OPERADORES DE DIFERENÇAS FINITAS: APLICAÇÕES NO CÁLCULO DOS MOMENTOS DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

CLAUDIO MARCOS MANCINI

(Licenciado em Matemática)

Orientador: Dr. Izaías Rangel Nogueira

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

P I R A C I C A B A

Estado de São Paulo - Brasil

Janeiro de 1984

À minha esposa,

A meus filhos,

A meus pais,

OFEREÇO.

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Izaías Rangel Nogueira, Professor Titular do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pela valiosa orientação, incentivo e sugestões durante a elaboração deste trabalho.

Ao Dr. Humberto de Campos, Coordenador do Curso de Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, pelas orientações e incentivos.

Ao Dr. Cássio Roberto Mello Godoi, Professor Livre Docente do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pela valiosa orientação sobre Distribuições Discretas.

Ao Dr. Antonio Francisco Iemma, Professor Assistente Doutor do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pela valiosa orientação sobre Convergência de Séries.

Ao Dr. Pedro Henrique Godinho, Professor Assistente Doutor junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas de São José do Rio Preto - UNESP, pela eficiente colaboração na correção final deste trabalho.

Às professoras e colegas Nadiege Sambaquy e Vera Sonia Sambaquy, pela colaboração na elaboração do Summary.

À minha esposa, Doralice Martins Mancini, pelo apoio, incentivo e paciência.

A meus filhos, Hilário e Cláudio, pela colaboração e paciência.

Ao corpo docente do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pelos ensinamentos recebidos durante o curso.

A todos que de uma forma ou de outra contribuiram para a realização deste trabalho.

ÍNDICE

OPERADORES DE DIFERENCAS FINITAS: APLICAÇÕES NO CÁLCULO DOS MOMENTOS DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Autor: Cláudio Marcos Mancini

Orientador: Dr. Izaías Rangel Nogueira

R E S U M O

Para se caracterizar uma distribuição de probabilidade, é de fundamental importância o conhecimento de seus principais momentos, principalmente o primeiro momento em relação à origem (média), o segundo momento em relação à média (variância), e o terceiro e o quarto momentos em relação à média, utilizados na caracterização da assimetria e da curtose, respectivamente, de uma distribuição.

Através desta dissertação pretende-se apresentar um estudo comparativo sobre o cálculo dos momentos das distribuições discretas de probabilidade: Binomial, Poisson e Geométrica, utilizando-se as funções geradoras de momentos e os operadores de diferenças finitas.

Fêz-se, para tanto, um trabalho de revisão bibliográfica e apresentou-se, de forma compacta o que se considera de maior importância para a determinação dos momentos de ordem superior, o que constitue a essencialidade deste trabalho.

Para tanto:

- define-se operador deslocamento e apresentam-se suas principais propriedades;
- define-se operador diferença e suas principais propriedades;
- apresenta-se a Lei Fundamental do cálculo de Diferenças Finitas;
- Define-se Diferenças do Zero e obtêm-se a tabela para valores de $\Delta^{J} 0^{r}$;
- define-se derivações de momentos;
- define-se a Distribuição Binomial, obtêm-se os quatro primeiros momentos utilizando-se a função geradora de momentos para essa distribuição;
- aplica-se o processo das diferenças finitas no cálculo desses momentos;

- define-se a Distribuição de Poisson, obtêm-se os quatro primeiros momentos utilizando-se a função geradora de momentos;

- utiliza-se o processo das diferenças finitas no cálculo desses momentos;

- define-se a Distribuição Geométrica, obtêm-se os quatro primeiros momentos utilizando-se, para tanto, a função geradora de momentos;

- aplica-se o processo das diferenças finitas no cálculo desses momentos.

FINITE DIFFERENCE OPERATORS: SOME APPLICATIONS IN THE CALCULUS OF MOMENTS OF DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS.

Candidate: Cláudio Marcos Mancini

Adviser : Dr. Izaías Rangel Nogueira

S U M M A R Y

This dissertation is mostly a literature review on moments of probability distributions, moment generating functions as well as the use of Finite Difference in calculation of moments.

There are, however, in this work, some author's contributions, specially in the development of higher orders moments, as far as the second moment is concerned.

Having this in view, the author shows the main topics of the theory, hoping that it will favor the teaching and studying of the subject.

1. INTRODUÇÃO

Os momentos da maioria das distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias discretas são bem conhecidos, e as expressões para suas determinações são encontradas em textos padrões (JOHNSON e KOTZ, 1971; KENDALL e STUART, 1977 e outros).

A derivação destas expressões, entretanto, pode ser complicada e extensa.

LINK (1981) demonstra que operações de diferenças finitas oferecem uma simplificação bastante útil, no cálculo desses momentos.

O uso dos operadores de diferenças finitas é proposto neste contexto devido a três razões fundamentais:

Primeira: as expressões fatoriais são comuns em função de distribuição estatística e estão por toda parte em diferenças finitas.

Segunda : a derivação de momentos para distribuições discretas é essencialmente um problema de somação.

Terceira: diferenças de zero e números de Stirling de segunda espécie aparecem frequentemente nas expressões para o cálculo dos momentos.

Este trabalho apresenta tais derivações para as conhecidas distribuições: Binomial, Poisson e Geométrica.

Espera-se que este trabalho traga alguma contribuição a todos aqueles que tenham interesse na aplicação deste poderoso instrumento que é o Cálculo de Diferenças Finitas no estudo da determinação de momentos de algumas variáveis aleatórias discretas.

2. REVISÃO DE LITERATURA

O cálculo dos momentos, bem como das funções geradoras de momentos, foi originariamente estudado como um instrumento para a solução de problemas em teoria de Probabilidades e em Estatística Matemática. O seu estudo, e o de suas aplicações, vem sendo feito há algum tempo por diversos autores.

Segundo TATON (1964) vários matemáticos famosos já se dedicaram ao estudo das funções geradoras de momentos. LAPLACE, em 1812, em sua obra *Thèorie Analytique des Probabilites*, apresentou uma teoria das funções geradoras de momentos, também chamadas funções geratrizes de momentos.

CRAMÉR (1955) estuda funções feradoras de momentos, particularmente as do tipo $E(e^{tx})$ para funções de uma variável aleatória, efetuando apenas citação rápida da definição de momentos para distribuições em duas dimensões.

WILKS (1962), utilizando conceitos avançados de matemática, como a Teoria da Integração de Lebesgue-Stieltjes, efetua um estudo geral sobre Cálculo de Probabilidades, inclusive sobre funções geradoras de momentos.

NOGUEIRA (1965) apresenta fórmula geral, para a obtenção de momentos de ordem superior ao segundo, e verifica a sua validade para as distribuições Binomial, Poisson e Nor mal.

PIEDRABUENA (1968), devido a uma anomalia relativa à distribuição de Poisson, em contagens de leveduras, chega a uma distribuição binomial negativa. Efetua o desenvolvimento dos momentos em relação à média sobre esse modelo, e verifica que a fórmula proposta por NOGUEIRA (1965) se aplica ao mesmo.

KENDALL e STUART (1977), definindo momentos, apresentam importante relação geral entre momentos centrados e em relação à origem.

DAVID e BARTON (1962), apresentam algumas aplicações das Diferenças de Zero no cálculo dos momentos e das funções geradoras de momento fatorial.

BARBOSA, ESPADA e BELLOMO (1973) apresentam um trabalho realmente formalizado, em nível de Brasil, sobre o Cálculo das Diferenças Finitas.

HOEL (1980) realiza um estudo sucinto sobre momentos e funções feradoras de momentos.

JOHNSON e KOTZ (1971) apresentam um trabalho importante sobre as distribuições discretas de probabilidade, introduzindo os conceitos das diferenças finitas, em um capítulo especial, bem como as suas aplicações no cálculo dos momentos.

LINK (1981), apresenta um trabalho muito especial sobre o uso dos operadores de Diferenças Finitas no cálculo dos momentos, até a 4ª ordem, das distribuições discretas.

CHAN (1982), complementa o estudo de LINK utilizando também as Diferenças Finitas no cálculo da distribuição Hipergeométrica e da Distribuição Hipergeométrica negativa.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Recordemos, inicialmente, algumas definições usadas em Diferenças Finitas (BARBOSA, ESPADA e BELLOMO, 1973; KELLISON, 1975).

3.1 - Operador Deslocamento

Um operador é denominado *operador de deslocamento-h* ou de Translação-h, e indicamos com E_h, se, e somente se, aplicado a uma função de variável real (pode ser estendida a variável complexa) $f(x)$ fornece $f(x+h)$.

$$E_h f(x) = f(x+h).$$

O número h denomina-se também *passo*; se $h > 0$ (ou $h < 0$), dizemos que o operador é de *avanço* (ou de recuo).

— No caso de $h = 1$ escreve-se simplesmente E para facilidade, logo:

$$Ef(x) = f(x+1); \quad Ex = x+1.$$

Define-se *potência* de E_h de acordo com a definição geral, e estende-se para expoente nulo:

$$E_h^0 f(x) = f(x) \implies E_h^0 = I,$$

onde I é o operador *identidade*.

Resulta da definição de potência, o que se pode provar por indução sobre r que:

$$E_h^r f(x) = f(x + rh).$$

3.2 - Operador Diferença

— Define-se o operador Δ_h por:

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x)$$

e, em particular se $h = 1$ escrevemos simplesmente Δ, logo:

$$\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x).$$

— Define-se a diferença r-ésima de acordo com a definição geral de potência, isto é:

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i f(x + ih)$$

a qual pode ser deduzida por indução sobre r.

Além disso, para $h = 0$, tem-se

$$\Delta_h^0 f(x) = f(x) \implies \Delta_h^0 = I.$$

— Estes operadores podem ser adicionados, subtraídos, multiplicados, e (em condições apropriadas) divididos.

3.3 - Lei Fundamental do Cálculo de Diferenças Finitas

3.3.1. Temos que:

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x), \quad \text{definição de } \Delta$$

$$\Delta_h f(x) = E_h[f(x)] - I[f(x)] \quad \text{definição de } E \text{ e } I$$

$$\Delta_h f(x) = (E_h - I)(f(x)), \quad \text{definição de soma de operadores.}$$

Logo:

$$\boxed{\Delta_h = E_h - I}$$

No caso particular de $h = 1$, temos:

$$\boxed{\Delta = E - I}$$

3.3.2. Analogamente:

$$E_h[f(x)] = f(x+h), \quad \text{definição de } E$$

$$E_h[f(x)] = f(x+h) - f(x) + f(x), \quad \text{propriedade dos reais}$$

$$E_h[f(x)] = \Delta_h[f(x)] + I[f(x)], \quad \text{definição de } \Delta \text{ e de } I$$

$$E_h[f(x)] = (\Delta_h + I)[f(x)], \quad \text{soma de operadores.}$$

Logo:

$$\boxed{E_h = \Delta_h + I} \Longrightarrow \boxed{E = \Delta + I} \quad \text{se } h = 1.$$

— Podemos aplicar os operadores também a números combinatórios, assim, verifica-se facilmente que:

$$E\binom{x}{k} = \binom{x+1}{k} \quad \text{e} \quad \Delta\binom{x}{k} = \binom{x}{k-1}.$$

3.4 Diferenças do Zero

Define-se diferença J-ésima de zero-r a $\Delta^J x^r$ para $x = 0$, isto é:

$$\Delta^{j} 0^{r} = \left[\Delta^{j} x^{r}\right]_{x=0}.$$

3.4.1. Propriedades

a) $\Delta^{1} 0^{r} = 1$

b) $\Delta^{m} 0^{m} = m!$

c) $\Delta^{m+k} 0^{m} = 0.$

Essas propriedades permitem a construção de uma ta̲bela de diferenças do zero, a aparecer na subunidade seguinte.

3.4.2. Tabela de Diferenças do Zero

As diferenças de zero necessárias para se obter os momentos até a quarta ordem ou de ordens superiores, são da̲das pela seguinte tabela:

Valores de $\Delta^j 0^r$

	1	2	3	4	5	...
1	1	0	0	0	0	...
2	1	2	0	0	0	...
3	1	6	6	0	0	...
4	1	14	36	24	0	...
5	1	30	150	240	120	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Verifica-se que:

i) a propriedade **a)** fornece a primeira coluna;

ii) a propriedade **b)** fornece a diagonal principal;

iii) a propriedade **c)** fornece os valores acima da diagonal principal;

iv) o seguinte esquema de recorrência permite que se obtenha os demais valores:

$$\begin{tikzcd} x_{(r-1,J-1)} \arrow[r, "+"] & x_{(r-1,\, J)} \arrow[d, "\times J"] \\ & x_{(r,\, J)} \end{tikzcd}$$

isto é: o elemento da r-ésima linha e J-ésima coluna, é obtido somando-se o elemento da $(r-1)$-ésima linha e $(J-1)$-ésima coluna com o elemento da $(r-1)$-ésima linha e J-ésima coluna, multiplicado pelo valor correspondente à J-ésima coluna.

Tal algoritmo se nos apresenta de grande validade prática.

— Os elementos que aparecem no corpo da tabela poderiam também ser calculados pelo procedimento abaixo:

De $\Delta^J = (E-1)^J$, segue-se

$$\Delta^J = \sum_{i=0}^{J} \binom{J}{i} (-1)^i E^{J-i}$$

portanto:

$$\Delta^J x^r = \sum_{i=0}^{J} (-1)^i \binom{J}{i} (x + J - i)^r$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta^J 0^r = \sum_{i=0}^{J-1} (-1)^i \binom{J}{i} (J - i)^r}$$

Exemplo:

$$\Delta^2 0^3 = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \binom{2}{i} (2-i)^3$$

$$= (-1)^0 \binom{2}{0} (2)^3 + (-1) \binom{2}{1} (1)^3$$

$$= 8 - 2$$

$$= 6$$

Logo, para $J = 2$ e $r = 3$, teremos

$$x_{3,2} = 6.$$

Os demais elementos são obtidos analogamente.

3.5 - DERIVAÇÕES DE MOMENTOS EM RELAÇÃO À ORIGEM

Consideremos agora, uma expressão geral para o r-ésimo momento em relação à origem.

Define-se o momento de ordem r de uma variável aleatória em relação à origem, e nota-se por μ'_r à expressão

$$\mu'_r = E(X^r), \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

com a condição de que $E|X^r| < \infty$. Se esse for o caso

$$\mu'_r = E(X^r) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j^r p_j = \sum_{J=0}^{\infty} p_J x_J^r$$

Nesta expressão, x_j representa o j-ésimo resultado e p_J a probabilidade de ocorrência desse resultado.

O processo das derivações de momentos, segundo LINK, consiste na substituição de x_J^r por $E^J 0^r$.

Logo:

$$\boxed{\mu'_r = \sum_{J=0}^{\infty} p_J \cdot E^J 0^r}.$$

4. DISTRIBUIÇÕES, FUNÇÕES GERADORAS DE MOMENTOS E FÓRMULAS RECORRENTES

4.1 - DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

4.1.1. Definição

Diz-se que uma variável aleatória discreta J tem uma distribuição binomial de probabilidade, se a sua função de probabilidade é dada por:

$$f_J(J) = \binom{N}{J} p^J q^{N-J} \Big]_{\{0,1,2,\ldots,N\}}(J)$$

com $0 < p < 1$ e $q = 1-p$.

4.1.2. Função Geradora de Momentos (f.g.m.)

Teorema 1. *Se uma variável aleatória J tem distribuição binomial, então a sua f.g.m. é dada por:*

$$m_J(t) = (q + pe^t)^N,$$

Prova: Tem-se:

$$m_J(t) = E[e^{tJ}] = \sum_J e^{tJ} f_J(j) = \sum_{J=0}^{N} [e^{tJ} \binom{N}{J} p^J q^{N-J}]$$

$$m_J(t) = \sum_{J=0}^{N} \binom{N}{J} (pe^t)^J q^{N-J}$$

$$m_J(t) = (q + pe^t)^N.$$

4.1.3. Cálculo dos Principais Momentos

— 1º momento em relação à origem:

$$m'_J(t) = N(q + pe^t)^{N-1} \cdot p \cdot e^t$$

para $t = 0$, temos:

$$m'_J(0) = N(q + p)^{N-1} \cdot p, \quad \text{mas} \quad q + p = 1$$

logo:

$$m'_J(0) = Np$$

$$\therefore \quad \mu'_1 = E(J) = Np.$$

— 2º momento:

$$m''_J(t) = Npe^t(q + pe^t)^{N-1} + N(N-1)(pe^t)^2(q + pe^t)^{N-2}$$

$$m''_J(0) = Np(q + p)^{N-1} + N(N-1)(p^2)(q + p)^{N-2}$$

$$m''_J(0) = Np + N(N-1)p^2$$

$$m''_J(0) = Np + N^2p^2 - Np^2$$

$$\therefore \quad \mu'_2 = E(J^2) = Np + N^2p^2 - Np^2.$$

A variância é dada por:

$$\text{Var}(J) = E(J^2) - [E(J)]^2$$

$$\text{Var}(J) = Np + N^2p^2 - Np^2 - N^2p^2$$

$$\text{Var}(J) = Np - Np^2$$

$$\text{Var}(J) = Np(1 - p)$$

$$\therefore \text{Var}(J) = Npq$$

Por derivação sucessiva, obtém-se, analogamente:

$$\mu'_3 = Np + 3N^2p^2 - 3Np^2 + N^3p^3 - 3N^2p^3 + 2Np^3$$

e

$$\mu_4' = Np + 7N^2p^2 + 6N^3p^3 + N^4p^4 - 6N^3p^4 - 18N^2p^3 +$$

$$+ 11N^2p^4 - 7Np^2 - 6Np^4 - 12Np^3.$$

4.2 - Distribuicao de Poisson

4.2.1. Definição

Diz-se que uma variável aleatória discreta J, tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, se a sua função de probabilidade é dada por:

$$f_J(J) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^J}{J!} \, I_{\{0,1,2,\dots\}}(J)$$

4.2.2. Função Geradora de Momentos

Teorema 2. *Se uma variável aleatória J tem distribuição de Poisson, com parâmetro $\lambda > 0$, então a sua f.g.m. é dada por*

$$m_J(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

Prova: Tem-se

$$m_J(t) = E[e^{tJ}] = \sum_{J=0}^{\infty} \left[e^{tJ} \frac{e^{-\lambda}\lambda^J}{J!}\right]$$

$$m_J(t) = \sum_{J=0}^{\infty} \frac{e^{tJ} \cdot e^{-\lambda}\lambda^J}{J!} = e^{-\lambda} \sum_{J=0}^{\infty} \frac{e^{tJ} \cdot \lambda^J}{J!}$$

$$m_J(t) = e^{-\lambda} \sum_{J=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^J}{J!}$$

$$m_J(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$$

pois

$$\sum_{J=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^J}{J!} = e^{\lambda e^t}$$

$$\therefore \; m_J(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

4.2.3. Cálculo dos Principais Momentos

— 1º momento

$$m_J'(t) = \lambda \cdot e^t \cdot e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$m'_J(t=0) = \lambda \cdot e^0 \cdot e^{\lambda(e^0 - 1)} = \lambda$$

$$\therefore \mu'_1 = E(J) = \lambda.$$

— 2º **momento**

$$m''_J(t) = \lambda \cdot e^{\lambda e^t - \lambda + t} \cdot (\lambda e^t + 1)$$

$$m''_J(t=0) = \lambda \cdot e^{\lambda - \lambda} \cdot (\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda$$

$$\therefore \mu'_2 = E(J^2) = \lambda^2 + \lambda.$$

A variância é dada por:

$$\mathrm{Var}(J) = E(J^2) - [E(J)]^2$$

$$\mathrm{Var}(J) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$\mathrm{Var}(J) = \lambda$$

Por derivações sucessivas, obtém-se, de modo análogo:

$$\mu'_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

e

$$\mu'_4 = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda.$$

4.3. DISTRIBUIÇÃO GEOMÉTRICA

4.3.1. Definição

Define-se uma variável aleatória J, tendo distribuição geométrica, se a sua distribuição de probabilidade é dada por:

$$f_J(j) = p(1-p)^J \Big|_{\{0,1,2,\ldots\}}^{(J)}$$

com $0 < p \leq 1$ e $q = 1 - p$.

4.3.2. Função Geradora de Momentos

Se uma variável aleatória J tem distribuição geométrica, então a sua f.g.m. será dada por

$$m_J(t) = \frac{p}{1 - q \cdot e^t}$$

Prova: Tem-se

$$m_J(t) = E[e^{tJ}] = \sum_{J=0}^{\infty} [e^{tJ} \cdot p(1-p)^J]$$

$$m_J(t) = p \sum_{J=0}^{\infty} e^{tJ}(1-p)^J = p \sum_{J=0}^{\infty} (q \cdot e^t)^J$$

$$m_J(t) = p[1 + q \cdot e^t + (q \cdot e^t)^2 + (q \cdot e^t)^3 + \ldots].$$

Como

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\,x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1$$

pelo desenvolvimento da série de Taylor, tem-se que:

$$m_J(t) = p \cdot \frac{1}{1 - qe^t}, \quad |qe^t| < 1$$

logo

$$m_J(t) = \frac{p}{1 - qe^t}.$$

4.3.3. Cálculo dos Principais Momentos

— **1º momento**

$$m'_J(t) = \frac{pq \cdot e^t}{(1 - qe^t)^2}$$

$$\mu'_1 = m'_J(t=0) = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p} \; .$$

logo

$$E(J) = \mu'_1 = \frac{q}{p} \; .$$

— **2º momento**

$$m''_J(t) = \frac{(1-qe^t)^2 \cdot p \cdot q \cdot e^t - p \cdot q \cdot e^t \cdot 2(1-qe^t)(-qe^t)}{(1-qe^t)^4}$$

$$m''_J(t) = \frac{(1-qe^t)^2 \cdot p \cdot q \cdot e^t + 2pq^2(e^t)^2(1-qe^t)}{(1-qe^t)^4}$$

$$m''_J(t) = pqe^t(1-qe^t)^{-2} + 2p(qe^t)^2(1-qe^t)^{-3}$$

$$\mu'_2 = m''_J(t=0) = pq(1-q)^{-2} + 2pq^2(1-q)^{-3}$$

$$\mu'_2 = \frac{pq}{p^2} + \frac{2pq^2}{p^3}$$

$$\therefore \quad \mu'_2 = \frac{q}{p} + \frac{2q^2}{p^2}$$

A variância é dada por:

$$Var(J) = \mu_2' - (\mu_1')^2$$

$$Var(J) = \frac{q}{p} + \frac{2q^2}{p^2} - \frac{q^2}{p^2}$$

$$Var(J) = \frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2} = \frac{pq + q^2}{p^2} = \frac{q(p+q)}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$$Var(J) = \frac{q}{p^2} .$$

— **3º momento**

$$m_J'''(t) = pqe^t(-2)(1-qe^t)^{-3}(-qe^t) + (1-qe^t)^{-2} \cdot pqe^t +$$

$$+ (-3)2p(qe^t)^2(1-qe^t)^{-4}(-qe^t) + (1-qe^t)^{-3} \cdot 2p \cdot 2(qe^t)q \cdot e^t$$

$$m_J'''(t) = 2pq^2(e^t)^2 \cdot (1-qe^t)^{-3} + p \cdot q \cdot e^t(1-qe^t)^{-2} +$$

$$+ 6p(qe^t)^3(1-qe^t)^{-4} + 4p(qe^t)^2(1-qe^t)^{-3}$$

$$\mu_3' = m_J'''(t=0) = \frac{2pq^2}{p^3} + \frac{pq}{p^2} + \frac{6p \cdot q^3}{p^4} + \frac{4pq^2}{p^3}$$

$$\mu_3' = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} + \frac{6q^3}{p^3} + \frac{4q^2}{p^2}$$

$$\mu_3' = \frac{q}{p} + \frac{6q^2}{p^2} + \frac{6q^3}{p^3} .$$

— **4º momento**

Analogamente, calculando-se a 4ª derivada, chegaremos em:

$$\mu_4' = q\left[\frac{1}{p} + \frac{14q}{p^2} + \frac{36q^2}{p^3} + \frac{24q^3}{p^4}\right]$$

ou

$$\mu_4' = \frac{q}{p} + \frac{14q^2}{p^2} + \frac{36q^3}{p^3} + \frac{24q^4}{p^4}$$

4.4 - FÓRMULAS RECORRENTES

O cálculo dos momentos via função geradora, embora geral, não é de fácil aplicação, quando se pretende determinar momentos de ordem superior à segunda (Cf. NOGUEIRA, 1965).

Com o objetivo de contornar a dificuldade nas determinações de momentos de ordem superior à 2ª, o referido autor cita as fórmulas recorrentes devidas a KENDALL, 1947, a saber:

$$\mu_{r+1} = pq \cdot \frac{d}{dp}(\mu_r) + nNpq\mu_{r-1}$$

para a distribuição binomial e

$$\mu_{r+1} = \lambda \cdot \frac{d}{d\lambda}(\mu_r) + r \cdot \lambda \mu_{r-1}$$

para a distribuição de Poisson.

NOGUEIRA demonstra que as fórmulas acima podem ser enquadradas numa fórmula única

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \cdot \frac{d}{d\mu}(\mu_n) + n\sigma^2 \mu_{n-1},$$

que apresenta ainda a vantagem de ser válida para toda função de distribuição $f(x)$ que satisfaça a fórmula

$$\frac{d}{d\mu}\,[f(x)] = \frac{x-\mu}{\sigma^2}\, f(x),$$

onde μ e σ^2 são, respectivamente, a média e a variância de $f(x)$.

Convém notar que a fórmula recorrente, acima mencionada, também pode ser usada para o caso da distribuição geométrica.

De fato, como:

$$f(J) = p(1-p)^J, \quad \mu = \frac{1-p}{p} \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2},$$

temos

1º membro:

$$\frac{d}{d\mu}[f(x)] = \frac{d}{d\mu} f(J) = \frac{d}{d\mu}[p(1-p)^J] = p^2(1-p)^{J-1}[p \cdot J - 1 + p].$$

Por outro lado:

2º membro:

$$\frac{J - \frac{1-p}{p}}{\frac{1-p}{p^2}} \cdot p(1-p)^J = p^2(1-p)^{J-1}(pJ - 1 + p)$$

o que confirma a nossa afirmação.

5. CALCULO DOS MOMENTOS UTILIZANDO-SE AS DIFERENCAS FINITAS

5.1 - Distribuicao Binomial

Sabe-se que:

$$\mu'_r = \sum_{J=0}^{\infty} P_J E^J 0^r$$

onde

$$P_J = \binom{N}{J} p^J q^{N-J}$$

logo:

$$\mu'_r = \sum_{J=0}^{N} \binom{N}{J} p^J q^{N-J} E^J 0^r = \sum_{J=0}^{N} \binom{N}{J} (p \cdot E)^J q^{N-J} \cdot 0^r$$

$$\mu'_r = (q + pE)^N 0^r = (1 + p \cdot \Delta)^N 0^r, \quad \text{pois} \quad E = 1 + \Delta$$

$$\boxed{\therefore \ \mu'_r = \sum_{J=1}^{r} \binom{N}{J} p^J \Delta^J 0^r}.$$

Esse processo permite transformar a soma de $N + 1$ termos em uma soma de r termos, pois $\Delta^J 0^r = 0$ para $J = 0$

ou $J > r$.

— **1º momento**: $r = 1$

$$\mu_1' = \sum_{J=1}^{1} \binom{N}{J} p^J \Delta^J 0^1 = \binom{N}{1} p^1 \Delta^1 0^1$$

pela tabela de diferenças de zero temos que:

$$\Delta^1 0^1 = 1$$

$$\boxed{\therefore \ \mu_1' = Np}.$$

— **2º momento**: $r = 2$

$$\mu_2' = \sum_{J=1}^{2} \binom{N}{J} p^J \Delta^J 0^2$$

$$\mu_2' = \binom{N}{1} p^1 \Delta^1 0^2 + \binom{N}{2} p^2 \Delta^2 0^2.$$

Temos que:

$$\Delta^1 0^2 = 1 \quad \text{e} \quad \Delta^2 0^2 = 2$$

logo

$$\mu_2' = Np + \frac{N!}{2!(N-2)!} \cdot p^2 \cdot 2$$

$$\mu_2' = Np + \frac{N(N-1)}{2} \cdot p^2 \cdot 2$$

$$\boxed{\mu_2' = Np + N^2p^2 - Np^2}.$$

— A variância é dada por:

$$\mathrm{Var}(J) = \mu_2' - (\mu_1')^2$$

$$\mathrm{Var}(J) = Np + N^2p^2 - Np^2 - N^2p^2$$

$$\boxed{\therefore \mathrm{Var}(J) = Npq}.$$

— 3º momento: $r = 3$

$$\mu_3' = \sum_{J=1}^{3} \binom{N}{J} p^J \Delta^J 0^3$$

$$\mu_3' = \binom{N}{1} p^1 \Delta^1 0^3 + \binom{N}{2} p^2 \Delta^2 0^3 + \binom{N}{3} p^3 \Delta^3 0^3$$

mas

$$\Delta^1 0^3 = 1; \quad \Delta^2 0^3 = 6 \quad e \quad \Delta^3 0^3 = 6$$

logo:

$$\mu_3' = Np + 3N(N-1)p^2 + N(N-1)(N-2)p^3$$

$$\boxed{\mu_3' = Np + 3N^2p^2 - 3Np^2 + N^3p^3 - 3N^2p^3 + 2Np^3}.$$

— **4º momento**: $r = 4$

$$\mu_4' = \sum_{J=1}^{4} \binom{N}{J} p^J \Delta^J 0^4$$

$$\mu_4' = \binom{N}{1} p^1 \Delta^1 0^4 + \binom{N}{2} p^2 \Delta^2 0^4 + \binom{N}{3} p^3 \Delta^3 0^4 + \binom{N}{4} p^4 \Delta^4 0^4$$

mas

$$\Delta^1 0^4 = 1; \quad \Delta^2 0^4 = 14; \quad \Delta^3 0^4 = 36; \quad \Delta^4 0^4 = 24$$

$$\mu_4' = Np + 7N(N-1)p^2 + 6N(N-1)(N-2)p^3 + N(N-1)(N-2)(N-3)p^4$$

$$\boxed{\therefore \; \mu_4' = Np + 7N^2p^2 + 6N^3p^3 + N^4p^4 - 6N^3p^4 - 18N^2p^3 + 11N^2p^4 - 7Np^2 - 6Np^4 + 12Np^3}$$

5.2 - DISTRIBUICAO DE POISSON

Sabe-se que

$$\mu'_r = \sum_{J=0}^{\infty} P_J E^J 0^r$$

onde

$$P_J = \frac{e^{-\lambda} . \lambda^J}{J!}$$

logo

$$\mu'_r = \sum_{J=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^J . E^J}{J!}\right] 0^r$$

$$\mu'_r = [e^{-\lambda} + e^{-\lambda} . \lambda . E + e^{-\lambda} \frac{\lambda^2 . E^2}{2!} + e^{-\lambda} . \frac{\lambda^3 . E^3}{3!} + \ldots] 0^r$$

$$\mu'_r = e^{-\lambda} . [\frac{1}{0!} + \frac{\lambda E}{1!} + \frac{\lambda^2 E^2}{2!} + \frac{\lambda^3 E^3}{3!} + \ldots] 0^r$$

$$\mu'_r = e^{-\lambda} . e^{\lambda E} . 0^r = e^{\lambda(E-1)} . 0^r$$

$$\mu'_r = e^{\lambda\Delta} 0^r, \quad \text{pois} \quad E-1 = \Delta$$

$$\mu'_r = [1 + \lambda\Delta + \frac{\lambda^2\Delta^2}{2!} + \frac{\lambda^3\Delta^3}{3!} + \ldots] 0^r$$

$$\boxed{\therefore \quad \mu'_r = \sum_{J=1}^{r} \left(\frac{\lambda^J}{J!}\right) \Delta^J 0^r}$$

— 1º momento: $r = 1$

$$\mu'_1 = \sum_{J=1}^{1} \left(\frac{\lambda^J}{J!}\right) \Delta^J 0^1$$

$$\mu'_1 = \frac{\lambda^1}{1!} \Delta^1 0^1$$

mas $\Delta^1 0^1 = 1$ (pela tabela). Logo:

$$\boxed{\mu'_1 = \lambda}$$

— 2º momento: $r = 2$

$$\mu'_2 = \sum_{J=1}^{2} \left(\frac{\lambda^J}{J!}\right) \Delta^J 0^2$$

$$\mu'_2 = \frac{\lambda^1}{1!} \Delta^1 0^2 + \frac{\lambda^2}{2!} \Delta^2 0^2$$

mas

$$\Delta^1 0^2 = 1 \quad e \quad \Delta^2 0^2 = 2$$

$$\boxed{\mu'_2 = \lambda + \lambda^2}$$

— A variância é dada por:

$$Var(J) = \mu_2' - (\mu_1')^2$$

$$Var(J) = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2$$

$$\boxed{\therefore \; Var(J) = \lambda}$$

— **3º momento:** $r = 3$

$$\mu_3' = \sum_{J=1}^{3} \left(\frac{\lambda^J}{J!}\right) \Delta^J 0^3$$

$$\mu_3' = \frac{\lambda^1}{1!} \Delta^1 0^3 + \frac{\lambda^2}{2!} \Delta^2 0^3 + \frac{\lambda^3}{3!} \Delta^3 0^3$$

mas

$$\Delta^1 0^3 = 1; \quad \Delta^2 0^3 = 6 \quad e \quad \Delta^3 0^3 = 6$$

$$\mu_3' = \lambda + \frac{\lambda^2}{2} \cdot 6 + \frac{\lambda^3}{6} \cdot 6$$

$$\boxed{\therefore \; \mu_3' = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3}$$

— 4º momento: $r = 4$

$$\mu'_4 = \sum_{J=1}^{4} \left(\frac{\lambda^J}{J!}\right) \Delta^J 0^4$$

$$\mu'_4 = \frac{\lambda}{1!}\,\Delta^1 0^4 + \frac{\lambda^2}{2!}\,\Delta^2 0^4 + \frac{\lambda^3}{3!}\,\Delta^3 0^4 + \frac{\lambda^4}{4!}\,\Delta^4 0^4$$

onde

$$\Delta^1 0^4 = 1; \quad \Delta^2 0^4 = 14; \quad \Delta^3 0^4 = 36; \quad \Delta^4 0^4 = 24$$

$$\boxed{\therefore\ \mu'_4 = \lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4}$$

5.3 - Distribuição Geométrica

Temos que:

$$\mu'_r = \sum_{J=0}^{\infty} P_J J^r$$

onde

$$P_J = p(1-p)^J = p \cdot q^J.$$

Usa-se o seguinte artifício: multiplica-se e divi de-se P_J por q, logo:

$$P_J = q \cdot p \cdot q^{J-1}.$$

Assim:

$$\mu_r' = q \sum_{J=1}^{\infty} q^{J-1} . p . J^r .$$

Substituindo-se J^r por $E^J 0^r$, teremos:

$$\mu_r' = q \sum_{J=1}^{\infty} q^{J-1} . p . E^J 0^r = q \sum_{J=1}^{\infty} \frac{q^J}{q} . p . E^J 0^r$$

$$\mu_r' = \frac{qp}{q} \sum_{J=1}^{\infty} (q . E)^J 0^r$$

$$\mu_r' = p \sum_{J=1}^{\infty} q^J (1 + \Delta)^J 0^r \quad \text{pois} \quad E = 1 + \Delta$$

$$\mu_r' = p \sum_{J=1}^{\infty} q^J \sum_{s=1}^{r} \binom{J}{s} \Delta^s 0^r$$

$$\mu_r' = p \sum_{s=1}^{r} \sum_{J=s}^{\infty} q^J \binom{J}{s} \Delta^s 0^r$$

$$\mu_r' = p \sum_{s=1}^{r} \Delta^s 0^r \sum_{J=s}^{\infty} q^J \binom{J}{s} \qquad \circledast$$

Determinemos agora a segunda somatória do segundo membro:

$$\sum_{j=s}^{\infty} q^{j}\binom{j}{s} = q^{s}\left[\binom{s}{s} + \binom{s+1}{s}q + \binom{s+2}{s}q^{2} + \binom{s+3}{s}q^{3} + \ldots\right] \qquad (1)$$

Sabe-se que:

$$1 + q + q^{2} + \ldots = \frac{1}{1-q} \quad \text{(série geométrica)}, \quad |q| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n} = \frac{1}{1-q} = (1 - q)^{-1}.$$

Derivando-se, ambos os membros, em relação a q, teremos:

1ª derivada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = (1 - q)^{-2}$$

2ª derivada:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q^{n-2} = 2(1 - q)^{-3}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2!}\, q^{n-2} = (1 - q)^{-3}$$

3ª derivada

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{2!} q^{n-3} = 3(1-q)^{-4}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} q^{n-3} = (1-q)^{-4}$$

$4^{\underline{a}}$ **derivada**:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} q^{n-4} = (1-q)^{-5}.$$

Observa-se que:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} q^{n-4} = \sum_{n=4}^{\infty} \binom{n}{4} q^{n-4} = (1-q)^{-5}$$

logo, na s-ésima derivada, teremos:

$$\sum_{n=s}^{\infty} \binom{n}{s} q^{n-s} = (1-q)^{-(s+1)}$$

mas

$$\sum_{n=s}^{\infty} \binom{n}{s} q^{n-s} = \binom{s}{s} + \binom{s+1}{s} q + \binom{s+2}{s} q^2 + \binom{s+3}{s} q^3 + \ldots = (1-q)^{-(s+1)}$$

Substituindo-se em 1, teremos:

$$\sum_{J=s}^{\infty} q^J \binom{J}{s} = q^s (1-q)^{-(s+1)}$$

Assim, novamente substituindo-se em ⊛, teremos:

$$\mu'_r = p \sum_{s=1}^{r} q^s (1 - q)^{-(s+1)} \Delta^s 0^r$$

$$\boxed{\therefore \; \mu'_r = \sum_{s=1}^{r} \left(\frac{q}{p}\right)^s \Delta^s 0^r}.$$

— 1º momento: $r = 1$

$$\mu'_1 = \sum_{s=1}^{1} \left(\frac{q}{p}\right)^s \Delta^s 0^1$$

$$\mu'_1 = \frac{q}{p} \Delta^1 0^1$$

$$\boxed{\therefore \; \mu'_1 = \frac{q}{p}} \quad \text{pois} \quad \Delta^1 0^1 = 1$$

— 2º momento: $r = 2$

$$\mu'_2 = \sum_{s=1}^{2} \left(\frac{q}{p}\right)^s \Delta^s 0^2$$

$$\mu'_2 = \left(\frac{q}{p}\right)^1 \Delta^1 0^2 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 \Delta^2 0^2, \quad \text{pois} \quad \Delta^1 0^2 = 1 \quad \text{e} \quad \Delta^2 0^2 = 2$$

$$\boxed{\therefore \; \mu'_2 = \frac{q}{p} + 2\,\frac{q^2}{p^2}}$$

A variância será dada por:

$$\mathrm{Var}(J) = \mu_2' - (\mu_1')^2$$

$$\mathrm{Var}(J) = \frac{q}{p} + 2\,\frac{q^2}{p^2} - \frac{q^2}{p^2}$$

$$\mathrm{Var}(J) = \frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2} \implies \boxed{\mathrm{Var}(J) = \frac{q}{p^2}}.$$

— **3º momento**: $r = 3$

$$\mu_3' = \sum_{s=1}^{3} \left(\frac{q}{p}\right)^s \Delta^s 0^3$$

$$\mu_3' = \frac{q}{p}\,\Delta^1 0^3 + \frac{q^2}{p^2}\,\Delta^2 0^3 + \frac{q^3}{p^3}\,\Delta^3 0^3$$

como

$$\Delta^1 0^3 = 1; \quad \Delta^2 0^3 = 6 \quad \text{e} \quad \Delta^3 0^3 = 6$$

temos:

$$\boxed{\mu_3' = \frac{q}{p} + \frac{6q^2}{p^2} + \frac{6q^3}{p^3}}.$$

— **4º momento**: $r = 4$

$$\mu_4' = \sum_{s=1}^{4} \left(\frac{q}{p}\right)^s \Delta^s 0^4$$

$$\mu_4' = \frac{q}{p}\,\Delta^1 0^4 + \frac{q^2}{p^2}\,\Delta^2 0^4 + \frac{q^3}{p^3}\,\Delta^3 0^4 + \frac{q^4}{p^4}\,\Delta^4 0^4$$

como

$$\Delta^1 0^4 = 1; \quad \Delta^2 0^4 = 14; \quad \Delta^3 0^4 = 36 \quad \text{e} \quad \Delta^4 0^4 = 24$$

temos:

$$\boxed{\mu_4' = \frac{q}{p} + \frac{14q^2}{p^2} + \frac{36q^3}{p^3} + \frac{24q^4}{p^4}}.$$

6. RESUMO DAS FÓRMULAS OBTIDAS EM FUNÇÃO DOS OPERADORES

6.1 - Distribuição Binomial

$$\mu'_r = \sum_{J=1}^{r} \binom{N}{J} p^J \Delta^J 0^r .$$

6.2 - Distribuição de Poisson

$$\mu'_r = \sum_{J=1}^{r} \left(\frac{\lambda^J}{J!}\right) \Delta^J 0^r .$$

6.3 - Distribuição Geométrica

$$\mu'_r = \sum_{s=1}^{r} \left(\frac{q}{p}\right)^s \Delta^s 0^r .$$

7. RESULTADOS

A partir de novos Conceitos e Propriedades dos operadores de Diferenças Finitas obtemos fórmulas para o cálculo dos momentos de algumas distribuições discretas, metodologia que, ao que me parece, poderá ser aplicada a outras distribuições discretas.

8. CONCLUSÕES

— Verifica-se que os momentos de uma distribuição podem ser obtidos através das próprias definições, pelas funções geradoras de momentos e pelas fórmulas recorrentes.

— Os momentos de ordem superior ao 2º, nas distribuições: Binomial, Poisson e Geométrica, apresentadas neste trabalho, são mais facilmente calculados quando se usam os operadores de Diferenças Finitas.

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, R. M.; ESPADA FILHO, A e BELLOMO, D. P., 1973. *Cálculo de Diferenças Finitas*. Vol. II. Livraria Nobel S/A.

CHAN, B., 1982. *The American Statistician*. Vol. 36, Part 1.

CRAMÉR, H., 1955. *The Elements of Probability Theory*. Nova York. John Wiley & Sons.

DAVID, F. N. e BARTON, D. E., 1962. *Combinatorial Chance*, London, Charles Griffin e Co. Ltd. 37 p.

HOEL, P. G., 1980. *Estatística Matemática*. 4ª Edição, Rio de Janeiro, Editora Guanabara Dois. 373 p.

JOHNSON, N. L. e KOTZ, S., 1971. *Discrete Distributions*, Boston, Houghton Mifflin.

KELLISON, S. G., (1975). *Fundamentaly of Numerical Analysis*, Homewood, Ill., Richard D. Irwin.

KENDALL, M. e STUART, A., 1977. *The Advanced Theory of Statistics*. Vol. 1, 4ª Edicação, Nova York, McMillan, 472 p.

LINDGREN, B. W., 1976. *Statistical Theory* (3rd ed.), New York, MacMillan. 161 p.

LINK, R. F., 1981. *The American Statistician*. Vol. 35, nº 1.

MOOD, A. M., GRAYBILL, F. A. e BOES, D. C., 1974. *Introduction to the Theory of Statistics*. 3ª edição, Tóquio, International Student Edition (McGraw-Hill Koga Kusha). 564 p.

NOGUEIRA, I. R., 1965. Fórmula Geral para Obtenção dos Momentos nas Distribuições Binomial, Poisson e Normal. *Boletim Didático*, ESALQ/USP, Piracicaba, nº 12.

PIEDRABUENA, A. E., 1968. *Distribuições Interferidas - Estudo sobre uma Distribuição Generalizada*. Piracicaba, ESALQ/USP. 65 p. (Dissertação de Mestrado).

TATON, R. (Coord.), 1964. *La Science Contemporaine*. In: Histoire Générale des Ciences, Vol. II, Paris, Presses Universitaires de France. 1080 p.

WILKS, S. S., 1962. *Mathematical Statistics*. Nova York, John Wiley. 644 p.