A DECOMPOSIÇÃO DA SOMA DE QUADRADOS DE TRATAMENTOS NOS DELINEAMENTOS EM BLOCOS INCOMPLETOS PARCIALMENTE BALANCEADOS

JOÃO RIBOLDI

Engenheiro-Agrônomo

Orientador: Prof. Dr. Humberto de Campos

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Agronomia: Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Fevereiro, 1988

A DECOMPOSIÇÃO DA SOMA DE QUADRADOS DE TRATAMENTOS NOS DELINEAMENTOS EM BLOCOS INCOMPLETOS PARCIALMENTE BALANCEADOS

JOÃO RIBOLDI

Aprovada em: 14.04.1988

Comissão julgadora:

Prof. Dr. Humberto de Campos	ESALQ/USP
Prof. Dr. Décio Barbin	ESALQ/USP
Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma	ESALQ/USP
Prof. Dr. Dilermando Perecin	FCAV/UNESP
Prof. Dr. Antonio Carlos Oliveira	CNPMS/EMBRAPA

Prof. Dr. HUMBERTO DE CAMPOS
Orientador

A minha mãe (in memoriam),

A meu pai e irmãos,

ofereço.

A minha esposa Doraci,

A meus filhos: Bianca,

Gustavo e Bruna Angélica,

dedico.

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Humberto de Campos, Professor Titular do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pela sugestão do assunto e valiosa orientação na elaboração deste trabalho.

A minha esposa Doraci pelos constantes estímulo, solidariedade e cooperação.

Aos professores do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, na pessoa de seu coordenador, Prof. Dr. Décio Barbin, pela receptividade e ensinamentos e, em especial aos Professores Dr. Antonio Francisco Iemma e Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio, pela colaboração.

Ao Departamento de Estatística do Instituto de Matemática da UFRGS, pela oportunidade concedida para a realização do Curso, e em especial à Profa. Dinara W.X. Fernandez, pela cooperação.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela bolsa concedida.

A Iza pela amizade, constante colaboração, e inigualável datilografia deste trabalho.

A Rosa Maria Alves pela colaboração recebida durante a realização do curso, e na datilografia deste trabalho.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, e em especial a Octávio Frassetto, pela amizade e cooperação.

Aos colegas do Curso de Pós-Graduação, pela amizade e companheirismo, e em especial a Gabriel Adrian Sarriés, pela colaboração.

Aos amigos Gaspar e Tida, pela cooperação e solidariedade.

S U M Á R I O

Página

A DECOMPOSIÇÃO DA SOMA DE QUADRADOS DE TRATAMENTOS NOS DELINEAMENTOS EM BLOCOS INCOMPLETOS PARCIALMENTE BALANCEADOS

Autor: JOÃO RIBOLDI

Orientador: PROF. DR. HUMBERTO DE CAMPOS

RESUMO

No presente trabalho, consideraram-se os experimentos em blocos incompletos parcialmente balanceados (PBIB) com os parâmetros:

v : número de tratamentos,

b : número de blocos,

r : número de repetições para cada tratamento,

k : número de parcelas por bloco;

e ainda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, n_1, n_2, \ldots, n_m$, p^i_{jk} $(i, j, k = 1, 2, \ldots, m)$, definidos conforme BOSE e NAIR (1939).

Para tanto adotou-se o modelo matemático:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij} ,$$

onde,

y_{ij} é a observação do i-ésimo tratamento no j-ésimo bloco;

μ é a média geral;

τ_i é o efeito do i-ésimo tratamento $(i = 1, 2, \ldots, v)$;

β_j é o efeito do j-ésimo bloco $(j = 1, 2, \ldots, b)$;

e_{ij} é o erro experimental associado à observação y_{ij} e supõe-se $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ e independentes.

Sob essas condições foram determinados:

. o sistema de equações normais;

. estimadores para os efeitos ajustados de tratamentos;

. variância para contrastes entre efeitos ajustados de tratamentos;

. as somas de quadrados e suas esperanças matemáticas;

. as distribuições das formas quadráticas;

. a eficiência desses delineamentos;

. a decomposição da soma de quadrados de tratamentos ajustada [SQT(aj.)];

obtendo-se:

. a expressão para a soma de quadrados ajustada para um contraste Y_j e sua esperança matemática;

. as distribuições das formas quadráticas;

. a eficiência para a estimativa dos contrastes.

Além disso procedeu-se ao ajuste de equações de regressão, pela técnica de polinômios ortogonais, para o caso de níveis equidistantes e não-equidistantes.

A particularização de resultados foi feita considerando-se PBIB do tipo grupo divisível, relacionando-se os resultados obtidos com o caso de blocos incompletos balanceados (BIB).

As principais conclusões obtidas foram:

a) A SQT(aj.) é decomposta em v-1 partes ortogonais, correspondendo às somas de quadrados dos v-1 contrastes ortogonais Y_j definidos pelos v-1 auto-vetores associados aos v-1 auto-valores θ_j não nulos da matriz C das equações normais reduzidas.

b) A eficiência para a estimativa do contraste Y_j é dada por

$$E_j = \frac{\theta_j}{r} \quad ; \quad j=1,2,\ldots,v-1 \ ,$$

ou seja, tanto maior a eficiência quanto maior o auto-valor de C ao qual está associado o contraste.

c) A decomposição da SQT(aj.) para PBIB pode ser procedida pela mesma sistemática dos BIB, obtendo-se a soma de quadrados ajustada para o contraste Y_j [$SQY_j(aj.)$] através da eficiência E_j, ou seja, obtendo-se $SQY_j(aj.) = E_j SQY_j$.

THE SUM OF SQUARES OF TREATMENTS DECOMPOSITION IN PARTIALLY BALANCED INCOMPLETE BLOCK DESIGNS

Author: JOÃO RIBOLDI

Adviser: PROF. DR. HUMBERTO DE CAMPOS

SUMMARY

In the present work we estudied the case of experiments which are designed in partially balanced incomplete blocks (PBIB) with $\underline{v}$ treatments in $\underline{b}$ blocks of $\underline{k}$ units per block with each treatment replicated $\underline{r}$ times and $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, n_1, n_2, \ldots, n_m, p^i_{jk}$ (i, j, k = = 1, 2, ..., m), defined according to BOSE and NAIR (1939).

The follhowing mathematical model was considered:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij}$$

whêre,

Y_{ij} is the observation under the i^{th} treatment in the j^{th} block;

μ is the effect of the general mean;

τ_i is the i^{th} treatment effect (i = 1, 2, ..., v);

β_j is the j^{th} block effect (j = 1, 2, ..., b);

e_{ij}'s are normally and independently distributed with mean zero and variance σ^2.

Under those conditions, the following was obtained:

. the solution of the normal equations;

- estimators for the adjusted treatment effects;
- variances of the contrast among adjusted treatment effects;
- the sum of squares;
- the expectations of sum of squares;
- the distributions of the quadratic forms;
- the design efficiency;
- the treatments adjusted sum of square [SQT(adj.)] decomposition;
- the adjusted sum of squares expression for the contraste Y_j, i. e., SQY_j(adj.);
- the expectations of SQY_j(adj.) and the distribution of the quadratic forms;
- the efficiency for the contrast estimates;
- the adjustment of regression equations using orthogonal polinomials for the cases of equidistant and non-equidistant levels.

A particular case was studied considering PBIB of the group-divisible type. The results were compared to the case of balanced incomplet blocks (BIB).

The main conclusions were:

a) The SQT(adj.) is partitioned into v-1 orthogonal components corresponding to the sum of squares of the v-1 orthogonal contrasts Y_j defined by the v-1 eigenvectors associated to the v-1 eigenvalues θ_j, $\theta_j \neq 0$, of the matrix C from reduzided normal equations.

b) The efficiency for the estimate of the contrast Y_j is given by

$$E_j = \frac{\theta_j}{r} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, v-1,$$

i.e., the efficiency being proportional to the eigenvalue of C to which the contrast is associated.

c) The decomposition of SQT(adj.) for PBIB can be obtained in the same way that used for BIB, i.e., getting the adjusted sum of squares for the contrast Y_j [SQY_j(adj.)] from the efficiency E_j, SQY_j(adj.) = $= E_j SQY_j$.

1. INTRODUÇÃO

Um dos problemas fundamentais no planejamento de um experimento está na escolha do tipo de delineamento que melhor se adapte às condições experimentais. A solução desse problema, embora dependa de conhecimentos teóricos, é, em geral, tanto melhor quanto maiores forem a experiência e o bom senso do planejador. O melhor delineamento, logicamente, seria aquele que permitisse controlar o maior número possível de variáveis envolvidas.

Na experimentação agronômica, não raro depara-se com projetos envolvendo um número elevado de tratamentos. Essa situação é muito frequente em experimentos fatoriais (que envolvem dois ou mais fatores), mas também ocorre em experimentos unifatoriais (que envolvem somente um fator), especialmente em estudos de melhoramento vegetal.

A eficiência dos delineamentos experimentais de uso mais geral, tais como blocos casualizados e quadrado latino, reduz-se à medida que se aumenta o número de unidades experimentais por bloco ou por linha e coluna, como ressaltam BOSE e NAIR (1939). Para estes autores, a eficiência diminui à medida que o número de parcelas por bloco cresce a partir de dez ou doze. Além disso, um quadrado latino com grande número de tratamentos é inexequível, tanto pelo elevado número de repetições exigidas, como pela quantidade de material experimental requeri da. De acordo com YATES (1936b), o uso de blocos casualizados, quando o número de tratamentos a comparar é elevado, ainda que possível não é satisfatório, visto que é improvável eliminar eficientemente as diferenças entre as unidades experimentais de um mesmo bloco.

Em experimentos onde o número de tratamentos a investigar é grande, com o objetivo de eliminar a heterogeneidade dentro dos blocos, utilizam-se frequentemente blocos incompletos, isto é, blocos que não incluem todos os tratamentos. Os blocos incompletos, apesar de serem de uso geral, são particularmente empregados em experimentos de um só fator. Regra geral são utilizados os blocos incompletos parcialmente balanceados, denominados PBIB ("Partially Balanced Incomplete Block Design"), introduzidos por BOSE e NAIR (1939), dada a menor exigência quanto ao número de repetições, quando comparados aos blocos incompletos balanceados, denominados BIB ("Balanced Incomplete Block Design"), introduzidos por YATES (1936b), muito embora estes sejam mais eficientes. Dentre os PBIB, são de especial interesse os reticulados ("lattices"), e particularmente os reticulados quadrados, de uso muito comum em melhoramento de plantas.

O presente trabalho tem como objetivo geral detalhar a análise intrablocos de experimentos em PBIB, no que se refere à: estimação dos efeitos ajustados de tratamentos, variância para contrastes entre efeitos ajustados de tratamentos, análise de variância intrablocos e eficiência desses delineamentos em relação a blocos casualizados; e como objetivo específico, estabelecer regras para a decomposição da soma de quadrados de tratamentos ajustada de experimentos em PBIB, em partes ortogonais. Ademais a particularização de resultados, tanto para o objetivo geral como para o objetivo específico, é feita considerando-se PBIB do tipo Grupo Divisível.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Apresentar-se-ão neste capítulo, de forma didática, conceitos sobre blocos incompletos em geral, blocos incompletos balanceados e blocos incompletos parcialmente balanceados, de interesse para o contexto do presente trabalho.

Em experimentação, por várias razões, nem sempre é possível usar blocos de tamanho que possibilite acomodar todos os tratamentos. Se todos os tratamentos são alocados em todos os blocos, tem-se um delineamento em blocos completos. Quando não é possível alocar todos os tratamentos em cada um dos blocos, usa-se um delineamento em blocos incompletos, isto é, um delineamento no qual o número de parcelas no bloco é menor do que o número de tratamentos.

Os delineamentos em blocos incompletos foram introduzidos por YATES (1936a) como uma forma de arranjar um grande número de variedades, numa estrutura de reticulados ("lattices") quadrados e cúbicos. Um tipo mais geral de delineamento, sem restrições quanto ao número de tratamentos, foi apresentado por YATES (1936b), com o nome de blocos incompletos balanceados (BIB). BOSE e NAIR (1939) introduziram ampla classe de delineamentos, os blocos incompletos parcialmente balanceados(PBIB), dos quais os BIB, reticulados quadrados, reticulados cúbicos (NAIR e RAO, 1942) e alguns reticulados retangulares (NAIR, 1951) são casos especiais.

Conforme GOMES (1985), os reticulados são hoje geralmente substituídos pelos ensaios em blocos completos casualizados com alguns tratamentos comuns, que são flexíveis, robustos (pouco afetados por perda de parcelas, de tratamentos ou de blocos) e de análise fácil. Em função dessas características desejáveis, a utilização de tratamentos comuns passou a interessar aos pesquisadores. Muito embora com conotação distinta à de blocos casualizados com tratamentos comuns, pois não se trata de análise de grupo de experimentos com tratamentos regulares e comuns, FERREIRA (1980) considera o caso de ensaios em BIB com tratamentos comuns adicionados a todos os blocos, e OLIVEIRA (1985) o caso de ensaios em PBIB.

2.1 - Delineamentos em Blocos Incompletos

2.1.1 - Caracterização

Sejam $\underline{v}$ tratamentos a serem aplicados em parcelas arranjadas em $\underline{b}$ blocos de tamanhos k_1, k_2, ..., k_b. Admite-se que o i-ésimo tratamento ocorre em r_i blocos, e que os tratamentos i e i' ocorrem juntos em $\lambda_{ii'}$ blocos (i, i'= 1, 2, ..., v; i≠i'). Considera-se que T_i é o total do tratamento $\underline{i}$ e B_j é o total do bloco $\underline{j}$ (j=1,2,...,b) e então tem-se que

$$\underset{\sim}{T}' = [T_1 \ \ T_2 \ \ \dots \ \ T_v]$$

e

$$\underset{\sim}{B}' = [B_1 \ \ B_2 \ \ \dots \ \ B_b] \quad .$$

Seja a matriz $N = \{n_{ij}\}$, matriz de incidência, de ordem vxb, onde n_{ij} é o número de vezes que o tratamento $\underline{i}$ ocorre no bloco $\underline{j}$.

Se todos os blocos têm o mesmo tamanho, isto é, k_j=k, ∀j, tem-se um delineamento próprio. Se r_i=r, ∀i, ele é equi-replicado. Se n_{ij}= 1 ou 0, ele é binário.

Num delineamento próprio, equi-replicado e binário, se para todo par ii' de tratamentos $\lambda_{ii'} = \lambda$, então tem-se um delineamento em blocos incompletos balanceados (BIB). Se $\lambda_{ii'}$ está na dependência do par ii' de tratamentos, além de outras propriedades, tem-se um delineamento em blocos incompletos parcialmente balanceados (PBIB).

2.1.2 - Análise intrablocos

A análise estatística de experimentos em blocos incompletos é bem mais trabalhosa do que a de experimentos em delineamentos mais simples, como por exemplo em blocos completos. Essa dificuldade, assim como a maior perda de graus de liberdade no resíduo, são, de um modo geral, compensadas por uma redução na variância residual, levando, não raro, a experimentos mais precisos.

Há dois tipos distintos de análise estatística de delineamentos em blocos incompletos:

i) Análise intrablocos, em que só comparações entre parcelas do mesmo bloco são utilizadas nas estimações de efeitos de tratamentos;

ii) Análise com recuperação da informação interblocos, onde comparações entre tratamentos que aparecem nos contrastes entre blocos são também aproveitadas na estimação dos efeitos de tratamentos.

A análise com recuperação da informação interblocos surgiu com YATES (1939), quando pretendia aproveitar a informação sobre diferenças de tratamentos contida nas comparações entre totais de blocos em reticulado cúbico. Este procedimento, que é uma combinação da informação intrablocos e interblocos, foi adaptado por YATES (1940) para ensaios em BIB, por NAIR (1944) para PBIB e generalizado por RAO (1947) para qualquer ensaio em blocos incompletos.

GOMES (1985) afirma que a análise intrablocos pode ser usada para qualquer experimento em blocos incompletos e se baseia em métodos estatísticos exatos. Ao passo que, a análise com recuperação da informação interblocos permite aproveitar melhor os dados observados, porém usa métodos estatísticos apenas aproximados e só deve ser usada para experimentos com número de graus de liberdade relativamente grande, para blocos e para o resíduo.

Conforme JOHN (1980), a análise com recuperação da informação interblocos é de aplicação limitada e não será objeto de estudo no presente trabalho. FEDERER (1955), COCHRAN e COX (1957), SCHEFFÉ (1959), GRAYBILL (1961), JOHN (1971), KEMPTHORNE (1975) e GOMES (1985), dentre outros, abordam esse tipo de análise. MALHEIROS (1982) apresenta excelente revisão sobre o assunto.

Para a análise intrablocos, seja o modelo linear

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij} \quad ,$$

onde y_{ij} representa a resposta do i-ésimo tratamento no j-ésimo bloco, τ_i e β_j são os efeitos de tratamentos e de blocos, respectivamente, e supõe-se que $e_{ij} \sim N(0,\sigma^2)$ e independentes.

Da teoria de blocos incompletos, sabe-se que o sistema de equações normais, eliminando-se o efeito de blocos, é dado por

$$C\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{Q} \quad ,$$

onde: $C = \text{diagonal } \{r_1, r_2, \ldots, r_v\} - N \text{ diagonal } \{1/k_1, 1/k_2, \ldots, 1/k_b\} N'$
$- R - NK^{-1}N'$;

$\hat{\underset{\sim}{\tau}}' = [\hat{\tau}_1 \quad \hat{\tau}_2 \quad \ldots \quad \hat{\tau}_v]$ é um vetor solução para os efeitos de tratamentos;

$\underset{\sim}{Q}' = [Q_1 \quad Q_2 \quad \ldots \quad Q_v]$ é o vetor de totais ajustados de tratamentos, sendo:

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{T} - N \text{ diagonal } \{1/k_1, 1/k_2, \ldots, 1/k_b\} \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{T} - NK^{-1}\underset{\sim}{B} .$$

Dado que C é singular, uma solução do sistema de equações normais é obtida, conforme JOHN (1980), considerando-se inversas generalizadas simétricas da forma $\Omega = (C + aJ)^{-1}$, onde $\underline{a}$ é algum conveniente escalar não-nulo, $J = \underset{\sim}{1}\underset{\sim}{1}'$, sendo $\underset{\sim}{1}$ um vetor de $\underline{v}$ elementos unitários. Desta forma, $\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \Omega\underset{\sim}{Q}$.

A soma de quadrados de tratamentos, ajustada para blocos, é dada por

$$SQT(aj.) = \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q}'\Omega'\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q}'\Omega\underset{\sim}{Q} .$$

As demais somas de quadrados são obtidas da maneira usual, ou seja,

$$SQBlocos = \underset{\sim}{B}'K^{-1}\underset{\sim}{B} - G^2/n ,$$

onde

G = total geral;

n = número total de parcelas;

$$SQTotal = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - G^2/n ,$$

onde $\underset{\sim}{y}$ é o vetor das observações y_{ij} ,

e

$$SQResíduo = S_e = SQTotal - SQBlocos - SQT(aj.) .$$

A hipótese H_0: $\underset{\sim}{\tau} = \underset{\sim}{\phi}$ é testada pela estatística

$$F = \frac{[\hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{Q}/(v-1)]}{[S_e/(n-v-b+1)]} \overset{\text{sob } H_0}{\sim} F_{(v-1,\ n-v-b+1)}$$

de acordo com JOHN (1971).

2.1.3 - Delineamentos conexos e delineamentos balanceados

Sabe-se, pelo teorema de Gauss-Markov, citado em IEMMA (1987), que se $\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\tau}$ é uma função paramétrica estimável, então seu "BLUE" ("Best Linear Unbiased Estimator") é dado por $\underset{\sim}{\ell}'\hat{\underset{\sim}{\tau}}$, onde $\hat{\underset{\sim}{\tau}}$ é qualquer solução de $C\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{Q}$.

Qualquer solução do sistema de equações normais, eliminando-se o efeito de blocos, envolve totais ajustados de tratamentos. Estes totais não são independentes, pois $\underset{\sim}{1}'\underset{\sim}{Q} = 0$. De acordo com JOHN (1980), seja o vetor

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{T} \\ \underset{\sim}{B} \end{bmatrix} ,$$

com v+b variáveis aleatórias, onde,

$$V[\underset{\sim}{Z}] = \begin{bmatrix} R & N \\ N' & K \end{bmatrix} \sigma^2$$

e

$$\underset{\sim}{Q} = [I, -NK^{-1}]\ \underset{\sim}{Z} .$$

Então,

$$V[\underset{\sim}{Q}] = [I, -NK^{-1}] \begin{bmatrix} R & N \\ N' & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -K^{-1}N' \end{bmatrix} \sigma^2 = C\sigma^2 .$$

Assim,

$$\begin{aligned} V[\underset{\sim}{\ell}'\hat{\underset{\sim}{\tau}}] = V[\underset{\sim}{\ell}'\Omega\underset{\sim}{Q}] &= \underset{\sim}{\ell}'\Omega V[\underset{\sim}{Q}]\Omega\underset{\sim}{\ell} \\ &= \underset{\sim}{\ell}'\Omega C\Omega\underset{\sim}{\ell}\sigma^2 = \underset{\sim}{\ell}'\Omega\underset{\sim}{\ell}\sigma^2 \end{aligned}$$

pois $\Omega C\Omega = \Omega$.

As funções lineares paramétricas $\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\tau}$ com $\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{1} = \sum_{i=1}^{v} \ell_i = 0$, são denominadas de contrastes. Os contrastes da forma $\tau_i - \tau_{i'}$ são chamados de contrastes elementares. Estimar todos os contrastes elementares de efeitos de tratamentos é característica desejável. Um delineamento satisfazendo esta propriedade é chamado delineamento conexo.

DEFINIÇÃO 2.1.3.1 [RAGHAVARAO, 1971]

Um delineamento é dito conexo se todos os contrates elementares são estimáveis.

SEARLE (1971) apresenta uma regra prática para verificar se um delineamento é conexo, a qual consiste no seguinte:

(i) Forma-se uma tabela de dupla entrada, representando os tratamentos e os blocos.

(ii) Nos cruzamentos correspondentes ao tratamento i e bloco j coloca-se um X se o tratamento i ocorre no bloco j.

(iii) Partindo-se de qualquer X e em qualquer sentido unem-se os X's através de linhas horizontais ou verticais.

(iv) Procedendo-se assim, se todos os X's forem unidos sem interrupção, diz-se que o delineamento é conexo. Caso contrário ele será desconexo.

A título de ilustração, sejam os dois casos seguintes:

CASO 1

BLOCOS	TRATAMENTOS	
1	1	2
2	3	4
3	1	3
4	2	4

CASO 2

BLOCOS	TRATAMENTOS	
1	1	2
2	1	2
3	3	4
4	3	4

que permitem construir os seguintes quadros, onde X representa a presença do tratamento no bloco considerado:

CASO 1

TRATAMENTOS	BLOCOS 1	2	3	4
1	X		X	
2	X			X
3		X	X	
4		X		X

CASO 2

TRATAMENTOS	BLOCOS 1	2	3	4
1	X	X		
2			X	X
3	X	X		
4			X	X

Observa-se que o caso 1 traduz um delineamento conexo, enquanto que no caso 2 o delineamento é desconexo.

TEOREMA 2.1.3.1 [RAGHAVARAO, 1971]

Um delineamento em blocos incompletos é conexo se e somente se a característica (posto) da matriz C for v-1.

Portanto, os delineamentos onde posto[C] = v-1 são chamados de delineamentos conexos, e para esses delineamentos todos os contrastes entre tratamentos, isto é, todas as combinações lineares $\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\tau}$ onde $\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{1} = 0$, são estimáveis, ou seja, têm uma única estimativa de mínimos quadrados.

Em experimentação também é desejável estimar todos os contrastes elementares com a mesma precisão.

DEFINIÇÃO 2.1.3.2 [RAGHAVARAO, 1971]

Um delineamento é dito balanceado se todos os contrastes elementares são estimados com a mesma precisão.

TEOREMA 2.1.3.2 [RAO, 1958]

Um delineamento conexo é balanceado se e somente se todas as raízes características (auto-valores) não nulas de C são iguais.

2.1.4 - Eficiência dos delineamentos em blocos incompletos

A eficiência de um delineamento em blocos incompletos é definida pela razão

$$E = \bar{V}_r/\bar{V} \quad ,$$

onde $\bar{V}$ é a variância média das estimativas intrablocos dos contrastes elementares entre tratamentos, para o delineamento em consideração, e $\bar{V}_r$ representa o mesmo, para blocos casualizados, usando o mesmo número de uni dades experimentais, sendo $\bar{V}_r$ e $\bar{V}$ calculados com a suposição de que a variância residual intrablocos, seja a mesma em ambos os casos.

Nos delineamentos conexos, a variância média para estimativas de contrastes elementares $\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'}$, conforme KEMPTHORNE (1956), é dada por

$$\bar{V} = \frac{1}{v(v-1)} \sum_{i \neq i'} V[\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'}] = \frac{2\sigma^2}{H} \quad ,$$

onde:

$$H = \frac{v-1}{1/\theta_1 + 1/\theta_2 + \ldots + 1/\theta_{v-1}} = \frac{v-1}{\sum_{i=1}^{v-1} 1/\theta_i}$$

ou seja, H é a média harmônica dos auto-valores θ_i da matriz C, sendo $i=1,2,\ldots,v-1$, pois um auto-valor de C é nulo, dado que seu posto é $v-1$ [Teorema 2.1.3.1].

Por outro lado,

$$\bar{V}_{\bar{r}} = 2\sigma^2/\bar{r} \quad ,$$

onde $\bar{r} = n/v$, sendo n o número total de parcelas, ou seja, $\bar{r}$ é o número médio de repetições dos tratamentos.

Desta forma,

$$E = \bar{V}_{\bar{r}}/\bar{V} = \frac{2\sigma^2/\bar{r}}{2\sigma^2/H} = H/\bar{r} \quad .$$

Como a média harmônica de um conjunto de quantidades positivas não pode exceder a média aritmética destas quantidades, e como $Tr[C] = \sum_{i=1}^{v-1} \theta_i$, onde Tr[C] representa o traço da matriz C, tem-se:

$$H \leq \sum_{i=1}^{v-1} \theta_i/v-1 = Tr[C]/v-1 = \frac{v\bar{r} - b}{v - 1} \quad ,$$

e então

$$E \leq \frac{v\bar{r} - b}{\bar{r}(v-1)}$$

Nos delineamentos equireplicados $\bar{r} = r$ e então

$$E \leq \frac{vr - b}{r(v-1)}$$

2.2 - Delineamentos em Blocos Incompletos Balanceados

2.2.1 - Caracterização

Estes delineamentos foram introduzidos por YATES (1936b)e, segundo o autor, um arranjo de $\underline{v}$ tratamentos em $\underline{b}$ blocos de $\underline{k}$ parcelas, $k < v$ é chamado delineamento em blocos incompletos balanceados (BIB), se satisfaz às seguintes condições:

(i) Cada bloco contém k diferentes tratamentos;

(ii) Cada tratamento ocorre em r blocos;

(iii) Quaisquer dois tratamentos ocorrem juntos em λ blocos.

Da definição decorre que

$$rv = bk \qquad \text{e} \qquad \lambda(v-1) = r(k-1)$$

constituindo a última igualdade na condição de balanceamento de um BIB.

Além disso, os BIB satisfazem a desigualdade $b \geq v$, conhecida como desigualdade de Fisher (FISHER, 1940). Um BIB com b=v e, consequentemente, r=k, é dito simétrico.

2.2.2 - Classificação

De acordo com COCHRAN e COX (1957), os BIB são classificados em cinco diferentes tipos:

(i) TIPO I: Os blocos podem ser agrupados em repetições, ou seja, r conjuntos de n blocos cada, tal que cada conjunto forma uma repetição completa de todos os tratamentos. Nesse tipo incluem-se os reticulados quadrados balanceados ("Balanced Lattices"), nos quais $v=k^2$ e, dada a condição de balanceamento, tem-se k+1 repetições ortogonais, sendo viáveis somente se k for um número primo ou potência de número primo.

(ii) TIPO II: Os blocos não podem ser agrupados em repetições, mas podem ser reunidos em grupos de repetições.

(iii) TIPO III; Os blocos não podem ser agrupados em repetições nem em grupos de repetições.

(iv) TIPO IV; O número de tratamentos é igual ao número de blocos (BIB simétrico).

(v) TIPO V; Experimentos com pequeno número de parcelas.

2.2.3 - Análise intrablocos

Sabe-se que o sistema de equações normais, eliminando-se o efeito de blocos, é dado por $C\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{Q}$, onde $C = rI - NN'/k$ no caso de delineamentos próprios e equi-replicados.

Para BIB, a matriz NN', chamada de matriz de concordância, é dada por

$$NN' = (r-\lambda)I + \lambda J = \begin{bmatrix} r & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \dots & \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda & \lambda & \dots & r \end{bmatrix}$$

onde J é uma matriz de elementos unitários, e assim,

$$C = rI - [(r-\lambda)I + \lambda J]/k = \frac{\lambda v}{k} I - \frac{\lambda}{k} J$$

ou seja, C é uma matriz singular, de dimensão v e característica v-1, constituída pelos elementos:

$$c_{ii'} = \begin{cases} r(k-1)/k, & \text{se } i=i' \\ -\lambda/k \quad , & \text{se } i \neq i' \end{cases} .$$

O vetor de totais ajustados de tratamentos $\underset{\sim}{Q}$ é constituído pelos elementos Q_i $(i=1,2,\ldots,v)$, dados por

$$Q_i = T_i - \frac{1}{k} A_i \quad ,$$

sendo T_i o total do tratamento i e A_i a soma dos totais dos blocos que contém o tratamento i.

Segundo JOHN (1980), uma solução do sistema de equações normais é dada por:

$$\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \Omega \underset{\sim}{Q} \quad ,$$

onde Ω é uma inversa generalizada simétrica, da forma $\Omega = (C+aJ)^{-1}$, sendo <u>a</u> um escalar não nulo conveniente. No caso de BIB é obviamente conveniente tomar $a = \lambda/k$. Assim $\Omega^{-1} = C + aJ = \frac{\lambda v}{k} I$, e então $\Omega = \frac{k}{\lambda v} I$. Logo,

$$\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \frac{k}{\lambda v} \underset{\sim}{Q} \quad ,$$

e, portanto,

$$\hat{\tau}_i = \frac{k}{\lambda v} Q_i \quad , \qquad \forall i \ .$$

Para solução do sistema de equações normais, GOMES (1967) considera uma matriz de restrição A, de dimensão v, tal que $A\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{\phi}$, onde, no presente caso, $A = -\frac{\lambda}{k} J$. Fazendo $C - A = M$, matriz esta não singular, então a solução é dada por $\hat{\underset{\sim}{\tau}} = M^{-1}\underset{\sim}{Q} = \frac{k}{\lambda v} \underset{\sim}{Q}$.

O BIB é um delineamento conexo e balanceado. Assim, qualquer contraste $\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\tau}$ é estimável, e a variância de sua estimativa é dada por

$$V[\underset{\sim}{\ell}'\hat{\underset{\sim}{\tau}}] = \underset{\sim}{\ell}'\Omega\underset{\sim}{\ell}\sigma^2 = \frac{k}{\lambda v}\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\ell}\sigma^2 \quad .$$

Para o caso de contrastes elementares de tratamentos, tem-se que

$$V[\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'}] = \frac{2k}{\lambda v}\sigma^2 \;, \qquad \forall \text{ os pares } ii' \;.$$

A soma de quadrados de tratamentos, ajustada para blocos, é dada por:

$$SQT(aj.) = \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q}'\Omega'\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q}'\Omega\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q}'\frac{k}{\lambda v}I\underset{\sim}{Q}$$

$$= \frac{k}{\lambda v}\underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{Q} = \frac{k}{\lambda v}\sum_{i=1}^{v} Q_i^2 \quad .$$

2.2.4 - Eficiência

A eficiência E de delineamentos em blocos incompletos conexos e equi-replicados,conforme 2.1.4, é dada por:

$$E \leq \frac{vr - b}{r(v-1)}$$

A igualdade vale quando e somente quando os auto-valores não nulos de C são iguais, isto é, quando $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_{v-1} = \theta$, pois nesse caso a média harmônica H desses auto-valores é igual à média aritmética, ou seja,

$$H = \sum_{i=1}^{v-1} \theta_i/v-1 = (v-1)\theta/v-1 = \theta \quad .$$

Se os auto-valores não nulos de C são iguais, conforme teorema 2.1.3.2, o delineamento conexo é dito balanceado e, portanto, o delineamento balanceado é o mais eficiente, dado que a igualdade para a expressão de E se verifica.

Entre os delineamentos conexos, próprios e equi-replicados, o único balanceado é o BIB e, portanto, o mais eficiente.

No caso de BIB, tem-se que:

$$Tr[C] = vr(k-1)/k = (vrk-vr)k = (vrk-bk)/k = vr-b$$

e tem-se, também, que $Tr[C] = (v-1)\theta$. Então,

$$\theta = (vr-b)/v-1 \quad .$$

Logo, conforme 2.1.4,

$$E = H/r=(vr-b)/r(v-1)=[vr-(vr/k)]/r(v-1) = vr(k-1)/rk(v-1)$$

$$= v\lambda(v-1)/rk(v-1) = \lambda v/rk \quad .$$

Ou, também, como nos BIB, todos os contrastes elementares são estimados com a mesma precisão, tem-se que $\bar{\bar{V}} = \frac{2k}{\lambda v}\sigma^2$. Então,

$$E = \bar{\bar{V}}_r/\bar{\bar{V}} = \frac{2\sigma^2/r}{2k\sigma^2/\lambda v} = \lambda v/rk \quad .$$

Da condição de balanceamento $\lambda(v-1) = r(k-1)$, tem-se que $\lambda/r=(k-1)/v-1$. Portanto,

$$E = \frac{\lambda}{r}\frac{v}{k} = v(k-1)/k(v-1) = \frac{(k-1)/k}{(v-1)/v} = \frac{1-1/k}{1-1/v} \quad .$$

Nos blocos incompletos tem-se $k < v$, e então:

$$1/k > 1/v \qquad \text{ou} \qquad -1/k < -1/v \quad .$$

Logo: $1 - 1/k < 1 - 1/v$. Desta forma,

$$E = \lambda v/rk = \frac{1-1/k}{1-1/v} < 1 \quad .$$

Ou seja, nos BIB a eficiência é sempre menor do que 1. Assim sendo, deve-se dar preferência aos planejamentos experimentais cuja eficiência E seja a mais próxima possível de 1.

2.3 - Delineamentos em Blocos Incompletos Parcialmente Balanceados(PBIB)

2.3.1 - Caracterização

Viu-se anteriormente que o delineamento balanceado é o delineamento mais eficiente dos delineamentos conexos em blocos incompletos. Entre os delineamentos equiblocos e equi-replicados, o BIB é o único balanceado e, portanto, o mais eficiente, devendo ser adotado sempre que possível.

O BIB, no entanto, nem sempre é viável, pois pode não ser estruturável para determinadas dimensões ou exigir elevado número de repetições, tornando-se inexequível experimentalmente.

Para contornar essas situações, foram introduzidos por BOSE e NAIR (1939) os blocos incompletos parcialmente balanceados (PBIB).

Conforme os autores, um delineamento em blocos incompletos é parcialmente balanceado se ele satisfaz às seguintes condições:

i) Os tratamentos são agrupados em $\underline{b}$ blocos de $\underline{k}$ parcelas, com diferentes tratamentos alocados em cada uma delas.

ii) Existem $\underline{v}$ tratamentos que ocorrem em $\underline{r}$ blocos.

iii) Em relação a qualquer tratamento, os demais podem ser divididos em $\underline{m}$ grupos contendo, respectivamente, n_1, n_2, ..., n_m tratamentos, tal que os tratamentos do i-ésimo grupo ocorram juntos com o dado tratamento em λ_i blocos. Os tratamentos do i-ésimo grupo são chamados de i-ésimos associados do tratamento em questão e os valores de $n_1, n_2, \ldots, n_m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, são independentes do tratamento considerado.

iv) Se o tratamento A é i-ésimo associado de B, então o tratamento B é i-ésimo associado de A. Se A e B são i-ésimos associados, então o número de tratamentos comuns aos j-ésimos associados de A e aos k-ésimos associados de B é p^i_{jk}, e é independente do par de tratamentos considerado. Também $p^i_{jk} = p^i_{kj}$.

Os parâmetros v, b, r, k; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$; $n_1, n_2, \ldots, n_m$ sao chamados de parâmetros primários ou de primeiro tipo, e os p^i_{jk} (i,j,k=1,2,...,m) de parâmetros secundários ou de segundo tipo. Tem-se 2m+4 parâmetros do primeiro tipo e $m^2(m+1)/2$ parâmetros do segundo tipo, pois $p^i_{jk} = p^i_{kj}$.

Na definição original de BOSE e NAIR (1939), assumiu-se que todos os parâmetros λ_i (i=1,2,...,m) eram distintos, mas esta restrição foi removida por NAIR e RAO (1942).

2.3.2 - Relações entre os parâmetros do PBIB

Segundo BOSE e NAIR (1939) no PBIB se verificam as relações entre os parâmetros enumeradas a seguir:

i) Decorrente da definição de PBIB tem-se que vr = bk.

ii) Em relação a qualquer tratamento considerado, os restantes v-1 tratamentos estão em grupos de tamanhos $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Então $v-1 = n_1 + n_2 + \ldots + n_m = \sum_{i=1}^{m} n_i$.

iii) Um tratamento particular ocorre em r blocos e em cada um desses blocos ocorrem k-1 outros tratamentos, sendo, portanto, o tratamento considerado membro de r(k-1) pares. Mas cada um dos n_i tratamentos que são i-ésimos associados do tratamento considerado, ocorre com ele λ_i vezes. Daí decorre que

$$r(k-1) = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \ldots + n_m\lambda_m = \sum_{i=1}^{m} n_i\lambda_i \quad .$$

iv) Sejam A e B dois tratamentos que sao i-ésimos associados. Então B está contido no grupo dos n_i tratamentos que são i-ésimos associados a A. Entre os restantes $n_i - 1$ tratamentos deste grupo existem exatamente p^i_{ik} tratamentos que são j-ésimos associados de B. Portanto,

$$p^i_{i1} + p^i_{i2} + \ldots + p^i_{im} = \sum_{k=1}^{m} p^i_{ik} = n_i - 1 \; .$$

Se $i \neq j$, entre os n_j tratamentos que são j-ésimos associados de A existem exatamente p^i_{jk} tratamentos que são k-ésimos associados de B. Assim

$$p^i_{j1} + p^i_{j2} + \ldots + p^i_{jm} = \sum_{k=1}^{m} p^i_{jk} = n_j \qquad (i \neq j) \; .$$

Juntando as duas relações, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} p^i_{jk} &= n_j - 1 \quad , \quad \text{se } i=j \\ &= n_j \qquad\quad , \quad \text{se } i \neq j \; . \end{aligned}$$

v) Seja o grupo G_i dos n_i tratamentos que são i-ésimos associados de um determinado tratamento A e o grupo G_j dos n_j tratamentos que são j-ésimos associados de A. Todo tratamento pertencente a G_i terá exatamente p^i_{jk} k-ésimos associados entre os tratamentos do grupo G_j. Todo tratamento pertencente a G_j tem exatamente p^j_{ik} k-ésimos associados entre os tratamentos do grupo G_i. Portanto, o número de pares de k-ésimos associados que se pode formar, tomando um tratamento do grupo G_i e outro do grupo G_j é, por um lado $n_i \, p^i_{jk}$ e por outro lado $n_j \, p^j_{ik}$. Então,

$$n_i \, p^i_{jk} = n_j \, p^j_{ik} \; .$$

Para BOSE e NAIR (1939), as relações (i), (ii) e (iii) mostram que somente 2m+1 parâmetros do primeiro tipo são independentes e,em função das relações (iv) e (v) somente $m(m^2-1)/6$ dos parâmetros do segundo tipo são independentes. Além disso, os parâmetros p_{jk}^{i} podem ser arranjados em matrizes simétricas $P_i = (p_{jk}^{i})$, para $i=1,2,\ldots,m$, onde p_{jk}^{i} é o (j,k)-ésimo elemento da matriz P_i.

2.3.3 - Esquemas de associação

O conceito de esquema de associação representa uma regra fundamental na análise e classificação de delineamentos em PBIB. Este conceito que aparece inerente na definição de BOSE e NAIR (1939) foi explicitamente introduzido por BOSE e SHIMAMOTO (1952).

DEFINIÇÃO 2.3.3.1 [RAGHAVARAO, 1971]

Dados $\underline{v}$ tratamentos, uma relação entre eles é dita um esquema de associação com m classes, se satisfaz às seguintes condições:

i) Quaisquer dois tratamentos são primeiros ou segundos ou ... m-ésimos associados, sendo a relação de associação simétrica, isto é, se o tratamento A é i-ésimo associado do tratamento B, então B é i-ésimo associado de A.

ii) Cada tratamento tem n_i i-ésimos associados, sendo n_i independente do tratamento considerado.

iii) Se quaisquer dois tratamentos A e B são i-ésimos associados, então o número de tratamentos os quais são j-ésimos associados de A e k-ésimos associados de B é p_{jk}^{i} e é independente do par de i-ésimos associados A e B.

Os valores v, n_i $(i=1,2,\ldots,m)$ e p^i_{jk} $(i,j,k=1,2,\ldots,m)$ são chamados de parâmetros do esquema de associação.

DEFINIÇÃO 2.3.3.2 [RAGHAVARAO, 1971]

Dado um esquema de associação com m classes, tem-se um PBIB com r repetições e b blocos, se for possível arranjar os v tratamentos em b blocos de maneira que:

i) Cada bloco contenha k tratamentos distintos.

ii) Cada tratamento está contido em r blocos.

iii) Se dois tratamentos A e B são i-ésimos associados, então eles ocorrem juntos em λ_i blocos, sendo λ_i independente do par de i-ésimos associados A e B $(i=1,2,\ldots,m)$.

Os valores v, b, r, k, λ_i $(i=1,2,\ldots,m)$ são chamados de parâmetros do delineamento.

Se o esquema tem m classes de associados, o PBIB é denotado por PBIB(m). Grande parte das pesquisas sobre esquemas de associação estão relacionadas com os PBIB com 2 classes de associados, isto é, com os PBIB(2).

2.3.4 - Matrizes de Associação

Conforme BOSE e MESNER (1959), SHAH (1959) e RAGHAVARAO (1971), para um esquema de associação com m classes, pode-se definir m matrizes vxv da forma

$$B_i = (b^i_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} b^i_{11} & b^i_{12} & \ldots & b^i_{1v} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b^i_{v1} & b^i_{v2} & \ldots & b^i_{vv} \end{bmatrix}$$

onde: $b^i_{\alpha\beta} = 1$ se α e β são i-ésimos associados;

$= 0$ em caso contrário.

Observa-se que as matrizes B_i $(i=1,2,\ldots,m)$ são matrizes simétricas, com totais de linhas e de colunas iguais a n_i. É conveniente considerar que cada tratamento é seu zero-ésimo associado, e assim tem-se que

$$B_o = I_v$$

$$n_o = 1$$

$$p^o_{ij} = n_i\delta_{ij}$$

$$p^j_{oi} = p^j_{io} = \delta_{ij}$$

$$\lambda_o = r \quad ,$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, isto é, $\delta_{ij} = 1$ se $i=j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

As relações entre os parâmetros do PBIB podem ser escritas por

$$bk = vr \quad , \quad \sum_{i=o}^{m} n_i = v \quad ,$$

$$\sum_{i=o}^{m} n_i\lambda_i = rk \quad , \quad \sum_{k=o}^{m} p^i_{jk} = n_j \quad ,$$

$$n_i\, p^i_{jk} = n_j\, p^j_{ik} = n_k\, p^k_{ij} \quad , \quad i,j,k=0,1,\ldots,m .$$

As matrizes B_o, B_1, ..., B_m são chamadas de matrizes de associação do esquema de associação dos tratamentos.

Dados dois tratamentos α e β, eles são zero-ésimos, primeiros, segundos, ou, ..., m-ésimos associados e, portanto, somente um dos elementos $b^o_{\alpha\beta}$, $b^1_{\alpha\beta}$, ..., $b^m_{\alpha\beta}$ é igual a 1. Desta forma,

$$B_o + B_1 + \ldots + B_m = \sum_{i=o}^{m} B_i = J_v .$$

Além disso, pelo mesmo fato, $C_oB_o + C_1B_1 + \ldots + C_mB_m = \sum_{i=o}^{m} C_iB_i = \phi$, se e somente se, $C_o = C_1 = \ldots = C_m = 0$. Então as funções lineares de B_o, B_1, ..., B_m formam um espaço vetorial de dimensão m+1 com base B_o, B_1,... ..., B_m.

Dados dois tratamentos α e β, os quais são i-ésimos associados, o elemento da α-ésima linha e β-ésima coluna de B_jB_k pode ser interpretado como o número de tratamentos comuns com os j-ésimos associados de α e k-ésimos associados de β. Desta forma tem-se que

$$B_jB_k = p^o_{jk}\, B_o + p^1_{jk}\, B_1 + \ldots + p^m_{jk}\, B_m = \sum_{i=o}^{m} p^i_{jk}\, B_i \; ,$$

j,k=0,1,...,m. Isto significa que a operação de multiplicação é fechada no conjunto de funções lineares de B_o, B_1, ..., B_m. Além disso, a multiplicação das matrizes B_i é comutativa e associativa.

Segundo BOSE e MESNER (1959) se N é a matriz de incidência do delineamento, então

$$NN' = rB_o + \lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_m B_m \quad .$$

Como para delineamentos próprios e equireplicados

$$C = rI - NN'/k = rB_o - NN'/k \; ,$$

então,

$$C = rB_o - \frac{1}{k}\,[rB_o + \lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_m B_m] = \frac{r(k-1)}{k}\, B_o - \frac{\lambda_1}{k}\, B_1 - \ldots - \frac{\lambda_m}{k}\, B_m .$$

De acordo com SHAH (1959), se existem as matrizes B_o, B_1, ..., B_m, tal que I, J e a matriz C de um delineamento conexo são combinações lineares dessas matrizes, então existe uma solução $\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \Omega \underset{\sim}{Q}$ do sistema de equações normais $C\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{Q}$, tal que a matriz Ω é uma combinação linear das matrizes B_i (i=0,1,...,m), isto é, $\Omega = C_oB_o + C_1B_1 + \ldots + C_mB_m$ e, também, $\Omega C = C\Omega = I - \frac{1}{v}\, J$.

Dado que as matrizes NN', C e Ω podem ser expressas como combinações lineares das matrizes de associação B_i (i=0,1,...,m), então, conforme BOSE e MESNER (1959) e JOHN (1980), os seus auto-valores são relacionados e apresentam a mesma multiplicidade. Desta forma, se θ é um auto-valor de C, então $\psi = k(r-\theta)$ é um auto-valor de NN' e θ^{-1}, para $\theta \neq 0$, é um auto-valor de Ω. Alternativamente, pode-se expressar θ em função de ψ, onde $\theta = (rk-\psi)/k$.

As raízes características de NN' e suas multiplicidades, para o caso de m=2, foram determinadas por CONNOR e CLATWORTHY (1954). As três raízes características de NN' são:

$$\psi_o = rk$$

$$\psi_i = r - \frac{1}{2}\{(\lambda_1-\lambda_2)[-\gamma + (-1)^i \sqrt{\Delta}] + (\lambda_1+\lambda_2)\} \; ; \; i=1,2 \qquad [2.3.4.a]$$

onde $\gamma = p^2_{12} - p^1_{12}$; $\beta = p^1_{12} + p^2_{12}$ e $\Delta = \gamma^2 + 2\beta + 1$.

Sejam α_o, α_1 e α_2 as multiplicidades das raízes características ψ_o, ψ_1 e ψ_2, respectivamente, de NN'. Se o delineamento é conexo, então ψ_o é uma raiz simples e, portanto, $\alpha_o = 1$. As outras multiplicidades satisfazem

$$\alpha_1 + \alpha_2 = v-1$$

e

$$Tr(NN') = rk + \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 = vr.$$

Resolvendo esse sistema de duas equações, tem-se:

$$\alpha_i = \frac{n_1 + n_2}{2} + (-1)^i \left[\frac{(n_1 - n_2) + \gamma(n_1 + n_2)}{2\sqrt{\Delta}}\right]; \; i=1,2 \qquad [2.3.4.b].$$

É interessante notar que as multiplicidades dependem somente dos parâmetros do esquema de associação com m classes e não dos parâmetros do PBIB. Além disso, como as multiplicidades são números inteiros, isto impõe uma condição necessária para a existência de algum esquema de associação com m classes.

2.3.5 - Delineamentos em PBIB com duas classes de associados

BOSE e SHIMAMOTO (1952), dependendo da natureza do esquema de associação entre os tratamentos, classificam os PBIB com duas classes de associados em cinco diferentes tipos: grupo divisível, triangular, quadrado latino, cíclico e simples. A definição de cada tipo e os respectivos esquemas de associação são apresentados a seguir.

2.3.5.1 - Grupo divisível (GD)

Um PBIB(2) é chamado de grupo divisível (GD) se existem $v = sn$ tratamentos, e estes podem ser divididos em $\underline{s}$ grupos de $\underline{n}$ tratamentos ($s \geq 2$ e $n \geq 2$), tal que quaisquer dois tratamentos do mesmo grupo são primeiros associados e dois tratamentos de grupos diferentes são segundos associados, e cada tratamento pertence a um único dos $\underline{s}$ grupos.

Para um GD facilmente se verifica que os parâmetros do esquema de associação são:

$$n_1 = n-1 \quad , \qquad n_2 = n(s-1) \quad ,$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} n-2 & 0 \\ 0 & n(s-1) \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & n-1 \\ n-1 & n(s-2) \end{bmatrix}$$

onde: n_1 = número de primeiros associados, e

n_2 = número de segundos associados.

Dois tratamentos que são i-ésimos associados aparecem juntos em λ_i blocos (i=1,2). As desigualdades $r \geq \lambda_1$, $rk - \lambda_2 v \geq 0$, se verificam, e os parâmetros do delineamento são relacionados de tal forma que $(n-1)\lambda_1 + n(s-1)\lambda_2 = r(k-1)$ ou $rk - \lambda_2 v = r - \lambda_1 + n(\lambda_1-\lambda_2)$.

A título de ilustração, se v=8, podem-se denotar os tratamentos por 1, 2, ..., 8 e dividi-los nos quatro grupos seguintes:

1 5 , 2 6 , 3 7 e 4 8 ,

onde s=4 e n=2. Nesse caso, o primeiro associado do tratamento 1 é o tratamento 5 e os segundos associados são os tratamentos 2, 3, 4, 6, 7 e 8. Desta forma, $n_1 = 1$, $n_2 = 6$, $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ e $P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Um PBIB com base nesse esquema de associação pode ser obtido, tomando-se como blocos a combinação dos grupos 2 a 2. Assim tem-se o delineamento

BLOCO 1: 1 5 2 6

BLOCO 2: 1 5 3 7

BLOCO 3: 1 5 4 8

BLOCO 4: 2 6 3 7

BLOCO 5: 2 6 4 8

BLOCO 6: 3 7 4 8

com os parâmetros: $b = 6$, $r = 3$, $k = 4$, $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$.

As raízes características de NN', pelas relações [2.3.4.a] e [2.3.4.b], são dadas por:

$$\psi_o = rk \quad , \quad \psi_1 = rk - \lambda_2 v \quad e \quad \psi_2 = r - \lambda_1 \quad ,$$

com multiplicidades $\alpha_o = 1$, $\alpha_1 = s-1$ e $\alpha_2 = s(n-1)$.

Dependendo dos valores das raízes características de NN' o GD foi subdividido em 3 classes, conforme BOSE e CONNOR (1952):

i) Singular (S), se $r - \lambda_1 = 0$, ou seja, se $\psi_2 = 0$.

ii) Semi-regular (SR), se $r - \lambda_1 > 0$ e $rk - v\lambda_2 = 0$, ou seja, se $\psi_2 > 0$ e $\psi_1 = 0$.

iii) Regular (R), se $r - \lambda_1 > 0$ e $rk - v\lambda_2 > 0$, ou seja, se $\psi_2 > 0$ e $\psi_1 > 0$.

Os autores mostram que um GD singular é sempre derivado de um BIB, substituindo cada tratamento por um grupo de n tratamentos, formando, os grupos resultantes, o esquema de associação entre os tratamentos.

2.3.5.2 - Triangular

Um PBIB(2) é chamado triangular se o número de tratamentos é $v = n(n-1)/2$, e o esquema de associação está num arranjo de n linhas e n colunas, com as seguintes propriedades:

i) As posições na diagonal principal são vazias.

ii) As $n(n-1)/2$ posições acima da diagonal principal são preenchidas pelos números 1, 2, ..., $n(n-1)/2$, correspondendo aos tratamentos.

iii) As $n(n-1)/2$ posições abaixo da diagonal principal são preenchidas de tal forma que o esquema seja simétrico.

iv) Dois tratamentos que ocorrem na mesma linha ou coluna são primeiros associados, e segundos associados em caso contrário.

Os parâmetros do esquema de associação são:

$$n_1 = 2(n-2) \quad , \qquad n_2 = (n-2)(n-3)/2 \quad ,$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} n-2 & n-3 \\ n-3 & (n-3)(n-4)/2 \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2(n-4) \\ 2(n-4) & (n-4)(n-5)/2 \end{bmatrix}.$$

Para n=5 e, consequentemente, v=10, o esquema de associação triangular é dado por:

$$\begin{array}{ccccc} - & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & - & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & - & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 8 & - & 10 \\ 4 & 7 & 9 & 10 & - \end{array} .$$

Os primeiros associados do tratamento 1, conforme as propriedades do esquema de associação, são os tratamentos 2, 3, 4, 5, 6 e 7 e os segundos associados são os tratamentos 8, 9 e 10. Desta forma, tem-

-se $n_1 = 6$, $n_2 = 3$, $P_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Um PBIB(2) com esquema de associação triangular é obtido considerando-se as linhas do arranjo como blocos. Assim, tem-se o delineamento:

BLOCO 1: 1 2 3 4 — BLOCO 4: 3 6 8 10

BLOCO 2: 1 5 6 7 — BLOCO 5: 4 7 9 10

BLOCO 3: 2 5 8 9

com os parâmetros $b = 5$, $r = 2$, $k = 4$, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$.

As raízes características da matriz de concordância NN', usando-se as relações [2.3.4.a] e [2.3.4.b], são dadas por:

$$\psi_o = rk$$
$$\psi_1 = r + (n-4)\lambda_1 - (n-3)\lambda_2$$
$$\psi_2 = r - 2\lambda_1 + \lambda_2$$

com multiplicidades $\alpha_o = 1$, $\alpha_1 = n-1$ e $\alpha_2 = n(n-3)/2$.

BOSE e NAIR (1939) afirmam que um certo número de PBIB pode ser obtido pela dualização do BIB, isto é, tomando-se blocos como tratamentos e tratamentos como blocos. Para SHRIKHANDE (1952), o dual de um BIB com parâmetros v*, b*, r*, k* e λ* será sempre parcialmente balanceado nos seguintes casos:

(a) $\lambda^* = 1$;

(b) $r^* = k$, $k^* = k-2$, $\lambda^* = 2$.

Segundo BOSE e SHIMAMOTO (1952), os PBIB referentes ao caso (a) são os "singly linked block" (SLB), delineamentos criados por Youden em 1951, e os do caso (b) são do tipo triangular, com parâmetros:

$$v = k(k-1)/2 \ , \quad b = (k-1)(k-2)/2 \ , \quad r = k-2 \ , \quad k = k \ ,$$
$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad ;$$

$$n_1 = 2(k-2) \quad , \quad n_2 = (k-2)(k-3)/2 \; ;$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} k-2 & k-3 \\ k-3 & (k-3)(k-4)/2 \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2(k-4) \\ 2(k-4) & (k-4)(k-5)/2 \end{bmatrix} .$$

KAGEYAMA (1982) afirma que para um PBIB(2) ser do tipo triangular deve-se ter $n \geq 5$, pois se $n = 2$ ou 3, o delineamento degenera para um delineamento com somente uma classe de associados, e para $n = 4$ é um GD.

JOHN (1980) também afirma que, no caso de $n = 4$, o esquema triangular torna-se um GD, invertendo-se as classes de tratamentos associados, isto é, os primeiros tomam-se como segundos e os segundos como primeiros, e então $s = 3$ e $n = 2$.

Os parâmetros do esquema de associação triangular determinam de forma única o esquema de associação quando $n \neq 8$, conforme foi provado por CONNOR (1958), SHRIKHANDE (1959) e HOFFMAN (1960). Se $n = 8$, existem três outros possíveis esquemas de associação, com os parâmetros do esquema de associação triangular, conhecidos como esquemas de associação pseudotriangular, os quais foram provados por SEIDEN (1966).

2.3.5.3 - Tipo quadrado latino

Um PBIB(2) é chamado tipo quadrado latino com i restrições, denotado por L_i, se os $v = s^2$ tratamentos satisfazem ao seguinte esquema de associação:

i) Os s^2 tratamentos são arranjados em quadrados sxs e i-2 quadrados latinos mutuamente ortogonais são sobrepostos.

ii) Dois tratamentos são primeiros associados se e somente se eles ocorrem na mesma linha ou coluna do arranjo, ou nas posições ocu padas pela mesma letra em qualquer dos quadrados latinos. Caso contrário, eles são segundos associados.

Os parâmetros do esquema de associação são dados por:

$$n_1 = i(s-1) \quad , \quad n_2 = (s-i+1)(s-1) \quad ,$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} i^2-3i+s & (i-1)(s-i+1) \\ (i-1)(s-i+1) & (s-i)(s-i+1) \end{bmatrix} \quad ,$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} i(i-1) & i(s-i) \\ i(s-i) & (s-i)^2 + (i-2) \end{bmatrix} \quad .$$

As raízes características de NN' no presente caso, de acordo com as relações [2.3.4.a] e [2.3.4.b], são dadas por:

$$\psi_o = rk$$

$$\psi_1 = r + (s-i)\lambda_1 - (s-i+1)\lambda_2$$

$$\psi_2 = r - i\lambda_1 + (i-1)\lambda_2$$

com multiplicidades $\alpha_o = 1$, $\alpha_1 = i(s-1)$ e $\alpha_2 = (s-i+1)(s-1)$.

Para i=2 tem-se o esquema simples L_2, onde, nesse caso, dois tratamentos são primeiros associados se eles ocorrem na mesma linha ou coluna do arranjo e segundos associados em caso contrário. O delineamento com esquema L_2, onde $v = s^2$ e $s = k$, com 2 repetições, tomando-se as linhas e as colunas do esquema básico como blocos, para as duas repetições, respectivamente, é conhecido como reticulado quadrado simples, e é comumente usado na experimentação agrícola, especialmente quando o número de tratamentos é grande.

Assim, considerando $v = s^2 = 16$, com i=2, tem-se o esquema de associação L_2 dado por:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} .$$

Os parâmetros do esquema de associação, nesse caso, são:

$$n_1 = 6 \ , \ n_2 = 9 \ , \ P_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \ , \ P_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} .$$

Um PBIB(2) com esse esquema de associação e gerado tomando-se as linhas para a primeira repetição e as colunas para a segunda repetição, como blocos, ou seja:

REPETIÇÃO I					REPETIÇÃO II				
BLOCO 1:	1	2	3	4	BLOCO 5:	1	5	9	13
BLOCO 2:	5	6	7	8	BLOCO 6:	2	6	10	14
BLOCO 3:	9	10	11	12	BLOCO 7:	3	7	11	15
BLOCO 4:	13	14	15	16	BLOCO 8:	4	8	12	16

Esse delineamento é conhecido como reticulado quadrado simples, cujos parâmetros são: $b = 8$, $r = 2$, $k = 4$, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$.

Segundo KAGEYAMA (1982), a condição necessária e suficiente para se obter um esquema do tipo L_i é que $2 \leq i \leq s-1$, pois, quando $i = s+1$, o delineamento será um BIB, e quando $i = s$, o delineamento também será do tipo GD.

2.3.5.4 - Cíclico

Um PBIB(2) é chamado cíclico se o conjunto de primeiros associados do i-ésimo tratamento é $(i+d_1, i+d_2, \ldots, i+d_{n1})$ módulo $\underline{v}$, onde os $\underline{d}$ elementos satisfazem às condições seguintes:

i) Os $\underline{d}$ elementos são todos diferentes e $0 < d_j < v$, para $j=1,2,\ldots$ $\ldots, n_1$.

ii) Entre as $n_1(n_1-1)$ diferenças $d_j - d_{j'}$, $(j,j'=1,2,\ldots,n_1;\ j\neq j')$ reduzidas a módulo v, cada um dos elementos $d_1, d_2, \ldots, d_{n_1}$ ocorrem α vezes, enquanto que cada um dos elementos $e_1, e_2, \ldots, e_{n_2}$ ocorrem β vezes, sendo os elementos e_j todos diferentes, $0< e_j <v$ e $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n_2}\} = \{1, 2, 3, \ldots, v-1\} - \{d_1, d_2, \ldots, d_{n_1}\}$.

iii) O conjunto $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_{n_1}\}$ é tal que

$$D = \{-d_1, -d_2, \ldots, -d_{n_2}\} .$$

É necessário que $n_1\alpha + n_2\beta = n_1(n_1-1)$, onde $\alpha = p^1_{11}$ e $\beta = p^2_{11}$. O conjunto dos primeiros associados do tratamento $\underline{i}$ é definido como $(i+d_1, i+d_2, \ldots, i+d_{n_1})$(módulo v) e o conjunto dos segundos associados como $(i + e_1 + e_2, \ldots, i+e_{n_2})$(módulo v).

As matrizes P_i, $i=1,2$, nesse caso são dadas por:

$$P_1 = \begin{bmatrix} \alpha & n_1-\alpha-1 \\ n_1-\alpha-1 & n_2-n_1+\alpha+1 \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} \beta & n_1-\beta \\ n_1-\beta & n_2-n_1+\beta-1 \end{bmatrix} .$$

Segundo RAGHAVARAO (1971), todos os esquemas de associação cíclicos têm parâmetros dados por:

$$v = 4t+1 \quad , \quad n_1 = n_2 = 2t \quad ,$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} t-1 & t \\ t & t \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} t & t \\ t & t-1 \end{bmatrix} .$$

As raízes características de NN', pelas relações [2.3.4.a] e [2.3.4.b], são dadas por:

$$\psi_o = rk$$
$$\psi_1 = r + \frac{\lambda_1}{2}(\sqrt{v}-1) - \frac{\lambda_2}{2}(\sqrt{v}+1)$$
$$\psi_2 = r - \frac{\lambda_1}{2}(\sqrt{v}+1) - \frac{\lambda_2}{2}(\sqrt{v}-1)$$

com multiplicidades $\alpha_o = 1$, $\alpha_1 = 2t$ e $\alpha_2 = 2t$.

JOHN (1971) apresenta uma ilustração de PBIB(2) do tipo cíclico, considerando os parâmetros $v = 5$, $b = 5$, $r = 3$, $k = 3$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $n_1 = n_2 = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$. O esquema de associação é dado por $d_1 = 1$ e $d_2 = 4$. Assim , os primeiros associados do tratamento 2 são $2+1 \equiv 3$ (módulo 5) e $2+4 \equiv 1$ (módulo 5). Desta forma, tem-se o plano:

BLOCO 1:	0	1	2	BLOCO 4:	3	4	0
BLOCO 2:	1	2	3	BLOCO 5:	4	0	1
BLOCO 3:	2	3	4				

2.3.5.5 - Simples

Um PBIB(2) é chamado simples se:

a) $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ ou b) $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$.

Desde que o caso (b) pode ser transformado no caso (a), mudando a designação de primeiros e segundos associados, o caso (a) é tomado como padrão.

Um PBIB(2) do tipo simples pode ser gerado pelos outros tipos de PBIB(2), isto é, GD, Triangular, L_i ou cíclicos.

Tabelas de PBIB(2) foram preparadas por BOSE, CLATWORTHY e SHRIKHANDE (1954), e estendidas por Clatworthy (1956 e 1973), conforme citação de JOHN (1980). JOHN (1966) apresenta tabelas para o caso de PBIB(2) com esquema de associação cíclico.

Segundo RAGAVARAO (1971), os esquemas de associação com m=2, que não foram cobertos por BOSE e SHIMAMOTO (1952), ficam em duas categorias. A primeira contém os esquemas de associação pseudo-triangular, pseudo-quadrado latino e pseudo-cíclico. A outra categoria difere de qual quer dos esquemas de associação classificados por BOSE e SHIMAMOTO(1952) e, em geral, não satisfazem $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$, não sendo, portanto, do tipo simples.

2.3.6 - Delineamentos em PBIB com mais de duas classes de associados

A idéia de PBIB com duas classes de tratamentos associados pode ser estendida para esquemas de associação e delineamentos com m classes de associados (m > 2), muito embora, na prática, os PBIB(2) sejam os mais utilizados e é muito pouco comum o uso de delineamentos com mais do que três classes de associados.

2.3.6.1 - Esquema de associação retangular

O esquema de associação retangular, introduzido por VARTAK (1955), é um esquema com três classes de associados. Sejam $v = mn$ tratamentos arranjados em um retângulo de m linhas e n colunas. Dois tratamentos são primeiros associados se eles aparecem na mesma linha do arranjo, segundos associados se eles aparecem na mesma coluna e terceiros associados em caso contrário.

Para este esquema de associação, tem-se:

$$n_1 = n-1 \quad , \quad n_2 = m-1 \quad , \quad n_3 = (m-1)(n-1)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} n-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & (m-1)(n-2) \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & n-1 \\ 0 & m-2 & 0 \\ n-1 & 0 & (m-2)(n-1) \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & n-2 \\ 1 & 0 & m-2 \\ n-2 & m-2 & (m-2)(n-2) \end{bmatrix} .$$

As raízes características de NN', conforme RAGHAVARAO (1971), são dadas por:

$$\psi_o = rk$$

$$\psi_1 = r - \lambda_1 + (m-1)(\lambda_2-\lambda_3)$$

$$\psi_2 = r - \lambda_2 + (n-1)(\lambda_1-\lambda_3)$$

$$\psi_3 = r - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3$$

com multiplicidades $\alpha_o = 1$, $\alpha_1 = n-1$, $\alpha_2 = m-1$ e $\alpha_3 = (m-1)(n-1)$.

JOHN (1980), como ilustração do esquema de associação retangular, considera o caso de v=12, m=4 e n=3. Nesse caso tem-se o arranjo:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

onde, em relação ao tratamento 1, os tratamentos 2 e 3 são primeiros associados, 4, 7 e 10 são segundos associados e 5, 6, 8, 9, 11 e 12 são terceiros associados.

Segundo o autor, um PBIB(3) com esse esquema de associação é obtido constituindo o i-ésimo bloco dos seis tratamentos que são terceiros associados do i-ésimo tratamento. Assim, temos o delineamento:

BLOCO 1:	5	6	8	9	11	12	BLOCO 7:	2	3	5	6	11	12
BLOCO 2:	4	6	7	9	10	12	BLOCO 8:	1	3	4	6	10	12
BLOCO 3:	4	5	7	8	10	11	BLOCO 9:	1	2	4	5	10	11
BLOCO 4:	2	3	8	9	11	12	BLOCO 10:	2	3	5	6	8	9
BLOCO 5:	1	3	7	9	10	12	BLOCO 11:	1	3	4	6	7	9
BLOCO 6:	1	2	7	8	10	11	BLOCO 12:	1	2	4	5	7	8

com os parâmetros: $r = k = 6$, $b = 12$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = 2$.

2.3.6.2 - Esquema de associação cúbico

O esquema de associação cúbico foi introduzido por RAGHAVARAO e CHANDRASEKHARARAO (1964), e constitui um esquema com três classes de associados. Existem $v = s^3$ tratamentos denotados pela tripla (x_1, x_2, x_3), onde $x_i = 0,1,\ldots,s-1$. Dois tratamentos são primeiros associados se eles têm duas coordenadas em comum, segundos associados se eles têm uma e terceiros associados se todas as coordenadas diferem. Assim, para s=3, v=27, o tratamento 000 tem seis primeiros associados: 001, 002, 010, 020, 100 e 200; doze segundos associados: 011, 012, 021, 022, 101, 102, 110, 120, 201, 202, 210 e 220; e oito terceiros associados: 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221 e 222.

Para o esquema de associação cúbico tem-se:

$$n_1 = 3(s-1) \quad , \quad n_2 = 3(s-1)^2 \quad , \quad n_3 = (s-1)^3 \quad ;$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} s-2 & 2(s-1) & 0 \\ 2(s-1) & 2(s-1)(s-2) & (s-1)^2 \\ 0 & (s-1)^2 & (s-1)^2(s-2) \end{bmatrix} ,$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2(s-2) & (s-1) \\ 2(s-2) & 2(s-1)+(s-2)^2 & 2(s-1)(s-2) \\ (s-1) & 2(s-1)(s-2) & (s-1)(s-2)^2 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3(s-2) \\ 3 & 6(s-2) & 3(s-2)^2 \\ 3(s-2) & 3(s-2)^2 & (s-2)^3 \end{bmatrix}.$$

As raízes características de NN' são dadas por:

$$\psi_o = rk$$

$$\psi_1 = r(2s-3)\lambda_1 + (s-1)(s-3)\lambda_2 - (s-1)^2\lambda_3$$

$$\psi_2 = r + (s-3)\lambda_1 - (2s-3)\lambda_2 + (s-1)\lambda_3$$

$$\psi_3 = r - 3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3$$

com multiplicidades $\alpha_o = 1$, $\alpha_1 = 3(s-1) = n_1$, $\alpha_2 = 3(s-1)^2 = n_2$ e $\alpha_3 = (s-1)^3 = n_3$.

2.3.6.3 - Grupo divisível com m classes de associados

Este esquema de associação foi introduzido por ROY (1953-1954) e considerado, posteriormente, por RAGHAVARAO (1960).

No caso de m=3, dividem-se os $v = N_1N_2N_3$ tratamentos em N_1 grupos de N_2N_3 tratamentos cada, e então divide-se cada grupo em N_2 sub-grupos de N_3 tratamentos. Dois tratamentos são primeiros associados se eles estão no mesmo sub-grupo, segundos associados se eles estão no mesmo grupo, mas em sub-grupos diferentes, e terceiros associados em caso contrário.

Nesse caso, os parâmetros do esquema de associação são dados por:

$n_1 = N_3-1$, $n_2 = N_3(N_2-1)$, $n_3 = N_2N_3(N_1-1)$;

$$P_1 = \begin{bmatrix} N_3-2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix} ,$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & n_1 & 0 \\ n_1 & N_3(N_2-2) & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix} ,$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & n_2 \\ n_1 & n_2 & (N_1-2)N_2N_3 \end{bmatrix}$$

As raízes características de NN' são dadas por:

$\psi_o = rk$

$\psi_1 = r - \lambda_3 + (\lambda_1-\lambda_3)n_1 + (\lambda_2-\lambda_3)n_2$

$\psi_2 = r - \lambda_2 + (\lambda_1-\lambda_2)n_1$

$\psi_3 = r - \lambda_1$

com multiplicidades $\alpha_o = 1$, $\alpha_1 = N_1-1$, $\alpha_2 = N_1(N_2-1)$ e $\alpha_3 = N_1N_2(N_3-1)$.

Para $\underline{m}$ classes de associados tem-se que:

$$\psi_i = (r - \lambda_{m-i+1}) + (\lambda_1 - \lambda_{m-i+1})n_1 + \dots + (\lambda_{m-i} - \lambda_{m-i+1})n_{m-i} ,$$

$i=1,2,\dots,m$, com multiplicidade $\alpha_i = N_1N_2 \dots N_{i-1}(N_i-1)$.

Esse esquema de associação GD para $\underline{m}$ classes de associados constitui o chamado grupo divisível generalizado (GGD/m-PBIB). Uma outra idéia de GD com três classes de associados é apresentada por VARTAK (1959) e estendida por HINKELMANN e KEMPTHORNE (1963). Essa extensão é conhecida como grupo divisível estendido (EGD/m-PBIB). HINKELMANN(1964) investiga com detalhes os (EGD/m-PBIB).

Outros esquemas de associação para m $\geq$ 3 encontram-se descritos na bibliografia, tal como em RAGHAVARAO (1971), esquemas estes, na maioria das vezes sem nenhum interesse prático.

2.3.7 - Delineamentos em reticulados ("lattices")

Segundo NAIR (1944), os delineamentos em PBIB, conforme o mesmo princípio empregado nos BIB, podem ser classificados em dois tipos:

i) "Resolvable Design": os blocos podem ser agrupados em repetições.

ii) "Non-resolvable Design": os blocos não podem ser agrupados em repetições.

Os delineamentos do caso (i) formam importante classe de PBIB, dentre os quais se destacam os reticulados quadrados, os reticulados cúbicos (NAIR e RAO, 1942) e alguns dos reticulados retangulares (NAIR, 1951 e 1952).

2.3.7.1 - Reticulados quadrados

Os reticulados quadrados ("square lattices") foram introduzidos por YATES (1936a), e constituem delineamentos que permitem dispor um número de $v = k^2$ tratamentos em blocos de k unidades. Verifica-se portanto, que o número de tratamentos tem que ser um quadrado perfeito. Nos reticulados quadrados os tratamentos de um bloco em uma repetição se distribuem em blocos diferentes nas outras repetições, e essas repetições são chamadas de repetições ortogonais. Assim, se k for número primo ou potência de número primo, têm-se k+1 repetições ortogonais. O conjunto de todas as k+1 repetições constitui o reticulado quadrado balanceado.

COCHRAN e COX (1957) classificam os reticulados quadrados nos seguintes cinco diferentes tipos:

i) Reticulado simples ("simple lattice") ou reticulado duplo ("double lattice"): quando são utilizadas as duas primeiras repetições do reticulado balanceado.

ii) Reticulado triplo ou tríplice ("triple lattice"): quando usam-se as três primeiras repetições do esquema balanceado.

iii) Reticulado quádruplo ("quadruple lattice"): quando são usadas as quatro primeiras repetições do esquema balanceado ou quando duplica-se o reticulado simples.

iv) Reticulado quíntuplo ("quintuple lattice"): quando são usadas as cinco primeiras repetições do esquema balanceado.

v) Maior número de repetições: para maior número de repetições, os autores fazem as seguintes recomendações:

. seis repetições: usar o reticulado tríplice duas vezes;

. oito repetições: usar o reticulado simples quatro vezes ou o reticulado quádruplo duas vezes;

. nove repetições: usar o reticulado tríplice três vezes;

. dez repetições: usar o reticulado simples cinco vezes ou o reticulado quíntuplo duas vezes.

RAGHAVARAO (1971) afirma que os reticulados quadrados são PBIB(2) do tipo quadrado latino com $\underline{i}$ restrições, isto é, do tipo L_i, com parâmetros usuais do esquema de associação dados em 2.3.5.3. Desta forma, se $i=2$, tem-se o reticulado simples ou duplo, se $i=3$, o reticulado tríplice ou triplo, se $i=4$, o reticulado quádruplo, e assim sucessivamente. Se o esquema básico é repetido $\underline{n}$ vezes tem-se um delineamento com os parâmetros: $v = s$, $b = nsi$, $r = ni$, $k = s$, $\lambda_1 = n$ e $\lambda_2 = 0$.

2.3.7.2 - Reticulado cúbico

Conforme RAGHAVARAO (1971), um reticulado tri-dimensional ou reticulado cúbico tem $v = s^3$ tratamentos arranjados nos pontos de um cubo sxsxs. Uma repetição de s^2 conjuntos de tamanho s é obtida tomando-se uma linha paralela para cada uma das direções possíveis. Pode-se facilmente verificar que tal arranjo é um PBIB(3), com esquema de associação cúbico, conforme descrição dada em 2.3.6.2, cujos parâmetros são dados por: $v = s^3$, $b = 3s^2$, $r = 3$, $k = s$, $n_1 = 3(s-1)$, $n_2 = 3(s-1)^2$, $n_3 = (s-1)^3$, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

2.3.7.3 - Reticulado retangular simples

Segundo HARSHBARGER (1949), no reticulado retangular simples tem-se $v = p(p-1)$ tratamentos identificados pelo par (x,y) $(x \neq y;\ x,y=1,2,\dots,p)$. Os tratamentos com o mesmo valor para x formam o x-ésimo bloco da primeira repetição, e todos os tratamentos com o mesmo valor para y formam o y-ésimo bloco da segunda repetição.

NAIR (1951) mostra que, se $p \geq 4$ o reticulado retangular simples forma um PBIB(4), com os parâmetros: $v = p(p-1)$, $k = p-1$, $r = 2$, $b = 2p$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$,

$$n_1 = 2(p-2) \ , \quad n_2 = (p-2)(p-3) \ , \quad n_3 = 2(p-2) \ , \quad n_4 = 1 \ ,$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} p-3 & p-3 & 1 & 0 \\ p-3 & (p-3)(p-4) & p-3 & 0 \\ 1 & p-3 & p-3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2(p-4) & 2 & 0 \\ 2(p-4) & (p-4)(p-5) & 2(p-4) & 1 \\ 2 & 2(p-4) & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & p-3 & p-3 & 1 \\ p-3 & (p-3)(p-4) & p-3 & 0 \\ p-3 & p-3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2(p-2) & 0 \\ 0 & (p-2)(p-3) & 0 & 0 \\ 2(p-2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.3.7.4 - Reticulado retangular tríplice

No caso do reticulado retangular tríplice, tem-se, conforme HARSHBARGER (1949), $v = p(p-1)$ tratamentos e cada tratamento pode ser identificado pela tripla ordenada (x,y,z) $(x \neq y,\ x \neq z,\ y \neq z;\ x,y,z=1,2,\ldots,p)$. Os tratamentos com o mesmo valor para x formam o x-ésimo bloco da primeira repetição, os tratamentos com o mesmo valor para y formam o y-ésimo bloco da segunda repetição e os tratamentos com o mesmo valor z formam o z-ésimo bloco da terceira repetição.

NAIR (1951) mostra que o reticulado retangular tríplice é um PBIB(2) com os parâmetros: $v = 6$, $b = 9$, $r = 3$, $k = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $n_1 = 3$, $n_2 = 2$,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

quando p=3, e PBIB(3) com os parâmetros: $v = b = 12$, $r = k = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $n_1 = 6$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

quando p=4, mas não são PBIB para $p \geq 5$.

2.3.8 - Construção de PBIB

A bibliografia sobre construção de PBIB é vasta, principalmente para o caso de duas classes de associados, onde são de especial interesse as tabelas de BOSE, CLATWORTHY e SHRIKHANDE (1954) para $r \leq 10$ e $k \leq 10$, e a versão revisada e estendida destas tabelas, publicada por Clatworthy (1973), conforme citação de JOHN (1980). Para PBIB(2), com esquema de associação cíclico, JOHN (1966) apresenta inúmeros planos experimentais para $r \leq 10$ e $5 \leq v \leq 15$.

Vários métodos de construção de PBIB são citados pela bibliografia, dentre os quais tem-se: eliminação de tratamentos de um BIB conhecido, dualização do BIB, configurações geométricas, geometria finita, método das diferenças, etc. Excelentes revisões sobre os diferentes métodos de construção de PBIB aparecem em RAGHAVARAO (1971), JOHN (1971 e 1980), RAMOS (1975), e especialmente em BARBOSA (1986).

2.3.9 - Análise Intrablocos

A análise intrablocos para PBIB segue o procedimento usual da análise intrablocos de experimentos em blocos incompletos. Sabe-se que o sistema de equações normais, eliminando-se o efeito de blocos, é dado por

$$C\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{Q} \quad ,$$

onde, $C = rI - NN'/k$, sendo

$$NN' = \begin{bmatrix} r & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1v} \\ \lambda_{12} & r & \dots & \lambda_{2v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1v} & \lambda_{2v} & \dots & r \end{bmatrix}$$

Portanto, no caso de PBIB, C é uma matriz singular de dimensão $\underline{v}$ e característica v-1, constituída dos elementos

$$c_{ii'} = \begin{cases} r(k-1)/k & , \quad \text{se } i=i' \\ -\lambda_{ii'}/k & , \quad \text{se } i \neq i' \end{cases}$$

O vetor de totais ajustados de tratamentos $\underset{\sim}{Q}$ tem a mesma representação do caso de BIB, ou seja, é constituído pelos elementos Q_i $(i=1,2,\dots,v)$, dados por $Q_i = T_i - \frac{1}{k} A_i$, sendo T_i o total do tratamento $\underline{i}$ e A_i é a soma dos totais dos blocos que contêm o tratamento $\underline{i}$.

Para os PBIB(2), impondo-se a restrição $\sum_i \hat{\tau}_i = 0$, BOSE e NAIR (1939) apresentam a seguinte expressão para $\hat{\tau}_i$:

$$\hat{\tau}_i = \frac{k}{\Delta_1} \{B_{22} Q_i - B_{12} S_1(Q_i)\} \quad , \quad i=1,2,\dots,v,$$

onde $S_1(Q_i)$ é a soma dos Q's correspondentes aos n_1 tratamentos que são os primeiros associados do i-ésimo tratamento;

$A_{12} = r(k-1) + \lambda_2$; $\quad A_{22} = (\lambda_2 - \lambda_1)\, p_{12}^2$;

$B_{12} = \lambda_2 - \lambda_1$;

$B_{22} = r(k-1) + \lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)(p_{11}^1 - p_{11}^2)$;

$\Delta_1 = A_{12} B_{22} - A_{22} B_{12}$.

Se $n_1 > n_2$, a expressão mais conveniente para $\hat{\tau}_i$, segundo os autores é:

$$\hat{\tau}_i = \frac{k}{\Delta_2} [B_{21}Q_i - B_{11}S_2(Q_i)] \quad ,$$

onde: $S_2(Q_i)$ é a soma dos Q's correspondentes aos n_2 tratamentos que são segundos associados do i-ésimo tratamento;

$A_{11} = r(k-1) + \lambda_1$;

$A_{21} = (\lambda_1-\lambda_2)\ p^1_{12}$;

$B_{11} = \lambda_1 - \lambda_2$;

$B_{21} = r(k-1) + \lambda_1 + (\lambda_1-\lambda_2)(p^2_{22} - p^1_{22})$;

$\Delta_2 = A_{11}B_{21} - A_{21}B_{11}$.

A solução dada por BOSE e SHIMAMOTO (1952) é:

$$\hat{\tau}_i = \frac{1}{r(k-1)} [(k-C_2)Q_i + (C_1-C_2)\ S_1(Q_i)]$$

onde: $C_1 = \frac{1}{k\Delta} [\lambda_1(rk-r+\lambda_2) + (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2\ p^1_{12} - \lambda_1 p^2_{12})]$;

$C_2 = \frac{1}{k\Delta} [\lambda_2(rk-r+\lambda_1) + (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2\ p^1_{12} - \lambda_1 p^2_{12})]$;

$k^2\Delta = \{(rk-r+\lambda_1)(rk-r+\lambda_2) + (\lambda_1-\lambda_2)[r(k-1)(p^1_{12} - p^2_{12}) + \lambda_2 p^1_{12} - \lambda_1 p^2_{12}]$

RAO (1947) apresenta expressões semelhantes às de BOSE e NAIR (1939), com a diferença que define $S_j(Q_i)$ ($i=1,2\ldots,v$; $j=1,2,\ldots,m$) representando a soma dos Q's para o i-ésimo tratamento e seus j-ésimos associados. Com isto, $\hat{\tau}_i$ é dado por:

$$\hat{\tau}_i = \frac{k}{\Delta_1} [(B_{22} + B_{12})Q_i - B_{12}S_1(Q_i)]$$

para o caso de $n_1 \leq n_2$, e

$$\hat{\tau}_i = \frac{k}{\Delta_2} [(B_{21} + B_{11})Q_i - B_{11}S_2(Q_i)]$$

quando $n_1 \geq n_2$.

Para duas classes de associados, a dedução das expressões de $\hat{\tau}_i$ é encontrada com detalhes em RAMOS (1975), para o método de BOSE e SHIMAMOTO (1952), e em BARBOSA (1986) para o método de BOSE e NAIR (1939). OLIVEIRA (1985) deduz expressões para a estimativa dos efeitos de tratamentos, na análise intrablocos, para 2 e m classes de associados, no caso de PBIB com tratamentos comuns.

Para PBIB(3), as expressões para a estimação dos efeitos de tratamentos são apresentadas por BOSE e NAIR (1939), RAO (1947) e NAIR (1952), apresentando também o último autor, expressões para quatro classes de associados (m=4). Para o caso geral (m classes de associados) CHAKRABARTI (1962) considera, para o s-ésimo tratamento, a seguinte igualdade:

$$r(k-1)\,\hat{\tau}_s = kQ_s + \sum_{j=1}^{m} S_j(Q_s) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_{ij} \quad ,$$

onde: $S_j(Q_s)$ é a soma dos Q's correspondentes aos n_j tratamentos que são j-ésimos associados do s-ésimo tratamento; e

f_{ij} satisfaz à expressão:

$$S_i(\hat{\tau}_s) = f_{i1}S_1(Q_s) + f_{i2}S_2(Q_s) + \ldots + f_{im}S_m(Q_s) \quad ; \; i=1,2,\ldots,m.$$

Conforme JOHN (1980), uma solução do sistema $C\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{Q}$ é dada por

$$\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \Omega \underset{\sim}{Q} \quad ,$$

onde Ω é uma inversa generalizada simétrica de C. Desde que C é uma combinação linear das matrizes de associação B_i, definidas em 2.3.4, e como $\Omega = (C + aJ)^{-1}$, pode-se escrever:

$$\Omega = W_o B_o + \sum_{i=1}^{m} W_i B_i \quad ,$$

e então,

$$\hat{\tau}_s = W_o Q_s + \sum_{i=1}^{m} W_i S_i(Q_s) \ .$$

Para a análise intrablocos de reticulados, NAIR (1952) segue o esquema usual de ensaios em PBIB. Esse procedimento, no entanto, segundo GOMES (1954), não é de todo satisfatório, uma vez que as condições particulares de organização dos reticulados permitem estabelecer métodos mais simplificados de análise.

A soma de quadrados de tratamentos ajustada para blocos, no caso de PBIB, é obtida através da expressão usual para delineamentos em blocos incompletos, isto é:

$$SQT(aj.) = \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{Q} = \sum_{i=1}^{v} \hat{\tau}_i Q_i \ .$$

2.3.10 - Estimabilidade

A matriz C dos ensaios em PBIB tem característica v-1, diante disso, geralmente, os PBIB são delineamentos conexos e, portanto, os contrastes entre tratamentos são estimáveis.

KAGEYAMA (1982) apresenta, para PBIB, uma regra prática com base nos parâmetros do delineamento, para verificar se o delineamento é conexo, a qual consiste no seguinte: as condições necessárias e suficientes para que um PBIB(2) seja conexo são:

i) Se $\lambda_1 > \lambda_2$, λ_2 e p_{11}^2 nao devem ser ao mesmo tempo nulos;

ii) Se $\lambda_1 < \lambda_2$, λ_1 e p_{22}^1 nao devem ser ao mesmo tempo nulos.

Com base nessas condições, o autor afirma que os PBIB(2) do tipo triangular, quadrado latino, cíclicos e GD com $\lambda_1 < \lambda_2$ são sempre conexos, enquanto que os GD com $\lambda_1 > \lambda_2$ serão conexos se e somente se, $\lambda_2 \neq 0$.

A variância da diferença entre os efeitos estimados de dois tratamentos, isto é, $V[\hat{\tau}_{i} - \hat{\tau}_{i'}]$, nos PBIB(2), conforme BOSE e NAIR (1939), RAO (1947) e NAIR (1952), é dada por:

$$V[\hat{\tau}_{i} - \hat{\tau}_{i'}] = 2k\ B_{21}\ \sigma^2/\Delta_1 \quad , \quad \text{se } i \text{ e } i' \text{ são primeiros associados;}$$
$$= 2k\ B_{22}\ \sigma^2/\Delta_2 \quad , \quad \text{se } i \text{ e } i' \text{ são segundos associados.}$$

Segundo BOSE e NAIR (1939), como há $vn_1/2$ comparações entre primeiros associados e $vn_2/2$ comparações entre segundos associados, então a variância média de todas as comparações é dada por

$$\bar{V} = \frac{2k\sigma^2\ [(v-1)B_{21} + n_2 B_{11}]}{(v-1)\ \Delta_1} .$$

Para BOSE e SHIMAMOTO (1952), $V[\hat{\tau}_{i} - \hat{\tau}_{i'}]$ é dada por

$$V[\hat{\tau}_{i} - \hat{\tau}_{i'}] = 2/r\ [(k-C_1)/(k-1)]\sigma^2, \quad \text{se } i \text{ e } i' \text{ são primeiros associados;}$$
$$= 2/r\ [(k-C_2)/(k-1)]\sigma^2, \quad \text{se } i \text{ e } i' \text{ são segundos associados.}$$

Para PBIB(m), $V[\hat{\tau}_{i} - \hat{\tau}_{i'}]$ é dada, de acordo com CHAKRABARTI (1962), por:

$$V[\hat{\tau}_{i} - \hat{\tau}_{i'}] = 2\sigma^2/[r(k-1)]\ [k - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell f_{\ell i}] .$$

2.3.11 - Eficiência

Para PBIB(2), no que se refere à variância de contrastes elementares de tratamentos, tem-se, conforme 2.3.10, uma variância para primeiros associados, uma para segundos associados, e uma variância média. Desta forma, em PBIB(2) têm-se três expressões para eficiência, isto é, uma eficiência para primeiros associados (E_1), uma para segundos associados (E_2) e uma eficiência média ou eficiência do delineamento (E), obtidas a partir da definição de eficiência dada em 2.1.4.

A eficiência dos PBIB(2) em relação aos blocos casualizados é definida por BOSE e NAIR (1939), como sendo:

$$E = \frac{(v-1)\Delta_2}{rk[(v-1)B_{21} + n_2 B_{11}]} = \frac{(v-1)\Delta_1}{rk[(v-1)B_{22} + n_1 B_{12}]} .$$

Seguindo a solução de BOSE e SHIMAMOTO (1952), RAMOS(1975) mostra que

$$E_1 = (k-1)/(k-C_1) ,$$

$$E_2 = (k-1)/(k-C_2) ,$$

sendo C_1 e C_2 dadas pelas expressões apresentadas em 2.3.9, e a eficiência do delineamento é dada por:

$$E = \frac{1}{v-1}[n_1E_1 + n_2E_2] = \frac{1}{v-1}[n_1(k-1)/(k-C_1) + n_2(k-1)/(k-C_2)]$$

BARBOSA (1986), seguindo a solução de BOSE e NAIR (1939), mostra que:

$$E_1 = \Delta_1/rk[B_{22} + B_{12}] \quad \text{e} \quad E_2 = \Delta_1/rk\ B_{22}$$

para $n_1 < n_2$, e

$$E_1 = \Delta_2/rk\ B_{21} \quad \text{e} \quad E_2 = \Delta_2/rk[B_{21} + B_{11}] ,$$

para $n_2 < n_1$.

2.3.12 - Decomposição da soma de quadrados de tratamentos

HOFFMANN (1975) apresenta um método baseado em transformações lineares ortogonais, para a decomposição da soma de quadrados de tratamentos. Uma matriz ortogonal (D) é uma matriz quadrada, cuja inversa é igual a sua transposta, e então

$$D'D = DD' = I \ .$$

Da relação DD' = I, conclui-se que as linhas de uma matriz ortogonal são ortogonais entre si e são vetores unitários, ou seja, vetores ortonormais, onde

$$\sum_i d_{hi} d_{ji} = 0 \ , \text{ para } h \neq j, \quad \text{e} \quad \sum_i d_{hi}^2 = 1 \ .$$

Da relação D'D = I, conclui-se ainda que as mesmas condições são válidas também para as colunas de uma matriz ortogonal.

Uma importante propriedade das matrizes ortogonais é que, quando são utilizadas para definir uma transformação linear de uma variável, a soma dos quadrados da nova variável ($\sum_i z_i^2$) é igual à soma dos quadrados dos valores da variável original ($\sum_i y_i^2$). Seja $\underset{\sim}{y}$ o vetor dos valores de uma variável, e seja uma nova variável definida por $\underset{\sim}{z} = D\underset{\sim}{y}$, onde D é uma matriz ortogonal. Assim,

$$\sum_i z_i^2 = \underset{\sim}{z}'\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{y}'D'D\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} = \sum_i y_i^2 \ .$$

O autor apresenta a interpretação geométrica da transformação linear ortogonal, e utiliza esse procedimento para a decomposição da soma de quadrados de tratamentos, no caso de um experimento inteiramente casualizado, com igual e com diferente número de repetições por tratamento.

FERREIRA (1978), através do método das transformações lineares ortogonais, estruturou a decomposição do resíduo em componentes aplicáveis e apropriados a contrastes de interesse, para um experimento em blocos casualizados, e para uma análise conjunta de experimentos em blocos casualizados. O procedimento de FERREIRA (1978), para a decomposição do resíduo em resíduos específicos, para o teste de contrastes de interesse, foi utilizado por REGAZZI (1984), na análise de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos secundários em apenas alguns dos tratamentos principais, e por NOGUEIRA (1984), na análise de experimentos inteiramente casualizados.

Para ensaios em BIB, tal como nos experimentos instalados em outros delineamentos, o número de graus de liberdade (GL) para tratamentos pode ser subdividido de acordo com a estrutura do experimento. A decomposição do número de GL de tratamentos é particularmente importante nos experimentos fatoriais, muito embora de uso geral.

Seja o contraste entre efeitos de tratamentos $\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\tau}$, o qual é estimado por $\underset{\sim}{\ell}'\hat{\underset{\sim}{\tau}}$, onde $\hat{\underset{\sim}{\tau}}$ é qualquer solução do sistema de equações normais $C\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{Q}$.

GOMES (1985) indica o seguinte procedimento, dentre outros, para a decomposição da SQT(aj.) na análise intrablocos de experimentos em BIB:

i) Obter a soma de quadrados referente a cada contraste C, da maneira usual, ou seja, obter: $SQC = r(\underset{\sim}{\ell}'\hat{\underset{\sim}{\tau}})^2/\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\ell}$;

ii) Multiplicar as somas de quadrados de cada contraste pelo fator $\lambda v/rk$, isto é, pela eficiência E dos BIB, obtendo-se SQC(aj.).

Desde que os contrastes sejam ortogonais, isto é, $\underset{\sim}{\ell}'_i \underset{\sim}{\ell}_{i'} = 0$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{v-1} SQC_i(aj.) = SQT(aj.) \quad .$$

O autor exemplifica o procedimento de decomposição da SQT(aj.) em partes ortogonais no caso de um experimento fatorial 2^3.

Sabe-se que $\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \Omega \underset{\sim}{Q}$, onde $\Omega = \frac{k}{\lambda v} I$ no caso de BIB. Assim, para o contraste C tem-se

$$SQC = \frac{r(\underset{\sim}{\ell}' \frac{k}{\lambda v} I \underset{\sim}{Q})^2}{\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\ell}} = \frac{rk^2}{\lambda^2 v^2} \frac{(\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{Q})^2}{\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\ell}} \quad .$$

E então,

$$SQC(aj.) = \frac{\lambda v}{rk} \frac{rk^2}{\lambda^2 v^2} \frac{(\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{Q})^2}{\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\ell}} = \frac{k}{\lambda v} \frac{(\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{Q})^2}{\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\ell}} = \frac{k}{\lambda v} \frac{\left(\sum_{i=1}^{v} \ell_i Q_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{v} \ell_i^2}$$

que é a expressão apresentada por MONTGOMERY (1976).

IEMMA (1985, 1987) afirma que a decomposição da SQT(aj.) em contrastes ortogonais, no caso de BIB, é feita de maneira usual, obtendo-se a soma de quadrados de hipótese (SQH_o), para H_o: $D'\underset{\sim}{\tau} = \underset{\sim}{\phi}$, onde $SQH_o = (D'\hat{\underset{\sim}{\tau}})'[D'M^{-1}D]^{-1}(D'\hat{\tau})$, sendo D a matriz dos coeficientes dos contrastes, constituída, portanto, de v-1 linhas independentes, e $M = \frac{\lambda v}{k} I$. Desta forma, cada componente da SQH_o corresponde à $SQC_i(aj.)$ $(i=1,2,\dots, v-1)$ e $SQH_o = SQT(aj.)$.

Para PBIB, de acordo com SHAH (1958), se

$$\underset{\sim}{\ell}_1'\underset{\sim}{\tau},\ \underset{\sim}{\ell}_2'\underset{\sim}{\tau},\ \ldots,\ \underset{\sim}{\ell}_v'\underset{\sim}{\tau}$$

são v-1 contrastes ortogonais normalizados estimáveis, tal que:

$$V[\underset{\sim}{\ell}_i'\hat{\underset{\sim}{\tau}}] = \frac{\sigma^2}{\theta_q}$$

e

$$\mathrm{COV}[\underset{\sim}{\ell}_i'\hat{\underset{\sim}{\tau}},\ \underset{\sim}{\ell}_j'\hat{\underset{\sim}{\tau}}] = 0 \quad , \quad i \neq j \quad ,$$

então a matriz C é dada por:

$$C = \sum_{q=1}^{v-1} \theta_q \underset{\sim}{\ell}_q \underset{\sim}{\ell}_q'$$

onde θ_q (q=1,2,...,v-1) são os auto-valores não nulos de C, e a estimativa de $\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\tau}$ é dada por:

$$\underset{\sim}{\ell}'\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \frac{\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{Q}}{\theta_q} \quad .$$

Além disso, a soma de quadrados devida ao contraste $\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\tau}$ é dada por:

$$\frac{(\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{Q})^2}{\theta_q} \quad .$$

JOHN (1980), KRAMER e BRADLEY (1957a e b) e BRENNA e KRAMER (1961), dentre outros, abordam a decomposição da soma de quadrados de tratamentos ajustada, para o caso de experimentos fatoriais em PBIB, conforme será abordado em 2.3.13.

2.3.13 - Experimentos fatoriais em PBIB

Em experimentos fatoriais, instalados em blocos incompletos, interessa decompor a soma de quadrados de tratamentos ajustada nos componentes para A, B, AxB, etc. Se as somas de quadrados para A, B, AxB, etc., são formas quadráticas independentes, o delineamento em blocos incompletos é dito, na terminologia de JOHN e SMITH (1972), com estrutura fatorial, para o experimento fatorial em questão. Equivalentemente, o delineamento em blocos incompletos terá uma estrutura fatorial, se os contrastes para efeitos principais e interações são não correlacionados.

KRAMER e BRADLEY (1957a e b) e ZELEN (1958) consideram o uso de PBIB(2) do tipo GD para experimentos fatoriais. BRADLEY, WALPONE e KRAMER (1960) estendem para outros PBIB(2). BRENNA e KRAMER (1961) consideram o uso de reticulados retangulares para experimentos fatoriais.

SHAH (1958 e 1960) e KSHIRSAGAR (1966) trabalham com delineamentos fatoriais balanceados. Estes são delineamentos com estrutura fatorial, os quais têm a propriedade adicional que, para qualquer efeito principal ou interação, todos os contrastes têm a mesma variância.

JOHN e SMITH (1972) desenvolvem condições suficientes para que delineamentos não ortogonais, entre os quais o PBIB, tenham uma estrutura fatorial, isto é, produzam uma análise ortogonal para efeitos principais e interação, no caso de dois fatores. O critério é que NN' deve ter uma estrutura cíclica. COTTER, JOHN e SMITH (1973) estendem este resultado para três ou mais fatores.

Quanto à decomposição da SQT(aj.), os trabalhos de maior interesse no presente contexto são considerados a seguir.

KRAMER e BRADLEY (1957a e b) consideram um PBIB(2) do tipo GD e, a partir do modelo

$$y_{ijs} = \mu. + \tau_{ij} + \beta_s + \varepsilon_{ijs} \quad ,$$

onde: τ_{ij} é o efeito do tratamento V_{ij}; e

β_s é o efeito do bloco s;

e admitindo as restrições usuais: $\sum_i \sum_j \tau_{ij} = 0$ e $\sum_s \beta_s = 0$, chegam a

$$SQT(aj.) = \sum_i \sum_j t_{ij} Q_{ij} = \frac{(\lambda_1+rk-r)}{k} \sum_i \sum_j t_{ij}^2 + \frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{k} \sum_i (\sum_j t_{ij})^2 \quad ,$$

onde: t_{ij} é a estimativa de mínimos quadrados de τ_{ij};

$Q_{ij} = T_{ij} - A_{ij}/k$, sendo T_{ij} o total do tratamento V_{ij} e A_{ij} a soma dos totais dos blocos que contêm o tratamento V_{ij}; e

$$t_{ij} = [kv\lambda_2 T_{ij} - k(\lambda_2-\lambda_1) \sum_j T_{ij} - v\lambda_2 A_{ij} + (\lambda_2-\lambda_1) \sum_j A_{ij}]/[v\lambda_2(\lambda_1+rk-r)] \ .$$

A variância para contrastes elementares entre efeitos de tratamentos é:

$$V[t_{ij} - t_{ij'}] = 2k\sigma^2/(\lambda_1+rk-r) \quad , \quad j \neq j'$$

para primeiros associados, e

$$V[t_{ij} - t_{i'j'}] = 2k\sigma^2(\lambda_1+\lambda_2 v-\lambda_2)/[v\lambda_2(\lambda_1+rk-r)] \ ; \quad i \neq i'$$

para segundos associados.

A eficiência dos primeiros associados é:

$$E_1 = (\lambda_1+rk-r)/rk$$

e a dos segundos associados é dada por:

$$E_2 = v\lambda_2(\lambda_1+rk-r)/[rk(\lambda_1+\lambda_2 v-\lambda_2)] \ .$$

No caso de um fatorial com os fatores A e C, com <u>s</u> e <u>n</u> níveis respectivamente, onde existem v = sn combinações de tratamentos associados a V_{ij}, KRAMER e BRADLEY (1957a e b) consideram

$$\tau_{ij} = \alpha_i + \gamma_j + \delta_{ij} \quad ,$$

e admitem as restrições: $\sum_i \alpha_i = 0$, $\sum_j \gamma_j = 0$, $\sum_i \delta_{ij} = 0$ e $\sum_j \delta_{ij} = 0$.

As somas de quadrados ajustadas para cada efeito fatorial são dadas por:

$$SQA(aj.) = \frac{n\lambda_2 v}{k} \sum_i a_i^2 \quad ,$$

$$SQC(aj.) = \frac{s(\lambda_1+rk-r)}{k} \sum_j c_j^2 \quad ,$$

e

$$SQAxC(aj.) = \frac{(\lambda_1+rk-r)}{k} \sum_i \sum_j d_{ij}^2 \quad ,$$

com (s-1), (n-1) e (s-1)(n-1) GL, respectivamente. Além disso,

$$SQA(aj.) + SQC(aj.) + SQAxC(aj.) = SQT(aj.) \quad ,$$

$$t_{ij} = a_i + c_j \div d_{ij}$$

e, portanto,

$$a_i = \sum_j t_{ij}/n = \bar{t}_{i.} \quad ,$$

$$c_j = \sum_i t_{ij}/s = \bar{t}_{.j} \quad ,$$

e

$$d_{ij} = t_{ij} - \bar{t}_{i.} - \bar{t}_{.j} \quad .$$

As eficiências são dadas por:

$$E_A = \lambda_2 v/rk \quad ,$$

$$E_C = (\lambda_1+rk-r)/rk$$

$$E_{AxC} = (\lambda_1+rk-r)/rk \quad .$$

De acordo com os autores, a decomposição em contrastes com 1 GL é obtida da maneira usual. Assim, a decomposição do efeito principal do fator A em s-1 contrastes individuais, cada um com 1 GL, é obti da fazendo-se uma transformação ortogonal para $\bar{t}_{1.}$, $\bar{t}_{2.}$, ..., $\bar{t}_{s.}$. Desta forma, seja o u-ésimo contraste, dado por

$$I_u = \sum_{i=1}^{s} \xi_{iu}\, \bar{t}_{i.} \qquad , \quad u=1,2,\ldots,(s-1) \ .$$

A soma de quadrados ajustada para testar a hipótese que $\sum_{i=1}^{s} \xi_{iu}\, \alpha_i = 0$ é:

$$SQI_u(aj.) = \frac{n\lambda_2 v}{k \sum_{i=1}^{s} \xi_{iu}^2} \left(\sum_{i=1}^{s} \xi_{iu}\, \bar{t}_{i.} \right)^2 = \frac{\lambda_2 v}{k \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} \xi_{iu}^2} \left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} \xi_{iu}\, t_{ij} \right)^2 .$$

De maneira similar, seja o v-ésimo contraste entre os níveis do fator C;

$$J_v = \sum_{j=1}^{n} \eta_{jv}\, \bar{t}_{.j} \qquad , \quad v=1,2,\ldots,(n-1) \ .$$

A soma de quadrados ajustada para testar a hipótese que $\sum_{j=1}^{n} \eta_{jv}\, \gamma_j = 0$ é:

$$SQJ_v(aj.) = \frac{s(\lambda_1+rk-r)}{k \sum_{j=1}^{n} \eta_{jv}^2} \left(\sum_{j=1}^{n} \eta_{jv}\, \bar{t}_{.j} \right)^2 = \frac{(\lambda_1+rk-r)}{k \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} \eta_{jv}^2} \left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} \eta_{jv}\, t_{ij} \right)^2 .$$

A soma de quadrados para a interação também pode ser decomposta. Assim, a soma de quadrados ajustada referente ao contraste da interação de I_u e J_v é:

$$SQI_u x J_v(aj.) = \frac{\lambda_1+rk-r}{k \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} (\xi_{iu}\, \eta_{jv})^2} \left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} \xi_{iu}\, \eta_{jv}\, t_{ij} \right)^2 .$$

Segundo os autores este procedimento de decomposição pode continuar, desde que se considere que os níveis de A e de C sejam combinações de outros fatores, e assim sucessivamente.

KRAMER e BRADLEY (1957b) apresentam um exemplo de PBIB(2) do tipo GD com 8 tratamentos, em que a decomposição da soma de quadrados de tratamentos ajustada é feita considerando-se um fatorial 4x2, um fatorial 2^3 e 1/2 repetição do fatorial 2^4.

BRENNA e KRAMER (1961) investigam o caso de experimentos fatoriais em reticulados retangulares. O procedimento adotado é semelhante ao de KRAMER e BRADLEY (1957a e b). As expressões para a decomposição da soma de quadrados de tratamentos ajustada, nos respectivos componentes fatoriais (efeitos principais e interação), e para a decomposição destes em contrastes com graus de liberdade individuais, são semelhantes às obtidas por KRAMER e BRADLEY (1957a e b), com as particularidades inerentes ao delineamento experimental considerado.

Para um fatorial 2x3 instalado em PBIB(2), do tipo GD, JOHN (1980) considera o contraste $\underset{\sim}{\ell}_i'\underset{\sim}{\tau}$, onde $\underset{\sim}{\ell}_i$ é um auto-vetor de NN' associado ao auto-valor ψ_i, sendo $\theta_i = (rk-\psi_i)/k$ o correspondente auto-valor de C. A soma de quadrados ajustada para o contraste $\underset{\sim}{\ell}_i'\underset{\sim}{\tau}$ é dada por:

$$\frac{(\underset{\sim}{\ell}_i'\underset{\sim}{Q})^2}{\theta_i\underset{\sim}{\ell}_i'\underset{\sim}{\ell}_i} .$$

O autor também considera o fatorial 2^n e experimentos fatoriais com vários fatores e vários níveis (mais do que 2).

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO PARA A ANÁLISE DE EXPERIMENTOS EM BLOCOS INCOMPLETOS PARCIALMENTE BALANCEADOS

3.1 - Caracterização

Seja um experimento em blocos incompletos parcialmente balanceados com os seguintes parâmetros:

v: número de tratamentos;

b: número de blocos;

r: número de repetições de cada tratamento;

k: números de parcelas por bloco;

e, ainda, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, n_1, n_2, \ldots, n_m, p^i_{jk}$ $(i,j,k=1,2,\ldots,m)$, definidos conforme BOSE e NAIR (1939).

3.2 - Modelo Linear

Para o experimento em questão, considera-se o modelo linear

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij} \qquad [3.2.a]$$

onde: y_{ij} é a observação do i-ésimo tratamento no j-ésimo bloco;

μ é a média geral;

τ_i é o efeito do i-ésimo tratamento $(i=1,2,\ldots,v)$;

β_j é o efeito do j-ésimo bloco $(j=1,2,\ldots,b)$;

e_{ij} é o erro experimental associado à observação y_{ij} e supõe-se $e_{ij} \sim N(0,\sigma^2)$ e independentes.

O modelo é considerado com a restrição paramétrica

$$\sum_{i=i}^{v} \tau_i = 0 \quad .$$

Na forma matricial, o modelo [3.2.a] é dado por:

$$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\Theta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad [3.2.b]$$

onde: ${}_{rv}\underset{\sim}{y}_1$ é o vetor de realizações de variáveis aleatórias;

${}_{rv}X_{1+b+v}$ é a matriz dos coeficientes dos parâmetros do modelo (matriz do delineamento) de característica v+b-1;

${}_{1+v+b}\underset{\sim}{\Theta}_1$ é o vetor dos parâmetros do modelo;

${}_{rv}\underset{\sim}{\varepsilon}_1$ é um vetor, não observável, de erros aleatórios, tal que $\underset{\sim}{\varepsilon} \sim N(\underset{\sim}{\phi};I\sigma^2)$;

ou seja, está sendo considerado o modelo linear de Gauss-Markov (G.M.) e, portanto, $\underset{\sim}{y} \sim N(X\underset{\sim}{\Theta};I\sigma^2)$.

Efètuando-se convenientemente a partição da matriz X, obtém-se:

$$X = [\underset{\sim}{X}_1 \quad X_2 \quad X_3] \qquad [3.2.c]$$

onde:

${}_{rv}\underset{\sim}{X}_{1\,1}$ é o vetor dos coeficientes associados à média μ;

${}_{rv}X_{2\,v}$ é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos;

${}_{rv}X_{3\,b}$ é a matriz dos coeficientes associados aos blocos.

A partição do vetor Θ correspondente à partição da matriz X é dada por

$$\underset{\sim}{\Theta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \hline \underset{\sim}{\tau} \\ \hline \underset{\sim}{\beta} \end{bmatrix}$$

onde,

$$ {}_v\tilde{\tau}_1 = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_v \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad {}_b\tilde{\beta}_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_b \end{bmatrix}. $$

3.3 - Sistema de Equações Normais

Através do método dos quadrados mínimos obtem-se o sistema de equações normais dado por

$$ X'X\tilde{\hat{\Theta}} = X'\tilde{y} \qquad [3.3.a] $$

ou seja,

$$ \begin{bmatrix} \tilde{X}_1'\tilde{X}_1 & \tilde{X}_1'X_2 & \tilde{X}_1'X_3 \\ X_2'\tilde{X}_1 & X_2'X_2 & X_2'X_3 \\ X_3'\tilde{X}_1 & X_3'X_2 & X_3'X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \tilde{\hat{\tau}} \\ \tilde{\hat{\beta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1'\tilde{y} \\ X_2'\tilde{y} \\ X_3'\tilde{y} \end{bmatrix} \qquad [3.3.b] $$

onde:

$\tilde{X}_1'\tilde{X}_1 = bk = rv = n =$ número total de unidades experimentais ou parcelas;

$\tilde{X}_1'X_2 = \tilde{1}'\,{}_vR_v = [r \quad r \quad \ldots \quad r]$, é o vetor associado ao número de repetições dos tratamentos;

$\tilde{X}_1'X_3 = \tilde{1}'\,{}_bK_b = [k \quad k \quad \ldots \quad k]$, é o vetor associado ao número de unidades experimentais por bloco;

$X_2'X_2 = {}_vR_v = rI_v =$ diagonal $[r, r, \ldots, r]$, é a matriz associada às repetições dos tratamentos;

$X_3'X_3 = {}_bK_b = kI_b =$ diagonal $[k, k, \ldots, k]$, é a matriz associada ao número de unidades experimentais por bloco;

$X_2'X_3 = {}_vN_b = [n_{ij}]$, é a matriz de incidência do tratamento $\underline{i}$ no blo co $\underline{j}$, onde:

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se o tratamento } \underline{i} \text{ está no bloco } j; \\ 0, \text{ caso contrário;} \end{cases}$$

$\underset{\sim}{X}_1'\underset{\sim}{y} = G$, é o total geral observado;

$$\underset{\sim}{X}_2'\underset{\sim}{y} = {}_v\underset{\sim}{T}_1 = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_v \end{bmatrix}$$, é o vetor dos totais observados de tratamentos;

$$\underset{\sim}{X}_3'\underset{\sim}{y} = {}_b\underset{\sim}{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_b \end{bmatrix}$$, é o vetor dos totais observados de blocos.

Assim, o sistema de equações normais [3.3.b] pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} n & \underset{\sim}{1}'R & \underset{\sim}{1}'K \\ R\underset{\sim}{1} & R & N \\ K\underset{\sim}{1} & N' & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\underset{\sim}{\tau}} \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ \underset{\sim}{T} \\ \underset{\sim}{B} \end{bmatrix} . \qquad [3.3.c]$$

Como o principal interesse é o efeito de tratamentos, conforme JOHN (1980), eliminam-se os efeitos de $\hat{\mu}$ e de $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$, pré-multiplicando o sistema de equações normais (SEN) por:

$$\begin{bmatrix} 1 & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & I_v & -NK^{-1} \\ \underset{\sim}{0} & -N'R^{-1} & I_b \end{bmatrix}$$

obtendo-se;

$$n\hat{\mu} + \underset{\sim}{1}'R\hat{\underset{\sim}{\tau}} + \underset{\sim}{1}'K\hat{\underset{\sim}{\beta}} = G \qquad [3.3.d]$$

$$(R - NK^{-1}N')\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{T} - NK^{-1}\underset{\sim}{B} \qquad [3.3.e]$$

$$(K - N'K^{-1}N)\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{B} - N'R^{-1}\underset{\sim}{T} \qquad [3.3.f]$$

onde [3.3.e] representa o Sistema de Equações Normais Reduzidas (SENR), ou seja, o sistema de equações para efeitos ajustados de tratamentos.

Como é usual na teoria de blocos incompletos, pode-se escrever [3.3.e] na forma:

$$C\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{Q} \quad , \qquad [3.3.g]$$

onde, naturalmente,

$$C = R - NK^{-1}N' \qquad [3.3.h]$$

é a matriz intrablocos de dimensão v e característica v-1;

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{T} - NK^{-1}\underset{\sim}{B} \qquad [3.3.i]$$

é o vetor de totais ajustados de tratamentos.

Tem-se que:

$$K^{-1} = \frac{1}{k} I_b = \text{diagonal } [1/k, 1/k, \ldots, 1/k] \qquad [3.3.j]$$

e NN', chamada de matriz de concordância, é da forma:

$$NN' = \begin{bmatrix} r & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots & \lambda_{1v} \\ \lambda_{12} & r & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{2v} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{1v} & \lambda_{2v} & \lambda_{3v} & \cdots & r \end{bmatrix} \qquad [3.3.k]$$

e então,

$$C = [c_{ii'}] \quad ,$$

onde:

$$c_{ii'} = \begin{cases} r(k-1)/k & , \text{ se } i=i' \\ -\lambda_{ii'}/k & , \text{ se } i \neq i' \end{cases} \qquad i,i'=1,2,\ldots,v \qquad [3.3.\ell]$$

sendo $\lambda_{ii'}$ o número de vezes que os tratamentos i e i' ocorrem juntos no mesmo bloco.

Quanto ao vetor de totais ajustados de tratamentos $\underset{\sim}{Q}$, tem-se:

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{T} - \frac{1}{k}\, N\underset{\sim}{B} \qquad [3.3.m]$$

Efetuando-se o produto $N\underset{\sim}{B}$, verifica-se que:

$$N\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_v \end{bmatrix}$$

onde A_i é a soma dos totais dos blocos que contêm o tratamento $\underline{i}$.

Assim, obtém-se:

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{T} - \frac{1}{k}\underset{\sim}{A} \qquad [3.3.n]$$

onde o vetor $\underset{\sim}{Q}$ é composto pelos elementos

$$Q_i = T_i - \frac{1}{k} A_i \qquad [3.3.o]$$

3.4 - Solução do Sistema de Equações Normais Reduzidas (SENR)

Dado que a matriz C é singular, para solucionar o sistema $C\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{Q}$ utilizam-se inversas generalizadas (RAO, 1973; JOHN, 1980), ou introduzem-se restrições (KEMPTHORNE, 1975; PAVATE, 1961; GOMES, 1967). Uma solução geral é obtida, conforme JOHN (1980), considerando-se inversas generalizadas simétricas, da forma $\Omega = (C + aJ)^{-1}$, onde $\underline{a}$ é algum conveniente escalar não nulo e J é uma matriz de uns. A solução é dada por $\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \Omega\underset{\sim}{Q}$. Essa solução é similar àquela dada por GOMES (1967), considerando uma matriz de restrições A, de dimensão v, tal que $A\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{\phi}$. Fazendo

$M = C - A$, matriz esta não-singular, então a solução única é dada por $\hat{\underset{\sim}{\tau}} = M^{-1}\underset{\sim}{Q}$. Nesse caso, geralmente, $A = -\frac{\lambda_i}{k} J$, onde i=1 ou 2 ... ou m.

Soluções simplificadas para o caso de duas classes de associados são dadas por BOSE e NAIR (1939), RAO (1947) e BOSE e SHIMAMOTO (1952), e para m classes de associados por CHAKRABARTI (1962). Em todas essas soluções é considerada a restrição $\sum_{i=1}^{v} \hat{\tau}_i = 0$.

3.4.1 - Solução do sistema de equações normais reduzidas para m classes de associados.

De acordo com o sistema $C\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{Q}$, e conforme a caracterização de C dada em [3.3.ℓ], para um dado tratamento s tem-se a equação:

$$\frac{r(k-1)}{k} \hat{\tau}_s - \frac{1}{k} [\lambda_{s1}\hat{\tau}_1 + \ldots + \lambda_{ss-1}\hat{\tau}_{s-1} + \lambda_{ss+1}\hat{\tau}_{s+1} + \ldots + \lambda_{sv}\hat{\tau}_v] = Q_s ,$$

s=1,2,...,v; ou ainda,

$$r(k-1)\hat{\tau}_s - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_i(\hat{\tau}_s) = kQ_s \qquad [3.4.1.a]$$

onde $S_i(\hat{\tau}_s)$ representa a soma dos i-ésimos associados de $\hat{\tau}_s$ e λ_i (i=1,2, ...,m) é um dos parâmetros do primeiro tipo, definido por BOSE e NAIR (1939).

Verifica-se, pela expressão [3.4.1.a], que $\hat{\tau}_s$ é função de seus associados, que também não são conhecidos. Necessita-se, portanto, que a expressão seja modificada.

Sabe-se, por CHAKRABARTI (1962), que se um conjunto de tratamentos obedece à estrutura de um PBIB, as seguintes igualdades se verificam:

$$S_{j'}S_i(\hat{\tau}_s) = \sum_{j=1}^{m} p_{j'i}^{j}\ S_j(\hat{\tau}_s) \quad , \text{ se } j' \neq i \ , \text{ e}$$

$$[3.4.1.b]$$

$$= n_i\hat{\tau}_s + \sum_{j=1}^{m} p_{ii}^{j}\ S_j(\hat{\tau}_s) \quad , \text{ se } j'=i \ ,$$

onde os parâmetros n_i e p_{ij}^{k} $(i,j,k=1,2,\ldots,m)$ são definidos conforme BOSE e NAIR (1939).

Usando-se o procedimento de CHAKRABARTI (1962), obtém-se:

$$kS_{j'}(Q_s) = r(k-1)S_{j'}(\hat{\tau}_s) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_{j'}S_i(\hat{\tau}_s) \qquad [3.4.1.c]$$

onde $S_{j'}(Q_s)$ representa a soma dos Q's dos j'-ésimos associados do s-ésimo tratamento.

Para j'=1, tem-se:

$$kS_1(Q_s) = r(k-1)\ S_1(\hat{\tau}_s) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_1 S_i(\hat{\tau}_s) \qquad [3.4.1.d]$$

onde:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_1 S_i(\hat{\tau}_s) = \lambda_1 S_1 S_1(\hat{\tau}_s) + \lambda_2 S_1 S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + \lambda_m S_1 S_m(\hat{\tau}_s) \ .$$

Usando-se [3.4.1.b], obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_1 S_i(\hat{\tau}_s) = \lambda_1[n_1\hat{\tau}_s + p_{11}^{1}\ S_1(\hat{\tau}_s) + p_{11}^{2}\ S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{11}^{m}\ S_m(\hat{\tau}_s)] +$$

$$+ \lambda_2[p_{12}^{1}\ S_1(\hat{\tau}_s) + p_{12}^{2}\ S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{12}^{m}\ S_m(\hat{\tau}_s)] + \ldots +$$

$$+ \lambda_m[p_{1m}^{1}\ S_1(\hat{\tau}_s) + p_{1m}^{2}\ S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{1m}^{m}\ S_m(\hat{\tau}_s)] \ .$$

Sabe-se, por BOSE e NAIR (1939), que:

$$\sum_{j'=1}^{m} p_{jj'}^{i} = n_j - 1 \quad , \text{ se } j=i$$

$$= n_j \quad , \text{ se } j \neq i \qquad [3.4.1.f]$$

Considerando-se essas igualdades em [3.4.1.e], segue-se que:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_1 S_i(\hat\tau_s) = \lambda_1 \begin{bmatrix} n_1\hat\tau_s + (n_1 - 1 - p_{12}^1 - \dots - p_{1m}^1)\ S_1(\hat\tau_s) + \\ + (n_1 - p_{12}^2 - \dots - p_{1m}^2)\ S_2(\hat\tau_s) + \dots + \\ + (n_1 - p_{12}^m - \dots - p_{1m}^m)\ S_m(\hat\tau_s) \end{bmatrix} +$$

$$+ \lambda_2[p_{12}^1\ S_1(\hat\tau_s) + p_{12}^2\ S_2(\hat\tau_s) + \dots + p_{12}^m\ S_m(\hat\tau_s)] + \dots +$$

$$+ \lambda_m[p_{1m}^1\ S_1(\hat\tau_s) + p_{1m}^2\ S_2(\hat\tau_s) + \dots + p_{1m}^m\ S_m(\hat\tau_s)]$$

$$= \lambda_1 \begin{bmatrix} n_1[\hat\tau_s + S_1(\hat\tau_s) + S_2(\hat\tau_s) + \dots + S_m(\hat\tau_s)] - \\ - (1 + p_{12}^1 + \dots + p_{1m}^1)\ S_1(\hat\tau_s) - \\ - (p_{12}^2 + \dots + p_{1m}^2)\ S_2(\hat\tau_s) - \dots - \\ - (p_{12}^m + \dots + p_{1m}^m)\ S_m(\hat\tau_s) \end{bmatrix} +$$

$$+ \lambda_2[p_{12}^1\ S_1(\hat\tau_s) + p_{12}^2\ S_2(\hat\tau_s) + \dots + p_{12}^m\ S_m(\hat\tau_s)] + \dots +$$

$$+ \lambda_m[p_{1m}^1\ S_1(\hat\tau_s) + p_{1m}^2\ S_2(\hat\tau_s) + \dots + p_{1m}^m\ S_m(\hat\tau_s)] \quad .$$

Usando-se a restrição $\hat\tau_s + S_1(\hat\tau_s) + S_2(\hat\tau_s) + \dots + S_m(\hat\tau_s) = 0$, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_1 S_i(\hat\tau_s) = -\lambda_1 \begin{bmatrix} (n_1 - p_{11}^1)\ S_1(\hat\tau_s) + (n_1 - p_{11}^2)\ S_2(\hat\tau_s) + \dots + \\ + (n_1 - p_{11}^m)\ S_m(\hat\tau_s) \end{bmatrix} +$$

$$+ \lambda_2[p_{12}^1\ S_1(\hat\tau_s) + p_{12}^2\ S_2(\hat\tau_s) + \dots + p_{12}^m\ S_m(\hat\tau_s)] + \dots +$$

$$+ \lambda_m[p_{1m}^1\ S_1(\hat\tau_s) + p_{1m}^2\ S_2(\hat\tau_s) + \dots + p_{1m}^m\ S_m(\hat\tau_s)]$$

$$= -[\lambda_1 n_1 - \lambda_1 p_{11}^1 - \lambda_2 p_{12}^1 - \dots - \lambda_m p_{1m}^1]\ S_1(\hat\tau_s) -$$

$$-[\lambda_1 n_1 - \lambda_1 p_{11}^2 - \lambda_2 p_{12}^2 - \dots - \lambda_m p_{1m}^2]\ S_2(\hat\tau_s) - \dots -$$

$$-[\lambda_1 n_1 - \lambda_1 p_{11}^m - \lambda_2 p_{12}^m - \dots - \lambda_m p_{1m}^m]\ S_m(\hat\tau_s)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_1 S_i(\hat{\tau}_s) = - [\lambda_1 n_1 - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell \; p_{1\ell}^{1}] \; S_1(\hat{\tau}_s) -$$

$$- [\lambda_1 n_1 - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell \; p_{1\ell}^{2}] \; S_2(\hat{\tau}_s) - \ldots -$$

$$- [\lambda_1 n_1 - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell \; p_{1\ell}^{m}] \; S_m(\hat{\tau}_s) \; . \qquad [3.4.1.g]$$

Considerando-se a expressão [3.4.1.g] em [3.4.1.d], segue-se que:

$$kS_1(Q_s) = [r(k-1) + \lambda_1 n_1 - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell \; p_{1\ell}^{1}] \; S_1(\hat{\tau}_s) +$$

$$+ [\lambda_1 n_1 - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell \; p_{1\ell}^{2}] \; S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots +$$

$$+ [\lambda_1 n_1 - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell \; p_{1\ell}^{m}] \; S_m(\hat{\tau}_s) \; . \qquad [3.4.1.h]$$

Para j'=2, tem-se:

$$kS_2(Q_s) = r(k-1) \; S_2(\hat{\tau}_s) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_2 S_i(\hat{\tau}_s) \qquad [3.4.1.i]$$

onde;

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_2 S_i(\hat{\tau}_s) = \lambda_1 S_2 S_1(\hat{\tau}_s) + \lambda_2 S_2 S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + \lambda_m S_2 S_m(\hat{\tau}_s)$$

$$= \lambda_1 [p_{21}^{1} \; S_1(\hat{\tau}_s) + p_{21}^{2} \; S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{21}^{m} \; S_m(\hat{\tau}_s)] +$$

$$+ \lambda_2 [n_2 \hat{\tau}_s + p_{22}^{1} \; S_1(\hat{\tau}_s) + p_{22}^{2} \; S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{22}^{m} \; S_m(\hat{\tau}_s)] + \ldots +$$

$$+ \lambda_m [p_{2m}^{1} \; S_1(\hat{\tau}_s) + p_{2m}^{2} \; S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{2m}^{m} \; S_m(\hat{\tau}_s)] \; .$$

De [3.4.1.f] segue-se que;

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_2 S_i(\hat{\tau}_s) = \lambda_1[p_{21}^1\ S_1(\hat{\tau}_s) + p_{21}^2\ S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{21}^m\ S_m(\hat{\tau}_s)] +$$

$$+ \lambda_2 \begin{bmatrix} n_2\hat{\tau}_s + (n_2 - p_{21}^1 - p_{23}^1 - \ldots - p_{2m}^1)\ S_1(\hat{\tau}_s) + \\ + (n_2 - 1 - p_{21}^2 - p_{23}^2 - \ldots - p_{2m}^2)\ S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + \\ + (n_2 - p_{21}^m - p_{23}^m - \ldots - p_{2m}^m)\ S_m(\hat{\tau}_s) \end{bmatrix} + \ldots +$$

$$+ \lambda_m[p_{2m}^1\ S_1(\hat{\tau}_s) + p_{2m}^2\ S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{2m}^m\ S_m(\hat{\tau}_s)]$$

$$= \lambda_1[p_{21}^1\ S_1(\hat{\tau}_s) + p_{21}^2\ S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{21}^m\ S_m(\hat{\tau}_s)] +$$

$$+ \lambda_2 \begin{bmatrix} n_2[\hat{\tau}_s + S_1(\hat{\tau}_s) + S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + S_m(\hat{\tau}_s)] - \\ - (n_2 - p_{22}^1)\ S_1(\hat{\tau}_s) - (n_2 - p_{22}^2)\ S_2(\hat{\tau}_s) - \ldots - \\ - (n_2 - p_{22}^m)\ S_m(\hat{\tau}_s) \end{bmatrix} + \ldots +$$

$$+ \lambda_m[p_{2m}^1\ S_1(\hat{\tau}_s) + p_{2m}^2\ S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{2m}^m\ S_m(\hat{\tau}_s)] .$$

Usando-se a restrição $\hat{\tau}_s + S_1(\hat{\tau}_s) + S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + S_m(\hat{\tau}_s) = 0$, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_2 S_i(\hat{\tau}_s) = [\lambda_1\ p_{21}^1 - \lambda_2 n_2 + \lambda_2 p_{22}^1 + \ldots + \lambda_m\ p_{2m}^1]\ S_1(\hat{\tau}_s) +$$

$$+ [\lambda_1\ p_{21}^2 - \lambda_2 n_2 + \lambda_2\ p_{22}^2 + \ldots + \lambda_m\ p_{2m}^2]\ S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots +$$

$$+ [\lambda_1\ p_{21}^m - \lambda_2 n_2 + \lambda_2\ p_{22}^m + \ldots + \lambda_m\ p_{2m}^m]\ S_m(\hat{\tau}_s)$$

$$= - [\lambda_2 n_2 - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell\ p_{2\ell}^1]\ S_1(\hat{\tau}_s) -$$

$$- [\lambda_2 n_2 - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell\ p_{2\ell}^2]\ S_2(\hat{\tau}_s) - \ldots -$$

$$- [\lambda_2 n_2 - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell\ p_{2\ell}^m]\ S_m(\hat{\tau}_s) . \qquad [3.4.1.j]$$

Considerando-se a expressão [3.4.1.j] em [3.4.1.i] segue-se que:

$$kS_2(Q_s) = [\lambda_2 n_2 - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell\, p_{2\ell}^1]\; S_1(\hat{\tau}_s) +$$

$$+ [r(k-1) + \lambda_2 n_2 - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell\, p_{2\ell}^2]\; S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots +$$

$$+ [\lambda_2 n_2 - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell\, p_{2\ell}^m]\; S_m(\hat{\tau}_s) . \qquad [3.4.1.k]$$

Para $j'=m$, tem-se:

$$kS_m(Q_s) = r(k-1)\; S_m(\hat{\tau}_s) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_m S_i(\hat{\tau}_s) \quad , \qquad [3.4.1.\ell]$$

onde:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_m S_i(\hat{\tau}_s) = \lambda_1 S_m S_1(\hat{\tau}_s) + \lambda_2 S_m S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + \lambda_m S_m S_m(\hat{\tau}_s)$$

$$= \lambda_1[p_{m1}^1\; S_1(\hat{\tau}_s) + p_{m1}^2\; S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{m1}^m\; S_m(\hat{\tau}_s)] +$$

$$+ \lambda_2[p_{m2}^1\; S_1(\hat{\tau}_s) + p_{m2}^2\; S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{m2}^m\; S_m(\hat{\tau}_s)] + \ldots +$$

$$+ \lambda_m[n_m \hat{\tau}_s + p_{mm}^1\; S_1(\hat{\tau}_s) + p_{mm}^2\; S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{mm}^m\; S_m(\hat{\tau}_s)] .$$

De [3.4.1.f] segue-se que:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_m S_i(\hat{\tau}_s) = \lambda_1[p_{m1}^1\; S_1(\hat{\tau}_s) + p_{m1}^2\; S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{m1}^m\; S_m(\hat{\tau}_s)] +$$

$$+ \lambda_2[p_{m2}^1\; S_1(\hat{\tau}_s) + p_{m2}^2\; S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{m2}^m\; S_m(\hat{\tau}_s)] + \ldots +$$

$$+ \lambda_m \begin{bmatrix} n_m \hat{\tau}_s + (n_m - p_{m1}^1 - p_{m2}^1 - \ldots - p_{m(m-1)}^1)\, S_1(\hat{\tau}_s) + \\ + (n_m - p_{m1}^2 - p_{m2}^2 - \ldots - p_{m(m-1)}^2)\, S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + \\ + (n_m - 1 - p_{m1}^m - p_{m2}^m - \ldots - p_{m(m-1)}^m)\; S_m(\hat{\tau}_s) \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1[p_{m1}^1\; S_1(\hat{\tau}_s) + p_{m1}^2\; S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{m1}^m\; S_m(\hat{\tau}_s)] +$$

$$+ \lambda_2[p_{m2}^1\; S_1(\hat{\tau}_s) + p_{m2}^2\; S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + p_{m2}^m\; S_m(\hat{\tau}_s)] + \ldots +$$

$$+ \lambda_m \begin{bmatrix} n_m[\hat{\tau}_s + S_1(\hat{\tau}_s) + S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + S_m(\hat{\tau}_s)] - \\ - (n_m - p_{mm}^1)\; S_1(\hat{\tau}_s) - (n_m - p_{mm}^2)\; S_2(\hat{\tau}_s) - \ldots - \\ - (n_m - p_{mm}^m)\; S_m(\hat{\tau}_s) \end{bmatrix} .$$

Usando-se a restrição $\hat{\tau}_s + S_1(\hat{\tau}_s) + S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + S_m(\hat{\tau}_s) = 0$, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_m S_i(\hat{\tau}_s) = [\lambda_1 p_{m1}^1 + \lambda_2 p_{m2}^1 + \ldots + \lambda_m p_{mm}^1 - \lambda_m n_m] S_1(\hat{\tau}_s) +$$
$$+ [\lambda_1 p_{m1}^2 + \lambda_2 p_{m2}^2 + \ldots + \lambda_m p_{mm}^2 - \lambda_m n_m] S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots +$$
$$+ [\lambda_1 p_{m1}^m + \lambda_2 p_{m2}^m + \ldots + \lambda_m p_{mm}^m - \lambda_m n_m] S_m(\hat{\tau}_s)$$

$$= - [\lambda_m n_m - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell p_{m\ell}^1] S_1(\hat{\tau}_s) -$$
$$- [\lambda_m n_m - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell p_{m\ell}^2] S_2(\hat{\tau}_s) - \ldots -$$
$$- [\lambda_m n_m - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell p_{m\ell}^m] S_m(\hat{\tau}_s) . \qquad [3.4.1.m]$$

Considerando-se a expressão [3.4.1.m] em [3.4.1.ℓ], segue-se que:

$$kS_m(Q_s) = [\lambda_m n_m - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell p_{m\ell}^1] S_1(\hat{\tau}_s) +$$
$$+ [\lambda_m n_m - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell p_{m\ell}^2] S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots +$$
$$+ [r(k-1) + \lambda_m n_m - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell p_{m\ell}^m] S_m(\hat{\tau}_s) . \qquad [3.4.1.n]$$

Considerando-se as expressões [3.4.1.h], [3.4.1.k] e [3.4.1.n], pode-se escrever que:

$$kS_i(Q_s) = a_{i1} S_1(\hat{\tau}_s) + a_{i2} S_2(\hat{\tau}_s) + \ldots + a_{im} S_m(\hat{\tau}_s) \qquad [3.4.1.o]$$

onde:

$$a_{ij} = \lambda_i n_i - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell \, p_{i\ell}^{j} \quad , \quad i \neq j \quad e \quad i,j=1,2,\ldots,m$$

[3.4.1.p]

$$a_{ii} = r(k-1) + \lambda_i n_i - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell \, p_{i\ell}^{j} \quad , \quad i=j$$

De [3.4.1.o], segue-se então que:

$$\begin{bmatrix} kS_1(Q_s) \\ kS_2(Q_s) \\ \cdots \\ kS_m(Q_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1(\hat{\tau}_s) \\ S_2(\hat{\tau}_s) \\ \cdots \\ S_m(\hat{\tau}_s) \end{bmatrix} . \qquad [3.4.1.q]$$

Dividindo-se [3.4.1.q] por k, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} S_1(Q_s) \\ S_2(Q_s) \\ \cdots \\ S_m(Q_s) \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1(\hat{\tau}_s) \\ S_2(\hat{\tau}_s) \\ \cdots \\ S_m(\hat{\tau}_s) \end{bmatrix} . \qquad [3.4.1.r]$$

Conforme CHAKRABARTI (1962), se U é uma matriz formada pelos elementos $\frac{1}{k}(a_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots,m)$, com inversa U^{-1}, de elementos f_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,m)$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} S_1(\hat{\tau}_s) \\ S_2(\hat{\tau}_s) \\ \cdots \\ S_m(\hat{\tau}_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1(Q_s) \\ S_2(Q_s) \\ \cdots \\ S_m(Q_s) \end{bmatrix} \qquad [3.4.1.s]$$

ou seja,

$$S_i(\hat{\tau}_s) = f_{i1} \, S_1(Q_s) + f_{i2} \, S_2(Q_s) + \ldots + f_{im} \, S_m(Q_s) \quad . \qquad [3.4.1.t]$$

De [3.4.1.a] sabe-se que:

$$r(k-1)\,\hat{\tau}_s = kQ_s + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, S_i(\hat{\tau}_s) \quad .$$

Substituindo-se $S_i(\hat{\tau}_s)$ pela expressão encontrada em [3.4.1.t], segue-se então que:

$$r(k-1)\,\hat{\tau}_s = kQ_s + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, f_{i1}\, S_1(Q_s) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, f_{i2}\, S_2(Q_s) + \ldots + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, f_{im}\, S_m(Q_s) \;,$$

ou seja,

$$r(k-1)\,\hat{\tau}_s = kQ_s + \sum_{j=1}^{m} S_j(Q_s) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_{ij} \,. \qquad [3.4.1.u]$$

De [3.4.1.u] tem-se que:

$$\hat{\tau}_s = \frac{k}{r(k-1)}\, Q_s + \frac{1}{r(k-1)} \left[\sum_{j=1}^{m} S_j(Q_s) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_{ij} \right] . \qquad [3.4.1.v]$$

De [3.4.1.v] pode-se fazer uma generalização para a forma matricial $\underset{\sim}{\hat{\tau}} = M^{-1}\underset{\sim}{Q}$, onde $M^{-1} = \{m^*_{jj'}\}$, sendo:

$$m^*_{jj'} = \begin{cases} k/r(k-1) & , \quad \text{se } j=j' \\ \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell f_{\ell i} / r(k-1) & , \quad \text{se } j \neq j' \quad . \end{cases} \qquad [3.4.1.w]$$

3.4.2 - Solução do sistema de equações normais reduzidas para duas classes de associados

Os PBIB com duas classes de associados, os PBIB(2), são de particular importância, visto que são os mais utilizados na prática, conforme relatam BOSE e NAIR (1939).

Para m=2, de [3.4.1.u] segue-se que:

$$r(k-1)\,\hat{\tau}_s = kQ_s + (\lambda_1 f_{11} + \lambda_2 f_{21})\, S_1(Q_s) + (\lambda_1 f_{12} + \lambda_2 f_{22})\, S_2(Q_s) \quad . \qquad [3.4.2.a]$$

Quando $n_1 < n_2$, é preferível eliminar $S_2(Q_s)$. Considerando a restrição $Q_s + S_1(Q_s) + S_2(Q_s) = 0$, então tem-se:

$$S_2(Q_s) = -\,Q_s - S_1(Q_s) \quad . \qquad [3.4.2.b]$$

Substituindo [3.4.2.b] em [3.4.2.a], obtém-se:

$$r(k-1)\,\hat{\tau}_s = [k - (\lambda_1 f_{12} + \lambda_2 f_{22})]\, Q_s + [(\lambda_1 f_{11} + \lambda_2 f_{21}) - (\lambda_1 f_{12} + \lambda_2 f_{22})]\, S_1(Q_s) . \qquad [3.4.2.c]$$

Fazendo:

$$\lambda_1 f_{11} + \lambda_2 f_{21} = C_1 \quad , \qquad \lambda_1 f_{12} + \lambda_2 f_{22} = C_2 \qquad [3.4.2.d]$$

de [3.4.2.c] segue-se que:

$$\hat{\tau}_s = \frac{k - C_2}{r(k-1)}\, Q_s + \frac{(C_1 - C_2)}{r(k-1)}\, S_1(Q_s) \quad . \qquad [3.4.2.e]$$

Se $n_2 < n_1$, é preferível eliminar $S_1(Q_s)$ e então, considerando a restrição $Q_s + S_1(Q_s) + S_2(Q_s) = 0$, tem-se:

$$S_1(Q_s) = -\,Q_s - S_2(Q_s) \quad . \qquad [3.4.2.f]$$

Substituindo [3.4.2.f] em 3.4.2.a], obtém-se:

$$r(k-1)\,\hat{\tau}_s = [k - (\lambda_1 f_{11} + \lambda_2 f_{21})]\, Q_s + [(\lambda_1 f_{12} + \lambda_2 f_{22}) - (\lambda_1 f_{11} + \lambda_2 f_{21})]\, S_2(Q_s) . \qquad [3.4.2.g]$$

Usando-se [3.4.2.d], de [3.4.2.g] segue-se que:

$$\hat{\tau}_s = \frac{k - C_1}{r(k-1)} Q_s + \frac{(C_2 - C_1)}{r(k-1)} S_2(Q_s) \quad . \qquad [3.4.2.h]$$

Para verificar o que representam os elementos f_{ij} (i,j = =1,2), deve-se considerar a matriz U^{-1}, sendo

$$U = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad ,$$

onde:

$$\begin{aligned} a_{11} &= r(k-1) + \lambda_1 n_1 - \lambda_1 p_{11}^1 - \lambda_2 p_{12}^1 \\ &= r(k-1) + \lambda_1 (n_1 - p_{11}^1) - \lambda_2 p_{12}^1 \\ &= r(k-1) + \lambda_1 (p_{12}^1 + 1) - \lambda_2 p_{12}^1 \\ &= r(k-1) + (\lambda_1 - \lambda_2)\, p_{12}^1 + \lambda_1 \end{aligned} \qquad [3.4.2.i]$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= \lambda_1 n_1 - \lambda_1 p_{11}^2 - \lambda_2 p_{12}^2 \\ &= \lambda_1 n_1 - \lambda_1 (n_1 - p_{12}^2) - \lambda_2 p_{12}^2 \\ &= \lambda_1 n_1 - \lambda_1 n_1 + \lambda_1 p_{12}^2 - \lambda_2 p_{12}^2 \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)\, p_{12}^2 \end{aligned} \qquad [3.4.2.j]$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= \lambda_2 n_2 - \lambda_1 p_{21}^1 - \lambda_2 p_{22}^1 \\ &= \lambda_2 n_2 - \lambda_1 p_{21}^1 - \lambda_2 (n_2 - p_{21}^1) \\ &= \lambda_2 n_2 - \lambda_1 p_{21}^1 - \lambda_2 n_2 + \lambda_2 p_{21}^1 \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)\, p_{21}^1 \end{aligned} \qquad [3.4.2.k]$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= r(k-1) + \lambda_2 n_2 - \lambda_1 p_{21}^2 - \lambda_2 p_{22}^2 \\ &= r(k-1) + \lambda_2 (n_2 - p_{22}^2) - \lambda_1 p_{21}^2 \\ &= r(k-1) + \lambda_2 (1 + p_{21}^2) - \lambda_1 p_{21}^2 \\ &= r(k-1) + (\lambda_2 - \lambda_1)\, p_{21}^2 + \lambda_2 \quad . \end{aligned} \qquad [3.4.2.\ell]$$

A matriz U^{-1} com elementos f_{ij} $(i,j=1,2)$ é:

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} .$$

Fazendo $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ tem-se que:

$$U^{-1} = \frac{k}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} .$$

Logo,

$$f_{11} = ka_{22}/\Delta \;, \qquad f_{21} = -ka_{21}/\Delta$$
$$f_{12} = -ka_{12}/\Delta \;, \qquad f_{22} = ka_{11}/\Delta \qquad [3.4.2.m]$$

De [3.4.2.d] sabe-se que:

$$C_1 = \lambda_1 f_{11} + \lambda_2 f_{21} \quad \text{e}$$
$$C_2 = \lambda_1 f_{12} + \lambda_2 f_{22} \quad .$$

Substituindo [3.4.2.m] em [3.4.2.d] segue-se que:

$$C_1 = \frac{\lambda_1 ka_{22} - \lambda_2 ka_{21}}{\Delta}$$

$$= \frac{\lambda_1 k(a^*_{22} + \lambda_2 n_2) - \lambda_2 k(a^*_{21} + \lambda_2 n_2)}{[(a^*_{11} + \lambda_1 n_1)(a^*_{22} + \lambda_2 n_2)] - [(a^*_{12} + \lambda_1 n_1)(a^*_{21} + \lambda_2 n_2)]} = C^*_1$$

e

$$C_2 = \frac{-\lambda_1 ka_{12} + \lambda_2 ka_{11}}{\Delta}$$

$$= \frac{\lambda_2 k(a^*_{11} + \lambda_1 n_1) - \lambda_1 k(a^*_{12} + \lambda_1 n_1)}{[(a^*_{11} + \lambda_1 n_1)(a^*_{22} + \lambda_2 n_2)] - [(a^*_{12} + \lambda_1 n_1)(a^*_{21} + \lambda_2 n_2]} = C^*_2$$

onde a^*_{11}, a^*_{12}, a^*_{21}, a^*_{22}, C^*_1 e C^*_2 são definidos conforme BOSE e SHIMAMOTO (1952).

De [3.4.2.e] e [3.4.2.h], pode-se fazer uma generalização para a forma matricial $\hat{\underset{\sim}{\tau}} = M^{-1}\underset{\sim}{Q}$, onde $M^{-1} = \{m^*_{jj'}\}$, sendo:

$$m^*_{jj'} = \begin{cases} (k-C_2)/[r(k-1)] & , \text{ se } j=j'; \\ (C_1-C_2)/[r(k-1)], & \text{se } j\neq j' \text{ e são primeiros associados;} \\ 0 & , \text{ se } j\neq j' \text{ e são segundos associados ;} \end{cases} \qquad [3.4.2.n]$$

para a solução [3.4.2.e], e

$$m^*_{jj'} = \begin{cases} (k-C_1)/[r(k-1)] & , \text{ se } j=j'; \\ (C_2-C_1)/[r(k-1)], & \text{se } j\neq j' \text{ e são segundos associados;} \\ 0 & , \text{ se } j\neq j' \text{ e são primeiros associados;} \end{cases} \qquad [3.4.2.o]$$

para a solução [3.4.2.h].

3.4.3 Solução do sistema de equações normais reduzidas usando inversas generalizadas

No caso de PBIB, r[C] = v-1, então

$$\underset{\sim}{e}' = [v^{-1/2} \quad v^{-1/2} \quad \dots \quad v^{-1/2}]$$

é o auto-vetor correspondente ao auto-valor nulo de C. Além disso, uma solução do sistema $C\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{Q}$ é dada por $\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \Omega\underset{\sim}{Q}$, onde Ω é uma inversa generalizada de C. No presente caso tem-se que:

$$\Omega = [\Gamma_1 \quad \Lambda^{-1} \quad \Gamma_1'] \quad , \qquad [3.4.3.a]$$

onde $\Gamma = [\underset{\sim}{e}' \mid \Gamma_1]$ é uma matriz ortogonal que transforma C numa matriz diagonal; e

$$\Lambda = \text{Diagonal } [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{v-1}] \qquad [3.4.3.b]$$

é a matriz dos auto-valores não nulos de C.

Assim,

$$\Gamma'C\Gamma = \text{Diagonal } [\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{v-1}, 0] \quad . \qquad [3.4.3.c]$$

Pré-multiplicando por Γ e pós-multiplicando por Γ' ambos os membros de [3.4.3.c] tem-se que:

$$\Gamma\Gamma'C\Gamma\,\Gamma' = \Gamma \text{ Diagonal}[\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{v-1}, 0]\Gamma' \quad . \qquad [3.4.3.d]$$

Desde que Γ é uma matriz ortogonal, $\Gamma\Gamma' = \Gamma'\Gamma = I$, e então, de [3.4.3.d] segue-se que a decomposição espectral de C é dada por:

$$C = \Gamma \text{ Diagonal } [\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{v-1}, 0]\Gamma' = \Gamma_1\Lambda\Gamma_1'$$

$$= \sum_{j=1}^{v-1} \theta_j \, \underset{\sim}{u}_j \underset{\sim}{u}_j' \qquad [3.4.3.e]$$

onde $\underset{\sim}{u}_j$ é um auto-vetor ortonormal associado ao auto-valor não nulo θ_j, $j=1,2,\ldots, v-1$, de C.

De [3.4.3,a] segue-se que:

$$\Omega = \Gamma_1\Lambda^{-1}\Gamma_1' = \sum_{j=1}^{v-1} \frac{1}{\theta_j} \underset{\sim}{u}_j \underset{\sim}{u}_j' \, . \qquad [3.4.3.f]$$

Sabe-se, por 2.3.4, que os auto-valores de C e de NN' são relacionados, resultando $\theta = (rk-\psi)/k$, onde ψ é auto-valor de NN' e os auto-valores têm a mesma multiplicidade. Sabe-se também que para PBIB com $\underline{m}$ classes de associados tem-se $\underline{m}$ auto-valores distintos de NN' e, consequentemente, de C. Além disso, se $\underset{\sim}{x}$ é um auto-vetor de NN' associado ao auto-valor ψ, então $\underset{\sim}{x}$ também é um auto-vetor de C associado ao auto-valor θ.

Desta forma, para se determinar os auto-vetores $\underset{\sim}{x}_h$ associados a ψ_h e, consequentemente, a θ_h, $h=1,2,\ldots,m$, solucionam-se, respectivamente, os sistemas lineares homogêneos:

$$(NN' - \psi_h I)\,\underset{\sim}{x}_h = \underset{\sim}{\phi} \qquad [3.4.3.g]$$

onde:

$$NN' = \begin{bmatrix} r & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots & \lambda_{1v} \\ \lambda_{12} & r & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{2v} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & r & \cdots & \lambda_{3v} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{1v} & \lambda_{2v} & \lambda_{3v} & \cdots & r \end{bmatrix} .$$

Normalizando-se os auto-vetores $\underset{\sim}{x}_h$, obtém-se os auto-vetores $\underset{\sim}{u}_h$, onde

$$\underset{\sim}{u}_h = \frac{1}{\|\underset{\sim}{x}_h\|}\,\underset{\sim}{x}_h \quad , \quad h=1,2,\ldots,m \qquad [3.4.3.h]$$

sendo $\|\underset{\sim}{x}_h\|$ a norma do vetor $\underset{\sim}{x}_h$.

Para completar o conjunto de v-1 auto-vetores $\underset{\sim}{u}_h$ ortonormais, escolhem-se α_h vetores ortogonais $\underset{\sim}{x}_h$ associados a cada θ_h, h=1,2,.. ...,m, ou seja, α_h vetores ortogonais de cada solução dada por [3.4.3.g].

De [3.4.3.e] tem-se que

$$C = \sum_{j=1}^{v-1} \theta_j \underset{\sim}{u}_j \underset{\sim}{u}_j' = \theta_1 \underset{\sim}{u}_1 \underset{\sim}{u}_1' + \theta_2 \underset{\sim}{u}_2 \underset{\sim}{u}_2' + \ldots + \theta_{v-1} \underset{\sim}{u}_{v-1} \underset{\sim}{u}_{v-1}' = C_1 + C_2 + \ldots + C_{v-1}$$

e $C_j C_{j'} = \phi$ e $C_{j'} C_j = \phi$, $\forall j \neq j'$, $j, j' = 1,2,\ldots,v-1$; desde que os auto-vetores $\underset{\sim}{u}_j$ são ortonormais.

Sabe-se conforme GRAYBILL (1969), que para uma matriz qualquer A, se

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_p$$

e se $A_i A_{i'} = \phi$ e $A_{i'} A_i = \phi$ $(i,i'=1,2,\ldots,p;\ i \neq i')$, então a inversa de Moore-Penrose A^+ de A é dada por

$$A^+ = A_1^+ + A_2^+ + \ldots + A_p^+ \quad .$$

No presente contexto, dada a estrutura de $C_1, C_2, \ldots, C_{v-1}$ tem-se:

$$C_j^+ = \frac{1}{\theta_j} C_j \qquad (j=1,2,\ldots,v-1) \ ,$$

e então,

$$C^+ = C_1^+ + C_2^+ + \ldots + C_{v-1}^+ = \sum_{j=1}^{v-1} \frac{1}{\theta_j} \underset{\sim}{u}_j \underset{\sim}{u}_j' = \Omega \ . \qquad [3.4.3.i]$$

Logo, uma inversa generalizada Ω de C, obtida conforme [3.4.3.f] é, de acordo com [3.4.3.i], uma inversa de Moore-Penrose de C.

Para PBIB(2), têm-se somente dois valores distintos para os auto-valores não nulos de C, ou seja, θ_1 e θ_2, com multiplicidades respectivas, α_1 e α_2. Desta forma, pode-se considerar

$$\Omega = \left[\frac{1}{\theta_1} \Omega_1 + \frac{1}{\theta_2} \Omega_2 \right] \quad , \qquad [3.4.3.j]$$

onde Ω_1 e Ω_2 são matrizes formadas a partir dos auto-vetores ortonormais, associados a θ_1 e θ_2, respectivamente.

Para PBIB(2) do tipo Grupo Divisível (GD), conforme 2.3.5.1, tem-se

$$\psi_1 = rk - \lambda_2 v \qquad e \qquad \psi_2 = r - \lambda_1 \quad ,$$

com multiplicidades $\alpha_1 = s-1$ e $\alpha_2 = s(n-1)$, respectivamente.

Assim, tem-se

$$\theta_1 = (rk-\psi_1)/k = (rk-rk+\lambda_2 v)/k = \lambda_2 v/k \qquad [3.4.3.k]$$

com multiplicidade α_1, e

$$\theta_2 = (rk-\psi_2)/k = (rk-r+\lambda_1)/k = [r(k-1)+\lambda_1]/k \qquad [3.4.3.\ell]$$

com multiplicidade α_2.

Então, de [3.4.3.j] segue-se que:

$$\Omega = \left[\frac{k}{\lambda_2 v}\,\Omega_1 + \frac{k}{r(k-1)+\lambda_1}\,\Omega_2 \right] \qquad [3.4.3.m]$$

Uma solução de [3.4.3.g], no caso de GD, é dada por:

$$\underset{\sim}{x}_1 = \left[\begin{array}{c} -d_2 - d_3 - \dots - d_s \\ -d_2 - d_3 - \dots - d_s \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -d_2 - d_3 - \dots - d_s \\ \hdashline d_2 \\ d_2 \\ \dots \\ d_2 \\ \hdashline \dots \\ \hdashline d_s \\ d_s \\ \dots \\ d_s \end{array} \right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{GRUPO 1} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{GRUPO 2} \\ \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{GRUPO s} \end{array} \qquad [3.4.3.n]$$

e

$$\underset{\sim}{x}_2 = \begin{bmatrix} -a_2 - a_3 - \ldots - a_n \\ a_2 \\ a_3 \\ \ldots \\ a_n \\ \hdashline -b_2 - b_3 - \ldots - b_n \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_n \\ \hdashline \ldots \\ \hdashline -s_2 - s_3 - \ldots - s_n \\ s_2 \\ s_3 \\ \ldots \\ s_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{GRUPO 1} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{GRUPO 2} \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{GRUPO s} \end{matrix} \quad . \qquad [3.4.3.o]$$

onde d_i $(i=2,\ldots,s)$ e a_j, $b_j,\ldots,$ s_j $(j=2,\ldots,n)$ assumem valores quaisquer.

Normalizando os vetores $\underset{\sim}{x}_1$ e $\underset{\sim}{x}_2$, obtém-se:

$$\underset{\sim}{u}_1 = \frac{1}{\| \underset{\sim}{x}_1 \|} \underset{\sim}{x}_1 \qquad \text{e} \qquad \underset{\sim}{u}_2 = \frac{1}{\| \underset{\sim}{x}_2 \|} \underset{\sim}{x}_2 \quad . \qquad [3.4.3.p]$$

Considerando-se (s-1) auto-vetores ortonormais do tipo $\underset{\sim}{u}_1$ e s(n-1) do tipo $\underset{\sim}{u}_2$, tem-se que as matrizes Ω_1 e Ω_2 de [3.4.3.m], de dimensão sn, são dadas por:

$$\Omega_1 = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & -1/v \;\ldots\; -1/v & \ldots & -1/v \;\ldots\; -1/v \\ \hdashline -1/v \;\ldots\; -1/v & A_1 & \ldots & -1/v \;\ldots\; -1/v \\ \hdashline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hdashline -1/v \;\ldots\; -1/v & -1/v \;\ldots\; -1/v & \ldots & A_1 \end{array}\right] \qquad [3.4.3.q]$$

onde,

$$\underset{n\ n}{A_1} = \begin{bmatrix} (s-1)/v & (s-1)/v & \dots & (s-1)/v \\ (s-1)/v & (s-1)/v & \dots & (s-1)/v \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (s-1)/v & (s-1)/v & \dots & (s-1)/v \end{bmatrix} = \frac{s-1}{v} J_{(n)}$$

e

$$\Omega_2 = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_2 & \phi & \dots & \phi \\ \hline \phi & A_2 & \dots & \phi \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \phi & \phi & \dots & A_2 \end{array}\right] \qquad [3.4.3.r]$$

onde,

$$\underset{n\ n}{A_2} = \begin{bmatrix} (n-1)/n & -1/n & \dots & -1/n \\ -1/n & (n-1)/n & \dots & -1/n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1/n & -1/n & \dots & (n-1)/n \end{bmatrix}$$

Ou seja, Ω_1 e composta pelas matrizes quadradas A_1 ao longo da diagonal principal e pelos elementos $-1/v$ nas outras posições, enquanto que Ω_2 é constituída pelas matrizes quadradas A_2 na diagonal, e por zeros nas outras posições.

Alternativamente, Ω_1 e Ω_2 podem ser expressas por:

$$\Omega_1 = [I_{(s)} \otimes \frac{s}{v} J_{(n)}] - \frac{1}{v} J_{(v)} \qquad [3.4.3.s]$$

e

$$\Omega_2 = I_{(s)} \otimes A_{2_{(n)}} \qquad [3.4.3.t]$$

onde $\otimes$ representa o produto de Kronecker, e $v = sn$.

De [3.4.3.m], [3.4.3.q] e [3.4.3.r], segue-se que:

$$\Omega = \{\Omega_{jj'}\} \qquad ,$$

onde:

$$\Omega_{jj'} = \begin{cases} \dfrac{k(s-1)}{\lambda_2 v^2} + \dfrac{k(n-1)}{n[r(k-1)+\lambda_1]} & , \text{ se } j=j' \\[2ex] \dfrac{k(s-1)}{\lambda_2 v^2} - \dfrac{k}{n[r(k-1)+\lambda_1]} & , \text{ se } j\neq j'\text{, e } j \text{ e } j' \text{ são tratamentos do mesmo grupo, isto é, primeiros associados} \\[2ex] -\dfrac{k}{\lambda_2 v^2} & , \text{ se } j \text{ e } j' \text{ são tratamentos de grupos diferentes, isto é, segundos associados} \end{cases}$$

[3.4.3.u]

Para ilustrar a estrutura apresentada, seja o seguinte PBIB(2):

REPETIÇÃO I

BLOCO 1	(1) 19	(2) 17
BLOCO 2	(3) 21	(4) 19

REPETIÇÃO II

BLOCO 3	(1) 20	(3) 22
BLOCO 4	(2) 19	(4) 23

onde, v=4, b=4, r=2, k=2, e os valores entre parênteses representam os tratamentos e os demais as observações de uma variável dependente y qualquer.

O presente exemplo trata-se de um reticulado quadrado do tipo simples que, conforme 2.3.7.1, corresponde a um PBIB(2) do tipo L_i. Como i=s=2, o presente caso, conforme 2.3.5.3, corresponde a um PBIB(2) do tipo GD. Diante disso, considerando os grupos de tratamentos 1 4 e 2 3, isto é, PBIB(2) do tipo GD, tem-se que s=2, n=2, λ_1=0 e λ_2=1. Se fosse considerado PBIB(2) do tipo L_i, ter-se-ia λ_1=1 e λ_2=0, sendo 2 e 3 os tratamentos primeiros associados do tratamento 1 e o tratamento 4 segundo associado.

Desta forma, a inversa de Moore-Penrose, conforme[3.4.3.u] é dada por:

$$\Omega_{jj'} = \begin{cases} \dfrac{k(s-1)}{\lambda_2 v^2} + \dfrac{k(n-1)}{n[r(k-1)+\lambda_1]} = \dfrac{2(2-1)}{1(4^2)} + \dfrac{2(2-1)}{2[2(2-1)+0]} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{8} \\ \qquad \text{para } j=j' ; \\ \dfrac{k(s-1)}{\lambda_2 v^2} - \dfrac{k}{n[r(k-1)+\lambda_1]} = \dfrac{2(2-1)}{1(4^2)} - \dfrac{2}{2[2(2-1)+0]} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-3}{8} \\ \text{para } j \neq j' ; \ j \text{ e } j' \text{ são primeiros associados;} \\ -\dfrac{k}{\lambda_2 v^2} = -\dfrac{2}{1(4^2)} = -\dfrac{2}{16} = -\dfrac{1}{8} \\ \text{para } j \neq j' ; \ j \text{ e } j' \text{ são segundos associados.} \end{cases}$$

Assim,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 5/8 & -3/8 & -1/8 & -1/8 \\ -3/8 & 5/8 & -1/8 & -1/8 \\ -1/8 & -1/8 & 5/8 & -3/8 \\ -1/8 & -1/8 & -3/8 & 5/8 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que:

$$\underset{\sim}{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_4 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{T} - \frac{1}{k} \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 39 \\ 42 \\ 36 \\ 43 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 39 \\ 41 \\ 39 \\ 41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Então, a solução do sistema $C\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{Q}$ é dada por:

$$\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \begin{bmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_4 \\ \hat{\tau}_2 \\ \hat{\tau}_3 \end{bmatrix} = \Omega \underset{\sim}{Q} = \begin{bmatrix} 5/8 & -3/8 & -1/8 & -1/8 \\ -3/8 & 5/8 & -1/8 & -1/8 \\ -1/8 & -1/8 & 5/8 & -3/8 \\ -1/8 & -1/8 & -3/8 & 5/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 3/4 \\ -11/4 \\ 9/4 \end{bmatrix}.$$

Para o caso do Grupo Divisível, uma inversa generalizada Ω^*, conforme JOHN (1980), é composta de matrizes quadradas Ω_o ao longo da diagonal principal, e por zeros fora dela, onde:

$$\Omega_o = \frac{k}{r(k-1)+\lambda_1} \left[I - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2 v} J \right] . \qquad [3.4.3.v]$$

Assim, para o exemplo considerado, tem-se:

$$\Omega_o = \frac{2}{2(2-1)+0} \left[I - \frac{(1-0)}{1(4)} J \right] = I - \frac{1}{4} J = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\Omega^* = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \begin{bmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_4 \\ \hat{\tau}_2 \\ \hat{\tau}_3 \end{bmatrix} = \Omega^* \underset{\sim}{Q} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 3/4 \\ -11/4 \\ 9/4 \end{bmatrix}$$

No caso de BIB, tem-se que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, s=1 e n=v. Assim, de [3.4.3.u] obtém-se que $\Omega = \{\Omega_{jj'}\}$, onde:

$$\Omega_{jj'} = \begin{cases} \dfrac{k(v-1)}{v[r(k-1)+\lambda]} = \dfrac{k(v-1)}{v[\lambda v-\lambda+\lambda]} = \dfrac{k(v-1)}{\lambda v^2} & \text{, para } j=j' \\[2ex] -\dfrac{k}{v[r(k-1)+\lambda]} = -\dfrac{k}{\lambda v^2} & \text{, para } j\neq j' \end{cases} \qquad [3.4.3.w]$$

ou seja:

$$\Omega = C^{+} = \frac{k}{\lambda v^2}\begin{bmatrix} v-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & v-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & v-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & v-1 \end{bmatrix},$$

que é a inversa de Moore-Penrose de C no caso de BIB, dada por IEMMA (1985, 1987).

3.5 - Variância da Estimativa de um Contraste entre Efeitos de Tratamentos

Conforme 2.1.3, a variância da estimativa de um contraste entre efeitos de tratamentos $\underset{\sim}{\ell}'\hat{\tau}$ é dada por

$$V[\underset{\sim}{\ell}'\hat{\tau}] = \underset{\sim}{\ell}'\Omega\underset{\sim}{\ell}\sigma^2 \quad . \qquad [3.5.a]$$

No caso de GD para contrastes elementares de tratamentos primeiros associados, de [3.5.a] e [3.4.3.u] segue-se que:

$$V[\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_{h'}] = 2\left\{\frac{k(s-1)}{\lambda_2 v^2} + \frac{k(n-1)}{n[r(k-1)+\lambda_1]} - \frac{k(s-1)}{\lambda_2 v^2} + \frac{k}{n[r(k-1)+\lambda_1]}\right\}\sigma^2$$

$$= 2k\left\{\frac{n-1+1}{n[r(k-1)+\lambda_1]}\right\}\sigma^2 = \frac{2k\sigma^2}{r(k-1)+\lambda_1} = V_1 \ . \qquad [3.5.b]$$

A expressão [3.5.b] corresponde àquela apresentada por JOHN (1980), considerando a inversa generalizada simétrica, conforme estrutura dada em [3.4.3.v]. Essa equivalência procede, pois trata-se de variância de funções lineares paramétricas estimáveis.

Para GD e contrastes elementares de tratamentos segundos associados, de [3.5.a] e [3.4.3.u] tem-se:

$$V[\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_{h'}] = 2k\sigma^2 \left\{ \frac{s-1}{\lambda_2 v^2} + \frac{n-1}{n[r(k-1)+\lambda_1]} + \frac{1}{\lambda_2 v^2} \right\}$$

$$= 2k\sigma^2 \left\{ \frac{n-1}{n[r(k-1)+\lambda_1]} + \frac{s}{\lambda_2 v^2} \right\}$$

$$= 2k\sigma^2 \left\{ \frac{n-1}{n[r(k-1)+\lambda_1]} + \frac{1}{\lambda_2 vn} \right\} . \qquad [3.5.c]$$

Considerando-se que, para GD, $r(k-1) = (n-1)\lambda_1 + n(s-1)\lambda_2$, de [3.5.c], com alguma simplificação obtém-se:

$$V[\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_{h'}] = \frac{2k\sigma^2}{r(k-1)+\lambda_1} \left[1 - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2 v} \right] = V_2 \quad , \qquad [3.5.d]$$

que é a mesma expressão apresentada por JOHN (1980).

Para qualquer tratamento h, existem v-1 estimativas de contrastes do tipo $\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_{h'}$ ($h \neq h'$; $h,h'=1,2,\ldots,v$), sendo que n_1 desses contrastes são estimados com variância V_1, e n_2 com variância V_2. Desta forma, a variância média é dada por:

$$\bar{V}[\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_{h'}] = \frac{n_1 V_1 + n_2 V_2}{v-1}$$

$$= \frac{1}{v-1} \left\{ \frac{n_1\, 2k\sigma^2}{r(k-1)+\lambda_1} + \frac{n_2\, 2k\sigma^2}{r(k-1)+\lambda_1} \left[1 - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2 v} \right] \right\}$$

$$= \frac{2k\sigma^2}{r(k-1)+\lambda_1} \left\{ \frac{1}{(v-1)} \left[(v-1) - \frac{n_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2 v} \right] \right\}$$

$$\bar{V}[\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_{h'}] = \frac{2k\sigma^2}{r(k-1)+\lambda_1}\left\{1 - \frac{n_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2 v(v-1)}\right\} \quad . \qquad [3.5.e]$$

Para o exemplo considerado tem-se:

$$V_1 = \frac{2k\sigma^2}{r(k-1)+\lambda_1} = \frac{2(2)}{2(2-1)+0}\,\sigma^2 = \frac{4}{2}\,\sigma^2 = 2\sigma^2 \ ;$$

$$V_2 = \frac{2k\sigma^2}{r(k-1)+\lambda_1}\left[1 - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2 v}\right] = 2\sigma^2\left[1 - \frac{(1-0)}{1(4)}\right]$$

$$= 2\sigma^2[1 - 1/4] = 2(3/4)\,\sigma^2 = \frac{3}{2}\,\sigma^2 \ ;$$

$$\bar{V} = \frac{2k\sigma^2}{r(k-1)+\lambda_1}\left[1 - \frac{n_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2 v(v-1)}\right]$$

$$= 2\sigma^2\left[1 - \frac{2(1-0)}{1(4)(4-1)}\right] = 2\sigma^2\left[1 - \frac{2}{12}\right] = 2\sigma^2\,[5/6] = \frac{5}{3}\,\sigma^2 \ .$$

Expressões gerais para a variância da estimativa de um contraste entre efeitos de tratamentos para PBIB(2), segundo BOSE e NAIR (1939), RAO (1947) e BOSE e SHIMAMOTO (1952), e para PBIB(m), conforme CHAKRABARTI (1962), encontram-se em 2.3.10.

3.6 - Eficiência

A eficiência do PBIB em relação a blocos casualizados é dada por:

$$E = \frac{V_r}{V} \quad , \qquad [3.6.a]$$

onde $V_r = \frac{2\sigma^2}{r}$ é a variância da estimativa de contrastes elementares entre tratamentos, em blocos casualizados; e

V representa o mesmo em PBIB.

No presente contexto, tem-se:

$$E = \frac{V_r}{V_i} = \frac{2\sigma^2/r}{V_i} = \frac{2\sigma^2}{rV_i} \quad . \qquad [3.6.b]$$

De [3.6.b] segue-se que:

$$E_1 = \frac{2\sigma^2}{rV_1} \quad e \quad E_2 = \frac{2\sigma^2}{rV_2} \qquad [3.6.c]$$

respectivamente, para primeiros e segundos associados.

A eficiência média é dada por:

$$\bar{\bar{E}} = \frac{2\sigma^2}{r\bar{\bar{V}}} \quad . \qquad [3.6.d]$$

Para o exemplo considerado, tem-se:

$$E_1 = \frac{2\sigma^2}{rV_1} = \frac{2\sigma^2}{(2)2\sigma^2} = \frac{1}{2} \quad ;$$

$$E_2 = \frac{2\sigma^2}{rV_2} = \frac{2\sigma^2}{(2)\ \frac{3}{2}\ \sigma^2} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3} \quad ;$$

$$\bar{\bar{E}} = \frac{2\sigma^2}{r\bar{\bar{V}}} = \frac{2\sigma^2}{(2)\ \frac{5}{3}\ \sigma^2} = \frac{1}{5/3} = \frac{3}{5} \quad .$$

Como $\lambda_1 < \lambda_2$, tem-se $E_1 < E_2$. Para o plano experimental em consideração, os tratamentos cujas comparações são de maior interesse deveriam ser segundos associados.

3.7 - Análise de Variância e Teste de Tratamentos

3.7.1 - Somas de quadrados

Para o modelo linear $\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\Theta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$, sabe-se que a soma de quadrados do resíduo (SQR) é dada por:

$$SQR = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{\Theta}}'X'\underset{\sim}{y} \quad , \qquad [3.7.1.a]$$

onde, $\hat{\underset{\sim}{\Theta}}'X'\underset{\sim}{y}$, definida como a soma de quadrados de parâmetros (SQP), é:

$$SQP = [\hat{\mu}, \hat{\underset{\sim}{\tau}}', \hat{\underset{\sim}{\beta}}'] \begin{bmatrix} G \\ \underset{\sim}{T} \\ \underset{\sim}{B} \end{bmatrix} = \hat{\mu}G + \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{T} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}'\underset{\sim}{B} \ .$$

De [3.3.c] tem-se que $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = K^{-1}(\underset{\sim}{B} - N'\hat{\underset{\sim}{\tau}} - K\underset{\sim}{1}\hat{\mu})$, logo:

$$\begin{aligned} SQP &= \hat{\mu}G + \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{T} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}'\underset{\sim}{B} \\ &= \hat{\mu}G + \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{T} + (\underset{\sim}{B} - N'\hat{\underset{\sim}{\tau}} - K\underset{\sim}{1}\hat{\mu})'\,K^{-1}\underset{\sim}{B} \\ &= \hat{\mu}G + \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{B}'K^{-1}\underset{\sim}{B} - \hat{\underset{\sim}{\tau}}'NK^{-1}\underset{\sim}{B} - \hat{\mu}\underset{\sim}{1}'KK^{-1}\underset{\sim}{B} \\ &= \hat{\mu}G + \hat{\underset{\sim}{\tau}}'(\underset{\sim}{T} - NK^{-1}\underset{\sim}{B}) + \frac{1}{k}\,\underset{\sim}{B}'\underset{\sim}{B} - \hat{\mu}G \\ &= \hat{\mu}G + \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{Q} + [\frac{1}{k}\,\underset{\sim}{B}'\underset{\sim}{B} - \hat{\mu}G] \ . \qquad [3.7.1.b] \end{aligned}$$

Substituindo-se [3.7.1.b] em [3.7.1.a], tem-se:

$$SQR = (\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \hat{\mu}G) - \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{Q} - (\frac{1}{k}\,\underset{\sim}{B}'\underset{\sim}{B} - \hat{\mu}G) \qquad [3.7.1.c]$$

onde:

$\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \hat{\mu}G$ é a soma de quadrados total (SQTotal);

$\hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{Q}$ é a soma de quadrados de tratamentos ajustada para blocos [SQT(aj.)];

$\frac{1}{k}\,\underset{\sim}{B}'\underset{\sim}{B} - \hat{\mu}G$ é a soma de quadrados de blocos (SQB).

Considerando-se a forma usual de apresentação das somas de quadrados, tem-se que:

$$SQTotal = \sum_{i,j} y_{ij} - C_o ,$$

$$SQT(aj.) = \sum_{i=1}^{v} \hat{\tau}_i Q_i , \qquad [3.7.1.d]$$

$$SQB = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{b} B_j^2 - C_o ,$$

$$SQR = SQTotal - SQT(aj.) - SQB ,$$

onde $C_o = \hat{\mu}G$ é o fator de correção.

De [3.7.1.c] segue-se que

$$[\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \hat{\mu}G] = [\frac{1}{k} \underset{\sim}{B}'\underset{\sim}{B} - \hat{\mu}G] + \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{Q} + SQR ,$$

ou seja,

$$SQTotal = SQB + SQT(aj.) + SQR . \qquad [3.7.1.e]$$

Para o exemplo ilustrativo tem-se:

$$SQTotal = 26$$

$$SQBlocos = 12$$

$$\begin{aligned} SQT(aj.) = \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{Q} &= \sum_{i=1}^{v} \hat{\tau}_i Q_i \\ &= \hat{\tau}_1 Q_1 + \hat{\tau}_4 Q_4 + \hat{\tau}_2 Q_2 + \hat{\tau}_3 Q_3 \\ &= (-1/4)(0) + (3/4)(1) + (-11/4)(-3) + (9/4)(2) \\ &= 0 + 3/4 + 33/4 + 18/4 \\ &= 54/4 = 27/2 = 13,5 \end{aligned}$$

$$SQR = SQTotal - SQB - SQT(aj.) = 26 - 12 - 13,5 = 0,5.$$

3.7.2 - Esperanças matemáticas das somas de quadrados de interesse

3.7.2.1 - Esperança matemática da SQT(aj.)

Sabe-se que

$$SQT(aj.) = \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q}'\Omega\underset{\sim}{Q} \quad . \qquad [3.7.2.1.a]$$

Seja

$${}_{v}W_{1+v+b} = [{}_{v}\underset{\sim}{\phi}_{1} \quad I_{v} \quad {}_{v}{-NK^{-1}}_{b}] \qquad [3.7.2.1.b]$$

então,

$$WX'\underset{\sim}{y} = [\underset{\sim}{\phi} \quad I_{v} \quad -NK^{-1}] \begin{bmatrix} G \\ \underset{\sim}{T} \\ \underset{\sim}{B} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{T} - NK^{-1}\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{Q} \; . \qquad [3.7.2.1.c]$$

Substituindo [3.7.2.1.c] em [3.7.2.1.a] tem-se:

$$SQT(aj.) = \underset{\sim}{y}'XW'\Omega WX'\underset{\sim}{y} \quad . \qquad [3.7.2.1.d]$$

Considerando-se $XW'\Omega WX' = P_1$, então,

$$SQT(aj.) = \underset{\sim}{y}'P_1\underset{\sim}{y} \quad . \qquad [3.7.2.1.e]$$

Para se determinar a E[SQT(aj.)], utiliza-se o teorema enunciado a seguir.

Teorema 3.7.2.1.1 [SEARLE, 1971]

Seja $\underset{\sim}{y} \sim N(X\underset{\sim}{\Theta}, I\sigma^2)$, então:

$$E[\underset{\sim}{y}'A\underset{\sim}{y}] = \sigma^2 \; Tr[A] + \underset{\sim}{\Theta}X'AX\underset{\sim}{\Theta} \quad .$$

Assim, conforme teorema 3.7.2.1.1, obtém-se

$$E[SQT(aj.)] = E[\hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{Q}] = E[\underset{\sim}{y}'P_1\underset{\sim}{y}] = Tr[P_1]\sigma^2 + \underset{\sim}{\Theta}'X'P_1X\underset{\sim}{\Theta} \, . \qquad [3.7.2.1.f]$$

Mas $Tr[P_1] = Tr[XW'\Omega WX']$. Fazendo $A = XW'$ e $B = \Omega WX'$, então $Tr[P_1] = Tr[AB]$. Se as dimensões forem favoráveis, $Tr[AB] = Tr[BA]$.

Portanto,

$$Tr[P_1] = Tr[XW'\Omega WX'] = Tr[\Omega WX'XW'] \quad . \qquad [3.7.2.1.g]$$

Mas

$$WX'XW' = C \quad , \qquad [3.7.2.1.h]$$

então,

$$Tr[P_1] = Tr[\Omega C] \quad . \qquad [3.7.2.1.i]$$

Como Ω é inversa condicional de C, então $C\Omega C = C$, e ΩC é idempotente, pois $\Omega C \Omega C = \Omega C$. Logo,

$$Tr[P_1] = Tr[\Omega C] = \text{Característica } [\Omega C] = \text{Característica } [C]$$

$$= v-1 \quad . \qquad [3.7.2.1.j]$$

Além disso, tem-se que

$$\underset{\sim}{\Theta}'X'P_1X\underset{\sim}{\Theta} = \underset{\sim}{\Theta}'X'XW'\Omega WX'X\underset{\sim}{\Theta}$$

$$= {}_1\underset{\sim}{\Theta}'_{1+v+b} \begin{bmatrix} {}_1\underset{\sim}{\phi}_v \\ {}_vC_v \\ {}_b\phi_v \end{bmatrix}_{1+v+b \;\; v} {}_v\Omega_v \;\; {}_v\left[{}_v\underset{\sim}{\phi}_1 \quad {}_vC_v \quad {}_v\phi_b\right]_{1+v+b} \; {}_{1+v+b}\underset{\sim}{\Theta}_1$$

$$= \underset{\sim}{\tau}'C\underset{\sim}{\tau} \quad . \qquad [3.7.2.1.k]$$

Substituindo-se [3.7.2.1.j] e [3.7.2.1.k] em [3.7.2.1.f] obtém-se:

$$E[SQT(aj.)] = (v-1)\sigma^2 + \underset{\sim}{\tau}'C\underset{\sim}{\tau} \quad . \qquad [3.7.2.1.\ell]$$

De [3.7.2.1.ℓ] segue-se que:

$$E[QMT(aj.)] = \sigma^2 + \frac{\underset{\sim}{\tau}'C\underset{\sim}{\tau}}{v-1} \quad . \qquad [3.7.2.1.m]$$

3.7.2.2 - Esperança Matemática da SQR

Para a SQR, tem-se, como é usual,

$$SQR = \underset{\sim}{y}'(I-P)\underset{\sim}{y} \quad , \qquad [3.7.2.2.a]$$

onde $P = X(X'X)^{-}X' = XX^{+}$, sendo $(X'X)^{-}$ inversa condicional de $X'X$ e X^{+} inversa de Moore-Penrose de X.

Aplicando o Teorema 3.7.2.1.1, tem-se:

$$E[SQR] = Tr[I-XX^{+}]\sigma^2 + \underset{\sim}{\Theta}'X'(I-XX^{+})X\underset{\sim}{\Theta} \quad . \qquad [3.7.2.2.b]$$

Mas, $P = XX^{+}$ é idempotente, pois

$$P^2 = XX^{+}XX^{+} = XX^{+} \quad , \qquad [3.7.2.2.c]$$

portanto, $I-P = I - XX^{+}$ é idempotente, pois,

$$(I-P)^2 = I-P \quad . \qquad [3.7.2.2.d]$$

Desta forma, segue-se que

$$\begin{aligned} Tr[I-P] = Tr[I-XX^{+}] &= \text{Característica } [I-XX^{+}] \\ &= \text{Característica } [I] - \text{Característica } [XX^{+}] \\ &= \text{Característica } [I] - \text{Característica } [X] \,. \end{aligned} \qquad [3.7.2.2.e]$$

Mas,

$$\left.\begin{aligned} &\text{Característica } [I] = rv, \quad e \\ &\text{Característica } [X] = v+b-1 \quad , \end{aligned}\right. \qquad [3.7.2.2.f]$$

então,

$$Tr[I-XX^{+}] = rv-v-b+1 \quad . \qquad [3.7.2.2.g]$$

Além disso, tem-se que:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\Theta}'X'[I-XX^{+}]X\underset{\sim}{\Theta} &= \underset{\sim}{\Theta}'X'X\underset{\sim}{\Theta} - \underset{\sim}{\Theta}'X'XX^{+}X\underset{\sim}{\Theta} \\ &= \underset{\sim}{\Theta}'X'X\underset{\sim}{\Theta} - \underset{\sim}{\Theta}'X'X\underset{\sim}{\Theta} = 0 \quad . \end{aligned} \qquad [3.7.2.2.h]$$

Substituindo-se [3.7.2.2.g] e [3.7.2.2.h] em [3.7.2.2.b], obtém-se:

$$E[SQR] = (rv-v-b+1)\sigma^2 \quad . \qquad [3.7.2.2.i]$$

De [3.7.2.2.i] segue-se que:

$$E[QMR] = \sigma^2 \quad . \qquad [3.7.2.2.j]$$

3.7.3 - Independência e distribuição das formas quadráticas

Para se verificar a independência e a distribuição das formas quadráticas apresentadas em 3.7.2, utilizam-se os seguintes teoremas:

Teorema 3.7.3.1 [GRAYBILL, 1961]

Se $\underset{\sim}{y} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, I\sigma^2)$, então $\frac{1}{\sigma^2}\underset{\sim}{y}'A\underset{\sim}{y} \sim \chi^2_{(n;\delta)}$, ou seja, $\frac{1}{\sigma^2}\underset{\sim}{y}'A\underset{\sim}{y}$ tem distribuição de qui-quadrado não central, com n graus de liberdade, e parâmetro de não centralidade $\delta = \frac{1}{2\sigma^2}\underset{\sim}{\mu}'A\underset{\sim}{\mu}$, se e somente se A for uma matriz idempotente de característica n.

Teorema 3.7.3.2 [SEARLE, 1971]

Quando $\underset{\sim}{y} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, V)$, as formas quadráticas $\underset{\sim}{y}'A\underset{\sim}{y}$ e $\underset{\sim}{y}'B\underset{\sim}{y}$ são independentemente distribuídas se e somente se $AVB = \phi$, ou, de forma equivalente, $BVA = \phi$.

Teorema 3.7.3.3 [GRAYBILL, 1961]

Se uma variável w é distribuída conforme $\chi^2_{(n_1,\delta)}$, ou seja, como qui-quadrado não central com n_1 graus de liberdade e parâmetro de não centralidade δ, e se outra variável aleatória z é distribuída como $\chi^2_{(n_2)}$, ou seja, como qui-quadrado central com n_2 graus de liberdade, e se w e z são independentes, então a variável

$$u = \frac{w/n_1}{z/n_2} = \frac{wn_2}{zn_1}$$

tem distribuição F não central, com n_1 e n_2 graus de liberdade, e parâmetro de nao centralidade δ.

3.7.3.1 - Distribuição da SQT(aj.)/σ^2

Sabe-se que

$$SQT(aj.) = \tilde{\hat{\tau}}'\tilde{Q} = \tilde{Q}'\Omega\tilde{Q} = \tilde{y}'P_1\tilde{y} \qquad [3.7.3.1.a]$$

onde $P_1 = XW'\Omega WX'$, e W é dada por [3.7.2.1.b].

Assim,

$$P_1^2 = XW'\Omega WX'XW'\Omega WX' \quad .$$

Mas, $WX'XW' = C$, logo

$$P_1^2 = XW'\Omega C\Omega WX' = XW'\Omega WX' = P_1 \quad . \qquad [3.7.3.1.b]$$

Portanto P_1 é idempotente, e por [3.7.2.1.j] tem-se que:

$$\text{Característica } [P_1] = Tr[P_1] = v-1 \quad . \qquad [3.7.3.1.c]$$

Tem-se ainda de [3.7.2.1,k] que

$$\tilde{\Theta}'X'P_1X\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}'X'XW'\Omega WX'X\tilde{\Theta} = \tilde{\tau}'C\tilde{\tau} \quad . \qquad [3.7.3.1.d]$$

Assim, pelo teorema 3.7.3.1, tem-se:

$$\frac{SQT(aj.)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_T,\delta_T)} \quad , \qquad [3.7.3.1.e]$$

onde:

$$n_T = v-1$$

$$\delta_T = \frac{1}{2\sigma^2}\tilde{\tau}'C\tilde{\tau} \quad . \qquad [3.7.3.1.f]$$

3.7.3.2 - Distribuição da SQR/σ^2

Sabe-se que

$$SQR = \underset{\sim}{y}'(I-P)\underset{\sim}{y} \qquad [3.7.3.2.a]$$

onde $P = X(X'X)^{-}X' = XX^{+}$.

Mas $I-P = I-XX^{+}$ é idempotente e, por [3.7.2.2.g] tem-se que:

$$\text{Característica } [I-P] = \text{Característica } [I-XX^{+}]$$

$$= Tr[I-XX^{+}] = rv-v-b+1 \qquad [3.7.3.2.b]$$

Tem-se ainda, de [3.7.2.2.h], que:

$$\underset{\sim}{\Theta}'X'(I-P)X\underset{\sim}{\Theta} = \underset{\sim}{\Theta}'X'(I-XX^{+})X\underset{\sim}{\Theta} = 0 \quad . \qquad [3.7.3.2.c]$$

Assim, pelo teorema 3.7.3.1, tem-se:

$$\frac{SQR}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_R,0)} \quad , \qquad [3.7.3.2.d]$$

ou seja, $\frac{SQR}{\sigma^2}$ tem distribuição de qui-quadrado central, com n_R graus de liberdade, onde

$$n_R = rv-v-b+1 \quad . \qquad [3.7.3.2.e]$$

3.7.3.3 - Distribuição do quociente $\dfrac{SQT(aj.)/n_T}{SQR/n_R}$

De [3.7.3.1.a] e [3.7.3.2.a], tem-se:

$$SQT(aj.) = \underset{\sim}{y}'P_1\underset{\sim}{y} \quad \text{e} \quad SQR = \underset{\sim}{y}'(I-P)\underset{\sim}{y} \quad ,$$

respectivamente, onde $P_1 = XW'\Omega WX'$ e $P = X(X'X)^{-}X' = XX^{+}$.

Verifica-se que, sendo $V = I\sigma^2$, então,

$$(I-P)VP_1 = (I-P)P_1\sigma^2 = [(I-XX^{+})XW'\Omega WX']\sigma^2$$

$$= [XW'\Omega WX' - XX^{+}XW'\Omega WX']\sigma^2$$

$$(I-P)VP_1 = (I-P)P_1\sigma^2 = [XW'\Omega WX' - XW'\Omega WX']\sigma^2 = \phi \ . \quad [3.7.3.3.a]$$

Assim, pelo Teorema 3.7.3.2, SQT(aj.) e SQR são independentes; e usando-se o Teorema 3.7.3.3 tem-se, por [3.7.3.1.e] e [3.7.3.2.d] que:

$$\frac{SQT(aj.)/n_T}{SQR/n_R} \sim F_{(n_T, n_R, \delta_T)} \quad [3.7.3.3.b]$$

onde: $n_T = v-1;$

$n_R = rv-v-b+1;$ [3.7.3.3.c]

$\delta_1 = \frac{1}{2\sigma^2} \underset{\sim}{\tau}'C\underset{\sim}{\tau}.$

3.7.4 - Quadro da análise de variância

O quadro da análise de variância, com as esperanças dos quadrados médios de interesse, é dado pelo seguinte esquema:

Causas de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	E[QM]
Blocos (não ajustados)	b-1	SQB	SQB/b-1	-
Tratamentos (ajustados)	v-1	SQT(aj.)	SQT(aj.)/v-1	$\sigma^2 + \underset{\sim}{\tau}'C\underset{\sim}{\tau}$
Resíduo	rv-v-b+1	SQR	SQR/rv-v-b+1	σ^2
Total	rv-1	SQTotal		

onde as somas de quadrados são dadas pelas expressões apresentadas em [3.7.1.d].

3.7.5 - Teste de significância para tratamentos

Sabe-se, por [3.7.3.3.b], que:

$$\frac{SQT(aj.)/n_T}{SQR/n_R} \sim F_{(n_T, n_R, \delta_1)}$$

onde:

$n_T = v-1;$

$n_R = rv-v-b+1;$

$\delta_1 = \frac{1}{2\sigma^2} \underset{\sim}{\tau}' C \underset{\sim}{\tau}.$

Assim, a hipótese de nulidade de que todos os efeitos de tratamentos são nulos, isto é:

$$H_o: \underset{\sim}{\tau} = \underset{\sim}{\phi} \quad ,$$

é testada utilizando-se a estatística

$$F = \frac{SQT(aj.)/n_T}{SQR/n_R} \quad ,$$

que, sob H_o, tem distribuição F central com n_T e n_R graus de liberdade.

3.8 - Decomposição da Soma de Quadrados de Tratamentos Ajustada

3.8.1 - Contrastes ortogonais

As funções lineares paramétricas $\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\tau}$ com

$$\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{1} = \sum_{i=1}^{v} \ell_i = 0 \qquad [3.8.1.a]$$

são denominadas de contrastes.

Os contrastes

$$Y_j = \sum_{i=1}^{v} \ell_{ji} \tau_i \qquad e \qquad Y_k = \sum_{i=1}^{v} \ell_{ki} \tau_i$$

são ditos ortogonais, no contexto de PBIB, se

$$\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji}\, \ell_{ki} = 0 \quad . \qquad [3.8.1.b]$$

3.8.2 - Decomposição da soma de quadrados de tratamentos ajustada

No caso de BIB, IEMMA (1985, 1987) afirma que a decomposição da SQT(aj.) em somas de quadrados de contrastes ortogonais, pode ser feita de modo usual, obtendo-se a soma de quadrados de hipótese (SQH_o).

Adotando-se esse procedimento no presente contexto, para H_o: $D'\underset{\sim}{\tau} = \underset{\sim}{\phi}$, tem-se:

$$SQH_o = (D'\hat{\underset{\sim}{\tau}})'[D'\Omega D]^{-1}(D'\hat{\underset{\sim}{\tau}}) \qquad [3.8.2.a]$$

onde D' é a matriz dos coeficientes dos contrastes, sendo constituída, portanto, de v-1 linhas independentes, isto é, D' tem posto linha completo, e Ω, conforme [3.4.3.b], é dada por:

$$\Omega = \sum_{j=1}^{v-1} \frac{1}{\theta_j}\underset{\sim}{u}_j\underset{\sim}{u}_j' = \frac{1}{\theta_1}\underset{\sim}{u}_1\underset{\sim}{u}_1' + \frac{1}{\theta_2}\underset{\sim}{u}_2\underset{\sim}{u}_2' + \dots + \frac{1}{\theta_{v-1}}\underset{\sim}{u}_{v-1}\underset{\sim}{u}_{v-1}' \qquad [3.8.2.b]$$

e $\underset{\sim}{u}_j$ é um auto-vetor normalizado associado ao auto-valor θ_j (i=1,2,..., v-1) de C.

Sejam as v-1 linhas de D' os auto-vetores ortonormais associados aos auto-valores θ_j (i=1,2,...,v-1) de C, ou seja, os v-1 contrastes ortogonais são correspondentes aos v-1 auto-vetores de C. Desta forma segue-se que

$$D'\Omega D = \begin{bmatrix} 1/\theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\theta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\theta_{v-1} \end{bmatrix} = \mathrm{Diag}[1/\theta_1,\ 1/\theta_2, \dots, 1/\theta_{v-1}]$$

e então,

$$[D'\Omega D]^{-1} = \text{Diagonal } [\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{v-1}] = \Lambda \ . \qquad [3.8.2.c]$$

Sabe-se que

$$\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \Omega \underset{\sim}{Q} \quad ,$$

então,

$$\begin{aligned} SQH_o &= [D'\Omega \underset{\sim}{Q}]'\Lambda D'\Omega \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q}'\Omega D\Lambda D'\Omega \underset{\sim}{Q} \\ &= \underset{\sim}{Q}'\Omega C\Omega \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q}'\Omega \underset{\sim}{Q} \\ &= \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{Q} = SQT(aj.) \end{aligned} \qquad [3.8.2.d]$$

A SQH_o pode ser decomposta em v-1 componentes ortogonais. Para tanto, considere-se que

$$\Omega D = \left[\frac{1}{\theta_1} \underset{\sim}{u}_1 \quad \frac{1}{\theta_2} \underset{\sim}{u}_2 \quad \cdots \quad \frac{1}{\theta_{v-1}} \underset{\sim}{u}_{v-1} \right] \ ;$$

$$D'\Omega = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta_1} \underset{\sim}{u}_1' \\ \frac{1}{\theta_2} \underset{\sim}{u}_2' \\ \vdots \\ \frac{1}{\theta_{v-1}} \underset{\sim}{u}_{v-1}' \end{bmatrix} \ ;$$

$$\underset{\sim}{Q}'\Omega D = \left[\frac{1}{\theta_1} \underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{u}_1 \quad \frac{1}{\theta_2} \underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{u}_2 \quad \cdots \quad \frac{1}{\theta_{v-1}} \underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{u}_{v-1} \right] \qquad [3.8.2.e]$$

$$D'\Omega \underset{\sim}{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta_1} \underset{\sim}{u}_1' \underset{\sim}{Q} \\ \frac{1}{\theta_2} \underset{\sim}{u}_2' \underset{\sim}{Q} \\ \vdots \\ \frac{1}{\theta_{v-1}} \underset{\sim}{u}_{v-1}' \underset{\sim}{Q} \end{bmatrix} . \qquad [3.8.2.f]$$

De [3.8.2.d], [3.8.2.e] e [3.8.2.f] segue-se que:

$$SQH_o = \underset{\sim}{Q}'\Omega D\Lambda D'\Omega \underset{\sim}{Q}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta_1} \underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{u}_1 & \frac{1}{\theta_2} \underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{u}_2 & \cdots & \frac{1}{\theta_{v-1}} \underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{u}_{v-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \theta_{v-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta_1} \underset{\sim}{u}_1' \underset{\sim}{Q} \\ \frac{1}{\theta_2} \underset{\sim}{u}_2' \underset{\sim}{Q} \\ \vdots \\ \frac{1}{\theta_{v-1}} \underset{\sim}{u}_{v-1}' \underset{\sim}{Q} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\theta_1} \underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{u}_1\underset{\sim}{u}_1'\underset{\sim}{Q} + \frac{1}{\theta_2} \underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{u}_2\underset{\sim}{u}_2'\underset{\sim}{Q} + \ldots + \frac{1}{\theta_{v-1}} \underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{u}_{v-1}\underset{\sim}{u}_{v-1}'\underset{\sim}{Q} . \qquad [3.8.2.g]$$

Como $\underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{u}_j$ e $\underset{\sim}{u}_j'\underset{\sim}{Q}$ são escalares, tem-se que

$$\underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{u}_j = \underset{\sim}{u}_j'\underset{\sim}{Q} \quad (j=1,2,\ldots,v-1) . \qquad [3.8.2.h]$$

Substituindo [3.8.2.h] em [3.8.2.g], obtém-se:

$$SQH_o = \frac{1}{\theta_1} (\underset{\sim}{u}_1'\underset{\sim}{Q})^2 + \frac{1}{\theta_2} (\underset{\sim}{u}_2'\underset{\sim}{Q})^2 + \ldots + \frac{1}{\theta_{v-1}} (\underset{\sim}{u}_{v-1}'\underset{\sim}{Q})^2$$

$$= \sum_{j=1}^{v-1} \frac{1}{\theta_j} (\underset{\sim}{u}_j'\underset{\sim}{Q})^2 . \qquad [3.8.2.i]$$

Desta forma, a soma de quadrados ajustada, devida ao contraste Y_j, definido pelo auto-vetor normalizado $\underset{\sim}{u}_j$, é dada por:

$$SQY_j(aj.) = \frac{1}{\theta_j} (\underset{\sim}{u}_j' \underset{\sim}{Q})^2 , \quad (j=1,2,\ldots,v-1) . \qquad [3.8.2.j]$$

Como $\underset{\sim}{u}_j = \frac{1}{\| \underset{\sim}{\ell}_j \|} \underset{\sim}{\ell}_j$, onde $\underset{\sim}{\ell}_j$ $(j=1,2,\ldots,v-1)$ é um auto-vetor de C associado ao auto-valor θ_j, e que define o contraste Y_j, de [3.8.2.j] segue-se que:

$$SQY_j(aj.) = \frac{1}{\theta_j} \left(\frac{1}{\| \underset{\sim}{\ell}_j \|} \underset{\sim}{\ell}_j' \underset{\sim}{Q}\right)^2 = \frac{1}{\theta_j \| \underset{\sim}{\ell}_j \|^2} (\underset{\sim}{\ell}_j' \underset{\sim}{Q})^2$$

$$= \frac{(\underset{\sim}{\ell}_j' \underset{\sim}{Q})^2}{\theta_j \underset{\sim}{\ell}_j' \underset{\sim}{\ell}_j}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji} Q_i \right)^2}{\theta_j \sum_{i=1}^{v} \ell_{ji}^2} . \qquad [3.8.2.k]$$

No caso de PBIB(2) do tipo GD, para decompor a SQT(aj.) em partes ortogonais, deve-se estruturar (s-1) contrastes associados ao auto-valor θ_1 e s(n-1) contrastes associados a θ_2. A estrutura desses contrastes é dada pelos auto-vetores associados a θ_1 e θ_2. Uma expressão genérica desses auto-vetores é dada em [3.4.3.n] e [3.4.3.o], respectivamente. Verifica-se por [3.4.3.n] e [3.4.3.o], que para os auto-vetores associados a θ_1 entre os grupos de tratamentos tem-se uma estrutura de contraste, enquanto que, para os auto-vetores associados a θ_2 a estrutura de contraste é obtida dentro de cada grupo de tratamentos.

Para o exemplo em consideração tem-se, conforme [3.4.3.k] e [3.4.3.ℓ] que

$$\theta_1 = \frac{\lambda_2 v}{k} = \frac{1(4)}{2} = 2 \quad \text{e} \quad \theta_2 = \frac{r(k-1)+\lambda_1}{k} = \frac{2(2-1)+0}{2} = 1 \quad ,$$

com multiplicidades $\alpha_1 = s-1 = 2-1 = 1$ e $\alpha_2 = s(n-1) = 2(2-1) = 2$, respectivamente.

Desta forma, para decompor a SQT(aj.) em partes ortogonais, devem-se estruturar três contrastes ortogonais, sendo um associado à θ_1 e dois associados a θ_2. A estrutura do contraste associado a θ_1 é, conforme [3.4.3.n], dada por:

$$\underset{\sim}{x}_1 = p \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

enquanto que a estrutura dos contrastes associados a θ_2 é, de acordo com [3.4.3.o], dada por

$$\underset{\sim}{x}_2 = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Considerando-se para $\underset{\sim}{x}_2$ t=-1 e z=0, obter-se-ia o auto-vetor

$$\underset{\sim}{x}_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

que corresponde ao contraste Y_1: t_1 vs t_4, conforme a estrutura da matriz C e, consequente ordenação dos tratamentos no vetor coluna correspondente, ou seja,

$$\underset{\sim}{\hat{\tau}} = \begin{bmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_4 \\ \hat{\tau}_2 \\ \hat{\tau}_3 \end{bmatrix} .$$

Um auto-vetor ortogonal a $\underset{\sim}{x}_{21}$ é obtido considerando-se, na estrutura de $\underset{\sim}{x}_2$, t=0 e z=1. Desta forma, tem-se o auto-vetor:

$$\underset{\sim}{x}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} ,$$

que corresponde ao contraste Y_2: t_2 vs t_3. Fazendo p=-1 na estrutura de $\underset{\sim}{x}_1$, obtém-se o auto-vetor

$$\underset{\sim}{x}_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

que é ortogonal a $\underset{\sim}{x}_{21}$ e $\underset{\sim}{x}_{22}$ e corresponde ao contraste Y_3: $(t_1 + t_4)$ vs $(t_2 + t_3)$.

Desta forma, tem-se que os vetores:

$$\underset{\sim}{\ell}_1' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$
$$\underset{\sim}{\ell}_2' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} ; \text{ e}$$
$$\underset{\sim}{\ell}_3' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} ,$$

definem os contrastes Y_1, Y_2 e Y_3, respectivamente.

A soma de quadrados ajustada de cada contraste é, de acordo com [3.8.2.k] dada por:

$$SQY_j(aj.) = \frac{(\underset{\sim}{\ell}_j'\underset{\sim}{Q})^2}{\theta_j \underset{\sim}{\ell}_j'\underset{\sim}{\ell}_j} .$$

Assim,

$$SQY_1(aj.) = \frac{(\underset{\sim}{\ell}_1'\underset{\sim}{Q})^2}{\theta_2\underset{\sim}{\ell}_1'\underset{\sim}{\ell}_1} = \frac{[1(0)+(-1)(1)+0(-3)+0(2)]^2}{1(2)} = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 ;$$

$$SQY_2(aj.) = \frac{(\underset{\sim}{\ell}_2'\underset{\sim}{Q})^2}{\theta_2\underset{\sim}{\ell}_2'\underset{\sim}{\ell}_2} = \frac{[1(-3)+(-1)(2)]^2}{1(2)} = \frac{(-5)^2}{2} = \frac{25}{2} = 12,5;$$

e $$SQY_3(aj.) = \frac{(\underset{\sim}{\ell}_3'\underset{\sim}{Q})^2}{\theta_1\underset{\sim}{\ell}_3'\underset{\sim}{\ell}_3} = \frac{[1(0)+1(1)+(-1)(-3)+(-1)(2)]^2}{2(4)} = \frac{2^2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

No presente contexto, tem-se:

$$SQT(aj.) = \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{Q} = 27/2 .$$

Verifica-se que

$$SQY_1(aj.) + SQY_2(aj.) + SQY_3(aj.) = \frac{1}{2} + \frac{25}{2} + \frac{1}{2} = \frac{27}{2} = SQT(aj.) .$$

No caso de BIB, os v-1 auto-valores não nulos de C são iguais a θ, onde,

$$\theta = \frac{vr-b}{v-1} . \qquad [3.8.2.\ell]$$

Desta forma, os contrastes ortogonais são organizados da forma usual, considerando-se que os tratamentos são igualmente repetidos, dado que o BIB é equi-replicado, e a soma de quadrados ajustada para o contraste Y_j é dada por

$$SQY_j(aj.) = \frac{(\underset{\sim}{\ell}_j'\underset{\sim}{Q})^2}{\theta\ \underset{\sim}{\ell}_j'\underset{\sim}{\ell}_j} . \qquad [3.8.2.m]$$

De [3.8.2.ℓ] tem-se que:

$$\theta = \frac{vr-b}{v-1} = \frac{bk-b}{v-1} = \frac{b(k-1)}{v-1} = \frac{b}{r}.\lambda = \frac{\lambda v}{k} . \qquad [3.8.2.n]$$

Substituindo-se [3.8.2.n] em [3.8.2.m], obtém-se:

$$SQY_j(aj.) = \frac{(\underset{\sim}{\ell}_j'\underset{\sim}{Q})^2}{\frac{\lambda v}{k}\,\underset{\sim}{\ell}_j'\underset{\sim}{\ell}_j} = \frac{k}{\lambda v}\,\frac{(\underset{\sim}{\ell}_j'\underset{\sim}{Q})^2}{\underset{\sim}{\ell}_j'\underset{\sim}{\ell}_j} = \frac{k}{\lambda v}\,\frac{(\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji}Q_i)^2}{\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji}^2} \qquad [3.8.2.o]$$

que é a expressão apresentada por MONTGOMERY (1976).

Verifica-se que

$$\sum_{j=1}^{v-1} SQY_j(aj.) = SQT(aj.) .$$

3.8.3 - Eficiência para a estimativa dos contrastes

Sabe-se de 2.1.3 que, no caso de blocos incompletos,

$$V[\underset{\sim}{\ell}'\hat{\underset{\sim}{\tau}}] = \underset{\sim}{\ell}'\Omega\underset{\sim}{\ell}\,\sigma^2 \qquad [3.8.3.a]$$

onde, $\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\tau}$ é uma função paramétrica estimável.

Para blocos casualizados, tem-se:

$$V[\underset{\sim}{\ell}'\hat{\underset{\sim}{\tau}}] = \frac{\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\ell}}{r}\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{v} \ell_i^2}{r}\sigma^2 \quad . \qquad [3.8.3.b]$$

Assim, considerando-se o contraste $\underset{\sim}{\ell}_j'\underset{\sim}{\tau}$, no caso de PBIB, tem-se que:

$$V[\underset{\sim}{\ell}_j'\hat{\underset{\sim}{\tau}}] = \underset{\sim}{\ell}_j'\Omega\underset{\sim}{\ell}_j\,\sigma^2 \quad , \qquad [3.8.3.c]$$

onde, conforme [3.4.3.b],

$$\Omega = \sum_{j=1}^{v-1} \frac{1}{\theta_j}\underset{\sim}{u}_j\underset{\sim}{u}_j' \quad . \qquad [3.8.3.d]$$

Mas, $\underset{\sim}{u}_j = \dfrac{1}{\|\underset{\sim}{\ell}_j\|}\underset{\sim}{\ell}_j$, então,

$$\underset{\sim}{\ell}_j = \|\underset{\sim}{\ell}_j\|\ \underset{\sim}{u}_j \quad . \qquad [3.8.3.e]$$

Substituindo-se [3.8.3.e] em [3.8.3.c], tem-se:

$$V[\underset{\sim}{\ell}_j'\hat{\underset{\sim}{\tau}}] = \|\underset{\sim}{\ell}_j\|\ \underset{\sim}{u}_j'\ \Omega\ \|\underset{\sim}{\ell}_j\|\underset{\sim}{u}_j\ \sigma^2$$

$$= \|\underset{\sim}{\ell}_j\|^2\ \underset{\sim}{u}_j'\ \Omega\ \underset{\sim}{u}_j\ \sigma^2$$

$$= \sum_{i=1}^{v} \ell_{ji}^2\ \underset{\sim}{u}_j'\ \Omega\ \underset{\sim}{u}_j\ \sigma^2 \quad . \qquad [3.8.3.f]$$

Como $\underset{\sim}{u}_j'\ \Omega\ \underset{\sim}{u}_j = \dfrac{1}{\theta_j}$, de [3.8.3.f] segue-se que:

$$V[\underset{\sim}{\ell}_j'\hat{\underset{\sim}{\tau}}] = \frac{\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji}^2}{\theta_j}\ \sigma^2 \ . \qquad [3.8.3.g]$$

Para o contraste $\underset{\sim}{\ell}_j'\underset{\sim}{\tau}$, no caso de blocos casualizados,tem-se:

$$V[\underset{\sim}{\ell}_j'\hat{\underset{\sim}{\tau}}] = \frac{\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji}^2}{r}\ \sigma^2 \quad . \qquad [3.8.3.h]$$

De [3.8.3.g] e [3.8.3.h] segue-se que a eficiência para a estimativa do contraste $\underset{\sim}{\ell}_j'\underset{\sim}{\tau}$, no caso de PBIB, em relação a blocos casualizados, é dada por:

$$E_j = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji}^2}{r}\ \sigma^2}{\dfrac{\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji}^2}{\theta_j}\ \sigma^2} = \frac{\theta_j}{r} \ ;\ j=1,2,\ldots,v-1 \ . \qquad [3.8.3.i]$$

Para o exemplo considerado tem-se: $\theta_1=2$, $\theta_2=1$ e $r=2$. Assim, para os contrastes associados a θ_1 a eficiência é:

$$E_1 = \frac{\theta_1}{r} = \frac{2}{2} = 1 \quad . \qquad [3.8.3.j]$$

Para os contrastes associados a θ_2 a eficiência é:

$$E_2 = \frac{\theta_2}{r} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad . \qquad [3.8.3.k]$$

Uma vez que $\theta_1 > \theta_2$, tem-se maior eficiência na estimativa dos contrastes associados a θ_1, que é o maior auto-valor.

Verifica-se que a eficiência E_2 de [3.8.3.k] é igual à eficiência E_1 obtida em 3.6. Isso ocorre uma vez que em 3.6 a eficiência E_1 é obtida para contrastes elementares de tratamentos primeiros associados, que definem contrastes associados ao auto-valor θ_2. Essa identidade não se verifica, entretanto, entre a eficiência E_1 de [3.8.3.j] e E_2 obtida em 3.6. A não identidade decorre do fato de que E_2 em 3.6 é obtida para contrastes elementares entre tratamentos segundos associados, os quais não definem contrastes associados a θ_1 e nem contrastes associados a θ_2.

Para BIB, tem-se um único auto-valor $\theta = \lambda v/k$ não nulo de C, então a eficiência do delineamento é dada por:

$$E = \theta/r = \lambda v/rk \quad .$$

Fazendo-se analogia com os BIB, no caso de PBIB pode-se obter a soma de quadrados ajustada para o contraste Y_j [$SQY_j(aj.)$], da seguinte forma:

i) Reconstituindo-se os totais de tratamentos através das médias ajustadas, fazendo-se $T_i = r\hat{\mu}_i$, onde $\hat{\mu}_i = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i$ e $\hat{\mu} = G/rv$.

ii) Obtendo-se SQY_j da forma usual, ou seja,

$$SQY_j = \frac{(\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji} T_i)^2}{r \sum_{i=1}^{v} \ell_{ji}^2} .$$

iii) Obtendo-se $SQY_j(aj.) = E_j\ SQY_j$, onde $E_j = \theta_j/r$.

Alternativamente, pode-se obter $SQY_j(aj.)$,diretamente com os valores $\hat{\tau}_i$, ou seja, obtendo-se:

$$SQY_j = \frac{r(\underset{\sim}{\ell}_j'\underset{\sim}{\hat{\tau}})^2}{\underset{\sim}{\ell}_j'\underset{\sim}{\ell}_j} = \frac{r(\sum_{i=1}^{v} \ell_{ij}\hat{\tau}_i)^2}{\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji}^2} ,$$

e

$$SQY_j(aj.) = E_j\ SQY_j .$$

Para PBIB(2), do tipo GD, tem-se:

$$E_1 = \theta_1/r = \lambda_2 v/rk$$
$$E_2 = \theta_2/r = [r(k-1)+\lambda_1]/rk .$$

Desta forma, para os contrastes associados a θ_1 tem-se

$$SQY_j(aj.) = E_1\ SQY_j = \lambda_2 v/rk\ SQY_j$$

e para os contrastes associados a θ_2 tem-se

$$SQY_j(aj.) = E_2\ SQY_j = \frac{r(k-1)+\lambda_1}{rk}\ SQY_j .$$

Assim, para o exemplo considerado, tem-se:

TRATAMENTO	Q_i	$\hat{\tau}_i$	$\hat{\mu}_i=\hat{\mu}+\hat{\tau}_i$	$T_i = r\hat{\mu}_i$
1	0	-1/4	79/4	79/2
4	1	3/4	83/4	83/2
2	-3	-11/4	69/4	69/2
3	2	9/4	89/4	89/2

onde: $\hat{\mu} = G/rv = 160/8 = 20.$

Para os contrastes:

Y_1: t_1 vs t_4

Y_2: t_2 vs t_3

Y_3: $(t_1 + t_4)$ vs $(t_2 + t_3)$

tem-se:

$$SQY_1 = \frac{\left(\frac{79}{2} - \frac{83}{2}\right)^2}{2(2)} = \frac{(-2)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad ;$$

$$SQY_2 = \frac{\left(\frac{69}{2} - \frac{89}{2}\right)^2}{2(2)} = \frac{(-10)^2}{4} = \frac{100}{4} = 25 \quad ;$$

$$SQY_3 = \frac{\left[\frac{79}{2} + \frac{83}{2} - \left(\frac{69}{2} + \frac{89}{2}\right)\right]^2}{2(4)} = \frac{(2)^2}{8} = 1/2 \quad ;$$

$$SQY_1(aj.) = \frac{r(k-1)+\lambda_1}{rk} SQY_1 = \frac{2(2-1)+0}{4} 1 = 1/2 \quad ;$$

$$SQY_2(aj.) = \frac{r(k-1)+\lambda_1}{rk} SQY_2 = \frac{2(2-1)+0}{4} 25 = 25/2 \quad ;$$

$$SQY_3(aj.) = \frac{\lambda_2 v}{rk} SQY_3 = \frac{1(4)}{4} 1/2 = 1/2 \quad .$$

Verifica-se que

$$SQY_1(aj.) + SQY_2(aj.) + SQY_3(aj.) = 27/2 = SQT(aj.) \; .$$

3.8.4 - Esperança matemática das $SQY_j(aj.)$

De [3.8.2.j] tem-se que

$$SQY_j(aj.) = \frac{1}{\theta_j} (\underset{\sim}{u}_j'\underset{\sim}{Q})^2 = \frac{1}{\theta_j} \underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{u}_j\underset{\sim}{u}_j'\underset{\sim}{Q} \quad (j=1,2,\ldots,v-1). \qquad [3.8.4.a]$$

De [3.7.2.1.c] sabe-se que

$$\underset{\sim}{Q} = WX'\underset{\sim}{y} \qquad [3.8.4.b]$$

onde,

$${}_{v}W_{1+v+b} = \left[{}_{v}\underset{\sim}{\phi}_1 \quad I_v \quad {}_{v}{-NK^{-1}}_{b}\right] \; . \qquad [3.8.4.c]$$

Substituindo-se [3.8.4.b] em[3.8.4.a] tem-se:

$$SQY_j(aj.) = \underset{\sim}{y}'XW' \frac{\underset{\sim}{u}_j\underset{\sim}{u}_j'}{\theta_j} WX'\underset{\sim}{y} \; . \qquad [3.8.4.d]$$

Fazendo-se $\Omega_j = \dfrac{\underset{\sim}{u}_j\underset{\sim}{u}_j'}{\theta_j}$, [3.8.4.e]

então de [3.8.4.d] segue-se que

$$SQY_j(aj.) = \underset{\sim}{y}'XW'\Omega_jWX'\underset{\sim}{y} \; . \qquad [3.8.4.f]$$

Considerando-se $XW'\Omega_jWX' = A_j$, tem-se

$$SQY_j(aj.) = \underset{\sim}{y}'A_j\underset{\sim}{y} \; . \qquad [3.8.4.g]$$

Conforme teorema 3.7.2.1.1, tem-se que:

$$E[SQY_j(aj.)] = E[\underset{\sim}{y}'A_j\underset{\sim}{y}] = Tr[A_j]\,\sigma^2 + \underset{\sim}{\Theta}'X'A_jX\underset{\sim}{\Theta} \; . \qquad [3.8.4.h]$$

Mas $Tr[A_j] = Tr[XW'\Omega_jWX']$. Fazendo-se $B = XW'$ e $D = \Omega_jWX'$, então $Tr[A_j] = Tr[BD]$. Se as dimensões forem favoráveis, $Tr[BD] = Tr[DB]$. Portanto,

$$Tr[A_j] = Tr[XW'\Omega_jWX'] = Tr[\Omega_jWX'XW'] \; . \qquad [3.8.4.i]$$

Entretanto, conforme [3.7.2.1.h], $WX'XW' = C$. Logo, de [3.8.4.i] segue-se que

$$Tr[A_j] = Tr[\Omega_j C] \quad . \qquad [3.8.4.j]$$

Como Ω_j é uma das v-1 matrizes da decomposição espectral de Ω, então $\Omega_j C \Omega_j = \Omega_j$, e $\Omega_j C$ é idempotente, pois $\Omega_j C \Omega_j C = \Omega_j C$.

Logo,

$$\begin{aligned} Tr[A_j] = Tr[\Omega_j C] &= \text{Característica } (\Omega_j C) \\ &= \text{Característica } (\Omega_j) = 1 \quad . \qquad [3.8.4.k] \end{aligned}$$

Além disso, tem-se que:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\Theta}'X'A_j X\underset{\sim}{\Theta} &= \underset{\sim}{\Theta}'X'XW'\Omega_j WX'X\underset{\sim}{\Theta} \\ &= {}_1\underset{\sim}{\Theta}'_{1+v+b} \begin{bmatrix} {}_1\underset{\sim}{\phi}_v \\ {}_vC_v \\ {}_b\phi_v \end{bmatrix} {}_v\Omega_{j\,v} \; {}_v\left[{}_v\underset{\sim}{\phi}_1 \quad {}_vC_v \quad {}_v\phi_b\right]_{1+v+b} \; {}_{1+v+b}\underset{\sim}{\Theta}_1 \\ &= \theta_j^2 \underset{\sim}{\tau}'\Omega_j \underset{\sim}{\tau} \quad . \qquad [3.8.4.\ell] \end{aligned}$$

Substituindo-se [3.8.4.k] e [3.8.4.ℓ] em [3.8.4.h], obtém-se:

$$E[SQY_j(aj.)] = \sigma^2 + \theta_j^2 \underset{\sim}{\tau}'\Omega_j \underset{\sim}{\tau} \quad . \qquad [3.8.4.m]$$

De 3.8.4.m segue-se que

$$E[QMY_j(aj.)] = \sigma^2 + \theta_j^2 \underset{\sim}{\tau}'\Omega_j \underset{\sim}{\tau} \quad . \qquad [3.8.4.n]$$

3.8.5 - Distribuição e independência das formas quadráticas

3.8.5.1 - Distribuição da $SQY_j(aj.)/\sigma^2$

Sabe-se que

$$SQY_j(aj.) = \underset{\sim}{y}'A_j\underset{\sim}{y} \quad , \qquad [3.8.5.1.a]$$

onde $A_j = XW'\Omega_j WX'$, e W é dado conforme [3.7.2.1.b].

Assim,

$$A_j^2 = XW'\Omega_j WX'XW'\Omega_j WX'$$

mas, $WX'XW' = C$, logo,

$$A_j^2 = XW'\Omega_j C\Omega_j WX'$$

$$= XW'\Omega_j WX'$$

$$= A_j \quad . \qquad [3.8.5.1.b]$$

Portanto, A_j é idempotente e, por [3.8.4.k], tem-se que:

$$\text{Característica}\,[A_j] = Tr[A_j] = 1 \quad . \qquad [3.8.5.1.c]$$

Tem-se, ainda, de [3.8.4.ℓ] que

$$\underset{\sim}{\Theta}'X'A_jX\underset{\sim}{\Theta} = \underset{\sim}{\Theta}'X'XW'\Omega_j WX'X\underset{\sim}{\Theta} = \theta_j^2\underset{\sim}{\tau}'\Omega_j\underset{\sim}{\tau} \quad . \qquad [3.8.5.1.d]$$

Desta forma, pelo teorema 3.7.3.1 tem-se:

$$\frac{SQY_j(aj.)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1,\delta_j)} \qquad [3.8.5.1.e]$$

onde:

$$\delta_j = \frac{1}{2\sigma^2}\,\theta_j^2\underset{\sim}{\tau}'\Omega_j\underset{\sim}{\tau} \quad . \qquad [3.8.5.1.f]$$

3.8.5.2 - Distribuição da SQR/σ^2

Sabe-se de [3.7.3.2.d] que

$$\frac{SQR}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_R)} \qquad [3.8.5.2.a]$$

onde, $n_R = rv-v-b+1$.

3.8.5.3 - Distribuição do Quociente $\dfrac{SQY_j(aj.)}{SQR/n_R}$

Sabe-se de [3.8.5.1.a] e [3.7.3.2.a] que

$$SQY_j(aj.) = \underset{\sim}{y}'A_j\underset{\sim}{y} \qquad e \qquad SQR = \underset{\sim}{y}'(I-P)\underset{\sim}{y} \quad ,$$

onde $A_j = XW'\Omega_jWX'$ e $P = X(X'X)^-X' = XX^+$.

Verifica-se que, sendo $V = I\sigma^2$, então,

$$\begin{aligned}(I-P)V(A_j) = (I-P)\ A_j\ \sigma^2 &= [(I-XX^+)\ XW'\Omega_jWX']\ \sigma^2 \\ &= [XW'\Omega_jWX' - XX^+XW'\Omega_jWX']\ \sigma^2 \\ &= [XW'\Omega_jWX' - XW'\Omega_jWX']\ \sigma^2 \\ &= \phi \ . \end{aligned} \qquad [3.8.5.3.a]$$

Desta forma, pelo teorema 3.7.3.2, $SQY_j(aj.)$ e SQR são independentes, e usando-se o teorema 3.7.3.3 tem-se por [3.8.5.1.e] e [3.8.5.2.a] que:

$$\frac{SQY_j(aj.)}{SQR/n_R} \sim F_{(1,n_R,\delta_j)} \qquad [3.8.5.3.b]$$

onde:

$$\left.\begin{aligned} n_R &= rv-v-b+1; \\ \delta_j &= \frac{1}{2\sigma^2}\ \theta_j^2\underset{\sim}{\tau}'\Omega_j\underset{\sim}{\tau} \ .\end{aligned}\right. \qquad [3.8.5.3.c]$$

3.8.5.4 - Independência das distribuições de $SQY_j(aj.)$ e $SQY_{j'}(aj.)$

Sabe-se de [3.8.5.1.e] que

$$\frac{SQY_j(aj.)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1,\delta_j)} \quad e \quad \frac{SQY_{j'}(aj.)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1,\delta_{j'})} \qquad [3.8.5.4.a]$$

onde:

$$\delta_j = \frac{1}{2\sigma^2}\,\theta_j^2 \underset{\sim}{\tau}'\Omega_j \underset{\sim}{\tau} \quad e \quad \delta_{j'} = \frac{1}{2\sigma^2}\,\theta_{j'}^2 \underset{\sim}{\tau}'\Omega_{j'} \underset{\sim}{\tau} \;. \qquad [3.8.5.4.b]$$

Sabe-se também que

$$SQY_j(aj.) = \underset{\sim}{y}'A_j\underset{\sim}{y} \quad e \quad SQY_{j'}(aj.) = \underset{\sim}{y}'A_{j'}\underset{\sim}{y} \qquad [3.8.5.4.c]$$

onde:

$$A_j = XW'\Omega_j WX' \quad e \quad A_{j'} = XW'\Omega_{j'}WX' \;. \qquad [3.8.5.4.d]$$

Verifica-se que, sendo $V = I\sigma^2$, então,

$$\begin{aligned} A_j V A_{j'} = A_j A_{j'}\sigma^2 &= [XW'\Omega_j WX'XW'\Omega_{j'}WX']\,\sigma^2 \\ &= [XW'\Omega_j C\Omega_{j'}WX']\,\sigma^2 \\ &= [XW'\phi WX']\,\sigma^2 \\ &= \phi \;. \end{aligned} \qquad [3.8.5.4.e]$$

Desta forma, pelo teorema 3.7.3.2, $SQY_j(aj.)$ e $SQY_{j'}(aj.)$ são independentes, produzindo, portanto, testes de significância independentes.

3.8.6 - Quadro da análise de variância com a decomposição da SQT(aj.)

O quadro de análise de variância, com a decomposição da SQT(aj.) em partes ortogonais, e com as esperanças dos quadrados médios de interesse, é dado por:

Causas da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	E[Q.M.]
Blocos (não ajustados)	b-1	SQB	SQB/b-1	-
Tratamentos (ajustados)	v-1	SQT(aj.)	SQT(aj.)/v-1	$\sigma^2 + \underset{\sim}{\tau}'C\underset{\sim}{\tau}$
Y_1(aj.)	1	SQY_1(aj.)	SQY_1(aj.)	$\sigma^2 + \theta_1 \underset{\sim}{\tau}'\Omega_1 \underset{\sim}{\tau}$
Y_2(aj.)	1	SQY_2(aj.)	SQY_2(aj.)	$\sigma^2 + \theta_2 \underset{\sim}{\tau}'\Omega_2 \underset{\sim}{\tau}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Y_{v-1}(aj.)	1	SQY_{v-1}(aj.)	SQY_{v-1}(aj.)	$\sigma^2 + \theta_{v-1} \underset{\sim}{\tau}'\Omega_{v-1} \underset{\sim}{\tau}$
Resíduo	rv-v-b+1	SQR	SQR/rv-v-b+1	σ^2
TOTAL	rv-1	SQTotal		

onde SQY_j(aj.), j=1,2,...,v-1, é obtida conforme [3.8.2.k].

O nível conjunto de significância para os v-1 contrastes é dado. aproximadamente, por $1 - (1-\alpha)^{v-1}$, onde α é o nível de significância adotado.

3.8.7 - Teste de significância para o contraste Y_j

Sabe-se por [3.8.5.3.b] que

$$\frac{SQY_j(aj.)}{SQR/n_R} \sim F_{(1, n_R, \delta_j)}$$

onde, $n_R = rv-v-b+1$ e $\delta_j = \frac{1}{2\sigma^2}\theta_j^2 \underset{\sim}{\tau}'\Omega_j \underset{\sim}{\tau}$.

Assim, a hipótese de nulidade H_o: $\underset{\sim}{\ell}'_j \underset{\sim}{\tau} = 0$ é testada utilizando-se a estatística

$$F = \frac{SQY_j(aj.)}{SQR/n_R} \quad ,$$

que, sob H_o, tem distribuição F central, com 1 e n_R graus de liberdade. Além disso, conforme 3.8.5.4, as distribiuições dos contrastes Y_j e $Y_{j'}$, $(j,j'=1,2,\ldots,v-1;\ j \neq j')$ são independentes.

A título de ilustração, para o exemplo considerado, seja:

$$H_o^{(1)}: \underset{\sim}{\ell}'_1 \underset{\sim}{\tau} = \tau_1 - \tau_4 = 0 \iff \tau_1 = \tau_4 \quad .$$

Desde que o contraste $\underset{\sim}{\ell}'_1 \underset{\sim}{\tau} = \tau_1 - \tau_4$ é associado a $\theta_2 = 1$, tem-se que:

$$\delta_1 = \frac{1}{2\sigma^2}\, \theta_2^2 \underset{\sim}{\tau}' \Omega_2 \underset{\sim}{\tau} \quad ,$$

onde,

$$\Omega_2 = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\delta_1 = \frac{1}{2\sigma^2}\, 1^2 \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_4 & \tau_2 & \tau_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_4 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2\sigma^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\tau_1-\tau_4) & -\frac{1}{2}(\tau_1-\tau_4) & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_4\\ \tau_2\\ \tau_3\end{bmatrix}$$

Sob H_o, $\tau_1 = \tau_4$, então $\delta_1=0$. Logo

$$F = \frac{SQY_1(aj.)}{SQR/n_R} \sim F_{(1,n_R)} \quad .$$

Para o exemplo ilustrativo, a análise de variância, com decomposição da SQT(aj.), é dada por:

Causas da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos (não ajustados)	3	12,0	4,0	
Tratamentos (ajustados)	3	13,5	4,5	9
Y_1(aj.)	1	0,5	0,5	1
Y_2(aj.)	1	12,5	12,5	25
Y_3(aj.)	1	0,5	0,5	1
Resíduo	1	0,5		
Total	7	26,0		

3.9 - Ajuste de Equações de Regressão Utilizando Polinômios Ortogonais no Caso de BIB e PBIB

A análise de variância envolvendo o estudo das regressões polinomiais, até com grau p, de acordo com CAMPOS (1984), pode ser levada a efeito vantajosamente mediante o uso de polinômios ortogonais, estruturando-se o modelo:

$$Y_i = b_o + b_1 P_{1i} + b_2 P_{2i} + \ldots + b_p P_{pi} + e_i \quad ,$$

onde P_{ji} é o polinômio de grau j.

A técnica da análise de variância com estudo de regressões através dos polinômios ortogonais, consiste em desdobrar os graus de liberdade de tratamentos em diversas regressões (linear, quadrática, cúbica, etc.), tendo cada um destes componentes de regressão 1 grau de liberdade, constituindo-se os mesmos em contrastes ortogonais. Realiza-se um teste de significância para cada componente, e geralmente ajusta-se uma equação de regressão, que abranja até a regressão de mais alto grau significativo.

Quando os níveis que determinam os tratamentos são igualmente espaçados, o processo se simplifica, dada a possibilidade de utilização de tabelas especiais com os coeficientes dos polinômios ortogonais, tabelas estas encontradas, dentre outros, em GOMES (1985). Se os níveis que determinam os tratamentos não são igualmente espaçados, há necessidade de se determinarem os coeficientes, e NOGUEIRA (1979) apresenta interessante método geral para obtenção dos coeficientes dos polinômios ortogonais.

A soma de quadrados para a regressão de grau j é dada por:

$$\text{SQReg.grau } j = \frac{(\sum_i \ell_{ji} T_i)^2}{r K_j} \qquad [3.9.a]$$

onde

ℓ_{ji} são os coeficientes do polinômio de grau j;

T_i são os totais de tratamentos;

r é o número de repetições;

K_j é a soma dos quadrados dos coeficientes ℓ_{ji}.

A equação, até um certo grau p, tem a seguinte expressão:

$$\hat{Y}_i = \hat{b}_o + \hat{b}_1 P_{1i} + \hat{b}_2 P_{2i} + \ldots + \hat{b}_p P_{pi} \quad , \qquad [3.9.b]$$

$i=1,2,\ldots,p$, onde:

$$\hat{b}_o = \frac{\sum\limits_i T_i}{rv} \quad , \qquad [3.9.c]$$

$$\hat{b}_j = M_j \frac{\sum\limits_i \ell_{ji} T_i}{rK_j} \quad , \qquad [3.9.d]$$

sendo M_j constante utilizada para tornar os coeficientes ℓ_{ji} inteiros;

P_{ji} são os polinômios ortogonais;e

$\hat{Y}_i$ é a estimativa para a média do tratamento i.

No caso de BIB, conforme [3.8.2.o], a soma de quadrados ajustada para o contraste Y_j é dada por:

$$SQY_j(aj.) = \frac{(\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{Q})^2}{\theta\ \underset{\sim}{\ell}'_j \underset{\sim}{\ell}_j} = \frac{k}{\lambda v} \frac{(\sum\limits_{i=1}^{v} \ell_{ji} Q_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{v} \ell_{ji}^2} \quad . \qquad [3.9.e]$$

Admitindo-se que os coeficientes dos contrastes Y_j definem os componentes linear, quadrático, cúbico, etc., então a soma de quadrados ajustada de cada componente, isto é, a soma de quadrados ajustada para a regressão de grau j é, de acordo com [3.9.a] e [3.9.e], dada por:

$$SQReg.grau\ j(aj.) = \frac{(\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{Q})^2}{\theta\ \underset{\sim}{\ell}'_j \underset{\sim}{\ell}_j} = \frac{(\sum\limits_{i=1}^{v} \ell_{ji} Q_i)^2}{\frac{\lambda v}{k} \sum\limits_{i=1}^{v} \ell_{ji}^2}$$

$$= \frac{k}{\lambda v} \frac{(\sum\limits_{i=1}^{v} \ell_{ji} Q_i)^2}{K_j} \quad . \qquad [3.9.f]$$

De [3.9.d] tem-se que a estimativa do coeficiente de regressão $\hat{b}_j$ é dada por:

$$\hat{b}_j = M_j \frac{\underset{\sim}{\ell}_j' \underset{\sim}{Q}}{\theta \underset{\sim}{\ell}_j' \underset{\sim}{\ell}_j} = M_j \frac{\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji} Q_i}{\frac{\lambda v}{k} \sum_{j=1}^{v} \ell_{ji}^2} = \frac{k}{\lambda v} M_j \frac{\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji} Q_i}{K_j} \quad . \qquad [3.9.g]$$

Para ilustrar, seja o seguinte reticulado quadrado balanceado, que se constitui num BIB do tipo I:

	REPETIÇÃO I			REPETIÇÃO II			REPETIÇÃO III	
BLOCO 1	(1)19	(2)17	BLOCO 3	(1)20	(3)22	BLOCO 5	(1)18	(4)22
BLOCO 2	(3)21	(4)19	BLOCO 4	(2)19	(4)23	BLOCO 6	(2)21	(3)21

onde v=4, b=6, r=3, k=2, λ=1, e os valores entre parênteses representam os tratamentos e os demais as observações de uma variável dependente y qualquer.

Para o presente caso, tem-se:

$$\underset{\sim}{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \begin{bmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \\ \hat{\tau}_3 \\ \hat{\tau}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$SQT(aj.) = \hat{\underset{\sim}{\tau}}' \underset{\sim}{Q} = (-1)(-2) + (-3/2)(-3) + (1)(2) + (3/2)(3)$$

$$= 2 + 9/2 + 2 + 9/2 = 26/2 = 13 \ .$$

Admitindo-se que os 4 tratamentos referem-se a níveis equidistantes de um fator quantitativo (X), pode-se estruturar o seguinte quadro, cujos coeficientes dos contrastes foram obtidos de GOMES (1985):

TRATAMENTOS	Níveis de X	$\underset{\sim}{Q}$	COEFICIENTES DOS COMPONENTES Linear ($\underset{\sim}{\ell}_1$)	Quadrático ($\underset{\sim}{\ell}_2$)	Cúbico ($\underset{\sim}{\ell}_3$)
1	0	-2	-3	1	-1
2	1	-3	-1	-1	3
3	2	2	1	-1	-3
4	3	3	3	1	1
K_j			20	4	20
M_j			2	1	10/3

Seguindo-se [3.9.f] obtem-se:

$$\text{SQ Regressão Linear(aj.)} = \frac{k}{\lambda v}\;\frac{\left(\sum_{i=1}^{4} \ell_{1i}Q_i\right)^2}{K_1}$$

$$= \frac{2}{1(4)}\;\frac{\left[(-3)(-2) + (-1)(-3) + 1(2) + 3(3)\right]^2}{20}$$

$$= \frac{1}{2}\;\frac{(20)^2}{20} = 10$$

$$\text{SQ Regressão Quadrática (aj.)} = \frac{k}{\lambda v}\;\frac{\left(\sum_{i=1}^{4} \ell_{2i}Q_i\right)^2}{K_2}$$

$$= \frac{2}{1(4)}\;\frac{\left[1(-2) + (-1)(-3) + (-1)(2) + 1(3)\right]^2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\;\frac{(2)^2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{SQ Regressão Cúbica (aj.)} = \frac{k}{\lambda v} \frac{\left(\sum_{i=1}^{4} \ell_{3i} Q_i\right)^2}{K_3}$$

$$= \frac{2}{1(4)} \frac{\left[(-1)(-2) + 3(-3) + (-3)(2) + 3(1)\right]^2}{20}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(-10)^2}{20} = \frac{5}{2} .$$

Verifica-se que

$$\text{SQReg.Linear(aj.)} + \text{SQReg.Quadr.(aj.)} + \text{SQReg.Cúb.(aj.)} = 10 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}$$

$$= 13$$

$$= \text{SQT(aj.)} .$$

Admitindo-se que a regressão cúbica é significativa, ajusta-se uma equação do tipo:

$$\hat{Y}_i = \hat{b}_o + \hat{b}_1 P_{1i} + \hat{b}_2 P_{2i} + \hat{b}_3 P_{3i} \quad ,$$

onde:

$$\hat{b}_o = \frac{\sum_{i=1}^{v} T_i}{rv} = \frac{G}{rv} = \frac{242}{12} = \frac{121}{6}$$

$$\hat{b}_1 = \frac{k}{\lambda v} M_1 \frac{\sum_{i=1}^{4} \ell_{1i} Q_i}{K_1} = \frac{1}{2} (2) \frac{20}{20} = 1$$

$$\hat{b}_2 = \frac{k}{\lambda v} M_2 \frac{\sum_{i=1}^{4} \ell_{2i} Q_i}{K_2} = \frac{1}{2} (1) \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\hat{b}_3 = \frac{k}{\lambda v} M_3 \frac{\sum_{i=1}^{4} \ell_{3i} Q_i}{K_3} = \frac{1}{2} \frac{10}{3} \frac{-10}{20} = -\frac{5}{6}$$

$$P_1 = x = \frac{X - \bar{X}}{q} = \frac{X - 3/2}{1} = X - 3/2$$

$$P_2 = x^2 - \frac{v^2-1}{12} = x^2 - \frac{16 - 1}{12} = x^2 - \frac{5}{4}$$

$$P_3 = x^3 - \frac{3v^2-7}{20} x = x^3 - \frac{3(16)-7}{20} x = x^3 - \frac{41}{20} x \quad .$$

Substituindo-se os termos na equação e fazendo-se as devidas simplificações, chega-se a:

$$\hat{Y}_i = \frac{115}{6} - \frac{11}{3} X_i + 4X_i^2 - \frac{5}{6} X_i^3 \quad .$$

Verifica-se que as médias de tratamentos, estimadas pela equação de regressão, coincidem com as médias ajustadas de tratamentos $\hat{\mu}_i$, onde $\hat{\mu}_i = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i$, sendo $\hat{\mu} = G/rv$, como não poderia deixar de acontecer, uma vez que se esgotaram os graus de liberdade de tratamentos.

Para PBIB, admitindo-se que o conjunto de vetores que definem os componentes linear, quadrático, cúbico, etc., são auto-vetores ortogonais associados a θ_h, h=1,2,...,m, o procedimento é semelhante ao caso do BIB, com a diferença que se tem diferentes auto-valores. Assim, as expressões [3.9.f] e [3.9.g] assumem a seguinte forma:

$$\text{SQReg.grau } j \text{ (aj.)} = \frac{(\underset{\sim}{\ell}_j' \underset{\sim}{Q})^2}{\theta_j \underset{\sim}{\ell}_j' \underset{\sim}{\ell}_j} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji} Q_i\right)^2}{\theta_j K_j} \qquad [3.9.h]$$

e

$$\hat{b}_j = M_j \frac{\underset{\sim}{\ell}_j' \underset{\sim}{Q}}{\theta_j \underset{\sim}{\ell}_j' \underset{\sim}{\ell}_j} = \frac{M_j}{\theta_j} \frac{\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji} Q_i}{K_j} \quad . \qquad [3.9.i]$$

Verifica-se que as expressões [3.9.f] e [3.9.g] podem ser obtidas de [3.9.h] e [3.9.i], considerando-se $\theta_j = \lambda v/k$.

No caso de PBIB(2) do tipo GD, como

$$\theta_1 = \frac{\lambda_2 v}{k} \qquad e \qquad \theta_2 = \frac{r(k-1)+\lambda_1}{k} ,$$

com multiplicidades $\alpha_1 = s-1$ e $\alpha_2 = s(n-1)$, tem-se s-1 componentes de regressão associados a θ_1 e s(n-1) componentes de regressão associados a θ_2. Admitindo-se que o conjunto de vetores que definem os componentes de regressão são auto-vetores ortogonais associados a θ_1 e θ_2, isto é, auto-vetores ortogonais com a estrutura apresentada em [3.4.3.n] e [3.4.3.o], respectivamente, para os componentes de regressão associados a θ_1 tem-se:

$$\text{SQReg.grau } j \text{ (aj.)} = \frac{(\underset{\sim}{\ell}'_j \underset{\sim}{Q})^2}{\theta_1 \underset{\sim}{\ell}'_j \underset{\sim}{\ell}_j} = \frac{k(\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji} Q_i)^2}{\lambda_2 \, v \, K_j} \qquad [3.9.j]$$

e

$$\hat{b}_j = M_j \frac{\underset{\sim}{\ell}'_j \underset{\sim}{Q}}{\theta_1 \underset{\sim}{\ell}'_j \underset{\sim}{\ell}_j} = \frac{k \, M_j (\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji} Q_i)}{\lambda_2 \, v \, K_j} . \qquad [3.9.k]$$

Para os componentes de regressão associados a θ_2, tem-se:

$$\text{SQReg.grau } j \text{ (aj.)} = \frac{\underset{\sim}{\ell}'_j \underset{\sim}{Q}}{\theta_2 \underset{\sim}{\ell}'_j \underset{\sim}{\ell}_j} = \frac{k(\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji} Q_i)^2}{[r(k-1)+\lambda_1] K_j} \qquad [3.9.\ell]$$

e

$$\hat{b}_j = M_j \frac{\underset{\sim}{\ell}'_j \underset{\sim}{Q}}{\theta_2 \underset{\sim}{\ell}'_j \underset{\sim}{\ell}_j} = \frac{k \, M_j \sum_{i=1}^{v} \ell_{ji} Q_i}{[r(k-1) + \lambda_1] K_j} . \qquad [3.9.n]$$

Para o PBIB(2) do tipo GD considerado como exemplo, admitindo-se que os 4 tratamentos referem-se a níveis equidistantes de um fator quantitativo (X), pode-se estruturar o seguinte quadro, cujos coeficientes dos contrastes foram obtidos de GOMES (1985).

TRATAMENTOS	Níveis de X	$\underset{\sim}{Q}$	$\hat{\underset{\sim}{\tau}}$	COEFICIENTES DOS COMPONENTES Linear($\underset{\sim}{\ell}_1$)	Quadrático($\underset{\sim}{\ell}_2$)	Cúbico($\underset{\sim}{\ell}_3$)
1	0	0	-1/4	-3	1	-1
2	1	-3	-11/4	-1	-1	3
3	2	2	9/4	1	-1	-3
4	3	1	3/4	3	1	1
K_j				20	4	20
M_j				2	1	10/3

Como no presente caso os grupos de tratamentos associados são os grupos formados pelos tratamentos 1 e 4; 2 e 3, verifica-se que os contrastes referentes aos componentes linear e cúbico são associados a θ_2, uma vez que apresentam a estrutura dada em [3.4.3.o], e o contraste referente ao componente quadrático é associado a θ_1, dado que apresenta a estrutura dada em [3.4.3.n]. Uma vez que os coeficientes dos componentes linear, quadrático e cúbico referem-se a auto-vetores associados a θ_1 e θ_2, satisfazendo a multiplicidade dos auto-valores, esse conjunto de contrastes decompõem, ortogonalmente, a SQT(aj.).

De [3.9.ℓ] tem-se:

$$\text{SQRegressão Linear (aj.)} = \frac{k(\sum_{i=1}^{4} \ell_{1i}Q_i)^2}{[r(k-1)+\lambda_1]K_1}$$

$$= \frac{2[(-3)(0) + (-1)(-3) + 1(2) + 3(1)]^2}{[2(2-1)+0]\,20}$$

$$= \frac{2(8)^2}{2(20)} = \frac{64}{20} = \frac{16}{5}$$

$$\text{SQRegressão Cúbica (aj.)} = \frac{k(\sum_{i=1}^{4} \ell_{3i}Q_i)^2}{[r(k-1)+\lambda_1]K_3}$$

$$= \frac{2[(-1)(0) + 3(-3) + (-3)(2) + 1(1)]^2}{[2(2-1)+0]20}$$

$$= \frac{2(-14)^2}{2(20)} = \frac{196}{20} = \frac{49}{5} .$$

De [3.9.j] tem-se:

$$\text{SQRegressão Quadrática (aj.)} = \frac{k(\sum_{i=1}^{4} \ell_{2i}Q_i)^2}{\lambda_2\ v\ K_2}$$

$$= \frac{2[1(0) + (-1)(-3) + (-1)(2) + 1(1)]^2}{1(4)(4)}$$

$$= \frac{2(2)^2}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} .$$

Verifica-se que:

$$\text{SQReg.Lin.(aj.)} + \text{SQReg.Quad.(aj.)} + \text{SQReg.Cúb.(aj.)} = \frac{16}{5} + \frac{49}{5} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{135}{10} = \frac{27}{2}$$

$$= \text{SQT(aj.)} .$$

Admitindo-se que a regressão cúbica é significativa, ajusta-se uma equação do tipo:

$$\hat{Y}_i = \hat{b}_o + \hat{b}_1 P_{1i} + \hat{b}_2 P_{2i} + \hat{b}_3 P_{3i} \quad ,$$

onde:

$$\hat{b}_o = G/rv = 160/8 = 20$$

$$\hat{b}_1 = \frac{k\, M_1 (\sum_{i=1}^{4} \ell_{1i} Q_i)}{[r(k-1)+\lambda_1] K_1} = \frac{2(2)(8)}{[2(2-1)+0]20} = \frac{4(8)}{2(20)} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$$

$$\hat{b}_2 = \frac{k\, M_2 (\sum_{i=1}^{4} \ell_{2i} Q_i)}{\lambda_2\, v\, K_2} = \frac{2(1)(2)}{1(4)(4)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\hat{b}_3 = \frac{k\, M_3 (\sum_{i=1}^{4} \ell_{3i} Q_i)}{[r(k-1)+\lambda_1] K_3} = \frac{2(10/3)(-14)}{2(20)} = -\frac{7}{3}$$

e as expressões de P_1, P_2 e P_3 são as mesmas do caso de BIB, ou seja:

$$P_1 = x = X - 3/2$$

$$P_2 = x^2 - 5/4$$

$$P_3 = x^3 - \frac{41}{20} x \quad .$$

Substituindo-se os termos na equação e fazendo-se as devidas simplificações, obtem-se:

$$\hat{Y}_i = \frac{79}{4} - \frac{131}{12} X_i + \frac{43}{4} X_i^2 - \frac{7}{3} X_i^3 \quad .$$

Verifica-se que as médias de tratamentos estimadas pela equação de regressão coincidem com as médias ajustadas de tratamentos $\hat{\mu}_i$, onde $\hat{\mu}_i = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i$, sendo $\hat{\mu} = G/rv$, dado que esgotaram-se os graus de liberdade de tratamentos, e a curva, portanto, passa sobre as médias ajustadas de tratamentos.

4. ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO

Para ilustração da metodologia, utiliza-se o exemplo descrito a seguir, retirado de KRAMER e BRADLEY (1957b). Trata-se de um PBIB(2) do tipo GD singular com s=4 grupos e n=2 tratamentos por grupo e com esquema de associação

1	5
2	6
3	7
4	8

Desta forma, dois tratamentos são primeiros associados se eles ocorrem em um mesmo grupo (linha), caso contrário são segundos associados. Os dados encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1 - Dados utilizados no exemplo numérico, proveniente de um experimento em PBIB(2) do tipo GD singular.

BLOCOS	1ª REPETIÇÃO				TOTAIS DE BLOCOS	TOTAIS DE REPETIÇÕES
1	(1) 29	(5) 38	(2) 40	(6) 33	140	253
2	(3) 28	(7) 37	(4) 24	(8) 24	113	
	2ª REPETIÇÃO					
3	(1) 20	(5) 37	(3) 26	(7) 33	116	200
4	(2) 23	(6) 22	(4) 24	(8) 15	84	
	3ª REPETIÇÃO					
5	(1) 27	(5) 41	(4) 36	(8) 28	132	261
6	(2) 37	(6) 26	(3) 29	(7) 37	129	
	TOTAL GERAL					714

FONTE: KRAMER e BRADLEY (1957b).

Esse plano experimental corresponde ao delineamento S6 de BOSE, CLATWORTHY e SHRIKHANDE (1954), sendo que os números entre parênteses indicam os tratamentos.

Sabe-se por 2.3.5.1 que em um PBIB(2) do tipo GD os parâmetros do esquema de associação são:

$$n_1 = n-1 \qquad , \qquad n_2 = n(s-1)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} n-2 & 0 \\ 0 & n(s-1) \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & n-1 \\ n-1 & n(s-1) \end{bmatrix} .$$

Pode-se, então, verificar que os parâmetros do primeiro tipo, referentes ao delineamento PBIB(2) utilizado são: v=8, b=6, r=3, k=4, λ_1=3, λ_2=1, n_1=1 e n_2=6, e os parâmetros do segundo tipo são:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} .$$

A análise de variância intrablocos pode ser desenvolvida com o auxílio da Tabela 2.

Tabela 2 - Tabela auxiliar para a análise de variância intrablocos do PBIB(2) considerado.

TRATAMENTOS	T_i	A_i	Q_i	$\hat{\tau}_i$	$\hat{\tau}_i Q_i$	$\hat{\mu}_i = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i$
1	76	388	-21	-86/12	1806/12	22,5833
5	116	388	19	74/12	1406/12	35,9167
2	100	353	47/4	103/24	4841/96	34,0417
6	81	353	-29/4	-49/24	1421/96	27,7083
3	83	358	-13/2	-15/12	195/24	28,5000
7	107	358	35/2	81/12	2835/24	36,5000
4	84	329	7/4	-13/24	-91/96	29,2083
8	67	329	-61/4	-149/24	9089/96	23,5417
TOTAL	714	-	0	0	53076/96	-

Os valores $\hat{\tau}_i$ foram obtidos considerando-se que $\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \Omega \underset{\sim}{Q}$, onde Ω tem a estrutura dada em [3.4.3.u]. Assim,

$$\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \begin{bmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_5 \\ \hat{\tau}_2 \\ \hat{\tau}_6 \\ \hat{\tau}_3 \\ \hat{\tau}_7 \\ \hat{\tau}_4 \\ \hat{\tau}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/48 & 1/48 & -1/16 & -1/16 & -1/16 & -1/16 & -1/16 & -1/16 \\ & 17/48 & -1/16 & -1/16 & -1/16 & -1/16 & -1/16 & -1/16 \\ & & 17/48 & 1/48 & -1/16 & -1/16 & -1/16 & -1/16 \\ & & & 17/48 & -1/16 & -1/16 & -1/16 & -1/16 \\ & & & & 17/48 & 1/48 & -1/16 & -1/16 \\ & & & & & 17/48 & -1/16 & -1/16 \\ & & & & & & 17/48 & 1/48 \\ \text{(simétrica)} & & & & & & & 17/48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -21 \\ 19 \\ 47/4 \\ -29/4 \\ -13/2 \\ 35/2 \\ 7/4 \\ -61/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -86/12 \\ 74/12 \\ 103/24 \\ -49/24 \\ -15/12 \\ 81/12 \\ -13/24 \\ -149/24 \end{bmatrix}$$

De forma mais simplificada, alternativamente, utilizando-se a inversa generalizada Ω^*, conforme estrutura dada em [3.4.3.x], tem-se:

$$\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \begin{bmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_5 \\ \hat{\tau}_2 \\ \hat{\tau}_6 \\ \hat{\tau}_3 \\ \hat{\tau}_7 \\ \hat{\tau}_4 \\ \hat{\tau}_8 \end{bmatrix} = \Omega^* \underset{\sim}{Q} = \begin{bmatrix} 5/12 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/12 & 5/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/12 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 & 5/12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/12 & 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 5/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/12 & 1/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 5/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -21 \\ 19 \\ 47/4 \\ -29/4 \\ -13/2 \\ 35/2 \\ 7/4 \\ -61/4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \Omega^* \underset{\sim}{Q} = \begin{bmatrix} -86/12 \\ 74/12 \\ 103/24 \\ -49/24 \\ -15/12 \\ 81/12 \\ -13/24 \\ -149/24 \end{bmatrix}$$

Verifica-se que essa solução é idêntica àquela obtida com a inversa de Moore-Penrose Ω de C, e é similar àquela que seria obtida considerando-se uma matriz de restrições A, tal que $A\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \phi$, de acordo com GOMES (1967). No presente caso, $A = (-\lambda_2/k)J = (-1/4)J$, sendo $M = C-A$, e a solução única é dada por $\hat{\underset{\sim}{\tau}} = M^{-1}\underset{\sim}{Q}$, onde $M^{-1} = \Omega^*$.

Outra forma de se chegar à solução $\hat{\underset{\sim}{\tau}}$ é através do método simplificado apresentado em 3.4.2.

Considerando-se que $\hat{\mu} = G/rv = 714/24 = 29{,}75$, tem-se as médias ajustadas de tratamentos $\hat{\mu}_i$, que constam da tabela 2, onde $\hat{\mu}_i = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i$.

As somas de quadrados são obtidas da seguinte forma:

$$SQT(aj.) = \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{Q} = \sum_{i=1}^{8} \hat{\tau}_i Q_i = \frac{53.076}{96} = 552{,}8750 \quad ;$$

$$SQTotal = \sum_{i,j} y_{ij}^2 - C_o = \sum_{i,j} y_{ij}^2 - \frac{G^2}{rv} = 1.130{,}5000 \; ;$$

$$SQB = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{b} B_j^2 - C_o = 495{,}0000 \; ;$$

$$SQR = SQTotal - SQT(aj.) - SQB = 82{,}6250 \; .$$

A soma de quadrados de blocos pode ainda, para o presente caso, ser decomposta em duas partes: soma de quadrados de repetições (SQRep.) e soma de quadrados de blocos dentro de repetições (SQB/Rep.). Estas somas de quadrados, obtidas de maneira usual, resultaram em:

$$\text{SQRep.} = 274{,}7500$$

$$\text{SQB/Rep.} = 220{,}2500$$

Assim, o quadro de análise de variância é dado por:

Causas da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos (não ajustados)	5	495,0000	99,0000	
Repetições	2	274,7500	137,3750	
Blocos/Repetições	3	220,2500	73,4167	
Tratamentos (ajustados)	7	552,8750	78,9821	10,51**
Resíduo	11	82,6250	7,5114	
Total	23	1.130,5000		

** Significativo ao nível de 1% de probabilidade.

As estimativas das variâncias das estimativas dos contrastes elementares entre efeitos de tratamentos, calculados com base em 3.5 são:

i) Para contrastes entre tratamentos primeiros associados:

$$V_1 = \frac{2k\ QMR}{r(k-1)+\lambda_1} = \frac{2}{3}\ QMR = (2/3)(7{,}5114) = 5{,}0076$$

ii) Para contrastes entre tratamentos segundos associados:

$$V_2 = \frac{2k\ QMR}{r(k-1)+\lambda_1}\left[1 - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2\ v}\right] = \frac{5}{6}\ QMR = (5/6)(7{,}5114) = 6{,}2595$$

iii) Variância média

$$\bar{V} = \frac{2k\ QMR}{r(k-1)+\lambda_1}\left[1 - \frac{n_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2\ v(v-1)}\right] = \frac{17}{21}\ QMR = \frac{17}{21}\ (7{,}5114) = 6{,}0807\ .$$

A eficiência, de acordo com 3.6, é dada por:

$$E_1 = \frac{2\ QMR}{r\ V_1} = \frac{2\ QMR}{3(2/3)QMR} = 1$$

$$E_2 = \frac{2\ QMR}{r\ V_2} = \frac{2\ QMR}{3(5/6)QMR} = 4/5 = 0{,}80$$

$$\bar{E} = \frac{2\ QMR}{r\bar{V}} = \frac{2\ QMR}{3(17/21)QMR} = 14/17 = 0{,}82\ .$$

Pelas eficiências verifica-se que o delineamento usado conduz a uma maior precisão nas comparações entre tratamentos que são primeiros associados, uma vez que $\lambda_1 > \lambda_2$.

No que se refere à decomposição da soma de quadrados de tratamentos ajustada em partes ortogonais, considerar-se-ão as seguintes situações:

1º CASO: Experimento com um Fator Qualitativo

No presente caso, os auto-valores de C sao:

$$\theta_1 = \frac{\lambda_2 v}{k} = \frac{1(8)}{4} = 2\ ,$$

com multiplicidade $\alpha_1 = s-1 = 4-1 = 3$, e

$$\theta_2 = \frac{r(k-1)+\lambda_1}{k} = \frac{3(4-1)+3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

com multiplicidade $\alpha_2 = s(n-1) = 4(2-1) = 4$.

Desta forma, para decompor ortogonalmente a SQT(aj.), tem-se que estruturar 3 contrastes ortogonais associados a θ_1 e 4 contrastes ortogonais associados a θ_2. Os contrastes associados a θ_1, correspondem à estrutura dada em [3.4.3.n]. Os contrastes associados a θ_2, correspondem aos auto-vetores conforme estrutura dada em [3.4.3.o].

Verifica-se, conforme [3.4.3.o] e [3.4.3.n], que os contrastes associados a θ_2 determinam comparações dentro dos grupos de tratamentos, uma vez que os coeficientes devem ser escolhidos de tal forma a se ter uma estrutura de contraste dentro de cada grupo, enquanto que os contrastes associados a θ_1 determinam comparações entre os grupos de tratamentos, dado que os coeficientes dentro de cada grupo são iguais. Assim, um conjunto de contrastes que satisfazem [3.4.3.n] e [3.4.3.o] e, consequentemente, ortogonalizam a SQT(aj.) são:

Y_1: t_1 vs t_5

Y_2: t_2 vs t_6

Y_3: t_3 vs t_7

Y_4: t_4 vs t_8

Y_5: $(t_1 + t_5)$ vs $(t_2 + t_6)$

Y_6: $(t_3 + t_7)$ vs $(t_4 + t_8)$

Y_7: $(t_1 + t_5 + t_2 + t_6)$ vs $(t_3 + t_7 + t_4 + t_8)$

sendo Y_1, Y_2, Y_3 e Y_4 contrastes associados a θ_2 e Y_5, Y_6 e Y_7 contrastes associados a θ_1.

Os coeficientes dos contrastes correspondentes aos vetores $\underset{\sim}{\ell}_1$, $\underset{\sim}{\ell}_2$, ..., $\underset{\sim}{\ell}_7$, de acordo com a ordenação utilizada para os tratamentos, são dados por:

$$\underset{\sim}{\ell}_1' = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \;;$$

$$\underset{\sim}{\ell}_2' = [0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \;;$$

$$\underset{\sim}{\ell}_3' = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] \;;$$

$$\underset{\sim}{\ell}_4' = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1] \;;$$

$$\underset{\sim}{\ell}_5' = [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \;;$$

$$\underset{\sim}{\ell}_6' = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1] \;,$$

$$\underset{\sim}{\ell}_7' = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1] \;.$$

As somas de quadrados ajustadas para os contrastes são,de acordo com [3.8.2.k], dadas por:

$$SQY_1(aj.) = \frac{(\underset{\sim}{\ell}_1'\underset{\sim}{Q})^2}{\theta_2\underset{\sim}{\ell}_1'\underset{\sim}{\ell}_1} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{8} \ell_{1i}Q_i\right)^2}{\theta_2 \sum_{i=1}^{8} \ell_{1i}^2} = \frac{[1(-21) + (-1)(19)]^2}{3(2)} = 266,6667$$

$$SQY_2(aj.) = \frac{(\underset{\sim}{\ell}_2'\underset{\sim}{Q})^2}{\theta_2\underset{\sim}{\ell}_2'\underset{\sim}{\ell}_2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{8} \ell_{2i}Q_i\right)^2}{\theta_2 \sum_{i=1}^{8} \ell_{2i}^2} = \frac{[1(47/4) + (-1)(-29/4)]^2}{3(2)} = 60,1667$$

$$SQY_3(aj.) = \frac{(\underset{\sim}{\ell}_3'\underset{\sim}{Q})^2}{\theta_2\underset{\sim}{\ell}_3'\underset{\sim}{\ell}_3} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{8} \ell_{3i}Q_i\right)^2}{\theta_2 \sum_{i=1}^{8} \ell_{3i}^2} = \frac{[1(-13/2) + (-1)(35/2)]^2}{3(2)} = 96,0000$$

$$SQY_4(aj.) = \frac{(\underset{\sim}{\ell}_4'\underset{\sim}{Q})^2}{\theta_2\underset{\sim}{\ell}_4'\underset{\sim}{\ell}_4} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{8} \ell_{4i}Q_i\right)^2}{\theta_2 \sum_{i=1}^{8} \ell_{4i}^2} = \frac{[1(7/4) + (-1)(-61/4)]^2}{3(2)} = 48,1667$$

$$SQY_5(aj.) = \frac{(\underset{\sim}{\ell}_5'\underset{\sim}{Q})^2}{\theta_1\underset{\sim}{\ell}_5'\underset{\sim}{\ell}_5} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{8} \ell_{5i}Q_i\right)^2}{\theta_1 \sum_{i=1}^{8} \ell_{5i}^2} = \frac{[1(-21) + \ldots + (-1)(29/4)]^2}{2(4)} = 5,2812$$

$$SQY_6(aj.) = \frac{(\underset{\sim}{\ell}_6'\underset{\sim}{Q})^2}{\theta_1\underset{\sim}{\ell}_6'\underset{\sim}{\ell}_6} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{8} \ell_{6i}Q_i\right)^2}{\theta_1 \sum_{i=1}^{8} \ell_{6i}^2} = \frac{[1(-13/2) + \ldots + (-1)(-61/4)]^2}{2(4)} = 75,0312$$

$$SQY_7(aj.) = \frac{(\ell_{\sim 7}'Q)}{\theta_1 \ell_{\sim 7}'\ell_{\sim 7}} = \frac{(\sum_{i=1}^{8} \ell_{7i}Q_i)^2}{\theta_1 \sum_{i=1}^{8} \ell_{7i}^2} = \frac{[1(-21) + \ldots + (-1)(-61/4)]^2}{2(8)} = 1{,}5625.$$

Verifica-se, então, que

$$SQY_1(aj.) + \ldots + SQY_7(aj.) = 266{,}6667 + \ldots + 1{,}5625$$
$$= 552{,}6750 = SQT(aj.) \; .$$

O quadro de análise de variância, com a decomposição da SQT(aj.) é dado por:

Causas da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos (não ajustados)	5	495,0000		
Tratamentos (ajustados)	7	552,8750		
Y_1(aj.)	1	266,6667	266,6667	35,50**
Y_2(aj.)	1	60,1667	60,1667	8,01*
Y_3(aj.)	1	96,0000	96,0000	12,78**
Y_4(aj.)	1	48,1667	48,1667	6,41*
Y_5(aj.)	1	5,2812	5,2812	0,70
Y_6(aj.)	1	75,0312	75,0312	9,99**
Y_7(aj.)	1	1,5625	1,5625	0,21
Resíduo	11	82,6250	7,5114	
Total	23	1.130,5000		

* Significativo ao nível de 5% de probabilidade;
** Significativo ao nível de 1% de probabilidade.

O nível de significância conjunto é de aproximadamente 35%.

Conforme 3.8.3, tem-se que os contrastes associados a θ_1 são estimados com eficiência

$$E_1 = \theta_1/r = 2/3 \quad ,$$

enquanto que os contrastes associados a θ_2 são estimados com eficiência

$$E_2 = \theta_2/r = 3/3 = 1 \; .$$

Verifica-se, portanto, uma maior eficiência na estimativa dos contrastes associados a θ_2, ou seja, para contrastes definidos dentro dos grupos de tratamentos primeiros associados.

2º CASO: Experimento Fatorial 4x2 com Fatores Qualitativos

Tem-se um fatorial AxB com 4 níveis para o fator A e 2 níveis para o fator B. Considera-se a seguinte equivalência entre as combinações dos níveis dos fatores e os tratamentos originais.

COMBINAÇÕES DOS NÍVEIS DOS FATORES	TRATAMENTOS
a_1b_1	1
a_1b_2	5
a_2b_1	2
a_2b_2	6
a_3b_1	3
a_3b_2	7
a_4b_1	4
a_4b_2	8

Como é usual em experimentos fatoriais, pode-se decompor os 3 graus de liberdade para o fator A, estruturando-se os contrastes:

Y_1: a_1 vs a_2

Y_2: a_3 vs a_4

Y_3: $(a_1 + a_2)$ vs $(a_3 + a_4)$.

No caso do fator B, como só tem 2 níveis, o efeito é estimado pelo contraste b_2 vs b_1. A interação AxB é decomposta nos componentes Y_1xB, Y_2xB e Y_3xB. Os coeficientes dos contrastes, com as respectivas somas de quadrados ajustadas [SQContr.(aj.)], obtidas de acordo com [3.8.2.k] aparecem no quadro a seguir.

TRATAMENTOS	COEFICIENTES DOS CONTRASTES						
	Y_1	Y_2	Y_3	B	Y_1xB	Y_2xB	Y_3xB
(t_1) a_1b_1	1	0	1	-1	-1	0	-1
(t_5) a_1b_2	1	0	1	1	1	0	1
(t_2) a_2b_1	-1	0	1	-1	1	0	-1
(t_6) a_2b_2	-1	0	1	1	-1	0	1
(t_3) a_3b_1	0	1	-1	-1	0	-1	1
(t_7) a_3b_2	0	1	-1	1	0	1	-1
(t_8) a_4b_1	0	-1	-1	-1	0	1	1
(t_5) a_4b_2	0	-1	-1	1	0	-1	-1
$\sum_{i=1}^{8} \ell_{ji}^2$	4	4	8	8	4	4	8
SQContr.(aj.)	5,2813	75,0312	1,5625	32,6667	290,0833	140,0833	8,1667

Verifica-se que os contrastes Y_1, Y_2 e Y_3 são associados a θ_1, e os demais são associados a θ_2.

Tem-se que:

$$SQA(aj.) = SQY_1(aj.) + SQY_2(aj.) + SQY_3(aj.)$$
$$= 5,2813 + 75,0312 + 1,5625 = 81,8750$$

$$SQB(aj.) = 32,6667$$

$$SQAxB(aj.) = SQY_1xB(aj.) + SQY_2xB(aj.) + SQY_3xB(aj.)$$
$$= 290,0833 + 140,0833 + 8,1667 = 438,3333 .$$

Verifica-se que

$$SQA(aj.) + SQB(aj.) + SQAxB(aj.) = 81,8750 + 32,6667 + 438,3333$$
$$= 552,8750 = SQT(aj.) .$$

O quadro de análise da variância com a decomposição ortogonal da SQT(aj.) e das somas de quadrados ajustadas dos efeitos fatoriais, é dado por:

Causas da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos (não ajustados)	5	495,0000		
Tratamentos (ajustados)	7	552,8750		
Fator A (aj.)	3	81,8750	27,2917	3,63*
Y_1(aj.)	1	5,2813	5,2813	0,70
Y_2(aj.)	1	75,0312	75,0312	9,99**
Y_3(aj.)	1	1,5625	1,5625	0,21
Fator B(aj.)	1	32,6667	32,6667	4,35
Interação AxB(aj.)	3	438,3333	146,1111	19,45**
Y_1xB(aj.)	1	290,0833	290,0833	38,62**
Y_2xB(aj.)	1	140,0833	140,0833	18,65**
Y_3xB(aj.)	1	8,1667	8,1667	1,09
Resíduo	11	82,6250	7,5114	

* Significativo ao nível de 5% de probabilidade;
** Significativo ao nível de 1% de probabilidade.

3º CASO: Experimento fatorial 4x2 com Fatores Quantitativos e Níveis Equidistantes para o Fator A

Considerando-se os fatores quantitativos e os níveis do fator A equidistantes, e admitindo-se a mesma equivalência do 2º caso entre os tratamentos originais e as combinações dos níveis de fatores, tem-se os coeficientes dos contrastes, retirados de GOMES (1985), para o caso de 4 níveis equidistantes (0, 1, 2 e 3), com as respectivas somas de quadrados ajustadas, obtidas conforme [3.8.2.k], apresentados no quadro a seguir.

TRATAMENTOS	COEFICIENTES DOS CONTRASTES						
	A_L	A_Q	A_C	B_L	A_LxB_L	A_QxB_L	A_CxB_L
(t_1) a_1b_1	-3	1	-1	-1	3	-1	1
(t'_5) a_1b_2	-3	1	-1	1	-3	1	-1
(t'_2) a_2b_1	-1	-1	3	-1	1	1	-3
(t'_6) a_2b_2	-1	-1	3	1	-1	-1	3
(t'_3) a_3b_1	1	-1	-3	-1	-1	1	3
(t'_7) a_3b_2	1	-1	-3	1	1	-1	-3
(t'_4) a_4b_1	3	1	1	-1	-3	-1	-1
(t'_8) a_4b_2	3	1	1	1	3	1	1
$\sum_{i=1}^{8} \ell_{ji}^2$	40	8	40	8	40	8	40
SQContr(aj.)	9,8000	60,0625	12,0125	32,6667	136,5333	13,5000	288,3000

onde: L = linear, Q = quadrático e C = cúbico.

Verifica-se que os contrastes A_L, A_Q e A_C são associados a θ_1 e os demais são associados a θ_2.

Tem-se que:

$$SQA(aj.) = SQA_L(aj.) + SQA_Q(aj.) + SQA_C(aj.)$$
$$= 9,8000 + 60,0625 + 12,0125 = 81,8750$$

$$SQAxB(aj.) = SQA_LxB_L(aj.) + SQA_QxB_L(aj.) + SQA_CxB_L(aj.)$$
$$= 156,5333 + 13,5000 + 288,3000 = 438,3333 .$$

Verifica-se que

$$SQA(aj.) + SQB(aj.) + SQAxB(aj.) = 81,8750 + 32,6667 + 438,3333$$
$$= 552,8750 = SQT(aj.) .$$

O quadro de análise de variância com a decomposição ortogonal de SQT(aj.), e das somas de quadrados ajustadas dos efeitos fatoriais, é dado por:

Causas da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos (não ajustados)	5	495,0000		
Tratamentos (ajustados)	7	552,8750		
Fator A(aj.)	3	81,8750	27,2917	3,63*
A Linear (aj.)	1	9,8000	9,8000	1,30
A Quadrático (aj.)	1	60,0625	60,0625	8,00*
A Cúbico (aj.)	1	12,0125	12,0125	1,60
Fator B(aj.) $[B_L(aj.)]$	1	32,6667	32,6667	4,35
Interação AxB(aj.)	3	438,3333	146,1111	19,45**
A_LxB_L(aj.)	1	136,5333	136,5333	18,18**
A_QxB_L(aj.)	1	13,5000	13,5000	1,80
A_CxB_L(aj.)	1	288,3000	288,3000	38,38**
Resíduo	11	82,6250	7,5114	

* Significativo ao nível de 5% de probabilidade;
** Significativo ao nível de 1% de probabilidade.

Embora tenha sido significativa a interação AxB, determinando irrelevância para o estudo dos efeitos principais, a título de ilustração proceder-se-á ao ajuste da equação de regressão para o fator A, conforme procedimento apresentado em 3.9. Nesse caso, dada a significância do componente quadrático, ajustar-se-á uma equação do tipo:

$$\hat{Y}_i = \hat{b}_o + \hat{b}_1 P_{1i} + \hat{b}_2 P_{2i} \quad ,$$

onde:

$$\hat{b}_o = G/rv = 714/24 = 119/4 = 29{,}75$$

$$\hat{b}_1 = \frac{k}{\lambda_2 v} \; \frac{M_1 \left(\sum_{i=1}^{8} \ell_{1i} Q_i \right)}{K_1} = \frac{4}{1(8)} \; \frac{2\left[-3(-21) + \ldots + 3(-61/4)\right]}{40} = -7/10$$

$$\hat{b}_2 = \frac{k}{\lambda_2 v} \; \frac{M_2 \left(\sum_{i=1}^{8} \ell_{2i} Q_i \right)}{K_2} = \frac{4}{1(8)} \; \frac{1\left[1(-21) + \ldots + 1(-61/4)\right]}{8} = -31/16$$

sendo M_j $(j=1,2)$ constante utilizada para tornar os coeficientes dos polinômios ortogonais inteiros, e que consta de tabela apresentada por GOMES (1985); K_j $(j=1,2)$ é a soma dos quadrados dos coeficientes.

Considerando-se os níveis equidistantes 0, 1, 2 e 3, para A tem-se que:

$$P_1 = x = \frac{X - \bar{X}}{q} = X - 3/2$$

$$P_2 = x^2 - \frac{s^2 - 1}{12} = x^2 - \frac{(16-1)}{12} = x^2 - 5/4 \quad ,$$

onde s é o número de níveis do fator A.

Substituindo-se os termos na equação e fazendo-se as devidas simplificações, chega-se a:

$$\hat{Y}_i = 28{,}8625 + 5{,}1125 X_i - 1{,}9375 X_i^2$$

No caso de uma interação significativa, pode-se desdobrá-la, como é usual, considerando o efeito de cada fator dentro de cada nível do outro.

Assim, no presente contexto, pode-se desdobrar o efeito de B dentro de A. Para tanto, tem-se que estruturar os contrastes B d.a_1, B d.a_2, B d.a_3 e B d.a_4. Os coeficientes desses contrastes, e as respectivas somas de quadrados ajustadas, aparecem no quadro seguinte.

TRATAMENTOS	COEFICIENTES DOS CONTRASTES			
	B d.a_1	B d.a_2	B d.a_3	B d.a_4
(t_1) a_1b_1	-1	0	0	0
(t_5) a_1b_2	1	0	0	0
(t_2) a_2b_1	0	-1	0	0
(t_6) a_2b_2	0	1	0	0
(t_3) a_3b_1	0	0	-1	0
(t_7) a_3b_2	0	0	1	0
(t_4) a_4b_1	0	0	0	-1
(t_8) a_4b_2	0	0	0	1
$\sum_{i=1}^{8} \ell_{ji}^2$	2	2	2	2
SQ Contr.(aj.)	266,6667	60,1667	96,0000	48,1667

Verifica-se que esses contrastes, que correspondem aos contrastes Y_1, Y_2, Y_3 e Y_4 considerados no 1º caso, são associados a θ_2.

Os contrastes que estimam os efeitos linear, quadrático e cúbico de A, os quais são associados a θ_1, completam o conjunto de sete contrastes ortogonais.

Verifica-se que

$$SQB\ d.a_1(aj.) + SQB\ d.a_2(aj.) + SQB\ d.a_3(aj.) + SQB\ d.a_4(aj) =$$
$$= 266{,}6667 + 60{,}1667 + 96{,}0000 + 48{,}1667$$
$$= 471{,}000 = SQB(aj.) + SQAxB(aj.)\ .$$

O plano experimental adotado, com a equivalência estabelecida entre os tratamentos originais e as combinações dos níveis dos fatores, não permite decompor o efeito de A dentro de B, pois contrastes desse tipo não definem contrastes ortogonais, conforme a estrutura dos auto-vetores dada em [3.4.3.n] e [3.4.3.o].

A decomposição do efeito de A dentro de B seria possível, considerando-se o PBIB(2) do tipo GD semi-regular, com s=2 grupos e n=4 tratamentos por grupo, com esquema de associação:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}$$

onde dois tratamentos são primeiros associados se eles ocorrem em um mesmo grupo (linha), caso contrário são segundos associados. Com esse esquema de associação, tem-se o seguinte plano experimental, correspondendo ao plano SR9 de BOSE, CLATWORTHY e SHRIKHANDE (1954):

REPETIÇÕES	BLOCOS	TRATAMENTOS
I	1	1 3 2 4
	2	5 7 6 8
II	3	1 3 6 8
	4	5 7 2 4
III	5	1 5 2 6
	6	3 7 4 8
IV	7	1 5 4 8
	8	3 7 2 6
V	9	1 7 2 8
	10	3 5 4 6
VI	11	1 7 4 6
	12	3 5 2 8

Os parâmetros do delineamento são: $v=8$, $r=6$, $k=4$, $b=12$, $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=3$.

Nesse caso, os auto-valores de C são:

$$\theta_1 = \frac{\lambda_2 v}{k} = \frac{3(8)}{4} = 6$$

com multiplicidade $\alpha_1 = s-1 = 2-1 = 1$, e

$$\theta_2 = \frac{r(k-1)+\lambda_1}{k} = \frac{6(4-1)+2}{4} = \frac{18+2}{4} = \frac{20}{4} = 5 \ ,$$

com multiplicidade $\alpha_2 = s(n-1) = 2(4-1) = 2(3) = 6$.

Desta forma, para decompor ortogonalmente a SQT(aj.) tem-se que estruturar 1 contraste associado a θ_1 e 6 contrastes associados a θ_2. Para decompor o efeito de A dentro de B, estruturando-se os contrastes A_L, A_Q e A_C dentro de b_1 e b_2, respectivamente, tem-se a estrutura de coeficientes e a equivalência entre tratamentos e combinações dos níveis dos fatores, dada no quadro seguinte:

TRATAMENTOS	COMBINAÇÕES DOS NÍVEIS DOS FATORES	COEFICIENTES DOS CONTRASTES						
		$A_L d.b_1$	$A_Q d.b_1$	$A_C d.b_1$	$A_L d.b_2$	$A_Q d.b_2$	$A_C d.b_2$	B
1	a_1b_1	-3	1	-1	0	0	0	-1
3	a_2b_1	-1	-1	3	0	0	0	-1
5	a_3b_1	1	-1	-3	0	0	0	-1
7	a_4b_1	3	1	1	0	0	0	-1
2	a_1b_2	0	0	0	-3	1	-1	1
4	a_2b_2	0	0	0	-1	-1	3	1
6	a_3b_2	0	0	0	1	-1	-3	1
8	a_4b_2	0	0	0	3	1	1	1

Verifica-se que os contrastes $A_L d.b_1$, $A_Q d.b_1$, $A_C d.b1$, $A_L d.b_2$, $A_Q d.b_2$ e $A_C d.b_2$ são associados a θ_2, e o contraste referente ao efeito de B é associado a θ_1.

Adotando-se esse plano experimental, é possível decompor o efeito de A dentro de B, pois os contrastes que determinam tal decomposição definem contrastes ortogonais, conforme a estrutura dos auto-vetores dada em [3.4.3.n] e [3.4.3.o].

4º CASO: Experimento Fatorial 4x2 com Fatores Quantitativos e Níveis Não-Equidistantes para o Fator A

Nessa situação valem as mesmas considerações do 3º caso, com a diferença que os níveis do fator A são não equidistantes. Diante disso, os coeficientes para os contrastes linear, quadrático e cúbico de A foram determinados através do método apresentado por NOGUEIRA (1979), considerando-se os quatro níveis não equidistantes: 0, 1, 2 e 4.

Os coeficientes dos contrastes, com as respectivas somas de quadrados ajustadas, aparecem no quadro seguinte.

TRATAMENTOS	COEFICIENTES DOS CONTRASTES						
	A_L	A_Q	A_C	B_L	$A_L xB_L$	$A_Q xB_L$	$A_C xB_L$
(t_1) a_1b_1	-7	7	-3	-1	7	-7	3
(t_5) a_1b_2	-7	7	-3	1	-7	7	-3
(t_2) a_2b_1	-3	-4	8	-1	3	-12	-8
(t_6) a_2b_2	-3	-4	8	1	-3	12	8
(t_3) a_3b_1	1	-8	-6	-1	-1	8	6
(t_7) a_3b_2	1	-8	-6	1	1	-8	-6
(t_4) a_4b_1	9	5	1	-1	-9	-5	-1
(t_8) a_4b_2	9	5	1	1	9	5	1
$\sum_{i=1}^{8} \ell_{ji}^2$	280	308	220	8	280	308	220
SQContr.(aj.)	21,6072	57,0718	3,1960	32,6667	147,5048	6,7543	284,0742

Verifica-se que os contrastes A_L, A_Q e A_C são associados a θ_1 e os demais são associados a θ_2.

Tem-se que

$$SQA(aj.) = SQA_L(aj.) + SQA_Q(aj.) + SQA_C(aj.)$$

$$= 21{,}6072 + 57{,}0718 + 3{,}1960 = 81{,}8750$$

$$SQAxB(aj.) = SQA_L xB_L(aj.) + SQA_Q xB_L(aj.) + SQA_C xB_L(aj.)$$

$$= 147{,}5048 + 6{,}7543 + 284{,}0742 = 438{,}3333 .$$

Verifica-se que

$$SQA(aj.) + SQB(aj.) + SQAxB(aj.) = 81{,}8750 + 32{,}6667 + 438{,}3333$$

$$= 552{,}8750 = SQT(aj.) .$$

O quadro de análise da variância, com a decomposição ortogonal da SQT(aj.) e das somas de quadrados ajustadas dos efeitos fatoriais, é dado por:

Causas da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos (não ajustados)	5	495,0000		
Tratamentos (ajustados)	7	552,5750		
Fator A (aj.)	3	81,8750	27,2917	3,63*
A_L (aj.)	1	21,6072	21,6072	2,88
A_Q (aj.)	1	57,0718	57,0718	7,60*
A_C (aj.)	1	3,1960	3,1960	0,43
Fator B (aj.) [B_L(aj.)]	1	32,6667	32,6667	4,35
Interação AxB(aj.)	3	438,3333	146,1111	19,45**
$A_L x B_L$ (aj.)	1	147,5048	147,5048	19,64**
$A_Q x B_L$ (aj.)	1	6,7543	6,7543	0,90
$A_C x B_L$ (aj.)	1	284,0742	284,0742	37,82**
Resíduo	11	82,6250	7,5114	

* Significativo ao nível de 5% de probabilidade;
** Significativo ao nível de 1% de probabilidade.

Embora tenha sido significativa a interação AxB, determinando irrelevância para o estudo dos efeitos principais, a título de ilustração, proceder-se-á ao ajuste da equação de regressão para o fator A, conforme procedimento apresentado em 3.9. Nesse caso, dada a significância do componente quadrático, ajustar-se-á uma equação do tipo:

$$\hat{Y}_i = \hat{b}_o + \hat{b}_1 P_{1i} + \hat{b}_2 P_{2i} \quad ,$$

onde:

$\hat{b}_o = G/rv = 714/24 = 114/4 = 29,75$;

$$\hat{b}_1 = \frac{k}{\lambda_2 v} \frac{M_1(\sum_{i=1}^{8} \ell_{1i}Q_i)}{K_1} = \frac{4}{1(8)} \frac{4[(-7)(-21)+\ldots+9(-61/4)]}{280}$$

$$= -11/14$$

$$\hat{b}_2 = \frac{k}{\lambda_2 v} \frac{M_2(\sum_{i=1}^{8} \ell_{2i}Q_i)}{K_2} = \frac{4}{1(8)} \frac{7/2[7(-21)+\ldots+5(-61/4)]}{220}$$

$$= -525/352$$

sendo M_j (j=1,2) constante utilizada para tornar os coeficientes dos polinômios ortogonais inteiros, e K_j (j=1,2) é a soma dos quadrados dos coeficientes.

Considerando-se os níveis não equidistantes: 0, 1, 2 e 4, e utilizando-se o método de NOGUEIRA (1979), tem-se que:

$$P_{1i} = X_i - 7/4$$
$$P_{2i} = X_i^2 - \frac{29}{7} X_i + 2$$

Substituindo-se os termos na equação, e fazendo-se as devidas simplificações, chega-se a:

$$\hat{Y}_i = 28{,}1420 + 5{,}3933X_i - 1{,}4915X_i^2 \quad .$$

A obtenção dos coeficientes dos polinômios ortogonais com as correspondentes constantes M_j (j=1,2) e das expressões literais desses polinômios, conforme o método de NOGUEIRA (1979), e considerando-se os níveis não equidistantes: 0, 1, 2 e 4, encontra-se detalhada em CAMPOS (1984).

5. CONCLUSÕES

Considerando-se os objetivos deste trabalho, e com base nos resultados obtidos, pode-se concluir:

a) Quanto aos aspectos gerais da análise intrablocos de experimentos em PBIB:

a.1) Uma solução geral para o sistema de equações normais reduzidas $C\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{Q}$ é dada por

$$\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \Omega\underset{\sim}{Q}$$

onde:

$$\Omega = \sum_{j=1}^{v-1} \frac{1}{\theta_j} \underset{\sim}{u}_j \underset{\sim}{u}_j' \quad ; \text{ e}$$

$\underset{\sim}{u}_j$, $j=1,2,\ldots,v-1$ são auto-vetores ortonormais, associados aos auto-valores θ_j de C.

A matriz $\Omega = \{\Omega_{jj'}\}$ é inversa de Moore-Penrose de C, e para PBIB(2) do tipo GD tem a seguinte estrutura:

$$\Omega_{jj'} = \begin{cases} \dfrac{k(s-1)}{\lambda_2 v^2} + \dfrac{k(n-1)}{n[r(k-1)+\lambda_1]} & \text{, se } j=j' \\[2ex] \dfrac{k(s-1)}{\lambda_2 v^2} - \dfrac{k}{n[r(k-1)+\lambda_1]} & \text{, se } j\neq j' \text{ e } j \text{ e } j' \text{ são primeiros associados} \\[2ex] -\dfrac{k}{\lambda_2 v^2} & \text{, se } j\neq j' \text{ e } j \text{ e } j' \text{ são segundos associados.} \end{cases}$$

a.2) Considerando-se s=1, n=v e $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ da caracterização da Ω para PBIB(2) do tipo GD, obtem-se a forma geral da inversa de Moore-Penrose para BIB.

a.3) Dado que a eficiência nas comparações entre os tratamentos está associada aos λ's, quando houver maior interesse em determinadas comparações entre tratamentos, deve-se adotar planos experimentais de tal forma que esses tratamentos ocorram juntos em um maior número de blocos. Assim, para PBIB(2), se $\lambda_1 > \lambda_2$, os tratamentos cujas comparações são de maior interesse devem ser primeiros associados.

b) Quanto à decomposição da SQT(aj.) na análise intrablocos de PBIB:

b.1) A SQT(aj.) é decomposta em v-1 partes ortogonais, correspondendo às somas de quadrados ajustadas dos v-1 contrastes ortogonais Y_j e os testes de significância para os contrastes são exatos e independentes.

b.2) A soma de quadrados ajustada de cada contraste ortogonal é dada por:

$$SQY_j(aj.) = \frac{(\underset{\sim}{\ell}_j' \underset{\sim}{Q})^2}{\theta_j \underset{\sim}{\ell}_j' \underset{\sim}{\ell}_j} = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{v} \ell_{ji} Q_i\right)^2}{\theta_j \sum\limits_{i=1}^{v} \ell_{ji}^2},$$

onde:

θ_j é auto-valor não nulo de C;

$\underset{\sim}{\ell}_j$ é um auto-vetor associado a θ_j e que define o contraste Y_j; e

$$\sum_{j=1}^{v-1} SQY_j(aj.) = SQT(aj.) .$$

b.3) Desde que para PBIB(m) tem-se $\underline{m}$ auto-valores θ_h de C distintos e não nulos, com multiplicidades α_h, h=1,2,...,m, para se estruturar os v-1 contrastes que decompõem ortogonalmente a SQT(aj.) deve-se considerar α_h auto-vetores ortogonais associados a cada θ_h.

b.4) Para PBIB(2) do tipo GD, os dois auto-valores de C não nulos e distintos são: $\theta_1 = \lambda_2 v/k$ e $\theta_2 = [r(k-1)+\lambda_1]/k$, com multiplicidades $\alpha_1 = s-1$ e $\alpha_2 = s(n-1)$, respectivamente. Desta forma, para decompor a SQT(aj.) em partes ortogonais, deve-se estruturar s-1 contrastes ortogonais associados a θ_1 e s(n-1) contrastes ortogonais associados a θ_2. Os contrastes associados a θ_1 determinam comparações entre os grupos de tratamentos, enquanto que os contrastes associados a θ_2 determinam comparações dentro dos grupos de tratamentos.

b.5) A eficiência para a estimativa do contraste Y_j é dada por:

$$E_j = \frac{\theta_j}{r} \quad , \quad j=1,2,\ldots,v-1 \quad ,$$

ou seja, tanto maior a eficiência quanto maior o auto-valor de C ao qual está associado o contraste. Assim sendo, devem-se adotar planos experimentais de tal forma que os contrastes de maior interesse estejam associados aos maiores auto-valores. Além disso, para PBIB(2) do tipo GD, se $\lambda_2 v/[r(k-1)+\lambda_1] > 1$, então os contrastes de maior interesse deveriam definir comparações entre grupos de tratamentos, enquanto que se $\lambda_2 v/[r(k-1)+\lambda_1] < 1$, então os contrastes de maior interesse deveriam definir comparações dentro dos grupos de tratamentos.

b.6) A decomposição da SQT(aj.) para PBIB pode ser procedida pela mesma sistemática dos BIB, obtendo-se a soma de quadrados ajustada para o contraste Y_j [SQY_j(aj.)] através da eficiência E_j, ou seja, obtendo-se $SQY_j(aj.) = E_j \ SQY_j$.

b.7) Para ajuste de equações de regressão utilizando-se polinômios ortogonais, tanto para níveis equidistantes, como para não equidistantes, desde que os coeficientes dos contrastes Y_j definam os componentes linear, quadrático, cúbico, etc., então a SQReg.grau j(aj.) é obtida pela mesma expressão da $SQY_j(aj.)$ de (b.2), e a estimativa do coeficiente de regressão b_j é dada por:

$$\hat{b}_j = M_j \frac{\underset{\sim}{\ell}_j' \underset{\sim}{Q}}{\theta_j \underset{\sim}{\ell}_j' \underset{\sim}{\ell}_j} = \frac{M_j \left(\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji} Q_i \right)}{\theta_j \sum_{i=1}^{v} \ell_{ji}^2} ,$$

onde M_j é a constante utilizada para tornar os coeficientes ℓ_{ji} inteiros.

b.8) A expressão para a soma de quadrados ajustada para o contraste Y_j no caso de BIB, dada por

$$SQY_j(aj.) = \frac{k}{\lambda v} \frac{\left(\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji} Q_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{v} \ell_{ji}^2}$$

é obtida a partir da expressão da $SQY_j(aj.)$ para PBIB, dada em (b.2), considerando-se que nos BIB tem-se somente um auto-valor não nulo de C, $\theta = \lambda v/k$, com multiplicidade v-1. Ademais, a eficiência da estimativa de cada contraste nos BIB é: $E = \theta/r = \lambda v/rk$, e as expressões para SQRegressão (aj.) e $\hat{b}_j$ para o caso de BIB, são obtidas a partir das correspondentes expressões para PBIB, considerando-se $\theta = \lambda v/k$. Desta forma, neste contexto, os BIB ficam caracterizados como um caso particular dos PBIB, quando existe somente um auto-valor não nulo de C, $\theta = \lambda v/k$, com multiplicidade v-1.

b.9) Para experimentos fatoriais instalados em PBIB, deve-se adotar planos experimentais que, além de associar os contrastes de maior interesse, referentes a efeitos principais e interações, aos maiores auto-valores, permitam fazer os estudos de um fator dentro do outro que são de interesse.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, G.V.S. Planejamento e análise de ensaios em blocos incompletos parcialmente balanceados com duas classes de associados - $PBIB_{(2)}$. Piracicaba, 1986. 118 p. (Mestrado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).

BOSE, R.C.; CLATWORTHY, W.H.; SHRIKHANDE, S.S. Tables of partially balanced designs with two associate classes. Thechnical Bulletin. North Carolina Agricultural Experiment Station. Raleigh, 1954. 255 p.

BOSE, R.C. & CONNOR, W.S. Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 23: 367- 83, 1952.

BOSE, R.C. & MESNER, D.M. On linear associative algebra corresponding to association schemes of partially balanced designs. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 30: 21-38, 1959.

BOSE, R.C. & NAIR, K.R. Partially balanced incomplete block designs. Sankhyã, Calcutta, 4: 337- 72, 1939.

BOSE, R.C. & SHIMAMOTO, T. Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes. Journal of The Americam Statistical Association, Washington, 47: 151-84, 1952.

BRADLEY, R.A.; WALPONE, R.E.; KRAMER, C.Y. Intra- and inter-block analysis for factorials in incomplete block designs. Biometrics, Raleigh, 16: 566-81, 1960.

BRENNA, L.S. & KRAMER, C.Y. Factorial treatments in rectangular lattice designs. Journal of the Americam Statistical Association, Washington, 56: 368-78, 1961.

CAMPOS, H. Estatística aplicada à experimentação com cana-de-açúcar. Piracicaba, Piracicaba, FEALQ, 1984. 292 p.

CHAKRABARTI, M.C. Mathematics of design and analysis of experiments. London, Asia Publishing House, 1962. 120 p.

COCHRAN, W.G. & COX, G.M. Experimental designs. 2. ed. New York, John Wiley, 1957. 611 p.

CONNOR, W.S. The uniqueness of the triangular association scheme. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 29: 262-6, 1958.

CONNOR, W.S. & CLATWORTHY, W.H. Some theorems for partially balanced designs. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 25: 100-12, 1954.

COTTER, S.C.; JOHN, J.A.; SMITH, T.M. Multi-factor experiments in non-orthogonal designs. Journal of the Royal Statistical Society. Series B, London, 35: 361-7, 1973.

FEDERER, W.T. Experimental designs; theory and application. New York, Macmillan, 1955. 544 p.

FERREIRA, J.G. Análise intrablocos de um experimento em blocos incompletos equilibrados, aumentado pela adição de alguns tratamentos comuns a todos os blocos. Piracicaba, 1980. 57 p. (Mestrado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).

FERREIRA, L.E.P. A decomposição do resíduo em casos de heterocedasticidade nas análises de variância de ensaios em blocos casualizados. Piracicaba, 1978. 64 p. (Mestrado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).

FISHER, R.A. An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks. Annals of Eugenics, London, 10: 52-75, 1940.

GOMES, F.P. Método geral de análise para delineamentos em quadrados reticulados. In: SEMINÁRIOS DE ESTATÍSTICA, 10, São Pedro, 1954, p. 33-54.

GOMES, F.P. The solution of normal equations of experiments in incomplete blocks. Ciência e Cultura, São Paulo, 20: 733-46, 1967.

GOMES, F.P. Curso de estatística experimental. 11. ed., Piracicaba, Nobel, 1985. 466 p.

GRAYBILL, F.A. An introduction to linear statistical models. New York, McGraw-Hill, 1961. 463 p.

GRAYBILL, F.A. Introduction to matrices with applications in statistics. Belmont, Wadsworth, 1969. 372 p.

HARSHBARGER, B. Triple rectangular lattices. Biometrics, Raleigh, 5: 1-13, 1949.

HINKELMANN, K. Extended group divisible partially balanced incomplete block designs. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 35: 681-95, 1964.

HINKELMANN, K. & KEMPTHORNE, O. Two classes of group divisible partial diallel crosses. Biometrika, London, 50: 281-91, 1963.

HOFFMAN, A.J. On the the uniqueness of the triangular association scheme. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 31: 492-7, 1960.

HOFFMANN, R. Decomposição da soma de quadrados de tratamentos. Piracicaba, ESALQ, 1975, 22 p. (Mimeografado).

IEMMA, A.F. Modelos lineares; uma introdução para profissionais da pesquisa agropecuária. Piracicaba, ESALQ/FEALQ, 1985. 142 p.

IEMMA, A.F. Modelos Lineares; uma introdução para profissionais da pesquisa agropecuária. Londrina, UEL/Deptº de Matemática Aplicada, 1987. 263 p.

JOHN, J.A. Cyclic incomplete block designs. Journal of the Royal Statistical Society. Series B, London, 28: 345-60, 1966.

JOHN, J.A. & SMITH, T.M.F. Two-factor experiments in non-orthogonal designs. Journal of the Royal Statistical Society. Series B. London, 34: 401-9, 1972.

JOHN, P.W.M. Statistical design and analysis of experiments. New York, Macmillan, 1971. 356 p.

JOHN, P.W.M. Incomplete block designs. New York, Marcel Dekker, 1980. 101 p.

KAGEYAMA, S. Connectedness of two associate PBIB designs. Journal of Statistical Planning and Inference, Amsterdan, 7: 77-82, 1982.

KEMPTHORNE, O. The efficiency factor of an incomplete block design. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 27: 846-9, 1956.

KEMPTHORNE, O. The design and analysis of experiments. 2. ed., New York, Robert E. Krieguer, 1975.

KRAMER, C.Y. & BRADLEY, R.A. Intra-block analysis for factorials in two associate class group divisible designs. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 28: 349-61, 1957a.

KRAMER, C.Y. & BRADLEY, R.A. Examples of intra-block analysis for factorials in group divisible, partially balanced, incomplete block designs. Biometrics, Raleigh, 13: 197-224, 1957b.

KSHIRSAGAR, A. Balanced factorial designs. Journal of the Royal Statistical Society. Sieries B, London, 28: 559-67, 1966.

MALHEIROS, E.B. Efeitos da recuperação da informação interblocos na inferência estatística em ensaios em blocos incompletos equilibrados. Piracicaba, 1982. 110 p. (Doutoramento - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).

MONTGOMERY, D.C. Design and analysis of experiments. New York, John Wiley, 1976. 417 p.

NAIR, K.R. The recovery of inter-block information in incomplete block designs. Sankhyã, Calcutta, 6: 383-90, 1944.

NAIR, K.R. Rectangular lattices and partially balanced incomplete block designs. Biometrics, Raleigh, 7: 145-54, 1951.

NAIR, K.R. Analysis of partially balanced incomplete block designs illustrated on the simple square and rectangular lattices. Biometrics, Raleigh, 8: 122-55, 1952.

NAIR, K.R. & RAO, C.R. A note on partially balanced incomplete block designs. Science and Culture, Calcutta, 7: 568-9, 1942.

NOGUEIRA, I.R. Método Geral para obtenção de tabelas de polinômios ortogonais. Revista de Agricultura, Piracicaba, 53(4): 269-79, 1979.

NOGUEIRA, M.C.S. Resíduo específico para contrastes de tratamentos no delineamento inteiramente casualizado. Piracicaba, 1984. 164 p. (Doutoramento - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).

OLIVEIRA, A.C. Análise intrablocos de experimentos em blocos incompletos parcialmente balanceados com alguns tratamentos comuns adicionados em cada bloco. Piracicaba, 1985. 153 p. (Doutoramento - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).

PAVATE, M.V. Combined analysis of balanced incomplete block designs with some common treatments. Biometrics, Raleigh, 17: 111-9, 1961.

RAGHAVARAO, D. A generalization of group divisible designs. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 31: 756-71, 1960.

RAGHAVARAO, D. Constructions and combinatorial problems in designs of experiments. New York, John Wiley, 1971. 386 p.

RAGHAVARAO, D. & CHANDRASEKHARARAO, K. Cubic designs. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 35: 389-97, 1964.

RAMOS, P.C.F. Contribuição ao estudo dos planejamentos por blocos incompletos. São Paulo, 1975. 150 p. (Mestrado - Instituto de Matemática e Estatística/USP).

RAO, C.R. General methods of analysis for incomplete block designs. Journal of the American Statistical Association, Washington, 58: 541-61, 1947.

RAO, C.R. Linear statistical inference and its applications. 2. ed., New York, John Wiley, 1973. 625 p.

RAO, V.R. A note on balanced designs. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 29: 290-94, 1958.

REGAZZI, A.J. Análise de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos secundários em apenas alguns dos tratamentos principais. Piracicaba, 1984. 105 p. (Doutoramento - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).

ROY, P.M. Hierarchical group divisible incomplete block designs with m associate classes. Science and Culture, Calcutta, 19: 210-11, 1953/54.

SCHEFFÉ, H. The analysis of variance. New York, John Wiley, 1959 477 p.

SEARLE, S.R. Linear models. New York, John Wiley, 1971. 531 p.

SEIDEN, E. A note on the construction of partially balanced incomplete block designs with $v=28$, $n_1=12$, $n_2=15$ and $p^2_{11}=4$. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 37: 1783-9, 1966.

SHAH, B.V. On balancing in factorial experiments. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 29: 776-9, 1958.

SHAH, B.V. A generalization of partially balanced incomplete block designs. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 30: 1041-50, 1959.

SHAH, B.V. Balanced factorial experiments. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 31:502-14, 1960.

SHRIKHANDE, S.S. On the dual of some balanced incomplete block designs. Biometrics, Raleigh, 8: 66-72, 1952.

SHRIKHANDE, S.S. On a characterization of the triangular association scheme. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 30: 39- 47, 1959.

VARTAK, M.N. On an application of Kronecher product of matrices to statistical designs. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 26: 420-38, 1955.

VARTAK, M.N. The non-existance of certain PBIB designs. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 30: 1051-60, 1959.

YATES, F. A new method of arranging variety trials involving a large number of varieties. Journal of Agricultural Science, Cambridge, 26: 424-55, 1936a.

YATES, F. Incomplete randomized blocks. Annals of Eugenics, London, 7: 121-40, 1936b.

YATES, F. The recovery of inter-block information in variety trials arranged in three dimensional lattices. Annals of Eugenics, London, 9: 136-56, 1939.

YATES, F. The recovery of interblock information in balanced incomplete block designs. Annals of Eugenics, London, 10: 317-25, 1940.

ZELEN, M. The use of group divisible designs for confounded assymetrical factorial arrangements. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 29: 22-40, 1958.