & 1/R_2 & 1/R_2 & 1/R_3 & 1/R_3 & 1/R_3 \\ a/R_1 & a/R_1 & a/R_1 & a/R_1 & -1/R_2 & -1/R_2 & -1/R_2 & -1/R_3 & -1/R_3 & -1/R_3 \\ -1/R_1 & -1/R_1 & -1/R_1 & -1/R_1 & a/R_2 & a/R_2 & a/R_2 & -1/R_3 & -1/R_3 & -1/R_3 \\ -1/R_1 & -1/R_1 & -1/R_1 & -1/R_1 & -1/R_2 & -1/R_2 & -1/R_2 & a/R_3 & a/R_3 & a/R_3 \end{bmatrix}_n$$

$$X^+ = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 3/4 & 3/4 & 3/4 & 3/4 & -1/3 & -1/3 & -1/3 & -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & 1 & 1 & 1 & -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & -1/3 & -1/3 & -1/3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{10}$$

$$e^0 = X^+ y = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$X' y = \begin{bmatrix} 64 \\ 16 \\ 21 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = X e^{\circ} = \begin{bmatrix} 4,0 \\ 4,0 \\ 4,0 \\ 4,0 \\ 7,0 \\ 7,0 \\ 7,0 \\ 9,0 \\ 9,0 \\ 9,0 \end{bmatrix}_1$$

$$E(e^{\circ}) = E(X^+ y) = X^+ E(y)$$

Mas, $E(y) = X e$, portanto,

$$E(e^{\circ}) = X^+ X e = D e$$

De acordo com a proposição 1c,

$$X^+ X = \frac{1}{a+1} \left[\begin{array}{c|ccc} a & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & a & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & -1 & a \end{array} \right] = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

$$X^+ X e = D e = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \mu + 3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \\ \mu - \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 \\ \mu - \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 \end{bmatrix}$$

No modelo em questão, $E(y) = \mu + \alpha_i$, deste modo, $\mu + \alpha_i$ é estimável. Aqui tem-se,

$$\frac{1}{4}(\mu + \alpha_1) + \frac{1}{4}(\mu + \alpha_2) + \frac{1}{4}(\mu + \alpha_3) = \frac{3}{4}\mu + \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4} + \frac{\alpha_3}{4}$$

$$\frac{1}{4}(3\mu + 3\alpha_1) - \frac{1}{4}(\mu + \alpha_2) - \frac{1}{4}(\mu + \alpha_3) = \frac{1}{4}\mu + \frac{3\alpha_1}{4} - \frac{\alpha_2}{4} - \frac{\alpha_3}{4}$$

$$\frac{1}{4}(3\mu + 3\alpha_2) - \frac{1}{4}(\mu + \alpha_1) - \frac{1}{4}(\mu + \alpha_3) = \frac{1}{4}\mu - \frac{\alpha_1}{4} + \frac{3\alpha_2}{4} - \frac{\alpha_3}{4}$$

$$\frac{1}{4}(3\mu + 3\alpha_3) - \frac{1}{4}(\mu + \alpha_1) - \frac{1}{4}(\mu + \alpha_2) = \frac{1}{4}\mu + \frac{\alpha_1}{4} - \frac{\alpha_2}{4} + \frac{3\alpha_3}{4}$$

Somando a primeira linha com a segunda:

$$\frac{3}{4} \mu + \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4} + \frac{\alpha_3}{4} + \frac{1}{4} \mu + \frac{3\alpha_1}{4} - \frac{\alpha_2}{4} - \frac{\alpha_3}{4} = \mu + \alpha_1$$

a primeira com a terceira:

$$\frac{3}{4} \mu + \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4} + \frac{\alpha_3}{4} + \frac{1}{4} \mu - \frac{\alpha_1}{4} + \frac{3\alpha_2}{4} - \frac{\alpha_3}{4} = \mu + \alpha_2$$

a primeira com a quarta:

$$\frac{3}{4} \mu + \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4} + \frac{\alpha_3}{4} + \frac{1}{4} \mu - \frac{\alpha_1}{4} - \frac{\alpha_2}{4} + \frac{3\alpha_3}{4} = \mu + \alpha_3$$

que são as funções básicas estimáveis no modelo.

Por teorema (RAO, 1945), uma condição necessária e suficiente para que a função $\lambda'\theta$ seja estimável no modelo de Gauss-Markov, é que $\lambda \in C(X')$.

Então, para que $\lambda'\theta$ seja estimável no modelo de Gauss-Markov é necessário e suficiente que:

$$a) r[X] = r[X | \lambda];$$

$$b) r[X'X] = r[X'X | \lambda].$$

Mas, $r[H] = r[X]$, então pode-se dizer que uma condição necessária e suficiente para que $\lambda'\theta$ seja estimável é que $r[H] = r[H | \lambda]$.

Sejam, como exemplo, as funções paramétricas:

$$\lambda'_1 \theta = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\lambda'_2 \theta = \mu + \alpha_1$$

$$\lambda'_3 \theta = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3,$$

então:

$$[H | \lambda] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 3/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & 1 & 1 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 & 1 & 0 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Portanto, dentre as três funções estudadas, apenas $\lambda'_1 \theta = \alpha_1 + \alpha_2$ não é estimável, e verifica-se que a matriz, definida aqui como $H = X^+X$ determina as "funções paramétricas estimáveis".

Um critério mais direto pode ser obtido verificando-se se $\lambda'H = \lambda'$, como em IEMMA (1987), dentre outros.

Sejam as duas funções paramétricas estimáveis dadas anteriormente:

$$\lambda'_2 \theta = \mu + \alpha_1$$

$$\lambda'_3 \theta = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3$$

Fazendo

$$\lambda'H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} (1/4) \left[\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

De acordo com [3.17], a variância do estimador da função estimável $\lambda'\theta$ é dada por $V[\hat{\lambda}'\theta] = \lambda'X^+X^+\lambda\sigma^2$, onde,

$$X^+X^+ = \frac{1}{(a+1)^2} \left[\begin{array}{c|ccc} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) & \left(\frac{a}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) & \left(\frac{a}{R_2} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} \right) & \left(\frac{a}{R_3} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ \hline \left(\frac{a}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) & \left(\frac{a^2}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) & \left(\frac{1}{R_3} - \frac{a}{R_1} - \frac{a}{R_2} \right) & \left(\frac{1}{R_2} - \frac{a}{R_1} - \frac{a}{R_3} \right) \\ \left(\frac{a}{R_2} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} \right) & \left(\frac{1}{R_3} - \frac{a}{R_1} - \frac{a}{R_2} \right) & \left(\frac{a^2}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) & \left(\frac{1}{R_1} - \frac{a}{R_2} - \frac{a}{R_3} \right) \\ \left(\frac{a}{R_3} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) & \left(\frac{1}{R_2} - \frac{a}{R_1} - \frac{a}{R_3} \right) & \left(\frac{1}{R_1} - \frac{a}{R_2} - \frac{a}{R_3} \right) & \left(\frac{a^2}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) \end{array} \right]$$

$$SQ_{Total} = y'y - y'P_{\mu}y = 460,00 - 409,60 = 50,40$$

$$SQ_{Resíduo} = y'(I-P)y = 6,00$$

e os graus de liberdade associados:

$$g.l.(\mu) = 1$$

$$g.l.(\alpha) = 2$$

$$g.l.(Total) = 9$$

$$g.l.(Resíduo) = 7,$$

conforme já definidos em [3.36] e [3.37].

Assim, pode-se montar o quadro de análise de variância:

C. Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Tratamentos (α)	2	44,40	22,20	25,90**
Resíduo	7	6,00	0,8571	
Total	9	50,40		

As estimativas por intervalo, conforme deduzido em [3.22] são obtidas tomando-se

$$\hat{V}(\lambda'e) = \lambda'X^+X^+\lambda \text{ QMR}$$

Seja, como exemplo, a função estimável:

$$\lambda'e = [0 \quad 2 \quad -1 \quad -1] \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$$

$$\lambda'e = [0 \quad 2 \quad -1 \quad -1] \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -8$$

$$\lambda'X^+X^+\lambda = 5/3$$

$$\widehat{V}(\lambda' \hat{e}) = \lambda' X^+ X^+ \lambda \text{ QMR} = 5/3(0,8571) = 1,4285$$

Assim, sendo

$$\begin{aligned} \text{IC}(\lambda' \hat{e})_{1-\alpha} &= \lambda' \hat{e} \pm t_{(n-r[X])} \sqrt{\widehat{V}(\lambda' \hat{e})} \\ \text{IC}(\lambda' \hat{e})_{0,99} &= -8 \pm 3,50 \sqrt{1,4285} \\ &= -8 \pm 4,18 \end{aligned}$$

$$\therefore -12,18 \leq 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \leq -3,82$$

indicando que este contraste é significativo, pois o intervalo não contém o ponto zero.

A estimativa da região de confiança, conforme deduzido em [3.24], a um nível de confiança $1-\alpha$, para $B'e$ estimável, é delimitada pelo elipsóide:

$$(B'\hat{e} - B'e)' [B'X^+X^+B]^{-1} (B'\hat{e} - B'e) \leq F_{(\alpha; p; n-r[X])}$$

com $p = r[B']$.

Seja o seguinte conjunto de funções estimáveis:

$$B'e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

$$B'\hat{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \end{bmatrix}$$

$$B'X^+X^+B = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 5/3 \end{bmatrix}$$

$$[B'X^+X^+B]^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Com $\alpha = 0,01$, tem-se:

$$p\text{QMR } F_{(0,01; 2; 7)} = (2)(0,8571)(9,55) = 16,3708$$

Tem-se, assim, $R \subset [B'\hat{e}]_{0,99}$ dada por:

$$\frac{1}{16,3796} [2 - \psi_1, 8 - \psi_2] \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 - \psi_1 \\ 8 - \psi_2 \end{bmatrix} \leq 1$$

Fazendo a translação,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 - 2 \\ \psi_2 - 8 \end{bmatrix}$$

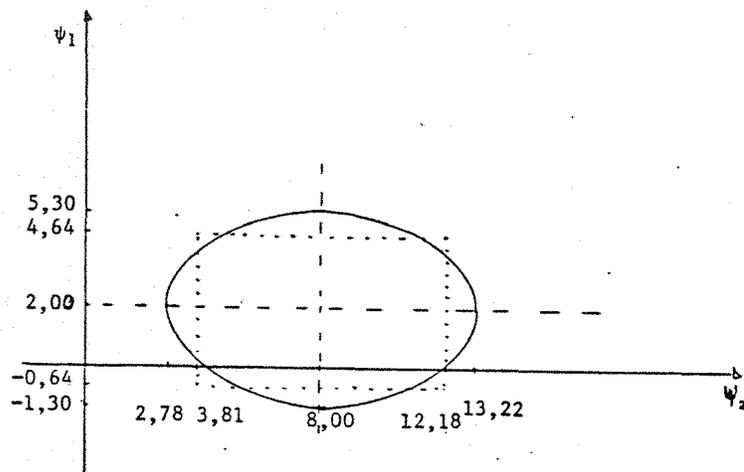
$Q(x) = x'Ax$ fornece a região delimitada pelo elipsóide (aqui elipse, $p=2$) de centro $(2; 8)$ e equação:

$$\frac{x_1}{10,91} + \frac{x_2}{27,28} = 1 .$$

Tomando a equação típica da elipse de centro (h,k) ,

$$\frac{(\psi_1 - h)^2}{a^2} + \frac{(\psi_2 - k)^2}{b^2} = 1$$

temos $a = 3,30$ e $b = 5,22$, e obtem-se, graficamente:



Confirmam-se, pois, todos os resultados obtidos por IEMMA (1987).

4.2. Experimento Balanceado com Dois Fatores, Sem Interação

Para este caso e para o caso seguinte, serão mostradas numericamente apenas as formas gerais da inversa generalizada de Moore Penrose, e a análise de variância, obtida através dos projetores ortogonais. As demais estimações podem ser obtidas de maneira similar à apresentada no caso anterior (4.1).

Como apresentação numérica para este caso, foi também tomado um exemplo numérico de IEMMA (1987, p. 184), referentes a ganho de peso de doze cães da raça Boxer ao final de certo período experimental. Foram usadas três rações e quatro ninhadas (que podem ser tomadas como blocos). Os dados são os apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Ganhos de peso de doze cães, em kg, segundo a ração e a ninhada.

NINHADAS	TRATAMENTOS			N_j
	t_1	t_2	t_3	
n_1	10	3	15	28
n_2	12	3	12	27
n_3	6	1	9	16
n_4	10	5	12	27
T_i	38	12	48	$G=98$
Média	9,5	3,0	12,0	
Variância	6,33	2,67	6,0	

Dado o modelo linear $y = X\theta + e$, com a caracterização:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$$

sendo α_i o parâmetro representativo dos tratamentos (rações) e β_j o parâmetro representativo das ninhadas (ou blocos), onde:

$i = 1, \dots, a$ é o índice de "tratamentos" (α_i), e

$j = 1, \dots, b$ é o índice das repetições ou de ninhadas.

Nesse caso a matriz X do delineamento é dada

por:

$$X = [X_{\mu} \mid X_{\alpha} \mid X_{\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times (a+b+1)}$$

e podemos escrever:

$$y = X\theta + e$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{24} \\ y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \\ y_{34} \end{bmatrix}_{1 \times n} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 6 \\ 10 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \\ 15 \\ 12 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}_{1 \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(a+b+1) \times n} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \\ e_{21} \\ e_{22} \\ e_{23} \\ e_{24} \\ e_{31} \\ e_{32} \\ e_{33} \\ e_{34} \end{bmatrix}_{1 \times n}$$

De acordo com a proposição 2a, a matriz X^+ é composta por:

$$ab_1'_{ab} = [12 \ 12 \ 12 \ 12 \ 12 \ 12 \ 12 \ 12 \ 12 \ 12 \ 12 \ 12]$$

$$H_{(a)} = \begin{bmatrix} 14 & -5 & -5 \\ -5 & 14 & -5 \\ -5 & -5 & 14 \end{bmatrix}$$

$$a_1'_{b} = [3 \ 3 \ 3 \ 3]$$

$$b_1'_{a} = [4 \ 4 \ 4]$$

$$K_{(b)} = \begin{bmatrix} 15 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & 15 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 15 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$X^+ = \frac{1}{228} \begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ \hline 42 & 42 & 42 & 42 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 \\ -15 & -15 & -15 & -15 & 42 & 42 & 42 & 42 & -15 & -15 & -15 & -15 \\ -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & 42 & 42 & 42 & 42 \\ \hline 60 & -16 & -16 & -16 & 60 & -16 & -16 & -16 & 60 & -16 & -16 & -16 \\ -16 & 60 & -16 & -16 & -16 & 60 & -16 & -16 & -16 & 60 & -16 & -16 \\ -16 & -16 & 60 & -16 & -16 & -16 & 60 & -16 & -16 & -16 & 60 & -16 \\ -16 & -16 & -16 & 60 & -16 & -16 & -16 & 60 & -16 & -16 & -16 & 60 \end{bmatrix}$$

$$e^o = X^+ y = \begin{bmatrix} 5,16 \\ 3,05 \\ -3,45 \\ 5,55 \\ 2,46 \\ 2,12 \\ -1,54 \\ 2,12 \end{bmatrix} ; \quad X' y = \begin{bmatrix} 98 \\ 38 \\ 12 \\ 48 \\ 28 \\ 27 \\ 16 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = \mathbb{X}e^{\circ} = \begin{bmatrix} 10,67 \\ 10,33 \\ 6,67 \\ 10,33 \\ 4,17 \\ 3,83 \\ 0,17 \\ 3,83 \\ 13,17 \\ 12,83 \\ 9,17 \\ 12,83 \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbb{X}\mathbb{X}^+ = \mathbb{P}$ é composta por:

$$\mathbb{I}_{(a)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbb{E}_{(a)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{S}_{(b)} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}; \quad \mathbb{R}_{(b)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim, $\mathbb{P} = \mathbb{X}\mathbb{X}^+$ fica:

$$\mathbb{P} = \mathbb{X}\mathbb{X}^+ = 1/12 \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ \hline 3 & -1 & -1 & -1 & 6 & 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 2 & 6 & 2 & 2 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 6 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ \hline 3 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & 2 & 6 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbb{X}^+\mathbb{X}$, conforme a proposição 2c, é composta por:

$$ab = 12$$

$$T'_{ab-1} = [4 \ 4 \ 4 \ | \ 3 \ 3 \ 3 \ 3]$$

$$U_{(a)} = \begin{bmatrix} 14 & -5 & -5 \\ -5 & 14 & -5 \\ -5 & -5 & 14 \end{bmatrix} ; Z_{(b)} = \begin{bmatrix} 15 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & 15 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 15 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$E'_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então, $X^+X = H$ fica:

$$X^+X = 1/19 \begin{bmatrix} 12 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 14 & -5 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 14 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & -5 & 14 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 15 & -4 & -4 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & -4 & 15 & -4 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & -4 & -4 & 15 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & -4 & -4 & -4 & 15 \end{bmatrix}$$

e matriz X^+X^+ é dada por:

$$X^+X^+ = \frac{1}{51984} \begin{bmatrix} 1728 & 576 & 576 & 576 & 432 & 432 & 432 & 432 \\ 576 & 8856 & -4140 & -4140 & 144 & 144 & 144 & 144 \\ 576 & -4140 & 8856 & -4140 & 144 & 144 & 144 & 144 \\ 576 & -4140 & -4140 & 8856 & 144 & 144 & 144 & 144 \\ 432 & 144 & 144 & 144 & 13104 & -4224 & -4224 & -4224 \\ 432 & 144 & 144 & 144 & -4224 & 13104 & -4224 & -4224 \\ 432 & 144 & 144 & 144 & -4224 & -4224 & 13104 & -4224 \\ 432 & 144 & 144 & 144 & -4224 & -4224 & -4224 & 13104 \end{bmatrix}$$

Para esta caracterização, de acordo com [3.54] o projetor P é desdobrado em:

$$P = P_{\alpha} + P_{\beta} - P_{\mu}$$

onde:

P_{μ} é o projetor ortogonal de y sobre $C(X_{\mu})$;

P_{α} é o projetor ortogonal de y sobre $C(X_{\alpha})$;

P_{β} é o projetor ortogonal de y sobre $C(X_{\beta})$.

Com as definições desses projetores já dadas em [3.55], [3.56] e [3.57], podem ser obtidas as somas de quadrados e construída a análise de variância:

$$SQ_{\mu} = y'P_{\mu}y = \text{Correção} = C = 800,3333$$

$$SQ_{\alpha} = y'P_{\alpha}y - y'P_{\mu}y = 973,0000 - 800,3333 = 172,6667$$

$$SQ_{\beta} = y'P_{\beta}y - y'P_{\mu}y = 832,6666 - 800,3333 = 32,3333$$

$$SQ_{\text{Total}} = y'y - y'P_{\mu}y = 1.018,0000 - 800,3333 = 217,6667$$

$$SQ_{\text{Resíduo}} = y'(I-P)y = 12,6667$$

e os graus de liberdade associados:

$$g.l.(μ) = 1$$

$$g.l.(α) = 2$$

$$g.l.(β) = 3$$

$$g.l.(Total) = 11$$

$$g.l.(Resíduo) = 6,$$

conforme já definidos em [3.58] e [3.59].

O quadro de análise de variância é apresentado a seguir:

C. Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Ninhadas (β)	3	32,3333		
Rações (α)	2	172,6667	86,3333	40,89**
Resíduo	6	12,6667	2,1111	
Total	11	217,6667		

4.3. Experimento Balanceado com Dois Fatores, Com Interação

Para este caso, foi tomado um exemplo numérico de NETER & WASSERMAN (1977, p. 570) referente a um experimento feito por uma fábrica de pães embalados, com o intuito de estudar o efeito da profundidade (fator A): regular e larga, e da altura (fator B): baixa, média e alta, das prateleiras dos supermercados sobre a venda dos pães. Foram tomados doze supermercados com as mesmas características de clientela e, durante o período experimental, para cada combinação sorteavam-se aleatoriamente dois supermercados, anotando-se as respectivas vendas. Os dados obtidos estão na Tabela 3.

Tabela 3 - Vendas de pães de acordo com a profundidade (A_1 = regular; A_2 = larga) e altura (B_1 = baixa; B_2 = média; B_3 = alta) das prateleiras dos supermercados.

FATOR B	FATOR A	
	A_1	A_2
B_1	47	46
	43	40
B_2	62	67
	68	71
B_3	41	42
	39	46
TOTAL	300	312

Dado o modelo linear $y = X\theta + e$, com a caracterização:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

sendo α_i o parâmetro representativo do fator A, β_j o parâmetro representativo do fator B e $(\alpha\beta)_{ij}$ referente à interação entre o fator A e B, onde:

$i = 1, \dots, a$ é o índice do fator A (α_i),

$j = 1, \dots, b$ é o índice do fator B (β_j); e

$k = 1, \dots, R$ é o índice das repetições, nesse caso R fi-

xo = 2.

A matriz X do delineamento é dada por:

$$\mathcal{X} = [\mathcal{X}_\mu | \mathcal{X}_\alpha | \mathcal{X}_\beta | \mathcal{X}_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{ab+a+b+1}$$

e pode-se escrever:

$$y = \mathcal{X}e + e$$

$$\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ y_{131} \\ y_{132} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{231} \\ y_{232} \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{ab+a+b+1} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \beta^2 \\ \beta^1 \\ \beta^2 \\ \alpha\beta^3 \\ \alpha\beta^{11} \\ \alpha\beta^{12} \\ \alpha\beta^{13} \\ \alpha\beta^{21} \\ \alpha\beta^{22} \\ \alpha\beta^{23} \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{112} \\ e_{121} \\ e_{122} \\ e_{131} \\ e_{132} \\ e_{211} \\ e_{212} \\ e_{221} \\ e_{222} \\ e_{231} \\ e_{232} \end{bmatrix}_n$$

De acordo com a proposição 3a, a inversa de Moore-Penrose para esta caracterização fica:

$$X^+ = \frac{1}{fRCabD}$$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	a	a	a	a	a	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	a	a	a	a	a	a
b	b	-1	-1	-1	-1	b	b	-1	-1	-1	-1
-1	-1	b	b	-1	-1	-1	-1	b	b	-1	-1
-1	-1	-1	-1	b	b	-1	-1	-1	-1	b	b
ab	ab	-a	-a	-a	-a	-b	-b	1	1	1	1
-a	-a	ab	ab	-a	-a	1	1	-b	-b	1	1
-a	-a	-a	-a	ab	ab	1	1	1	1	-b	-b
-b	-b	1	1	1	1	ab	ab	-a	-a	-a	-a
1	1	-b	-b	1	1	-a	-a	ab	ab	-a	-a
1	1	1	1	-b	-b	-a	-a	-a	-a	ab	ab

$$X^+ = \frac{1}{24}$$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	2	2	2
3	3	-1	-1	-1	-1	3	3	-1	-1	-1	-1
-1	-1	3	3	-1	-1	-1	-1	3	3	-1	-1
-1	-1	-1	-1	3	3	-1	-1	-1	-1	3	3
6	6	-2	-2	-2	-2	-3	-3	1	1	1	1
-2	-2	6	6	-2	-2	1	1	-3	-3	1	1
-2	-2	-2	-2	6	6	1	1	1	1	-3	-3
-3	-3	1	1	1	1	6	6	-2	-2	-2	-2
1	1	-3	-3	1	1	-2	-2	6	6	-2	-2
1	1	1	1	-3	-3	-2	-2	-2	-2	6	6

$$e^{\circ} = X^+ y = \begin{bmatrix} 25,50 \\ 12,00 \\ 13,50 \\ 3,83 \\ 19,17 \\ 2,50 \\ 3,67 \\ 8,33 \\ 0,00 \\ 0,17 \\ 10,83 \\ 2,50 \end{bmatrix} ; \quad X^+ y = \begin{bmatrix} 612 \\ 300 \\ 312 \\ 176 \\ 268 \\ 168 \\ 90 \\ 130 \\ 80 \\ 86 \\ 138 \\ 88 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = X e^{\circ} = \begin{bmatrix} 10,67 \\ 10,33 \\ 6,67 \\ 10,33 \\ 4,17 \\ 3,83 \\ 0,17 \\ 3,83 \\ 13,17 \\ 12,83 \\ 9,17 \\ 12,83 \end{bmatrix}$$

A matriz $XX^+ = P$ é composta por:

$$XX^+ = \begin{bmatrix} 1/R_1 & 1/R_1 & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ 1/R_1 & 1/R_1 & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & 1/R_2 & 1/R_2 & \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & 1/R_2 & 1/R_2 & \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & 1/R_1 & 1/R_1 & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & 1/R_1 & 1/R_1 & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & 1/R_2 & 1/R_2 & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & 1/R_2 & 1/R_2 & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & 1/R_1 & 1/R_1 & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & 1/R_1 & 1/R_1 & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & 1/R_2 & 1/R_2 \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & 1/R_2 & 1/R_2 \end{bmatrix}$$

$$XX^+ = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ 1/2 & 1/2 & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & 1/2 & 1/2 & \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & 1/2 & 1/2 & \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & 1/2 & 1/2 & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & 1/2 & 1/2 & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & 1/2 & 1/2 & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & 1/2 & 1/2 & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & 1/2 & 1/2 & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & 1/2 & 1/2 & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & 1/2 & 1/2 \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$X^+X = \frac{1}{f(Cab)}$$

ab	b	b	a	a	a	1	1	1	1	1	1
b	ab	-b	1	1	1	a	a	a	-1	-1	-1
b	-b	ab	1	1	1	-1	-1	-1	a	a	a
a	1	1	ab	-a	-a	b	-1	-1	-b	-1	-1
a	1	1	-a	ab	-a	-1	b	-1	-1	b	-1
a	-1	1	-a	-a	ab	-1	-1	b	-1	-1	b
1	a	-1	b	-1	-1	ab	-a	-a	-b	1	1
1	a	-1	-1	b	-1	-a	ab	-a	1	-b	1
1	a	-1	-1	-1	b	-a	-a	ab	1	1	-b
1	-1	a	b	-1	-1	-b	1	1	ab	-a	-a
1	-1	a	-1	b	-1	1	-b	1	-a	ab	-a
1	-1	a	-1	-1	b	1	1	-b	-a	-a	ab

$$X^+X = \frac{1}{12}$$

6	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1
3	6	-3	1	1	1	2	2	2	-1	-1	-1
3	-3	6	1	1	1	-1	-1	-1	2	2	2
2	1	1	6	-2	-2	3	-1	-1	3	-1	-1
2	1	1	-2	6	-2	-1	3	-1	-1	3	-1
2	1	1	-2	-2	6	-1	-1	3	-1	-1	3
1	2	-1	3	-1	-1	6	-2	-2	-3	1	1
1	2	-1	-1	3	-1	-2	6	-2	1	-3	1
1	2	-1	-1	-1	3	-2	-2	6	1	1	-3
1	-1	2	3	-1	-1	-3	1	1	6	-2	-2
1	-1	-2	-1	3	-1	1	-3	1	-2	6	-2
1	-1	2	-1	-1	3	1	1	-3	-2	-2	6

e a matriz X^+X^+ é dada por:

$$X^+X^+ = \frac{1}{576} \begin{bmatrix} 12 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 30 & -24 & 2 & 2 & 2 & 10 & 10 & 10 & -8 & -8 & -8 \\ 6 & -24 & 30 & 2 & 2 & 2 & -8 & -8 & -8 & 10 & 10 & 10 \\ 4 & 2 & 2 & 44 & -20 & -20 & 22 & -10 & -10 & 22 & -10 & -10 \\ 4 & 2 & 2 & -20 & 44 & -20 & -10 & 22 & -10 & -10 & 22 & -10 \\ 4 & 2 & 2 & -20 & -20 & 44 & -10 & -10 & 22 & -10 & -10 & 22 \\ 2 & 10 & -8 & 22 & -10 & -10 & 110 & -50 & -50 & -88 & 40 & 40 \\ 2 & 10 & -8 & -10 & 22 & -10 & -50 & 110 & -50 & 40 & -88 & 40 \\ 2 & 10 & -8 & -10 & -10 & 22 & -50 & -50 & 110 & 40 & 40 & -88 \\ 2 & -8 & 10 & 22 & -10 & -10 & -88 & 40 & 40 & 110 & -50 & -50 \\ 2 & -8 & 10 & -10 & 22 & -10 & 40 & -88 & 40 & -50 & 110 & -50 \\ 2 & -8 & 10 & -10 & -10 & 22 & 40 & 40 & -88 & -50 & -50 & 110 \end{bmatrix}$$

Conforme descrito em [3.78], nesta caracterização

$$P = P_{\alpha, \beta} = P_{\alpha} + P_{\beta} + P_{\alpha\beta} - 2P_{\mu}$$

onde:

P_{μ} é o projetor ortogonal de y no espaço coluna X_{μ} ;

P_{α} é o projetor ortogonal de y no espaço coluna de X_{α} ;

P_{β} é o projetor ortogonal de y no espaço coluna de X_{β} ;

$P_{\alpha\beta}$ é o projetor ortogonal de y no espaço coluna de $X_{\alpha\beta}$.

Com as definições desses projetores já dadas em [3.79], [3.80], [3.81] e [3.82], podem ser obtidas as somas de quadrados e construído o quadro de análise de variância:

$$SQ_{\mu} = y'P_{\mu}y = \text{Correção} = C = 31.212$$

$$SQ_{\alpha} = y'P_{\alpha}y - y'P_{\mu}y = 31.224 - 31.212 = 12$$

$$SQ_{\beta} = y'P_{\beta}y - y'P_{\mu}y = 32.756 - 31.212 = 1.544$$

$$SQ_{\alpha\beta} = y'P_{\alpha\beta}y - y'P_{\mu}y = 31.236 - 31.212 = 24$$

$$SQ_{\text{Total}} = y'y - y'P_{\mu}y = 32.854 - 31.212 = 1.642$$

$$SQ_{\text{Resíduo}} = y'(I-P)y = 62$$

e os graus de liberdade associados:

$$g.l.(\mu) = 1$$

$$g.l.(\alpha) = 1$$

$$g.l.(\beta) = 2$$

$$g.l.(\alpha\beta) = 2$$

$$g.l.(\text{Total}) = 11$$

$$g.l.(\text{Resíduo}) = 6,$$

conforme já definidos em [3.83] e [3.84].

O quadro de análise de variância é apresentado a seguir:

C. Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Fator A (α)	1	12	12	1,17
Fator B (β)	2	1.544	772	74,95**
AxB ($\alpha\beta$)	2	24	12	1,17
Resíduo	6	62	10,3	
Total	11	1.642		

Os resultados estão concordantes com os de NETER & WASSERMAN (1977).

As demais estimativas podem ser obtidas como no exemplo 1.

5. CONCLUSÕES

Considerando-se os objetivos deste trabalho e com base nos resultados obtidos, podemos concluir que:

- 1) O uso da solução $\theta^{\circ} = \mathcal{X}^+ y$ para modelo linear de Gauss-Markov $y = \mathcal{X}\theta + e$, através da forma geral para \mathcal{X}^+ proposta apresentou resultados concordantes com o obtido pela literatura através da solução com o uso das equações normais, $\theta^{\circ} = (\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-1}\mathcal{X}'y$.
- 2) A definição de $V(\hat{\lambda}'\theta) = \lambda'\mathcal{X}^+\mathcal{X}^+\lambda\sigma^2$ foi comprovada através das estimações nos exemplos numéricos apresentados.
- 3) Todas as formas gerais definidas \mathcal{X}^+ , $P = \mathcal{X}\mathcal{X}^+$, $H = \mathcal{X}^+\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}^+\mathcal{X}^+$ são de fácil composição.
- 4) O uso das formas gerais da inversa generalizada de Moore-Penrose em delineamentos experimentais propicia simplificações relevantes no processo didático dos temas clássicos inerentes aos Modelos Lineares e correlatos, pois as formas das matrizes apresentam uma visão mais clara dos efeitos dos parâmetros envolvidos,

além da facilidade da obtenção da análise de variância através dos projetores ortogonais.

- 5) Dado que a formação das matrizes leva em conta apenas números fracionários relacionados com os parâmetros envolvidos no modelo, a precisão das estimações é maior que quando se trabalha com equações normais e reparametrizações, pois envolvem menos cálculos.
- 6) Os resultados mostram as diferenças existentes na formação da inversa generalizada de Moore-Penrose, bem como dos projetores, de acordo com a caracterização de cada modelo.
- 7) Além dos modelos de delineamentos experimentais aqui apresentados, a generalização para outros delineamentos não apresenta dificuldades maiores, pois o processo utilizado para obtenção de X^+ , através da fatoração de $X = UT$ é apropriado para matrizes de delineamentos.
- 8) A maior contribuição dessas formas gerais, além do uso didático, seria sua utilização em programas computacionais, pois o ponto forte dessas formas é reduzir o número de passos e, conseqüentemente, de erros de arredondamento.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALBERT, A. *Regression and the Moore-Penrose Inverse*. New York, Academic Press. 1972. 180p.
- ALVES, M.I.F.; MATSUO, T. & IEMMA, A.F. Formas gerais para a inversa generalizada de Moore-Penrose em delineamentos experimentais. *Anais do 2^o SEAGRO*, Londrina, 1987.
- ALVES, M.I.F.; MATSUO, T. & IEMMA, A.F. General forms of the Moore-Penrose generalized inverse in experimental designs. *Biometric Bulletin*, 5(2): 18, 1988.
- ALVES, M.I.F. & IEMMA, A.F. Matriz do delineamento e inversa generalizada de Moore-Penrose. *Anais do 3^o SEAGRO*, Lavras, 1989.
- ALVES, M.I.F. & IEMMA, A.F. The design matrix and Moore-Penrose generalized inverse. *Biometric Bulletin*, 7(2): 5, 1990.
- DIAS, C.T.S. *ALGEMA - Sistema Computacional para Álgebra de Matrizes*. Piracicaba, ESALQ/USP, 1988, 236 p. [Dissertação de Mestrado].
- DWIVEDI, T.D. A method to compute the rank factors of a matrix. *Sankhyā*, 37(B.4): 463-64, 1975.

- GODOI, C.R.M.; DIAS, C.T.S. & MATTIOLLI, C.H. Sistema de Análise de Modelos Lineares Multidimensionais e Álgebra de Matrizes - MOLIMU, Londrina, FUEL, 1987, 72 p.
- GRAYBILL, F.A. Introduction to Matrices With Applications in Statistics. Wadsworth, 1969, 372 p.
- IEMMA, A.F. Valores singulares de matrizes uniformes. Ciência e Natura, 4: 21-26, 1982.
- IEMMA, A.F. Modelos Lineares: uma introdução para profissionais da pesquisa agropecuária. Piracicaba, ESALQ/USP, 1985, 142 p.
- IEMMA, A.F. Modelos Lineares: uma introdução para profissionais da pesquisa agropecuária. Londrina, FUEL, 1987, 263 p.
- KRUSKAL, W. The Geometry of Generalized Inverses. Ann. Math. Statist., (2): 272-283, 1974.
- LOWERRE, J.M. An introduction to modern matrix methods in Statistics. The American Statistician, 36(2): 113-15, 1982.
- MOORE, E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix. Bull. Am. Math. Soc., 26: 394-395, 1920.
- NETER, J.; WASSERMAN, W. Applied Linear Statistical Models. Richard D. Irwin, Inc. 1977, 834 p.
- NOGUEIRA, I.R. Método geral para obtenção de tabelas de polinômios ortogonais. Revista de Agricultura 53(4): 269-279, 1978.

- PENROSE, R.A. A generalized inverse for matrices. Proc. Cambridge Philos. Soc. 51: 406-413, 1955.
- PESSOA, R.M.V. Comparação entre métodos numéricos para obtenção da inversa generalizada de Moore-Penrose de uma matriz. IMECC/UNICAMP., Campinas, 1986. 155 p. [Dissertação de Mestrado].
- RAO, C.R. Generalization of Markoff's theorem and tests of linear hypotheses. Sankhyā, 7: 9-16, 1945.
- RAO, C.R. A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics. J.R. Statist. Soc. B, 24: 152-158, 1961.
- RAO, C.R. & MITRA, S.K. Generalized Inverse of Matrices and its Applications, Wiley, 1971, 240 p.
- RIBOLDI, J. A decomposição da soma de quadrados de tratamentos nos delineamentos em Blocos Incompletos Parcialmente Balanceados. ESALQ/USP, Piracicaba, 1988. 165p. [Tese de Doutorado].