RESÍDUO ESPECÍFICO PARA CONTRASTE DE TRATAMENTOS NO DELINEAMENTO INTEIRAMENTE CASUALIZADO

MARIA CRISTINA STOLF NOGUEIRA
Engenheira Agrônoma

Orientador: Prof. Dr. HUMBERTO DE CAMPOS

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Outubro, 1984

Aos meus pais Eulálio e Jenny ,

e à mana Elizabeth

D E D I C O

AGRADECIMENTOS

A DEUS.

Ao Prof. Dr. Humberto de Campos, pela amizade, pelo apoio e pela eficaz orientação deste trabalho.

Ao Colega Prof. Cássio Roberto de Melo Godoi, pelo incentivo e pelas oportunas sugestões.

Ao Colega Prof. Antonio Francisco Iemma, pelo apoio durante a realização deste trabalho.

Aos demais colegas do Departamento de Matemática e Estatística e do curso de Pós-Graduação, pela convivência.

Ao IAA-PLANALSUCAR, na pessoa do Engº-Agrº Norberto Antonio Lavorenti, pela cessão dos dados utilizados no exemplo ilustrativo.

À Rosa Maria Alves, pela amizade e pelo trabalho de datilografia.

À Maria Izalina Ferreira Alves, pela amizade e pela revisão do texto.

Ao Engº-Florestal Valter João Diehl e aos funcionários Djanira, Paulo e demais do Centro de Processamento de Dados da ESALQ, pela cooperação.

Aos demais funcionários do Departamento de Matemática e Estatística, pela dedicação.

Í N D I C E

RESÍDUO ESPECÍFICO PARA CONTRASTE DE TRATAMENTOS NO DELINEAMENTO INTEIRAMENTE CASUALIZADO

Autora: MARIA CRISTINA STOLF NOGUEIRA

Orientador: HUMBERTO DE CAMPOS

RESUMO

Na estruturação de uma análise de variância, quando se faz presente a heterocedasticidade do tipo irregular, um dos procedimentos recomendados é subdividir ou decompor a soma de quadrados do resíduo em componentes aplicáveis às várias comparações de interesse, constituindo, assim, o resíduo específico a cada contraste.

O propósito deste trabalho constituiu-se na obtenção dos resíduos específicos aos contrastes entre tratamentos, para o delineamento inteiramente casualizado balanceado, admitida a heterocedasticidade do tipo irregular.

A estrutura preliminar da decomposição do resíduo baseou-se na de blocos casualizados, admitindo-se cada repetição como um bloco. Foram aplicados na decomposição os conceitos fundamentais de contrastes e os das formas quadráticas.

Os resultados obtidos permitiram concluir:

a) No delineamento inteiramente casualizado, quando consideram-se (I-1) contrastes ortogonais de tratamentos, a soma de quadrados do resíduo pode ser decomposta em I componentes distribuídos da seguinte maneira:

a.1) (I-1) componentes associados aos (I-1) contrastes ortogonais entre tratamentos; e

a.2) um componente "entre repetições".

b) O resíduo específico a cada contraste entre tratamentos está associado à expressão:

$$E\left[SQR\ Y(h)\right] = \frac{(J-1)}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\ \sigma_i^2 \quad ,$$

com (J-1) graus de liberdade e, consequentemente,

$$E\left[QMR\ Y(h)\right] = \frac{1}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\ \sigma_i^2 \quad ,$$

sendo σ_i^2 a variância populacional dentro de tratamentos, e c_{hi} é o coeficiente do i-ésimo termo do contraste Y(h).

c) O resíduo específico a cada contraste entre tratamentos é calculado através das expressões:

$$\overline{SQR}\ Y(h) = \frac{(J-1)}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\ \hat{\sigma}_i^2 \qquad e \qquad \overline{QMR}\ Y(h) = \frac{1}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\ \hat{\sigma}_i^2 \quad ,$$

onde $\hat{\sigma}_i^2$ é a variância amostral do i-ésimo tratamento.

d) O resíduo específico para o componente "entre repetições" está associado à expressão:

$$E\left[SQR(\text{entre repetições})\right] = \frac{(J-1)}{I} \sum_i \sigma_i^2 \quad ,$$

com (J-1) graus de liberdade, e

$$E\left[QMR(\text{entre repetições})\right] = \frac{1}{I} \sum_i \sigma_i^2 \quad ,$$

gerando os seguintes estimadores:

$$\overline{SQR}\ (\text{entre repetições}) = \frac{(J-1)}{I} \sum_i \hat{\sigma}_i^2 \quad ,$$

e $$\overline{QMR}\ (\text{entre repetições}) = \frac{1}{I} \sum_i \hat{\sigma}_i^2 \quad .$$

e) Às decomposições anteriormente apresentadas está associada a seguinte propriedade:

$$\sum_{h=1}^{I-1} \overline{SQR}\ Y(h) + \overline{SQR}\ (\text{entre repetições}) = SQR\text{esíduo} \quad ,$$

o que evidencia a validade do procedimento adotado na obtenção do resíduo específico a cada contraste.

f) O quociente $QM\ Y(h)/\overline{QMR}\ Y(h)$ tem distribuição aproximada de F, com 1 e f graus de liberdade, sendo f obtido de acordo com SATTERTHWAITE (1941), através da expressão:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{J-1}\left[\sum_{i=1}^{I} \left(\frac{c_{hi}^2\ \hat{\sigma}_i^2}{\sum_i c_{hi}^2}\right)^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{I} \frac{c_{hi}^2\ \hat{\sigma}_i^2}{\sum_i c_{hi}^2} \right)^2 \right] \quad .$$

SPECIFIC RESIDUE OF TREATMENT CONTRAST IN THE COMPLETELY RANDOMIZED DESIGN

Author: MARIA CRISTINA STOLF NOGUEIRA

Adviser: HUMBERTO DE CAMPOS

S U M M A R Y

In the structure of an analysis of variance, when the heteroscedasticity of irregular type appears, one of the recommendable procedure is to decompose the residual sum of squares in appropriated components for comparisons of interest, constituting the specific residue of each contrast.

The purpose of this work is to obtain the specific residues of contrasts among treatments of balanced completely randomized design, when the heteroscedasticity of the irregular type is present.

The preliminary structure of the decomposition of the residue was based on the structure of the randomized block design, where every replication is considered as one block. In the decomposition of the residue the fundamental concepts of contrasts and of the quadratic forms were applied.

The following conclusions can be drawn:

a) When in the completely randomised design (I-1) orthogonal contrasts of treatments are taken the residual sum of squares can be decomposed in I components and distributed in the following way:

a.1) (I-1) components associated to the (I-1) orthogonal contrasts among treatments; and

a.2) one component "among replications".

b) The expected value of the specific residue for each contrast among treatments is expressed as:

$$E\left[SQR\ Y(h)\right] = \frac{(J-1)}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\, \sigma_i^2 \quad ,$$

with (J-1) degrees of freedom and, consequently

$$E\left[QMR\ Y(h)\right] = \frac{1}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\, \sigma_i^2 \quad ,$$

where σ_i^2 is the population variance within the i^{th} treatment, and c_{hi} is the coefficient of the i^{th} term of the contrast Y(h).

c) The specific residue of contrast among treatments is then calculated by the expression:

$$\overline{SQR}\ Y(h) = \frac{(J-1)}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\, \hat{\sigma}_i^2 \quad \text{and} \quad \overline{QMR}\ Y(h) = \frac{1}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\, \hat{\sigma}_i^2$$

where $\hat{\sigma}_i^2$ is the sample variance within the i^{th} treatment.

d) The expected value of the specific residue of the "among replications" contrast is expressed as:

$$E\left[SQR \text{ (among replications)}\right] = \frac{(J-1)}{I} \sum_i \sigma_i^2 ,$$

with (J-1) degrees of freedom, and

$$E\left[QMR \text{ (among replications)}\right] = \frac{1}{I} \sum_i \sigma_i^2 ,$$

generating the following estimators:

$$\overline{SQR} \text{ (among replications)} = \frac{(J-1)}{I} \sum_i \hat{\sigma}_i^2$$

and $$\overline{QMR} \text{ (among replications)} = \frac{1}{I} \sum_i \hat{\sigma}_i^2 .$$

e) The above sum of squares are related by the following relation:

$$\sum_{h=1}^{I-1} \overline{SQR}\ Y(h) + \overline{SQR} \text{ (among replications)} = SQ \text{ Residue} ,$$

that shows the consistency of the procedure used, in obtaining the specific residual sum of squares of each contrast.

f) The ratio $QM\ Y(h)/\overline{QMR}\ Y(h)$ has an approximated F distribution, with 1 and f degrees of freedom, where f is obtained by the SATTERTHWAITE (1941) formula:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{J-1} \left[\sum_{i=1}^{I} \left(\frac{c_{hi}^2\ \hat{\sigma}_i^2}{\sum_i c_{hi}^2}\right)^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{I} \frac{c_{hi}^2\ \hat{\sigma}_i^2}{\sum_i c_{hi}^2}\right)^2 \right]$$

1. INTRODUÇÃO

Quando se realiza uma análise de variância é necessário que determinadas pressuposições do modelo matemático adotado, considerando a estrutura de erros $I\sigma^2$, sejam observadas. Dentre elas está a homocedasticidade, isto é, os erros experimentais devem ter variâncias homogêneas. Esta verificação se faz necessária para a correta aplicação dos testes de siginficância.

A homocedasticidade pode ser verificada através de testes apropriados. Quando ela não se verifica, tem-se o que se denomina de heterocedasticidade ou heterogeneidade das variâncias.

STEEL e TORRIE (1960) baseados em COCHRAN (1947), classificaram a heterocedasticidade em regular ou irregular.

A heterocedasticidade do tipo regular geralmente surge de algum tipo de não-normalidade dos dados e de alguma forma de relacionamento entre as médias e as variâncias dos vários tratamentos . Os dados, neste caso, podem ser transformados, de maneira que passem a ter distribuição aproximadamente normal. Com tais transformações, tenciona-se também fazer com que médias e variâncias tornem-se independentes, resultando variâncias homogêneas. As transformações mais comuns são: a raiz quadrada, a logarítmica e a angular ou arco seno.

A heterocedasticidade do tipo irregular, ainda segundo os mesmos autores, é caracterizada quando certos tratamentos possuem variabilidade significantemente maior que outros, sem que necessariamente haja relação entre a média e a variância.

Na comparação de inseticidas, por exemplo, um grupo não tratado ou unidade de controle, é muitas vezes incluído. O número de insetos observados nas unidades de controle (parcelas testemunhas) é, em geral, muito maior e mais variado do que nas parcelas onde um inseticida oferece considerável controle. Logo, as parcelas testemunhas irão contribuir com maior grau que as tratadas na composição do quadrado médio do resíduo. Em consequência, o valor do resíduo médio obtido será muito alto para as comparações entre os inseticidas, e pode falhar em detectar diferenças reais. Ainda, alguns tratamentos podem ter maior variação comparativamente aos demais.

COCHRAN (1947) recomendou, nesse caso, omitir certos tratamentos ou subdividí-los em grupos, de tal forma que, com os tratamentos restantes, ou dentro de cada subdivisão, tenha-se a esperada homocedasticidade.

Um outro procedimento, recomendado pelo mesmo autor, é subdividir a soma de quadrados do resíduo em componentes aplicáveis às várias comparações de interesse. Este procedimento é tradicionalmente utilizado no delineamento em blocos casualizados, cuja estrutura é apresentada, dentre outros, por COCHRAN (1938) e por FERREIRA (1978).

A metodologia adotada no delineamento em blocos casualizados, para contornar o problema da heterocedasticidade irregular através da obtenção do resíduo específico a cada contraste de tratamentos, não se aplica diretamente ao caso do delineamento inteiramente casualizado, devido à impossibilidade de se caracterizar as observações componentes de cada repetição.

O objetivo principal do presente trabalho é estruturar o resíduo específico a cada contraste de tratamentos, no caso de existência da heterocedasticidade irregular nos experimentos inteiramente casualizados balanceados.

2. REVISÃO DE LITERATURA

COCHRAN (1938) ilustrou, através de um experimento delineado em blocos casualizados, a importância da homocedasticidade na análise da variância, utilizando-se da decomposição da soma de quadrados do resíduo em componentes aplicáveis às várias comparações de interesse.

A distribuição de uma combinação linear de duas ou mais estatísticas com distribuições de qui-quadrado foi estudada por SATTERTHWAITE (1941), através da aproximação dos graus de liberdade envolvidos pela distribuição do qui-quadrado. O autor concluiu que esta aproximação é suficientemente correta para o uso em muitas aplicações práticas. Forneceu, desta feita, uma extensão do qui-quadrado, do "t" de Student e do teste "z" de Fisher, para o caso em que a distribuição do qui-quadrado não oferece uma exata avaliação da estimativa da variância usada, em virtude de, nos problemas práticos, a melhor estimativa da variância ser, às vezes, aquela obtida através de uma combinação linear de duas ou mais estimativas simples de variâncias independentes.

A distribuição exata de uma função linear de dois ou mais quadrados médios independentes do tipo

$$\hat{V}_s = a_1 (QM)_1 + a_2 (QM)_2 + \ldots \quad ,$$

onde: $(QM)_1$, $(QM)_2$, ... são quadrados médios com r_1, r_2, ... graus de liberdade, respectivamente, é muito complicada para ser determinada, principalmente quando os quadrados médios diferem muito entre si. SATTERTHWAITE (1946) propôs uma aproximação para a distribuição exata, que considerou como satisfatória. Essa aproximação é obtida com base na distribuição do qui-quadrado, onde o número de graus de liberdade é obtido através da expressão

$$\hat{r}_s = \frac{\left[a_1 (QM)_1 + a_2 (QM)_2 + \ldots\right]^2}{\frac{\left[a_1 (QM)_1\right]^2}{r_1} + \frac{\left[a_2 (QM)_2\right]^2}{r_2} + \ldots} \quad .$$

Os principais fatores que podem afetar a validade da análise de variância, segundo COCHRAN (1947), são: a presença de erros grosseiros, a assimetria extrema, as anomalias de certos tratamentos, as mudanças na variância residual e a falta de aditividade dos efeitos reais. Dependendo de cada caso, os métodos apontados pelo autor para contornar essas dificuldades são: omissão de certos tratamentos, repetições ou observações; subdivisão da variância residual em componentes apropriados e transformação dos dados antes da análise de variância.

KEMPTHORNE e BARCLAY (1953) sugeriram, para o delineamento em blocos casualizados quando o erro experimental não é homogêneo, subdividir a soma de quadrados de tratamentos em componentes apropriados, fazendo-se acompanhar da subdivisão da soma de quadrados de resíduo associado aos componentes da subdivisão anterior. Os testes de significância são então efetuados através da comparação de cada componente da soma de quadrados de tratamentos com o seu erro apropriado correspondente.

BOX (1954) considerou o modelo $Y_{ti} = \eta_t + z_{ti}$, com $t = 1, \ldots, k$ e $i = 1, \ldots, n_t$, onde $\eta_t = \alpha + \gamma_t$ é a média populacional do t-ésimo grupo e

$$\sum_{t=1}^{k} n_t \gamma_t = 0$$

e os z_{ti} são os erros com distribuição normal e independentes com média zero e variância σ^2. Ao invés de supor variâncias constantes , o autor postulou que $E(z_{ti}^2) = \sigma_t^2$, onde: $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_t^2, \ldots, \sigma_k^2$ não eram necessariamente todas iguais.

Apresentou a seguinte tabela da análise de variância de grupos com variâncias desiguais:

Causas de Variação	GL	SQ	E(Q)	Distribuição nula de Q
Entre grupos	k-1	$Q_B = \sum_{t=1}^{k} n_t(\bar{y}_{t.} - \bar{y}_{..})^2$	$\sum_{t=1}^{k} n_t\gamma_t^2 + \sum_{t=1}^{k} (1 - \frac{n_t}{N})\sigma_t^2$	$\sum_{t=1}^{k-1} \lambda_t^2 \chi_{(1)}^2$
Dentro de grupos	N-k	$Q_W = \sum_{t=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y}_{t.})^2$	$\sum_{t=1}^{k} (n_t - 1)\sigma_t^2$	$\sum_{t=1}^{k} \sigma_t^2 \chi_{(n_t-1)}^2$

Desta feita o autor considerou que:

$$Q_B = \sum_{t=1}^{k} n_t(\gamma_t + \bar{z}_{t.} - \bar{z}_{..})^2 \quad ,$$

e $$E\left[Q_B\right] = \sum_{t=1}^{k} n_t\gamma_t^2 + E\left[\sum_{t=1}^{k} n_t(\bar{z}_{t.} - \bar{z}_{..})^2\right] .$$

Quando a hipótese de nulidade é verdadeira, Q_B é uma forma quadrática nas variáveis $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_t, \ldots, \bar{z}_k$. A Matriz $M = \{m_{ts}\}$ desta forma quadrática é $N^{-1}\{\delta_{ts} n_t N - n_t n_s\}$, onde δ_{ts} é o delta de Kronecker. As variáveis também seguem, segundo o autor, a distribuição multi-normal, cujo t-ésimo elemento da diagonal da matriz de variâncias-covariâncias V é σ_t^2/n_t. Segue, então, que a matriz

$$U = V \cdot M = N^{-1}\{\delta_{ts}\, \sigma_t^2\, N - \sigma_t^2\, n_s\} \quad ,$$

com $$N = \sum_{t=1}^{k} n_t .$$

A esperança matemática de Q_B e a sua distribuição nula são as apresentadas na tabela da análise de variância, e os $\lambda_1, \ldots, \lambda_t, \ldots, \lambda_{k-1}$ são os auto-valores da matriz U.

Por outro lado, considerando,

$$Q_W = \sum_{t=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y}_{t.})^2 = \sum_{t=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_t} (z_{ti} - \bar{z}_{t.})^2 \quad ,$$

o autor afirmou que $\sum_{i=1}^{n_t} (z_{ti} - \bar{z}_{t.})^2$ se distribui como $\sigma_t^2 \chi^2_{(n_t-1)}$, independentemente de $\bar{z}_{t.}$. Assim, Q_W é distribuído como

$$\sum_{t=1}^{k} \sigma_t^2 \chi^2_{(n_t-1)} \quad ,$$

independentemente de Q_B .

O autor verificou que o quociente dos quadrados médios tem distribuição aproximada de $b\, F(h', h)$, onde:

$$b = \frac{N - k}{N(k-1)} \sum_t (N - n_t) \; \sigma_t^2 / \sum_t (n_t - 1)\sigma_t^2 \quad ,$$

$$h' = \{\sum_t (N - n_t)\sigma_t^2\}^2 / \{\{\sum_t n_t \; \sigma_t^2\}^2 + N \sum_t (N - 2n_t)\sigma_t^4\} \quad ,$$

$$h = \{\sum_t (n_t - 1)\sigma_t^2\}^2 / \{\sum_t (n_t - 1)\sigma_t^4\} \quad .$$

SCHEFFÉ (1959) propôs uma regra, apresentada a seguir, que permite estender todas as fórmulas obtidas para esperança do quadrado médio, sob a hipótese de variâncias iguais para o erro, para os casos onde esta hipótese foi violada, desde que os erros sejam independentes:

a) Se Q é uma forma quadrática em $\{y_i\}$, e sendo $y_i = m_i + e_i$, onde os $\{m_i\}$ são constantes ou variáveis aleatórias, e os $\{e_i\}$ são independentes e também independentes de $\{m_i\}$.

b) Se os $\{m_i\}$ são variáveis aleatórias, $E(e_i) = 0$ e $V(e_i) = \sigma_i^2$,

então a fórmula para $E(Q)$ pode ser obtida através da substituição de σ_e^2 em $E(Q)$, que seria o caso onde todo σ_i^2 teria um valor comum σ_e^2, por uma média ponderada $\sum_i w_i \sigma_i^2 / \sum_i w_i$. O peso w_i deve ser tomado como o valor de Q, obtido pelo conjunto $y_i = 1$ e todos os outros $y_i = 0$. No caso particular de Q ser um quadrado médio, a $\sum_i w_i$ calculada desta maneira, será sempre igual à unidade.

O autor, para provar a regra proposta, supôs que:

$$Q = \sum_i \sum_j a_{ij}\, y_i y_j \; .$$

Substituindo $y_i = m_i + e_i$ e $y_j = m_j + e_j$, obteve:

$$Q = \sum_i \sum_j a_{ij}\, m_i m_j + 2 \sum_i \sum_j a_{ij}\, m_i e_j + \sum_i \sum_j a_{ij}\, e_i e_j \; ,$$

e aplicando a esta expressão a esperança matemática obteve:

$$E(Q) = E\left[\sum_i \sum_j a_{ij}\, m_i m_j \right] + \sum_i w_i\, \sigma_i^2$$

onde definiu $w_i = a_{i.} = \sum_j a_{ij}$.

Para o caso particular, de $\sigma_i^2 = \sigma_e^2$, então

$$E(Q) = E\left[\sum_i \sum_j a_{ij}\, m_i m_j\right] + \sigma_e^2 \sum_i w_i \ .$$

Como $\sum_i w_i = 1$, então ,

$$E(Q) = E\left[\sum_i \sum_j a_{ij}\, m_i m_j\right] + \sigma_e^2 \ .$$

A seguir, o autor ilustrou a aplicação da regra em um exemplo no delineamento inteiramente casualizado.

STEEL e TORRIE (1960) apresentaram uma decomposição do resíduo, para um experimento em blocos casualizados, estabelecendo um conjunto de contrastes ortogonais para tratamentos e calculando a seguir o valor de cada contraste dentro de cada um dos blocos. Afirmaram ainda, que se o modelo de blocos casualizados é válido, qualquer comparação dentro de cada bloco não é influenciada pelo nível geral do bloco. Como consequência, concluiram que a variância de qualquer comparação calculada entre blocos seria uma variância apropriada para testar os contrastes entre os totais de tratamentos. O processo é aplicado numericamente e os autores não apresentaram a sua dedução.

A soma de quadrados do resíduo pode ser dividida em seus componentes, da mesma forma que a soma de quadrados dos tratamentos. Segundo COCHRAN e COX (1971), tais subdivisões não são requeridas tão frequentemente como as dos tratamentos, mas têm aplicação, como por exemplo: quando existem razões que sugiram a existência da he terocedasticidade, isto é, os erros não têm todos a mesma variância σ^2, como é postulado no modelo matemático. Neste caso, a decomposição do resíduo é útil para melhor compreensão da natureza do quadrado médio residual e para a validade dos testes aplicados.

Os autores afirmaram ainda, com base nas equações normais, que em um experimento em blocos casualizados, com K observações por parcela, a função linear

$$Z = \sum_i \ell_{ijk} Y_{ijk}$$

é um componente do erro, se os coeficientes ℓ_{ijk} somarem zero em todas as observações que recebem algum tratamento específico, e também em todas as que estão em qualquer bloco específico. Isto ocorre devido ao fato de que os resíduos originados da estimativa dos erros devem somar zero em qualquer tratamento ou bloco.

Para qualquer Z que satisfaça às condições apresentadas, a contribuição para a soma de quadrados do resíduo é Z^2/D, onde

$$D = \sum_i \ell^2_{ijk} \quad .$$

A partir destas definições, os autores mostraram numericamente, através de um exemplo, a decomposição do resíduo e como pode ser feito o cálculo de um resíduo específico para cada contraste entre tratamentos.

Segundo BROW e FORSYTHE (1974.a), um problema comum na estatística é a aplicação de testes para verificar a igualdade de várias médias de amostras independentes. Entretanto, a aplicação do teste estatístico F na análise de variância para o delineamento inteiramente casualizado é sensível à perda da homocedasticidade.

Os autores supuseram x_{ij} a j-ésima observação do i-ésimo grupo (tratamento), onde $j = 1, 2, \ldots, n_i$ e $i = 1, 2, \ldots, g$. Os x_{ij} são variáveis, com distribuição normal e independentes, com médias μ_i e variâncias σ_i^2. Com estas considerações estudaram quatro estatísticas admitidas por eles como importantes para testar igualdade de médias de amostras independentes.

Uma delas é a estatística:

$$F^* = \frac{\sum_i n_i(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2}{\sum_i \left(1 - \frac{n_i}{N}\right) S_i^2} ,$$

sendo S_i^2 a variância amostral do i-ésimo grupo (tratamento), cujos valores críticos são obtidos da distribuição F com (g-1) e f graus de liberdade, onde f é implicitamente definido pela aproximação sugerida por SATTERTHWAITE (1941) como

$$\frac{1}{f} = \sum_i c_i^2/(n_i - 1)$$

e

$$c_i = (1 - n_i/N)S_i^2 / \left[\sum_i (1 - n_i/N)S_i^2\right] .$$

Este estudo foi realizado através de simulação de experimentos, admitindo-se as observações como variáveis distribuídas normalmente. A técnica utilizada foi a de BOX e MULLER (1958). Cada condição do experimento era especificada pelo tamanho das amostras (n_i), pela média populacional (μ_i) e pelas variâncias populacionais (σ_i^2), para os g grupos ($i = 1, 2, ..., g$).

As estatísticas estudadas foram calculadas e comparadas com os respectivos valores tabulados, nas porcentagens 90, 95 e 99. Cada condição foi repetida 10.000 vezes e o valor inicial utilizado para gerar o valor aleatório foi diferente para cada caso.

BROWN e FORSYTHE (1974.b) consideraram o modelo matemático

$$x_{ij} = \mu_i + e_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, ..., g \ \text{ e } \ j = 1, 2, ..., n_i \ ,$$

onde há g tratamentos repetidos n_i vezes e x_{ij} são variáveis aleatórias independentes e distribuídas normalmente com médias μ_i e variâncias σ_i^2, e

$$\bar{x}_{i.} = \frac{\sum_{j}^{n_i} x_{ij}}{n_i} \quad \text{e} \quad S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2 \quad .$$

Os autores consideraram ainda um conjunto de L ($L \leq g - 1$) contrastes ortonormais, tal que os coeficientes (d_{ik}) satisfizessem às seguintes condições:

a) $\sum_{i}^{g} d_{ik} = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, L$ (contraste);

b) $\sum_{i}^{g} \frac{d_{ik}^2}{n_i} = 1$ (normalizado);

c) $\sum_{i}^{g} \frac{d_{ik} \cdot d_{ik'}}{n_i} = 0 \quad ; \quad k \neq k'$ (ortogonal).

O valor do contraste k, então, foi obtido através de $\sum_i d_{ik} \bar{x}_{i.}$, e a sua soma de quadrados associada a um grau de liberdade foi obtida por $(\sum_i d_{ik} \bar{x}_{i.})^2$.

Afirmaram que o teste estatístico aplicado para testar conjuntamente os L contrastes era dado por

$$F_L^* = \sum_{k}^{L} (\sum_{i}^{g} d_{ik} \cdot \bar{x}_{i.})^2 \Big/ \sum_{i}^{g} \sum_{k}^{L} d_{ik}^2 \frac{S_i^2}{n_i} \quad ,$$

cujo denominador $\sum_i \sum_k d_{ik}^2 \frac{S_i^2}{n_i}$, os autores provaram ser equivalente ao denominador $\sum_{i}^{g} (1 - n_i/N) S_i^2$ citado anteriormente.

Os autores mostraram, ainda, que a estatística F_L^* tem distribuição aproximada da distribuição de F (Snedecor), com L e f graus de liberdade, onde f é definido pela expressão:

$$\frac{1}{f} = \sum_{i}^{g} \frac{1}{n_i - 1} \left[(\sum_{k}^{L} d_{ik}^2 \frac{S_i^2}{n_i})^2 \Big/ (\sum_{i}^{g} (\sum_{k}^{L} d_{ik}^2) \frac{S_i^2}{n_i})^2 \right] \quad ,$$

identificada como uma aproximação sugerida por SATTERTHWAITE (1941) .

HOFFMANN (1975) apresentou a decomposição da soma de quadrados de tratamentos, para o delineamento inteiramente casualizado, utilizando-se das transformações lineares ortogonais, e provou que a soma de quadrados é invariante numa transformação linear ortogonal. Apresentou, ainda, uma interpretação geométrica para a transformação.

FERREIRA (1978), para contornar o problema da falta de homogeneidade do erro experimental, estruturou a decomposição do resíduo em componentes aplicáveis e apropriados às comparações (contrastes) de interesse, empregando o método das transformações lineares ortogonais.

O autor examinou dois casos: o de um experimento isolado em blocos casualizados, e o de um conjunto de experimentos também em blocos casualizados.

Para cada experimento o modelo empregado foi:

$$y_{ij} = \mu + t_i + b_j + e_{ij} \quad .$$

Obteve os quadrados médios residuais específicos a cada contraste, conforme se segue:

$$QMR(Y_h) = \frac{1}{J - 1} \left[\frac{\sum_{j=1}^{J} \hat{Y}_{hj}^2}{\sum_{i=1}^{I} c_{hi}^2} - \frac{\hat{Y}_h^2}{J \sum_{i=1}^{I} c_{hi}^2} \right] ,$$

onde $\hat{Y}_{hj}$ representa a estimativa do contraste Y_h dentro do bloco j.

Para o caso da análise de um conjunto de experimentos em blocos casualizados, o modelo empregado foi:

$$y_{ijk} = \mu + t_i + b_{jk} + \ell_k + (t\ell)_{ik} + e_{ijk} \quad .$$

O resíduo considerado pelo autor neste caso foi a interação tratamentos x locais, conforme foi justificado através dos componentes de variância. Cada componente desta interação, correspondendo ao resíduo específico para testar um contraste Y_h , foi dado por:

$$QMR(Y_h) = \frac{1}{K-1}\left[\frac{\sum_{k=1}^{K} \hat{Y}_{hk}^2}{J\sum_{i}^{I} c_{hi}^2} - \frac{\hat{Y}_h^2}{JK\sum_{i=1}^{I} c_{hi}^2}\right] \quad ,$$

onde $\hat{Y}_{hk}$ é a estimativa do contraste Y_h no local K .

O autor concluiu que, constatada a presença da heterocedasticidade, o teste F para contrastes, estruturado através do resíduo específico, tende a apresentar resultados diferentes dos obtidos pelo uso do resíduo médio, e ainda, quando se faz a subdivisão do resíduo em componentes simples, ela se faz acompanhar de uma subdivisão dos graus de liberdade, o que levou o autor a recomendar cautela no uso deste método, devido à redução drástica do número de graus de liberdade associado a cada resíduo específico.

3. MATERIAL E MÉTODO

3.1. Material

Com o intuito de ilustração da metodologia desenvolvida neste trabalho, será utilizado como exemplo numérico uma parte dos dados observados de um experimento, instalado no delineamento inteiramente casualizado, cuja finalidade foi o estudo do aproveitamento do fósforo residual.

O experimento foi conduzido em vasos, em casa-de-vegetação, sendo o sorgo sacarino [*Sorghum bicolor* (L.) Moench] cultivar Brandes a cultura empregada. Foi adotado o delineamento inteiramente casualizado, e consideraram-se, dos 26 tratamentos utilizados apenas 8 tratamentos repetidos 4 vezes, conforme apresentados a seguir:

Tratamento Nº	Adubação	Dose de P (ppm)	Fonte de P	Colocação do Adubo Fosfatado
(1)	Testemunha	0		
(2)	N K S Mg + Micro	0		
3	N K S Mg + Micro	50	Superfostado triplo	Localizado
4	N K S Mg + Micro	100	Superfosfato triplo	Localizado
5	N K S Mg + Micro	200	Superfosfato triplo	Localizado
6	N K S Mg + Micro	50	Superfosfato triplo	Incorporado
7	N K S Mg + Micro	100	Superfosfato triplo	Incorporado
8	N K S Mg + Micro	200	Superfosfato triplo	Incorporado

Os dados a serem analisados referem-se à produção de matéria seca (g/vaso) do sorgo sacarino correspondente ao 1º cultivo e encontram-se na Tabela 1.

TABELA 1 : Produção de matéria seca (g/vaso) do sorgo sacarino.

Tratamentos	Repetições			
(1)	0,49	0,58	0,86	0,75
(2)	0,57	0,41	0,33	0,60
3	45,45	40,76	50,79	44,13
4	58,88	49,92	52,65	65,48
5	59,44	56,03	57,43	64,08
6	43,94	42,96	41,47	41,54
7	52,10	51,55	43,64	48,56
8	71,06	54,02	53,10	38,33

FONTE: LIMA (1981).

Na análise de variância serão considerados os seguintes contrastes e seus respectivos resíduos específicos:

Y(1) : testemunhas versus "incorporados" e "localizados",

Y(2) : entre testemunhas,

Y(3) : "localizados" versus "incorporados",

Y(4) e Y(5) : entre "localizados",

Y(6) e Y(7) : entre "incorporados".

3.2. Método

3.2.1. Procedimento preliminar de obtenção do resíduo específico para contraste entre tratamentos

Nos delineamentos em blocos casualizados, o resíduo específico para se testar um contraste $Y(h)$ é obtido segundo COCHRAN (1938) e FERREIRA (1978), dentre outros, através dos seguintes passos:

a) Estruturação do contraste $Y(h)$ dentro de cada bloco j, e obtenção de sua respectiva soma de quadrados, ou seja: $[SQ\ Y(h)]_j$;

b) Estruturação do contraste $\dot{Y}(h)$ com os totais de tratamentos, e obtenção da sua respectiva soma de quadrados, ou seja: $SQ\ Y(h)$;

c) Obtenção do resíduo específico propriamente dito, através da expressão:

$$SQR\ Y(h) = \sum_j [SQ\ Y(h)]_j - SQ\ Y(h) .$$

Entretanto, este procedimento torna-se inviável nos delineamentos inteiramente casualizados, em decorrência da impossibilidade de se identificar as observações associadas a cada repetição.

Para contornar o problema, procurou-se então, através de um exemplo numérico com 4 tratamentos e 3 repetições, obter todos os grupamentos possíveis dos dados na estrutura de blocos. Estes grupamentos foram obtidos permutando, em cada tratamento, as observações entre si. Desta forma, foi possível a obtenção de 216 casos distintos, onde em cada um deles se configurava a estrutura de um delineamento em blocos casualizados, com 4 tratamentos e 3 blocos.

A configuração básica do exemplo numérico, assim como o grupo de contrastes utilizado, são apresentados na Tabela 2.

TABELA 2: Configuração básica de um exemplo numérico utilizado para obtenção do resíduo específico de contraste.

Tratamentos	Repetições		
T_1	10	8	7
T_2	8	1	2
T_3	9	11	5
T_4	6	4	3

com a seguinte análise de variância:

Causas de Variação	GL	SQ	QM
Tratamentos	3	57,0000	19,0000
Resíduo	8	56,6667	7,0833
Total	11	113,6667	

Os contrastes utilizados no exemplo foram:

$$Y(1) = m_1 - m_2 , \quad Y(2) = m_3 - m_4 , \quad Y(3) = m_1 + m_2 - m_3 - m_4 .$$

Para cada caso considerado isoladamente, efetuou-se a decomposição da soma de quadrados de tratamentos, segundo os contrastes Y(1), Y(2) e Y(3) ortogonais entre si. Também foi efetuada a decomposição da soma de quadrados de resíduo nas somas de quadrados de resíduos específicos, conforme a metodologia apropriada para o caso de blocos casualizados.

O número possível de permutações para o caso foi obtida através da expressão $(P_J)^{(I-1)} = (J!)^{(I-1)}$, onde I é o número de tratamentos e J é o número de repetições, que para o caso em questão foi $(P_3)^{4-1} = (P_3)^3 = (3!)^3 = 216$.

Evidentemente, em se tratando de um delineamento inteiramente casualizado, a soma de quadrados de blocos deverá ser interpretada como uma soma de quadrados "entre repetições", e que constitui parte integrante do resíduo original.

Obtiveram-se, então, para o caso em questão, conforme já referido, 216 diferentes arranjos de dados. Para cada arranjo calcularam-se os valores das somas de quadrados do resíduo específico para o contraste Y(h) (identificada como SQR Y(h)) e de blocos, e a partir deles a sua média aritmética, identificando-a como um resíduo específico médio associado ao contraste Y(h).

Assim obteve-se:

a) A soma de quadrados do resíduo específico médio associado ao contraste Y(h),

$$\overline{SQR}\ Y(h) = \frac{1}{216} \sum_{\ell=1}^{216} [SQR\ Y(h)]_\ell \qquad ;$$

b) analogamente, a soma de quadrados "entre repetições" é obtida pela expressão:

$$\overline{SQR} \text{ "entre repetições"} = \frac{1}{216} \sum_{\ell=1}^{216} [SQ \text{ "entre repetições"}]_{\ell} .$$

Os valores obtidos para os contrastes, e as respectivas somas de quadrados, foram:

Contrastes	$\hat{Y}(h)$	SQ Y(h)
1	14	32,6667
2	12	24,0000
3	-2	0,3333

Para os 216 casos considerados foram obtidos os resultados apresentados no Apêndice 3 (Tabela 1). A partir deles determinaram-se:

h	GL	$\overline{SQR}$ Y(h)	$\overline{QMR}$ Y(h)
1	2	16,6666	8,3333
2	2	11,6667	5,8333
3	2	14,1666	7,0833

e ainda: $\overline{SQR}$ "entre repetições" = 14,1666 ; e

SQ Resíduo = 56,6667 , com 8 graus de liberdade.

Verifica-se no exemplo considerado, a propriedade já conhecida para os delineamentos em blocos casualizados completos:

$$QMR = \frac{\sum_{h=1}^{I-1} \overline{QMR}\ Y(h)}{I - 1} ,$$

o que nos leva a admitir a consistência do procedimento utilizado.

3.2.2. Decomposição da soma de quadrados de tratamentos

O procedimento para a decomposição da soma de quadrados de tratamentos, basear-se-á nos conceitos fundamentais sobre contrastes e formas quadráticas apresentados no Apêndice 1.

3.2.2.1. Componentes de variância associados aos contrastes entre tratamentos

Os componentes de variância para os contrastes entre tratamentos serão obtidos a partir do modelo:

$$y_{ij} = m + t_i + e_{ij} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, I) \quad \text{e} \quad (j = 1, 2, \ldots, J) ,$$

considerando-se:

a) O efeito t_i aleatório (Modelo tipo I), ou seja:

$t_i \cap N(0, \sigma_t^2)$, $E(t_i) = 0$, $E(t_i^2) = \sigma_t^2$ e

$E(t_i \cdot t_{i'}) = 0 \quad (i \neq i')$;

e $e_{ij} \cap N(0, \sigma_i^2)$, $E(e_{ij}) = 0$, $E(e_{ij}^2) = \sigma_i^2$ e

$E(e_{ij} \cdot e_{i'j}) = 0$,

e ainda, $E(e_{ij} \cdot t_i) = 0$, para qualquer i, j.

b) O efeito t_i fixo (Modelo tipo II), ou seja:

$E(t_i) = t_i$, $E(t_i^2) = t_i^2$ e $E(t_i \cdot t_{i'}) = 0 \quad (i \neq i')$

e $e_{ij} \cap N(0, \sigma_i^2)$, $E(e_{ij}) = 0$, $E(e_{ij}^2) = \sigma_i^2$ e

$E(e_{ij} \cdot e_{i'j}) = 0$,

e ainda, $E(e_{ij} \cdot t_i) = 0$, para qualquer i, j .

3.2.3. Decomposição da soma de quadrados do resíduo

Para a decomposição da soma de quadrados do resíduo utilizar-se-ão os conceitos fundamentais sobre contrastes e formas quadráticas apresentados no Apêndice 1.

3.2.3.1. Composição do resíduo específico para um contraste entre tratamentos

A composição do resíduo específico para o contraste Y(h) no delineamento inteiramente casualizado, basear-se-á nas observações verificadas no item 3.2.1., visando ao desenvolvimento de uma expressão que represente a $\overline{SQR}$ Y(h), quando o delineamento é o inteiramente casualizado. Para tanto serão aplicados os conceitos da esperança matemática à expressão da SQR Y(h), obtida por FERREIRA (1978), dentre outros, tendo por base o modelo:

$$y_{ij} = m + t_i + e_{ij} \quad , \quad (i = 1, \ldots, I \quad e \quad j = 1, 2, \ldots, J),$$

com as mesmas condições consideradas em 3.2.2.1.

3.2.3.2. Composição do resíduo específico para o componente "entre repetições"

Analogamente ao item 3.2.3.1 , será estruturado o resíduo específico para o componente "entre repetições", que juntamente com aqueles obtidos para os contrastes Y(h) é parte integrante do resíduo original.

3.2.4. Associação da distribuição do quociente QM $Y(h)/\overline{QMR}\ Y(h)$ com a distribuição de F

Uma vez determinados QM $Y(h)$ e $\overline{QMR}\ Y(h)$, resta verificar se o quociente QM $Y(h)/\overline{QMR}\ Y(h)$, tem distribuição aproximada de F, com 1 e f graus de liberdade, em que f é definido, segundo SATTERTHWAITE (1941), através da expressão:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{J-1}\left[\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{c_{hi}^2}{\sum_i c_{hi}^2}\hat{\sigma}_i^2\right)^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{I}\frac{c_{hi}^2}{\sum_i c_{hi}^2}\hat{\sigma}_i^2\right)^2\right]$$

onde: J é o número de repetições ;

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{J-1}\left[\sum_{j=1}^{J} y_{ij}^2 - \frac{y_{i.}^2}{J}\right] \quad ;$$

c_{hi} é o coeficiente do i-ésimo termo do contraste $Y(h)$.

O procedimento utilizado para a verificação é o que se segue:

a) Simulação de variáveis com distribuição normal e unidimensional, de acordo com GODOI (1978), baseado em BOX e MULLER (1958).

Considerando que U_1 e U_2 são variáveis uniformemente distribuídas em (0, 1), então,

$$z_1 = \sqrt{-2\log_e U_2}\ .\ \cos(2\pi\ U_1) \quad ,$$

tem distribuição normal com média 0 e variância 1, e

$$x_1 = m_1 + \sigma_1 z_1 \quad ,$$

se distribui normalmente com média m_1 e desvio padrão σ_1.

Na simulação de I tratamentos com J repetições foram consideradas as seguintes situações:

Situações	Nº de Tratamentos (I)	Nº de Repetições (J)	Desvio Padrão $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_I$	Média $m_1, \ldots, m_I$
1	3	4	2, 3, 4	10, 10, 10
2	3	6	2, 3, 4	10, 10, 10
3	3	8	2, 3, 4	10, 10, 10
4	3	10	2, 3, 4	10, 10, 10
5	3	15	2, 3, 4	10, 10, 10
6	3	4	2, 3, 6	10, 10, 10
7	3	6	2, 3, 6	10, 10, 10
8	3	8	2, 3, 6	10, 10, 10
9	3	10	2, 3, 6	10, 10, 10
10	3	15	2, 3, 6	10, 10, 10
11	3	4	1, 1, 1	10, 10, 10
12	3	8	1, 1, 1	10, 10, 10
13	3	10	1, 1, 1	10, 10, 10
14	4	4	1, 1, 1, 1	10, 10, 10, 10
15	4	6	1, 1, 1, 1	10, 10, 10, 10
16	4	8	1, 1, 1, 1	10, 10, 10, 10
17	4	10	1, 1, 1, 1	10, 10, 10, 10
18	4	4	2, 3, 6, 4	10, 10, 10, 10
19	4	6	2, 3, 6, 4	10, 10, 10, 10
20	4	8	2, 3, 6, 4	10, 10, 10, 10
21	4	10	2, 3, 6, 4	10, 10, 10, 10

Para cada situação foram simulados 1.000 experimentos.

A cada experimento foi aplicada a metodologia apresentada em 3.2.2 e 3.2.3, visando obter, para cada contraste ortogonal determinado, os valores do quociente QM $Y(h)/\overline{QMR}\ Y(h)$. Para efetuar os cálculos utilizou-se do programa 1 e dos sub-programas 1 e 2 que se encontram no Apêndice 2, processados em computador IBM 1130.

b) Construção de tabelas de distribuição de frequências para os valores do quociente QM $Y(h)/\overline{QMR}\ Y(h)$, onde as frequências esperadas utilizadas foram obtidas através das probabilidades da distribuição de F com 1 e f graus de liberdade. Neste caso o valor de f foi calculado através da expressão:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{J-1}\left[\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{c_{hi}^2}{\sum_{i=1}^{I} c_{hi}^2}\,\sigma_i^2\right)^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{I}\frac{c_{hi}^2\,\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{I} c_{hi}^2}\right)^2\right]$$

onde: J é o número de repetições;

σ_i^2 é a variância populacional utilizada na simulação das variáveis com distribuição normal unidimensional, correspondente ao i-ésimo tratamento (i = 1, 2, ..., I);

c_{hi} corresponde ao coeficiente do i-ésimo termo do contraste Y(h).

Os valores da função de distribuição de F(1, f), referenciados aos limites superiores das classes da distribuição de frequências, foram determinados através do programa da distribuição de F, que se encontra no Apêndice 2 (Programa 2).

c) Aplicação do teste de qui-quadrado, com o fim de verificar a aderência do quociente $QM\ Y(h)/\overline{QMR}\ Y(h)$ à distribuição de F(1, f).

Através da distribuição de qui-quadrado, obtiveram-se os níveis de significância (α), utilizando-se de programa apropriado, que se encontra no Apêndice 2 (Programa 3).

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1. Análise de Variância

Preliminarmente, apesar de devidamente conhecida, será abordada a estrutura da análise de variância a partir do modelo matemático do delineamento inteiramente casualizado, a fim de dar subsídios para o estudo que constitui o objetivo principal do presente trabalho.

Tomou-se o modelo:

$$y_{ij} = m + t_i + e_{ij} \; , \; (i = 1, 2, \ldots, I \;\; e \;\; j = 1, 2, \ldots, J)$$

onde: y_{ij} é o valor observado correspondente à j-ésima repetição do i-ésimo tratamento;

m é o efeito da média geral;

t_i é o efeito do i-ésimo tratamento;

e_{ij} é o erro atribuído à observação y_{ij}, com distribuição $N(0, I\sigma^2)$ e independentes.

Considerando o modelo linear na sua forma matricial $Y = X\beta + e$, obtém-se a seguinte expressão para o sistema de equações normais:

$$X'X\,\hat{\beta} = X'Y \quad ,$$

onde: X é a matriz conhecida dos coeficientes dos parâmetros de dimensões (IJ) x (I+1) e com $r(x) < I+1$;

$\hat{\beta}$ é o vetor das soluções de mínimos quadrados, para os efeitos dos parâmetros, de dimensões (I+1) x 1;

Y é um vetor de realizações de variáveis aleatórias, de dimensões (IJ) x 1.

O sistema de equações normais tem, por solução de mínimos quadrados:

$$\hat{\beta} = (X'X)^c\, X'Y \ ,$$

onde $(X'X)^c$ é uma inversa generalizada de $(X'X)$.

Desta forma, obtém-se:

a) SQ Total $= Y'I_{IJ}\,Y = Y'Y$

onde: I_{IJ} é uma matriz identidade de dimensões (IJ) x (IJ).

b) SQ Parâmetros $= \hat{\beta}'X'Y = Y'\,X(X'X)^c\,X'Y = Y'A\,Y$,

onde: a matriz A é simétrica e idempotente e $r(Y'A\,Y) = r(A) =$ $= tr(A) = I$.

c) SQ da Média $= Y'\left[\dfrac{1}{IJ}\,\mu\,\mu'\right]Y = Y'C\,Y$,

onde: μ é um vetor coluna de valores unitários, e a matriz C é uma matriz simétrica e idempotente com $r(Y'C\,Y) = r(C) =$ $= tr(C) = 1$.

d) SQ Tratamentos $= Y'A\,Y - Y'C\,Y = Y'(A-C)Y = Y'B\,Y$,

onde: a matriz B é simétrica e idempotente, com $r(Y'B\,Y) =$ $= r(B) = r(A - C) = r(A) - r(C) = I - 1$ e $r(B) = tr(B)$.

e) SQ Resíduo $= Y'Y - Y'A\,Y = Y'(I_{IJ} - A)Y = Y'D\,Y$,

onde: D é uma matriz simétrica e idempotente com $r(Y'D\,Y) = r(D) =$ $= r(I_{IJ} - A) = r(I_{IJ}) - r(A) = IJ - I = I(J-1)$ e $r(D) = tr(D)$.

As formas quadráticas obtidas $Y'A\,Y$, $Y'B\,Y$, $Y'C\,Y$ e $Y'D\,Y$, possuem distribuição de qui-quadrado com $r(A) = I$, $r(B) = I-1$, $r(C) = 1$ e $r(D) = I(J-1)$ graus de liberdade respectivamente, pois as matrizes A, B, C e D são idempotentes (para maiores esclarecimentos, vide Apêndice 1).

Para ilustrar a estrutura apresentada, admitiu-se o esquema que se segue, associado ao modelo

$$y_{ij} = m + t_i + e_{ij} \quad (i = 1, 2, 3, 4 \text{ e } j = 1, 2, 3)$$

Tratamentos	Repetições		
1	y_{11}	y_{12}	y_{13}
2	y_{21}	y_{22}	y_{23}
3	y_{31}	y_{32}	y_{33}
4	y_{41}	y_{42}	y_{43}

Sob forma matricial: $Y = X\beta + e$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \\ y_{41} \\ y_{42} \\ y_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{21} \\ e_{22} \\ e_{23} \\ e_{31} \\ e_{32} \\ e_{33} \\ e_{41} \\ e_{42} \\ e_{43} \end{bmatrix}$$

de onde,

$$\hat{\beta} = (X'X)^{c} X'Y .$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \\ y_{41} \\ y_{42} \\ y_{43} \end{bmatrix}$$

Tem-se então:

a) SQ Tratamentos= $Y'(A - C)Y = Y'B\,Y$,

onde: $A = X(X'X)^c X'$

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$C = \frac{1}{IJ}\mu\mu' = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então,

SQ Tratamentos= Y'B Y

$$= Y' \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} Y ,$$

com $B^2 = B$ e $r(B) = tr(B) = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 12 = 3$;

b) SQ Resíduo = $Y'(I_{IJ} - A)Y = Y'D\,Y =$

$$= Y' \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} Y ,$$

onde: $D^2 = D$ e $r(D) = tr(D) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 12 = 8$.

4.2. Decomposição da Soma de Quadrados de Tratamentos

Conforme já foi visto no item 4.1, a SQ Tratamentos = $Y'B\,Y$, onde a matriz B é obtida por

$$X(X'X)^c X' - \frac{1}{IJ}\mu\mu' = \frac{1}{IJ}((IJ)\,X(X'X)^c X' - \mu\mu') \quad ,$$

simétrica e idempotente, com posto $r(B) = tr(B) = I - 1$.

A soma de quadrados de tratamentos pode ser decomposta em grupos de $(I - 1)$ contrastes ortonormais, do tipo:

$$SQ\ Y(h) = Y'(G_h\ G'_h)\ Y = Y'B_h\ Y\ , \quad (h = 1, 2, \ldots, I - 1)\ ,$$

onde: G_h é um vetor coluna de dimensões $(IJ \times 1)$ constituido pelos coeficientes do contraste ortonormal h, obtidos através de:

$$g_{ijh} = \frac{c_{ijh}}{\sqrt{\sum_{i,j} c^2_{ijh}}}\ ,$$

onde: $$\sum_{i,j} c_{ijh} = 0 \quad e \quad \sum_{i,j} c_{ijh} \cdot c_{ijh'} = 0 \quad (h \neq h')\ ,$$

$$\sum_{i,j} g_{ijh} = 0 \quad e \quad \sum_{i,j} g_{ijh} \cdot g_{ijh'} = 0 \quad (h \neq h')$$

e $$\sum_{i,j} g^2_{ijh} = 1\ .$$

Para este caso foi considerado que todos os tratamentos são igualmente repetidos.

$B_h = G_h\ G'_h$ é uma matriz simétrica e idempotente com posto $r(B_h) = tr(B_h) = 1$.

A forma quadrática $Y'B_h\ Y$ tem distribuição de qui-quadrado com $r(B_h) = 1$. Assim pode-se escrever:

$$\text{SQ Tratamentos} = \text{SQ } Y(1) + \ldots + \text{SQ } Y(I-1) \quad ,$$

ou ainda

$$Y'B\,Y = Y'B_1Y + \ldots + Y'B_{I-1}\,Y$$

$$= Y'\left[B_1 + \ldots + B_{I-1}\right] Y \quad ,$$

onde: $B = B_1 + \ldots + B_{I-1}$ é uma matriz simétrica e idempotente com posto $r(B) = r(B_1) + \ldots + r(B_{I-1}) = 1 + \ldots + 1 = I-1$ e ainda $B_h \cdot B_{h'} = 0 \quad (h \neq h')$.

A título de ilustração, consideraram-se os seguintes contrastes ortogonais, associados ao exemplo ilustrativo de 4.1:

$$Y(1) = m_1 - m_2 \quad ,$$

$$Y(2) = m_3 - m_4 \quad ,$$

$$Y(3) = m_1 + m_2 - m_3 - m_4 \quad ,$$

e associados a eles:

$$\text{SQ } Y(1) = Y'B_1\,Y \quad ,$$

$$\text{SQ } Y(2) = Y'B_2\,Y \quad ,$$

$$\text{SQ } Y(3) = Y'B_3\,Y \quad ,$$

onde:

$$B_1 = G_1 \cdot G_1' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com as seguintes propriedades: $B_1^2 = B_1$ e $r(B_1) = tr(B_1) = 1$, e, consequentemente:

$$SQ\ Y(1) = Y'B_1\ Y$$

$$= Y'\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Y\ ,$$

verificando-se a expressão:

$$SQ\ Y(1) = \frac{[\hat{Y}(1)]^2}{J \sum_i c_{1i}^2}\ , \quad \text{com} \quad \hat{Y}(1) = T_1 - T_2\ ,$$

ou

$$SQ\ Y(1) = \frac{J\ (\sum_i c_{1i}^2\ \hat{m}_i)^2}{\sum_i c_{1i}^2}\ , \quad \text{com} \quad \hat{m}_i = \frac{T_i}{J}\ .$$

Analogamente:

$$B_2 = G_2 \cdot G_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} ,$$

com $B_2^2 = B_2$ e $r(B_2) = tr(B_2) = 1$.

$SQ\ Y(2) = Y'B_2\ Y$

$$= Y'\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} Y \ ,$$

$$SQ\ Y(2) = Y'B_2\ Y = \frac{[\hat{Y}(2)]^2}{J\ \sum\limits_i c_{2i}^2} \ , \quad \text{com} \quad \hat{Y}(2) = T_3 - T_4 \ ,$$

ou $$SQ\ Y(2) = \frac{J\ (\sum\limits_i c_{2i}\ \hat{m}_i)^2}{\sum\limits_i c_{2i}^2} \ , \quad \text{com} \quad \hat{m}_i = \frac{T_i}{J} \ ,$$

e ainda,

$$B_3 = G_3 G_3' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ -1/\sqrt{12} \\ -1/\sqrt{12} \\ -1/\sqrt{12} \\ -1/\sqrt{12} \\ -1/\sqrt{12} \\ -1/\sqrt{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & -1/\sqrt{12} & -1/\sqrt{12} & -1/\sqrt{12} & -1/\sqrt{12} & -1/\sqrt{12} & -1/\sqrt{12} \end{bmatrix}$$

$$B_3^2 = B_3 \quad e \quad r(B_3) = tr(B_3) = 1 \quad ,$$

$$SQ\ Y(3) = Y' B_3\ Y$$

$$= Y' \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} Y \ ,$$

$$SQ\ Y(3) = Y' B_3\ Y = \frac{\left[\hat{Y}(3)\right]^2}{J \sum_i c_{3i}^2} \quad , \quad \text{com} \quad \hat{Y}(3) = T_1 + T_2 - T_3 - T_4 \ ,$$

ou $$SQ\ Y(3) = \frac{J \left(\sum_i c_{3i}\ \hat{m}_i\right)^2}{\sum_i c_{3i}^2} \quad , \quad \text{com} \quad \hat{m}_i = \frac{T_i}{J} \quad .$$

Desta forma, tem-se:

$$SQ\ Trat. = Y'B\,Y = Y'B_1Y + Y'B_2Y + Y'B_3Y = Y'(B_1 + B_2 + B_3)Y$$

$$= Y'\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} Y\,,$$

verificando-se também as propriedades:

$(B_1 + B_2 + B_3)^2 = (B_1 + B_2 + B_3)$, isto é $B^2 = B$ e o posto

$r(B_1 + B_2 + B_3) = r(B_1) + r(B_2) + r(B_3) = 1 + 1 + 1 = 3$, isto é

$r(B) = tr(B) = 3$.

4.2.1. Componentes de variância associados aos contrastes entre tratamentos

Conforme visto em 4.2.

$$SQ\ Y(h) = Y'B_h\ Y = \frac{[\hat{Y}(h)]^2}{J \sum_i c_{hi}^2}$$

onde: $\hat{Y}(h) = \sum_i c_{hi}\ y_{i.}$, com $\sum_i c_{hi} = 0$ e $y_{i.} = \sum_j y_{ij}$.

Considerando-se o modelo

$$y_{ij} = m + t_i + e_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, I;\ j = 1, 2, \ldots, J) ,$$

e admitindo-se:

$$t_i \cap N(0, \sigma_t^2)\ ;\ E(t_i) = 0\ ;\ E(t_i^2) = \sigma_t^2 \ \text{ e } \ E(t_i\ t_{i'}) = 0 \quad (i \neq i')\ ;$$

e $\quad e_{ij} \cap N(0, \sigma_i^2)\ ;\ E(e_{ij}) = 0\ ;\ E(e_{ij}^2) = \sigma_i^2$ e $E(e_{ij}\ \ e_{i'j'}) = 0$

e ainda $E(e_{ij}\ \ t_i) = 0$, para qualquer i, j , estrutura-se:

$$E\ [SQ\ Y(h)] = \frac{1}{J \sum_i c_{hi}^2}\ E[\ [\hat{Y}(h)]^2] \qquad (1).$$

Para o contraste $\hat{Y}(h)$, tem-se:

$$\hat{Y}(h) = \sum_i c_{hi}\, y_{i.} = \sum_i c_{hi} \left[\sum_j (m + t_i + e_{ij}) \right]$$

$$= \sum_i c_{hi} \left[Jm + Jt_i + \sum_j e_{ij} \right]$$

$$= Jm \sum_i c_{hi} + J \sum_i c_{hi}\, t_i + \sum_i c_{hi} \left(\sum_j e_{ij}\right)$$

$$= J \sum_i c_{hi}\, t_i + \sum_i c_{hi}\, e_{i.} \quad .$$

Assim,

$$\left[\hat{Y}(h)\right]^2 = J^2 \left(\sum_i c_{hi}\, t_i\right)^2 + \left(\sum_i c_{hi}\, e_{i.}\right)^2 + 2J \left(\sum_i c_{hi}\, t_i\right)\left(\sum_i c_{hi}\, e_{i.}\right) \quad (2)$$

onde: $$\left(\sum_i c_{hi}\, t_i\right)^2 = \sum_i c_{hi}^2\, t_i^2 + 2 \sum_{i<i'} c_{hi}\, c_{hi'}\, t_i\, t_{i'} \quad ,$$

$$\left(\sum_i c_{hi}\, e_{i.}\right)^2 = \sum_i c_{hi}^2\, e_{i.}^2 + 2 \sum_{i<i'} c_{hi}\, c_{hi'}\, e_{i.}\, e_{i'.} \quad .$$

Substituindo-se em (2), tem-se:

$$\left[\hat{Y}(h)\right]^2 = J^2 \sum_i c_{hi}^2\, t_i^2 + 2J^2 \sum_{i<i'} c_{hi}\, c_{hi'}\, t_i\, t_{i'} + \sum_i c_{hi}^2\, e_{i.}^2 + $$

$$+ 2 \sum_{i<i'} c_{hi}\, c_{hi'}\, e_{i.} e_{i'.} + 2J \sum_i c_{hi}^2\, t_i\, e_{i.} \quad .$$

Logo

$$E\left[\left[\hat{Y}(h)\right]^2\right] = J^2 \sum_i c_{hi}^2\, E(t_i^2) + 2J^2 \sum_{i<i'} c_{hi}\, c_{hi'} E(t_i\ t_{i'}) +$$

$$+ \sum_i c_{hi}^2\, E(e_{i.}^2) +$$

$$+ 2 \sum_{i<i'} c_{hi}\, c_{hi'}\, E(e_{i.}\ e_{i'.}) +$$

$$+ 2J \sum_i c_{hi}^2\, E(t_i\ e_{i.})$$

$$= J^2\, \sigma_t^2 \sum_i c_{hi}^2 + J \sum_i c_{hi}^2\, \sigma_i^2 \quad .$$

Substituindo-se em (1), tem-se:

$$E\left[SQ\ Y(h)\right] = \frac{1}{J \sum_i c_{hi}^2} \left[J^2\, \sigma_t^2 \sum_i c_{hi}^2 + J \sum_i c_{hi}^2\, \sigma_i^2\right]$$

$$= J\, \sigma_t^2 + \frac{1}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\, \sigma_i^2 \quad .$$

Se $\sigma_i^2 = \sigma^2$, resultará:

$$E\left[SQ\ Y(h)\right] = J\, \sigma_t^2 + \sigma^2 \quad .$$

Considerando-se os (I-1) contrastes, tem-se:

$$\text{SQTratamentos} = \sum_{h=1}^{I-1} \text{SQ } Y(h) \quad ,$$

e
$$E[\text{SQTratamentos}] = \sum_{h=1}^{I-1} E[\text{SQ } Y(h)]$$

$$= \sum_{h=1}^{I-1} \left[J\,\sigma_t^2 + \frac{1}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\,\sigma_i^2 \right]$$

$$= (I-1)\,J\,\sigma_t^2 + \sum_{h=1}^{I-1} \frac{\sum_i c_{hi}^2\,\sigma_i^2}{\sum_i c_{hi}^2} \quad ,$$

e ainda,

$$E[\text{QMTratamentos}] = \frac{1}{I-1}\,E[\text{SQTratamentos}]$$

$$= J\,\sigma_t^2 + \frac{1}{I-1} \sum_{h=1}^{I-1} \frac{\sum_i c_{hi}^2\,\sigma_i^2}{\sum_i c_{hi}^2} \quad .$$

Para o caso de se ter: $\sigma_i^2 = \sigma^2$, resultará:

$$E[\text{QMTratamentos}] = J\,\sigma_t^2 + \frac{1}{I-1}\,(I-1)\sigma^2$$

$$= J\,\sigma_t^2 + \sigma^2 \quad .$$

Considerando-se o modelo $y_{ij} = m + t_i + e_{ij}$, com o efeito de tratamentos (t_i) fixo, obtém-se analogamente ao procedimento anterior:

$$E[SQ\ Y(h)] = \frac{J}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2 t_i^2 + \frac{1}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2 \sigma_i^2 .$$

E no caso de $\sigma_i^2 = \sigma^2$, resulta:

$$E[SQ\ Y(h)] = \frac{J}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2 t_i^2 + \sigma^2 .$$

Logo,

$$E[SQTratamentos] = \sum_{h=1}^{I-1} E[SQ\ Y(h)]$$

$$= J \sum_{h=1}^{I-1} \frac{\sum_i c_{hi}^2 t_i^2}{\sum_i c_{hi}^2} + \sum_{h=1}^{I-1} \frac{\sum_i c_{hi}^2 \sigma_i^2}{\sum_i c_{hi}^2} ,$$

e, evidentemente,

$$E[QMTratamentos] = \frac{1}{I-1} E[SQTratamentos].$$

No caso de $\sigma_i^2 = \sigma^2$, será:

$$E[QMTratamentos] = \frac{J}{I-1} \sum_{h=1}^{I-1} \frac{\sum_i c_{hi}^2 t_i^2}{\sum_i c_{hi}^2} + \sigma^2 .$$

4.3. Decomposição da Soma de Quadrados do Resíduo

Conforme visto em 4.1, a soma de quadrados de resíduo é obtida através da forma quadrática $Y'\left[I_{IJ} - A\right]Y = Y'D\,Y$, com posto $r\left[Y'D\,Y\right] = r(D) = I(J-1)$.

A matriz $D = \left[I_{IJ} - A\right]$ é obtida por:

$$D = I_{IJ} - A = I_{IJ} - X(X'X)^{c}X' \quad ,$$

que é uma matriz simétrica e idempotente.

O número de graus de liberdade do resíduo associado ao modelo de um delineamento inteiramente casualizado, pode ser decomposto em I grupos de (J-1) contrastes ortonormais da forma $Y'H_{hk}Y$ ou $Y'R_kY$, objeto de estudo em 4.3.1., cujas formas quadráticas são independentes e possuem distribuição de qui-quadrado com $r(H_{hk}) = 1$ e $r(R_k) = 1$, respectivamente.

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} SQResíduo &= Y'\left[I_{IJ} - A\right]Y \\ &= Y'D\,Y \\ &= Y'\left[\sum_{h=1}^{I-1}\sum_{k=1}^{J-1} H_{hk} + \sum_{k=1}^{J-1} R_k\right]Y \end{aligned}$$

$$\text{SQ Resíduo} = Y'H_{11}Y + .. + Y'H_{1(J-1)}Y + Y'H_{21}Y + \ldots +$$

$$+ Y'H_{2(J-1)}Y + \ldots + Y'H_{(I-1)1}Y + \ldots +$$

$$+ Y'H_{(I-1)(J-1)}Y + Y'R_1Y + \ldots + Y'R_{(J-1)}Y \quad ,$$

e, consequentemente,

$$r(D) = \sum_{h,k} r(H_{hk}) + \sum_{k} r(R_k) = I(J-1) \quad ,$$

pois as matrizes H_{hk} e R_k são simétricas e idempotentes, com

$$r(H_{hk}) = tr(H_{hk}) = 1 \quad e \quad r(R_k) = tr(R_k) = 1 \; .$$

Decorrente disto, a forma quadrática $Y'D\,Y$ tem distribuição de qui-quadrado com $I(J-1)$ graus de liberdade.

4.3.1. Obtenção das matrizes H_{hk} e R_k

As matrizes H_{hk} e R_k, associadas à decomposição do resíduo, podem ser obtidas admitindo-se as repetições como blocos, conforme COCHRAN e COX (1971).

Segundo estes autores, um contraste é considerado como um componente do erro, se a soma de seus coeficientes for zero em todos os blocos e em todos os tratamentos. Se esta condição for satisfeita, tem-se que o contraste obtido mostra como a diferença entre tra tamentos muda de um bloco (repetição) para outro. Esta é uma medida do efeito dos blocos (repetições) sobre a diferença dos tratamentos, e que genericamente denomina-se de uma interação dos tratamentos com os blocos (repetições). Estas interações são os componentes típicos do erro.

Assim, a soma de quadrados do resíduo pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} SQResíduo = {} & SQR[Y(1)xZ(1)] + SQR[Y(1)xZ(2)] + \ldots + \\ & + SQR[Y(1)xZ(J-1)] + \ldots + SQR[Y(I-1)xZ(1)] + \ldots + \\ & + SQR[Y(I-1)xZ(J-1)] + SQR[Z(1)] + \ldots + \\ & + SQR[Z(J-1)] \quad , \end{aligned}$$

onde: $Y(h)$ representa um contraste entre tratamentos, isto é

$$Y(h) = \sum_{i}^{I} c_{hi} T_i \quad , \quad T_i = \sum_{j} y_{ij} \quad e$$

$Z(k)$ representa um contraste "entre repetições", isto é

$$Z(k) = \sum_{j}^{J} a_{kj} R_j \quad , \quad R_j = \sum_{i} y_{ij} \quad .$$

Define-se W_{hk} como um vetor coluna de dimensões $(IJx1)$, constituído pelos coeficientes do contraste ortonormal da interação de $Y(h)$ com $Z(k)$, obtido através de

$$w_{hikj} = \frac{\alpha_{hikj}}{\sqrt{\sum_{i,j} \alpha^2_{hikj}}} \quad , \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, I \ , \\ j = 1, 2, \ldots, J \ , \\ \quad = 1, 2, \ldots, (I-1) \ , \\ \quad = 1, 2, \ldots, (J-1) \ , \end{array}$$

satisfazendo as condições:

$$\sum_{i,j} \alpha_{hikj} = 0 \quad , \quad \sum_{i,j} \alpha_{hikj} \cdot \alpha_{hik'j} = 0 \quad (k \neq k')$$

e

$$\sum_{i,j} \alpha_{hikj} \cdot \alpha_{h'ikj} = 0 \quad (h \neq h') \quad ;$$

e ainda,

$$\sum_{i,j} w_{hikj} = 0 \quad , \quad \sum_{i,j} w^2_{hikj} = 1 \quad ;$$

$$\sum_{i,j} w_{hikj} \cdot w_{h'ikj} = 0 \quad (h \neq h')$$

e

$$\sum_{i,j} w_{hikj} \cdot w_{hik'j} = 0 \quad (k \neq k') \quad .$$

O valor de cada coeficiente α_{hikj} é obtido através da expressão:

$$\alpha_{hikj} = c_{hi} \cdot a_{kj}$$

A estrutura para obtenção dos valores dos coeficientes α_{hikj} é dada na Tabela 3.

TABELA 3: Estrutura dos valores dos coeficientes

Tratamentos	Coeficientes dos contrastes entre tratamentos			Coeficientes dos Contrastes "entre repetições"	Repetição 1
	$Y(1)$	...	$Y(I-1)$	$Z(1)$ ... $Z(J-1)$	a_{11} ... $a_{(J-1)1}$
T_1	c_{11}	...	$c_{(I-1)1}$		$(\alpha_{1111}, \ldots, \alpha_{(I-1)111}, \ldots, \alpha_{11(J-1)1}, \ldots \alpha_{(I-1)1(J-1)1})$
T_2	c_{12}	...	$c_{(I-1)2}$		$(\alpha_{1211}, \ldots, \alpha_{(I-1)211}, \ldots, \alpha_{12(J-1)1}, \ldots \alpha_{(I-1)2(J-1)1})$
...	...	...	...		...
T_I	c_{1I}	...	$c_{(I-1)I}$		$(\alpha_{1I11}, \ldots, \alpha_{(I-1)I11}, \ldots, \alpha_{1I(J-1)1}, \ldots \alpha_{(I-1)I(J-1)1})$

TABELA 3: Continuação.

REPETIÇÕES 2	...	J
a_{12} ... $a_{(J-1)2}$	...	a_{1J} ... $a_{(J-1)J}$
$(\alpha_{1112}, \ldots, \alpha_{(I-1)112}, \ldots, \alpha_{11(J-1)2}, \ldots, \alpha_{(I-1)1(J-1)2})$	...	$(\alpha_{111J}, \ldots, \alpha_{(I-1)11J}, \ldots, \alpha_{11(J-1)J}, \ldots, \alpha_{(I-1)1(J-1)J})$
$(\alpha_{1212}, \ldots, \alpha_{(I-1)212}, \ldots, \alpha_{12(J-1)2}, \ldots, \alpha_{(I-1)2(J-1)2})$	...	$(\alpha_{121J}, \ldots, \alpha_{(I-1)21J}, \ldots, \alpha_{12(J-1)J}, \ldots, \alpha_{(I-1)2(J-1)J})$
...	...	...
$(\alpha_{1I12}, \ldots, \alpha_{(I-1)I12}, \ldots, \alpha_{1I(J-1)2}, \ldots, \alpha_{(I-1)I(J-1)2})$	...	$(\alpha_{1I1J}, \ldots, \alpha_{(I-1)I1J}, \ldots, \alpha_{1I(J-1)J}, \ldots, \alpha_{(I-1)I(J-1)J})$

Consequentemente, a interação Y(h) com Z(k) será estruturada da seguinte maneira:

$$Y(h) \times Z(k) \Rightarrow \left[\alpha_{h1k1}, \alpha_{h1k2}, \ldots, \alpha_{h1kJ}, \alpha_{h2k1}, \alpha_{h2k2}, \ldots, \right.$$

$$\left. \alpha_{h2kJ}, \ldots, \alpha_{hIk1}, \alpha_{hIk2}, \ldots, \alpha_{hIkJ}\right] .$$

Assim, tem-se:

$$SQR\left[Y(h) \times Z(k)\right] = Y'\left[W_{hk} \cdot W'_{hk}\right] Y = Y'H_{hk} Y .$$

Analogamente,

$$SQR\ Z(k) = Y'\left[Q_k\ Q'_k\right] Y = Y'\ R_k\ Y \quad ,$$

onde: Q_k é um vetor coluna, de dimensões (IJx1), constituído pelos coeficientes do k-ésimo contraste ortonormal "entre repetições", obtido através de:

$$q_{ijk} = \frac{c_{ijk}}{\sqrt{\sum_{i,j} c^2_{ijk}}} \quad ,$$

satisfazendo às condições:

$$\sum_{i,j} c_{ijk} = 0 \quad , \quad \sum_{i,j} c_{ijk} \cdot c_{ijk'} = 0 \quad (k \neq k')$$

e ainda:
$$\sum_{i,j} q_{ijk} = 0 \quad , \quad \sum_{i,j} q_{ijk}^2 = 1 \quad \text{e}$$

$$\sum_{i,j} q_{ijk} \cdot q_{ijk'} = 0 \quad (k \neq k') \quad .$$

4.3.2. Obtenção da soma de quadrados do resíduo para um contraste entre tratamentos.

A soma de quadrados do resíduo para o contraste Y(h), pode ser obtida conforme se segue:

$$\text{SQR } Y(h) = \sum_{k=1}^{J-1} \left[\text{SQR } Y(h) \times Z(k)\right]$$

$$= \text{SQR}\left[Y(h) \times Z(1)\right] + \ldots + \text{SQR}\left[Y(h) \times Z(J-1)\right]$$

$$= Y'H_{h1}Y + \ldots + Y'H_{h(J-1)}Y$$

$$= Y'\left[H_{h1} + \ldots + H_{h(J-1)}\right] Y \ .$$

Uma vez que, conforme já visto, as matrizes H_{hk} são independentes, idempotentes e simétricas, em consequência, a matriz $\left[H_{h1} + \dots + H_{h(J-1)}\right]$ é simétrica e idempotente, e

$$r\left[H_{h1} + \dots + H_{h(J-1)}\right] = r(H_{h1}) + \dots + r(H_{h(J-1)})$$

$$= tr(H_h) + \dots + tr(H_{h(J-1)}) = J - 1 \quad ,$$

e a forma quadrática $Y'\left[H_{h1} + \dots + H_{h(J-1)}\right]Y$ tem distribuição de qui-quadrado com (J-1) graus de liberdade, e se identifica com a expressão desenvolvida por FERREIRA (1978), ou seja:

$$SQR\ Y(h) = \frac{1}{\sum\limits_i c_{hi}^2} \left[\sum_j \hat{Y}_{hj}^2 - \frac{\left[\hat{Y}(h)\right]^2}{J} \right] \quad ,$$

onde: $\hat{Y}_{hj}$ é a estimativa do contraste Y_{hj}, que corresponde à aplicação do contraste Y(h) dentro da "repetição" j , isto é ,

$\hat{Y}_{hj} = c_{h1}\, y_{1j} + c_{h2}\, y_{2j} + \dots + c_{hI}\, y_{Ij}$,

e $\hat{Y}(h) = \sum\limits_j \hat{Y}_{hj} = \sum\limits_j (\sum\limits_i^I c_{hi}\, y_{ij})$, é o valor do h-ésimo contraste entre os totais dos I tratamentos.

4.3.3. Obtenção da soma de quadrados do resíduo para o componente "entre repetições"

A soma de quadrados do resíduo para o componente "entre repetições" pode ser obtida conforme se segue:

$$\text{SQR(entre repetições)} = \sum_{k=1}^{J-1} \text{SQR } Z(k)$$

$$= \text{SQR } Z(1) + \dots + \text{SQR } Z(J-1)$$

$$= Y'R_1 Y + \dots + Y'R_{(j-1)}Y$$

$$= Y'\left[R_1 + \dots + R_{(J-1)}\right] Y \quad ,$$

levando-se em conta que as matrizes R_k são simétricas, idempotentes e independentes, tem-se que a matriz $\left[R_1 + \dots + R_{(J-1)}\right]$ é simétrica e idempotente, e

$$r\left[R_1 + \dots + R_{(J-1)}\right] = r(R_1) + \dots + r(R_{(J-1)})$$

$$= tr(R_1) + \dots + tr(R_{(J-1)}) = J-1 \quad ,$$

consequentemente, a forma quadrática $Y'\left[R_1 + \dots + R_{(J-1)}\right] Y$, tem distribuição de qui-quadrado com (J-1) graus de liberdade, e se identifica com a expressão:

$$SQR(\text{entre repetições}) = \sum_{k=1}^{J-1} SQR\ Z(k)$$

$$= \sum_{k}^{J-1} \frac{[\hat{Z}(k)]^2}{I \sum_j a_{kj}^2} = \sum_{k}^{J-1} \frac{(\sum_j a_{kj}\ y_{.j})^2}{I \sum_j a_{kj}^2} ,$$

estando associada à soma de quadrados de blocos.

4.3.4. Um exemplo da decomposição da soma de quadrados do resíduo

Considerando o exemplo ilustrativo do item 4.1, ou seja:

Trata- mentos	"Repetições" 1	2	3
T_1	y_{11}	y_{12}	y_{13}
T_2	y_{21}	y_{22}	y_{23}
T_3	y_{31}	y_{32}	y_{33}
T_4	y_{41}	y_{42}	y_{43}

$$i = 1, 2, 3, 4 \ ; \quad j = 1, 2, 3 ,$$

e tomando-se os seguintes contrastes:

$$Y(1) = m_1 - m_2 \qquad ,$$

$$Y(2) = \qquad m_3 - m_4 \quad ,$$

$$Y(3) = m_1 + m_2 - m_3 - m_4 \quad ,$$

$$Z(1) = r_1 - r_2 \qquad ,$$

$$Z(2) = r_1 + r_2 - 2r_3 \quad ,$$

de acordo com a metodologia apresentada anteriormente é possível a estruturação do seguinte quadro:

Tratamentos	Coeficientes dos contrastes entre tratamentos: Y(1)	Y(2)	Y(3)	Coeficientes dos contrastes "entre repetições"	"Repetições": 1	2	3
				Z(1)	1	-1	0
				Z(2)	1	1	-2
T_1	1	0	1		(1, 1, 0, 0, 1, 1)	(-1, 1, 0, 0, -1, 1)	(0, -2, 0, 0, 0, -2)
T_2	-1	0	1		(-1, -1, 0, 0, 1, 1)	(1, -1, 0, 0, -1, 1)	(0, 2, 0, 0, 0, -2)
T_3	0	1	-1		(0, 0, 1, 1, -1, -1)	(0, 0, -1, 1, 1, -1)	(0, 0, 0, -2, 0, 2)
T_4	0	-1	-1		(0, 0, -1, -1, -1, -1)	(0, 0, 1, -1, 1, -1)	(0, 0, 0, 2, 0, 2)

Tem-se, então, os seguintes coeficientes para as interações Y(h) x Z(k) e para os contrastes Z(k):

$$Y(1)xZ(1) \Rightarrow [1\quad -1\quad 0\quad -1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0] ,$$

$$Y(1)xZ(2) \Rightarrow [1\quad 1\quad -2\quad -1\quad -1\quad 2\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0] ,$$

$$Y(2)xZ(1) \Rightarrow [0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad -1\quad 0\quad -1\quad 1\quad 0] ,$$

$$Y(2)xZ(2) \Rightarrow [0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad -2\quad -1\quad -1\quad 2] ,$$

$$Y(3)xZ(1) \Rightarrow [1\quad -1\quad 0\quad 1\quad -1\quad 0\quad -1\quad 1\quad 0\quad -1\quad 1\quad 0] ,$$

$$Y(3)xZ(2) \Rightarrow [1\quad 1\quad -2\quad 1\quad 1\quad -2\quad -1\quad -1\quad 2\quad -1\quad -1\quad 2] ,$$

$$Z(1) \Rightarrow [1\quad -1\quad 0\quad 1\quad -1\quad 0\quad 1\quad -1\quad 0\quad 1\quad -1\quad 0] ,$$

$$Z(2) \Rightarrow [1\quad 1\quad -2\quad 1\quad 1\quad -2\quad 1\quad 1\quad -2\quad 1\quad 1\quad -2] ,$$

ou ainda:

$$W'_{11} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{4} & -1/\sqrt{4} & 0 & -1/\sqrt{4} & 1/\sqrt{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W'_{12} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & -2/\sqrt{12} & -1/\sqrt{12} & -1/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W'_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{4} & -1/\sqrt{4} & 0 & -1/\sqrt{4} & 1/\sqrt{4} & 0 \end{bmatrix},$$

$$W'_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & -2/\sqrt{12} & -1/\sqrt{12} & -1/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} \end{bmatrix},$$

$$W'_{31} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & 0 & 1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & 0 & -1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 0 & -1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 0 \end{bmatrix},$$

$$W'_{32} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{24} & 1/\sqrt{24} & -2/\sqrt{24} & 1/\sqrt{24} & 1/\sqrt{24} & -2/\sqrt{24} & -1/\sqrt{24} & -1/\sqrt{24} & 2/\sqrt{24} & -1/\sqrt{24} & -1/\sqrt{24} & 2/\sqrt{24} \end{bmatrix},$$

$$Q'_{1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & 0 & 1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & 0 & 1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & 0 & 1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q'_{2} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{24} & 1/\sqrt{24} & -2/\sqrt{24} & 1/\sqrt{24} & 1/\sqrt{24} & -2/\sqrt{24} & 1/\sqrt{24} & 1/\sqrt{24} & -2/\sqrt{24} & 1/\sqrt{24} & 1/\sqrt{24} & -2/\sqrt{24} \end{bmatrix},$$

Consequentemente,

$$SQR\ Y(1) = Y'H_{11}Y + Y'H_{12}Y = Y'\left[H_{11} + H_{12}\right]Y$$

$$= Y'\left[W_{11}W'_{11} + W_{12}W'_{12}\right]Y$$

$$= Y'\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & -4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 2 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Y,$$

verifica-se que $\left[W_{11}W'_{11} + W_{12}W'_{12}\right]$ é uma matriz simétrica e idempotente e

$$r\left[W_{11}W'_{11} + W_{12}W'_{12}\right] = tr\left[W_{11}W'_{11} + W_{12}W'_{12}\right] =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 24 = 2 \ .$$

Analogamente,

$$SQR\ Y(2) = Y'H_{21}Y + Y'H_{22}Y = Y'\left[H_{21} + H_{22}\right]Y$$

$$= Y'\left[W_{21}W'_{21} + W_{22}W'_{22}\right] Y$$

$$= Y'\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&4&-2&-2&-4&2&2\\ 0&0&0&0&0&0&-2&4&-2&2&-4&2\\ 0&0&0&0&0&0&-2&-2&4&2&2&-4\\ 0&0&0&0&0&0&-4&2&2&4&-2&-2\\ 0&0&0&0&0&0&2&-4&2&-2&4&-2\\ 0&0&0&0&0&0&2&2&-4&-2&-2&4 \end{bmatrix} Y\ ,$$

tem-se que $\left[W_{21}W'_{21} + W_{22}W'_{22}\right]$ é uma matriz simétrica e idempotente e

$$r\left[W_{21}W'_{21} + W_{22}W'_{22}\right] = tr\left[W_{21}W'_{21} + W_{22}W'_{22}\right] = \frac{1}{12}\ .\ 24 = 2\ .$$

Finalmente,

$$SQR\ Y(3) = Y'H_{31}Y + Y'H_{32}Y = Y'\left[H_{31} + H_{32}\right] Y$$

$$= Y'\left[W_{31}W'_{31} + W_{32}W'_{32}\right] Y$$

$$= Y'\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & -4 & 2 & 2 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & 2 & -4 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & 2 & 2 & -4 & 2 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & -4 & 2 & 2 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & 2 & -4 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & 2 & 2 & -4 & 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 2 & -4 & 2 & 2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 2 & -4 & 2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & 2 & 2 & -4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 2 & -4 & 2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & 2 & 2 & -4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} Y\ ,$$

onde $\left[W_{31}W'_{31} + W_{32}W'_{32}\right]$ é uma matriz simétrica e idempotente e

$$r\left[W_{31}W'_{31} + W_{32}W'_{32}\right] = tr\left[W_{31}W'_{31} + W_{32}W'_{32}\right] = \frac{1}{24} \cdot 4 \cdot 12 = 2\ .$$

Analogamente aos contrastes $Y(1)$, $Y(2)$ e $Y(3)$, obtêm-se:

$$SQR(\text{entre repetições}) = Y'R_1Y + Y'R_2Y = Y'\left[R_1 + R_2\right] Y$$

$$= Y'\left[Q_1Q_1' + Q_2Q_2'\right] Y =$$

$$= Y' \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} Y \ ,$$

e verifica-se que $\left[Q_1Q_1' + Q_2Q_2'\right]$ é uma matriz simétrica e idempotente e

$$r\left[Q_1Q_1' + Q_2Q_2'\right] = tr\left[Q_1Q_1' + Q_2Q_2'\right] = \frac{1}{24} \cdot 4 \cdot 12 = 2 \ ,$$

e também a expressão $SQR(\text{entre repetições}) = \sum_{k=1}^{J-1} \frac{\left[\hat{Z}(k)\right]^2}{I \sum_j a_{kj}^2}$.

Logo,

SQResíduo = SQR Y(1) + SQR Y(2) + SQR Y(3) + SQR (entre repetições)

$$SQResíduo = Y'\left[H_{11} + H_{12} + H_{21} + H_{22} + H_{31} + H_{32} + R_1 + R_2\right] Y$$

$$SQResíduo = Y'\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} Y \quad ,$$

$$SQResíduo = Y'(I_{IJ} - A)Y = Y'D\,Y \quad ,$$

com $r(D) = r(H_{11} + H_{12} + H_{21} + H_{22} + H_{31} + H_{32} + R_1 + R_2)$

$$= \frac{1}{3}\, 12 \, . \, 2 = 4(3 - 1) = 8 \quad .$$

Como pode-se observar o resultado obtido é o mesmo do exemplo ilustrativo em 4.1, o que leva a concluir que a soma de quadrados do resíduo para o delineamento inteiramente casualizado pode ser decomposta em componentes correspondentes aos contrastes ortogonais entre tratamentos e mais um componente associado às repetições.

4.3.5. Composição do resíduo específico para um contraste entre tratamentos

Conforme já visto, FERREIRA (1978), dentre outros, estruturou o resíduo específico para um contraste $Y(h)$ no delineamento em blocos casualizados, obtendo a expressão que se segue:

$$\text{SQR } Y(h) = \frac{1}{\sum\limits_i c_{hi}^2} \left[\sum_j \hat{Y}_{hj}^2 - \frac{\hat{Y}^2(h)}{J} \right] .$$

De conformidade com 3.2.3.1, para o modelo tipo I, tem-se:

$$E\left[\text{SQR } Y(h)\right] = E\left\{ \frac{1}{\sum\limits_i c_{hi}^2} \left[\sum_j \hat{Y}_{hj}^2 - \frac{\hat{Y}^2(h)}{J} \right] \right\} ,$$

onde:

$$\hat{Y}_{hj} = \sum_i c_{hi}\, y_{ij} \quad ,$$

$$\hat{Y}(h) = \sum_j \left(\sum_i c_{hi}\, y_{ij}\right) = \sum_i c_{hi} \left(\sum_j y_{ij}\right) = \sum_i c_{hi}\, y_{i.} \quad .$$

Então,

$$E\left[SQR\ Y(h)\right] = \frac{1}{\sum_i c_{hi}^2}\ E\left[\sum_j \hat{Y}_{hj}^2 - \frac{\hat{Y}^2(h)}{J}\right]$$

$$= \frac{1}{\sum_i c_{hi}^2}\left[E\left[\sum_j \hat{Y}_{hj}^2\right] - \frac{1}{J}\ E\left[\hat{Y}^2(h)\right]\right] .$$

Considerando-se cada termo isoladamente, tem-se:

I) $E\left[\sum_j \hat{Y}_{hj}^2\right] = E\left[\sum_j \left(\sum_i c_{hi}\, y_{ij}\right)^2\right] \quad .$

De conformidade com o modelo pode-se escrever:

$$\sum_i c_{hi}\, y_{ij} = \sum_i c_{hi}\,(m + t_i + e_{ij})$$

$$= \sum_i c_{hi}\, m + \sum_i c_{hi}\, t_i + \sum_i c_{hi}\, e_{ij} \quad ,$$

$$= m \sum_i c_{hi} + \sum_i c_{hi}\, t_i + \sum_i c_{hi}\, e_{ij} \quad ,$$

e desde que

$$\sum_i c_{hi} = 0 \quad , \text{ virá:}$$

$$\sum_i c_{hi}\, y_{ij} = \sum_i c_{hi}\, t_i + \sum_i c_{hi}\, e_{ij} \quad .$$

Consequentemente,

$$(\sum_i c_{hi}\, y_{ij})^2 = (\sum_i c_{hi}\, t_i + \sum_i c_{hi}\, e_{ij})^2$$

$$= (\sum_i c_{hi}\, t_i)^2 + (\sum_i c_{hi}\, e_{ij})^2 + 2(\sum_i c_{hi}\, t_i)(\sum_i c_{hi}\, e_{ij})$$

$$= (\sum_i c_{hi}\, t_i)^2 + (\sum_i c_{hi}\, e_{ij})^2 + 2 \sum_i c_{hi}^2\, t_i\, e_{ij} \quad (3) \quad ,$$

mas:

$$\sum_i c_{hi}\, t_i = c_{h1}t_1 + c_{h2}t_2 + \dots + c_{hI}t_I \quad ,$$

$$(\sum_i c_{hi}\, t_i)^2 = c_{h1}^2 t_1^2 + c_{h2}^2 t_2^2 + \dots + c_{hI}^2 t_I^2 + 2\, c_{h1}c_{h2}\, t_1 t_2 + \dots$$

$$= \sum_i c_{hi}^2 t_i^2 + 2 \sum_{i<i'} c_{hi}c_{hi'}\, t_i t_{i'}$$

e

$$\sum_i c_{hi}\, e_{ij} = c_{h1}e_{1j} + c_{h2}e_{2j} + \dots + c_{hI}e_{Ij} \quad ,$$

$$(\sum_i c_{hi}e_{ij})^2 = c_{h1}^2 e_{1j}^2 + c_{h2}^2 e_{2j}^2 + \dots + c_{hI}^2 e_{Ij}^2 + 2\, c_{h1}c_{h2}e_{1j}e_{2j} + \dots$$

$$= \sum_i c_{hi}^2 e_{ij}^2 + 2 \sum_{i<i'} c_{hi}c_{hi'}\, e_{ij}e_{i'j} \quad .$$

Substituindo-se em (3), tem-se:

$$(\sum_i c_{hi}y_{ij})^2 = \sum_i c_{hi}^2 t_i^2 + 2 \sum_{i<i'} c_{hi}c_{hi'}t_i t_{i'} + \sum_i c_{hi}^2\, e_{ij}^2 +$$

$$+ 2 \sum_{i<i'} c_{hi}c_{hi'}e_{ij}e_{i'j} + 2 \sum_i c_{hi}^2 t_i e_{ij} \quad .$$

Somando-se em relação a j, resulta:

$$\sum_j(\sum_i c_{hi}y_{ij})^2 = \sum_j \sum_i c_{hi}^2 t_i^2 + 2 \sum_j \sum_{i<i'} c_{hi}c_{hi'}t_i t_{i'} + \sum_j \sum_i c_{hi}^2 e_{ij}^2 +$$

$$+ 2 \sum_j \sum_{i<i'} c_{hi}c_{hi'}e_{ij}e_{i'j} + 2 \sum_j \sum_i c_{hi}^2 t_i e_{ij}$$

$$\sum_j (\sum_i c_{hi}\, y_{ij})^2 = J \sum_i c_{hi}^2 t_i^2 + 2\, J \sum_{i<i'} c_{hi} c_{hi'} t_i t_{i'} + \sum_i c_{hi}^2 \sum_j e_{ij}^2 +$$

$$+ 2 \sum_{i<i'} c_{hi} c_{hi'} \sum_j (e_{ij} e_{i'j}) + 2 \sum_i c_{hi}^2 t_i \sum_j (e_{ij}) \;.$$

Assim virá:

$$E\left[\sum_j (\sum_i c_{hi} y_{ij})^2\right] = E\left[J \sum_i c_{hi}^2 t_i^2\right] + E\left[2\, J \sum_{i<i'} c_{hi} c_{hi'} t_i t_{i'}\right] +$$

$$+ E\left[\sum_i c_{hi}^2 \sum_i e_{ij}^2\right] +$$

$$+ E\left[2 \sum_{i<i'} c_{hi} c_{hi'} \sum_j (e_{ij}\; e_{i'j})\right] +$$

$$+ E\left[2 \sum_i c_{hi}^2\; t_i \sum_j (e_{ij})\right] \qquad (4) \quad ,$$

onde:

$$E\left[J \sum_i c_{hi}^2\; t_i^2\right] = J \sum_i c_{hi}^2\; E(t_i^2) = J \sum_i c_{hi}^2\; \sigma_t^2 = J\; \sigma_t^2 \sum_i c_{hi}^2 \quad ,$$

$$E\left[2\, J \sum_{i<i'} c_{hi} c_{hi'}\; t_i t_{i'}\right] = 2\, J \sum_{i<i'} c_{hi}\; c_{hi'}\; E(t_i\; t_{i'}) = 0$$

$$E\left[\sum_i c_{hi}^2 \sum_j e_{ij}^2\right] = \sum_i c_{hi}^2\; E\left[\sum_j e_{ij}^2\right] = \sum_i c_{hi}^2 \sum_j E(e_{ij}^2)$$

$$= \sum_i c_{hi}^2 \sum_j \sigma_i^2 = \sum_i c_{hi}^2\; J\; \sigma_i^2$$

$$= J \sum_i c_{hi}^2\; \sigma_i^2 \quad ;$$

$$E\left[2\sum_{i<i'} c_{hi}c_{hi'}\sum_j(e_{ij}\ e_{i'j})\right] = 2\sum_{i<i'} c_{hi}\ c_{hi'}\ E\left[\sum_j e_{ij}\ e_{i'j}\right]$$

$$= 2\sum_{i<i'} c_{hi}\ c_{hi'}\sum_j E(e_{ij}\ e_{i'j}) = 0\ ,$$

e

$$E\left[2\sum_i c_{hi}^2\ t_i\sum_j e_{ij}\right] = 2\sum_i c_{hi}^2\ E\left[t_i\sum_j e_{ij}\right]$$

$$= 2\sum_i c_{hi}^2\ E(t_{i}.e_{i.}) = 0\ .$$

Logo, substituindo-se os valores obtidos na expressão (4), resulta:

$$E\left[\sum_j\left(\sum_i c_{hi}\ y_{ij}\right)^2\right] = J\ \sigma_t^2\sum_i c_{hi}^2 + J\sum_i c_{hi}^2\ \sigma_i^2\ .$$

$$\text{II) } E\left[\hat{Y}^2(h)\right] = E\left[\left(\sum_i c_{hi}\ y_{i.}\right)^2\right]\ . \tag{5}$$

Tem-se:

$$\sum_i c_{hi}\ y_{i.} = \sum_i c_{hi}\left(\sum_j y_{ij}\right)$$

$$= \sum_i c_{hi}\left[\sum_j(m + t_i + e_{ij})\right]$$

$$= \sum_i c_{hi}\left[J\ m + J\ t_i + \sum_j e_{ij}\right]$$

$$= J\ m\sum_i c_{hi} + J\sum_i c_{hi}\ t_i + \sum_i\sum_j c_{hi}\ e_{ij}\ .$$

Como $\sum_i c_{hi} = 0$, resulta:

$$\sum_i c_{hi}\, y_{i.} = J \sum_i c_{hi}\, t_i + \sum_i \sum_j c_{hi}\, e_{ij} \quad .$$

Assim virá:

$$(\sum_i c_{hi}\, y_{i.})^2 = J^2 (\sum_i c_{hi}\, t_i)^2 + (\sum_i \sum_j c_{hi}\, e_{ij})^2 +$$

$$+ 2\, J (\sum_i c_{hi}\, t_i)(\sum_i \sum_j c_{hi}\, e_{ij}) \qquad (6)$$

onde:

$$(\sum_i c_{hi}\, t_i)^2 = \sum_i c_{hi}^2\, t_i^2 + 2 \sum_{i<i'} c_{hi}\, c_{hi'}\, t_i\, t_{i'} \quad ,$$

$$(\sum_i \sum_j c_{hi}\, e_{ij})^2 = (\sum_i c_{hi} \sum_j e_{ij})^2 = (\sum_i c_{hi}\, e_{i.})^2$$

$$= \sum_i c_{hi}^2\, e_{i.}^2 + 2 \sum_{i<i'} c_{hi}\, c_{hi'}\, e_{i.}\, e_{i'.} \quad ,$$

$$(\sum_i c_{hi}\, t_i)(\sum_i \sum_j c_{hi}\, e_{ij}) = \sum_i c_{hi}^2\, t_i \sum_j e_{ij} = \sum_i c_{hi}^2\, t_i\, e_{i.} \quad .$$

Substituindo-se estes valores em (6), tem-se:

$$(\sum_i c_{hi}\, y_{i.})^2 = J^2 \sum_i c_{hi}^2\, t_i^2 + 2\, J^2 \sum_{i<i'} c_{hi}\, c_{hi'}\, t_i\, t_{i'} +$$

$$+ \sum_i c_{hi}^2\, e_{i.}^2 + 2 \sum_{i<i'} c_{hi}\, c_{hi'}\, e_{i.}\, e_{i'.} +$$

$$+ 2\, J \sum_i c_{hi}^2\, t_i\, e_{i.} \quad .$$

Consequentemente,

$$E\left[(\sum_i c_{hi}\ y_{i.})^2\right] = E\left[J^2 \sum_i c_{hi}^2\ t_i^2\right] + E\left[2\ J^2 \sum_{i<i'} c_{hi}\ c_{hi'}\ t_i\ t_{i'}\right] +$$

$$+ E\left[\sum_i c_{hi}^2\ e_{i.}^2\right] +$$

$$+ E\left[2 \sum_{i<i'} c_{hi}\ c_{hi'}\ e_{i.}\ e_{i'.}\right] +$$

$$+ E\left[2\ J \sum_i c_{hi}^2\ t_i\ e_{i.}\right] \quad ,$$

onde:

$$E\left[J^2 \sum_i c_{hi}^2\ t_i^2\right] = J^2 \sum_i c_{hi}^2\ E(t_i^2) = J^2 \sum_i c_{hi}^2\ \sigma_t^2 = J^2 \sigma_t^2 \sum_i c_{hi}^2 \quad ,$$

$$E\left[2\ J^2 \sum_{i<i'} c_{hi}\ c_{hi'}\ t_i\ t_{i'}\right] = 2\ J^2 \sum_{i<i'} c_{hi}\ c_{hi'}\ E(t_i\ t_{i'}) = 0 \quad ,$$

$$E\left[\sum_i c_{hi}^2\ e_{i.}^2\right] = \sum_i c_{hi}^2\ E(e_{i.}^2) = \sum_i c_{hi}^2\ E\left[(\sum_j e_{ij})^2\right]$$

$$= \sum_i c_{hi}^2\ E\left[\sum_j e_{ij}^2 + 2 \sum_{j<j'} e_{ij}\ e_{ij'}\right]$$

$$= \sum_i c_{hi}^2 \left[\sum_j E(e_{ij}^2) + 2 \sum_{j<j'} E(e_{ij} e_{ij'})\right]$$

$$= \sum_i c_{hi}^2 \sum_j \sigma_i^2 = J \sum_i c_{hi}^2\ \sigma_i^2 \quad ,$$

$$E\left[2 \sum_{i<i'} c_{hi}\, c_{hi'}\, e_{i.}\, e_{i'.}\right] = 2 \sum_{i<i'} c_{hi}\, c_{hi'}\, E(e_{i.}\, e_{i'.}) = 0 \ ,$$

$$E\left[2\ J \sum_i c^2_{hi}\ t_i\ e_{i.}\right] = 2\ J \sum_i c^2_{hi}\ E(t_i\ e_{i.}) = 0$$

Substituindo-se em (5) , virá:

$$E\left[\hat{Y}^2(h)\right] = E\left[\left(\sum_i c_{hi}\ y_{i.}\right)^2\right]$$

$$= J^2\ \sigma^2_t \sum_i c^2_{hi} + J \sum_i c^2_{hi}\ \sigma^2_i \ .$$

Portanto,

$$E\left[SQR\ Y(h)\right] = \frac{1}{\sum_i c^2_{hi}} \left[E\left[\sum_j \hat{Y}^2_{hj}\right] - \frac{1}{J}\ E\left[\hat{Y}^2(h)\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\sum_i c^2_{hi}} \left[J\ \sigma^2_t \sum_i c^2_{hi} + J \sum_i c^2_{hi}\ \sigma^2_i - \frac{1}{J}\ (J^2 \sigma^2_t \sum_i c^2_{hi} + \right.$$

$$\left. + J \sum_i c^2_{hi}\ \sigma^2_i \right]$$

$$= J\ \sigma^2_t + \frac{J}{\sum_i c^2_{hi}} \sum_i c^2_{hi}\ \sigma^2_i - J\ \sigma^2_t - \frac{1}{\sum_i c^2_{hi}} \sum_i c^2_{hi}\ \sigma^2_i$$

$$= \frac{(J-1)}{\sum_i c^2_{hi}} \sum_i c^2_{hi}\ \sigma^2_i \ .$$

Portanto,

$$E\left[SQR\ Y(h)\right] = \frac{J-1}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\, \sigma_i^2 \quad ,$$

e a sua estimativa, conforme referida em 3.2.1, é

$$\overline{SQR}\ Y(h) = \frac{J-1}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\, \hat{\sigma}_i^2 \quad ,$$

associada à (J-1) graus de liberdade, e

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{J-1}\left[\sum_j y_{ij}^2 - \frac{(\sum_j y_{ij})^2}{J}\right] \quad .$$

Consequentemente,

$$\overline{QMR}\ \ Y(h) = \frac{1}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\, \hat{\sigma}_i^2 \quad .$$

Evidentemente, se $\hat{\sigma}_i^2 = \hat{\sigma}^2$, tem-se:

$$\overline{QMR}\ Y(h) = \frac{1}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\, \hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2 = \hat{\sigma}^2 \quad .$$

Levando-se em conta os (I-1) contrastes, constata--se:

$$\sum_{h=1}^{I-1} E\left[SQR\ Y(h)\right] = (J-1) \sum_{h=1}^{I-1} \left(\frac{\sum_i c_{hi}^2\ \sigma_i^2}{\sum_i c_{hi}^2}\right) ,$$

e a sua estimativa,

$$\sum_{h=1}^{I-1} \overline{SQR}\ Y(h) = (J-1) \sum_{h=1}^{I-1} \frac{\sum_i c_{hi}^2\ \hat{\sigma}_i^2}{\sum_i c_{hi}^2} ,$$

associada a (I-1)(J-1) graus de liberdade.

Consequentemente,

$$\frac{1}{(I-1)(J-1)} \sum_{h=1}^{I-1} \overline{SQR}\ Y(h) = \frac{1}{I-1} \sum_{h=1}^{I-1} \frac{\overline{SQR}\ Y(h)}{J-1}$$

$$= \frac{1}{I-1} \sum_{h=1}^{I-1} \overline{QMR}\ Y(h) .$$

Admitindo-se $\hat{\sigma}_i^2 = \hat{\sigma}^2$, tem-se:

$$\frac{1}{I-1} \sum_{h=1}^{I-1} \overline{QMR}\ Y(h) = \frac{1}{I-1} (I-1)\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2 \qquad (7) .$$

Considerando-se o modelo tipo II, isto é, admitindo--se o efeito de tratamento fixo, com as suposições referidas em 3.2.2.1.b, chega-se aos mesmos resultados obtidos para o modelo tipo I.

4.3.6. Composição do resíduo específico para o componente "entre repetições"

De acordo com o item 4.3.3, tem-se que a

$$\text{SQR(entre repetições)} = \sum_{k=1}^{J-1} \text{SQR } Z(k) = Y'\left[R_1 + \ldots + R_{(J-1)}\right] Y$$

$$= \sum_{k=1}^{J-1} \frac{\left[\hat{Z}(k)\right]^2}{I \sum_j a_{kj}^2} \quad ,$$

onde: $\hat{Z}(k) = \sum_j^J a_{kj}\, y_{.j}$ e $y_{.j} = \sum_i^I y_{ij}$

e $\sum_j^J a_{kj} = 0$ e $\sum_j^J a_{kj} \cdot a_{k'j} = 0 \quad (k \neq k')$.

Considerando-se o modelo $y_{ij} = m + t_i + e_{ij}$, $(i = 1, \ldots, I$ e $j = 1, \ldots, J)$, independentemente de se tomar o efeito de tratamentos (t_i) fixo ou aleatório, tem-se:

$$E\left[\text{SQR(entre repetições)}\right] = \sum_{k=1}^{J-1} E\left[\text{SQR } Z(k)\right] \quad ,$$

onde:

$$E\left[\text{SQR } Z(k)\right] = \frac{1}{I \sum_j a_{kj}^2} E\left[\hat{Z}^2(k)\right] \qquad (8) \ .$$

Desenvolvendo virá:

$$\hat{Z}(k) = \sum_j a_{kj}\ y_{.j} = \sum_j a_{kj} \left[\sum_i (m + t_i + e_{ij}) \right]$$

$$= \sum_j a_{kj} \left[Im + \sum_i t_i + \sum_i e_{ij} \right] \quad ,$$

admitindo-se a restrição $\sum_i t_i = 0$, fica:

$$\hat{Z}(k) = \sum_j a_{kj} \sum_i e_{ij} = \sum_j a_{kj}\ e_{.j} \quad .$$

Consequentemente,

$$\hat{Z}^2(k) = \left[\sum_j a_{kj}\ e_{.j} \right]^2 = \sum_j a^2_{kj}\ e^2_{.j} + 2 \sum_{j<j'} a_{kj}\ a_{kj'}\ e_{.j}\ e_{.j'} \ ,$$

então,

$$E\left[\hat{Z}^2(k)\right] = E\left[\sum_j a^2_{kj}\ e^2_{.j}\right] + E\left[2 \sum_{j<j'} a_{kj}\ a_{kj'}\ e_{.j}\ e_{.j'}\right] \quad ,$$

onde:

$$E\left[\sum_j a^2_{kj}\ e^2_{.j}\right] = \sum_j a^2_{kj}\ E(e^2_{.j}) = \sum_j a^2_{kj}\ E\left[(\sum_i e_{ij})^2\right]$$

$$= \sum_j a^2_{kj}\ E\left[\sum_i e^2_{ij} + 2 \sum_{i<i'} e_{ij}\ e_{i'j}\right]$$

$$= \sum_j a^2_{kj} \left[\sum_i E(e^2_{ij}) + 2 \sum_{i<i'} E(e_{ij}\ e_{i'j})\right] = \sum_j a^2_{kj} \sum_i \sigma^2_i \ ,$$

e

$$E\left[2 \sum_{j<j'} a_{kj}\, a_{kj'}\, e_{.j}\, e_{.j'}\right] = 2 \sum_{j<j'} a_{kj}\, a_{kj'}\, E(e_{.j}\, e_{.j'}) = 0 \ ,$$

logo,

$$E\left[\hat{Z}^2(k)\right] = \sum_j a_{kj}^2 \sum_i \sigma_i^2 \ .$$

Substituindo-se em (8), tem-se:

$$E\left[SQR\ Z(k)\right] = \frac{1}{I \sum_j a_{kj}^2} \sum_{j=1}^{J} a_{kj}^2 \sum_i \sigma_i^2 = \frac{1}{I} \sum_i \sigma_i^2 \ .$$

Consequentemente,

$$E\left[SQR(\text{entre repetições})\right] = \sum_{k=1}^{J-1} \frac{\sum_i \sigma_i^2}{I} = \frac{(J-1)}{I} \sum_i \sigma_i^2 \ ,$$

e sua estimativa é

$$\overline{SQR}\ (\text{entre repetições}) = \frac{J-1}{I} \sum_i \hat{\sigma}_i^2 \ ,$$

e ainda:

$$\frac{1}{J-1}\ \overline{SQR}(\text{entre repetições}) = \frac{1}{I} \sum_i \hat{\sigma}_i^2 = \overline{QMR}(\text{entre repetições}).$$

No caso de $\hat{\sigma}_i^2 = \hat{\sigma}^2$, resulta:

$$\overline{QMR}(\text{entre repetições}) = \frac{1}{I}\, I\, \hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2 \qquad (9)\ .$$

De (7) e (9) conclui-se que:

$$\frac{1}{I-1} \sum_{h=1}^{I-1} \overline{QMR}\ Y(h) = \overline{QMR}(\text{entre repetições})\ .$$

Levando-se em conta os I componentes das somas de quadrados do resíduo, tem-se:

$$\text{SQResíduo} = \sum_{h=1}^{I-1} \overline{SQR}\ Y(h) + \overline{SQR}(\text{entre repetições})$$

$$= (J-1) \left[\sum_{h=1}^{I-1} \frac{\sum_i c_{hi}^2\, \hat{\sigma}_i^2}{\sum_i c_{hi}^2} + \frac{1}{I} \sum_i \hat{\sigma}_i^2 \right] ,$$

e ainda,

$$\text{QMResíduo} = \frac{1}{I(J-1)}\ \text{SQResíduo} = \frac{1}{I} \left[\sum_{h=1}^{I-1} \frac{\sum_i c_{hi}^2\, \hat{\sigma}_i^2}{\sum_i c_{hi}^2} + \frac{1}{I} \sum_i \hat{\sigma}_i^2 \right]$$

Admitindo-se $\hat{\sigma}_i^2 = \hat{\sigma}^2$, virá:

$$\text{QMResíduo} = \frac{1}{I} \left[(I-1)\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}^2 \right] = \hat{\sigma}^2\ .$$

4.4. Esquemas das Análises de Variância com Decomposições das Somas de Quadrados de Tratamentos e de Resíduo

Em decorrência das estruturas desenvolvidas anteriormente, é possível estruturar os esquemas das análises de variância que são apresentadas nas Tabelas 4 e 5.

TABELA 4: Análise de variância, considerando-se o modelo tipo I ($E(t_i^2) = \sigma_t^2$ e $E(e_{ij}^2) = \sigma_i^2$) .

C. Variação	GL	E[QM]
Y(1)	1	$J\,\sigma_t^2 + \dfrac{1}{\sum\limits_i c_{1i}^2} \sum\limits_i c_{1i}^2\,\sigma_i^2$
...	...	...
Y(I-1)	1	$J\,\sigma_t^2 + \dfrac{1}{\sum\limits_i c_{(I-1)i}^2} \sum\limits_i c_{(I-1)i}^2\,\sigma_i^2$
(Tratamentos)	(I-1)	$\left(J\,\sigma_t^2 + \dfrac{1}{I-1} \sum\limits_{h=1}^{I-1} \dfrac{\sum\limits_i c_{hi}^2\,\sigma_i^2}{\sum\limits_i c_{hi}^2}\right)$
R Y(1)	(J-1)	$\dfrac{1}{\sum\limits_i c_{1i}^2} \sum\limits_i c_{1i}^2\,\sigma_i^2$
...	...	...
R Y(I-1)	(J-1)	$\dfrac{1}{\sum\limits_i c_{(I-1)i}^2} \sum\limits_i c_{(I-1)i}^2\,\sigma_i^2$
R(entre repetições)	(J-1)	$\dfrac{1}{I} \sum\limits_i \sigma_i^2$
Resíduo	I(J-1)	$\dfrac{1}{I}\left[\sum\limits_h \dfrac{\sum\limits_i c_{hi}^2\,\sigma_i^2}{\sum\limits_i c_{hi}^2} + \dfrac{1}{I} \sum\limits_i \sigma_i^2\right]$
Total	IJ-1	

TABELA 5: Análise de variância, considerando-se o modelo do tipo II ($E(t_i^2) = t_i^2$ e $E(e_{ij}^2) = \sigma_i^2$) .

C. Variação	GL	E[QM]
Y(1)	1	$\frac{J}{\sum_i c_{1i}^2} \sum_i c_{1i}^2 t_i^2 + \frac{1}{\sum_i c_{1i}^2} \sum_i c_{1i}^2 \sigma_i^2$
...	...	...
Y(I-1)	1	$\frac{J}{\sum_i c_{(I-1)i}^2} \sum_i c_{(I-1)i}^2 t_i^2 + \frac{1}{\sum_i c_{(I-1)i}^2} \sum_i c_{(I-1)i}^2 \sigma_i^2$
(Tratamentos)	(I-1)	$\frac{J}{I-1} \sum_h \frac{\sum_i c_{hi}^2 t_i^2}{\sum_i c_{hi}^2} + \frac{1}{I-1} \sum_h \frac{\sum_i c_{hi}^2 \sigma_i^2}{\sum_i c_{hi}^2}$
R Y(1)	(J-1)	$\frac{1}{\sum_i c_{1i}^2} \sum_i c_{1i}^2 \sigma_i^2$
...	...	...
R Y(I-1)	(J-1)	$\frac{1}{\sum_i c_{(I-1)i}^2} \sum_i c_{(I-1)i}^2 \sigma_i^2$
R(entre repetições)	(J-1)	$\frac{1}{I} \sum_i \sigma_i^2$
Resíduo	I(J-1)	$\frac{1}{I} \left[\sum_h \frac{\sum_i c_{hi}^2 \sigma_i^2}{\sum_i c_{hi}^2} + \frac{1}{I} \sum_i \sigma_i^2 \right]$

4.5. Associação da Distribuição do Quociente QM Y(h)/$\overline{QMR}$ Y(h) com a Distribuição de F

De acordo com 3.2.4, foram feitas as simulações para as 21 situações consideradas, cujos resultados encontram-se no Apêndice 3, distribuídos da seguinte maneira:

a) Nas tabelas de 2 a 13 estão os resultados referentes à distribuição de frequências para os valores do quociente QM Y(h)/$\overline{QMR}$ Y(h), obtidos através do processo de simulação de variáveis, correspondentes às diferentes situações consideradas.

b) Nas Tabelas 14 e 15 encontram-se os resultados referentes à aplicação do teste de qui-quadrado aos dados das Tabelas de números de 2 a 13.

Pelo exame dos resultados da aplicação do teste de qui-quadrado, verifica-se que em apenas quatro casos houve rejeição da hipótese correspondente à aderência do quociente QM Y(h)/$\overline{QMR}$ Y(h) à distribuição de F (1, f), ao nível de significância $\alpha = 0{,}05$. Deste modo, pode-se admitir que é razoável considerar o quociente QM Y(h)/$\overline{QMR}$ Y(h) com distribuição aproximada de F com 1 e f graus de liberdade.

4.6. Um Exemplo de Aplicação

Para ilustração e comprovação dos resultados teóricos, utilizaram-se os dados da Tabela 1 do item 3.1, cuja análise de variância preliminar é dada na Tabela 6.

TABELA 6: Análise de Variância preliminar dos dados da Tabela 1 .

Causas de Variação	GL	SQ	QM	F
Tratamentos	7	16.220,4155	2.317,2022	67,81
Resíduo	24	820,1616	34,1734	
Total	31	17.040,5771		

A decomposição da soma de quadrados de tratamentos é feita segundo um conjunto de contrastes ortogonais de interesse. No presente estudo foram considerados os seguintes:

Y(1) : testemunhas versus "incorporados" e "localizados";

Y(2) : entre testemunhas;

Y(3) : "localizados" versus "incorporados";

Y(4) e Y(5) : entre "localizados";

Y(6) e Y(7) : entre "incorporados".

TABELA 7: Contrastes, com seus coeficientes, divisores e somas de quadrados, referentes aos dados da Tabela 1.

Tratamentos	(1)	(2)	3	4	5	6	7	8	$\hat{Y}(h)$	$J(\sum_i c_{hi}^2)$	SQ Y(h)
Totais Trat.	2,68	1,91	181,13	226,93	236,98	169,91	195,85	216,51			
Y(1)	3	3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1213,54	4.(24)	15340,4097
Y(2)	1	-1	0	0	0	0	0	0	0,77	4.(2)	0,0741
Y(3)	0	0	1	1	1	-1	-1	-1	62,77	4.(6)	164,1697
Y(4)	0	0	1	-1	0	0	0	0	-45,80	4.(2)	262,2050
Y(5)	0	0	1	1	-2	0	0	0	-65,90	4.(6)	180,9504
Y(6)	0	0	0	0	0	1	-1	0	-25,94	4.(2)	84,1104
Y(7)	0	0	0	0	0	1	1	-2	-67,26	4.(6)	188,4962
Total											16220,4155

Sem se levar em conta o resíduo específico a cada contraste, a nova análise de variância é apresentada na Tabela 8.

TABELA 8: Análise de variância dos dados da Tabela 1, com desdobramento do número de graus de liberdade de tratamento.

Causas de Variação	GL	SQ	QM	F
Y(1)	1	15.340,4097	15.340,4097	448,90
Y(2)	1	0,0741	0,0741	0,002
Y(3)	1	164,1697	164,1697	4,80
Y(4)	1	262,2050	262,2050	7,67
Y(5)	1	180,9504	180,9504	5,30
Y(6)	1	84,1104	84,1104	2,46
Y(7)	1	188,4962	188,4962	5,52
(Tratamentos)	(7)	(16.220,4155)		
Resíduo	24	820,1616	34,1734	

Se a pressuposição do modelo referente à homocedasticidade for satisfeita, isto é, se $\hat{\sigma}^2_{(1)} = \hat{\sigma}^2_{(2)} = \hat{\sigma}^2_3 = \ldots = \hat{\sigma}^2_8 = \hat{\sigma}^2$, a análise apresentada na Tabela 8 é perfeitamente válida. Para se verificar a validade desta hipótese, os dados da Tabela 1 foram submetidos aos seguintes procedimentos:

a) Cálculo do valor da soma de quadrados e da variância para cada tratamento, através das expressões:

$$SQT_i = \sum_{j=1}^{4} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \sum_{j=1}^{4} y_{ij}^2 - \frac{y_{i.}^2}{4}$$

e

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{4-1} \sum_{j=1}^{4} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \frac{1}{3} \left[\sum_{j=1}^{4} y_{ij}^2 - \frac{y_{i.}^2}{4} \right]$$

onde: $y_{i.} = \sum_{j=1}^{4} y_{ij}$ e $\bar{y}_i = \frac{1}{4} y_{i.}$,

cujos resultados encontram-se na Tabela 9.

TABELA 9: Valores das somas de quadrados e das variâncias dos tratamentos, referentes aos dados da Tabela 1.

Tratamentos	SQT_i	$\hat{\sigma}_i^2$
(1)	0,0830	0,0277
(2)	0,0499	0,0166
3	52,1419	17,3806
4	144,2075	48,0692
5	37,0457	12,3486
6	4,2657	1,4219
7	45,0300	15,0100
8	537,3379	179,1126
Total	820,1616	273,3872

Pela Tabela 9, verifica-se:

$$\frac{1}{3\ .\ 8} \sum_{i=1}^{8} \left[\sum_{j=1}^{4} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \right] = \frac{1}{24}\ .\ 820,1616 = 34,1734$$

e

$$\frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{8}\ .\ 273,3872 = 34,1734\ ,$$

valores estes que se identificam com o QM Resíduo apresentado na Tabela 6.

b) Aplicação de testes de homogeneidade de variâncias aos dados em estudo, partindo das hipóteses:

$H_o : \sigma^2_{(1)} = \sigma^2_{(2)} = \sigma^2_3 = \ldots = \sigma^2_8$

$H_a : \sigma^2_i \neq \sigma^2_{i'}$, para pelo menos um par i, i'.

b.1) Teste de Bartlett: Para testar H_o considera-se o quociente M/C com distribuição aproximada de qui-quadrado, com $(I-1)$ graus de liberdade, onde:

$$M = 2,3026\ (J-1)\ \left[I \log \hat{\bar{\sigma}}^2 - \sum_i \log \hat{\sigma}^2_i\right] \quad ,$$

onde $\hat{\bar{\sigma}}^2 = \dfrac{\sum_i \hat{\sigma}^2_i}{I}$,

e

$$C = 1 + \frac{I+1}{3I(J-1)}$$

Assim, com os dados da Tabela 9, obtém-se os valores:

$$M = 2,3026(4-1)\left[8 \log 34,1734 - 4,2585\right] = 55,3384$$

e

$$C = 1 + \frac{8+1}{3.8(4-1)} = 1,125 \quad ,$$

e, a partir deles:

$$\chi_c^2 = \frac{M}{C} = 49{,}1897 \quad \text{com 7 graus de liberdade,}$$

cujo nível mínimo de significância é $\alpha < 0{,}005$, concluindo-se que existe diferença significativa entre as variâncias, ou seja, evidenciando a heterocedasticidade.

b.2) Teste de Cochran: Definido através da estatística:

$$C = \frac{\text{máx.}\{\hat{\sigma}^2_{(1)}, \hat{\sigma}^2_{(2)}, \hat{\sigma}^2_3, \ldots, \hat{\sigma}^2_8\}}{\sum_{i=1}^{8} \hat{\sigma}^2_i} .$$

Da Tabela 9, observa-se:

$$\text{máx.}\{\hat{\sigma}^2_{(1)}, \hat{\sigma}^2_{(2)}, \hat{\sigma}^2_3, \ldots, \hat{\sigma}^2_8\} = 179{,}1126 \quad ;$$

e $$\sum_{i=1}^{8} \hat{\sigma}^2_i = 273{,}3872 \ .$$

Portanto, tem-se: $C = \dfrac{179{,}1126}{273{,}3872} = 0{,}6552$.

A tabela A-17 de DIXON e MASSEY (1969) apresenta, para k = 8 variâncias, com 3 graus de liberdade cada uma, os valores críticos 0,4377 e 0,5209, ao nível de siginficância 0,05 e 0,01, respectivamente.

Pode-se observar, nesse caso, que a hipótese de nulidade H_o é rejeitada ao nível de significância 0,01, constatando-se a heterocedasticidade.

Como a heterocedasticidade foi constatada, torna-se conveniente proceder à decomposição da soma de quadrados do resíduo, visando buscar um resíduo específico a cada um dos contrastes.

Conforme já visto, o procedimento para obtenção do resíduo específico a cada contraste é o que se segue:

$$\overline{SQR}\ Y(h) = \frac{4-1}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_{i=1}^{8} c_{hi}^2\ \hat{\sigma}_i^2 \ ,$$

e

$$\overline{QMR}\ Y(h) = \frac{1}{4-1}\ \overline{SQR}\ Y(h) \ .$$

Os valores dos coeficientes c_{hi} dos contrastes $Y(h)$ e dos $\hat{\sigma}_i^2$ encontram-se nas Tabelas 7 e 9, respectivamente.

Assim, para o componente do resíduo correspondente ao contraste $Y(1)$, tem-se:

$$\begin{aligned}\overline{SQR}\ Y(1) = \frac{3}{24}\Big[&(3)^2 0{,}0277 + (3)^2 0{,}0166 + (-1)^2 17{,}3806 + \\ &+ (-1)^2 48{,}0692 + (-1)^2 12{,}3486 + \\ &+ (-1)^2 1{,}4219 + (-1)^2 15{,}0100 + \\ &+ (-1)^2 179{,}1126\Big] \\ = 34{,}2177\end{aligned}$$

e $$\overline{QMR}\ Y(1) = \frac{1}{3}\ 34{,}2177 = 11{,}4059 \ .$$

Analogamente, calculam-se os valores dos componentes do resíduo correspondente aos demais contrastes, cujos resultados encontram-se na Tabela 10.

TABELA 10: Valores dos componentes do resíduo referentes aos contrastes entre tratamentos.

Contrastes	$\overline{SQR}$	$\overline{QMR}$
Y(1)	34,2177	11,4059
Y(2)	0,0664	0,0221
Y(3)	136,6714	45,5571
Y(4)	98,1747	32,7249
Y(5)	57,4221	19,1407
Y(6)	24,6479	8,2160
Y(7)	366,4412	122,1471
Total	717,6414	239,2138

Para completar o resíduo, resta calcular o componente "entre repetições", cuja média das somas de quadrados é, conforme já visto, obtida através da expressão:

$$\overline{SQR}\ (\text{entre repetições}) = \frac{J-1}{I} \sum_{i=1}^{I} \hat{\sigma}_i^2$$

e

$$\overline{QMR}\ (\text{entre repetições}) = \frac{1}{J-1}\ \overline{SQR}\ (\text{entre repetições}) .$$

Assim, com os dados da Tabela 9, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{8} \hat{\sigma}_i^2 = 273,3872 \quad .$$

Portanto,

$$\overline{SQR} \text{ (entre repetições) } = \frac{4-1}{8}\ 273,3872 = 102,5202$$

e

$$\overline{QMR} \text{ (entre repetições) } = \frac{1}{4-1}\ 102,5202 = 34,1734 \ .$$

Verificam-se numericamente as propriedades:

a) $\sum_{h=1}^{7} \overline{SQR}\ Y(h) + \overline{SQR}$ (entre repetições) = SQResíduo,

isto é: 717,6414 + 102,5202 = 820,1616.

b) $\frac{1}{I-1} \sum_{h=1}^{7} \overline{QMR}\ Y(h) = \overline{QMR}$(entre repetições) = QM Resíduo ,

isto é: $\frac{1}{7}$. 239,2138 = 34,1734 .

A Tabela 11 apresenta os resultados completos da decomposição da soma de quadrados do resíduo em seus componentes.

TABELA 11: Resultados da decomposição da soma de quadrados do resíduo.

Componentes do resíduo	GL	$\overline{SQR}$	$\overline{QMR}$
R Y(1)	3	34,2177	11,4059
R Y(2)	3	0,0664	0,0221
R Y(3)	3	136,6714	45,5571
R Y(4)	3	98,1747	32,7249
R Y(5)	3	57,4221	19,1407
R Y(6)	3	24,6479	8,2160
R Y(7)	3	366,4412	122,1471
R(entre repetições)	3	102,5202	34,1734
Resíduo	(24)	820,1616	34,1734

O teste de hipótese associado a cada contraste Y(h) é

$$H_o : Y(h) = 0 \quad vs \quad H_a : Y(h) \neq 0 .$$

Sua verificação pode ser feita, conforme já visto, através do quociente QM Y(h)/$\overline{QMR}$ Y(h), cuja distribuição é aproximadamente a de F com 1 e f graus de liberdade, com f dado em 3.2.4.

Assim, é possível a estruturação da Tabela 12, apresentada a seguir.

TABELA 12: Resultados referentes à aplicação do teste F, com a finalidade de testar as hipóteses:

$$H_o : Y(h) = 0 \quad vs \quad H_a : Y(h) \neq 0 .$$

Contrastes	Graus de Liberdade		$\frac{QM\ Y(h)}{QMR\ Y(h)} \simeq F$
	Numerador	Denominador	
Y(1)	1	6,41 ≃ 6	1344,95
Y(2)	1	5,64 ≃ 6	3,35
Y(3)	1	6,39 ≃ 6	3,60
Y(4)	1	4,92 ≃ 5	8,01
Y(5)	1	7,83 ≃ 8	9,45
Y(6)	1	3,56 ≃ 4	10,24
Y(7)	1	3,14 ≃ 3	1,54

Na Tabela 12, observa-se uma variação no número de graus de liberdade dos resíduos específicos, que acentua-se à medida em que se evidencia a heterocedasticidade.

5. CONCLUSÕES

Com base nos resultados obtidos, pode-se concluir:

1) No delineamento inteiramente casualizado balanceado, quando consideram-se $(I - 1)$ contrastes ortogonais entre tratamentos, a soma de quadrados do resíduo pode ser decomposta em I componentes, distribuídos da seguinte maneira:

a) $(I-1)$ componentes associados aos $(I-1)$ contrastes ortogonais entre tratamentos; e

b) um componente "entre repetições".

2) O resíduo específico a cada contraste de tratamentos $Y(h)$, está associado à expressão:

$$E\left[SQR\ Y(h)\right] = \frac{(J-1)}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\ \sigma_i^2 \quad ,$$

com (J-1) graus de liberdade e, consequentemente,

$$E\left[QMR\ Y(h)\right] = \frac{1}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\, \sigma_i^2 \quad ,$$

onde σ_i^2 é a variância populacional do i-ésimo tratamento.

3) O resíduo específico a cada contraste de tratamentos Y(h) é calculado através das expressões:

$$\overline{SQR}\ Y(h) = \frac{(J-1)}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\, \hat{\sigma}_i^2 \quad ,$$

e

$$\overline{QMR}\ Y(h) = \frac{1}{\sum_i c_{hi}^2} \sum_i c_{hi}^2\, \hat{\sigma}_i^2 \quad ,$$

onde os $\hat{\sigma}_i^2$ são as variâncias amostrais dentro de tratamentos.

4) O resíduo específico para o componente "entre repetições", está associado à expressão:

$$E\left[SQR(\text{entre repetições})\right] = \frac{(J-1)}{I} \sum_i \sigma_i^2 \quad ,$$

com (J-1) graus de liberdade e, consequentemente,

$$E\left[QMR(\text{entre repetições})\right] = \frac{1}{I} \sum_i \sigma_i^2 \quad ,$$

gerando os seguintes estimadores:

$$\overline{SQR}\ (\text{entre repetições}) = \frac{(J-1)}{I} \sum_i \hat{\sigma}_i^2$$

e

$$\overline{QMR}\ (\text{entre repetições}) = \frac{1}{I} \sum_i \hat{\sigma}_i^2 \quad .$$

5) Às decomposições anteriormente apresentadas está associada a seguinte propriedade:

$$\sum_{h=1}^{I-1} \overline{SQR}\ Y(h) + \overline{SQR}\ (\text{entre repetições}) = \text{SQ Resíduo} \quad ,$$

que evidencia a validade do procedimento adotado na obtenção do resíduo específico a cada contraste.

6) O quociente QM $Y(h)/\overline{QMR}\ Y(h)$ tem distribuição aproximada de F com 1 e f graus de liberdade, onde f é obtido através da expressão:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{(J-1)} \left[\sum_i \left(\frac{c_{hi}^2\ \hat{\sigma}_i^2}{\sum_i c_{hi}^2}\right)^2 \Big/ \left(\sum_i \frac{c_{hi}^2\ \hat{\sigma}_i^2}{\sum_i c_{hi}^2}\right)^2 \right] \quad ,$$

de acordo com SATTERTHWAITE (1941), variando de contraste para contraste, conforme evidencia-se a heterocedasticidade.

6. BIBLIOGRAFIA

BOX, G.E.P., 1954. Some Theorems on Quadratic Forms Applied in the Study of Analysis of Variance Problems, I. Effect of Inequality of Variance in the One-Way Classification. Annals of Mathematics Statistics. Ann Arbor, 25: 290-302

BOX, G.E.P. e M.E. MULLER, 1958. A Note on the Generation of Random Normal Deviates. Annals of Mathematics Statistics. Ann Arbor, 29: 610-611.

BROWN, N.B. e A.B. FORSYTHE, 1974(a). The Small Sample Behavior of Some Statistics which Test the Equality of Several Means. Technometrics. Richmond, 16: 129-132.

BROWN, N.B. e A.B. FORSYTHE, 1974(b). The Anova and Multiple Comparisons of Data with Heterogeneous Variances. Biometrics. Raleigh, 30: 719-724.

COCHRAN, W.G., 1938. Some Difficulties in the Statistical Analysis of Replicated Experiments. The Empire Journal of Experimental Agriculture. Oxford, 6: 157-175.

COCHRAN, W.G., 1947. Some Consequences when the Assumptions for the Analysis of Variance are not satisfied. Biometrics. Raleigh, 3: 22-38.

COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1971. Diseños Experimentales. México. Editorial Trillas, S.A. 661 p.

DIXON, W.J. e F.J. MASSEY Jr., 1969. Introduction to Statistical Analysis. 3ª edição, Nova York, McGraw-Hill Book Company. 638 p.

FERREIRA, L.E.P., 1978. A Decomposição do Resíduo em Casos de Heterocedasticidade nas Análises de Variância de Ensaios em Blocos Casualizados. Piracicaba, ESALQ/USP. 64 p. (Dissertação de Mestrado).

GODOI, C.R.M., 1978. Um algorítmo Eficiente para Simulação de Vetores com Distribuição Multinormal. Ciência e Cultura. São Paulo, 30(6): 701-705.

HOFFMANN, R., 1975. Decomposição da Soma de Quadrados de Tratamentos. Piracicaba, ESALQ/USP. 22 p. (Mimeografado).

KEMPTHORNE, O. e W.D. BARCLAY, 1953. Partition of Error in Randomized Blocks. Journal American Statistical Ass. Boston, 610-614.

LIMA, E., 1981. Resposta do Sorgo Sacarino [Sorghum bicolor (L.) Moench] ao Emprego de Fontes e Doses de Fósforo em Condições de Casa-de-Vegetação. Piracicaba, ESALQ/USP. 107 p. (Dissertação de Mestrado).

POOLE, L. e M. BORCHERS, 1979. Some Common Basic Programs. 3ª edição. Berkeley - California. McGraw-Hill. 92 p.

RAO, C.R., 1965. Linear Statistical Inference and its Applications. New York. John Wiley e Sons, Inc. 522 p.

SATTERTHWAITE, F.E., 1941. Synthesis of Variance. Psychometrika. Chicago, 6(5): 309-316.

SATTERTHWAITE, F.E., 1946. An Approximate Distribution of Estimates of Variance Components. Biometrics Bulletin. Washington, 2: 110--114.

SCHEFFÉ, H., 1959. The Analysis of Variance. New York. John Wiley e Sons, Inc. 477 p.

SEARLE, S.R., 1971. Linear Models. New York. John Wiley e Sons, Inc. 532 p.

STEEL, R.G.D. e J.H. TORRIE, 1960. Principles and Procedures of Statistics. New York. McGraw-Hill. 481 p.

A P Ê N D I C E 1 : Conceitos fundamentais sobre contrastes e formas quadráticas.

Contrastes

Por definição, um contraste entre as médias

$$m_i = m + t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, I)$$

é expresso por:

$$Y(h) = \sum_i a_{hi}\, m_i \quad , \; (h = 1, 2, \ldots, I\text{-}1)$$

onde $\sum_i a_{hi} = 0$.

Dados os contrastes $Y(h)$ e $Y(h')$ valem as propriedades:

a) Os contrastes são ortogonais quando $\sum_i a_{hi} \cdot a_{h'i} = 0$.

b) O contraste é normalizado quando $\sum_i a_{hi}^2 = 1$.

c) Os contrastes são ortonormais quando:

$$a_{hi} = \frac{c_{hi}}{\sqrt{\sum_i c_{hi}^2}}$$

onde: $\sum_i c_{hi} = 0$ e $\sum_i c_{hi} \cdot c_{h'i} = 0$.

Estas considerações são válidas quando os tratamentos são igualmente repetidos, conforme HOFFMANN (1975).

Teoremas sobre formas quadráticas

Os teoremas citados neste item são encontrados em SEARLE (1971).

1) Distribuição das formas quadráticas

Teorema: Se o vetor Y tem distribuição $N(\mu, V)$, então $Y' A Y$ tem distribuição de $\chi^2\left[r(A), \frac{1}{2} \mu' A \mu\right]$ se e somente se AV é idempotente.

2) Independência das formas quadráticas

Teorema 1: Se o vetor Y tem distribuição $N(\mu, V)$, então as formas quadráticas $Y'A Y$ e $Y'B Y$ são independentes se e somente se $A V B = 0$ ou $B V A = 0$.

Teorema 2: Sejam, o vetor $Y_{(nx1)}$ com distribuição $N(\mu, V)$ e a matriz A_i, de dimensões nxn, simétrica e de posto $r(A_i) = K_i$, para $i = 1, 2, \ldots, p$; e a matriz

$A = A_1 + \ldots + A_p$, simétrica e de posto

$$r(A) = K_1 + \ldots + K_p = \sum_{i}^{p} K_i = K \ .$$

Então $Y'A_i Y$ tem distribuição de

$$\chi^2\left[K_i ; \frac{1}{2} \mu' A_i \mu\right]$$

e as formas quadráticas $Y'A_i\,Y$ são mutuamente independentes e

$Y'A\,Y = Y'A_1\,Y + \ldots + Y'A_p\,Y$, tem distribuição

de $\chi^2\left[K\,;\,\frac{1}{2}\,\mu' A\,\mu\right]$, se e somente se:

i) a) $A_i V$ é idempotente $\forall\ i$

b) $A_i V\,A_j = 0$, para todo $i < j$

c) $A\,V$ idempotente

ii) $A\,V$ é idempotente e $K = \sum_i K_i$

iii) $A\,V$ é idempotente e $A_1\,V; \ldots; A_{(p-1)}V$ são idempotentes e $A_p V$ é definida não-negativa.

A P Ê N D I C E 2 : Programas e sub-programas utilizados no processamento dos dados.

Sub-programa 1

```
      SUBROUTINE UNNOR(X1,XM,E,IX)
      DIMENSION U(2)
      DO 1 I=1,2
      IY=IX*899
      IF(IY)5,6,6
    5 IY=IY+32767+1
    6 YFL=IY
      YFL=YFL/32767
      U(I)=YFL
    1 IX=IY
      U(1)=6.2831854*U(1)
      U(2)=SQRT(-2*ALOG(U(2)))
      X1=U(2)*COS(U(1))
      X1=XM+E*X1
      RETURN
      END
```

FONTE: GODOI (1978)

Sub-programa 2

```
      SUBROUTINE ORDEX(X,INDI,N)
      DIMENSION X(1)
      DIMENSION INDI(1)
      DO 20 I=1,N
   20 INDI(I)=I
      N1=N-1
   25 K=0
      DO 21 I=1,N1
      IF(X(I)-X(I+1)) 22,23,23
   22 TEMP=X(I)
      TEMP1=INDI(I)
      X(I)=X(I+1)
      INDI(I)=INDI(I+1)
      X(I+1)=TEMP
      INDI(I+1)=TEMP1
      K=1
   23 CONTINUE
   21 CONTINUE
      IF(K) 24,24,25
   24 RETURN
      END
```

FONTE: Centro de Processamento de Dados - Depto. de Matemática e Estatística - ESALQ/USP.

PROGRAMA 1

```
C     PROGRAMADORA:  MARIA CRISTINA STOLF NOGUEIRA
      DEFINE FILE 1 (1000,9,U,II)
      DIMENSION XM(4),SS(4),C(3,4),X(4,20),XT(4),S(4),CC(4),Y(3),VY(3),
     *F(3),X1(1000),INDI(1000)
      READ(2,1000)I,J,IX,NCASO
1000  FORMAT(2I3,2I5)
      READ(2,1001)(XM(K),K=1,I)
1001  FORMAT(10F8.2)
      READ(2,1002)(S(K),K=1,I)
1002  FORMAT(10F8.4)
      NC=I-1
      READ(2,1003)((C(L,K),K=1,I),L=1,NC)
1003  FORMAT(20F4.0)
      II=1
      DO 100 NN=1,8
      IX=IX+20
      DO 100 N=1,125
      DO 10 K=1,I
      DO 10 L=1,J
      CALL UNNOR(Y1,XM(K),S(K),IX)
   10 X(K,L)=Y1
      DO 20 K=1,I
      XT(K)=0,
   20 SS(K)=0
      DO 31 K=1,I
      DO 30 L=1,J
      XT(K)=XT(K)+X(K,L)
   30 SS(K)=SS(K)+X(K,L)*X(K,L)
      SS(K)=(SS(K)-XT(K)*XT(K)/J)/(J-1)
   31 CONTINUE
      DO 50 L=1,NC
      CC(L)=0
      Y(L)=0
   50 VY(L)=0
      DO 61 L=1,NC
      DO 60 K=1,I
      Y(L)=Y(L)+C(L,K)*XT(K)
   60 CC(L)= CC(L)+C(L,K)*C(L,K)
   61 CONTINUE
      DO 71 L=1,NC
      DO 70 K=1,I
   70 VY(L)=VY(L)+C(L,K)*C(L,K)*SS(K)
      F(L)=((Y(L)*Y(L))/VY(L))/J
   71 CONTINUE
      WRITE(1'II)(F(L),L=1,NC)
  100 CONTINUE
      DO 81 L=1,NC
      II=1
```

PROGRAMA 1: Continuação.

```
      DO 80 N=1,NCASO
      READ(1'II)(F(LL),LL=1,NC)
   80 X1(N)=F(L)
      CALL ORDEX(X1,INDI,NCASO)
      WRITE(3,1104)(X1(N),N=1,NCASO)
 1104 FORMAT(10F12.6)
      WRITE(3,1110)
 1110 FORMAT(//)
   81 CONTINUE
      STOP
      END
```

Comentários sobre a entrada de dados:

I - nº de tratamentos .

J - nº de repetições .

IX - nº aleatório, inteiro, positivo e impar .

NCASO - nº de experimentos gerados .

XM(K) - média populacional de cada tratamento .

S(K) - desvio padrão populacional de cada tratamento .

C(L,K) - K-ésimo termo do contraste Y(L) .

NC - número de contrastes

PROGRAMA 2

```
10 PRINT "F-DISTRIBUTION"
20 PRINT
30 PRINT "(TO END PROGRAM ENTER AN F-VALUE OF Ø)"
40 PRINT "F-VALUE"
50 INPUT F
60 IF F =Ø THEN 340
70 PRINT "DEGREES OF FREEDOM IN NUMERATOR";
80 INPUT D1
90 PRINT "DEGREES OF FREEDOM IN DENOMINATOR";
1ØØ INPUT D2
11Ø X = 1
119 REM-COMPUTE USING INVERSE FOR SMALL F-VALUES
12Ø IF F<1 THEN 170
13Ø S = D1
14Ø T = D2
15Ø Z = F
16Ø GO TO 2ØØ
17Ø S = D2
18Ø T = D1
19Ø Z = 1/F
2ØØ J = 2 / 9 / S
21Ø K = 2 / 9 / T
219 REM - COMPUTE USING APROXIMATION FORMULAS
22Ø Y= ABS((1-K)*Z^(1/3)-1+J)/SQR(K*Z^(2/3)+J)
23Ø IF T<4 THEN 270
24Ø X = .5/(1+Y*(.196854+Y*(.115194+Y*(.000344+
                          +Y*.019527))))^4
25Ø X = INT(X*10000+.5)/10000
26Ø GO TO 29Ø
27Ø Y = Y*(1+.08*Y^4/T^3)
28Ø GO TO 24Ø
289 REM - ADJUST IF INVERSE WAS COMPUTED
29Ø IF F>= 1 THEN 31Ø
3ØØ X = 1-X
31Ø PRINT "PERCENTILE="; 1-X
32Ø PRINT
33Ø GO TO 4Ø
340 END
```

FONTE: POOLE, L. e M. BORCHERS (1979).

PROGRAMA 3

```
10  PRINT "CHI-SQUARE DISTRIBUTION"
20  PRINT
30  PRINT "(TO END PROGRAM ENTER 0)"
40  PRINT "DEGREES OF FREEDOM";
50  INPUT V
60  IF V = 0 THEN 280
70  PRINT "CHI-SQUARE";
80  INPUT W
89  REM - R = THE DENOMINATOR PRODUCT
90  R = 1
100 FOR I = V TO 2 STEP - 2
110 R = R*I
120 NEXT I
129 REM - K = THE NUMERATOR PRODUCT
130 K = W^(INT((V+1)/2))*EXP(-W/2)/R
139 REM - THE PI FACTOR IS USED ONLY WHEN DEG.
    FREEDOM ARE ODD
140 IF INT(V/2) = V/2 THEN 170
150 J = SQR(2/W/3.141592653599)
160 GO TO 180
169 REM - L(SUMMATION FACTOR) CALCULATED
    LINES 170 - 240
170 J = 1
180 L = 1
190 M = 1
200 V = V + 2
210 M = M*W/V
219 REM - CHECK FOR END OF SUMMATION
220 IF M<.0000001 THEN 250
230 L = L+M
240 GO TO 200
250 PRINT "TAIL END VALUE="; 1-J*K*L
260 PRINT
270 GO TO 40
280 END
```

FONTE: POOLE, L. e M. BORCHERS (1979).

A P Ê N D I C E 3 : Tabelas

TABELA 1: Valores das Somas de Quadrados dos resíduos específicos associados aos contrastes Y(1), Y(2) , Y(3) e "entre repetições".

SOMAS DE QUADRADOS			
R Y(1)	R Y(2)	R Y(3)	"ENTRE REPETIÇÕES"
6,3333	7,0000	11,1667	32,1667
6,3333	13,0000	8,1667	29,1667
6,3333	7,0000	24,6667	18,6667
6,3333	19,0000	18,6667	12,6667
6,3333	21,0000	13,1667	16,1667
6,3333	3,0000	22,1667	25,1667
6,3333	3,0000	4,1667	43,1667
6,3333	7,0000	2,1667	41,6667
6,3333	13,0000	12,6667	24,6667
6,3333	21,0000	8,6667	20,6667
6,3333	19,0000	5,1667	26,1667
6,3333	7,0000	11,1667	32,1667
6,3333	7,0000	2,1667	41,1667
6,3333	3,0000	4,1667	43,1667
6,3333	21,0000	8,6667	20,6667
6,3333	13,0000	12,6667	24,6667
6,3333	7,0000	11,1667	32,1667
6,3333	19,0000	5,1667	26,1667

TABELA 1: Continuação.

SOMAS DE QUADRADOS			
R Y(1)	R Y(2)	R Y(3)	"ENTRE REPETIÇÕES"
6,3333	19,0000	23,1667	8,1667
6,3333	21,0000	22,1667	7,1667
6,3333	3,0000	44,6667	2,6667
6,3333	7,0000	42,6667	0,6667
6,3333	13,0000	35,1667	2,1667
6,3333	7,0000	38,1667	5,1667
6,3333	21,0000	22,1667	7,1667
6,3333	19,0000	23,1667	8,1667
6,3333	7,0000	42,6667	0,6667
6,3333	3,0000	44,6667	2,6667
6,3333	7,0000	38,1667	5,1667
6,3333	13,0000	35,1667	2,1667
6,3333	13,0000	8,1667	29,1667
6,3333	7,0000	11,1667	32,1667
6,3333	19,0000	18,1667	12,6667
6,3333	7,0000	24,6667	18,6667
6,3333	3,0000	22,1667	25,1667
6,3333	21,0000	13,1667	16,1667

TABELA 1: Continuação.

SOMAS DE QUADRADOS			
R Y(1)	R Y(2)	R Y(3)	"ENTRE REPETIÇÕES"
20,3333	7,0000	4,1667	25,1667
20,3333	13,0000	4,6667	18,6667
20,3333	7,0000	0,1667	29,1667
20,3333	19,0000	1,1667	16,1667
20,3333	21,0000	2,6667	12,6667
20,3333	3,0000	1,1667	32,1667
20,3333	3,0000	11,1667	22,1667
20,3333	7,0000	12,6667	16,6667
20,3333	13,0000	2,1667	21,1667
20,3333	21,0000	5,1667	10,1667
20,3333	19,0000	8,6667	8,6667
20,3333	7,0000	4,1667	25,1667
20,3333	19,0000	2,1667	15,1667
20,3333	21,0000	4,6667	10,6667
20,3333	3,0000	6,1667	27,1667
20,3333	7,0000	11,1667	18,1667
20,3333	13,0000	10,6667	12,6667
20,3333	7,0000	3,1667	26,1667

TABELA 1: Continuação.

SOMAS DE QUADRADOS			
R Y(1)	R Y(2)	R Y(3)	"ENTRE REPETIÇÕES"
20,3333	21,0000	8,1667	7,1667
20,3333	19,0000	12,6667	4,6667
20,3333	7,0000	11,1667	18,1667
20,3333	3,0000	20,1667	13,1667
20,3333	7,0000	20,6667	8,6667
20,3333	13,0000	7,1667	16,1667
20,3333	13,0000	22,1667	1,1667
20,3333	7,0000	28,6667	0,6667
20,3333	19,0000	15,1667	2,1667
20,3333	7,0000	28,1667	1,1667
20,3333	3,0000	32,6667	0,6667
20,3333	21,0000	13,1667	2,1667
20,3333	7,0000	23,1667	6,1667
20,3333	3,0000	28,6667	4,6667
20,3333	21,0000	12,1667	3,1667
20,3333	13,0000	23,1667	0,1667
20,3333	7,0000	28,6667	0,6667
20,3333	19,0000	12,1667	5,1667

TABELA 1: Continuação.

SOMAS DE QUADRADOS			
R Y(1)	R Y(2)	R Y(3)	"ENTRE REPE-TIÇÕES"
5,3333	7,0000	8,1667	36,1667
5,3333	7,0000	21,1667	23,1667
5,3333	13,0000	6,1667	32,1667
5,3333	19,0000	17,1667	15,1667
5,3333	21,0000	12,1667	18,1667
5,3333	3,0000	2,1667	46,1667
5,3333	3,0000	18,1667	30,1667
5,3333	7,0000	1,1667	43,1667
5,3333	13,0000	10,1667	28,1667
5,3333	19,0000	5,1667	27,1667
5,3333	21,0000	8,1667	22,1667
5,3333	7,0000	8,1667	36,1667
5,3333	19,0000	22,1667	10,1667
5,3333	3,0000	43,1667	5,1667
5,3333	21,0000	22,1667	8,1667
5,3333	7,0000	43,1667	1,1667
5,3333	13,0000	36,1667	2,1667
5,3333	21,0000	23,1667	7,1667

TABELA 1: Continuação.

SOMAS DE QUADRADOS			
R Y(1)	R Y(2)	R Y(3)	ENTRE REPETIÇÕES
5,3333	7,0000	36,1667	8,1667
5,3333	19,0000	25,1667	7,1667
5,3333	7,0000	43,1667	1,1667
5,3333	3,0000	47,1667	1,1667
5,3333	7,0000	41,1667	3,1667
5,3333	13,0000	35,1667	3,1667
5,3333	13,0000	11,1667	27,1667
5,3333	19,0000	21,1667	11,1667
5,3333	7,0000	15,1667	29,1667
5,3333	7,0000	29,1667	15,1667
5,3333	3,0000	27,1667	21,1667
5,3333	7,0000	4,1667	40,1667
5,3333	21,0000	15,1667	15,1667
5,3333	3,0000	7,1667	41,1667
5,3333	21,0000	10,1667	20,1667
5,3333	7,0000	15,1667	29,1667
5,3333	13,0000	16,1667	22,1667
5,3333	19,0000	6,1667	26,1667

TABELA 1: Continuação.

SOMAS DE QUADRADOS			
R Y(1)	R Y(2)	R Y(3)	"ENTRE REPETIÇÕES"
17,3333	7,0000	2,1667	30,1667
17,3333	13,0000	3,1667	23,1667
17,3333	7,0000	0,1667	32,1667
17,3333	19,0000	2,1667	18,1667
17,3333	21,0000	3,1667	15,1667
17,3333	3,0000	0,1667	36,1667
17,3333	3,0000	8,1667	28,1667
17,3333	7,0000	10,1667	22,1667
17,3333	13,0000	1,1667	25,1667
17,3333	21,0000	5,1667	13,1667
17,3333	19,0000	8,1667	12,1667
17,3333	7,0000	2,1667	30,1667
17,3333	19,0000	4,1667	16,1667
17,3333	21,0000	7,1667	11,1667
17,3333	3,0000	10,1667	26,1667
17,3333	7,0000	16,1667	16,1667
17,3333	13,0000	15,1667	11,1667
17,3333	7,0000	6,1667	26,1667

TABELA 1: Continuação.

SOMAS DE QUADRADOS			
R Y(1)	R Y(2)	R Y(3)	"ENTRE REPETIÇÕES"
17,3333	21,0000	11,1667	7,1667
17,3333	19,0000	16,1667	4,1667
17,3333	7,0000	16,1667	16,1667
17,3333	3,0000	26,1667	10,1667
17,3333	7,0000	26,1667	6,1667
17,3333	13,0000	11,1667	15,1667
17,3333	13,0000	23,1667	3,1667
17,3333	7,0000	30,1667	2,1667
17,3333	19,0000	18,1667	2,1667
17,3333	7,0000	32,1667	0,1667
17,3333	3,0000	36,1667	0,1667
17,3333	21,0000	15,1667	3,1667
17,3333	7,0000	22,1667	10,1667
17,3333	21,0000	13,1667	5,1667
17,3333	13,0000	25,1667	1,1667
17,3333	7,0000	30,1667	2,1667
17,3333	19,0000	12,1667	8,1667
17,3333	3,0000	28,1667	8,1667

TABELA 1: Continuação.

SOMAS DE QUADRADOS			
R Y(1)	R Y(2)	R Y(3)	"ENTRE REPE-TIÇÕES"
24,3333	7,0000	23,1667	2,1667
24,3333	13,0000	17,1667	2,1667
24,3333	7,0000	24,6667	0,6667
24,3333	19,0000	12,6667	0,6667
24,3333	21,0000	10,1667	1,1667
24,3333	3,0000	28,1667	1,1667
24,3333	3,0000	22,1667	7,1667
24,3333	7,0000	17,1667	8,1667
24,3333	13,0000	18,6667	0,6667
24,3333	21,0000	8,6667	2,6667
24,3333	19,0000	8,1667	5,1667
24,3333	7,0000	23,1667	2,1667
24,3333	19,0000	11,1667	2,1667
24,3333	21,0000	7,1667	4,1667
24,3333	3,0000	20,6667	8,6667
24,3333	7,0000	12,6667	12,6667
24,3333	13,0000	8,1667	11,1667
24,3333	7,0000	20,1667	5,1667

TABELA 1: Continuação.

SOMAS DE QUADRADOS			
R Y(1)	R Y(2)	R Y(3)	"ENTRE REPE - TIÇÕES"
24,3333	21,0000	4,1667	7,1667
24,3333	19,0000	2,1667	11,1667
24,3333	7,0000	12,6667	12,6667
24,3333	3,0000	8,6667	20,6667
24,3333	7,0000	5,1667	20,1667
24,3333	13,0000	11,1667	8,1667
24,3333	13,0000	2,1667	17,1667
24,3333	7,0000	2,1667	23,1667
24,3333	19,0000	0,6667	12,6667
24,3333	7,0000	0,6667	24,6667
24,3333	3,0000	1,1667	28,1667
24,3333	21,0000	1,1667	10,1667
24,3333	7,0000	8,1667	17,1667
24,3333	3,0000	7,1667	22,1667
24,3333	21,0000	2,6667	8,6667
24,3333	13,0000	0,6667	18,6667
24,3333	7,0000	2,1667	23,1667
24,3333	19,0000	5,1667	8,1667

TABELA 1: Continuação.

SOMAS DE QUADRADOS			
R Y(1)	R Y(2)	R Y(3)	"ENTRE REPETIÇÕES"
26,3333	7,0000	22,1667	1,1667
26,3333	13,0000	16,6667	0,6667
26,3333	7,0000	21,1667	2,1667
26,3333	19,0000	10,1667	1,1667
26,3333	21,0000	8,6667	0,6667
26,3333	3,0000	25,1667	2,1667
26,3333	3,0000	23,1667	4,1667
26,3333	7,0000	18,6667	4,6667
26,3333	13,0000	17,1667	0,1667
26,3333	21,0000	8,1667	1,1667
26,3333	19,0000	8,6667	2,6667
26,3333	7,0000	22,1667	1,1667
26,3333	19,0000	8,1667	3,1667
26,3333	21,0000	4,6667	4,6667
26,3333	3,0000	15,1667	12,1667
26,3333	7,0000	8,1667	15,1667
26,3333	13,0000	4,6667	12,6667
26,3333	7,0000	15,1667	8,1667

TABELA 1: Continuação.

SOMAS DE QUADRADOS			
R Y(1)	R Y(2)	R Y(3)	"ENTRE REPETIÇÕES"
26,3333	21,0000	2,1667	7,1667
26,3333	19,0000	0,6667	10,6667
26,3333	7,0000	8,1667	15,1667
26,3333	3,0000	5,1667	22,1667
26,3333	7,0000	2,6667	20,6667
26,3333	13,0000	7,1667	10,1667
26,3333	13,0000	4,1667	13,1667
26,3333	7,0000	4,6667	18,6667
26,3333	19,0000	0,1667	11,1667
26,3333	7,0000	1,1667	22,1667
26,3333	3,0000	2,6667	24,6667
26,3333	21,0000	1,1667	8,1667
26,3333	7,0000	11,1667	12,1667
26,3333	3,0000	10,6667	16,6667
26,3333	21,0000	3,1667	6,1667
26,3333	13,0000	2,1667	15,1667
26,3333	7,0000	4,6667	18,6667
26,3333	19,0000	6,1667	5,1667

TABELA 2: Distribuição de frequências do QM $Y(h)/\overline{QMR}\ Y(h)$ para o contraste $Y(1) = m_1 - m_2$ e variâncias $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = 1$.

REPETIÇÕES							
4				6			
CLASSES	F(1,6)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,10)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4893	489,3	511	[0,0 - 0,5)	0,4986	498,6	528
[0,5 - 1,0)	0,6421	152,8	155	[0,5 - 1,0)	0,6573	158,7	143
[1,0 - 1,5)	0,7337	91,6	72	[1,0 - 1,5)	0,7522	94,9	85
[1,5 - 2,0)	0,7942	60,5	50	[1,5 - 2,0)	0,8144	62,2	60
[2,0 - 2,5)	0,8367	42,5	38	[2,0 - 2,5)	0,8576	43,2	50
[2,5 - 3,0)	0,8678	31,1	30	[2,5 - 3,0)	0,8887	31,1	27
[3,0 - 3,5)	0,8912	23,4	24	[3,0 - 3,5)	0,9117	23,0	25
[3,5 - 4,0)	0,9092	18,0	23	[3,5 - 4,0)	0,9290	17,3	7
[4,0 - 4,5)	0,9234	14,2	11	[4,0 - 4,5)	0,9423	13,3	10
[4,5 - 5,0)	0,9347	11,3	14	[4,5 - 5,0)	0,9526	10,3	14
[5,0 - 5,5)	0,9439	9,2	10	[5,0 - 5,5)	0,9607	8,1	6
[5,5 - 6,0)	0,9513	7,4	7	[5,5 - 6,0)	0,9672	6,5	5
[6,0 - 6,5)	0,9575	6,2	10	[6,0 - 6,5)	0,9723	5,1	5
[6,5 - 7,0)	0,9626	5,1	6	[6,5 - 7,5)	0,9799	7,6	9
[7,0 - 7,5)	0,9670	4,4	5	[7,5 - 8,5)	0,9851	5,2	5
[7,5 - 8,5)	0,9737	6,7	7	[8,5 - 11,0)	0,9922	7,1	12
[8,5 - 9,5)	0,9787	5,0	5	[11,0 - ∞)	1,0000	7,8	9
[9,5 - 11,5)	0,9854	6,7	8				
[11,5 - 14,5)	0,9908	5,4	4				
[14,5 - ∞)	1,0000	9,2	10				

TABELA 2: Continuação.

REPETIÇÕES							
8				10			
CLASSES	F(1,14)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,18)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4973	497,3	504	[0,0 - 0,5)	0,4950	495,0	497
[0,5 - 1,0)	0,6640	166,7	160	[0,5 - 1,0)	0,6678	172,8	160
[1,0 - 1,5)	0,7604	96,4	87	[1,0 - 1,5)	0,7651	97,3	86
[1,5 - 2,0)	0,8234	63,0	72	[1,5 - 2,0)	0,8285	63,4	66
[2,0 - 2,5)	0,8668	43,4	46	[2,0 - 2,5)	0,8720	43,5	49
[2,5 - 3,0)	0,8978	31,0	31	[2,5 - 3,0)	0,9029	30,9	36
[3,0 - 3,5)	0,9205	22,7	12	[3,0 - 3,5)	0,9253	22,4	18
[3,5 - 4,0)	0,9373	16,8	19	[3,5 - 4,0)	0,9419	16,6	24
[4,0 - 4,5)	0,9501	12,8	11	[4,0 - 4,5)	0,9543	12,4	13
[4,5 - 5,0)	0,9598	9,7	10	[4,5 - 5,0)	0,9637	9,4	9
[5,0 - 5,5)	0,9674	7,6	5	[5,0 - 5,5)	0,9709	7,2	5
[5,5 - 6,0)	0,9733	5,9	7	[5,5 - 6,0)	0,9765	5,6	9
[6,0 - 6,5)	0,9780	4,7	7	[6,0 - 7,0)	0,9843	7,8	9
[6,5 - 7,5)	0,9847	6,7	6	[7,0 - 8,5)	0,9910	6,7	6
[7,5 - 9,0)	0,9907	6,0	11	[8,5 - ∞)	1,0000	9,0	13
[9,0 - ∞)	1,0000	9,3	12				

TABELA 3: Distribuição de frequências do QM $Y(h)/\overline{QMR}\ Y(h)$ para o contraste $Y(2) = m_3 - m_4$ e variâncias $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = 1$.

REPETIÇÕES							
4				6			
CLASSES	F(1,6)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,10)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4893	489,3	490	[0,0 - 0,5)	0,4986	498,6	503
[0,5 - 1,0)	0,6421	152,8	172	[0,5 - 1,0)	0,6573	158,7	142
[1,0 - 1,5)	0,7337	91,6	14	[1,0 - 1,5)	0,7522	94,9	113
[1,5 - 2,0)	0,7942	60,5	46	[1,5 - 2,0)	0,8144	62,2	61
[2,0 - 2,5)	0,8367	42,5	37	[2,0 - 2,5)	0,8576	43,2	52
[2,5 - 3,0)	0,8678	31,1	28	[2,5 - 3,0)	0,8887	31,1	24
[3,0 - 3,5)	0,8912	23,4	22	[3,0 - 3,5)	0,9117	23,0	24
[3,5 - 4,0)	0,9092	18,0	10	[3,5 - 4,0)	0,9290	17,3	16
[4,0 - 4,5)	0,9234	14,2	15	[4,0 - 4,5)	0,9423	13,3	6
[4,5 - 5,0)	0,9347	11,3	17	[4,5 - 5,0)	0,9526	10,3	9
[5,0 - 5,5)	0,9439	9,2	11	[5,0 - 5,5)	0,9607	8,1	8
[5,5 - 6,0)	0,9513	7,4	4	[5,5 - 6,0)	0,9672	6,5	12
[6,0 - 6,5)	0,9575	6,2	5	[6,0 - 7,0)	0,9765	9,3	6
[6,5 - 7,0)	0,9626	5,1	1	[7,0 - 8,0)	0,9828	6,3	7
[7,0 - 8,0)	0,9706	8,0	10	[8,0 - 9,5)	0,9887	5,9	9
[8,0 - 9,0)	0,9764	5,8	9	[9,5 - 12,5)	0,9945	5,8	5
[9,0 - 10,5)	0,9825	6,1	8	[12,5 - ∞)	1,0000	5,5	3
[10,5 - 13,0)	0,9886	6,1	8				
[13,0 - 18,0)	0,9941	5,5	9				
[18,0 - ∞)	1,0000	5,9	4				

TABELA 3: Continuação.

REPETIÇÕES							
8				10			
CLASSES	F(1,14)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,18)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4973	497,3	507	[0,0 - 0,5)	0,4950	495,0	504
[0,5 - 1,0)	0,6640	166,7	139	[0,5 - 1,0)	0,6678	172,8	156
[1,0 - 1,5)	0,7604	96,4	90	[1,0 - 1,5)	0,7651	97,3	98
[1,5 - 2,0)	0,8234	63,0	85	[1,5 - 2,0)	0,8285	63,4	69
[2,0 - 2,5)	0,8668	43,4	47	[2,0 - 2,5)	0,8720	43,5	37
[2,5 - 3,0)	0,8978	31,0	30	[2,5 - 3,0)	0,9029	30,9	31
[3,0 - 3,5)	0,9205	22,7	20	[3,0 - 3,5)	0,9253	22,4	17
[3,5 - 4,0)	0,9373	16,8	14	[3,5 - 4,0)	0,9419	16,6	20
[4,0 - 4,5)	0,9501	12,8	17	[4,0 - 4,5)	0,9543	12,4	13
[4,5 - 5,0)	0,9598	9,7	12	[4,5 - 5,0)	0,9637	9,4	11
[5,0 - 5,5)	0,9674	7,6	6	[5,0 - 5,5)	0,9709	7,2	5
[5,5 - 6,0)	0,9733	5,9	4	[5,5 - 6,0)	0,9765	5,6	7
[6,0 - 7,0)	0,9817	8,4	8	[6,0 - 7,0)	0,9843	7,8	10
[7,0 - 8,0)	0,9871	5,4	5	[7,0 - 8,5)	0,9910	6,7	7
[8,0 - 10,5)	0,9940	6,9	7	[8,5 - ∞)	1,0000	9,0	15
[10,5 - ∞)	1,0000	6,0	9				

TABELA 4: Distribuição de frequências do QM Y(h)/$\overline{\text{QMR}}$ Y(h) para o contraste $Y(3) = m_1 + m_2 - m_3 - m_4$ e variâncias $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = 1$.

REPETIÇÕES							
4				6			
CLASSES	F(1,12)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,20)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4990	499,0	494	[0,0 - 0,5)	0,4942	494,2	496
[0,5 - 1,0)	0,6612	162,2	153	[0,5 - 1,0)	0,6692	175,0	166
[1,0 - 1,5)	0,7570	95,8	97	[1,0 - 1,5)	0,7667	97,5	103
[1,5 - 2,0)	0,8196	62,6	80	[1,5 - 2,0)	0,8302	63,5	53
[2,0 - 2,5)	0,8630	43,4	38	[2,0 - 2,5)	0,8738	43,6	53
[2,5 - 3,0)	0,8940	31,0	21	[2,5 - 3,0)	0,9047	30,9	26
[3,0 - 3,5)	0,9168	22,8	24	[3,0 - 3,5)	0,9270	22,3	23
[3,5 - 4,0)	0,9339	17,1	22	[3,5 - 4,0)	0,9432	16,2	17
[4,0 - 4,5)	0,9469	13,0	13	[4,0 - 4,5)	0,9558	12,6	16
[4,5 - 5,0)	0,9569	10,0	7	[4,5 - 5,0)	0,9650	9,2	9
[5,0 - 5,5)	0,9647	7,8	7	[5,0 - 5,5)	0,9721	7,1	5
[5,5 - 6,0)	0,9708	6,1	9	[5,5 - 6,0)	0,9776	5,5	5
[6,0 - 6,5)	0,9757	4,9	6	[6,0 - 7,0)	0,9852	7,6	9
[6,5 - 7,5)	0,9828	7,1	5	[7,0 - 8,5)	0,9916	6,4	8
[7,5 - 9,0)	0,9892	6,4	12	[8,5 - ∞)	1,0000	8,4	11
[9,0 - 11,5)	0,9945	5,3	2				
[11,5 - ∞)	1,0000	5,5	10				

TABELA 4: Continuação.

REPETIÇÕES							
8				10			
CLASSES	F(1,28)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,36)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4920	492,0	515	[0,0 - 0,5)	0,4909	490,9	511
[0,5 - 1,0)	0,6727	180,7	162	[0,5 - 1,0)	0,6746	183,7	168
[1,0 - 1,5)	0,7710	98,3	106	[1,0 - 1,5)	0,7733	98,7	81
[1,5 - 2,0)	0,8348	63,8	63	[1,5 - 2,0)	0,8374	64,1	72
[2,0 - 2,5)	0,8785	43,7	35	[2,0 - 2,5)	0,8811	43,7	44
[2,5 - 3,0)	0,9092	30,7	24	[2,5 - 3,0)	0,9118	30,7	41
[3,0 - 3,5)	0,9313	22,1	22	[3,0 - 3,5)	0,9337	21,9	26
[3,5 - 4,0)	0,9475	16,2	20	[3,5 - 4,0)	0,9497	16,0	21
[4,0 - 4,5)	0,9594	11,9	13	[4,0 - 4,5)	0,9615	11,8	15
[4,5 - 5,0)	0,9684	9,0	6	[4,5 - 5,0)	0,9702	8,7	4
[5,0 - 5,5)	0,9751	6,7	4	[5,0 - 5,5)	0,9767	6,5	4
[5,5 - 6,0)	0,9803	5,2	4	[5,5 - 6,0)	0,9817	5,0	2
[6,0 - 7,0)	0,9873	7,0	5	[6,0 - 7,0)	0,9884	6,7	5
[7,0 - 9,0)	0,9943	7,0	11	[7,0 - 8,5)	0,9939	5,5	3
[9,0 - ∞)	1,0000	5,7	10	[8,5 - ∞)	1,0000	6,1	3

TABELA 5: Distribuição de frequências do QM Y(h)/$\overline{\text{QMR}}$ Y(h), para o contraste $Y(1) = m_1 - m_2$ e variâncias $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$.

REPETIÇÕES							
4				8			
CLASSES	F(1,6)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,14)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4893	489,3	488	[0,0 - 0,5)	0,4973	497,3	515
[0,5 - 1,0)	0,6421	152,8	149	[0,5 - 1,0)	0,6640	166,7	163
[1,0 - 1,5)	0,7337	91,6	97	[1,0 - 1,5)	0,7604	96,4	74
[1,5 - 2,0)	0,7942	60,5	60	[1,5 - 2,0)	0,8234	63,0	71
[2,0 - 2,5)	0,8367	42,5	43	[2,0 - 2,5)	0,8668	43,4	40
[2,5 - 3,0)	0,8678	31,1	29	[2,5 - 3,0)	0,8978	31,0	32
[3,0 - 3,5)	0,8912	23,4	25	[3,0 - 3,5)	0,9205	22,7	17
[3,5 - 4,0)	0,9092	18,0	16	[3,5 - 4,0)	0,9373	16,8	15
[4,0 - 4,5)	0,9234	14,2	24	[4,0 - 4,5)	0,9501	12,8	24
[4,5 - 5,0)	0,9347	11,3	11	[4,5 - 5,0)	0,9598	9,7	10
[5,0 - 5,5)	0,9439	9,2	2	[5,0 - 5,5)	0,9674	7,6	8
[5,5 - 6,0)	0,9513	7,4	5	[5,5 - 6,0)	0,9733	5,9	5
[6,0 - 6,5)	0,9575	6,2	5	[6,0 - 7,0)	0,9817	8,4	4
[6,5 - 7,0)	0,9626	5,1	5	[7,0 - 8,5)	0,9890	7,3	4
[7,0 - 7,5)	0,9670	4,4	3	[8,5 - 10,5)	0,9940	5,0	8
[7,5 - 8,5)	0,9737	6,7	9	[10,5 - ∞)	1,0000	6,0	10
[8,5 - 9,5)	0,9787	5,0	4				
[9,5 - 11,0)	0,9840	5,3	7				
[11,0 - 14,5)	0,9908	6,9	8				
[14,5 - ∞)	1,0000	9,2	10				

TABELA 5: Continuação.

REPETIÇÕES			
10			
CLASSES	F(1,18)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4950	495,0	495
[0,5 - 1,0)	0,6678	172,8	161
[1,0 - 1,5)	0,7651	97,3	99
[1,5 - 2,0)	0,8285	63,4	79
[2,0 - 2,5)	0,8720	43,5	49
[2,5 - 3,0)	0,9029	30,9	23
[3,0 - 3,5)	0,9253	22,4	15
[3,5 - 4,0)	0,9419	16,6	17
[4,0 - 4,5)	0,9543	12,4	11
[4,5 - 5,0)	0,9637	9,4	8
[5,0 - 5,5)	0,9709	7,2	9
[5,5 - 6,5)	0,9809	10,0	9
[6,5 - 7,5)	0,9870	6,1	12
[7,5 - 9,5)	0,9936	6,6	9
[9,5 - ∞)	1,0000	6,4	4

TABELA 6: Distribuição de frequências do QM $Y(h)/\overline{QMR}\ Y(h)$, para o contraste $Y(2) = m_1 + m_2 - 2m_3$ e variâncias $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$.

REPETIÇÕES							
4				8			
CLASSES	F(1,6)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,14)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4893	489,3	500	[0,0 - 0,5)	0,4973	497,3	500
[0,5 - 1,0)	0,6421	152,8	140	[0,5 - 1,0)	0,6640	166,7	159
[1,0 - 1,5)	0,7337	91,6	84	[1,0 - 1,5)	0,7604	96,4	107
[1,5 - 2,0)	0,7942	60,5	61	[1,5 - 2,0)	0,8234	63,0	59
[2,0 - 2,5)	0,8367	42,5	41	[2,0 - 2,5)	0,8668	43,4	41
[2,5 - 3,0)	0,8670	31,1	38	[2,5 - 3,0)	0,8978	31,0	29
[3,0 - 3,5)	0,8912	23,4	16	[3,0 - 3,5)	0,9205	22,7	23
[3,5 - 4,0)	0,9092	18,0	18	[3,5 - 4,0)	0,9373	16,8	14
[4,0 - 4,5)	0,9234	14,2	18	[4,0 - 4,5)	0,9501	12,8	9
[4,5 - 5,0)	0,9347	11,3	12	[4,5 - 5,0)	0,9598	9,7	8
[5,0 - 5,5)	0,9439	9,2	16	[5,0 - 5,5)	0,9674	7,6	9
[5,5 - 6,0)	0,9513	7,4	9	[5,5 - 6,0)	0,9733	5,9	3
[6,0 - 6,5)	0,9575	6,2	8	[6,0 - 7,0)	0,9817	8,4	7
[6,5 - 7,0)	0,9626	5,1	6	[7,0 - 8,0)	0,9871	5,4	12
[7,0 - 8,0)	0,9706	8,0	10	[8,0 - 11,0)	0,9948	7,7	12
[8,0 - 9,5)	0,9787	8,2	10	[11,0 - ∞)	1,0000	5,2	8
[9,5 - 11,0)	0,9840	5,2	4				
[11,0 - 14,0)	0,9902	6,2	6				
[14,0 - ∞)	1,0000	9,8	3				

TABELA 6: Continuação.

	REPETIÇÕES		
	10		
CLASSES	F(1,18)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4950	495,0	488
[0,5 - 1,0)	0,6678	172,8	182
[1,0 - 1,5)	0,7651	97,3	95
[1,5 - 2,0)	0,8285	63,4	66
[2,0 - 2,5)	0,8720	43,5	43
[2,5 - 3,0)	0,9029	30,9	21
[3,0 - 3,5)	0,9253	22,4	24
[3,5 - 4,0)	0,9419	16,6	21
[4,0 - 4,5)	0,9543	12,4	7
[4,5 - 5,0)	0,9637	9,4	10
[5,0 - 5,5)	0,9709	7,2	13
[5,5 - 6,0)	0,9765	5,6	5
[6,0 - 7,0)	0,9843	7,8	5
[7,0 - 8,5)	0,9910	6,7	6
[8,5 - ∞)	1,0000	9,0	14

TABELA 7: Distribuição de frequências do QM $Y(h)/\overline{QMR}\ Y(h)$, para o contraste $Y(1) = m_1 - m_2$ e variâncias $\sigma_1^2 = 4$; $\sigma_2^2 = 9$; $\sigma_3^2 = 36$ e $\sigma_4^2 = 16$.

REPETIÇÕES							
4				6			
CLASSES	F(1,5)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,9)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4847	484,7	497	[0,0 - 0,5)	0,4970	497,0	516
[0,5 - 1,0)	0,6348	150,1	158	[0,5 - 1,0)	0,6547	157,7	146
[1,0 - 1,5)	0,7249	90,1	83	[1,0 - 1,5)	0,7491	94,4	87
[1,5 - 2,0)	0,7845	59,6	62	[1,5 - 2,0)	0,8110	61,9	68
[2,0 - 2,5)	0,8266	42,1	40	[2,0 - 2,5)	0,8541	43,1	41
[2,5 - 3,0)	0,8575	30,9	27	[2,5 - 3,0)	0,8852	31,1	26
[3,0 - 3,5)	0,8810	23,5	14	[3,0 - 3,5)	0,9083	23,1	27
[3,5 - 4,0)	0,8993	18,3	20	[3,5 - 4,0)	0,9257	17,4	12
[4,0 - 4,5)	0,9138	14,5	15	[4,0 - 4,5)	0,9392	13,5	13
[4,5 - 5,0)	0,9255	11,7	10	[4,5 - 5,0)	0,9497	10,5	8
[5,0 - 5,5)	0,9350	9,5	9	[5,0 - 5,5)	0,9580	8,3	10
[5,5 - 6,0)	0,9429	7,9	13	[5,5 - 6,0)	0,9646	6,6	5
[6,0 - 6,5)	0,9494	6,5	4	[6,0 - 6,5)	0,9700	5,4	3
[6,5 - 7,0)	0,9550	5,6	8	[6,5 - 7,5)	0,9780	8,0	7
[7,0 - 8,0)	0,9637	8,7	9	[7,5 - 8,5)	0,9834	5,4	9
[8,0 - 9,0)	0,9701	6,4	8	[8,5 - 10,0)	0,9887	5,3	5
[9,0 - 10,5)	0,9770	6,9	2	[10,0 - 13,0)	0,9942	5,5	10
[10,5 - 12,5)	0,9831	6,1	4	[13,0 - ∞)	1,0000	5,8	7
[12,5 - 17,0)	0,9903	7,2	8				
[17,0 - ∞)	1,0000	9,7	9				

TABELA 7: Continuação.

REPETIÇÕES							
8				10			
CLASSES	F(1,12)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,16)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4990	499,0	504	[0,0 - 0,5)	0,4960	496,0	518
[0,5 - 1,0)	0,6612	162,2	157	[0,5 - 1,0)	0,6662	170,2	154
[1,0 - 1,5)	0,7570	95,8	87	[1,0 - 1,5)	0,7630	96,8	79
[1,5 - 2,0)	0,8196	62,6	76	[1,5 - 2,0)	0,8262	63,2	66
[2,0 - 2,5)	0,8630	43,4	36	[2,0 - 2,5)	0,8697	43,5	41
[2,5 - 3,0)	0,8940	31,0	34	[2,5 - 3,0)	0,9007	31,0	43
[3,0 - 3,5)	0,9168	22,8	19	[3,0 - 3,5)	0,9232	22,5	22
[3,5 - 4,0)	0,9339	17,1	17	[3,5 - 4,0)	0,9399	16,7	16
[4,0 - 4,5)	0,1469	13,0	10	[4,0 - 4,5)	0,9525	12,6	14
[4,5 - 5,0)	0,9569	10,0	10	[4,5 - 5,0)	0,9620	9,5	8
[5,0 - 5,5)	0,9647	7,8	8	[5,0 - 5,5)	0,9694	7,4	5
[5,5 - 6,0)	0,9708	6,1	6	[5,5 - 6,0)	0,9751	5,7	6
[6,0 - 7,0)	0,9796	8,8	4	[6,0 - 7,0)	0,9832	8,1	6
[7,0 - 8,0)	0,9854	5,8	10	[7,0 - 8,0)	0,9883	5,1	6
[8,0 - 9,5)	0,9907	5,3	11	[8,0 - 10,0)	0,9939	5,6	4
[9,5 - ∞)	1,0000	9,3	11	[10,0 - ∞)	1,0000	6,1	12

TABELA 8: Distribuição de frequências do QM Y(h)/$\overline{\text{QMR}}$ Y(h), para o contraste $Y(2) = m_3 - m_4$ e variâncias $\sigma_1^2 = 4$; $\sigma_2^2 = 9$; $\sigma_3^2 = 36$ e $\sigma_4^2 = 16$.

REPETIÇÕES							
4				6			
CLASSES	F(1,5)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,9)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4847	484,7	510	[0,0 - 0,5)	0,4970	497,0	495
[0,5 - 1,0)	0,6348	150,1	143	[0,5 - 1,0)	0,6547	157,7	152
[1,0 - 1,5)	0,7249	90,1	89	[1,0 - 1,5)	0,7491	94,4	113
[1,5 - 2,0)	0,7845	59,6	42	[1,5 - 2,0)	0,8110	61,9	51
[2,0 - 2,5)	0,8266	42,1	49	[2,0 - 2,5)	0,8541	43,1	45
[2,5 - 3,0)	0,8575	30,9	24	[2,5 - 3,0)	0,8852	31,1	34
[3,0 - 3,5)	0,8810	23,5	28	[3,0 - 3,5)	0,9083	23,1	23
[3,5 - 4,0)	0,8993	18,3	15	[3,5 - 4,0)	0,9257	17,4	16
[4,0 - 4,5)	0,9138	14,5	13	[4,0 - 4,5)	0,9392	13,5	13
[4,5 - 5,0)	0,9255	11,7	10	[4,5 - 5,0)	0,9497	10,5	9
[5,0 - 5,5)	0,9350	9,5	12	[5,0 - 5,5)	0,9580	8,3	10
[5,5 - 6,0)	0,9429	7,9	15	[5,5 - 6,0)	0,9646	6,6	10
[6,0 - 6,5)	0,9494	6,5	3	[6,0 - 6,5)	0,9700	5,4	3
[6,5 - 7,0)	0,9550	5,6	3	[6,5 - 7,5)	0,9780	8,0	10
[7,0 - 8,0)	0,9637	8,7	6	[7,5 - 8,5)	0,9834	5,4	3
[8,0 - 9,0)	0,9701	6,4	3	[8,5 - 10,5)	0,9900	6,6	7
[9,0 - 10,5)	0,9770	6,9	8	[10,5 - ∞)	1,0000	10,0	6
[10,5 - 12,5)	0,9831	6,1	12				
[12,5 - 17,0)	0,9903	7,2	7				
[17,0 - ∞)	1,0000	9,7	8				

TABELA 8: Continuação.

REPETIÇÕES							
8				10			
CLASSES	F(1,12)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,16)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4990	499,0	494	[0,0 - 0,5)	0,4960	496,0	510
[0,5 - 1,0)	0,6612	162,2	148	[0,5 - 1,0)	0,6662	170,2	155
[1,0 - 1,5)	0,7570	95,8	97	[1,0 - 1,5)	0,7630	96,8	84
[1,5 - 2,0)	0,8196	62,6	67	[1,5 - 2,0)	0,8262	63,2	65
[2,0 - 2,5)	0,8630	43,4	57	[2,0 - 2,5)	0,8697	43,5	45
[2,5 - 3,0)	0,8940	31,0	32	[2,5 - 3,0)	0,9007	31,0	37
[3,0 - 3,5)	0,9168	22,8	26	[3,0 - 3,5)	0,9232	22,5	21
[3,5 - 4,0)	0,9339	17,1	9	[3,5 - 4,0)	0,9399	16,7	19
[4,0 - 4,5)	0,9469	13,0	11	[4,0 - 4,5)	0,9525	12,6	11
[4,5 - 5,0)	0,9569	10,0	10	[4,5 - 5,0)	0,9620	9,5	7
[5,0 - 5,5)	0,9647	7,8	7	[5,0 - 5,5)	0,9694	7,4	13
[5,5 - 6,0)	0,9708	6,1	6	[5,5 - 6,0)	0,9751	5,7	6
[6,0 - 7,0)	0,9796	8,8	17	[6,0 - 7,0)	0,9832	8,1	5
[7,0 - 8,0)	0,9854	5,8	4	[7,0 - 8,0)	0,9883	5,1	7
[8,0 - 9,5)	0,9907	5,3	7	[8,0 - 10,0)	0,9939	5,6	8
[9,5 - ∞)	1,0000	9,3	8	[10,0 - ∞)	1,0000	6,1	7

TABELA 9: Distribuição de frequências do QM $Y(h)/\overline{QMR}$ $Y(h)$, para o contraste $Y(3) = m_1 + m_2 - m_3 - m_4$ e variâncias $\sigma_1^2 = 4$; $\sigma_2^2 = 9$; $\sigma_3^2 = 36$ e $\sigma_4^2 = 16$.

REPETIÇÕES							
4				6			
CLASSES	F(1,8)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,13)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4951	495,1	497	[0,0 - 0,5)	0,4981	498,1	507
[0,5 - 1,0)	0,6515	156,4	163	[0,5 - 1,0)	0,6627	164,6	156
[1,0 - 1,5)	0,7452	93,7	83	[1,0 - 1,5)	0,7588	96,1	98
[1,5 - 2,0)	0,8068	61,6	61	[1,5 - 2,0)	0,8217	62,9	59
[2,0 - 2,5)	0,8497	42,9	38	[2,0 - 2,5)	0,8650	43,3	34
[2,5 - 3,0)	0,8803	30,6	31	[2,5 - 3,0)	0,8961	31,1	35
[3,0 - 3,5)	0,9040	23,7	16	[3,0 - 3,5)	0,9188	22,7	22
[3,5 - 4,0)	0,9216	17,6	26	[3,5 - 4,0)	0,9357	16,9	15
[4,0 - 4,5)	0,9353	13,7	14	[4,0 - 4,5)	0,9486	12,9	12
[4,5 - 5,0)	0,9460	10,7	12	[4,5 - 5,0)	0,9585	10,2	12
[5,0 - 5,5)	0,9546	8,6	9	[5,0 - 5,5)	0,9661	7,6	10
[5,5 - 6,0)	0,9614	6,8	7	[5,5 - 6,0)	0,9722	6,1	8
[6,0 - 6,5)	0,9670	5,6	4	[6,0 - 7,0)	0,9807	8,5	10
[6,5 - 7,5)	0,9754	8,4	12	[7,0 - 8,0)	0,9863	5,6	10
[7,5 - 8,5)	0,9812	5,8	8	[8,0 - 10,5)	0,9935	7,2	4
[8,5 - 10,0)	0,9869	5,7	7	[10,5 - ∞)	1,0000	6,5	8
[10,0 - 12,5)	0,9923	5,4	3				
[12,5 - ∞)	1,0000	7,7	9				

TABELA 9: Continuação.

REPETIÇÕES							
8				10			
CLASSES	F(1,18)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,23)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4950	495,0	508	[0,0 - 0,5)	0,4932	493,2	499
[0,5 - 1,0)	0,6678	172,8	157	[0,5 - 1,0)	0,6708	177,6	167
[1,0 - 1,5)	0,7651	97,3	110	[1,0 - 1,5)	0,7686	97,8	103
[1,5 - 2,0)	0,8285	63,4	62	[1,5 - 2,0)	0,8323	63,7	66
[2,0 - 2,5)	0,8720	43,5	35	[2,0 - 2,5)	0,8759	43,6	34
[2,5 - 3,0)	0,9029	30,9	29	[2,5 - 3,0)	0,9067	30,8	34
[3,0 - 3,5)	0,9253	22,4	22	[3,0 - 3,5)	0,9290	22,3	24
[3,5 - 4,0)	0,9419	16,6	24	[3,5 - 4,0)	0,9453	16,3	16
[4,0 - 4,5)	0,9543	12,4	10	[4,0 - 4,5)	0,9574	12,1	11
[4,5 - 5,0)	0,9637	9,4	6	[4,5 - 5,0)	0,9666	9,2	10
[5,0 - 5,5)	0,9709	7,2	7	[5,0 - 5,5)	0,9735	6,9	8
[5,5 - 6,0)	0,9765	5,6	4	[5,5 - 6,0)	0,9788	5,3	6
[6,0 - 7,0)	0,9843	7,8	10	[6,0 - 7,0)	0,9862	7,4	10
[7,0 - 8,5)	0,9910	6,7	6	[7,0 - 8,5)	0,9923	6,1	7
[8,5 - ∞)	1,0000	9,0	10	[8,5 - ∞)	1,0000	7,7	5

TABELA 10: Distribuição de frequências do QM Y(h)/$\overline{QMR}$ Y(h), para o contraste $Y(1) = m_1 - m_2$ e variâncias $\sigma_1^2 = 4$; $\sigma_2^2 = 9$ e $\sigma_3^2 = 36$.

REPETIÇÕES							
4				6			
CLASSES	F(1,5)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,9)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4847	484,7	499	[0,0 - 0,5)	0,4970	497,0	497
[0,5 - 1,0)	0,6348	150,1	150	[0,5 - 1,0)	0,6547	157,7	154
[1,0 - 1,5)	0,7249	90,1	81	[1,0 - 1,5)	0,7491	94,4	102
[1,5 - 2,0)	0,7845	59,6	54	[1,5 - 2,0)	0,8110	61,9	53
[2,0 - 2,5)	0,8266	42,1	43	[2,0 - 2,5)	0,8541	43,1	36
[2,5 - 3,0)	0,8575	30,9	30	[2,5 - 3,0)	0,8852	31,1	36
[3,0 - 3,5)	0,8810	23,5	24	[3,0 - 3,5)	0,9083	23,1	24
[3,5 - 4,0)	0,8993	18,3	19	[3,5 - 4,0)	0,9257	17,4	21
[4,0 - 4,5)	0,9138	14,5	18	[4,0 - 4,5)	0,9392	13,5	21
[4,5 - 5,0)	0,9255	11,7	10	[4,5 - 5,0)	0,9497	10,5	6
[5,0 - 5,5)	0,9350	9,5	10	[5,0 - 5,5)	0,9580	8,3	3
[5,5 - 6,0)	0,9429	7,9	12	[5,5 - 6,0)	0,9646	6,6	7
[6,0 - 6,5)	0,9494	6,5	6	[6,0 - 6,5)	0,9700	5,4	7
[6,5 - 7,0)	0,9550	5,6	0	[6,5 - 7,5)	0,9780	8,0	8
[7,0 - 8,0)	0,9637	8,7	9	[7,5 - 8,5)	0,9834	5,4	7
[8,0 - 9,0)	0,9701	6,4	5	[8,5 - 10,0)	0,9887	5,3	9
[9,0 - 10,5)	0,9770	6,9	7	[10,0 - 13,0)	0,9942	5,5	4
[10,5 - 12,5)	0,9831	6,1	8	[13,0 - ∞)	1,0000	5,8	5
[12,5 - 17,0)	0,9903	7,2	8				
[17,0 - ∞)	1,0000	9,7	7				

TABELA 10: Continuação.

REPETIÇÕES							
8				10			
CLASSES	F(1,12)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,16)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4990	499,0	512	[0,0 - 0,5)	0,4960	496,0	505
[0,5 - 1,0)	0,6612	162,2	148	[0,5 - 1,0)	0,6662	170,2	165
[1,0 - 1,5)	0,7570	95,8	97	[1,0 - 1,5)	0,7630	96,8	90
[1,5 - 2,0)	0,8196	62,6	52	[1,5 - 2,0)	0,8262	63,2	65
[2,0 - 2,5)	0,8630	43,4	52	[2,0 - 2,5)	0,8697	43,5	41
[2,5 - 3,0)	0,8940	31,0	33	[2,5 - 3,0)	0,9007	31,0	28
[3,0 - 3,5)	0,9168	22,8	19	[3,0 - 3,5)	0,9232	22,5	24
[3,5 - 4,0)	0,9338	17,1	19	[3,5 - 4,0)	0,9399	16,7	16
[4,0 - 4,5)	0,9469	13,0	10	[4,0 - 4,5)	0,9525	12,6	10
[4,5 - 5,0)	0,9569	10,0	14	[4,5 - 5,0)	0,9620	9,5	8
[5,0 - 5,5)	0,9647	7,8	8	[5,0 - 5,5)	0,9694	7,4	8
[5,5 - 6,0)	0,9708	6,1	7	[5,5 - 6,0)	0,9751	5,7	9
[6,0 - 7,0)	0,9796	8,8	7	[6,0 - 7,0)	0,9832	8,1	7
[7,0 - 8,0)	0,9854	5,8	5	[7,0 - 8,0)	0,9883	5,1	8
[8,0 - 9,5)	0,9907	5,3	3	[8,0 - 10,0)	0,9939	5,6	5
[9,5 - ∞)	1,0000	9,3	14	[10,0 - ∞)	1,0000	6,1	11

TABELA 10: Continuação.

	REPETIÇÕES 15		
CLASSES	F(1,24)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4929	492,9	515
[0,5 - 1,0)	0,6712	178,3	156
[1,0 - 1,5)	0,7692	98,0	99
[1,5 - 2,0)	0,8329	63,7	52
[2,0 - 2,5)	0,8765	43,6	45
[2,5 - 3,0)	0,9073	30,8	37
[3,0 - 3,5)	0,9295	22,2	27
[3,5 - 4,0)	0,9458	16,3	16
[4,0 - 4,5)	0,9579	12,1	13
[4,5 - 5,0)	0,9670	9,1	5
[5,0 - 5,5)	0,9739	6,9	8
[5,5 - 6,0)	0,9792	5,3	4
[6,0 - 7,0)	0,9864	7,2	8
[7,0 - 8,5)	0,9925	6,1	4
[8,5 - ∞)	1,0000	7,5	11

TABELA 11: Distribuição de frequências do QM Y(h)/$\overline{\text{QMR}}$ Y(h), para o contraste $Y(3) = m_1 + m_2 - 2m_3$ e variâncias $\sigma_1^2 = 4$; $\sigma_2^2 = 9$ e $\sigma_3^2 = 36$.

REPETIÇÕES							
4				6			
CLASSES	F(1,4)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,6)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4780	478,0	494	[0,0 - 0,5)	0,4893	489,3	519
[0,5 - 1,0)	0,6242	146,2	138	[0,5 - 1,0)	0,6421	152,8	146
[1,0 - 1,5)	0,7120	87,8	79	[1,0 - 1,5)	0,7337	91,6	84
[1,5 - 2,0)	0,7703	58,3	52	[1,5 - 2,0)	0,7942	60,5	66
[2,0 - 2,5)	0,8117	41,4	31	[2,0 - 2,5)	0,8367	42,5	41
[2,5 - 3,0)	0,8424	30,7	29	[2,5 - 3,0)	0,8678	31,1	19
[3,0 - 3,5)	0,8660	23,6	28	[3,0 - 3,5)	0,8912	23,4	24
[3,5 - 4,0)	0,8845	18,5	22	[3,5 - 4,0)	0,9092	18,0	17
[4,0 - 4,5)	0,8993	14,8	25	[4,0 - 4,5)	0,9234	14,2	11
[4,5 - 5,0)	0,9114	12,1	11	[4,5 - 5,0)	0,9347	11,3	13
[5,0 - 5,5)	0,9214	10,0	16	[5,0 - 5,5)	0,9439	9,2	8
[5,5 - 6,0)	0,9297	8,3	6	[5,5 - 6,0)	0,9513	7,4	6
[6,0 - 6,5)	0,9368	7,1	6	[6,0 - 7,0)	0,9626	11,3	16
[6,5 - 7,0)	0,9428	6,0	4	[7,0 - 8,0)	0,9706	8,0	6
[7,0 - 7,5)	0,9479	5,1	8	[8,0 - 9,0)	0,9764	5,8	4
[7,5 - 8,5)	0,9563	8,4	12	[9,0 - 10,5)	0,9825	6,1	3
[8,5 - 9,5)	0,9627	6,4	11	[10,5 - 12,5)	0,9876	5,1	4
[9,5 - 10,5)	0,9678	5,1	6	[12,5 - 17,0)	0,9934	5,8	10
[10,5 - 12,0)	0,9735	5,7	7	[17,0 - ∞)	1,0000	6,6	3
[12,0 - 14,0)	0,9790	5,5	3				
[14,0 - 17,5)	0,9850	6,0	3				
[17,5 - 31,0)	0,9901	5,1	7				
[31,0 - ∞)	1,0000	9,9	2				

TABELA 11: Continuação.

REPETIÇÕES							
	8				10		
CLASSES	F(1,8)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,11)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4951	495,1	503	[0,0 - 0,5)	0,4999	499,9	515
[0,5 - 1,0)	0,6515	156,4	144	[0,5 - 1,0)	0,6594	159,5	145
[1,0 - 1,5)	0,7452	93,7	87	[1,0 - 1,5)	0,7548	95,4	81
[1,5 - 2,0)	0,8068	61,6	68	[1,5 - 2,0)	0,8173	62,5	73
[2,0 - 2,5)	0,8497	42,9	43	[2,0 - 2,5)	0,8605	43,2	36
[2,5 - 3,0)	0,8803	30,6	31	[2,5 - 3,0)	0,8916	31,1	28
[3,0 - 3,5)	0,9040	23,7	20	[3,0 - 3,5)	0,9145	22,9	24
[3,5 - 4,0)	0,9216	17,6	21	[3,5 - 4,0)	0,9317	17,2	21
[4,0 - 4,5)	0,9353	13,7	16	[4,0 - 4,5)	0,9448	13,1	13
[4,5 - 5,0)	0,9460	10,7	13	[4,5 - 5,0)	0,9549	10,1	14
[5,0 - 5,5)	0,9546	8,6	6	[5,0 - 5,5)	0,9629	8,0	14
[5,5 - 6,0)	0,9614	6,8	5	[5,5 - 6,0)	0,9692	6,3	2
[6,0 - 6,5)	0,9670	5,6	7	[6,0 - 6,5)	0,9742	5,0	3
[6,5 - 7,5)	0,9754	8,4	12	[6,5 - 7,5)	0,9815	7,3	7
[7,5 - 9,0)	0,9834	8,0	4	[7,5 - 9,0)	0,9883	6,8	6
[9,0 - 11,5)	0,9905	7,1	9	[9,0 - 11,5)	0,9939	5,6	9
[11,5 - ∞)	1,0000	9,5	11	[11,5 - ∞)	1,0000	6,1	9

TABELA 11: Continuação.

	REPETIÇÕES		
	15		
CLASSES	F(1,17)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4954	495,4	501
[0,5 - 1,0)	0,6670	171,6	167
[1,0 - 1,5)	0,7640	97,0	98
[1,5 - 2,0)	0,8274	63,4	63
[2,0 - 2,5)	0,8709	43,5	46
[2,5 - 3,0)	0,9018	30,9	34
[3,0 - 3,5)	0,9243	22,5	16
[3,5 - 4,0)	0,9410	16,7	15
[4,0 - 4,5)	0,9534	12,4	11
[4,5 - 5,0)	0,9629	9,5	12
[5,0 - 5,5)	0,9702	7,3	5
[5,5 - 6,0)	0,9759	5,7	6
[6,0 - 7,0)	0,9538	7,9	10
[7,0 - 8,0)	0,9888	5,0	4
[8,0 - 10,0)	0,9942	5,4	4
[10,0 - ∞)	1,0000	5,8	8

TABELA 12: Distribuição de frequências do QM Y(h)/$\overline{QMR}$ Y(h), para o contraste Y(1) = $m_1 - m_2$ e variâncias $\sigma_1^2 = 4$; $\sigma_2^2 = 9$ e $\sigma_3^2 = 16$.

REPETIÇÕES							
4				6			
CLASSES	F(1,5)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,9)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4847	484,7	482	[0,0 - 0,5)	0,4970	497,0	522
[0,5 - 1,0)	0,6348	150,1	154	[0,5 - 1,0)	0,6547	157,7	137
[1,0 - 1,5)	0,7249	90,1	87	[1,0 - 1,5)	0,7491	94,4	93
[1,5 - 2,0)	0,7845	59,6	58	[1,5 - 2,0)	0,8110	81,9	57
[2,0 - 2,5)	0,8266	42,1	38	[2,0 - 2,5)	0,8541	43,1	37
[2,5 - 3,0)	0,8575	30,9	27	[2,5 - 3,0)	0,8852	31,1	28
[3,0 - 3,5)	0,8810	23,5	36	[3,0 - 3,5)	0,9083	23,1	28
[3,5 - 4,0)	0,8993	18,3	22	[3,5 - 4,0)	0,9257	17,4	20
[4,0 - 4,5)	0,9138	14,5	17	[4,0 - 4,5)	0,9392	13,5	10
[4,5 - 5,0)	0,9255	11,7	10	[4,5 - 5,0)	0,9497	10,5	14
[5,0 - 5,5)	0,9350	9,5	10	[5,0 - 5,5)	0,9580	8,3	9
[5,5 - 6,0)	0,9429	7,9	6	[5,5 - 6,0)	0,9646	6,6	4
[6,0 - 6,5)	0,9494	6,5	8	[6,0 - 6,5)	0,9700	5,4	8
[6,5 - 7,0)	0,9550	5,6	4	[6,5 - 7,5)	0,9780	8,0	9
[7,0 - 8,0)	0,9637	8,7	7	[7,5 - 8,5)	0,9834	5,4	8
[8,0 - 9,0)	0,9701	6,4	8	[8,5 - 10,0)	0,9887	5,3	6
[9,0 - 10,5)	0,9770	6,9	6	[10,0 - 13,0)	0,9942	5,5	5
[10,5 - 12,5)	0,9831	6,1	9	[13,0 - ∞)	1,0000	5,8	5
[12,5 - 17,0)	0,9903	7,2	7				
[17,0 - ∞)	1,0000	9,7	4				

TABELA 12: Continuação.

REPETIÇÕES							
8				10			
CLASSES	F(1,12)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,16)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4990	499,0	504	[0,0 - 0,5)	0,4960	496,0	485
[0,5 - 1,0)	0,6612	162,2	163	[0,5 - 1,0)	0,6662	170,2	179
[1,0 - 1,5)	0,7570	95,8	90	[1,0 - 1,5)	0,7630	96,8	102
[1,5 - 2,0)	0,8196	62,6	44	[1,5 - 2,0)	0,8262	63,2	76
[2,0 - 2,5)	0,8630	43,4	50	[2,0 - 2,5)	0,8697	43,5	38
[2,5 - 3,0)	0,8940	31,0	35	[2,5 - 3,0)	0,9007	31,0	29
[3,0 - 3,5)	0,9168	22,8	30	[3,0 - 3,5)	0,9232	22,5	13
[3,5 - 4,0)	0,9339	17,1	21	[3,5 - 4,0)	0,9399	16,7	14
[4,0 - 4,5)	0,9469	13,0	7	[4,0 - 4,5)	0,9525	12,6	14
[4,5 - 5,0)	0,9569	10,0	11	[4,5 - 5,0)	0,9620	9,5	7
[5,0 - 5,5)	0,9647	7,8	6	[5,0 - 5,5)	0,9694	7,4	6
[5,5 - 6,0)	0,9708	6,1	5	[5,5 - 6,0)	0,9751	5,7	6
[6,0 - 7,0)	0,9796	8,8	10	[6,0 - 7,0)	0,9832	8,1	10
[7,0 - 8,0)	0,9854	5,8	6	[7,0 - 8,5)	0,9902	7,0	10
[8,0 - 9,5)	0,9907	5,3	6	[8,5 - ∞)	1,0000	9,8	11
[9,5 - ∞)	1,0000	9,3	12				

TABELA 12: Continuação.

	REPETIÇÕES		
	15		
CLASSES	F(1,24)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4929	492,9	521
[0,5 - 1,0)	0,6712	178,3	167
[1,0 - 1,5)	0,7692	98,0	92
[1,5 - 2,0)	0,8329	63,7	71
[2,0 - 2,5)	0,8765	43,6	40
[2,5 - 3,0)	0,9073	30,8	30
[3,0 - 3,5)	0,9295	22,2	11
[3,5 - 4,0)	0,9458	16,3	11
[4,0 - 4,5)	0,9579	12,1	13
[4,5 - 5,0)	0,9670	9,1	9
[5,0 - 5,5)	0,9739	6,9	6
[5,5 - 6,0)	0,9792	5,3	5
[6,0 - 7,0)	0,9864	7,2	7
[7,0 - 8,5)	0,9925	6,1	10
[8,5 - ∞)	1,0000	7,5	7

e variancias $\sigma_1^2 = 4$; $\sigma_2^2 = 9$ e $\sigma_3^2 = 16$.

REPETIÇÕES							
4				6			
CLASSES	F(1,4)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,7)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4780	478,0	488	[0,0 - 0,5)	0,4926	492,6	486
[0,5 - 1,0)	0,6242	146,2	141	[0,5 - 1,0)	0,6474	154,8	145
[1,0 - 1,5)	0,7120	87,8	87	[1,0 - 1,5)	0,7402	92,8	99
[1,5 - 2,0)	0,7703	58,3	63	[1,5 - 2,0)	0,8013	61,1	68
[2,0 - 2,5)	0,8117	41,4	24	[2,0 - 2,5)	0,8441	42,8	37
[2,5 - 3,0)	0,8424	30,7	33	[2,5 - 3,0)	0,8752	31,1	28
[3,0 - 3,5)	0,8660	23,6	29	[3,0 - 3,5)	0,8985	23,8	24
[3,5 - 4,0)	0,8845	18,5	18	[3,5 - 4,0)	0,9163	17,8	17
[4,0 - 4,5)	0,8993	14,8	16	[4,0 - 4,5)	0,9302	13,9	17
[4,5 - 5,0)	0,9114	12,1	13	[4,5 - 5,0)	0,9412	11,0	7
[5,0 - 5,5)	0,9214	10,0	13	[5,0 - 5,5)	0,9500	8,8	9
[5,5 - 6,0)	0,9297	8,3	12	[5,5 - 6,0)	0,9572	7,2	6
[6,0 - 6,5)	0,9368	7,1	7	[6,0 - 6,5)	0,9630	5,8	6
[6,5 - 7,0)	0,9428	6,0	4	[6,5 - 7,5)	0,9719	8,9	14
[7,0 - 7,5)	0,9479	5,1	10	[7,5 - 8,5)	0,9781	6,2	9
[7,5 - 8,5)	0,9563	8,4	11	[8,5 - 10,0)	0,9844	6,3	9
[8,5 - 9,5)	0,9627	6,4	4	[10,0 - 12,0)	0,9895	5,1	12
[9,5 - 10,5)	0,9678	5,1	10	[12,0 - ∞)	1,0000	10,5	8
[10,5 - 12,0)	0,9735	5,7	9				
[12,0 - 14,0)	0,9790	5,5	2				
[14,0 - 17,0)	0,9843	5,3	3				
[17,0 - 23,0)	0,9900	5,7	3				
[23,0 - ∞)	1,0000	10,0	0				

TABELA 13: Continuação.

REPETIÇÕES							
8				10			
CLASSES	F(1,10)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.	CLASSES	F(1,13)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4986	498,6	487	[0,0 - 0,5)	0,4981	498,1	477
[0,5 - 1,0)	0,6573	158,7	164	[0,5 - 1,0)	0,6627	164,6	174
[1,0 - 1,5)	0,7522	94,9	82	[1,0 - 1,5)	0,7588	96,1	98
[1,5 - 2,0)	0,8144	62,2	58	[1,5 - 2,0)	0,8217	62,9	74
[2,0 - 2,5)	0,8576	43,2	54	[2,0 - 2,5)	0,8650	43,3	40
[2,5 - 3,0)	0,8887	31,1	23	[2,5 - 3,0)	0,8961	31,1	35
[3,0 - 3,5)	0,9117	23,0	23	[3,0 - 3,5)	0,9188	22,7	25
[3,5 - 4,0)	0,9290	17,3	15	[3,5 - 4,0)	0,9357	16,9	15
[4,0 - 4,5)	0,9423	13,3	17	[4,0 - 4,5)	0,9486	12,9	6
[4,5 - 5,0)	0,9526	10,3	9	[4,5 - 5,0)	0,9585	10,2	5
[5,0 - 5,5)	0,9607	8,1	14	[5,0 - 5,5)	0,9661	7,6	12
[5,5 - 6,0)	0,9672	6,5	14	[5,5 - 6,0)	0,9722	6,1	6
[6,0 - 7,0)	0,9765	9,3	12	[6,0 - 7,0)	0,9807	8,5	12
[7,0 - 8,5)	0,9851	8,6	9	[7,0 - 8,0)	0,9863	5,6	8
[8,5 - 10,0)	0,9901	5,0	8	[8,0 - 9,5)	0,9914	5,1	5
[10,0 - ∞)	1,0000	9,9	9	[9,5 - ∞)	1,0000	8,6	8

TABELA 13: Continuação.

	REPETIÇÕES		
	15		
CLASSES	F(1,20)	FREQ. ESP.	FREQ. OBS.
[0,0 - 0,5)	0,4942	494,2	483
[0,5 - 1,0)	0,6692	175,0	189
[1,0 - 1,5)	0,7667	97,5	122
[1,5 - 2,0)	0,8302	63,5	54
[2,0 - 2,5)	0,8738	43,6	42
[2,5 - 3,0)	0,9047	30,9	30
[3,0 - 3,5)	0,9270	22,3	22
[3,5 - 4,0)	0,9432	16,2	6
[4,0 - 4,5)	0,9558	12,6	11
[4,5 - 5,0)	0,9650	9,2	6
[5,0 - 5,5)	0,9721	7,1	5
[5,5 - 6,0)	0,9776	5,5	4
[6,0 - 7,0)	0,9852	7,6	9
[7,0 - 8,5)	0,9916	6,4	8
[8,5 - ∞)	1,0000	8,4	9

TABELA 14: Resultados obtidos da aplicação do Teste de Qui-quadrado aos dados da tabela de distribuição de frequências para as variâncias (σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2): (4, 9, 16); (4, 9, 36); (1, 1, 1).

CONTRASTES	REPETIÇÕES	VARIÂNCIAS (σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2) (4, 9, 16)			(4, 9, 36)		
		χ^2	GL	α	χ^2	GL	α
Y(1)	4	16,102450	19	0,6504	12,584833	19	0,8591
	6	13,017865	17	0,7350	18,254264	17	0,3730
	8	15,144518	15	0,4411	12,351509	15	0,6523
	10	11,815199	14	0,6211	9,945751	15	0,8231
	15	13,948580	14	0,4536	13,129101	14	0,5164
Y(2)	4	40,431832	22	0,0096	35,553332	22	0,0339
	6	20,686268	17	0,2406	19,296977	18	0,3738
	8	24,428506	15	0,0581	10,274301	16	0,8519
	10	16,018494	15	0,3808	21,404300	16	0,1635
	15	18,681031	14	0,1775	6,217038	15	0,9759

TABELA 14: Continuação.

CONTRASTES	REPETIÇÕES	VARIÂNCIAS (σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2) (1, 1, 1)		
		χ^2	GL	α
Y(1)	4	16,543678	19	0,6208
	8	27,086538	15	0,0280
	10	18,239259	14	0,1961
Y(2)	4	18,875484	18	0,3995
	8	17,840612	15	0,2711
	10	16,190399	13	0,2390

TABELA 15: Resultados obtidos da aplicação do Teste de qui-quadrado aos dados da tabela de distribuição de frequências para as variâncias (σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2, σ_4^2): (1, 1, 1, 1); (4, 9, 36, 16).

CONTRASTES	REPETIÇÕES	VARIÂNCIAS (σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2, σ_4^2)					
		(1, 1, 1, 1)			(4, 9, 36, 16)		
		χ^2	GL	α	χ^2	GL	α
Y(1)	4	13,748041	19	0,7982	16,304878	19	0,6369
	6	19,186884	16	0,2591	14,937143	17	0,6000
	8	15,555499	15	0,4122	18,879099	15	0,2193
	10	12,893506	14	0,5349	18,843573	15	0,2209
Y(2)	4	25,262965	19	0,1521	30,358059	19	0,0474
	6	21,776333	16	0,1506	12,855630	16	0,6833
	8	18,440464	15	0,2402	19,515444	15	0,1913
	10	11,223943	14	0,6684	13,296550	15	0,5794
Y(3)	4	24,653666	16	0,0762	13,195333	17	0,7230
	6	8,432044	14	0,8656	10,829817	15	0,7646
	8	16,277313	14	0,2967	11,520108	14	0,6448
	10	21,411977	14	0,0915	6,072174	14	0,9647