A FUNÇÃO DE "COBB-DOUGLAS", A PARTIR DO MODELO MATEMÁTICO COM ERRO ADITIVO

Manuel Luiz Figueirôa
Economista

Orientador: Prof. Dr. **F. Pimentel Gomes**

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do Título de Mestre em Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Dezembro, 1980

A minha mulher,

meus filhos e

minha mãe,

OFEREÇO.

À memória de meu pai

e meus irmãos,

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. F. Pimentel Gomes, Chefe do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela orientação na execução do presente trabalho e, principalmente, pela amizade e respeito.

À UFS - Universidade Federal de Sergipe, por sua política de treinamento de docentes.

À AFA - Academia da Força Aérea, na pessoa do Cel.Av. Silvio da Gama Barreto Viana, Chefe do D.E., pela confiança e apoio.

Aos Drs. Humberto de Campos e Roberto Simionato Moraes, do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelo apoio.

Ao Dr. Rodolfo Hoffmann, do Departamento de Economia e Sociologia Rural da ESALQ, pelas sugestões.

À Drª Marli de Bem Gomes, do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela leitura dos originais, sugestões e apoio.

Ao Prof. Sidney Jorge Schinaider, da AFA, pela colaboração na execução dos cálculos experimentais.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior (CAPES), através do PICD, pelo fornecimento da bolsa de estudos.

À Srta. Maria Izalina Ferreira Alves, Secretária do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela datilografia do trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

Í N D I C E

Pág.

RESUMO

Este trabalho apresenta um processo mais convincente do que o usual, para a estimativa dos parâmetros da função de Cobb-Douglas.

Alcançamos este objetivo adotando procedimento iterativo através do método de Newton e do método modificado de Gauss-Newton, aplicados ao modelo

$$Y_i = A X_i^B + e_i$$

e concluímos, pelo critério de menor soma de quadrados dos desvios da regressão, a superioridade do procedimento que sugerimos. A resposta favorável foi obtida pelos dois métodos, o de Newton e o modificado de Gauss-Newton.

A seguir, repetimos o estudo para o modelo

$$Y_i = A X_{i1}^{B_1} X_{i2}^{B_2} + e_i$$

e concluimos, pelo mesmo critério, a superioridade do procedimento sugerido. Desta feita a resposta favorável foi observada apenas para o método modificado de Gauss-Newton, pois, quando da aplicação do método de Newton, não houve convergência nas estimativas dos parâmetros, com os valores iniciais usados.

Apresentamos, ainda, fórmulas que permitem a generalização do processo, isto é, a repetição do estudo para o modelo

$$Y_i = A\, X_{i1}^{B_1}\, X_{i2}^{B_2} \ldots X_{in}^{B_n} + e_i$$

ou

$$Y_i = A \prod_{h=1}^{n} X_{ih}^{B_h} + e_i \quad ,$$

com $i = 1, 2, \ldots, N$.

No estudo da dose econômica de nutrientes apresentamos a fórmula correspondente ao primeiro modelo. Para o segundo e para o modelo generalizado, indicamos os sistemas cujas soluções apresentam as doses econômicas aconselháveis de nutrientes, se satisfeita a condição de ser definida negativa a diferencial segunda da receita líquida.

SUMMARY

This paper discusses the estimation, by the method of least squares, of parameters of the Cobb-Douglas function with additive error, instead of the usual multiplicative error with use of logarithms. The estimates are obtained both by Newton's and Gauss-Newton's method. These methods were applied in detail for models

$$Y_i = A X_i^B + e_i$$

and

$$Y_i = A X_{i1}^{B_1} X_{i2}^{B_2} + e_i \quad ,$$

with complete discussion of an example for each model.

The main conclusions reached in this research were the following:

1 - For the first model, with one independent variable, the additive error led to a better adjustment than the tradicional multiplicative error, with good results, either by Newton's or by Gauss-Newton's method.

2 - For the second model, with two independent variables, convergence was obtained only for the Gauss-Newton's method, and led also to a better adjustment than the tradicional procedure.

3 - Convergence, when present, was rather quick, so that only a few iterations were necessary.

1. INTRODUÇÃO

Como é do conhecimento dos estudiosos do assunto, a função de Cobb-Douglas tem sido ajustada a dados de observação através de modelo matemático com erro multiplicativo.

O procedimento geral tem sido o de adotar o modelo

$$Y = \alpha X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} X_3^{\beta_3} \ldots X_n^{\beta_n} (1 + \varepsilon) \quad ,$$

com $\alpha > 0$, $X_h > 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$.

Após aplicação de logarítmo, obtemos

$$\log Y = \log \alpha + \beta_1 \log X_1 + \beta_2 \log X_2 + \ldots + \beta_n \log X_n +$$

$$+ \log (1 + \varepsilon) \; ,$$

onde, para

$$y = \log Y$$

$$a = \log \alpha$$

$$x_h = \log X_h$$

$$e = \log (1 + \varepsilon) \quad ,$$

temos

$$y = a + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + e \quad ,$$

que é uma equação de regressão linear múltipla, de aplicação bem conhecida.

Este método tem apresentado resultados que, apesar de aceitos como satisfatórios, guardam uma certa desconfiança no seu uso.

A restrição que se faz, decorre do fato de o erro adotado ser multiplicativo, o qual, após transformação logarítmica, se torna aditivo.

O que se pretende com este trabalho é adotar no modelo matemático o erro aditivo, fazer a análise da variância e estimar a dose econômica aconselhável.

Inicialmente, estudamos o modelo na sua forma mais simples,

$$Y_i = A X_i^B + e_i \quad ,$$

para, logo em seguida, repetirmos o estudo com o modelo

$$Y_i = A X_{i1}^{B_1} X_{i2}^{B_2} + e_i \quad .$$

2. REVISÃO DA LITERATURA

O interesse pelas funções de produção vem desde a época dos clássicos, com Adam Smith, David Ricardo e Malthus (GIRÃO, 1965). De acordo com esse autor, quem primeiro sugeriu uma forma algébrica para a função de produção agrícola foi Knut Wicksell, em 1916, com a função proposta

$$p = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \quad ,$$

onde $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\underline{p}$ designa a produção anual e $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ são as quantidades utilizadas, respectivamente, dos fatores de produção terra, trabalho e capital.

Entretanto, em dados da indústria manufatureira americana no período de 1899 a 1922, Charles Cobb e Paul Douglas, em 1928, propôs a função

$$P' = b\, L^{k}\, C^{1-k} \quad ,$$

onde P' era o índice previsto para a produção durante o período em estudo; L o índice do número médio anual de assalariados; e C o índice dos valores do capital fixo na indústria, previamente deflacionados. Salientemos, ainda, que já em 1909 MITSCHERLICH (1909) apresentava a sua famosa lei, que liga a produção Y a uma dose X de nutriente adicionado ao solo.

HARTLEY (1961) desenvolveu um novo processo, o método modificado de Gauss-Newton, para estimação de parâmetros em equações transcendentes. Partindo de estimativas preliminares para cada um dos parâmetros, o autor obteve estimativas sucessivas para todos eles, de tal forma, que os acréscimos a estimativas de ordens anteriores são comparados com um grau de precisão pré-estabelecido. Inicia-se, assim, um processo iterativo, até se obterem estimativas eficientes para todos os parâmetros que compõem o modelo.

GIRÃO (1965) realizou um trabalho sobre a função de produção de Cobb-Douglas e a análise inter-regional da produção agrícola, através da comparação das produtividades dos fatores de produção, em grupos regionais de explorações agrícolas. Apresentou as vantagens e as desvantagens do tipo de função utilizada, os aspectos metodológicos próprios da regressão linear múltipla, a interpretação estatística de regressões obtidas a partir dos dados referentes às explorações agrícolas em cinco regiões diferentes de Portugal e os fundamentos teóricos em que baseou a análise inter-regional efetuada.

PIMENTEL GOMES e ZAGATTO (1967) estudaram os aspectos econômicos da adubação, apresentaram a conceituação dos agregados econômicos da produção, e aplicaram a função correspondente com uma, duas, três e n variáveis independentes, respectivamente. Indicaram métodos de obtenção dos mapas de isoquantas e isóclinas. Estudaram também a quantidade ótima a ser aplicada do fator produtivo sob várias hipóteses, como sejam: capital ilimitado, capital limitado, etc. Finalmente chamaram a atenção para um conjunto de dificuldades que podem ocorrer no estudo econômico por polinômios de ensaios de adubação.

ENGLER (1968) estabeleceu uma função de produção, especificando as relações estruturais entre o valor da produção total e os fatores empregados no processo produtivo. Adotou a função de Cobb-Douglas com erro multiplicativo e determinou:

a) os coeficientes de elasticidades de produção;
b) os produtos marginais dos fatores de produção terra, trabalho e capital;
c) e as taxas marginais de substituição entre esses fatores.

Concluiu que a produção agrícola, nos dois municípios estudados (Guareí e Itapetininga), apresentou rendimentos de escala.

MALINVAUD (1969) explicou que a função de produção de uma empresa representa as dificuldades tecnológicas que se impuseram a essa unidade de produção. Ela determina as quantidades de produtos que podem ser obtidos a partir de qualquer combinação de fatores colocados no processo produtivo. Afirmou que a função de Cobb-Douglas parece adequada, como primeira aproximação, em numerosos casos de relação insumo-produto. Disse ainda que a estimativa de funções de produção, a partir de dados relativos às empresas de um mesmo tipo, requer a tomada do conjunto das relações que explicam os insumos e produtos e é, então, um modelo de equações múltiplas que intervirão mais frequentemente e a forma desse modelo varia de uma situação para outra.

SIMONSEN (1971) definiu função de produção como indicativa da produção máxima que se pode obter através de um processo de produção e, este, através do conceito matemático de funcional. Apresentou uma função de Cobb-Douglas homogênea e afirmou que, no caso de fatores substituíveis, é a que melhor se aplica na agricultura. No entanto, há, sem dúvida, situações em que a função de Cobb-Douglas não pode, pelas suas propriedades matemáticas, representar adequadamente o fenômeno.

PINHEIRO (1972) utilizou o modelo econométrico de Cobb-Douglas na análise da produção da pecuária bovina do município de Botucatu, Estado de São Paulo. Selecionou dois, dentre doze modelos alternativos, que melhor representaram as relações de produção da pecuária bovina na região estudada. Usou também o modelo de erro multiplicativo, como fizeram, aliás, todos os demais trabalhos mencionados a seguir que aplicaram a mesma função.

NEVES (1972) utilizou o modelo Cobb-Douglas, para estimar função de produção que represente as relações insumo-produto, para a exploração leiteira na região da Média Noroeste, composta dos municípios de Lins, Cafelândia, Promissão, Guaiçara, Sabino e Getulina. Analisou comparativamente a produção obtida nos períodos de estação seca ou chuvosa.

SILVA (1973) utilizou o modelo econométrico de Ulveling-Fletcher, procurando conhecer os efeitos do crédito rural na partilha e produtividade dos recursos produtivos nas propriedades agrícolas da Divisão Regional Agrícola de Ribeirão Preto, Estado de São Paulo. Desse estudo obteve algumas conclusões como:

a) os pequenos agricultores dificilmente têm acesso ao crédito rural;
b) os agricultores especializados em culturas anuais estão acentuadamente voltados para o mercado;
c) o valor da terra, representando 64,24% do capital agrário, é o seu principal componente.

CRÓCOMO (1974) ajustou uma função de produção do tipo Cobb-Douglas a culturas de milho e de soja, através de dados obtidos de 120 entrevistas diretas com os agricultores dos municípios de Guaira, Jardinópolis e Sales de Oliveira, no Estado de São Paulo, no ano agrícola 1971/1972. Na estimativa dos parâmetros da função de produção, utilizou o erro multiplicativo e a transformação logarítmica.

CAMARGO (1974) estudou a eficiência do uso dos recursos nas culturas de soja e algodão utilizando na estimativa de funções de produção o modelo de Cobb-Douglas e o de Ulveling-Fletcher, e comparou os resultados obtidos. Concluiu que a função de Ulveling-Fletcher ajustou-se melhor aos dados da cultura de soja. Embora no caso do algodão o coeficiente de determinação fosse praticamente da mesma ordem para as duas funções, a de Ulveling-Fletcher se revelou mais flexível, oferecendo maiores possibilidades para análise. No entanto é duvidoso que se possa julgar a conveniência de uma equação de regressão apenas pelo coeficiente de determinação, pois as propriedades matemáticas são muito mais importantes.

SILVEIRA (1976) utilizou o método desenvolvido por HARTLEY (1961) no estudo do comportamento dos modelos de crescimento de Von Bertalanffy, Brody, Gompertz e Logístico, quando aplicados a dados de crescimento de bovinos da raça Ibagé.

NOJIMOTO (1976) estudou e analisou todos os trabalhos sobre função de produção até essa data. Suas principais conclusões foram:

a) os erros que se cometem nos levantamentos de dados são tantos que comprometem os resultados das pesquisas;

b) os trabalhos empíricos utilizam fórmulas inadequadas para estimar o produto marginal e isto leva a conclusões falsas ou irrelevantes;

c) os intervalos de confiança dos parâmetros e dos produtos marginais são tão amplos que as estimativas têm pouco valor como instrumento de previsão.

MELO (1976) estudou a equação de Mitscherlich e também a forma adotada por Baule, esta com duas ou três variáveis independentes, em 50 ensaios fatoriais 3^3 de adubação com N, P e K em milho, instalados em terra roxa de Ribeirão Preto, SP. Utilizou o método modificado de Gauss-Newton para ajustar funções de regressão transcendentes pelos mínimos quadrados, tendo concluido que houve, para os casos estudados, efeito altamente significativo para a regressão e que o mesmo não ocorreu para os desvios de regressão.

HOFFMANN e VIEIRA, em livro publicado em 1977, incluiram interessante capítulo sobre a regressão assintótica, onde estudaram a estimação, pelos métodos de Newton e de Gauss-Newton, de parâmetros da equação $Y_i = \alpha + \beta \rho^{X_i} + e_i$, uma das formas da lei de Mitscherlich.

PERRE DA SILVA (1978) usou o método modificado de Gauss-Newton para estimar os parâmetros da equação de Mitscherlich na sua segunda aproximação e calculou as doses economicamente aconselháveis de nutrientes. Para esse fim usou:

a) um ensaio, fictício com 13 níveis de nutriente e 4 repetições, em delineamento inteiramente casualizado;

b) um ensaio de adubação de trigo, instalado em Londrina, PR, por pesquisadores do IAPAR e da EMBRAPA, no delineamento de blocos ao acaso com parcelas subdivididas.

ENGLER (1978), adotando o modelo econométrico de Cobb-Douglas com erro multiplicativo:

a) estabeleceu uma função de produção agregada, tendo como unidade de análise as 48 sub-divisões regionais do Estado de São Paulo, e tendo por base de informação os dados obtidos em entrevistas diretas com 6.996 agricultores constantes de amostra em corte seccional do Instituto de Economia Agrícola e da Coordenadoria de Assistência Técnica Integral(CATI) da Secretaria de Agricultura do Estado de São Paulo;

b) analisou as diferenças regionais na produção e na produtividade agrícola e suas implicações para o processo de desenvolvimento econômico;

c) analisou a eficiência econômica da agricultura na distribuição dos recursos produtivos;

d) estimou a contribuição de determinantes do capital humano, como educação formal, assistência técnica, extensão e experiência do agricultor, para a produção agrícola do Estado.

COSTA LIMA (1980), na procura de uma fórmula de adubação economicamente aconselhável para a cultura da mandioca, no Estado do Ceará, utilizou 22 ensaios fatoriais 3^3 incompletos de adubação com N, P e K, do projeto EMBRATER/FAO/MA, instalados no período de 1972/76. Aos dados experimentais aplicaram-se os modelos de regressão polinomial e de regressão assintótica. Para o modelo assintótico usou-se o método modificado de Gauss-Newton, desenvolvido por HARTLEY (1961).

3. MATERIAL E MÉTODOS

3.1 - Material

Os dados usados para o estudo do modelo

$$Y_i = A\, X_i^{B} + e_i$$

foram os mesmos utilizados por PERRE DA SILVA (1978, p. 93), excluído o nível zero em virtude de ocorrer impedimento matemático de aplicá-lo no desenvolvimento teórico no caso da função de Cobb-Douglas. Segundo a autora as repetições foram geradas através do modelo matemático $Y_i = m + t_i + e_i$, onde tomou $m = 100$ como média geral do experimento e variância $\sigma^2 = V(e_i) = 12$.

A variável X_i representa os níveis de tratamentos, que foram 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0; 2,2 e 2,4 (depois de excluído o zero).

Para o modelo

$$Y_i = A\, X_{i1}^{B_1}\, X_{i2}^{B_2} + e_i \qquad ,$$

o autor gerou dados que foram obtidos da função

$$Y_i = 68{,}2857\, X_{i1}^{0{,}2168}\, X_{i2}^{0{,}3542} + e_i \quad ,$$

e se encontram na Tabela 2 do Apêndice, onde o erro tem distribuição normal de média zero e variância quatro. Os valores de e_i foram extraídos da tabela de números aleatórios de DIXON e MASSEY (1951, pp. 355 a 359). As variáveis X_{i1} e X_{i2} representam os níveis de tratamentos que foram 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 1,1; 1,3; 1,5; 1,7; 1,9; 2,1; 2,3 e 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0; 2,2; 2,4, respectivamente.

3.2 - Método

3.2.1 - Função de Cobb-Douglas

Os modelos em estudo serão utilizados para determinar a produção através da função de Cobb-Douglas.

A variável Y_i representa a produção obtida com as dosagens X_i de um nutriente.

3.2.1.1 - Modelo I

$$Y_i = A\, X_i^{B} + e_i \qquad ,$$

onde: A e B são parâmetros;

e_i é o erro aleatório, que se supõe $e_i \cap N(0,\sigma^2)$.

3.2.1.2 - Modelo II

$$Y_i = A\, X_{i1}^{B_1}\, X_{i2}^{B_2} + e_i \quad ,$$

onde A, B_1 e B_2 são parâmetros;

$e_i \cap N(0,\sigma^2)$.

3.2.2.- Métodos para o ajustamento de funções de regressão transcendentes pelos mínimos quadrados

Os parâmetros, para cada um dos dois modelos anteriores, serão estimados através do método de Newton e do método modificado de Gauss-Newton (HOFFMANN e VIEIRA, 1977).

Frequentemente,nos deparamos com o problema de determinar a relação entre Y_i e os valores X_{1h}, X_{2h}, ..., X_{kh} (h=1, 2,... ..., n).

Na maioria das vezes, admite-se uma relação funcional conhecida, escrita sob a forma de uma função de regressão,

$$f(X,\theta) = f(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \; ,$$

onde os parâmetros θ_1, θ_2, ..., θ_m devem ser estimados. Nestas condições, é necessário determinar um vetor θ, para o qual a soma de quadrados

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - f(X_i,\theta)\right]^2$$

seja mínima. Aí, X_i representa o vetor $(X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in})$ e θ,por sua vez, é o vetor $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$.

3.2.2.1 - Descrição do processo iterativo

Consideremos que ${}_0\hat{\theta}_1, {}_0\hat{\theta}_2, \ldots, {}_0\hat{\theta}_m$ sejam estimativas preliminares dos parâmetros θ_k $(k=1,2,\ldots,m)$ (posteriormente veremos como calculá-las).

O primeiro passo, é obter correções para os elementos ${}_0\hat{\theta}_k$ do vetor inicial.

Dada uma amostra de N valores de X_i e Y_i e estabelecidos os valores das estimativas preliminares ${}_0\hat{\theta}_k$ obtemos as correções $\Delta\hat{\theta}_k$. Se essas correções não forem desprezíveis, obtemos ${}_1\hat{\theta}_k = {}_0\hat{\theta}_k + \Delta\hat{\theta}_k$. A seguir, utilizando ${}_1\hat{\theta}_k$ como novas estimativas preliminares, os cálculos são refeitos, obtendo-se novas correções.

Admitindo-se que o processo seja convergente, isto é, que os valores absolutos das correções tendam para zero, os cálculos são iterados até que as correções $\Delta\hat{\theta}_k$ sejam consideradas desprezíveis. Chega-se, assim, às estimativas de quadrados mínimos, que indicamos por $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_m$.

3.2.2.2 - Aplicação do método de Newton e do método modificado de Gauss-Newton aos modelos em estudo

O método modificado de Gauss-Newton será apresentado como um caso particular do método de Newton, isto é, nas equações de Newton admitiremos algumas parcelas como desprezíveis, e, obteremos desta forma as equações do método modificado de Gauss-Newton.

3.2.2.2.1 - Caso de uma só variável independente

Seja

$$Y_i = A X_i^B + e_i \quad ,$$

com $A > 0$, $B > 0$, $X_i > 0$, para $i=1,2,\dots, N$.

Sejam <u>a</u> e <u>b</u> as estimativas de A e B, respectivamente, obtidas com base em uma amostra de tamanho <u>N</u> de X_i e Y_i, de acordo com o método dos quadrados mínimos.

Temos,

$$Y_i = A X_i^B + e_i \quad , \quad A > 0;\ B > 0;\ X_i > 0; \quad (i=1,2,\dots,N)$$

e,

$$z = \Sigma e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (Y_i - A X_i^B)^2 \tag{1}$$

Diferenciando (1) obtemos:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial A} dA + \frac{\partial z}{\partial B} dB \quad ,$$

onde,

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial z}{\partial A} = -\Sigma (Y_i - A\,X_i^B)\,X_i^B \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial z}{\partial B} = -A\,\Sigma (Y_i - A\,X_i^B)\,X_i^B\,(L\,X_i) \tag{3}$$

Aí indicamos por $L\,X_i$ o logarítmo neperiano de X_i.
Portanto, as equações normais são:

$$\begin{cases} \Sigma (Y_i - \hat{Y}_i)\,X_i^b = 0 & (4) \\ \Sigma (Y_i - \hat{Y}_i)\,X_i^b\,(L\,X_i) = 0 & (5) \end{cases}$$

com $\hat{Y}_i = aX_i^b$.

O fato de em (4) e (5) usarmos a e b destaca o uso das estimativas dos parâmetros nas equações normais.

É evidente que estamos admitindo a condição suficiente para a e b serem pontos de mínimo, isto é, que a diferencial segunda de (1) para a e b seja definida positiva.

Admitindo-se existentes as condições para o desenvolvimento de uma função pela fórmula de Taylor, e aplicando-se esse procedimento às equações (4) e (5), temos o sistema

$$\left[\Sigma X_i^{2b_0}\right] \Delta a + \left[\begin{array}{l} a_0\,\Sigma X_i^{2b_0}(L\,X_i) - \\ -\,\Sigma (Y_i - Y_i^*)\,X_i^{b_0}\,(L\,X_i) \end{array}\right] \Delta b = \Sigma (Y_i - Y_i^*)\,X_i^{b_0}$$

$$\left[\Sigma X_i^{2b_0}(L\,X_i)\right]\Delta a + \begin{bmatrix} a_0\ \Sigma X_i^{2b_0}(L\,X_i)^2\ - \\ -\ \Sigma(Y_i - Y_i^*)\ X_i^{b_0}(L\,X_i)^2 \end{bmatrix}\Delta b = \Sigma(Y_i - Y_i^*)\ X_i^{b_0}(L\,X_i)\ ,$$

onde, a_0 e b_0 são estimativas preliminares, e $Y_i^* = a_0\ X_i^{b_0}$.

Se fizermos $f_i = X_i^{2b_0}$, $g_i = (Y_i - Y_i^*)\ X_i^{b_0}$ e $\ell_i = L\,X_i$, esse sistema, escrito na forma matricial, é:

$$\begin{bmatrix} \Sigma f_i & a_0\ \Sigma f_i \ell_i - \Sigma g_i \ell_i \\ \Sigma f_i \ell_i & a_0\ \Sigma f_i \ell_i^2 - \Sigma g_i \ell_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma g_i \\ \Sigma g_i \ell_i \end{bmatrix} \qquad (\alpha)$$

Essas são as equações correspondentes do método de Newton.

Ocorre, porém, que a primeira matriz acima pode ser decomposta da seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} \Sigma f_i & a_0\ \Sigma f_i \ell_i \\ \Sigma f_i \ell_i & a_0\ \Sigma f_i \ell_i^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \Sigma g_i \ell_i \\ 0 & \Sigma g_i \ell_i^2 \end{bmatrix}$$

Os elementos da segunda matriz ou são nulos ou são somas ponderadas de desvios. Então, os valores absolutos dos elementos dessa matriz devem ser pequenos em comparação com os valores absolutos dos elementos da primeira matriz. Assim sendo, temos, aproximadamente:

$$\begin{bmatrix} \Sigma f_i & a_0\ \Sigma f_i \ell_i \\ & \\ \Sigma f_i \ell_i & a_0\ \Sigma f_i \ell_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \\ \Delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma g_i \\ \\ \Sigma g_i \ell_i \end{bmatrix} \qquad (\beta)$$

Tais são as equações do método modificado de Gauss--Newton.

Admite-se que a primeira matriz do primeiro membro de cada um dos sistemas (α) e (β) seja não-singular, de onde resulta serem eles compatíveis e determinados, isto é, com uma só solução.

Dada uma amostra de tamanho N de pares (X_i, Y_i) e estabelecidos os valores das estimativas preliminares a_0 e b_0, obtemos com as soluções dos sistemas α e β, nas aplicações dos métodos de Newton ou do modificado de Gauss-Newton, os valores de Δa e Δb. Se essas correções não forem desprezíveis obtemos $a_1 = a_0 + \Delta a$, $b_1 = b_0 + \Delta b$. A seguir, utilizando a_1 e b_1 como novas estimativas preliminares, os cálculos são refeitos, obtendo-se novas correções de Δa e Δb.

Admitindo-se que o processo seja convergente, isto é, que os valores absolutos das correções tendam a zero, os cálculos são repetidos até que as correções Δa e Δb sejam consideradas desprezíveis. Chega-se, assim, às estimativas de quadrados mínimos de A e B, que indicamos por $\underline{a}$ e $\underline{b}$.

Cálculo de estimativas preliminares a_0 e b_0

O método usado na obtenção das estimativas iniciais foi o seguinte.

Consideremos,

$$Y_i = A\, X_i^B\,(1 + \varepsilon_i) \quad ,$$

$$\therefore \quad L\, Y_i = L\, A + B(L\, X_i) + L(1 + \varepsilon_i) \quad .$$

Fazendo

$$y_i = L\, Y_i$$
$$a = L\, A$$
$$x_i = L\, X_i$$
$$e_i = L(1 + \varepsilon_i)$$

temos

$$y_i = a + Bx_i + e_i \quad ,$$

que é uma equação de regressão linear, cuja aplicação é bem conhecida.

Desta forma, obtivemos as estimativas preliminares a_0 e b_0, dadas por $\hat{a}$ e $\hat{B}$, através das relações

$$a = \exp \hat{a} \quad ,$$
$$b = \hat{B} \quad .$$

3.2.2.2.2 - Caso de duas variáveis independentes

Seja

$$Y_i = A\, X_{i1}^{B_1}\, X_{i2}^{B_2} + e_i \quad ,$$

com $A > 0$, $B_1 > 0$, $B_2 > 0$, $i=1,2,\ldots,N$, $X_{ij} > 0$, para $j=1,2$.

Sejam $\underline{a}$, b_1 e b_2 as estimativas de A, B_1 e B_2 respectivamente, obtidas com base em uma amostra de tamanho $\underline{N}$ dos vetores (X_{i1}, X_{i2}, Y_i), de acordo com o método de quadrados mínimos.

Temos,

$$Y_i = A\, X_{i1}^{B_1}\, X_{i2}^{B_2} + e_i \quad ,$$

e

$$z = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (Y_i - A\, X_{i1}^{B_1}\, X_{i2}^{B_2})^2 \qquad (6)$$

Diferenciando (6) obtemos:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial A}\, dA + \frac{\partial z}{\partial B_1}\, dB_1 + \frac{\partial z}{\partial B_2}\, dB_2 \quad ,$$

onde,

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial z}{\partial A} = -\,\Sigma(Y_i - A\, X_{i1}^{B_1}\, X_{i2}^{B_2})\, X_{i1}^{B_1}\, X_{i2}^{B_2}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial z}{\partial B_1} = -\,\Sigma(Y_i - A\, X_{i1}^{B_1}\, X_{i2}^{B_2})\, A\, X_{i1}^{B_1}\, X_{i2}^{B_2}\,(L\, X_{i1})$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial z}{\partial B_2} = -\,\Sigma(Y_i - A\, X_{i1}^{B_1}\, X_{i2}^{B_2})\, A\, X_{i1}^{B_1}\, X_{i2}^{B_2}\,(L\, X_{i2})$$

portanto, as equações normais são:

$$
\begin{cases}
\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)\, X_{i1}^{b_1}\, X_{i2}^{b_2} = 0 & (7)\\[2ex]
\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)\, X_{i1}^{b_1}\, X_{i2}^{b_2}\, (L\, X_{i1}) = 0 & (8)\\[2ex]
\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)\, X_{i1}^{b_1}\, X_{i2}^{b_2}\, (L\, X_{i2}) = 0 & (9)
\end{cases}
$$

com $\hat{Y}_i = a\, X_{i1}^{b_1}\, X_{i2}^{b_2}$.

O fato de em (7), (8) e (9) usarmos a, b_1 e b_2 destaca o uso das estimativas dos parâmetros nas equações normais.

É evidente que estamos admitindo a condição suficiente para a, b_1 e b_2 serem coordenadas de um ponto de mínimo, isto é, que a diferencial segunda de (6) para a, b_1 e b_2 seja definida positiva.

Admitindo-se existentes as condições para o desenvolvimento de uma função pela fórmula de Taylor, e aplicando-se esse procedimento às equações (7), (8) e (9), temos o sistema:

$$\left[\Sigma\, X_{i1}^{2b_1^0}\, X_{i2}^{2b_2^0}\right] \Delta a + \left[a_0\, \Sigma\, X_{i1}^{2b_1^0}\, X_{i2}^{2b_2^0}\, (L\, X_{i1}) - \Sigma(Y_i - Y_i^0)\, X_{i1}^{b_1^0}\, X_{i2}^{b_2^0}\, (L\, X_{i1})\right] \Delta b_1 +$$

$$+\left[a_0\, \Sigma\, X_{i1}^{2b_1^0}\, X_{i2}^{2b_2^0}\, (L\, X_{i2}) - \Sigma(Y_i - Y_i^0)\, X_{i1}^{b_1^0}\, X_{i2}^{b_2^0}\, (L\, X_{i2})\right] \Delta b_2 = \Sigma(Y_i - Y_i^0)\, X_{i1}^{b_1^0}\, X_{i2}^{b_2^0}$$

$$\left[\Sigma\, X_{i1}^{2b_1^0}\, X_{i2}^{2b_2^0}\, (L\, X_{i1})\right] \Delta a + \left[a_0\, \Sigma\, X_{i1}^{2b_1^0}\, X_{i2}^{2b_2^0}\, (L\, X_{i1})^2 - \Sigma(Y_i - Y_i^0)\, X_{i1}^{b_1^0}\, X_{i2}^{b_2^0}\, (L\, X_{i1})^2\right] \Delta b_1 +$$

$$+\left[a_0\, \Sigma\, X_{i1}^{2b_1^0}\, X_{i2}^{2b_2^0}\, (L\, X_{i1})(L\, X_{i2}) - \Sigma(Y_i - Y_i^0)\, X_{i1}^{b_1^0}\, X_{i2}^{b_2^0}\, (L\, X_{i1})(L\, X_{i2})\right] \Delta b_2 = \Sigma(Y_i - Y_i^0)\, X_{i1}^{b_1^0}\, X_{i2}^{b_2^0}\, (L\, X_{i}$$

$$\left[\Sigma X_{i1}^{2\,{}_0b_1} X_{i2}^{2\,{}_0b_2} (L\,X_{i2})\right]\Delta a + \left[a_0\,\Sigma X_{i1}^{2\,{}_0b_1} X_{i2}^{2\,{}_0b_2} (L\,X_{i1})(L\,X_{i2}) - \Sigma(Y_i - Y_i^*)\,X_{i1}^{{}_0b_1} X_{i2}^{{}_0b_2} (L\,X_{i1})(L\,X_{i2})\right]\Delta b_1 +$$

$$+ \left[a_0\,\Sigma X_{i1}^{2\,{}_0b_1} X_{i2}^{2\,{}_0b_2} (L\,X_{i2})^2 - \Sigma(Y_i - Y_i^*)\,X_{i1}^{{}_0b_1} X_{i2}^{{}_0b_2} (L\,X_{i2})^2\right]\Delta b_2 = \Sigma(Y_i - Y_i^*)\,X_{i1}^{{}_0b_1} X_{i2}^{{}_0b_2} (L\,X_{i2}) \quad ;$$

onde, a_0, ${}_0b_1$ e ${}_0b_2$ são estimativas preliminares e $Y_i^* = a_0\,X_{i1}^{{}_0b_1}\,X_{i2}^{{}_0b_2}$.

Se fizermos

$$f_2 = X_{i1}^{2\,{}_0b_1}\,X_{i2}^{2\,{}_0b_2} \quad , \qquad g_2 = (Y_i - Y_i^*)\,X_{i1}^{{}_0b_1}\,X_{i2}^{{}_0b_2} \quad ,$$

$$\ell_1 = L\,X_{i1} \quad , \qquad \ell_2 = L\,X_{i2} \quad ,$$

esse sistema, escrito na forma matricial, se torna:

$$\begin{bmatrix} \Sigma f_2 & a_0\,\Sigma f_2\ell_1 - \Sigma g_2\ell_1 & a_0\,\Sigma f_2\ell_2 - \Sigma g_2\ell_2 \\ \Sigma f_2\ell_1 & a_0\,\Sigma f_2\ell_1^2 - \Sigma g_2\ell_1^2 & a_0\,\Sigma f_2\ell_1\ell_2 - \Sigma g_2\ell_1\ell_2 \\ \Sigma f_2\ell_2 & a_0\,\Sigma f_2\ell_1\ell_2 - \Sigma g_2\ell_1\ell_2 & a_0\,\Sigma f_2\ell_2^2 - \Sigma g_2\ell_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma g_2 \\ \Sigma g_2\ell_1 \\ \Sigma g_2\ell_2 \end{bmatrix} \quad (Y)$$

Obtivemos, assim, as equações correspondentes do método de Newton.

Ocorre que, a primeira matriz acima, pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \Sigma f_2 & a_0\ \Sigma f_2 \ell_1 & a_0\ \Sigma f_2 \ell_2 \\ \Sigma f_2 \ell_1 & a_0\ \Sigma f_2 \ell_1^2 & a_0\ \Sigma f_2 \ell_1 \ell_2 \\ \Sigma f_2 \ell_2 & a_0\ \Sigma f_2 \ell_1 \ell_2 & a_0\ \Sigma f_2 \ell_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \Sigma g_2 \ell_1 & \Sigma g_2 \ell_2 \\ 0 & \Sigma g_2 \ell_1^2 & \Sigma g_2 \ell_1 \ell_2 \\ 0 & \Sigma g_2 \ell_1 \ell_2 & \Sigma g_2 \ell_2^2 \end{bmatrix}$$

Os elementos da segunda matriz ou são nulos ou são so̲mas ponderadas de desvios. Então, os valores absolutos dos elementos dessa matriz devem ser pequenos em comparação com os valores a̲b̲solutos dos elementos da primeira matriz. Assim sendo, temos, aproximadamente:

$$\begin{bmatrix} \Sigma f_2 & a_0\ \Sigma f_2 \ell_1 & a_0\ \Sigma f_2 \ell_2 \\ \Sigma f_2 \ell_1 & a_0\ \Sigma f_2 \ell_1^2 & a_0\ \Sigma f_2 \ell_1 \ell_2 \\ \Sigma f_2 \ell_2 & a_0\ \Sigma f_2 \ell_1 \ell_2 & a_0\ \Sigma f_2 \ell_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma g_2 \\ \Sigma g_2 \ell_1 \\ \Sigma g_2 \ell_2 \end{bmatrix} \qquad (\delta)$$

Estas são as equações correspondentes ao método modificado de Gauss-Newton.

Admite-se que a primeira matriz do primeiro membro de cada um dos sistemas (γ) e (δ) seja não-singular, de onde resulta se̲rem eles compatíveis e determinados, isto é, com uma só solução.

Dada uma amostra de tamanho $\underline{N}$ de vetores $[X_{i1}, X_{i2}, Y_i]$ e estabelecidos os valores das estimativas preliminares ${}_0a$, ${}_0b_1$ e ${}_0b_2$, obtemos, com as soluções dos sistemas (γ) e (δ), nas aplicações dos métodos de Newton ou do modificado de Gauss-Newton, os valores de Δa, Δb_1 e Δb_2. Se essas correções não forem desprezíveis, obtemos $a_1 = {}_0a + \Delta a$, $b_1 = {}_0b_1 + \Delta b_1$ e $b_2 = {}_0b_2 + \Delta b_2$. A seguir, utilizando a_1, b_1 e b_2 como novas estimativas preliminares, os cálculos são refeitos, obtendo-se novas correções Δa, Δb_1 e Δb_2.

Admitindo-se que o processo seja convergente, isto é, que os valores absolutos das correções tendam a zero, os cálculos são repetidos até que as correções Δa, Δb_1 e Δb_2 sejam consideradas desprezíveis. Chega-se, assim, às estimativas de quadrados mínimos $\underline{a}$, $\underline{b_1}$ e $\underline{b_2}$ dos parâmetros A, B_1 e B_2.

Cálculo das estimativas preliminares ${}_0a$, ${}_0b_1$ e ${}_0b_2$

O método usado na obtenção das estimativas iniciais foi o seguinte.

Consideremos,

$$Y_i = A\, X_{i1}^{B_1}\, X_{i2}^{B_2}\, (1 + \varepsilon_i) \quad ,$$

$$\therefore \quad L\, Y_i = L\, A + B_1(L\, X_{i1}) + B_2(L\, X_{i2}) + L(1 + \varepsilon_i)$$

fazendo,

$$y_i = L\, Y_i$$

$$a = L\, A$$

$$x_{i1} = L\, X_{i1}$$

$$x_{i2} = L\, X_{i2}$$

$$e_i = L(1 + \varepsilon_i)$$

temos,

$$y_i = a + B_1 x_{i1} + B_2 x_{i2} + e_i \quad ,$$

que é uma equação de regressão linear múltipla, cuja aplicação é bem conhecida.

Desta forma, obtivemos as estimativas preliminares $_0\underline{a}$, $_0\underline{b}_1$, $_0\underline{b}_2$, dadas por $\hat{a}$, $\hat{B}_1$, $\hat{B}_2$, através das relações:

$$_0a = \exp \hat{a} \quad ,$$

$$_0b_1 = \hat{B}_1 \quad ,$$

$$_0b_2 = \hat{B}_2 \quad .$$

3.2.2.2.3 - Generalização do processo

É evidente que, para o caso de $\underline{n}$ variáveis independentes, isto é,

$$Y_i = A\, X_{i1}^{B_1}\, X_{i2}^{B_2} \cdots X_{in}^{B_n} + e_i \quad ,$$

ou

$$Y_i = A \prod_{k=1}^{n} X_{ik}^{B_k} + e_i \quad ,$$

com $i=1,2,\ldots,N$, $X_{ij} > 0$ para $j=1,2,\ldots,n$, $A > 0$, $B_j > 0$.

Se fizermos

$$f_n = X_{i1}^{2\,{}_0b_1}\, X_{i2}^{2\,{}_0b_2} \cdots X_{in}^{2\,{}_0b_n} \quad , \quad g_n = (Y_i - Y_i^*)\, X_{i1}^{{}_0b_1}\, X_{i2}^{{}_0b_2} \cdots X_{in}^{{}_0b_n} \quad ,$$

$$\ell_1 = L\, X_{i1} \quad , \quad \ell_2 = L\, X_{i2} \quad , \quad \ldots \quad , \quad \ell_n = L\, X_{in} \quad ,$$

onde a_0, ${}_0b_1$, ${}_0b_2$, ..., ${}_0b_n$ são estimativas preliminares e

$$Y_i^* = a_0 \, X_{i1}^{{}_0b_1} \, X_{i2}^{{}_0b_2} \ldots X_{in}^{{}_0b_n} \quad ,$$

temos:

$$\begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \ldots \\ \Delta b_n \end{bmatrix} = \left[\, \Psi \, \right]^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma g_n \\ \Sigma g_n \ell_1 \\ \Sigma g_n \ell_2 \\ \ldots \\ \Sigma g_n \ell_n \end{bmatrix} \quad ,$$

onde, para o método de Newton,

$$F = \begin{bmatrix} \Sigma f_n & a_0\, \Sigma f_n \ell_1 - \Sigma g_n \ell_1 & a_0\, \Sigma f_n \ell_2 - \Sigma g_n \ell_2 & \cdots & a_0\, \Sigma f_n \ell_n - \Sigma g_n \ell_n \\ \Sigma f_n \ell_1 & a_0\, \Sigma f_n \ell_1^2 - \Sigma g_n \ell_1^2 & a_0\, \Sigma f_n \ell_1 \ell_2 - \Sigma g_n \ell_1 \ell_2 & \cdots & a_0\, \Sigma f_n \ell_1 \ell_n - \Sigma g_n \ell_1 \ell_n \\ \Sigma f_n \ell_2 & a_0\, \Sigma f_n \ell_1 \ell_2 - \Sigma g_n \ell_1 \ell_2 & a_0\, \Sigma f_n \ell_2^2 - \Sigma g_n \ell_2^2 & \cdots & a_0\, \Sigma f_n \ell_2 \ell_n - \Sigma g_n \ell_2 \ell_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma f_n \ell_n & a_0\, \Sigma f_n \ell_1 \ell_n - \Sigma g_n \ell_1 \ell_n & a_0\, \Sigma f_n \ell_2 \ell_n - \Sigma g_n \ell_2 \ell_n & \cdots & a_0\, \Sigma f_n \ell_n^2 - \Sigma g_n \ell_n^2 \end{bmatrix}$$

e, para o método modificado de Gauss-Newton,

$$F = \begin{bmatrix} \Sigma f_n & a_0\, \Sigma f_n \ell_1 & a_0\, \Sigma f_n \ell_2 & \cdots & a_0\, \Sigma f_n \ell_n \\ \Sigma f_n \ell_1 & a_0\, \Sigma f_n \ell_1^2 & a_0\, \Sigma f_n \ell_1 \ell_2 & \cdots & a_0\, \Sigma f_n \ell_1 \ell_n \\ \Sigma f_n \ell_2 & a_0\, \Sigma f_n \ell_1 \ell_2 & a_0\, \Sigma f_n \ell_2^2 & \cdots & a_0\, \Sigma f_n \ell_2 \ell_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma f_n \ell_n & a_0\, \Sigma f_n \ell_1 \ell_n & a_0\, \Sigma f_n \ell_2 \ell_n & \cdots & a_0\, \Sigma f_n \ell_n^2 \end{bmatrix}$$

As estimativas preliminares seriam obtidas da seguinte forma:

$$Y_i = A\, X_{i1}^{\beta_1}\, X_{i2}^{\beta_2} \ldots X_{in}^{\beta_n}\, (1 + \varepsilon_i) \quad ,$$

$$L\, Y_i = L\, A + \beta_1 (L\, X_{i1}) + \beta_2 (L\, X_{i2}) + \ldots + \beta_n\, L(X_{in}) + L(1 + \varepsilon_i).$$

Fazendo

$$\begin{aligned} y_i &= L\, Y_i \\ \hat{a} &= L\, A \\ x_{i1} &= L\, X_{i1} \\ x_{i2} &= L\, X_{i2} \\ \ldots & \quad \ldots \\ x_{in} &= L\, X_{in} \\ e_i &= L(1 + \varepsilon_i) \quad , \end{aligned}$$

temos,

$$y_i = a + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_n x_{in} + e_i \quad ,$$

que é uma equação de regressão linear múltipla, cuja aplicação é bem conhecida.

Desta forma, obtêm-se as estimativas preliminares ${}_0\underline{a}$, ${}_0\underline{b}_1$, ${}_0\underline{b}_2$, ..., ${}_0\underline{b}_n$, dadas por $\hat{a}$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, ..., $\hat{\beta}_n$, através das relações:

$$\begin{aligned} {}_0a &= \exp \hat{a} \quad , \\ {}_0b_k &= \hat{\beta}_k \quad , \end{aligned}$$

com $k=1,2,\ldots,n$.

3.2.2.2.4 - Estimativa da dose econômica

Caso de uma só variável independente

Seja, $\hat{Y}_i = a\, X_i^b \quad (a,\ b > 0,\ X_i > 0)$.

A condição de maximização dos lucros ou da receita líquida é que a receita marginal seja igual ao custo marginal, desde que estejam satisfeitas as condições suficientes relativas à diferencial segunda da receita líquida, isto é, $0 < b < 1$, no caso presente.

Consideremos,

P_X = preço de X (nutriente);

P_Y = preço de Y (produto);

RT = receita total;

RMg = receita marginal;

CT = custo total;

CMg = custo marginal.

Sabemos que:

$$RT = P_Y \cdot \hat{Y} \quad ; \quad RT = P_Y \cdot aX^b \quad ; \quad RMg = \frac{dRT}{dX} = abX^{b-1}\ P_Y \ ,$$

$$CT = P_X\ X \quad ; \quad CMg = \frac{dCT}{dX} = P_X \ .$$

Portanto, para $0 < b < 1$ temos:

$$abX^{b-1}\ P_Y = P_X \quad ,$$

$$X^{b-1} = \frac{P_X}{P_Y} \cdot \frac{1}{ab} \quad ,$$

$$X^* = \left(\frac{P_X}{P_Y} \cdot \frac{1}{ab}\right)^{1/(b-1)}$$

Sendo RL a receita líquida, temos

$$RL = P_Y \, aX^b - P_X \, X \quad ,$$

logo,

$$d^2RL = P_Y \, b(b - 1) \, aX^{b-2} \, dX^2 \quad .$$

Conclui-se, pois, que d^2RL é negativo para $0 < b < 1$, como se afirmou.

Caso de duas variáveis independentes

Seja, $\hat{Y} = a \, X_1^{b_1} \, X_2^{b_2}$ $(a, \, b_1, \, b_2 > 0, \; X_1, \, X_2 > 0)$, e consideremos,

P_{X_1} = preço de X_1 (nutriente);
P_{X_2} = preço de X_2 (nutriente);
P_Y = preço de Y (produto).

Portanto:

$$RT = P_Y \, \hat{Y} \quad ; \quad RT = P_Y \, a \, X_1^{b_1} \, X_2^{b_2} \quad ; \quad CT = P_{X_1} X_1 + P_{X_2} X_2 \quad .$$

A condição de lucro máximo é:

$$RMg_{X_1} = CMg_{X_1} \quad , \quad RMg_{X_2} = CMg_{X_2} \quad ,$$

onde, RMg_{X_1} = receita marginal de X_1,

RMg_{X_2} = receita marginal de X_2,

CMg_{X_1} = custo marginal de X_1,

CMg_{X_2} = custo marginal de X_2,

desde que estejam satisfeitas as condições suficientes relativas à diferencial segunda da receita líquida.

Mas,

$$RMg_{X_1} = \frac{\partial}{\partial X_1} RT = P_Y \; a \; b_1 \; X_1^{b_1 - 1} \; X_2^{b_2} \; ,$$

$$RMg_{X_2} = \frac{\partial}{\partial X_2} RT = P_Y \; a \; b_2 \; X_1^{b_1} \; X_2^{b_2 - 1} \; ,$$

$$CMg_{X_1} = \frac{\partial}{\partial X_1} CT = P_{X_1} \; ,$$

$$CMg_{X_2} = \frac{\partial}{\partial X_2} CT = P_{X_2} \; ,$$

então

$$\left\{ \begin{array}{l} P_Y \; a \; b_1 \; X_1^{b_1 - 1} \; X_2^{b_2} = P_{X_1} \\ P_Y \; a \; b_2 \; X_1^{b_1} \; X_2^{b_2 - 1} = P_{X_2} \end{array} \right. \qquad (\zeta)$$

cuja solução conduz às raízes X_1^* e X_2^* que maximizam a receita líqui_ da, desde que estejam satisfeitas as condições suficientes relativas à diferencial segunda da receita líquida.

Caso de n variáveis independentes

Seja, $\hat{Y} = a\, X_1^{b_1}\, X_2^{b_2} \ldots X_n^{b_n}$, então (ζ) assumirá a forma

$$
\begin{cases}
P_Y\, a\, b_1\, X_1^{b_1-1}\, X_2^{b_2} \ldots X_n^{b_n} = P_{X_1} \\
P_Y\, a\, b_2\, X_1^{b_1}\, X_2^{b_2-1} \ldots X_n^{b_n} = P_{X_2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_Y\, a\, b_n\, X_1^{b_1}\, X_2^{b_2-1} \ldots X_n^{b_n} = P_{X_n}
\end{cases}
$$

cuja solução conduz às raízes X_1^*, X_2^*, ..., X_n^* que maximizam a receita líquida, desde que estejam satisfeitas as condições suficientes relativas à diferencial segunda da receita líquida

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 - Modelos com Erro Multiplicativo

O Quadro 1 mostra a análise de variância dos dados do primeiro ensaio pelo método do erro multiplicativo, cuja equação de regressão é

$$\hat{Y} = 103{,}5268\ X^{0{,}3705} \quad ,$$

e o Quadro 2 apresenta a análise de variância dos dados do segundo ensaio, nas mesmas condições anteriores, e cuja equação de regressão estimada é

$$\hat{Y} = 70{,}9307\ X_1^{0{,}1957}\ X_2^{0{,}3461} \quad .$$

Quadro 1 - Análise de variância relativa ao ensaio nº 1.

Causa da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Regressão	1	26934,1767	26934,1767	5783,96**
Desvios da Regressão	10	4073,7000	407,3700	87,48**
(Tratamentos)	(11)	(31007,8767)		
Resíduo	36	167,6400	4,6567	
Total	47	31175,5167		

Quadro 2 - Análise de variância relativa ao ensaio nº 2.

Causa da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Regressão	2	34091,7347	17045,8674	7801,67**
Desvios da Regressão	9	40,9976	4,5553	2,08ns
(Tratamentos)	(11)	(34132,7323)		
Resíduo	36	78,6575	2,1849	
Total	47	34211,3898		

Observa-se no Quadro 1 efeito altamente significativo, isto é, significativo ao nível de 1% de probabilidade, tanto para a regressão como para os desvios de regressão. Entretanto, no Quadro 2 enquanto a regressão foi altamente significativa os desvios de regressão não o foram.

As estimativas dos parâmetros assim obtidas foram usadas como valores iniciais nos métodos iterativos aplicados a seguir.

4.2 - Modelo I - Com Erro Aditivo

Após quatro iterações, para o método de Newton e cinco para o método modificado de Gauss-Newton, com valores iniciais a_0 = 103,5268, b_0 = 0,3705, obtiveram-se as seguintes estimativas pelo método de Newton:

$$a = 104,8619$$

$$b = 0,3248 \quad .$$

Temos, pois, a equação estimada:

$$\hat{Y} = 104,8619 \; X^{0,3248} \quad .$$

Com os mesmos valores iniciais, o método modificado de Gauss-Newton deu:

$$a = 104,862 \quad ,$$

$$b = 0,3248 \quad ,$$

cuja equação correspondente é:

$$\hat{Y} = 104,862 \; X^{0,3248} \quad .$$

Os Quadros 3 e 4 mostram as correções obtidas com as iterações, quando se aplicaram esses métodos. Deles se depreende que, com a aplicação do método de Newton, a função ajustada convergiu mais rapidamente.

Quadro 3 - Correções correspondentes às iterações do modelo I pelo método de Newton.

CORREÇÕES	ITERAÇÕES			
	1ª	2ª	3ª	4ª
Δa	5,9731	-0,6226	-0,0103	0,000016
Δb	-0,0515	0,00560	0,00023	-0,000033

Quadro 4 - Correções correspondentes às iterações do modelo I pelo método modificado de Gauss-Newton.

CORREÇÕES	ITERAÇÕES				
	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
Δa	6,1111	-0,8316	0,0725	-0,0136	0,0022
Δb	-0,0515	0,0068	-0,00120	0,00021	-0,000042

Em virtude dos ajustamentos oriundos da aplicação do método de Newton e do método modificado de Gauss-Newton terem convergido para uma mesma função, isto é, para

$$\hat{Y} = 104,862\ X^{0,3248} \quad ,$$

apresenta-se, no Quadro 5, uma só análise de variância.

Quadro 5 - Análise de variância relativa ao ensaio nº 1.

Causa da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Regressão	1	27351,2295	27351,2295	5873,52**
Desvios da Regressão	10	3656,6472	365,6647	78,52**
(Tratamentos)	(11)	(31007,8767)		
Resíduo	36	167,6400	4,6567	
Total	47	31175,5167		

Observa-se no Quadro 5 efeito altamente significativo, ao nível de 1% de probabilidade, tanto para a regressão, como para os desvios da regressão. Entretanto, a soma de quadrados dos desvios de regressão foi menor que a obtida quando se usou o erro multiplicativo, isto sugerindo um melhor ajustamento no caso do erro aditivo, embora, em ambos, o quadrado médio dos desvios da regressão tenha sido significativo ao nível de 1% de probabilidade.

Quadro 6 - Demonstrativo do comportamento das funções ajustadas do modelo I.

X	$\bar{Y}$	$\hat{Y} = 103,5268\ X^{0,3705}$	$(\bar{Y} - \hat{Y})$	$(\bar{Y} - \hat{Y})^2$
0,2	53,60	57,0275	-3,4275	11,7478
0,4	69,90	73,7252	-3,8252	14,6322
0,6	86,20	85,6757	0,5243	0,2749
0,8	101,00	95,3120	5,6880	32,3533
1,0	110,00	103,5268	6,4732	41,9023
1,2	119,00	110,7617	8,2383	67,8696
1,4	128,00	117,2717	10,7283	115,0964
1,6	132,00	123,2195	8,7805	77,0972
1,8	133,00	128,7156	4,2844	18,3561
2,0	131,00	133,8395	-2,8395	8,0628
2,2	129,00	138,6502	-9,6502	93,1264
2,4	120,00	143,1928	-23,1928	537,9060
				1018,4250

X	$\bar{Y}$	$\hat{Y}_1 = 104,862\ X^{0,3248}$	$(\bar{Y} - \hat{Y}_1)$	$(\bar{Y} - \hat{Y}_1)^2$
0,2	53,60	62,1716	-8,5716	73,4723
0,4	69,90	77,8694	-7,9694	63,5113
0,6	86,20	88,8303	-2,6303	6,9185
0,8	101,00	97,5307	3,4693	12,0360
1,0	110,00	104,8619	5,1381	26,4001
1,2	119,00	111,2591	7,7409	59,9215
1,4	128,00	116,9715	11,0285	121,6278
1,6	132,00	122,1563	9,8437	96,8984
1,8	133,00	126,9200	6,0800	36,9664
2,0	131,00	131,3385	-0,3385	0,1146
2,2	129,00	135,4679	-6,4679	41,8337
2,4	120,00	139,3510	-19,3510	374,4612
				914,1618

4.3 - Modelo II - Com Erro Aditivo

Após cinco iterações, para o método de Newton, com valores iniciais ${}_0a$ = 70,9307, ${}_0b_1$ = 0,1957, ${}_0b_2$ = 0,3461, observou-se não haver convergência das estimativas dos parâmetros. Porém, para o método modificado de Gauss-Newton, e com os mesmos valores iniciais, fizeram-se três iterações e se obtiveram as seguintes estimativas:

$$a = 70{,}5766 \quad ,$$
$$b_1 = 0{,}1749 \quad ,$$
$$b_2 = 0{,}3717 \quad .$$

Temos, pois, a equação estimada:

$$\hat{Y} = 70{,}5766\ X_1^{0{,}1749}\ X_2^{0{,}3717}$$

O fato de não ter havido convergência para as estimativas dos parâmetros quando se aplicou o método de Newton, impossibilita uma comparação, nesse caso, com o método tradicional, isto é, aquele que usa o erro aleatório multiplicativo.

A explicação para a falta de convergência, dada pelos estudiosos do assunto, é o fato de as estimativas iniciais não terem sido adequadas. Mas este é, sem dúvida, o defeito mais sério dos métodos iterativos mencionados.

Os Quadros 7 e 8 mostram as correções que foram obtidas para o método de Newton e para o método modificado de Gauss-New ton, respectivamente.

Quadro 7 - Correções correspondentes a iterações do modelo II pela aplicação do método de Newton.

CORREÇÕES	ITERAÇÕES				
	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
Δa	0,7216	1,6792	-5,1506	-0,0992	1,5995
Δb_1	0,0308	0,0421	-0,1274	0,0115	0,0264
Δb_2	-0,0257	-0,0482	0,1376	-0,0097	-0,0332

Quadro 8 - Correções correspondentes a iterações do modelo II pela aplicação do método modificado de Gauss-Newton.

CORREÇÕES	ITERAÇÕES		
	1ª	2ª	3ª
Δa	-1,4236	0,0071	-0,000067
Δb_1	-0,0209	0,000084	-0,000040
Δb_2	0,0259	-0,00030	-0,000020

O Quadro 9 mostra a análise de variância para o modelo II da regressão, após as iterações, ao aplicar-se o método modificado de Gauss-Newton.

Quadro 9 - Análise de variância relativa ao ensaio nº 2.

Causa da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Regressão	2	34092,6287	17046,3144	7801,87**
Desvios de Regressão	9	40,1036	4,4560	2,04ns
(Tratamentos)	(11)	(34132,7323)		
Resíduo	36	78,6575	2,1849	
Total	47	34211,3898		

Observa-se que a soma de quadrados dos desvios de regressão para o método modificado de Gauss-Newton foi ligeiramente menor que a soma de quadrados dos desvios de regressão para o caso em que se adotou o erro aleatório multiplicativo.

Quadro 10 - Demonstrativo do comportamento das funções ajustadas do modelo II.

X_1	X_2	$\bar{Y}$	$\hat{Y} = 70{,}93068\ X_1^{0{,}1957}\ X_2^{0{,}3461}$	$(\bar{Y} - \hat{Y})$	$(\bar{Y} - \hat{Y})^2$
0,1	0,2	25,650	25,8953	-0,2453	0,0602
0,3	0,4	41,400	40,8112	0,5888	0,3467
0,5	0,6	52,200	51,8968	0,3032	0,0919
0,7	0,8	60,275	61,2321	-0,9571	0,9160
0,9	1,0	68,975	69,4831	-0,5081	0,2582
1,1	1,2	76,950	76,9732	-0,0232	0,0005
1,3	1,4	83,150	83,8895	-0,7395	0,5469
1,5	1,6	89,725	90,3527	-0,6277	0,3940
1,7	1,8	96,625	96,4457	0,1793	0,3321
1,9	2,0	102,675	102,2287	0,4464	0,1993
2,1	2,2	109,800	107,7469	2,0531	4,2152
2,3	2,4	111,250	113,0356	-1,7856	3,1884
					10,2494

X_1	X_2	$\bar{Y}$	$\hat{Y}_1 = 70{,}5766\ X_1^{0{,}1749}\ X_2^{0{,}3717}$	$(\bar{Y} - \hat{Y}_1)$	$(\bar{Y} - \hat{Y}_1)^2$
0,1	0,2	25,650	25,9390	-0,2890	0,0835
0,3	0,4	41,400	40,6719	0,7281	0,5301
0,5	0,6	52,200	51,7070	0,4930	0,2431
0,7	0,8	60,275	61,0305	-0,7555	0,5707
0,9	1,0	68,975	69,2879	-0,3129	0,0979
1,1	1,2	76,950	76,7948	0,1552	0,0241
1,3	1,4	83,150	83,7346	-0,5846	0,3418
1,5	1,6	89,725	90,2257	-0,5007	0,2507
1,7	1,8	96,625	96,3498	0,2752	0,0757
1,9	2,0	102,675	102,1662	0,5088	0,2589
2,1	2,2	109,800	107,7197	2,0803	4,3276
2,3	2,4	111,250	113,0450	-1,7950	3,2218
					10,0259

5. CONCLUSÕES

5.1 - Para o primeiro modelo ajustado aos dados do ensaio nº 1, conclui-se que o erro aleatório aditivo apresentou um melhor ajustamento que o tradicional de erro aleatório multiplicativo, tanto com o uso do método de Newton como para o caso do método modificado de Gauss-Newton.

5.2 - Para o segundo modelo ajustado aos dados do ensaio nº 2, conclui-se que o método que propuzemos apresentou um melhor ajustamento que o tradicional, apenas com o uso do método modificado de Gauss-Newton. A comparação com o método de Newton não foi possível em virtude de, na sua aplicação não ter ocorrido convergência, para as estimativas dos parâmetros.

5.3 - Nos casos de convergência, esta ocorreu com bastante rapidez, de tal sorte que poucas iterações foram necessárias.

6. BIBLIOGRAFIA

CAMARGO, J.R.V. de, 1974. Análise da Produtividade nas Culturas de Algodão e Soja com a Aplicação do Modelo Ulveling-Fletcher. Piracicaba, ESALQ/USP. 131 pp. (Dissertação de Mestrado).

COSTA LIMA, A.R., 1980. Superfícies de Resposta em Experimentos Fatoriais 3^3 Incompletos de Adubação NPK em Mandioca no Estado do Ceará. Piracicaba, ESALQ/USP. 100 pp. (Dissertação de Mestrado).

CRÓCOMO, D.H.G., 1974. Oferta de Milho e de Soja. Uma Análise a Partir de Funções de Produção. Piracicaba, ESALQ/USP. 94 pp. (Dissertação de Mestrado).

DIXON, J.W. e F.J. MASSEY Jr., 1951. Introduction to Statistical Analysis. Nova York, McGraw-Hill, 370 pp.

ENGLER, J.J. de C., 1978. Análise da Produtividade Agrícola Entre Regiões do Estado de São Paulo. Piracicaba, ESALQ/USP. 132 pp. (Tese de Livre Docência).

ENGLER, J.J. de C., 1968. Análise da Produtividade de Recursos na Agricultura. Piracicaba, ESALQ/USP. 102 pp. (Tese de Doutoramento).

GIRÃO, J.A., 1965. A Função de Produção de Cobb-Douglas e a Análise Inter-Regional da Produção Agrícola. Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, Centro de Estudos de Economia Agrária, 119 pp.

HARTLEY, H.D., 1961. The Modified Gauss-Newton Method for the Fitting of Non-Linear Regression,Functions by Least Squares. Technometrics, 3: 269-280.

HOFFMANN, R. e S. VIEIRA, 1977. Análise de Regressão. Uma Introdução à Econometria. São Paulo. HUCITEC-EDUSP, 339 pp.

MALINVAUD, E., 1969. Methodes Statistiques de L'Econometrie. Paris, Dunod, 645 pp.

MELO, F.I.O., 1976. Aplicação do Método Modificado de Gauss-Newton para Estimar os Parâmetros da Equação de Mitscherlich. Piracicaba, ESALQ/USP. 74 pp. (Dissertação de Mestrado).

MITSCHERLICH, E.A., 1909. Das Gesetz des Minimums und das Gesetz des Abnehmenden Bodenertrages. Landwirtschaftliche Jahrbücher, Berlim, 38: 537-552.

NEVES, E.M., 1972. Uma Função de Produção de Leite no Estado de São Paulo. Piracicaba, ESALQ/USP. 72 pp. (Tese de Doutoramento).

NOJIMOTO, T., 1976. Problemas Encontrados na Estimação e Interpretação de Funções de Produção Agrícola. Piracicaba, ESALQ/USP. 118 pp. (Dissertação de Mestrado).

PERRE DA SILVA, M.A., 1978. Segunda Aproximação de Mitscherlich, $Y = A\left[1 - 10^{-c(x+b)}\right] 10^{-k(x+b)^2}$ Aplicada à Adubação Mineral. Piracicaba, ESALQ/USP. 96 pp. (Dissertação de Mestrado).

PIMENTEL GOMES, F. e A.G. ZAGATTO, 1967. Aspectos Econômicos da Adubação. In: MALAVOLTA, E. Manual de Química Agrícola - Adubos e Adubação. São Paulo. Agr. Ceres, 606 pp.

PINHEIRO, F.A., 1972. Análise Econométrica de Alocação de Recursos na Produção Bovina do Município de Botucatu. Piracicaba, ESALQ/USP. (Dissertação de Mestrado).

SILVA, Z.P., 1973. Uso e Eficiência do Crédito Rural e dos Fatores de Produção. Piracicaba, ESALQ/USP. (Dissertação de Mestrado).

SILVEIRA JÚNIOR, P., 1976. Estudo de Alguns Modelos Exponenciais no Crescimento de Bovinos de Raça Ibagé. Piracicaba, ESALQ/USP, 174 pp. (Dissertação de Mestrado).

SIMONSEN, M.H., 1971. Teoria Microeconômica, 4ª edição, Rio de Janeiro, Fundação Getúlio Vargas (Vol. 1). 425 pp.

7. APÊNDICE

Tabela 1 - Ensaio nº 1 - Dados obtidos por simulação, com média m = = 100 e variância σ^2 = 12, por PERRE DA SILVA (1978).

X	REPETIÇÕES				TOTAIS
	1ª	2ª	3ª	4ª	
0,2	52,8	50,4	55,0	56,2	214,4
0,4	70,0	68,4	66,2	75,0	279,6
0,6	88,0	87,0	85,8	84,0	344,8
0,8	103,0	101,0	100,8	99,2	404,0
1,0	109,4	111,0	110,0	109,6	440,0
1,2	120,0	119,8	121,0	115,2	476,0
1,4	128,0	129,0	127,0	128,0	512,0
1,6	133,4	132,6	131,0	131,0	528,0
1,8	135,0	132,0	134,0	131,0	532,0
2,0	132,0	134,0	130,0	128,0	524,0
2,2	130,0	127,0	130,0	129,0	516,0
2,4	119,0	117,0	124,0	120,0	480,0

Tabela 2 - Ensaio nº 2 - Dados obtidos por simulação, pelo modelo $Y = 68{,}2857\ X_{i1}^{0{,}2168}\ X_{i2}^{0{,}3542} + e_i$, com $e_i \cap N(0{,}4)$.

X_1	X_2	REPETIÇÕES 1ª	2ª	3ª	4ª	TOTAIS
0,1	0,2	23,5	27,1	27,0	25,0	102,6
0,3	0,4	40,9	42,2	42,3	40,2	165,6
0,5	0,6	50,7	52,0	52,4	53,7	208,8
0,7	0,8	59,5	60,0	60,7	60,9	241,1
0,9	1,0	68,6	70,4	68,9	68,0	275,9
1,1	1,2	79,0	74,6	78,5	75,7	307,8
1,3	1,4	82,0	84,4	84,3	81,9	332,6
1,5	1,6	89,3	91,0	90,2	88,4	358,9
1,7	1,8	96,3	95,6	99,0	95,6	386,5
1,9	2,0	102,5	100,4	102,8	105,0	410,7
2,1	2,2	111,0	110,2	107,3	110,7	439,2
2,3	2,4	112,5	112,6	114,1	115,8	445,0

Tabela 3 - Valores iniciais utilizados para o ajustamento dos modelos I e II aos totais de tratamentos, com 4 repetições.

MODELO	VALORES INICIAIS		
	a_0	${}_0b_1$	${}_0b_2$
$Y_i = A\, X_i^{B} + e_i$	414,1072	0,3705	...
$Y_i = A\, X_{i1}^{B_1}\, X_{i2}^{B_2} + e_i$	283,7227	0,1957	0,3461