ANÁLISE DE GRUPOS DE EXPERIMENTOS EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS COM ALGUNS TRATAMENTOS COMUNS NAS PARCELAS

FRANCISCO IVALDO OLIVEIRA MELO
Engenheiro-Agrônomo

Orientador: Prof. Dr. HUMBERTO DE CAMPOS

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Maio - 1987

À minha esposa Quelzia e à
nossa filha Débora, razões
de ser da minha existência,

DEDICO

AGRADECIMENTOS

A Deus, meu refúgio, que me concedeu forças para não retroceder diante de tantos obstáculos surgidos quando da realização deste trabalho.

Ao Professor Dr. Humberto de Campos, Professor Titular do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pela sugestão do tema e pela inestimável amizade e, particularmente, pela orientação sempre segura e extremamente amiga.

Ao Professor Dr. Antonio Francisco Iemma, Professor Adjunto do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pelo auxílio e sugestões proporcionadas.

Ao Prof. Ivan Barbosa Machado Sampaio, pelo incentivo no início da minha vida profissional.

À Empresa de Pesquisa Agropecuária do Ceará (EPACE) e à Universidade Federal do Ceará, pela oportunidade oferecida para realização do curso.

À Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA), pelo auxílio financeiro prestado.

À Engª-Agrª Quelzia Maria Silva Melo, pelo constante incentivo e dedicação.

Aos Professores do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pelos ensinamentos e pela solicitude com a qual invariavelmente me atenderam.

A Srtª Rosa Maria Alves, pela paciente execução dos trabalhos de datilografia e pela amizade sempre demonstrada.

Ao amigo Prof. Dr. Evoneo Berti Filho, pela versão do resumo para o inglês.

Aos colegas do curso, pela amizade e troca de idéias.

Aos Professores do Departamento de Fitotecnia e à Diretoria do Centro de Ciências Agrárias, da Universidade Federal do Ceará, em especial aos Professores: José Ferreira Alves, Erimá Cabral do Vale, Francisco José Alves Fernandes Távora e Carlos Brunet Martins, pelas facilidades concedidas.

Aos amigos Levi de Moura Barros e Maria da Conceição Mesquita de Barros, pelo inestimável apoio.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pelas atenções dispensadas.

A todos que contribuíram para a realização do curso e deste trabalho.

Í N D I C E

Pág.

ANÁLISE DE GRUPOS DE EXPERIMENTOS EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS COM ALGUNS TRATAMENTOS COMUNS NAS PARCELAS

Autor: Francisco Ivaldo Oliveira Melo

Orientador: Prof. Dr. Humberto de Campos

R E S U M O

Neste trabalho estudou-se um grupo de experimentos em parcelas subdivididas, em blocos casualizados, onde os tratamentos das parcelas são distintos de um experimento para outro, com apenas alguns destes tratamentos presentes em todos os ensaios (tratamentos comuns). O objetivo foi apresentar um método geral de análise para esse tipo de ensaio.

Para tanto, adotou-se o modelo:

$$y_{ijk(\ell)} = \mu + g_\ell + b_{j(\ell)} + t_{i(\ell)} + (gc)_{\ell f} + (tb)_{ij(\ell)} + t'_k + (gt')_{\ell k} + (tt')_{ik(\ell)} + (gct')_{\ell fk} + e_{ijk(\ell)}$$

com:

$\ell = 1, 2, \ldots, L$ (número de experimentos ou grupos)

$j = 1, 2, \ldots, r_\ell$ (número de blocos por experimento ou grupo)

$k = 1, 2, \ldots, K$ (número de tratamentos secundários)

$f = 1, 2, \ldots, C$ (número de tratamentos primários comuns a todos os grupos)

$i = 1, 2, \ldots, p_\ell$ (número de tratamentos primários no grupo ℓ)

$p_\ell = C + N_\ell$

N_ℓ = (número de tratamentos regulares no grupo ℓ)

$V = C + \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{h=1}^{N_\ell} n_{\ell h}$ (número total de tratamentos primários)

$h = 1, 2, \ldots, N_\ell$

$N = K \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell$ (número total de subparcelas)

onde:

$y_{ijk(\ell)}$ = valor observado na subparcela que recebeu o k-ésimo tratamento secundário, dentro do i-ésimo tratamento primário, no j-ésimo bloco do ℓ-ésimo ensaio;

μ = efeito da média;

g_ℓ = efeito do ℓ-ésimo grupo ou experimento;

$b_{j(\ell)}$ = efeito do j-ésimo bloco no ℓ-ésimo grupo ou experimento;

$t_{i(\ell)}$ = efeito do i-ésimo tratamento primário no ℓ-ésimo grupo ou experimento;

$(gc)_{\ell f}$ = efeito da interação entre o ℓ-ésimo grupo ou experimento e o f-ésimo tratamento primário comum;

$(tb)_{ij(\ell)}$ = efeito residual da parcela no j-ésimo bloco que recebeu o i-ésimo tratamento primário no ℓ-ésimo grupo ou experimento, caracterizado como componente do erro (a);

t'_k = efeito do k-ésimo tratamento secundário;

$(gt')_{\ell k}$ = efeito da interação entre o ℓ-ésimo grupo ou experimento e o k-ésimo tratamento secundário;

$(tt')_{ik(\ell)}$ = efeito da interação entre o i-ésimo tratamento primário e o k-ésimo tratamento secundário no ℓ-ésimo grupo ou experimento;

$(gct')_{\ell fk}$ = efeito da interação entre o ℓ-ésimo grupo ou experimento, o f-ésimo tratamento primário comum e o k-ésimo tratamento secundário;

$e_{ijk(\ell)}$ = efeito residual das subparcelas, caracterizado como componente do erro (b).

Considerou-se a existência de correlação constante, ρ, entre duas subparcelas de uma mesma parcela e independência entre subparcelas de parcelas distintas, resultando:

$$COV[y_{ijk(\ell)}, y_{i'j'k'(\ell')}] = \begin{cases} \sigma^2, \text{ se } \ell=\ell', i=i', j=j', k=k' \\ \rho\sigma^2, \text{ se } \ell=\ell', i=i', j=j', k\neq k' \\ 0, \text{ em outros casos.} \end{cases}$$

Sob essas condições foram determinados: o sistema de equações normais, os estimadores dos efeitos dos parâmetros, as somas de quadrados dos parâmetros e a justificativa do teste F.

Um exemplo numérico é apresentado para ilustrar o método proposto.

ANALYSIS OF GROUPS OF EXPERIMENTS IN SPLIT-PLOTS WITH SOME COMMON TREATMENTS IN THE PLOTS

Author: Francisco Ivaldo Oliveira Melo
Adviser: Prof. Dr. Humberto de Campos

S U M M A R Y

This research deals with a group of experiments with split-plots, in randomized blocks, where the treatments of the plots are distinct one from another, but with only some of the treatments present in all the experiments (common treatments). The purpose of this study was to present a general method of analysis for this type of experiment. Therefore the following model was adopted:

$$y_{ijk(\ell)} = \mu + g_\ell + b_{j(\ell)} + t_{i(\ell)} + (gc)_{\ell f} + (tb)_{ij(\ell)} + $$

$$+ t'_k + (gt')_{\ell k} + (tt')_{ik(\ell)} + (gct')_{\ell fk} + e_{ijk(\ell)}$$

with:

$\ell = 1, 2, \ldots, L$ (number of experiments or groups)

$j = 1, 2, \ldots, r_\ell$ (number of blocks per experiments or groups)

$k = 1, 2, \ldots, K$ (number of secundarys treatments)

$f = 1, 2, \ldots, C$ (number of primarys treatments common to all groups)

$i = 1, 2, \ldots, p_\ell$ (number of primarys treatments in the group ℓ)

$p_\ell = C + N_\ell$

N_ℓ = (number of regular treatments in the group ℓ)

$V = C + \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{h=1}^{N_\ell} n_{\ell h}$ (total number of primarys treatments)

$h = 1, 2, \ldots, N_\ell$

$N = K \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell$ (total number of subplots)

where:

$y_{ijk(\ell)}$: value observed in the subplot that received the $k^{\underline{th}}$ secondary treatment, within the $i^{\underline{th}}$ primary treatment, in the $j^{\underline{th}}$ block of the $\ell^{\underline{th}}$ experiment;

μ : effect of the mean;

g_ℓ : effect of the $\ell^{\underline{th}}$ group or experiment;

$b_{j(\ell)}$: effect of the $j^{\underline{th}}$ block in the $\ell^{\underline{th}}$ group or experiment;

$t_{i(\ell)}$: effect of the $i^{\underline{th}}$ primary treatment in the $\ell^{\underline{th}}$ group or experiment;

$(gc)_{\ell f}$: effect of the interaction between the $\ell^{\underline{th}}$ group or experiment and the $f^{\underline{th}}$ common primary treatment;

$(tb)_{ij(\ell)}$: residual effect of the plot in the $j^{\underline{th}}$ block that received the $i^{\underline{th}}$ treatment in the $\ell^{\underline{th}}$ group or experiment characterized as component of the error (a):

t'_k : effect of $k^{\underline{th}}$ secondary treatment;

$(gt')_{\ell k}$: effect of the interaction between the $\ell^{\underline{th}}$ group or experiment the $k^{\underline{th}}$ secondary treatment;

$(tt')_{ik(\ell)}$: effect of the interaction between the $i^{\underline{th}}$ primary treatment and the $k^{\underline{th}}$ secondary treatment in the $\ell^{\underline{th}}$ group or experiment

$(gct')_{\ell fk}$: effect of the interaction between the $\ell^{\underline{th}}$ group or experiment, the $f^{\underline{th}}$ primary common treatment and the $k^{\underline{th}}$ secondary treatment;

$e_{ijk(\ell)}$: residual effect of the subplots, characterized as component of the error (b);

The existence of constant correlaction, ρ, between two subplots from a same plot and the independence among subplots of distinct plots was considered, thus resulting:

$$COV[y_{ijk(\ell)}, y_{i'j'k'(\ell')}] = \begin{cases} \sigma^2, \text{ if } \ell=\ell', i=i', j=j', k=k' \\ \rho\sigma^2, \text{ if } \ell=\ell', i=i', j=j', k\neq k' \\ 0 \text{ , in other cases} \end{cases}$$

The following aspects were determined under such conditions: the system of normal equations, the estimation of the effect of the parameters, the sum of squares of the parameters, as well as the justification of the F test. A numerical example is presented to illustrate the proposed method.

1. INTRODUÇÃO

Os experimentos em parcelas subdivididas têm larga utilização, nas mais diversas áreas de pesquisa, porque permitem estudar a um só tempo, dois tipos diferentes de tratamentos. Sua utilização é bem ampla, apesar de uma redução do número de graus de liberdade, quando comparado ao esquema fatorial, devido à existência de dois resíduos.

A grande utilidade destes experimentos, na pesquisa agropecuária, vem sendo ressaltada por autores consagrados, como STEEL e TORRIE (1960), SNEDECOR e COCHRAN (1967), COCHRAN e COX (1976), PIMENTEL GOMES (1978), dentre outros.

Segundo IEMMA (1981), a farta bibliografia existente, em relação a tais ensaios, tem mostrado uma certa tendência dos experimentadores para a disposição dos tratamentos principais em blocos casualizados, e esse fato pode, de certo modo, ser justificado pela grande simplicidade e alta eficiência desses delineamentos.

Existem situações, no entanto, em que o experimentador, por alguma razão, é levado a realizar grupos de experimentos em parcelas subdivididas, onde os tratamentos são distintos de um experimento para outro, com apenas alguns dos tratamentos primários presentes em todos os ensaios.

Na revisão bibliográfica, não se encontrou nenhum trabalho que abordasse especificamente tal caso. Assim, propôs-se estudar este tema, tendo como objetivos deduzir a análise de variância, justificando a aplicação do teste "F".

Objetivando ser facilmente assimilado e usado pelos pesquisadores agropecuários, tem-se, também, uma ilustração do método proposto.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Ensaios em Parcelas Subdivididas

Segundo LEONARD e CLARK (1939), os ensaios em parcelas subdivididas tiveram seu início com Yates, por volta de 1933, seguido de Le Clerg, em 1937, e Goulden, em 1939.

O esquema de experimento, em parcelas subdivididas, é apresentado, dentre outros, por KEMPTHORNE (1952), ANDERSON e BANCROFT (1952), STEEL e TORRIE (1960), COCHRAN e COX (1976), como sendo uma variação do experimento fatorial com T e T' tratamentos, onde os tratamentos das parcelas são dispostos em qualquer tipo de delineamento, sendo os mais usados os em blocos casualizados, e os tratamentos T' das subparcelas, dispostos ao acaso dentro de cada parcela.

LEAL (1979) enfoca o uso dos experimentos em parcelas subdivididas, na análise dos ensaios com medidas repetidas sobre unidades experimentais, como uma alternativa para o uso da análise multivariada, quando se constata a uniformidade da matriz de variâncias e covariâncias. Sob esse prisma, concorda com STEEL e TORRIE (1960), CALZADA BENZA (1970) e LITTLE e HILLS (1972), os quais argumentam que os experimentos onde observações sucessivas são feitas sobre a mesma unidade experimental, durante um certo intervalo de tempo, em muitos aspectos se assemelham a experimentos em parcelas subdivididas, nos quais cada unidade experimental é subdividida em subunidades distintas.

Para STEEL e TORRIE (1960) existem algumas diferenças fundamentais entre as análises desses dois tipos de experimentos. Por exemplo, na análise de ensaios com medidas repetidas, quando o delineamento é o de blocos casualizados, a soma de quadrados da interação blocos x medidas no tempo deve ser sempre separada do erro, dada a sua importância nas conclusões sobre o ensaio.

Para LEAL (1979), a diferença importante, entre os delineamentos em parcelas subdivididas e os ensaios com medidas repetidas sobre unidades experimentais, consiste na composição da matriz de variâncias e covariâncias, que para medidas repetidas no tempo é do tipo:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & & \sigma_{pp} \end{bmatrix},$$

correspondendo muito mais à estrutura exigida para a análise multivariada, enquanto que, para ensaios em parcelas subdivididas, existe a pressuposição mais restritiva que as observações têm variâncias homogêneas e são igualmente correlacionadas, gerando uma matriz de variâncias e covariâncias uniforme. Então

$$\sigma^2_{kk'} = \begin{cases} \sigma^2, & \text{se } k=k' \\ \rho\sigma^2, & \text{se } k\neq k' \end{cases}, \text{ resultando}$$

$$\Sigma^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho & \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix} \sigma^2.$$

COCHRAN e COX (1976) apresentam várias considerações sobre o experimento em parcelas subdivididas, e mostram ser vantajoso o seu uso, se os efeitos de T' (tratamentos secundários e da interação TxT' são de maior in teresse que os efeitos de T (tratamentos primários). Afirmam, ainda, que o aumento da precisão de T' e da interação TxT' se obtem mediante a redução da precisão de T.

Assim como em CHAKRABARTI (1962), LEAL (1979) e DINIZ (1980), dentre outros, COCHRAN e COX (1976) mostram que se supõe existir uma correlação, ρ, constante entre erros experimentais do tipo e_{ijk} e $e_{ijk'}$, para quaisquer subparcelas de uma mesma parcela, tal que:

$$E(e_{ijk}) = 0 \quad , \quad V(e_{ijk}) = \sigma^2$$

$$Cov(e_{ijk}, e_{i'j'k'}) = \begin{cases} \rho\sigma^2, & \text{se } i=i', j=j', k\neq k' \\ 0, & \text{em outros casos} \end{cases}$$

Desse modo, exemplificam que, para duas subparcelas por parcela, a variância do erro de uma parcela total é:

$$E(e_{ij1}, e_{ij2}) = \sigma^2 + \sigma^2 + 2\rho\sigma^2 = 2(1 + \rho)\sigma^2$$

e a variância para o tratamento (primário) é:

$$[1 + (\beta - 1)\rho]\sigma^2 \quad .$$

No que se refere à eficiência dos testes para tratamentos primários e secundários, TAYLOR (1950), KEMPTHORNE (1952), FEDERER (1955), COCHRAN e COX (1976) e PIMEN

TEL GOMES (1978), dentre outros, são unânimes em afirmar a maior precisão existente no teste de tratamentos secundários.

Para COCHRAN e COX (1976) a maior precisão obtida no teste dos tratamentos secundários pode ser justificada pelo coeficiente, ρ, de correlação que, na prática é quase sempre positivo.

Este fato pode ser melhor interpretado quando se toma a estimativa não tendenciosa para ρ, citada em LEAL (1979)

$$\hat{\rho} = \frac{QMRes(a)}{QMRes(a) + QMRes(b)}$$

KEMPTHORNE (1952) afirma que, para I tratamentos primários distribuídos em J blocos e K tratamentos secundários, estruturado em parcelas subdivididas, a eficiência estimada para tratamentos primários, comparativamente aos ensaios em blocos casualizados, é dada por:

$$E_1 = \frac{E'}{W} \quad ,$$

enquanto que, para tratamentos secundários e a interação é dada por:

$$E_2 = \frac{E'}{E} \quad ,$$

onde

$$W = QMRes(a) \; ; \quad E = QMRes(b) \quad e \quad E' = \frac{(I-1)W + I(K-1)E}{IK-1}$$

Por sua vez, FEDERER (1955) propõe fórmulas para calcular a eficiência dos ensaios em parcelas subdivididas em relação aos ensaios em blocos casualizados. Assim, a eficiência para comparações de tratamentos primários é dada por:

$$E_3 = \frac{(p-1)E_a + p(q-1)E_b}{(pq-1)E_a}$$

enquanto que, para comparações de tratamentos secundários e interação, a eficiência é

$$E_4 = \frac{(p-1)E_a + p(q-1)E_b}{(pq-1)E_b} ,$$

para p níveis do tratamento principal e q níveis do tratamento secundário, com E_a = erro(a) e E_b = erro (b).

Naturalmente, as fórmulas apresentadas por KEMPTHORNE (1952) e FEDERER (1955) são idênticas.

Considerando o modelo,

$$y_{ijk} = \mu + t_i + b_j + (tb)_{ij} + t'_k + (tt')_{ik} + e_{ijk} ,$$

com i = 1, 2, ..., I; j = 1, 2, ..., J e k= 1, 2, ..., K onde:

y_{ijk} = valor observado da ik-ésima subparcela, no j-ésimo bloco;

μ = efeito da média geral;

t_i = efeito do i-ésimo tratamento principal (T);

b_j = efeito do j-ésimo bloco;

$(tb)_{ij}$ = efeito associado a ij-ésima observação ou efeito residual das parcelas;

t'_k = efeito do k-ésimo tratamento secundário (T');

$(tt')_{ik}$ = efeito da interação do i-ésimo tratamento principal (T) com o k-ésimo tratamento secundário (T');

e_{ijk} = efeito associado a ijk-ésima observação ou efeito residual das subparcelas.

CONDÉ (1974) faz um estudo dos componentes de variância nos experimentos em parcelas subdivididas, considerando aleatórios apenas os resíduos de parcelas e subparcelas, cujos resultados são sumarizados na Tabela 1.

TABELA 1 - Esquema da análise de variância e esperança dos quadrados médios, de um ensaio em parcelas subdivididas, em blocos casualizados (CONDÉ, 1974).

Causa de Variação	G.L.	Esperança dos Quadrados Médios*
Blocos	J-1	$\sigma^2 + K\sigma^2_\delta + f_1(\theta)$
Tratamentos (T)	I-1	$\sigma^2 + K\sigma^2_\delta + f_2(\theta)$
Resíduo (a)	(I-1)(J-1)	$\sigma^2 + K\sigma^2_\delta$
Tratamentos (T')	K-1	$\sigma^2 + f_3(\theta)$
Interação TxT'	(I-1)(K-1)	$\sigma^2 + f_4(\theta)$
Resíduo (b)	I(J-1)(K-1)	σ^2
Total	IJK-1	

(*) $f_1(\theta) = IK \sum_j b_j^2 /(J-1)$

$f_2(\theta) = JK \sum_i t_i^2 /(I-1)$

$f_3(\theta) = IJ \sum_k t'^2_k/(K-1)$

$f_4(\theta) = J \sum_{i,k} (tt')^2_{ik}/(I-1)(K-1)$

Segundo CHAKRABARTI (1962), HARTER (1961) e LEAL (1979), dentre outros, nos ensaios em parcelas subdivididas, sob a hipótese de normalidade dos erros, as somas de quadrados dos erros são independentes e distribuídas como qui-quadrados. Assim, para CHAKRABARTI (1962), num ensaio como o descrito na Tabela 1, encontra-se, através da Regra de Cochran, que a soma de quadrados devida aos tratamentos primários e a soma de quadrados devida ao resíduo (a) são independentes e distribuídas segundo qui-quadrados com (I-1) e (I-1)(J-1) graus de liberdade, respectivamente. Do mesmo modo, as somas de quadrados relativas aos tratamentos secundários e à interação tratamentos primários x tratamentos secundários são independentes da soma de quadrados do resíduo (b) e cada uma é distribuída segundo um qui-quadrado com (K-1), (I-1)(K-1) e I(J-1)(K-1) graus de liberdade, respectivamente. Com base nessas propriedades, são obtidos os valores adequados para os testes "F", envolvendo tratamentos primários, tratamentos secundários e interação tratamentos primários x secundários.

As hipóteses preliminares de interesse, em ensaios em parcelas subdivididas são:

$H_o(1)$: $t_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, I$ tratamentos primários

$H_o(2)$: $t'_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, K$ tratamentos secundários

$H_o(3)$: $(tt')_{ik} = 0$, interação entre tratamentos primários e secundários.

Os resíduos apropriados para testar estas hipóteses são evidentes, quando se observam as esperanças dos quadrados médios apresentadas na Tabela 1.

Se as hipóteses de nulidade $H_o(1)$ e/ou $H_o(2)$ forem rejeitadas, conclui-se pela significância de pelo menos um, dentre os vários contrastes entre os tratamentos. Neste caso, recomenda-se a utilização dos métodos de comparações múltiplas de médias, como os de Tukey, Duncan, Scheffé, etc.

PIMENTEL GOMES (1978) e LEAL (1979), dentre outros, afirmam que quando a interação TxT' é significativa, o esquema da análise de variância deverá ser modificado, pois há indício de comportamento distinto dos tratamentos secundários em relação aos tratamentos primários. Assim, recomenda-se que seja estudado o efeito dos tratamentos secundários dentro de cada tratamento primário, isoladamente, ou vice-versa.

No que concerne à variância de funções lineares estimáveis de interesse, STEEL e TORRIE (1960) apresentam resultados que podem ser resumidos conforme a seguinte tabela:

Comparação entre Médias dos Efeitos Estimados	Estimativas das Variâncias
$\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}$	(2/JK) QMRes(a)
$\hat{m}_k - \hat{m}_{k'}$	(2/IJ) QMRes(b)
$\hat{m}_{ik} - \hat{m}_{ik'}$	(2/J) QMRes(b)
$\hat{m}_{ik} - \hat{m}_{i'k}$	(2/JK)[QMRes(a)+(K-1)QMRes(b)]

onde, I = número de tratamentos primários;

J = número de repetições;

K = número de tratamentos secundários;

i e k referem-se aos tratamentos primários e secundários, respectivamente;

e, no teste de $\hat{m}_{ik}-\hat{m}_{i'k}$, a variável observada tem distribuição aproximada de "t", com n graus de liberdade. Nesse caso, n é obtido pela expressão proposta por Satterthwaite, em 1946, ou seja:

$$n = \frac{[QMRes(a) + (K-1)\ QMRes(b)]^2}{\dfrac{[QMRes(a)]^2}{GLRes(a)} + \dfrac{[(K-1)\ QMRes(b)]^2}{GLRes(b)}}$$

2.2. Ensaios em Blocos Incompletos

TAYLOR (1957) afirma que os delineamentos em blocos incompletos foram introduzidos por Yates em 1936, objetivando eliminar a heterogeneidade intrablocos pela diminuição do número de parcelas.

RAO (1947) propõe um método geral para analisar os delineamentos em blocos incompletos, onde aborda: a análise intrabloco, o ajuste da variável principal através de uma variável auxiliar, o caso de parcelas perdidas e a recuperação da informação interbloco. Tudo se passa como se a análise fosse feita para um ensaio em blocos casualizados completos, com a diferença que ocorre o ajuste da soma de quadrados de tratamentos.

2.3. Ensaios em Parcelas Subdivididas em Blocos Incompletos

São raros os ensaios em parcelas subdivididas em blocos incompletos. GILL (1978) afirma que um dos primeiros estudos realizados é devido a Robinson, e foi desenvolvido em 1967. Em seu estudo, ROBINSON (1967) propõe um ensaio envolvendo $\underline{t}$ níveis do tratamento primário A e $\underline{s}$ níveis do tratamento secundário B. Então para $\ell = 1, 2, \ldots, s$, o autor distribue os $\underline{s}$ níveis do tratamento secundário em grupos de $\underline{k}$ subparcelas ($k < s$) de cada parcela, segundo um esquema de blocos incompletos balanceados, considerando cada parcela como um bloco incompleto para tratamentos secundários.

Por sua vez, REES (1969), utilizando ensaios baseados no produto de Kronecker, enfoca o problema do confundimento nos ensaios em parcelas subdivididas, citando como precursores do processo Finey (1946) e Kempthorne (1947). O autor afirma que, sob certas condições, a análise de ensaios dessa natureza muito se assemelha à análise de ensaios com parcelas subdivididas em blocos incompletos.

IEMMA (1981) apresenta um estudo detalhado de experimentos em parcelas subdivididas com os tratamentos principais dispostos em blocos incompletos balanceados. O autor determina o sistema de equações normais, as matrizes de dispersão para os parâmetros básicos, os componentes de variância para os efeitos fixos e aleatórios, os critérios para os testes das hipóteses de nulidade usuais e os critérios para as comparações múltiplas pelo método de Tukey, baseado nas variâncias das funções lineares estimáveis.

2.4. Grupos de Experimentos com Tratamentos Comuns

FEDERER (1956), necessitando de um delineamento experimental mais eficiente na comparação de plântulas ("seedlings"), e variedades ("clones"), desenvolve uma metodologia que permite comparar estas novas variedades, chamadas regulares, com as variedades já existentes, chamadas de comuns; denominando este novo delineamento de "Delineamento aumentado".

PIMENTEL GOMES e GUIMARÃES (1958) propõem a análise intrablocos de um grupo de experimentos em blocos completos casualizados, onde alguns tratamentos são comuns a todos os grupos. Estes tratamentos são considerados como tratamentos comuns e os demais, específicos para cada grupo, são denominados tratamentos regulares.

PIMENTEL GOMES (1970) sugere análise conjunta de um grupo de experimentos em blocos casualizados com alguns tratamentos comuns, onde o número de repetições para os tratamentos varia de um experimento para outro.

Comparando-se os trabalhos de FEDERER (1956) e PIMENTEL GOMES e GUIMARÃES (1958) observa-se que há uma certa semelhança entre eles, onde cada bloco do delineamento aumentado corresponde a um experimento em blocos casualizados completos, considerado sem repetição (VIZONI, 1984).

FEDERER (1961a, 1961b) define o delineamento aumentado como um delineamento padrão qualquer onde novos tratamentos são adicionados podendo ser em blocos completos, incompletos, etc, e os tratamentos adicionais podem ou não ser repetidos o mesmo número de vezes.

PAVATE (1961) sugere um método simplificado para obtenção dos componentes dos tratamentos ajustados para efetuar a análise conjunta de um grupo de experimentos, quando estes individualmente tenham sido planejados em blocos incompletos equilibrados.

AFONJA (1968) apresenta também um método de análise conjunta para g experimentos em blocos incompletos balanceados com alguns tratamentos comuns. Considera os trabalhos de PIMENTEL GOMES e GUIMARÃES (1958) e PAVATE (1961) como casos particulares do método geral sugerido.

VIZONI (1984) desenvolve metodologia para a análise de experimentos em blocos aumentados com parcelas subdivididas no tempo, considerando c tratamentos comuns dispostos em b blocos e z tratamentos regulares, os quais aparecem uma única vez em um determinado ano. Considera ainda, que todos os blocos têm o mesmo número de parcelas K.

3. MATERIAL

Os dados utilizados neste trabalho estão apresentados nas Tabelas 2 e 3 e referem-se à produção de cana-planta, em t/ha, dos ensaios de Tolerância Varietal ao Raquitismo da Soqueira, em Cana-de-Açúcar, realizados em Araras (ensaio 1) e Lençóis Paulista (ensaio 2), no Estado de São Paulo, no ano de 1978, fornecidos pelo IAA-PLANALSUCAR - Piracicaba, SP.

Os experimentos foram realizados em blocos ao acaso com 4 repetições, no esquema de parcelas subdivididas. Nas parcelas foram colocadas as variedades e nas subparcelas foram considerados os aspectos: plantas sadias e plantas com o raquitismo da soqueira (RSD).

Denominou-se de tratamentos comuns as variedades CB 41-76, IAC 52/326 e NA 56-79, por estarem presentes nos dois ensaios e de tratamentos regulares as demais variedades.

TABELA 2 - Produção de Cana-de-açúcar, em t/ha, referente ao ensaio 1, realizado em Araras-SP, 1976.

VARIEDADES	FITOSSANIDADE	BLOCOS I	II	III	IV	TOTAL
CB 41-76	Sadia	66,0	52,4	99,4	115,0	332,8
	RSD	63,7	64,9	65,9	57,9	252,4
IAC 52/326	Sadia	69,1	62,2	57,7	81,3	270,3
	RSD	48,6	81,7	37,7	55,3	223,3
NA 56-79	Sadia	68,1	65,4	68,5	75,2	277,2
	RSD	60,8	75,7	40,8	73,7	251,0
CB 36-24	Sadia	64,5	67,1	42,4	54,3	228,3
	RSD	54,1	44,6	48,8	63,0	210,5
CB 40-69	Sadia	76,6	78,7	71,6	73,4	300,3
	RSD	62,6	59,5	62,7	48,9	233,7
CB 41-14	Sadia	69,5	74,8	85,2	62,9	292,4
	RSD	77,3	69,3	60,7	40,9	248,2
CB 46-47	Sadia	52,6	34,1	42,1	54,8	183,6
	RSD	35,5	32,1	40,1	40,8	148,5
CB 47-355	Sadia	63,7	55,1	46,6	53,8	219,2
	RSD	51,7	57,8	61,4	62,8	233,7
CCB 50-34	Sadia	68,0	69,8	84,8	55,2	277,8
	RSD	39,9	45,4	48,2	43,4	176,9
CB 60-31	Sadia	47,1	55,4	57,9	58,8	219,2
	RSD	54,3	56,8	37,3	45,9	194,3
CP 51-22	Sadia	44,4	64,5	65,2	51,2	225,3
	RSD	62,2	54,4	65,9	43,8	226,3
CP 52-48	Sadia	52,4	59,6	77,4	69,2	258,6
	RSD	59,1	38,4	39,2	47,7	184,4
IAC 47/31	Sadia	67,0	50,1	63,1	56,9	237,1
	RSD	48,8	42,6	69,3	70,4	231,1
IAC 49/131	Sadia	50,3	70,9	53,4	42,0	216,6
	RSD	46,2	55,6	41,0	38,5	181,3
IAC 50/134	Sadia	95,0	52,7	63,7	63,1	274,5
	RSD	73,9	54,7	51,2	58,7	238,5
IAC 55/26	Sadia	68,1	48,2	74,0	60,2	250,5
	RSD	65,5	50,3	45,4	57,4	218,6
PR 1085	Sadia	39,1	35,5	45,4	41,4	161,4
	RSD	33,8	41,3	33,2	24,1	132,4

TABELA 3 - Produção de Cana-de-açúcar, em t/ha, referente ao ensaio 2, realizado em Lençóis Paulista-SP, 1976.

VARIEDADES	FITOSSANIDADE	BLOCOS				TOTAL
		I	II	III	IV	
CB 41-76	Sadia	53,1	80,1	67,5	68,0	268,7
	RSD	45,6	79,0	40,5	44,6	209,7
IAC 52/326	Sadia	59,4	64,6	34,9	71,3	230,2
	RSD	54,1	45,6	38,5	55,4	193,6
NA 56-79	Sadia	65,2	60,0	37,2	55,7	218,1
	RSD	54,0	50,0	38,4	39,8	182,2
CB 43-3	Sadia	76,9	102,4	56,9	77,7	313,9
	RSD	73,2	81,3	82,2	56,8	293,5
CB 45-155	Sadia	58,0	80,5	71,0	71,3	280,8
	RSD	48,0	51,6	60,7	56,4	216,7
CB 49-62	Sadia	53,9	50,4	70,3	55,4	230,0
	RSD	53,5	54,1	47,6	53,4	208,6
CB 56-20	Sadia	60,2	51,2	45,1	36,0	192,5
	RSD	55,6	37,2	27,4	30,1	150,3
CB 53-98	Sadia	64,9	61,0	67,6	65,0	258,5
	RSD	49,8	44,2	45,9	38,4	178,3
Co 775	Sadia	52,2	41,9	61,6	35,6	191,3
	RSD	45,5	39,3	40,1	42,6	167,5
CP 53-17	Sadia	39,8	51,4	33,3	35,6	160,1
	RSD	28,9	24,9	20,4	27,2	101,4
IAC 51/201	Sadia	53,5	83,8	59,4	72,6	269,3
	RSD	55,7	68,7	49,8	62,1	236,3
IAC 51/205	Sadia	73,6	70,7	65,2	59,4	268,9
	RSD	63,3	49,8	53,6	55,8	222,5

4. MÉTODOS

Os ensaios citados no capítulo anterior serviram apenas como suporte pois, na realidade, a metodologia aqui apresentada é generalizada para um número $\ell = 1,2,\ldots,L$ de ensaios conforme veremos a seguir.

4.1. Análises Individuais

Considerou-se cada experimento como um ensaio em parcelas subdivididas no delineamento em blocos casualizados, tendo como modelo matemático:

$$y_{h'j'k'} = \mu + t_{h'} + b_{j'} + (tb)_{h'j'} + t'_{k'} + \\ +(tt')_{h'k'} + \varepsilon_{h'j'k'} \qquad (4.1)$$

onde:

μ : efeito da média

$t_{h'}$: efeito do h' - ésimo tratamento primário ($h' = 1, 2, \ldots, p_\ell$), com $\ell = 1, 2, \ldots, L$

$b_{j'}$: efeito do j'-ésimo bloco ($j' = 1, 2, \ldots, r_\ell$);

$(tb)_{h'j'}$: efeito residual a nível de parcelas - resíduo (a);

$t'_{k'}$: efeito do k' - ésimo tratamento secundário ($k' = 1, 2, \ldots, K'$)

$(tt')_{h'k'}$: efeito da interação entre o h'-ésimo tratamento primário e o k'-ésimo tratamento secundário;

$\varepsilon_{h'j'k'}$: efeito residual a nível de subparcelas - resíduo (b);

$y_{h'j'k'}$: valor observado na subparcela que recebeu o k'-ésimo tratamento referente à subparcela, dentro do h'-ésimo tratamento referente à parcela, no j'-ésimo bloco.

No que tange às distribuições das variáveis aleatórias $(tb)_{h'j'}$ e $\varepsilon_{h'j'k'}$, considerou-se, como em CHAKRABARTI (1962), GILL (1978), LEAL (1979), DINIZ (1980) e IEMMA (1981), a existência de uma correlação constante, ρ, entre as subparcelas de uma mesma parcela e a independência entre subparcelas de parcelas distintas.

Então:

$$\mathrm{COV}(y_{h'j'k'}, y_{k''j''k''}) = \begin{cases} \sigma^2, \text{ se } h' = h'',\ j' = j'',\ k' = k'' \\ \rho\sigma^2, \text{ se } h' = h'',\ j' = j'',\ k' \neq k'' \\ 0, \text{ em outros casos.} \end{cases}$$

Para garantir a adequação do modelo proposto, no tocante à uniformidade, podem ser usados, dentre outros, os testes que constam do Apêndice 2.

Considerou-se ainda, que o modelo (4.1) inclui as seguintes restrições paramétricas:

$$\sum_{h'=1}^{p_\ell} t_{h'} = \sum_{j'=1}^{r_\ell} b_{j'} = \sum_{k'=1}^{K'} t'_{k'} = \sum_{h'=1}^{p_\ell} (tt')_{h'k'} =$$

$$= \sum_{k'=1}^{K'} (tt')_{h'k'} = 0$$

As análises de variâncias individuais são amplamente conhecidas e foram estruturadas conforme esquema da Tabela 4.

TABELA 4 - Esquema das Análises de Variâncias Individuais em Ensaios em Parcelas Subdivididas.

C. VARIAÇÃO	G.L.	E(QM)
Blocos	$r_\ell-1$	$[1+(K'-1)\rho]\sigma^2 + p_\ell K'\sigma_b^2$
Tratamentos (T)	$p_\ell-1$	$[1+(K'-1)\rho]\sigma^2 + r_\ell K'\phi(t)$
Resíduo (a)	$(r_\ell-1)(p_\ell-1)$	$[1+(K'-1)\rho]\sigma^2$
Parcelas	$p_\ell r_\ell-1$	
Tratamentos (T')	$K'-1$	$(1-\rho)\sigma^2 + p_\ell r_\ell\phi(t')$
Interação T x T'	$(p_\ell-1)(K'-1)$	$(1-\rho)\sigma^2 + r_\ell\phi(tt')$
Resíduo (b)	$p_\ell(K'-1)(r_\ell-1)$	$(1-\rho)\sigma^2$
TOTAL	$p_\ell r_\ell K'-1$	

onde:

$$\phi(t) = \frac{1}{p_\ell-1}\sum_{h'=1}^{p_\ell} t_{h'}^2$$

$$\phi(t') = \frac{1}{K'-1}\sum_{k'=1}^{K'} t'^2_{k'}$$

$$\phi(tt') = \frac{1}{(p_\ell-1)(K'-1)}\sum_{h',k'}^{p_\ell, K} (tt')^2_{h'k'}$$

4.2. Análise Conjunta

Para o grupamento das L análises individuais, considerou-se o fato de somente alguns tratamentos primários serem comuns a todos os experimentos. Estes foram denominados de tratamentos comuns e representados pelo índice f(f= 1, 2, ..., C).

Os tratamentos primários que não eram comuns a todos os ensaios foram chamados de regulares e denotados por $n_{\ell h}$ (ℓ= 1, 2, ..., L e h= 1, 2, ..., N_ℓ). Considerações análogas foram feitas por PIMENTEL GOMES (1970) ao estruturar uma análise em blocos casualizados. Deste modo, em cada experimento tinha-se $p_\ell = N_\ell + C$ tratamentos primários repetidos em r_ℓ blocos, e K tratamentos secundários por parcela.

4.2.1. Modelo Matemático

A fim de desenvolver a metodologia aqui apresentada considerou-se independentes os efeitos de tratamentos primários dentro de cada grupo e os efeitos da interação tratamentos primários x tratamentos secundários dentro de cada grupo.

Assim, tomou-se como modelo:

$$y_{ijk(\ell)} = \mu + g_\ell + b_{j(\ell)} + t_{i(\ell)} + (gc)_{\ell f} + (tb)_{ij(\ell)} +$$

$$+ t'_k + (gt')_{\ell k} + (tt')_{ik(\ell)} + (gct')_{\ell fk} +$$

$$+ e_{ijk(\ell)} \qquad (4.2.1.a)$$

com:

$\ell = 1, 2, \ldots, L$ (número de grupos ou experimentos)
$j = 1, 2, \ldots, r_\ell$ (número de repetições por grupo ou experimento)
$f = 1, 2, \ldots, C$ (número de tratamentos primários comuns)
$i = 1, 2, \ldots, p_\ell$ (número de tratamentos primários no grupo ℓ)
$k = 1, 2, \ldots, K$ (número de tratamentos secundários)

O número total de tratamentos é dado por

$$V = C + \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{h=1}^{N_\ell} n_{\ell h}$$

com

$h = 1, 2, \ldots, N_\ell$ (número de tratamentos regulares no grupo ℓ)

$p_\ell = C + N_\ell$ (número de tratamentos primários no grupo ℓ)

$N = K \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell$ é o número total de observações ou subparcelas

onde

μ : efeito da média

g_ℓ : efeito do ℓ-ésimo experimento ou grupo

$b_{j(\ell)}$: efeito do j-ésimo bloco no ℓ-ésimo experimento ou grupo.

$t_{i(\ell)}$: efeito do i - ésimo tratamento primário no ℓ-ésimo grupo ou experimento;

$(gc)_{\ell f}$: efeito da interação entre o f-ésimo tratamento primário comum e o ℓ-ésimo experimento;

t'_k : efeito do k - ésimo tratamento secundário;

$(gt')_{\ell k}$: efeito da interação entre o k-ésimo tratamento secundário e o ℓ-ésimo experimento;

$(tt')_{ik(\ell)}$: efeito da interação entre o i-ésimo tratamento primario e o k-ésimo tratamento secundário no ℓ-ésimo grupo;

$(gct')_{\ell fk}$: efeito da interação entre o f-ésimo tratamento primário comum, o ℓ-ésimo grupo e o k-ésimo tratamento secundário;

$(tb)_{ij(\ell)}$: efeito residual das parcelas caracterizado como componente do erro (a);

$e_{ijk(\ell)}$: efeito residual a nível de subparcelas, caracterizado como componente do erro (b);

Com relação às distribuições das variáveis aleatórias $(tb)_{ij(\ell)}$ e $e_{ijk(\ell)}$ considerou-se a existência de uma correlação constante ρ, entre as subparcelas de uma mesma parcela e a independência entre subparcelas de parcelas distintas, qual seja:

$$COV(y_{ijk(\ell)}, y_{i'j'k'(\ell')}) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{se } \ell=\ell',\ i=i',\ j=j',\ k=k' \\ \rho\sigma^2, & \text{se } \ell=\ell',\ i=i',\ j=j',\ k\neq k' \\ 0, & \text{em outros casos} \end{cases}$$

Para garantir a adequação do modelo proposto, no tocante à uniformidade, podem ser usados, dentre outros, os testes que constam do Apêndice 2.

Considerações análogas foram feitas por CHAKRABARTI (1962), GILL (1978), LEAL (1979), DINIZ (1980) e IEMMA (1981).

Considerou-se, ainda, as seguintes restrições paramétricas:

$$\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell g_\ell = \sum_{j=1}^{r_\ell} b_{j(\ell)} = \sum_{i=1}^{p_\ell} t_{i(\ell)} = \sum_{\ell=1}^{L} (gc)_{\ell f} = \sum_{f=1}^{C} (gc)_{\ell f} =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} t'_k = \sum_{k=1}^{K} (gt')_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell (gt')_{\ell k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p_\ell} (tt')_{ik(\ell)} = \sum_{k=1}^{K} (tt')_{ik(\ell)} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{L} (gct')_{\ell fk} = \sum_{f=1}^{C} (gct')_{\ell fk} = \sum_{k=1}^{K} (gct')_{\ell fk} = 0$$

4.2.2. Equações Normais

As presuposições feitas em 4.2.1 são fundamentais na análise de variância a fim de dar validade aos testes de hipóteses a serem efetuados. No entanto, para aplicação do método dos mínimos quadrados, visando obter o sistema de equações normais, os estimadores dos parâmetros, a partição da soma de quadrados total e o número de graus de liberdade associados a cada fonte de variação é necessário supor apenas o erro $e_{ijk(\ell)}$ como aleatório no modelo (4.2.1.a), SEARLE (1971).

O modelo linear apresentado em (4.2.1.a) pode, matricialmente, ser representado por $\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\theta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$, cujo sistema de equações normais é dado por:

$$X'X\underset{\sim}{\hat{\theta}} = X'\underset{\sim}{y} \quad ,$$

onde,

X : é a matriz dos coeficientes dos parâmetros, de dimensões.

$$(N)x[1 + L + \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell + \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell + CL + K + KL + K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell + KLC]$$

$\hat{\theta}$: é o vetor das soluções de mínimos quadrados, para os efeitos dos parâmetros, de dimensões

$$[1 + L + \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell + \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell + CL + K + KL + K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell + KLC]\ x(1)$$

$\underset{\sim}{y}$: é o vetor dos valores observados, de dimensões (N) x (1)

Partindo-se a matriz X, adequadamente, como em PIMENTEL GOMES (1967), resulta:

$$X = [X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \quad X_5 \quad X_6 \quad X_7 \quad X_8 \quad X_9]$$

onde,

X_1 : é o vetor que envolve a média, de dimensões (N)x(1);

X_2 : é a matriz dos coeficientes associados aos ensaios ou grupos, de dimensões (N)x(L);

X_3 : é a matriz dos coeficientes associados aos blocos dentro dos ensaios, de dimensões $(N) \times (\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell)$;

X_4 : é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos primários, dentro de cada grupo $[t_{i(\ell)}]$, de dimensões $(N) \times (\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)$;

X_5 : é a matriz dos coeficientes associados à interação dos tratamentos primários com os experimentos ou grupos $[(gc)_{\ell f}]$, de dimensões (N) x (LC);

X_6 : é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos secundários, de dimensões (N) x (K);

X_7 : é a matriz dos coeficientes associados à interação dos tratamentos secundários com os experimentos $(gt')_{\ell k}$, de dimensões (N) x (LK);

X_8 : é a matriz dos coeficientes associados à interação entre os tratamentos primários e os tratamentos secundários, dentro de cada grupo $[(tt')_{ik(\ell)}]$, de dimensões $(N) \times (K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)$;

X_9 : é a matriz dos coeficientes associados à interação entre os tratamentos primários comuns com os experimentos e com os tratamentos secundários $[(gct')_{\ell fk}]$, de dimensões $(N) \times (LCK)$;

Efetuando-se a multiplicação X'X, como sugerido no sistema de equações normais, resultou:

$$X'X = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'X_3 & X_1'X_4 & X_1'X_5 & X_1'X_6 & X_1'X_7 & X_1'X_8 & X_1'X_9 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 & X_2'X_3 & X_2'X_4 & X_2'X_5 & X_2'X_6 & X_2'X_7 & X_2'X_8 & X_2'X_9 \\ X_3'X_1 & X_3'X_2 & X_3'X_3 & X_3'X_4 & X_3'X_5 & X_3'X_6 & X_3'X_7 & X_3'X_8 & X_3'X_9 \\ X_4'X_1 & X_4'X_2 & X_4'X_3 & X_4'X_4 & X_4'X_5 & X_4'X_6 & X_4'X_7 & X_4'X_8 & X_4'X_9 \\ X_5'X_1 & X_5'X_2 & X_5'X_3 & X_5'X_4 & X_5'X_5 & X_5'X_6 & X_5'X_7 & X_5'X_8 & X_5'X_9 \\ X_6'X_1 & X_6'X_2 & X_6'X_3 & X_6'X_4 & X_6'X_5 & X_6'X_6 & X_6'X_7 & X_6'X_8 & X_6'X_9 \\ X_7'X_1 & X_7'X_2 & X_7'X_3 & X_7'X_4 & X_7'X_5 & X_7'X_6 & X_7'X_7 & X_7'X_8 & X_7'X_9 \\ X_8'X_1 & X_8'X_2 & X_8'X_3 & X_8'X_4 & X_8'X_5 & X_8'X_6 & X_8'X_7 & X_8'X_8 & X_8'X_9 \\ X_9'X_1 & X_9'X_2 & X_9'X_3 & X_9'X_4 & X_9'X_5 & X_9'X_6 & X_9'X_7 & X_9'X_8 & X_9'X_9 \end{bmatrix}$$

cujas submatrizes são identificadas como se segue:

$X_1'X_1 = N = K \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell$ = número de subparcelas, de dimensões $(1) \times (1)$;

$X_1'X_2 = K[r_1p_1 \quad r_2p_2 \quad \dots \quad r_Lp_L]$, vetor associado ao número de subparcelas em cada grupo, de dimensões (1)x(L);

$X_1'X_3 = K[p_1 \; p_1 \; \dots \; p_1 \; p_2 \; p_2 \; \dots \; p_2 \; \dots \; p_L \; p_L \; \dots \; p_L]$,

vetor associado ao número de subparcelas por bloco, dentro de cada grupo, de dimensões (1) x ($\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell$);

$X_1'X_4 = K[r_1 \; r_1 \; \dots \; r_1 \; r_2 \; r_2 \; \dots \; r_2 \; \dots \; r_L \; r_L \; \dots \; r_L]$,

vetor associado ao número de repetições dos tratamentos primários em cada grupo, $t_{i(\ell)}$, de dimensões (1)x($\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell$);

$X_1'X_5 = K[r_1r_1 \; \dots \; r_1r_2r_2 \; \dots \; r_2 \; \dots \; r_Lr_L \; \dots \; r_L]$,

vetor associado ao número de repetições da interação grupos com tratamentos primários comuns, de dimensões (1)x(LC);

$X_1'X_6 = [\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell \quad \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell \dots \quad \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell]$, vetor associado ao número de repetições dos tratamentos secundários, de dimensões (1) x (K);

$X_1'X_7 = [r_1p_1 \; r_1p_1 \; \dots \; r_1p_1 \; r_2p_2 \; r_2p_2 \; \dots \; r_2p_2 \; \dots \; r_Lp_Lr_Lp_L \dots \; r_Lp_L]$,

vetor associado ao número de repetições da interação grupos com tratamentos secundários, de dimensões (1) x (LK);

$X_1'X_8 = [r_1 \; r_1 \; \dots \; r_1r_2r_2 \; \dots \; r_2 \; \dots \; r_Lr_L \; \dots \; r_L]$

vetor associado ao número de repetições da interação tratamentos primários com tratamentos secundários, $(tt')_{ik(\ell)}$, de dimensões (1) x (K $\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell$);

$X_1'X_9 = [r_1 r_1 \; \ldots \; r_1 r_2 r_2 \; \ldots \; r_2 \; \ldots \; r_L r_L \; \ldots \; r_L]$

vetor associado ao número de repetições da interação grupos x (tratamentos primários comuns x tratamentos secundários, de dimensões (1) x (LCK);

$$X_2'X_2 = K \begin{bmatrix} r_1p_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & r_2p_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & r_Lp_L \end{bmatrix}$$

matriz das repetições dos grupos, de dimensões (L)x(L);

$$X_2'X_3 = K \begin{bmatrix} p_1 & p_1 & \ldots & p_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & p_2 & p_2 & \ldots & p_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & p_L & p_L & \ldots & p_L \end{bmatrix}$$

matriz do número de subparcelas nos blocos, por experimento, de dimensões (L) x $(\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell)$;

$$X_2'X_4 = K \begin{bmatrix} r_1 & r_1 & \ldots & r_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & r_2 & r_2 & \ldots & r_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & r_L & r_L & \ldots & r_L \end{bmatrix}$$

matriz de incidência dos tratamentos primários nos grupos, de dimensões (L) x $(\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)$;

$$X'_2X_5 = K \begin{bmatrix} r_1 & r_1 & \dots & r_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_2 & r_2 & \dots & r_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & r_L & r_L & \dots & r_L \end{bmatrix}$$

matriz de incidência da interação tratamentos primários comuns x grupos nos diversos ensaios, de dimensões (L)x(LC);

$$X'_2X_6 = \begin{bmatrix} r_1p_1 & r_1p_1 & \dots & r_1p_1 \\ r_2p_2 & r_2p_2 & \dots & r_2p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_Lp_L & r_Lp_L & \dots & r_Lp_L \end{bmatrix}$$

matriz de incidência dos tratamentos secundários nos grupos, de dimensões (L) x (K);

$$X'_2X_7 = \begin{bmatrix} r_1p_1 & r_1p_1 & \dots & r_1p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_2p_2 & r_2p_2 & \dots & r_2p_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & r_Lp_L & r_Lp_L & \dots & r_Lp_L \end{bmatrix}$$

matriz do número de repetições associado a cada par $(gt')_k$ em cada grupo, de dimensões (L) x (LK);

$$X_2'X_8 = \begin{bmatrix} r_1 & r_1 & \dots & r_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_2 & r_2 & \dots & r_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r_L & r_L & \dots & r_L \end{bmatrix}.$$

matriz do número de repetições associado a cada par $(tt')_{ik(\ell)}$, em cada grupo, de dimensões (L) x $(K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)$;

$$X_2'X_9 = \begin{bmatrix} r_1 & r_1 & \dots & r_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_2 & r_2 & \dots & r_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r_L & r_L & \dots & r_L \end{bmatrix}.$$

matriz do número de repetições associado a cada par $(gct')_{\ell fk}$, em cada grupo, de dimensões (L) x (LCK);

$$X_3'X_3 = K \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & p_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_L & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & p_L \end{bmatrix}$$

matriz do número de observações em cada bloco, de dimensões $(\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell) \times (\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell)$;

$$X_3'X_4 = K \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

matriz do número de tratamentos secundários por tratamento primário em cada bloco, de dimensões $(\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell) \times (\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)$;

$$X_3'X_5 = K \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

matriz do número de tratamentos secundários associado a cada par $(gc)_{\ell f}$ em cada bloco, de dimensões $(\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell) x (LC)$;

$$X_3'X_6 = \begin{bmatrix} p_1 & p_1 & \cdots & p_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1 & p_1 & \cdots & p_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_L & p_L & \cdots & p_L \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_L & p_L & \cdots & p_L \end{bmatrix}$$

matriz do número de repetições dos tratamentos secundários em cada bloco, de dimensões $(\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell) x (K)$;

$$X_3'X_7 = \begin{bmatrix} p_1 & p_1 & \cdots & p_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1 & p_1 & \cdots & p_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & p_L & p_L & \cdots & p_L \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & p_L & p_L & \cdots & p_L \end{bmatrix}.$$

matriz do número de repetições dos tratamentos secundários, em cada bloco, associado a interação $(gt')_{\ell k}$, de dimensões $(\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell) x (LK)$;

$$X_3'X_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

matriz de incidência da combinação $(tt')_{ik(\ell)}$, em cada bloco, de dimensões $(\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell) x (K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)$;

$$X_3'X_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

matriz de incidência da combinação $(gct')_{\ell fk}$, em cada bloco, de dimensões $(\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell)$ x (LCK);

$$X_4'X_4 = K\, r_\ell\, I_{(\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)}$$

matriz das repetições dos tratamentos primários $t_{i(\ell)}$, de dimensões $(\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)$ x $(\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)$;

$$X_4'X_5 = I_{(L)} \otimes K \begin{bmatrix} H_\ell \\ J_\ell \end{bmatrix}$$

onde

$$H_\ell = \begin{bmatrix} r_\ell & & \phi \\ & \ddots & \\ \phi & & r_\ell \end{bmatrix}_{C \times C}$$

$$J_\ell = {}_{(N_\ell)} \phi_{(C)}$$

$\otimes$ = Produto de Kronecker

matriz do número de repetições associado à interação $(gc)_{\ell f}$, de dimensções $(\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell) \times (LC)$;

$$X_4'X_6 = \begin{bmatrix} r_1 & r_1 & \cdots & r_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1 & r_1 & \cdots & r_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_L & r_L & \cdots & r_L \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_L & r_L & \cdots & r_L \end{bmatrix}$$

matriz do número de repetições dos tratamentos secundários em cada tratamento primário $t_{i(\ell)}$, de dimensões $(\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell) \times (K)$;

$$X'_4X_7 = \begin{bmatrix} r_1 & r_1 & \cdots & r_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1 & r_1 & \cdots & r_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & r_L & r_L & \cdots & r_L \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & r_L & r_L & \cdots & r_L \end{bmatrix}$$

matriz do número de subparcelas para cada $t_{i(\ell)}$, associado à interação $(gt')_{\ell k}$, de dimensões $(\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell) \times (LK)$;

$$X'_4X_8 = \begin{bmatrix} r_1 & r_1 & \cdots & r_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_2 & r_2 & \cdots & r_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_L & r_L & \cdots & r_L \end{bmatrix}$$

matriz do número de repetições associado a cada par $(tt')_{ik(\ell)}$, de dimensões $(\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell) \times (K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)$;

$$X'_4X_9 = I_{(L)} \otimes \begin{bmatrix} P_\ell \\ U_\ell \end{bmatrix}$$

onde

$$P_\ell = \begin{bmatrix} r_\ell & r_\ell & \cdots & r_\ell & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_\ell & r_\ell & \cdots & r_\ell \end{bmatrix}_{C \times CK}$$

$$U_\ell = \underset{(N_\ell)}{} \phi_{(CK)}$$

matriz do número de repetições associado a cada terno $(gct')_{\ell fk}$, de dimensões $(\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell) \times (LCK)$;

$$X_5'X_5 = K \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & r_L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & r_L & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & r_L \end{bmatrix}$$

matriz das repetições da interação $(gc)_{\ell f}$, de dimensões (LC) x (LC);

$$X_5'X_6 = \begin{bmatrix} r_1 & r_1 & \dots & r_1 \\ r_1 & r_1 & \dots & r_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1 & r_1 & \dots & r_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_L & r_L & \dots & r_L \\ r_L & r_L & \dots & r_L \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_L & r_L & \dots & r_L \end{bmatrix}$$

matriz do número de repetições associado à interação $(gc)_{\ell f}$ em cada tratamento secundário, de dimensões (LC) x (K);

$$X_5'X_7 = \begin{bmatrix} r_1 & r_1 & \cdots & r_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ r_1 & r_1 & \cdots & r_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1 & r_1 & \cdots & r_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_2 & r_2 & \cdots & r_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_2 & r_2 & \cdots & r_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_2 & r_2 & \cdots & r_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & r_L & \cdots & r_L \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & r_L & \cdots & r_L \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & r_L & \cdots & r_L \end{bmatrix}$$

matriz do número de repetições associado à interação $(gc)_{\ell f}$, de dimensões (LC) x (LK);

$$X_5'X_8 = I_{(L)} \otimes [Q_\ell \quad M_\ell]$$

onde:

$$Q_{\ell} = \left[\begin{array}{ccccccccc} r_{\ell} & r_{\ell} & \cdots & r_{\ell} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & r_{\ell} & r_{\ell} & \cdots & r_{\ell} \end{array}\right]_{C \quad KC}$$

$$M_{\ell} = (C) \quad {}^{\phi}(K\; N_{\ell})$$

matriz do número de repetições associado à interação $(gc)_{\ell f}$ em cada par $(tt')_{ik}$, de dimensões $(LC) \times (K \sum_{\ell=1}^{L} p_{\ell})$;

$$X_5'X_9 = \left[\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
r_1 & r_1 & \cdots & r_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & r_1 & r_1 & \cdots & r_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_1 & r_1 & \cdots & r_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & r_L & r_L & \cdots & r_L & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_L & r_L & \cdots & r_L & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_L & r_L & \cdots & r_L
\end{array}\right]$$

matriz do número de repetições associado à interação $(gct')_{\ell fk}$ nos diversos grupos, de dimensões $(LC) \times (LCK)$;

$$X_6'X_6 = \begin{bmatrix} \Sigma r_\ell p_\ell & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma r_\ell p_\ell & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Sigma r_\ell p_\ell \end{bmatrix}$$

matriz das repetições dos tratamentos secundários, de dimensões (K) x (K);

$$X_6'X_7 = \begin{bmatrix} r_1p_1 & 0 & \cdots & 0 & r_2p_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & r_Lp_L & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_1p_1 & \cdots & 0 & 0 & r_2p_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & r_Lp_L & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_1p_1 & 0 & 0 & \cdots & r_2p_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & r_Lp_L \end{bmatrix}$$

matriz do número de repetições dos tratamentos secundários na interação $(gt')_{\ell k}$, de dimensões (K) x (LK);

$$X_6'X_8 = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & r_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & r_L & 0 & \cdots & 0 & \cdots & r_L & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & r_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & r_L & \cdots & 0 & \cdots & 0 & r_L & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & r_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & r_L & \cdots & 0 & 0 & \cdots & r_L \end{bmatrix}$$

matriz do número de repetições da interação $(tt')_{ik(\ell)}$ em cada tratamento secundário, de dimensões $(K) x (K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)$;

$$X_6'X_9 = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & r_1 & 0 & \cdots & 0 & r_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & r_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & r_L & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & r_1 & \cdots & 0 & 0 & r_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & r_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & r_L & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & r_1 & 0 & 0 & \cdots & r_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & r_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & r_L \end{bmatrix}$$

matriz do número de repetições da interação$(gct')_{\ell fk}$, de dimensões (K) x (LCK);

$$X_7'X_7 = \begin{bmatrix} r_1p_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_1p_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdot\,\cdot & r_1p_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & r_Lp_L & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & r_Lp_L & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & r_Lp_L \end{bmatrix}$$

matriz das repetições da interação $(gt')_{\ell k}$, de dimensões (LK) x (LK);

$$X'_7X_8 = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 & r_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & r_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_1 & \dots & 0 & 0 & r_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & r_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_1 & 0 & 0 & \dots & r_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & r_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & r_L & 0 & \dots & 0 & r_L & 0 & \dots & 0 & \dots & r_L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & r_L & \dots & 0 & 0 & r_L & \dots & 0 & \dots & 0 & r_L & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & r_L & 0 & 0 & \dots & r_L & \dots & 0 & 0 & \dots & r_L \end{bmatrix}$$

matriz das repetições $(tt')_{ik(\ell)}$ nas combinações $(gt')_{\ell k}$, de dimensões $(LK) \times (K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)$;

$$X'_7X_9 = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & r_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & r_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & r_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & r_L & 0 & \dots & 0 & \dots & r_L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & r_L & \dots & 0 & \dots & 0 & r_L & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & r_L & \dots & 0 & 0 & \dots & r_L \end{bmatrix}$$

matriz de incidência da interação $(gct')_{\ell fk}$, de dimensões $(LK)\times(LCK)$;

$$X'_8 X_8 = r_\ell \, I_{(K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)}$$

matriz das repetições da interação $(tt')_{ik(\ell)}$, de dimensões $(K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell) \times (K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)$;

$$X'_8 X_9 = I_{(L)} \otimes \begin{bmatrix} R_\ell \\ S_\ell \end{bmatrix}$$

onde

$$R_\ell = {}_{CK}\begin{bmatrix} r_\ell & & \phi \\ & \ddots & \\ \phi & & r_\ell \end{bmatrix}_{CK}$$

$$S_\ell = {}_{(K N_\ell)} \phi_{(CK)}$$

matriz das repetições de $(tt')_{ik(\ell)}$ nas combinações de $(gct')_{\ell fk}$, de dimensões $(K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell) x (LCK)$;

$$X'_9 X_9 = r_\ell \, I_{(LCK)}$$

matriz das repetições da interação $(gct')_{\ell fk}$, de dimensões $(LCK) \times (LCK)$.

Assim como em X'X, partições análogas foram feitas nos vetores $\underset{\sim}{\hat{\theta}}$ e $X'\underset{\sim}{y}$, escrevendo-se, deste modo, o sistema $X'X\underset{\sim}{\hat{\theta}} = X'\underset{\sim}{y}$, como:

$$\begin{bmatrix}
X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'X_3 & X_1'X_4 & X_1'X_5 & X_1'X_6 & X_1'X_7 & X_1'X_8 & X_1'X_9 \\
X_2'X_1 & X_2'X_2 & X_2'X_3 & X_2'X_4 & X_2'X_5 & X_2'X_6 & X_2'X_7 & X_2'X_8 & X_2'X_9 \\
X_3'X_1 & X_3'X_2 & X_3'X_3 & X_3'X_4 & X_3'X_5 & X_3'X_6 & X_3'X_7 & X_3'X_8 & X_3'X_9 \\
X_4'X_1 & X_4'X_2 & X_4'X_3 & X_4'X_4 & X_4'X_5 & X_4'X_6 & X_4'X_7 & X_4'X_8 & X_4'X_9 \\
X_5'X_1 & X_5'X_2 & X_5'X_3 & X_5'X_4 & X_5'X_5 & X_5'X_6 & X_5'X_7 & X_5'X_8 & X_5'X_9 \\
X_6'X_1 & X_6'X_2 & X_6'X_3 & X_6'X_4 & X_6'X_5 & X_6'X_6 & X_6'X_7 & X_6'X_8 & X_6'X_9 \\
X_7'X_1 & X_7'X_2 & X_7'X_3 & X_7'X_4 & X_7'X_5 & X_7'X_6 & X_7'X_7 & X_7'X_8 & X_7'X_9 \\
X_8'X_1 & X_8'X_2 & X_8'X_3 & X_8'X_4 & X_8'X_5 & X_8'X_6 & X_8'X_7 & X_8'X_8 & X_8'X_9 \\
X_9'X_1 & X_9'X_2 & X_9'X_3 & X_9'X_4 & X_9'X_5 & X_9'X_6 & X_9'X_7 & X_9'X_8 & X_9'X_9
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\hat{\mu}} \\ \underset{\sim}{\hat{g}} \\ \underset{\sim}{\hat{\beta}} \\ \underset{\sim}{\hat{\tau}} \\ \underset{\sim}{\hat{\delta}} \\ \underset{\sim}{\hat{\alpha}} \\ \underset{\sim}{\hat{\lambda}} \\ \underset{\sim}{\hat{\gamma}} \\ \underset{\sim}{\hat{\xi}} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} X_1'\underset{\sim}{y} \\ X_2'\underset{\sim}{y} \\ X_3'\underset{\sim}{y} \\ X_4'\underset{\sim}{y} \\ X_5'\underset{\sim}{y} \\ X_6'\underset{\sim}{y} \\ X_7'\underset{\sim}{y} \\ X_8'\underset{\sim}{y} \\ X_9'\underset{\sim}{y} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \underset{\sim}{G} \\ \underset{\sim}{E} \\ \underset{\sim}{B} \\ \underset{\sim}{T} \\ \underset{\sim}{D} \\ \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{L} \\ \underset{\sim}{N} \\ \underset{\sim}{Z} \end{bmatrix}$$

onde, sob as restrições paramétricas de 4.2.1, resulta:

$\underset{\sim}{\hat{\mu}}$: efeito estimado da média ;

$\underset{\sim}{G}$: total geral observado;

$\underset{\sim}{\hat{g}}[\hat{g}_\ell]$: vetor dos efeitos estimados para grupos, de dimensões (L)x(1);

$\underset{\sim}{E}[E_\ell]$: vetor dos totais observados de cada grupo, de dimensões $(L)x(1)$;

$\underset{\sim}{\hat{\beta}}[\hat{b}_{j(\ell)}]$: vetor dos efeitos estimados para blocos dentro de grupos, de dimensões $(\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell)x(1)$;

$\underset{\sim}{B}[B_{j(\ell)}]$: vetor dos totais observados de cada bloco, de dimensões $(\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell)x(1)$;

$\underset{\sim}{\hat{\tau}}[\hat{t}_a]$: vetor dos efeitos estimados para tratamentos primários, ajustado, dentro de grupos de dimensões $(\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)x(1)$;

$\hat{t}_a = \hat{t}_{f(\ell)}$, para tratamentos comuns.

$\hat{t}_a = \hat{t}_{n_{\ell h}}$, para tratamentos regulares.

$\underset{\sim}{T}[T_a]$: vetor dos totais observados dos tratamentos primários, em cada grupo, de dimensões $(\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)x(1)$;

$T_a = T_{f(\ell)}$, para tratamentos comuns

$T_a = T_{n_{\ell h}}$, para tratamentos regulares

$\underset{\sim}{\hat{\delta}}[(\widehat{gc})_{\ell f}]$: vetor dos efeitos estimados para a interação grupos x tratamentos comuns $[(gc)_{\ell f}]$, de dimensões $(LC)x(1)$;

$\underset{\sim}{D}[D_{\ell f}]$: vetor dos totais observados para a interação grupos x tratamentos comuns, de dimensões $(LC)x(1)$;

$\underset{\sim}{\hat{\alpha}}[\hat{t}'_k]$: vetor dos efeitos estimados para tratamentos secundários, de dimensões $(K)x(1)$;

$\underset{\sim}{A}[A_k]$: vetor dos totais observados dos tratamentos secundários, de dimensões $(K)x(1)$;

$\hat{\underset{\sim}{\lambda}}[\hat{gt}'_{\ell k}]$: vetor dos efeitos estimados para a interação grupos x tratamentos secundários $[(gt')_{\ell k}]$, de dimensões $(LK)x(1)$;

$\underset{\sim}{L}[L_{\ell k}]$: vetor dos totais observados para a interação grupos x tratamentos secundários, de dimensões $(LK)x(1)$;

$\hat{\underset{\sim}{\gamma}}[\hat{tt}'_a]$: vetor dos efeitos estimados para a interação tratamentos primários x tratamentos secundários, ajustados, de dimensões $(K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)x(1)$;

$\hat{tt}'_a = (\hat{tt}')_{fk(\ell)}$, para tratamentos comuns

$\hat{tt}'_a = (\hat{tt}')_{n_{\ell h}k}$, para tratamentos regulares

$\underset{\sim}{N}[N_a]$: vetor dos totais observados para a interação tratamentos primários x tratamentos secundários, de dimensões $(K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)x(1)$;

$N_a = N_{fk(\ell)}$, para tratamentos comuns

$N_a = N_{n_{\ell h}k}$, para tratamentos regulares

$\hat{\underset{\sim}{\xi}}[(\hat{gct}')_{\ell fk}]$: vetor dos efeitos estimados para a interação grupos x tratamentos primários comuns x tratamentos secundários, de dimensões $(LCK)x(1)$;

$\underset{\sim}{Z}[Z_{\ell fk}]$: vetor dos totais observados para a interação grupos x tratamentos primários comuns x tratamentos secundários, de dimensões $(LCK)x(1)$;

4.2.3. Solução do Sistema

Efetuando-se as multiplicações do sistema particionado $X'X\hat{\underset{\sim}{\theta}} = X'\underset{\sim}{y}$, foram obtidas as seguintes equações:

$$X_1'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + X_1'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} + X_1'X_3\hat{\underset{\sim}{\beta}} + X_1'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_1'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} + X_1'X_6\hat{\underset{\sim}{\alpha}} + X_1'X_7\hat{\underset{\sim}{\lambda}} + X_1'X_8\hat{\underset{\sim}{\gamma}} + X_1'X_9\hat{\underset{\sim}{\zeta}} = \underset{\sim}{G} \quad (1)$$

$$X_2'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + X_2'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} + X_2'X_3\hat{\underset{\sim}{\beta}} + X_2'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_2'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} + X_2'X_6\hat{\underset{\sim}{\alpha}} + X_2'X_7\hat{\underset{\sim}{\lambda}} + X_2'X_8\hat{\underset{\sim}{\gamma}} + X_2'X_9\hat{\underset{\sim}{\zeta}} = \underset{\sim}{E} \quad (2)$$

$$X_3'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + X_3'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} + X_3'X_3\hat{\underset{\sim}{\beta}} + X_3'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_3'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} + X_3'X_6\hat{\underset{\sim}{\alpha}} + X_3'X_7\hat{\underset{\sim}{\lambda}} + X_3'X_8\hat{\underset{\sim}{\gamma}} + X_3'X_9\hat{\underset{\sim}{\zeta}} = \underset{\sim}{B} \quad (3)$$

$$X_4'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + X_4'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} + X_4'X_3\hat{\underset{\sim}{\beta}} + X_4'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_4'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} + X_4'X_6\hat{\underset{\sim}{\alpha}} + X_4'X_7\hat{\underset{\sim}{\lambda}} + X_4'X_8\hat{\underset{\sim}{\gamma}} + X_4'X_9\hat{\underset{\sim}{\zeta}} = \underset{\sim}{T} \quad (4)$$

$$X_5'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + X_5'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} + X_5'X_3\hat{\underset{\sim}{\beta}} + X_5'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_5'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} + X_5'X_6\hat{\underset{\sim}{\alpha}} + X_5'X_7\hat{\underset{\sim}{\lambda}} + X_5'X_8\hat{\underset{\sim}{\gamma}} + X_5'X_9\hat{\underset{\sim}{\zeta}} = \underset{\sim}{D} \quad (5)$$

$$X_6'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + X_6'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} + X_6'X_3\hat{\underset{\sim}{\beta}} + X_6'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_6'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} + X_6'X_6\hat{\underset{\sim}{\alpha}} + X_6'X_7\hat{\underset{\sim}{\lambda}} + X_6'X_8\hat{\underset{\sim}{\gamma}} + X_6'X_9\hat{\underset{\sim}{\zeta}} = \underset{\sim}{A} \quad (6)$$

$$X_7'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + X_7'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} + X_7'X_3\hat{\underset{\sim}{\beta}} + X_7'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_7'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} + X_7'X_6\hat{\underset{\sim}{\alpha}} + X_7'X_7\hat{\underset{\sim}{\lambda}} + X_7'X_8\hat{\underset{\sim}{\gamma}} + X_7'X_9\hat{\underset{\sim}{\zeta}} = \underset{\sim}{L} \quad (7)$$

$$X_8'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + X_8'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} + X_8'X_3\hat{\underset{\sim}{\beta}} + X_8'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_8'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} + X_8'X_6\hat{\underset{\sim}{\alpha}} + X_8'X_7\hat{\underset{\sim}{\lambda}} + X_8'X_8\hat{\underset{\sim}{\gamma}} + X_8'X_9\hat{\underset{\sim}{\zeta}} = \underset{\sim}{N} \quad (8)$$

$$X_9'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + X_9'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} + X_9'X_3\hat{\underset{\sim}{\beta}} + X_9'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_9'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} + X_9'X_6\hat{\underset{\sim}{\alpha}} + X_9'X_7\hat{\underset{\sim}{\lambda}} + X_9'X_8\hat{\underset{\sim}{\gamma}} + X_9'X_9\hat{\underset{\sim}{\zeta}} = \underset{\sim}{Z} \quad (9)$$

Considerando-se como em CHAKRABARTI (1962), COCHRAN e COX (1976), PIMENTEL GOMES (1967) e IEMMA (1981), entre outros, as restrições impostas em 4.2.1 e levando em consideração as estruturas das matrizes envolvidas, conforme discutido em 4.2.2, resultou:

$$
\begin{array}{llr}
X_1'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} & & = \underset{\sim}{G} \quad (1)\\
X_2'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + X_2'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} & & = \underset{\sim}{E} \quad (2)\\
X_3'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + X_3'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} + X_3'X_3\hat{\underset{\sim}{\beta}} & & = \underset{\sim}{B} \quad (3)\\
X_4'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + X_4'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} + & X_4'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_4'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} & = \underset{\sim}{T} \quad (4)\\
X_5'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + X_5'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} + & X_5'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_5'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} & = \underset{\sim}{D} \quad (5)\\
X_6'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + & X_6'X_6\hat{\underset{\sim}{\alpha}} & = \underset{\sim}{A} \quad (6)\\
X_7'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + X_7'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} + & X_7'X_6\hat{\underset{\sim}{\alpha}} + X_7'X_7\hat{\underset{\sim}{\lambda}} & = \underset{\sim}{L} \quad (7)\\
X_8'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + X_8'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} + & X_8'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_8'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} + X_8'X_6\hat{\underset{\sim}{\alpha}} + X_8'X_7\hat{\underset{\sim}{\lambda}} + X_8'X_8\hat{\underset{\sim}{\gamma}} + X_8'X_9\hat{\underset{\sim}{\zeta}} & = \underset{\sim}{N} \quad (8)\\
X_9'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} + X_9'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} + & X_9'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_9'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} + X_9'X_6\hat{\underset{\sim}{\alpha}} + X_9'X_7\hat{\underset{\sim}{\lambda}} + X_9'X_8\hat{\underset{\sim}{\gamma}} + X_9'X_9\hat{\underset{\sim}{\zeta}} & = \underset{\sim}{Z} \quad (9)
\end{array}
$$

Para estimar os efeitos de $\hat{\underset{\sim}{\delta}}$ e $\hat{\underset{\sim}{\zeta}}$, considerou-se apenas o subconjunto de dados pertinentes aos tratamentos comuns, utilizando o mesmo modelo de 4.2.1, ou seja:

$$
y_{fjk(\ell)} = \mu^* + g^*_\ell + b^*_{j(\ell)} + c_f + (gc)_{\ell f} + (cb)_{fj(\ell)} +
$$

$$
+ t'^*_k + (ct')_{fk} + (gt')^*_{\ell k} + (gct')_{\ell fk} + e_{fjk(\ell)}
$$

onde, todos os parâmetros têm o mesmo significado de 4.2.1, mas restrito ao subconjunto de tratamentos comuns, com as seguintes variações:

$\ell = 1, 2, \ldots, L$

$j = 1, 2, \ldots, r_\ell$

$f = 1, 2, \ldots, C$

$k = 1, 2, \ldots, K$

Neste modelo foram consideradas as restrições:

$$\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell g_\ell^* = \sum_{j=1}^{r_\ell} b_{j(\ell)}^* = \sum_{f=1}^{C} c_f = \sum_{\ell=1}^{L} (gc)_{\ell f} =$$

$$= \sum_{f=1}^{C} (gc)_{\ell f} = \sum_{k=1}^{K} t_k'^* =$$

$$= \sum_{f=1}^{C} (ct')_{fk} = \sum_{k=1}^{K} (ct')_{fk} = \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell (gt')_{\ell k}^* =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} (gt')_{\ell k}^* = \sum_{\ell=1}^{L} (gct')_{\ell fk} = \sum_{f=1}^{C} (gct')_{\ell fk} =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} (gct')_{\ell fk} = 0 \; .$$

As particões de $X'X$ e $X'\underset{\sim}{y}$ comentadas em 4.2.2, foram também aquí consideradas. Elas têm o mesmo significado, sô que restrito ao subconjunto de tratamentos comuns.

Os estimadores, os segundos membros das equações normais e as matrizes, quando referentes somente ao subconjunto de tratamentos comuns, foram assinalados com um asterisco.

Desse modo, os estimadores de $\underset{\sim}{\delta}$ e $\underset{\sim}{\zeta}$, são conhecidos por se tratar de estimadores de interações balanceadas dupla e tripla, respectivamente, e são apresentados em 4.2.3.1. e 4.2.3.2.

4.2.3.1. Estimador para a Interação Grupos x Tratamentos Primários Comuns

$$\hat{\underset{\sim}{\delta}} = (X_5'X_5)_*^{-1}[\underset{\sim}{D} - (X_5'X_1)_*\hat{\underset{\sim}{\mu}}^* - (X_5'X_2)_*\hat{\underset{\sim}{g}}^* - (X_5'X_4)_*\hat{\underset{\sim}{\tau}}^*]$$

$$\hat{\underset{\sim}{\delta}} = (X_5'X_5)_*^{-1}[\underset{\sim}{D} - (X_5'X_2)_*(X_2'X_2)_*^{-1}\underset{\sim}{E}^* - (X_5'X_4)_*(X_4'X_4)_*^{-1}\underset{\sim}{T}^* + (X_5'X_1)_*\hat{\underset{\sim}{\mu}}^*]$$

ou

$$(\widehat{gc})_{\ell f} = \frac{1}{Kr_\ell} D_{\ell f} - \frac{1}{K\sum\limits_{\ell=1}^{L} r_\ell} T_f^* - \frac{1}{KCr_\ell} E_\ell^* + \frac{1}{KC\sum\limits_{\ell=1}^{L} r_\ell} G^* \quad (\alpha.1)$$

4.2.3.2. Estimador para a Interação Grupos x Tratamentos Primários Comuns x Tratamentos Secundários

$$\hat{\underset{\sim}{\zeta}} = (X_9'X_9)_*^{-1}[\underset{\sim}{Z} - (X_9'X_1)_*\hat{\underset{\sim}{\mu}}^* - (X_9'X_2)_*\hat{\underset{\sim}{g}}^* - (X_9'X_4)_*\hat{\underset{\sim}{\tau}}^* -$$

$$(X_9'X_5)_*\hat{\underset{\sim}{\delta}}^* - (X_9'X_6)_*\hat{\underset{\sim}{\alpha}}^* - (X_9'X_7)_*\hat{\underset{\sim}{\lambda}}^* - (X_9'X_8)_*\hat{\underset{\sim}{\gamma}}^*]$$

$$\therefore \quad \hat{\underset{\sim}{\zeta}} = (X_9'X_9)_*^{-1}[\underset{\sim}{Z} - (X_9'X_5)_*(X_5'X_5)_*^{-1}\underset{\sim}{D} - (X_9'X_7)_*(X_7'X_7)_*^{-1}\underset{\sim}{L}^* -$$

$$- (X_9'X_8)_*(X_8'X_8)_*^{-1}\underset{\sim}{N}^* + (X_9'X_2)_*(X_2'X_2)_*^{-1}\underset{\sim}{E}^* +$$

$$+ (X_9'X_4)_*(X_4'X_4)_*^{-1}\underset{\sim}{T}^* + (X_9'X_6)_*(X_6'X_6)_*^{-1}\underset{\sim}{A}^* - (X_9'X_1)_*\hat{\underset{\sim}{\mu}}^*]$$

ou

$$(\widehat{gct'})_{\ell fk} = \frac{1}{r_\ell} Z_{\ell fk} - \frac{1}{Kr_\ell} D_{\ell f} - \frac{1}{Cr_\ell} L^*_{\ell k} - \frac{1}{\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell} N^*_{fk} +$$

$$+ \frac{1}{KCr_\ell} E^*_\ell + \frac{1}{K\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell} T^*_f + \frac{1}{C\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell} A^*_k - \frac{1}{KC\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell} G^* \qquad (\alpha.2)$$

4.2.3.3. Estimador para a Média

De (1) obteve-se

$$\hat{\underset{\sim}{\mu}} = (X_1'X_1)^{-1}\underset{\sim}{G} \quad \therefore \quad \hat{\mu} = \frac{G}{N} \qquad (\alpha.3)$$

4.2.3.4. Estimador para Grupos

Por (2), tem-se:

$$X_2'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} = \underset{\sim}{E} - X_2'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} \quad \therefore \quad \hat{\underset{\sim}{g}} = (X_2'X_2)^{-1}[\underset{\sim}{E} - X_2'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}}] ,$$

resultando, conforme as estruturas das matrizes envolvidas,

$$\hat{\underset{\sim}{g}}_\ell = \frac{1}{Kr_\ell p_\ell} E_\ell - \frac{G}{N} \qquad (\alpha.4)$$

4.2.3.5. Estimador para Blocos dentro de Grupos

Em (3), tem-se:

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X_3'X_3)^{-1}[\underset{\sim}{B} - X_3'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} - X_3'X_2\hat{\underset{\sim}{g}}]$$

Substituindo-se $\hat{\underset{\sim}{g}}$, vem:

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X_3'X_3)^{-1}[\underset{\sim}{B} - X_3'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} - X_3'X_2(X_2'X_2)^{-1}\underset{\sim}{E} + X_3'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}}]$$

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X_3'X_3)^{-1}[\underset{\sim}{B} - X_3'X_2(X_2'X_2)^{-1}\underset{\sim}{E}] \quad ,$$

resultando, de acordo com as estruturas das matrizes, o estimador usual para o desdobramento de blocos dentro de grupos:

$$\hat{\beta}_{j(\ell)} = \frac{1}{Kp_\ell} B_{j(\ell)} - \frac{1}{Kr_\ell p_\ell} E_\ell \qquad (\alpha.5)$$

4.2.3.6. Estimador para Tratamentos Primários

Reportando-se a (4), tem-se:

$$X_4'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{T} - X_4'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} - X_4'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} - X_4'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} \quad .$$

Substituindo $\hat{\underset{\sim}{g}}$ e $\hat{\underset{\sim}{\delta}}$, resultou:

$$\therefore\quad \hat{\underset{\sim}{\tau}} = (X_4'X_4)^{-1}[\underset{\sim}{T} - X_4'X_2(X_2'X_2)^{-1}\underset{\sim}{E} -$$

$$- X_4'X_5(X_5'X_5)_*^{-1}\underset{\sim}{D} + X_4'X_5(X_5'X_5)_*^{-1}(X_5'X_2)_*(X_2'X_2)_*^{-1}\ \underset{\sim}{E}^* +$$

$$+ X_4'X_5(X_5'X_5)_*^{-1}(X_5'X_4)_*(X_4'X_4)_*^{-1}\underset{\sim}{T}^* -$$

$$- X_4'X_5(X_5'X_5)_*^{-1}(X_5'X_1)_*\ \hat{\underset{\sim}{\mu}}^*]$$

$$\therefore\quad \hat{\underset{\sim}{\tau}} = (X_4'X_4)^{-1}[\underset{\sim}{T} - H_1\underset{\sim}{E} - H_2\underset{\sim}{D} + H_3\underset{\sim}{E}^* + H_4\underset{\sim}{T}^* - H_5\hat{\underset{\sim}{\mu}}^*]$$

com

$$H_1' = {}_L\begin{bmatrix} p_1^{-1} & p_1^{-1} & \dots & p_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_2^{-1} & p_2^{-1} & \dots & p_2^{-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & p_L^{-1} & p_L^{-1} & \dots & p_L^{-1} \end{bmatrix},$$

de dimensões $(L) \times (\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell)$

$$H_2 = I_{(L)} \otimes \begin{bmatrix} H_{21} \\ H_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{de dimensões } \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell \ x(LC)$$

$$H_{21} = I_{(C)} \quad \text{e} \quad H_{22} = (N_\ell)^{\phi}(C)$$

$$H_3 = \frac{1}{C}\ I_{(L)} \otimes \begin{bmatrix} H_{31} \\ H_{32} \end{bmatrix}, \quad \text{de dimensões } \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell \ x\ (L)$$

$$H_{31}' = {}_1[1\ \ 1\ \dots\ 1]_C$$

$$H_{32} = (N_\ell)^{\phi}(1)$$

$$H_4 = {}_L\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}_1 \otimes \begin{bmatrix} H_{41} \\ \\ H_{42} \end{bmatrix} \quad , \text{ de dimensões } \left(\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell\right) x (C)$$

$$H_{41} = \frac{r_\ell}{\sum\limits_{\ell=1}^{L} r_\ell} I_{(C)} \qquad H_{42} = (N_\ell)^{\phi}(C)$$

$$H_5 = {}_L\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}_1 \otimes \begin{bmatrix} H_{51} \\ \\ H_{52} \end{bmatrix} \quad , \text{ de dimensões } \left(\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell\right) x (1)$$

$$H_{51} = {}_C\begin{bmatrix} Kr_\ell \\ Kr_\ell \\ \cdots \\ Kr_\ell \end{bmatrix}_1 \qquad H_{52} = (N_\ell)^{\phi}(1)$$

ou

- Estimador para Tratamentos Comuns

$$\hat{t}_{f(\ell)} = \frac{1}{K \sum\limits_{\ell=1}^{L} r_\ell} \left(T_f^* - \frac{G^*}{C}\right) + \frac{1}{Kr_\ell} \left(\frac{E_\ell^*}{C} - \frac{E_\ell}{p_\ell}\right) \qquad (\alpha.6)$$

- Estimador para Tratamentos Regulares

$$\hat{t}_{n_{\ell h}} = \frac{1}{Kr_\ell} (T_{n_{\ell h}} - \frac{E_\ell}{p_\ell}) \qquad (\alpha.7)$$

4.2.3.7. Estimador para Tratamentos Secundários

De (6), resultou:

$$\hat{\underset{\sim}{\alpha}} = (X_6'X_6)^{-1}[\underset{\sim}{A} - X_6'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}}]$$

ou

$$\hat{t}_k' = \frac{1}{\sum\limits_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell} A_k - \frac{G}{N} \qquad (\alpha.8)$$

4.2.3.8. Estimador para a Interação Grupos x Tratamentos Secundários

De (7), obteve-se:

$$\hat{\underset{\sim}{\lambda}} = (X_7'X_7)^{-1}[\underset{\sim}{L} - X_7'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} - X_7'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} - X_7'X_6\hat{\underset{\sim}{\alpha}}]$$

Substituindo-se $\hat{\underset{\sim}{g}}$ e $\hat{\underset{\sim}{\alpha}}$, resultou:

$$\hat{\underset{\sim}{\lambda}} = (X_7'X_7)^{-1}\{\underset{\sim}{L} - X_7'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}} - X_7'X_2(X_2'X_2)^{-1}[\underset{\sim}{E} - X_2'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}}] -$$
$$- X_7'X_6(X_6'X_6)^{-1}[\underset{\sim}{A} - X_6'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}}]\}$$

$$\underset{\sim}{\hat{\lambda}} = (X_7'X_7)^{-1}[\underset{\sim}{L} - X_7'X_2(X_2'X_2)^{-1}\underset{\sim}{E} - X_7'X_6(X_6'X_6)^{-1}\underset{\sim}{A} + X_7'X_1\underset{\sim}{\hat{\mu}}]$$

Pelas estruturas das matrizes de 4.2.2, tem-se:

$$(\hat{gt}')_{\ell k} = \frac{1}{r_\ell p_\ell} L_{\ell k} - \frac{1}{K r_\ell p_\ell} E_\ell - \frac{1}{\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell} A_k + \frac{G}{N} \quad (\alpha.9)$$

4.2.3.9. Estimador para a Interação Tratamentos Primários x Tratamentos Secundários

De acordo com (8), resultou:

$$\underset{\sim}{\hat{\gamma}} = (X_8'X_8)^{-1}[\underset{\sim}{N} - X_8'X_1\underset{\sim}{\hat{\mu}} - X_8'X_2\underset{\approx}{\hat{g}} - X_8'X_4\underset{\sim}{\hat{\tau}} - X_8'X_5\underset{\sim}{\hat{\delta}} - X_8'X_6\underset{\sim}{\hat{\alpha}} - X_8'X_7\underset{\sim}{\hat{\lambda}} - X_8'X_9\underset{\sim}{\hat{\xi}}]$$

Substituindo os estimadores já conhecidos, vem:

$$\underset{\sim}{\hat{\gamma}} = (X_8'X_8)^{-1}[\underset{\sim}{N} - X_8'X_4\underset{\sim}{\hat{\tau}} - X_8'X_7(X_7'X_7)^{-1}\underset{\sim}{L} - X_8'X_9(X_9'X_9)^{-1}\underset{\sim}{Z} + X_8'X_9(X_9'X_9)^{-1}(X_9'X_7)_*(X_7'X_7)^{-1}\underset{\sim}{L}^* + X_8'X_9(X_9'X_9)^{-1}(X_9'X_8)_*(X_8'X_8)_*^{-1}\underset{\sim}{N}^* - X_8'X_9(X_9'X_9)^{-1}(X_9'X_6)_*(X_6'X_6)_*^{-1}\underset{\sim}{A}^*]$$

$$\hat{\underset{\sim}{\gamma}} = (X_8'X_8)^{-1}\{\underset{\sim}{N} - X_8'X_4(X_4'X_4)^{-1}[\underset{\sim}{T} - H_1\underset{\sim}{E} - H_2\underset{\sim}{D} + H_3\underset{\sim}{E}^* +$$

$$+ H_4\underset{\sim}{T}^* - H_5\underset{\sim}{\mu}^*] - X_8'X_7(X_7'X_7)^{-1}\underset{\sim}{L} - X_8'X_9(X_9'X_9)^{-1}\underset{\sim}{Z} +$$

$$+ X_8'X_9(X_9'X_9)^{-1}(X_9'X_7)_*(X_7'X_7)_*^{-1}\ \underset{\sim}{L}^* +$$

$$+ X_8'X_9(X_9'X_9)^{-1}(X_9'X_8)_*(X_8'X_8)^{-1}\underset{\sim}{N}^* -$$

$$- X_8'X_9(X_9'X_9)^{-1}(X_9'X_6)_*(X_6'X_6)_*^{-1}\ \underset{\sim}{A}^*\}$$

$$\hat{\underset{\sim}{\gamma}} = (X_8'X_8)^{-1}\{\underset{\sim}{N} - H_{11}[\underset{\sim}{T} - H_1\underset{\sim}{E} - H_2\underset{\sim}{D} + H_3\underset{\sim}{E}^* + H_4\underset{\sim}{T}^* - H_5\hat{\underset{\sim}{\mu}}^*]$$

$$- H_6\underset{\sim}{L} - H_7\underset{\sim}{Z} + H_8\underset{\sim}{L}^* + H_9\underset{\sim}{N}^* - H_{10}\underset{\sim}{A}^*\}$$

com:

$$H_6 = \frac{1}{p_\ell}\, I_{(L)} \otimes \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ p_\ell \end{array}\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]_K \text{, de dimensões} \left(K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell\right) x(LK)$$

$$H_7 = I_{(L)} \otimes \begin{bmatrix} H_{71} \\ H_{72} \end{bmatrix}, \text{ de dimensões} \left(K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell\right) \times (LCK)$$

$$H_{71} = I_{(CK)} \quad ; \quad H_{72} = (KN_\ell)^{\phi}(CK)$$

$$H_8 = \frac{1}{C} I_{(L)} \otimes \begin{bmatrix} H_{81} \\ H_{82} \end{bmatrix}, \text{ de dimensões} \left(K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell\right) x (LK)$$

$$H_{81} = {}_{CK}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_K \quad ; \quad H_{82} = (KN_\ell)^{\phi}(K)$$

$$H_9 = \frac{1}{\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell} \; {}_L\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}_1 \otimes \begin{bmatrix} H_{91} \\ H_{92} \end{bmatrix}, \text{ de dimensões} \left(K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell\right) x (KC)$$

$$H_{91} = r_\ell \, I_{(CK)} \quad ; \quad H_{92} = (KN\ell)^{\phi} \times (CK)$$

$$H_{10} = \frac{1}{C \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell} \; {}_{L}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}_{1} \otimes \begin{bmatrix} H_{10\,1} \\ \cdot \\ H_{10\,2} \end{bmatrix} \text{, de dimensões} \left(K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell\right) x (K)$$

$$H_{10\,1} = r_\ell \; {}_{CK}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{K} \quad ; \quad H_{10\,2} = (KN_\ell)^{\phi} \, (K)$$

$$H_{11} = \frac{1}{K} \, I_{\left(\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell\right)} \otimes {}_{K}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}_{1} \text{, de dimensões} \left(K \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell\right) x \left(\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell\right)$$

ou

- Estimador para a Interação Tratamentos Primários Comuns x Tratamentos Secundários

$$(tt')_{fk(\ell)} = \frac{1}{\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell} \left(N_{fk} - \frac{T_f}{K} - \frac{A^*}{C} + \frac{G^*}{KC}\right)$$

$$+ \frac{1}{Kr_\ell}\left(\frac{E_\ell}{p_\ell} - \frac{E_\ell^*}{C}\right) - \frac{1}{r_\ell}\left(\frac{L_{\ell k}}{p_\ell} - \frac{L_{\ell k}^*}{C}\right) \qquad (\alpha.10)$$

- Estimador para a Interação Tratamentos Primários Regulares x Tratamentos Secundários

$$(tt')_{n_{\ell h}k} = \frac{1}{r_\ell}\left(N_{n_{\ell h}k} - \frac{T_{n_{\ell h}}}{K} - \frac{L_{\ell k}}{p_\ell} + \frac{E_\ell}{Kp_\ell}\right) \qquad (\alpha.11)$$

4.2.4. Análise de Variância

De $\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\theta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$, obteve-se

$$\underset{\sim}{\varepsilon}'\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\theta}'X'\underset{\sim}{y}$$

e, tomando-se a estimativa para θ, resultou a soma de quadrados do resíduo:

$$SQRes = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{\theta}}'X'\underset{\sim}{y} \qquad (\alpha.12)$$

então, SQRes = SQTotal - SQParâmetros.

Por outro lado, reportando-se a (4.2.2), onde

$$X'\underset{\sim}{y} = X'X\hat{\underset{\sim}{\theta}} \qquad (\alpha.13)$$

resultou:

$$SQRes = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{\theta}}'X'X\hat{\underset{\sim}{\theta}} \ , \qquad (\alpha.14)$$

Usando-se as notações de IEMMA (1981) tem-se para as partições das matrizes:

$$\hat{\underset{\sim}{\theta}}'X'X\hat{\underset{\sim}{\theta}} = [\hat{\underset{\sim}{\theta}}_1' \quad \hat{\underset{\sim}{\theta}}_2'] \left[\begin{array}{c|c} (X'X)_a & (X'X)_{\underline{c}} \\ \hline (X'X)_d & (X'X)_b \end{array}\right] \begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\theta}}_1 \\ \hat{\underset{\sim}{\theta}}_2 \end{bmatrix} \ ,$$

que, no geral, é a partição comumente encontrada nos esquemas de análises de variância para ensaios com parcelas subdivididas dispostas em blocos casualizados. Onde,

$$\hat{\theta}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\mu}} \\ \hat{\underset{\sim}{g}} \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}} \\ \hat{\underset{\sim}{\tau}} \\ \hat{\underset{\sim}{\delta}} \end{bmatrix} \text{(parâmetros } \underline{a}\text{)} ; \quad \hat{\theta}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\alpha}} \\ \hat{\underset{\sim}{\lambda}} \\ \hat{\underset{\sim}{\gamma}} \\ \hat{\underset{\sim}{\xi}} \end{bmatrix} \text{(parâmetros } \underline{b}\text{)} ;$$

$$(X'X)_a = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'X_3 & X_1'X_4 & X_1'X_5 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 & X_2'X_3 & X_2'X_4 & X_2'X_5 \\ X_3'X_1 & X_3'X_2 & X_3'X_3 & X_3'X_4 & X_3'X_5 \\ X_4'X_1 & X_4'X_2 & X_4'X_3 & X_4'X_4 & X_4'X_5 \\ X_5'X_1 & X_5'X_2 & X_5'X_3 & X_5'X_4 & X_5'X_5 \end{bmatrix} ;$$

$$(X'X)_c = \begin{bmatrix} X_1'X_6 & X_1'X_7 & X_1'X_8 & X_1'X_9 \\ X_2'X_6 & X_2'X_7 & X_2'X_8 & X_2'X_9 \\ X_3'X_6 & X_3'X_7 & X_3'X_8 & X_3'X_9 \\ X_4'X_6 & X_4'X_7 & X_4'X_8 & X_4'X_9 \\ X_5'X_6 & X_5'X_7 & X_5'X_8 & X_5'X_9 \end{bmatrix} ;$$

$$(X'X)_d = \begin{bmatrix} X_6'X_1 & X_6'X_2 & X_6'X_3 & X_6'X_4 & X_6'X_5 \\ X_7'X_1 & X_7'X_2 & X_7'X_3 & X_7'X_4 & X_7'X_5 \\ X_8'X_1 & X_8'X_2 & X_8'X_3 & X_8'X_4 & X_8'X_5 \\ X_9'X_1 & X_9'X_2 & X_9'X_3 & X_9'X_4 & X_9'X_5 \end{bmatrix} ;$$

$$(X'X)_b = \begin{bmatrix} X_6'X_6 & X_6'X_7 & X_6'X_8 & X_6'X_9 \\ X_7'X_6 & X_7'X_7 & X_7'X_8 & X_7'X_9 \\ X_8'X_6 & X_8'X_7 & X_8'X_8 & X_8'X_9 \\ X_9'X_6 & X_9'X_7 & X_9'X_8 & X_9'X_9 \end{bmatrix} ;$$

Assim, resultou:

$$\underset{\sim}{\hat{\theta}}'X'X\underset{\sim}{\hat{\theta}} = \underset{\sim 1}{\hat{\theta}}'(X'X)_a\underset{\sim 1}{\hat{\theta}} + \underset{\sim 2}{\hat{\theta}}'(X'X)_b\underset{\sim 2}{\hat{\theta}} + \underset{\sim 2}{\hat{\theta}}'(X'X)_d\underset{\sim 1}{\hat{\theta}} + \underset{\sim 1}{\hat{\theta}}'(X'X)_c\underset{\sim 2}{\hat{\theta}}$$

onde $\underset{\sim 2}{\hat{\theta}}'(X'X)_d\underset{\sim 1}{\hat{\theta}} = \underset{\sim 1}{\hat{\theta}}'(X'X)_c\underset{\sim 2}{\hat{\theta}} = \phi$

pois,

$$[\underset{\sim}{\hat{\alpha}}', \underset{\sim}{\hat{\lambda}}', \underset{\sim}{\hat{\gamma}}', \underset{\sim}{\hat{\zeta}}'] \begin{bmatrix} X_6'X_1 & X_6'X_2 & X_6'X_3 & X_6'X_4 & X_6'X_5 \\ X_7'X_1 & X_7'X_2 & X_7'X_3 & X_7'X_4 & X_7'X_5 \\ X_8'X_1 & X_8'X_2 & X_8'X_3 & X_8'X_4 & X_8'X_5 \\ X_9'X_1 & X_9'X_2 & X_9'X_3 & X_9'X_4 & X_9'X_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\hat{\mu}} \\ \underset{\sim}{\hat{g}} \\ \underset{\sim}{\hat{\beta}} \\ \underset{\sim}{\hat{\tau}} \\ \underset{\sim}{\hat{\delta}} \end{bmatrix} =$$

$$= (\underset{\sim}{\hat{\alpha}}'X_6'X_1 + \underset{\sim}{\hat{\lambda}}'X_7'X_1 + \underset{\sim}{\hat{\gamma}}'X_8'X_1 + \underset{\sim}{\hat{\zeta}}'X_9'X_1)\ \underset{\sim}{\hat{\mu}} +$$

$$+ (\underset{\sim}{\hat{\alpha}}'X_6'X_2 + \underset{\sim}{\hat{\lambda}}'X_7'X_2 + \underset{\sim}{\hat{\gamma}}'X_8'X_2 + \underset{\sim}{\hat{\zeta}}'X_9'X_2)\ \underset{\sim}{\hat{g}} +$$

$$+ (\underset{\sim}{\hat{\alpha}}'X_6'X_3 + \underset{\sim}{\hat{\lambda}}'X_7'X_3 + \underset{\sim}{\hat{\gamma}}'X_8'X_3 + \underset{\sim}{\hat{\zeta}}'X_9'X_3)\ \underset{\sim}{\hat{\beta}} +$$

$$+ (\underset{\sim}{\hat{\alpha}}'X_6'X_4 + \underset{\sim}{\hat{\lambda}}'X_7'X_4 + \underset{\sim}{\hat{\gamma}}'X_8'X_4 + \underset{\sim}{\hat{\zeta}}'X_9'X_4)\ \underset{\sim}{\hat{\tau}} +$$

$$+ (\underset{\sim}{\hat{\alpha}}'X_6'X_5 + \underset{\sim}{\hat{\lambda}}'X_7'X_5 + \underset{\sim}{\hat{\gamma}}'X_8'X_5 + \underset{\sim}{\hat{\zeta}}'X_9'X_5)\ \underset{\sim}{\hat{\delta}}$$

$$= \underset{\sim}{\hat{\alpha}}'X_6'X_1\underset{\sim}{\hat{\mu}} + \underset{\sim}{\hat{\lambda}}'X_7'X_1\underset{\sim}{\hat{\mu}} + \underset{\sim}{\hat{\gamma}}'X_8'X_1\underset{\sim}{\hat{\mu}} + \underset{\sim}{\hat{\zeta}}'X_9'X_1\underset{\sim}{\hat{\mu}} +$$

$$+ \underset{\sim}{\hat{\alpha}}'X_6'X_2\underset{\sim}{\hat{g}} + \underset{\sim}{\hat{\lambda}}'X_7'X_2\underset{\sim}{\hat{g}} + \underset{\sim}{\hat{\gamma}}'X_8'X_2\underset{\sim}{\hat{g}} + \underset{\sim}{\hat{\zeta}}'X_9'X_2\underset{\sim}{\hat{g}} +$$

$$+ \underset{\sim}{\hat{\alpha}}'X_6'X_3\underset{\sim}{\hat{\beta}} + \underset{\sim}{\hat{\lambda}}'X_7'X_3\underset{\sim}{\hat{\beta}} + \underset{\sim}{\hat{\gamma}}'X_8'X_3\underset{\sim}{\hat{\beta}} + \underset{\sim}{\hat{\zeta}}'X_9'X_3\underset{\sim}{\hat{\beta}} +$$

$$+ \underset{\sim}{\hat{\alpha}}'X_6'X_4\underset{\sim}{\hat{\tau}} + \underset{\sim}{\hat{\lambda}}'X_7'X_4\underset{\sim}{\hat{\tau}} + \underset{\sim}{\hat{\gamma}}'X_8'X_4\underset{\sim}{\hat{\tau}} + \underset{\sim}{\hat{\gamma}}'X_9'X_4\underset{\sim}{\hat{\tau}} +$$

$$+ \underset{\sim}{\hat{\alpha}}'X_6'X_5\underset{\sim}{\hat{\delta}} + \underset{\sim}{\hat{\lambda}}'X_7'X_5\underset{\sim}{\hat{\delta}} + \underset{\sim}{\hat{\gamma}}'X_8'X_5\underset{\sim}{\hat{\delta}} + \underset{\sim}{\hat{\gamma}}'X_9'X_5\underset{\sim}{\hat{\delta}}$$

e, desde que

$$\hat{\underset{\sim}{\alpha}}'X_6'X_1 = (\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell) \sum_{k}^{K} t_k' = 0$$

$$\hat{\underset{\sim}{\lambda}}'X_7'X_1 = \sum_{\ell,k}^{L,K} r_\ell p_\ell (gt')_{\ell k} = 0$$

$$\hat{\underset{\sim}{\gamma}}'X_8'X_1 = \sum_{i,k}^{p_\ell,K} r_\ell (tt')_{ik(\ell)} = 0$$

$$\hat{\underset{\sim}{\zeta}}'X_9'X_1 = \sum_{\ell f,k}^{L,C,K} r_\ell (gct')_{\ell fk} = 0$$

$$\hat{\underset{\sim}{\alpha}}'X_6'X_2 = \underset{(1)x(L)}{\phi} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\alpha}}'X_6'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} = \phi$$

$$\hat{\underset{\sim}{\lambda}}'X_7'X_2 = \underset{(1)x(L)}{\phi} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\lambda}}'X_7'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} = \phi$$

$$\hat{\underset{\sim}{\gamma}}'X_8'X_2 = \underset{(1)x(L)}{\phi} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\gamma}}'X_8'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} = \phi$$

$$\hat{\underset{\sim}{\zeta}}'X_9'X_2 = \underset{(1)x(L)}{\phi} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\zeta}}'X_9'X_2\hat{\underset{\sim}{g}} = \phi$$

$$\hat{\underset{\sim}{\alpha}}'X_6'X_3 = \underset{(1)x(\Sigma r_\ell)}{\phi} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\alpha}}'X_6'X_3\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \phi$$

$$\hat{\underset{\sim}{\lambda}}'X_7'X_3 = \underset{(1)x(\Sigma r_\ell)}{\phi} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\lambda}}'X_7'X_3\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \phi$$

$$\hat{\underset{\sim}{\gamma}}'X_8'X_3 = \underset{(1)x(\Sigma r_\ell)}{\phi} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\gamma}}'X_8'X_3\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \phi$$

$$\hat{\underset{\sim}{\zeta}}'X_9'X_3 = \underset{(1)x(\Sigma r_\ell)}{\phi} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\zeta}}'X_9'X_3\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \phi$$

$$\hat{\underset{\sim}{\alpha}}'X_6'X_4 = \underset{(1)x(\sum\limits_{\ell=1}^{L} p_\ell)}{\phi} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\alpha}}'X_6'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \phi$$

$$\hat{\underset{\sim}{\lambda}}'X_7'X_4 = \underset{(1)x(\sum\limits_{\ell=1}^{L} p_\ell)}{\phi} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\lambda}}'X_7'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \phi$$

$$\hat{\underset{\sim}{\gamma}}'X_8'X_4 = \underset{(1)x(\sum\limits_{\ell=1}^{L} p_\ell)}{\phi} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\gamma}}'X_8'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \phi$$

$$\hat{\underset{\sim}{\xi}}'X_9'X_4 = \underset{(1)x(\sum\limits_{\ell=1}^{L} p_\ell)}{\phi} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\xi}}'X_9'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \phi$$

$$\hat{\underset{\sim}{\alpha}}'X_6'X_5 = \underset{(1)x(LC)}{\phi} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\alpha}}'X_6'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} = \phi$$

$$\hat{\underset{\sim}{\lambda}}'X_7'X_5 = \underset{(1)x(LC)}{\phi} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\lambda}}'X_7'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} = \phi$$

$$\hat{\underset{\sim}{\gamma}}'X_8'X_5 = \underset{(1)x(LC)}{\phi} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\gamma}}\ X_8'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} = \phi$$

$$\hat{\underset{\sim}{\xi}}'X_9'X_5 = \underset{(1)x(LC)}{\phi} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\xi}}'X_9'X_5\hat{\underset{\sim}{\delta}} = \phi$$

desse modo, obteve-se a soma de quadrados de parâmetros

$$\hat{\theta}'X'X\hat{\theta} = \hat{\theta}_1'(X'X)_a\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2(X'X)_b\hat{\theta}_2 \qquad (\alpha.15)$$

ou

$$SQPar = [\hat{\underset{\sim}{\mu}}, \hat{\underset{\sim}{g}}, \hat{\underset{\sim}{\beta}}, \hat{\underset{\sim}{\tau}}, \hat{\underset{\sim}{\delta}}] \begin{bmatrix} X'_1X_1 & X'_1X_2 & X'_1X_3 & X'_1X_4 & X'_1X_5 \\ X'_2X_1 & X'_2X_2 & X'_2X_3 & X'_2X_4 & X'_2X_5 \\ X'_3X_1 & X'_3X_2 & X'_3X_3 & X'_3X_4 & X'_3X_5 \\ X'_4X_1 & X'_4X_2 & X'_4X_3 & X'_4X_4 & X'_4X_5 \\ X'_5X_1 & X'_5X_2 & X'_5X_3 & X'_5X_4 & X'_5X_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\mu}} \\ \hat{\underset{\sim}{g}} \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}} \\ \hat{\underset{\sim}{\tau}} \\ \hat{\underset{\sim}{\delta}} \end{bmatrix} +$$

$$[\hat{\underset{\sim}{\alpha}}, \hat{\underset{\sim}{\lambda}}, \hat{\underset{\sim}{\gamma}}, \hat{\underset{\sim}{\zeta}}] \begin{bmatrix} X'_6X_6 & X'_6X_7 & X'_6X_8 & X'_6X_9 \\ X'_7X_6 & X'_7X_7 & X'_7X_8 & X'_7X_9 \\ X'_8X_6 & X'_8X_7 & X'_8X_8 & X'_8X_9 \\ X'_9X_6 & X'_9X_7 & X'_9X_8 & X'_9X_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\alpha}} \\ \hat{\underset{\sim}{\lambda}} \\ \hat{\underset{\sim}{\gamma}} \\ \hat{\underset{\sim}{\zeta}} \end{bmatrix}$$

que, convencionou-se chamar:

$$SQParâmetros = SQPar(a) + SQPar(b)$$

$$SQP = SQP(a) + SQP(b)$$

Assim, de (α.12), resultou

$$SQRes = SQTotal - SQP(a) - SQP(b) .$$

Somando-se e subtraindo-se SQParcelas a SQTotal, resultou:

$$SQTotal = SQTotal + SQParcelas - SQParcelas$$

Obtemos, convenientemente:

$$SQRes = \{SQParc - SQP(a)\} + \{SQTot - SQParc - SQP(b)\} \quad (\alpha.16)$$

onde, SQParcelas é dado por

$$SQParc = \underset{\sim}{y}'W\underset{\sim}{y} - G^2/N$$
$$= \frac{1}{K} \sum_{\ell,i,j}^{L,p_\ell,r_\ell} y^2_{ij.(\ell)} - G^2/N$$

onde

$$W = \frac{1}{K} {}_N\begin{bmatrix} E_{(K)} & \phi & \cdots & \phi \\ \phi & E_{(K)} & \cdots & \phi \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi & \phi & \cdots & E_{(K)} \end{bmatrix}_N, \text{ de dimensões } (N)\times(N)$$

onde

$$E_{(K)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, obteve-se, de acordo com a terminologia tradicional dos experimentos em parcelas subdivididas:

$$SQRes = SQRes(a) + SQRes(b)$$

4.2.4.1. Soma de Quadrados dos Parâmetros

A soma de quadrados de parâmetros é dada por:

$$SQP = \hat{\theta}'X'\underset{\sim}{y} \quad , \text{ daí se tem:}$$

4.2.4.1.1. Média - $SQ(\hat{\underset{\sim}{\mu}})$

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\mu}}) = (X_1'X_1)^{-1}\underset{\sim}{G} \times \underset{\sim}{G} = (X_1'X_1)^{-1}G^2$$

ou

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\mu}}) = \frac{G^2}{N} = Co$$

4.2.4.1.2. Grupos - $SQ(\hat{\underset{\sim}{g}})$

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{g}}) = (X_2'X_2)^{-1}[\underset{\sim}{E} - X_2'X_1\hat{\underset{\sim}{\mu}}]'\underset{\sim}{E}$$

$$= \underset{\sim}{E}'(X_2'X_2)^{-1}\underset{\sim}{E} - \hat{\underset{\sim}{\mu}}'X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}\underset{\sim}{E}$$

$$= \underset{\sim}{E}'(X_2'X_2)^{-1}\underset{\sim}{E} - Co$$

ou

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{g}}) = \sum_{\ell=1}^{L} \frac{E_\ell^2}{Kr_\ell p_\ell} - Co$$

4.2.4.1.3. Blocos dentro de Grupos - $SQ(\hat{\underset{\sim}{\beta}})$

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = [\underset{\sim}{B}'(X_3'X_3)^{-1} - \underset{\sim}{E}'(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_3(X_3'X_3)^{-1}]\underset{\sim}{B}$$

$$= \underset{\sim}{B}'(X_3'X_3)^{-1}\underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{E}'(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_3(X_3'X_3)^{-1}\underset{\sim}{B}$$

$$= \underset{\sim}{B}'(X_3'X_3)^{-1}\underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{E}'(X_2'X_2)^{-1}\underset{\sim}{E}$$

ou

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = \sum_{\ell=1}^{L} \left(\sum_{j=1}^{r_\ell} \frac{B_{j(\ell)}^2}{Kp_\ell} - \frac{E_\ell^2}{Kr_\ell p_\ell} \right)$$

4.2.4.1.4. Tratamentos Primários - SQ($\hat{\underset{\sim}{\tau}}$)

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\tau}}) = \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{T}$$

$$= [\underset{\sim}{T}' - \underset{\sim}{E}'H_1' - \underset{\sim}{D}'H_2' + \underset{\sim}{E}^{*\prime}H_3' + \underset{\sim}{T}^{*\prime}H_4' - \hat{\underset{\sim}{\mu}}^{*\prime}H_5'](X_4'X_4)^{-1}\underset{\sim}{T}$$

$$= \underset{\sim}{T}'(X_4'X_4)^{-1}\underset{\sim}{T} - \underset{\sim}{E}'H_1'(X_4'X_4)^{-1}\underset{\sim}{T} - \underset{\sim}{D}'H_2'(X_4'X_4)^{-1}\underset{\sim}{T} +$$

$$+\underset{\sim}{E}^{*\prime}H_3'(X_4'X_4)^{-1}\underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{T}^{*\prime}H_4'(X_4'X_4)^{-1}\underset{\sim}{T} - \hat{\underset{\sim}{\mu}}^{*\prime}H_5'(X_4'X_4)^{-1}\underset{\sim}{T}$$

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\tau}}) = \underset{\sim}{T}'(X_4'X_4)^{-1}\underset{\sim}{T} - \underset{\sim}{E}'(X_2'X_2)^{-1}\underset{\sim}{E} - \underset{\sim}{D}'H_2(X_4'X_4)^{-1}\underset{\sim}{T} +$$

$$+ \underset{\sim}{E}^{*\prime}H_3'(X_4'X_4)^{-1}\underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{T}^{*\prime}H_4'(X_4'X_4)^{-1}\underset{\sim}{T} - \hat{\underset{\sim}{\mu}}^{*\prime}H_5'(X_4'X_4)^{-1}\underset{\sim}{T}$$

ou

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\tau}}) = \frac{1}{K}\left[\frac{1}{\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell}\left(\sum_{f=1}^{C} T_f^2 - \frac{G^{*2}}{C}\right) + \frac{1}{C}\sum_{\ell=1}^{L}\frac{E_\ell^{2*}}{r_\ell} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\ell=1}^{L}\left(\sum_{h=1}^{N_\ell}\frac{T^2_{n_{\ell h}}}{r_\ell} - \frac{E_\ell^2}{r_\ell p_\ell}\right)\right]$$

4.2.4.1.5. Interação Grupos x Tratamentos Primários Comuns - SQ($\hat{\underset{\sim}{\delta}}$)

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\delta}}) = [\underset{\sim}{D}' - \hat{\underset{\sim}{\mu}}^{*\prime}X_1'X_5 + \hat{\underset{\sim}{g}}^{*\prime}X_2'X_5 - \hat{\underset{\sim}{\tau}}^{*\prime}X_4'X_5](X_5'X_5)^{-1}\underset{\sim}{D}$$

$$= \underset{\sim}{D}'(X_5'X_5)^{-1}\underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{E}^{*\prime}(X_{2*}'X_{2*})^{-1}\underset{\sim}{E}^{*} - \underset{\sim}{T}^{*\prime}(X_{4*}'X_{4*})^{-1}\underset{\sim}{T}^{*} + \text{Co}$$

ou

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\delta}}) = \frac{1}{K}\left[\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{f=1}^{C}\frac{D^2_{\ell f}}{r_\ell} - \sum_{f=1}^{C}\frac{T^2_f}{\sum\limits_{\ell=1}^{L} r_\ell} - \sum_{\ell=1}^{L}\frac{E^{*2}_\ell}{Cr_\ell} + \frac{G^{*2}}{C\sum\limits_{\ell=1}^{L} r_\ell}\right]$$

4.2.3.1.6. Tratamentos Secundários - $SQ(\hat{\underset{\sim}{\alpha}})$

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\alpha}}) = [\underset{\sim}{A}' - \hat{\underset{\sim}{\mu}}'X_1'X_6](X_6'X_6)^{-1}\underset{\sim}{A}$$

$$= \underset{\sim}{A}'(X_6'X_6)^{-1}\underset{\sim}{A} - \hat{\underset{\sim}{\mu}}'X_1'X_6(X_6'X_6)^{-1}\underset{\sim}{A}$$

$$= \underset{\sim}{A}'(X_6'X_6)^{-1}\underset{\sim}{A} - Co$$

ou

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\alpha}}) = \frac{1}{\sum\limits_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell}\sum_{k=1}^{K} A_k^2 - Co$$

4.2.4.1.7. Interação Grupos x Tratamentos Secundários - $SQ(\hat{\underset{\sim}{\lambda}})$

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\lambda}}) = [\underset{\sim}{L}' - \underset{\sim}{E}'(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_7 - \underset{\sim}{A}'(X_6'X_6)^{-1}X_6'X_7 +$$

$$+ \hat{\underset{\sim}{\mu}}'X_1'X_7](X_7'X_7)^{-1}\underset{\sim}{L}$$

$$= \underset{\sim}{L}'(X_7'X_7)^{-1}\underset{\sim}{L} - \underset{\sim}{E}'(X_2'X_2)^{-1}\underset{\sim}{E} - \underset{\sim}{A}'(X_6'X_6)^{-1}\underset{\sim}{A} + Co$$

ou

$$SQ(\underset{\sim}{\hat{\lambda}}) = \sum_{\ell=1}^{L}\sum_{k=1}^{K}\frac{L_{\ell k}^2}{r_\ell p_\ell} - \sum_{\ell=1}^{L}\frac{E_\ell^2}{Kr_\ell p_\ell} - \sum_{k=1}^{K}\frac{A_k^2}{\sum\limits_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell} + Co$$

4.2.4.1.8. Interação Tratamentos Primários x Tratamentos Secundários - $SQ(\underset{\sim}{\hat{\gamma}})$

$$SQ(\underset{\sim}{\hat{\gamma}}) = \underset{\sim}{\hat{\gamma}}'\underset{\sim}{N}$$

$$= \{\underset{\sim}{N}' - [\underset{\sim}{T}' - \underset{\sim}{E}'H_1' - \underset{\sim}{D}'H_2' + \underset{\sim}{E}^{*}{}'H_3' + \underset{\sim}{T}^{*}{}'H_4' - \underset{\sim}{\hat{\mu}}^{*}{}'H_5']H_{11}' -$$

$$\underset{\sim}{L}'H_6' - \underset{\sim}{Z}'H_7' + \underset{\sim}{L}^{*}{}'H_8' + \underset{\sim}{N}^{*}{}'H_9' - \underset{\sim}{A}^{*}{}'H_{10}'\}(X_8'X_8)^{-1}\underset{\sim}{N}$$

Considerando as estruturas de todas as matrizes envolvidas, resultou:

$$SQ(\underset{\sim}{\hat{\gamma}}) = \left(\frac{\sum\limits_{f=1}^{C}\sum\limits_{k=1}^{K} N_{fk(.)}^2}{\sum\limits_{\ell=1}^{L} r_\ell} + \sum_{\ell=1}^{L}\sum_{h=1}^{N_\ell}\sum_{k=1}^{K}\frac{N_{n\ell h k}^2}{r_\ell}\right) +$$

$$\sum_{\ell=1}^{L}\frac{E_\ell^2}{Kr_\ell p_\ell} - \left(\frac{\sum\limits_{f=1}^{C} T_f^2}{K\sum\limits_{\ell=1}^{L} r_\ell} + \sum_{\ell=1}^{L}\sum_{h=1}^{N_\ell}\frac{T_{n\ell h}^2}{Kr_\ell}\right) - \sum_{\ell=1}^{L}\sum_{k=1}^{K}\frac{L_{\ell k}^2}{r_\ell p_\ell} +$$

$$+ \left[\sum_{\ell=1}^{L} \sum_{k=1}^{K} \frac{L_{\ell k}^{*2}}{Cr_\ell} - \sum_{\ell=1}^{L} \frac{E_\ell^{*2}}{KCr_\ell} - \frac{\sum_{k=1}^{K} A_k^{*2}}{C \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell} + \frac{G^{*2}}{KC \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell} \right]$$

4.2.4.1.9. Interação Grupos x Tratamentos Primários Comuns x Tratamentos Secundários - SQ($\hat{\xi}$)

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\xi}}) = [\underset{\sim}{Z}' - \hat{\underset{\sim}{\mu}}^{*\prime} X_1' X_9 - \hat{\underset{\sim}{g}}^{*\prime} X_2' X_9 - \hat{\underset{\sim}{\tau}}^{*\prime} X_4' X_9 - \hat{\underset{\sim}{\delta}}' X_5' X_9 -$$

$$- \hat{\underset{\sim}{\alpha}}^{*\prime} X_6' X_9 - \hat{\underset{\sim}{\lambda}}' X_7' X_9 - \hat{\underset{\sim}{\gamma}}^{*\prime} X_8' X_9] (X_9' X_9)^{-1} \underset{\sim}{Z}$$

$$= \underset{\sim}{Z}'(X_9' X_9)^{-1} \underset{\sim}{Z} - \underset{\sim}{D}'(X_5' X_5)^{-1} \underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{L}'^{*}(X_{7*}' X_{7*})^{-1} \underset{\sim}{L}^*$$

$$- \underset{\sim}{N}'^{*}(X_{8*}' X_{8*})^{-1} \underset{\sim}{N}^* + \underset{\sim}{A}^{*\prime}(X_{6*}' X_{6*})^{-1} \underset{\sim}{A}^* +$$

$$+ \underset{\sim}{E}^{*\prime}(X_{2*}' X_{2*})^{-1} \underset{\sim}{E}^* + \underset{\sim}{T}^{*\prime}(X_{4*}' X_{4*})^{-1} \underset{\sim}{T}^* - Co_*$$

ou

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\zeta}}) = \left(\sum_{\ell=1}^{L} \sum_{f=1}^{C} \sum_{k=1}^{K} \frac{Z^2_{\ell fk}}{r_\ell} - \frac{G^{*2}}{KC \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell} \right) - \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{f=1}^{C} \frac{D^2_{\ell f}}{Kr_\ell} -$$

$$\sum_{\ell=1}^{L} \sum_{k=1}^{K} \frac{L^{*2}_{\ell k}}{Cr_\ell} - \sum_{f=1}^{C} \sum_{k=1}^{K} \frac{N^{*2}_{fk}}{\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell} + \frac{\sum_{k=1}^{K} A^{*2}_k}{C \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell} +$$

$$\sum_{\ell=1}^{L} \frac{E^{*2}_{\ell}}{KCr_\ell} + \sum_{f=1}^{C} \frac{T^2_f}{K \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell}$$

4.2.4.2. Soma de Quadrados de Parcelas

De 4.2.4. tem-se que:

$$SQParc = \frac{1}{K} \underset{\sim}{y}' Wy - Co$$

$$= \frac{1}{K} \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{i=1}^{p_\ell} \sum_{j=1}^{r_\ell} y^2_{ij.(\ell)} - Co$$

4.2.4.3. Soma de Quadrados Total

$$SQTotal = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - Co$$

$$= \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{i=1}^{p_\ell} \sum_{j=1}^{r_\ell} \sum_{k=1}^{K} y^2_{ijk(\ell)} - Co$$

4.2.4.4. Soma de Quadrados Resíduo (a)

Por (α.16), tem-se que:

$$SQRes(a) = SQParc - SQ(\hat{\underset{\sim}{g}}) - SQ(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) - SQ(\hat{\underset{\sim}{\tau}}) - SQ(\hat{\underset{\sim}{\delta}})$$

4.2.4.5. Soma de Quadrados Resíduo (b)

Por (α.16), resultou:

$$SQRes(b) = SQTot - SQPar - SQ(\hat{\underset{\sim}{\alpha}}) - SQ(\hat{\underset{\sim}{\lambda}}) - SQ(\hat{\underset{\sim}{\gamma}}) - SQ(\hat{\underset{\sim}{\xi}})$$

4.2.4.6. Esperança dos Quadrados Médios

As somas de quadrados, em termos de formas quadráticas, podem ser escritas como:

$$\underset{\sim}{y}'Q_1\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}'(Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7 + Q_8 + Q_9 + Q_{10} + Q_{11})\underset{\sim}{y}\ , \quad \text{onde}$$

os Q_i com $i = 1, 2, \ldots, 11$, são os núcleos das formas quadráticas.

Desse modo tem-se:

$Q_1 = [I_{(N)} - \frac{1}{N} E_{(N)}]$; posto $[Q_1] = N-1$, associado à soma de quadrados total;

$Q_2 = [X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2' - \frac{1}{N} E_{(N)}]$; posto $[Q_2] = L-1$, associado à soma de quadrados de grupos;

$$Q_3 = [X_3(X_3'X_3)^{-1}X_3' - X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2]; \text{ posto } [Q_3] = \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell - L,$$

associado à soma de quadrados de blocos dentro de grupos;

$$Q_4 = [X_4(X_4'X_4)^{-1}X_4' - X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2' - X_5H_2(X_4'X_4)^{-1}X_4' +$$

$$+ X_{2*}H_3(X_4'X_4)^{-1}X_4' + X_{4*}H_4'(X_4'X_4)^{-1}X_4' -$$

$$- X_{1*}(X_1'X_1)_*^{-1}H_5(X_4'X_4)^{-1}X_4'] \text{ ; posto } [Q_4] = V-1,$$ associado à soma de quadrados de tratamentos primários;

$$Q_5 = [X_5(X_5'X_5)^{-1}X_5' - X_{2*}(X_2'X_2)_*^{-1}X_{2*}' - X_{4*}(X_4'X_4)_*^{-1}X_{4*}' +$$

$$+ \frac{1}{KC\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell} E_{(KC\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell)}] \text{ , posto } [Q_5] = (C-1)(L-1) \text{ ,}$$

associado à soma de quadrados da interação grupos x tratamentos primários comuns;

$$Q_6 = [W - X_3(X_3'X_3)^{-1}X' - Q_4 - Q_5] \text{ , posto } [Q_6] = \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell -$$

$$- \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell - V - (C-1)(L-1) + 1 \text{ ,}$$ associado à soma de quadrados do resíduo (a);

$$Q_7 = [X_6(X_6'X_6)^{-1}X' - \frac{1}{N} E_{(N)}] \text{ ; posto } [Q_7] = K-1,$$ associado à soma de quadrados de tratamentos secundários;

$$Q_8 = [X_7(X_7'X_7)^{-1}X_7' - X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2' - X_6(X_6'X_6)^{-1}X_6' + $$
$$+ \frac{1}{N} E_{(N)}] ,$$ posto $[Q_8] = (L-1)(K-1)$, associado à soma de quadrados da interação grupos x tratamentos secundários;

$$Q_9 = \{X_8 - [X_4 - X_2H_1' - X_5H_2' + X_{2*}H'H_3 + X_{4*}H_4' -$$
$$- X_{1*}(X_1'X_1)_*^{-1}H_5'] H_{11}' - X_7H_6' - X_8H_7' + X_{7*}H_8' +$$
$$+ X_{8*}H_9' - X_{6*}H_{10}'\} (X_8'X_8)^{-1}X_8' ,$$

posto $[Q_9] = (V-1)(K-1)$, associado à soma de quadrados da interação tratamentos primários x tratamentos secundários;

$$Q_{10} = [X_9(X_9'X_9)^{-1}X_9' - X_5(X_5'X_5)^{-1}X_5' - X_{7*}(X_7'X_7)^{-1}X_{7*} -$$
$$- X_{8*}(X_8'X_8)^{-1}X_{8*}' + X_{6*}(X_6'X_6)_*^{-1}X_{6*}' + X_{2*}(X_2'X_2)_*^{-1}X_{2*}' +$$
$$+ X_{4*}(X_4'X_4)^{-1}X_{4*}' - \frac{1}{KC\sum\limits_{\ell=1}^{L} r_\ell} E_{(KC\sum\limits_{\ell=1}^{L} r_\ell)}]$$

posto $[Q_{10}] = (L-1)(K-1)(C-1)$, associado à soma de quadrados da interação grupos x tratamentos primários comuns x tratamentos secundários;

$$Q_{11} = [I_{(N)} - X(X'X)^GX'] ,$$

$$\text{posto } [Q_{11}] = N - \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell - (K-1)[V + C(L-1)]$$

onde $(X'X)^G$ é qualquer inversa generalizada, associada à soma de quadrados do resíduo (b).

As esperanças matemáticas destas formas quadráticas, segundo SEARLE (1971), são dadas por:

$$E(\underset{\sim}{y}'Q\underset{\sim}{y}) = \underset{\sim}{\theta}'X'QX\underset{\sim}{\theta} + t_r(QV) \quad ,$$

sendo Q o núcleo da forma quadrática, V = Var($\underset{\sim}{y}$) e tr indica o operador traço de uma matriz.

Baseado neste método, nas distribuições das variáveis aleatórias, em IEMMA (1981) e VIZONI (1984) e nos teoremas apresentados, no Apêndice 1, tem-se as esperanças dos quadrados médios, apresentadas na Tabela 5 e garante-se, deste modo, as respectivas distribuições de χ^2 das somas de quadrados dos parâmetros. Portanto, as estatísticas F calculadas têm, sob H_0, distribuição F de Snedecor.

TABELA 5- Esquema da Análise de Variância da Análise Conjunta.

Causas de Variação	GL	E(QM)
Grupos (g)	$(L-1)$	$[1 + (K-1)\rho]\sigma^2 + f_1(\theta)$
Blocos/Grupos	$(\Sigma r_\ell - L)$	$[1 + (K-1)\rho]\sigma^2 + f_2(\theta)$
Trat (t)aj	$(V-1)$	$[1 + (K-1)\rho]\sigma^2 + f_3(\theta)$
Trat.comxgrupos	$(C-1)(L-1)$	$[1 + (K-1)\rho]\sigma^2 + f_4(\theta)$
Resíduo (a)	GLRes(a)	$[1 + (K-1)\rho]\sigma^2$
Parcelas	$\Sigma r_\ell p_\ell - 1$	
Trat (t')	$(K-1)$	$(1-\rho)\sigma^2 + f_5(\theta)$
Interação gxt'	$(L-1)(K-1)$	$(1-\rho)\sigma^2 + f_6(\theta)$
Interação txt'_{aj}	$(V-1)(K-1)$	$(1-\rho)\sigma^2 + f_7(\theta)$
Interação Trat.comxgxt'	$(C-1)(L-1)(K-1)$	$(1-\rho)\sigma^2 + f_8(\theta)$
Resíduo (b)	GLRes(b)	$(1-\rho)\sigma^2$
Total	$N-1$	

onde

$f_i(\theta)$ = são funções não negativas dos respectivos parâmetros $(i = 1, 2, \ldots, 8)$

Como foi comentado em 2.1, nos ensaios em parcelas subdivididas geralmente são testadas três hipóteses básicas:

$H_o(1)$: $t_i = 0$; $i = 1, 2, ..., V$

$H_o(2)$: $t'_k = 0$; $k = 1, 2, ..., K$

$H_o(3)$: $tt'_{ik} = 0$; $i = 1, 2, ..., V; K = 1, 2, ..., K$,

que são, respectivamente, as hipóteses de nulidade para efeitos de tratamentos primários, efeitos de tratamentos secundários e efeitos da interação entre dois tratamentos.

Além destas hipóteses podem ser testadas:

$H_o(4)$: $g_\ell = 0$; $\ell = 1, 2, ..., L$

$H_o(5)$: $gc_{\ell f} = 0$; $\ell = 1, 2, ..., L; f = 1, 2, ..., C$

$H_o(6)$: $gt'_{\ell k} = 0$; $\ell = 1, 2, ..., L; k = 1, 2, ..., K$

$H_o(7)$: $gct'_{\ell f k} = 0$; $\ell = 1, 2, ..., L; f = 1, 2, ..., C;$
$k = 1, 2, ..., K$

Os erros adequados para cada teste, ficam evidentes quando se observa as esperanças dos quadrados médios da Tabela 5.

Assim, ficaram determinados os critérios para os respectivos testes, quais sejam:

Hipóteses	G.L.	$F_{(observado)}$
$H_o(1)$	(V-1) ; GLRes(a)	QMtaj/QMRes(a)
$H_o(2)$	(K-1) ; GLRes(b)	QMt'/QMRes(b)
$H_o(3)$	(V-1)(K-1) ; GLRes(b)	QMttáj/QMRes(b)
$H_o(4)$	(L-1) ; GLRes(a)	QMg /QMRes(a)
$H_o(5)$	(L-1)(C-1) ; GLRes(a)	QMgc/QMRes(a)
$H_o(6)$	(L-1)(K-1) ; GLRes(b)	QMgt'/QMRes(b)
$H_o(7)$	(L-1)(C-1)(K-1) ; GLRes(b)	QMgct'/QMRes(b)

4.2.4.7. Método Prático de Obtenção da Análise de Variância

Na Tabela 5 observa-se que os graus de liberdade do resíduo (a) e do resíduo (b) são dados por:

- Resíduo (a)

$$GLRes(a) = \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell - 1 - [L - 1 + \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell - L + V - 1 + (C-1)(L-1)]$$

$$= \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell - \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell - [V + C(L-1) - L]$$

mas, lembrando que

$$V = C + \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{h=1}^{N_\ell} n_{\ell h} \quad , \text{ vem:}$$

$$\text{GLRes(a)} = \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell - \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell + L - \left[\sum_{\ell=1}^{L} \sum_{h=1}^{N_\ell} n_{\ell h} + CL\right]$$

mas

$$\sum_{\ell=1}^{L} \sum_{h=1}^{N_\ell} n_{\ell h} + CL = \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell$$

$$\therefore \quad \text{GLRes(a)} = \sum_{\ell=1}^{L} [r_\ell p_\ell - r_\ell - p_\ell + 1]$$

$$= \sum_{\ell=1}^{L} (r_\ell - 1)(p_\ell - 1)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{L} \text{GL Res(a)}_\ell$$

Isto é, os graus de liberdade do resíduo (a) da análise de grupos de experimentos são a soma dos respectivos graus de liberdade dos resíduos das análises individuais.

Por raciocínio análogo, verifica-se:

$$\text{SQRes(a)} = \sum_{\ell=1}^{L} \text{SQRes(a)}_\ell$$

- Resíduo (b)

$$\text{GLRes(b)} = N-1 - \left[\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell - 1 + K - 1 + (L-1)(K-1) + \right.$$

$$\left. + (V-1)(K-1) + (C-1)(L-1)(K-1)\right]$$

$$= N - \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell - [(K-1)(V + CL - C)]$$

e, substituindo V, resulta:

$$GLRes(b) = N - \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell - (K-1) \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell$$

como

$$N = K \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell \ ,$$

tem-se

$$GLRes(b) = (K-1) \sum_{\ell=1}^{L} r_\ell p_\ell - (K-1) \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell$$

$$= (K-1) \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell (r_\ell - 1)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{L} GLRes(b)_\ell \ .$$

Ou seja, os graus de liberdade do resíduo (b) da análise de grupos de experimentos são a soma dos respectivos graus de liberdade das análises individuais.

Por raciocínio análogo, tem-se:

$$SQRes(b) = \sum_{\ell=1}^{L} SQRes(b)_{\ell} \; .$$

Como foi visto em 4.2.4.1, as somas de quadrados são todas calculadas de modo usual, com exceção das somas de quadrados de tratamentos primários e da interação entre tratamentos primários e tratamentos secundários. Estas somas de quadrados podem ser calculadas do seguinte modo:

Soma de Quadrados de Tratamentos Primários

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\tau}}) = SQParc - SQ(\hat{\underset{\sim}{g}}) - SQ(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) - SQ(\hat{\underset{\sim}{\delta}}) - SQRes(a)$$

Soma de Quadrados da Interação Tratamentos Primários x Tratamentos Secundários

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\gamma}}) = SQTot - SQPar - SQ(\hat{\underset{\sim}{\alpha}}) - SQ(\hat{\underset{\sim}{\lambda}}) - SQ(\hat{\underset{\sim}{\xi}}) - SQRes(b)$$

5. ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

5.1. Análises Individuais

Julgou-se adequada a ilustração dos resultados obtidos neste estudo. Assim, com base nos dados das Tabelas 2 e 3, foram realizados os testes sobre as estruturas das matrizes de covariâncias, conforme o Apêndice 2.

5.1.1. Testes sobre a Estrutura das Matrizes de Covariâncias

5.1.1.1. Teste de homogeneidade das matrizes de covariâncias para todos os tratamentos primários

a - Para o Ensaio 1

Denominando-se por $G_{i(1)}$, $i = 1,2,\ldots,17$, as estimativas das matrizes de covariâncias Σ_i para os 17 tratamentos primários, conforme item 1 do Apêndice 2, tem-se:

$$G_{1(1)} = \begin{bmatrix} 839,39 & -61,92 \\ -61,92 & 12,83 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{1(1)}| = 6392,4466 \quad \text{e} \quad \ell n\, |G_{1(1)}| = 8,8440$$

$$G_{2(1)} = \begin{bmatrix} 105,70 & 21,68 \\ 21,68 & 350,17 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{2(1)}| = 36543,6255 \quad \text{e} \quad \ell n\, |G_{2(1)}| = 10,5063$$

$$G_{3(1)} = \begin{bmatrix} 17,37 & 11,33 \\ 11,33 & 257,74 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{3(1)}| = 4347,5823 \quad \text{e} \quad \ell n\, |G_{3(1)}| = 8,3774$$

$$G_{4(1)} = \begin{bmatrix} 126,23 & -14,05 \\ -14,05 & 62,95 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{4(1)}| = 7748,5481 \quad \text{e} \quad \ell n\, |G_{4(1)}| = 8,9553$$

$$G_{5(1)} = \begin{bmatrix} 10,12 & 3,79 \\ 3.79 & 42,53 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{5(1)}| = 415,8728 \quad \text{e} \quad \ell n\, |G_{5(1)}| = 6,0304$$

$$G_{6(1)} = \begin{bmatrix} 88,77 & 52,27 \\ 52,27 & 244,76 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{6(1)}| = 18993,7321 \quad \text{e} \quad \ell n\, |G_{6(1)}| = 9,8519$$

$$G_{7(1)} = \begin{bmatrix} 92,59 & 23,27 \\ 23,27 & 16,75 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{7(1)}| = 1009,3683 \quad \text{e} \quad \ell n\, |G_{7(1)}| = 6,9171$$

$$G_{8(1)} = \begin{bmatrix} 49,18 & -29,60 \\ -29,60 & 24,54 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{8(1)}| = 330,3149 \quad \text{e} \quad \ell n\, |G_{8(1)}| \quad 5,8000$$

$$G_{9(1)} = \begin{bmatrix} 146,97 & 26,49 \\ 26,49 & 12,19 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{9(1)}| = 1089,9900 \quad \text{e} \quad \ell n |G_{9(1)}| = 6,9939$$

$$G_{10(1)} = \begin{bmatrix} 28,42 & -28,27 \\ -28,27 & 78,24 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{10(1)}| = 1424,4579 \quad e \quad \ell n\,|G_{10(1)}| = 7,2615$$

$$G_{11(1)} = \begin{bmatrix} 104,69 & 21,12 \\ 21,12 & 95,51 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{11(1)}| = 9552,5447 \quad e \quad \ell n\,|G_{11(1)}| = 9,1646$$

$$G_{12(1)} = \begin{bmatrix} 119,61 & -67,02 \\ -67,02 & 92,82 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{12(1)}| = 6610,5198 \quad e \quad \ell n\,|G_{12(1)}| = 8,7964$$

$$G_{13(1)} = \begin{bmatrix} 54,71 & 28,00 \\ 28,00 & 201,02 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{13(1)}| = 10213,4554 \quad e \quad \ell n\,|G_{13(1)}| = 9,2315$$

$$G_{14(1)} = \begin{bmatrix} 147,86 & 84,97 \\ 84,97 & 57,21 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{14(1)}| = 1239,1390 \quad e \quad \ell n\,|G_{14(1)}| = 7,1222$$

$$G_{15(1)} = \begin{bmatrix} 334,68 & 167,18 \\ 167,18 & 99,96 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{15(1)}| = 5503,9280 \quad e \quad \ell n\,|G_{15(1)}| = 8,6132$$

$$G_{16(1)} = \begin{bmatrix} 124,44 & 3,42 \\ 3,42 & 76,59 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{16(1)}| = 9519,3400 \quad e \quad \ell n\,|G_{16(1)}| = 9,1611$$

$$G_{17(1)} = \begin{bmatrix} 17,23 & -16,53 \\ -16,53 & 49,58 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{17(1)}| = 581,0225 \quad e \quad \ell n\,|G_{17(1)}| = 6,3648$$

Assim, a estimativa G, para a matriz comum de covariâncias Σ, é:

$$G = \begin{bmatrix} 141,64 & 13,30 \\ 13,30 & 104,43 \end{bmatrix} \therefore \quad |G| = 14615,3150 \quad e \quad \ell n\,|G| = 9,5898$$

Então para o teste de

H_o: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \ldots = \Sigma_{17} = \Sigma$

H_1: $\Sigma_i \neq \Sigma_{i'}$, para algum i,i' (i=i')

foram obtidos, conforme o item 1 do Apêndice 2:

$$g_3 = (r_1-1)\ [p_1 \ell n\ |G| - \sum_{i=1}^{p_1} \ell n\ |G_i|]$$

$$= (4-1)\ [17 \times 9{,}5898 - 137{,}9914]$$

$$= 75{,}1069$$

$$g_1 = [(p_1+1)/(r_1 p_1 - p_1)]\ (2K^2+3K-1)/[6(K+1)]$$

$$= [(17+1)/(68-17)]\ (2x2^2+3x2-1)/[6(2+1)]$$

$$= 0{,}2549$$

$$\therefore \quad \chi^2_{obs} = (1 - g_1)\ g_3 = 55{,}96$$

e

$$f_1 = [K + K(K-1)/2]\ (p_1-1)$$

$$= [2 + 2(2-1)/2]\ (17-1)$$

$$= 48 \text{ g.}\ell.$$

Assim, como $\chi^2_{obs} = 55{,}96 < \chi^2_{tab} = \chi^2_{5\%,48} = 65{,}17$, não há evidências para a rejeição de H_o.

Deste modo, adotou-se a matriz comum de covariâncias Σ, estimada pela matriz G, para representar as covariâncias para representar as covariâncias entre tratamentos secundários, pertencentes ao mesmo tratamento primário.

b - Para o Ensaio 2

Denominando-se por $G_{i(2)}$, i = 1,2,..., 12, as estimativas das matrizes de covariâncias Σ_i, para os tratamentos primários, conforme item 1 do Apêndice 2, têm-se:

$$G_{1(2)} = \begin{bmatrix} 121,98 & 143,07 \\ 143,07 & 318,75 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{1(1)}| = 18412,5569 \quad \text{e} \quad \ln |G_{1(1)}| = 9,8208$$

$$G_{2(2)} = \begin{bmatrix} 251,74 & 103,76 \\ 103,76 & 62,45 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{2(1)}| = 4953,2864 \quad \text{e} \quad \ln |G_{2(1)}| = 8,5078$$

$$G_{3(2)} = \begin{bmatrix} 148,49 & 77,23 \\ 77,23 & 58,46 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{3(1)}| = 2716,9562 \quad \text{e} \quad \ln |G_{3(1)}| = 7,9073$$

$$G_{4(2)} = \begin{bmatrix} 346,99 & 4,11 \\ 4,11 & 138,48 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{4(1)}| = 48035,0420 \quad \text{e} \quad \ln |G_{4(1)}| = 10,7797$$

$$G_{5(2)} = \begin{bmatrix} 85,59 & 18,83 \\ 18,83 & 30,76 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{5(1)}| = 2278,6215 \quad \text{e} \quad \ln |G_{5(1)}| = 7,7313$$

$$G_{6(2)} = \begin{bmatrix} 77,21 & -26,52 \\ -26,52 & 9,30 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{6(1)}| = 14,2774 \quad \text{e} \quad \ln |G_{6(1)}| = 2,6587$$

$$G_{7(2)} = \begin{bmatrix} 103,81 & 112,64 \\ 112,64 & 161,48 \end{bmatrix} \therefore \quad |G_{7(1)}| = 4076,1574 \quad \text{e} \quad \ln |G_{7(1)}| = 8,3129$$

$$G_{8(2)} = \begin{bmatrix} 7,40 & 1,47 \\ 1,47 & 22,44 \end{bmatrix} \therefore \begin{array}{l} |G_{8(1)}| = 163,9574 \\ \text{e } \ell n\, |G_{8(1)}| = 5,0996 \end{array}$$

$$G_{9(2)} = \begin{bmatrix} 131,15 & -0,73 \\ -0,73 & 7,82 \end{bmatrix} \therefore \begin{array}{l} |G_{9(1)}| = 1024,5035 \\ \text{e } \ell n\, |G_{9(1)}| = 6,9320 \end{array}$$

$$G_{10(2)} = \begin{bmatrix} 64,74 & 6,40 \\ 6,40 & 13,58 \end{bmatrix} \therefore \begin{array}{l} |G_{10(1)}| = 838,1818 \\ \text{e } \ell n\, |G_{10(1)}| = 6,7312 \end{array}$$

$$G_{11(2)} = \begin{bmatrix} 184,40 & 98,23 \\ 98,23 & 66,40 \end{bmatrix} \therefore \begin{array}{l} |G_{11(1)}| = 2595,0477 \\ \text{e } \ell n\, |G_{11(1)}| = 7,8614 \end{array}$$

$$G_{12(2)} = \begin{bmatrix} 39,35 & 10,47 \\ 10,47 & 32,32 \end{bmatrix} \therefore \begin{array}{l} |G_{12(1)}| = 1162,1902 \\ \text{e } \ell n\, |G_{12(1)}| = 7,0581 \end{array}$$

Assim, a estimativa de G, para a matriz comum de covariâncias Σ, é:

$$G = \begin{bmatrix} 130,24 & 45,75 \\ 45,75 & 76,85 \end{bmatrix} \therefore \begin{array}{l} |G| = 7916,5379 \\ \text{e } \ell n\, |G| = 8,9767 \end{array}$$

Então, para o teste de

$H_0: \Sigma_1 = \Sigma_2 = \ldots \Sigma_{12} = \Sigma$

$H_1: \Sigma_i \neq \Sigma_{i'}$, para algum i,i' (i≠i') foram obtidos, conforme o item 1 do Apêndice 2.

$$g_3 = (r_2-1)\ [p_2 \ell n\ |G| - \sum_{i=1}^{p_2} \ell n\ |G_i|]$$
$$= (4-1)\ [(12 \times 8,9767 - 89,4007]$$
$$= 54,9595$$

$$g_1 = [(p_2+1)/(r_2 p_2 - p_2)]\ (2K^2+3K-1)/[6(K+1)]$$
$$= [(12+1)/(48-12)]\ (2x2^2+3x2-1)/[6(2+1)]$$
$$= 0{,}2608$$

$$\therefore \qquad \chi^2_{obs} = (1-g_1)\ g_3 = 40{,}63$$

e

$$f_1 = [(K+K(K-1)/2]\ (p_2-1)$$
$$= [2+2(2-1)/2](12-1)$$
$$= 33$$

Assim, como $\chi^2_{obs} = 40{,}63 < \chi^2_{tab} = \chi^2_{5\%,33} = 47{,}40$, não há evidências para a rejeição de H_o.

Deste modo, adotou-se a matriz comum de covariâncias Σ, estimada pela matriz G, para representar as covariâncias entre tratamentos secundários, pertencentes ao mesmo tratamento primário.

5.1.1.2. Teste de uniformidade da matriz comum de covariâncias

a - Para o Ensaio 1

De acordo com item 2 do Apêndice 2, determinou-se a estimativa G*, da matriz uniforme Σ^*:

$$G^* = \begin{bmatrix} 123{,}04 & 13{,}30 \\ 13{,}30 & 123{,}04 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad |G^*| = 14961{,}4799$$

Assim, para o teste de

H_o: $\not{\Sigma} = \not{\Sigma}^*$

H_1: $\not{\Sigma} \neq \not{\Sigma}^*$, foram obtidos:

$$g_4 = \frac{|G|}{|G^*|} = \frac{14.615,3156}{14.961,4799} = 0,9769$$

$$g_5 = -(r_1 p_1 - p_1) \ \ell n \ g_4$$
$$= -(68-17) \ \ell n \ 0,9769$$
$$= 1,1939$$

$$g_6 = \frac{K(K+1)^2 \ (2K-3)}{6(r_1 p_1 - p_1)(K-1)(K^2+K-4)}$$

$$g_6 = \frac{2(2+1)^2 \ (2x2-3)}{6(68-17)(2-1)(2^2+2-4)}$$

$$g_6 = 18/612 = 0,0294$$

$$\chi^2_{obs} = (1-g_6)g_5 = 1,1587$$

$$f_3 = (K^2+K-4)/2 = (2^2+2-4)/2$$

$$f_3 = 1 \text{ g.}\ell.$$

Como $\chi^2_{obs} = 1,16 < \chi^2_{tab} = \chi^2_{5\%,1} = 3,84$, não há evidências para a rejeição de H_o.

Desta forma, adotou-se a estimativa G*, da matriz uniforme de covariâncias Σ^*, para todos os tratamentos.

b - Para o Ensaio 2

Conforme o item 2 do Apêndice 2, determinou-se a estimativa G*, da matriz uniforme Σ^*.

$$G^* = \begin{bmatrix} 103,55 & 45,75 \\ 45,75 & 103,55 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad |G^*| = 8629,0033 \quad \text{e} \quad \ell n\, |G^*| = 9,0629$$

Assim, para o teste de

H_o: $\Sigma = \Sigma^*$

H_1: $\Sigma \neq \Sigma^*$, foram obtidos

$$g_4 = \frac{|G|}{|G^*|} = \frac{7916,5379}{8629,0033} = 0,9174$$

$$g_5 = -(r_2 p_2 - p_2)\ \ell n\ g_4$$
$$= -(48-12)\ \ell n\ 0,9174$$
$$= 3,1023$$

$$g_6 = \frac{K(K+1)^2\ (2K-3)}{6(r_2p_2-p_2)(K-1)(K^2+K-1)}$$

$$g_6 = \frac{2(2+1)^2\ (2x2-3)}{6(4x12-12)(2-1)(2^2+2-4)}$$

$$g_6 = 18/432 = 0,0417$$

$$\chi^2_{obs} = (1-g_6)\ g_5 = 2{,}9730$$

$$f_3 = (K^2+K-4)/2 = (2^2+4-4)/2$$

$$f_3 = 1\ g.\ell.$$

Como $\chi^2_{obs} = 2{,}97 < \chi^2_{tab} = \chi^2_{5\%,1} = 3{,}84$, não há evidências para a rejeição de H_o.

Desse modo, adotou-se a estimativa G*, da matriz uniforme de covariâncias Σ^*, para todos os tratamentos.

Considerando que as matrizes de covariâncias são uniformes, foram efetuados os cálculos para as análises de variâncias individuais, que se encontram sumarizadas nas Tabelas 6 e 7.

TABELA 6 - Análise de Variância para a Produção de Cana-de-Açúcar, em t/ha, referente ao ensaio 1, realizado em Araras-SP, 1976.

C. de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	3	97,1838		
Variedades (V)	16	10.908,5013	681,7813	4,80**
Resíduo (a)	48	6.812,7987	141,9333	
Parcelas	67	17.818,4838		
Sanidades (S)	1	3.011,7647	3.011,7647	27,23**
Interação VxS	16	1.769,7428	110,6089	1,00
Resíduo (b)	51	5 639,9225	110,5867	
Total	135	28.239,9138		

C.V(a) = 20,7%   C V(b) = 18,3%

TABELA 7 - Análise de Variância para a Produção de Cana-de-Açúcar, em t/ha, referente ao ensaio 2, realizado em Lençóis Paulista-SP, 1976

C. de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	3	1.026,1853		
Variedades (V)	11	11.173,5562	1.015,7778	7,71**
Resíduo (a)	33	4.348,3159	131,7671	
Parcelas	47	16.548,0574		
Sanidades (S)	1	2.835,1134	2.835,1134	49,05**
Interação VxS	11	484,7953	44,0723	0,76
Resíduo (b)	36	2.080,7863	57,7996	
Total	95	21.948,7524		

C.V(a) = 21,0%   C.V(b) = 13,9%

5.2. Análise Conjunta

Para o grupamento dos dois ensaios, considerou-se

$\ell = 1, \ldots, L = 2$ grupos (experimentos);

$f = 1, \ldots, C = 3$ tratamentos comuns;

$N_1 = 14$; $p_1 = 17$

$N_2 = 9$; $p_2 = 12$

$$\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell = 29$$

$i = 1, \ldots, v = 26$ Tratamentos primários (variedades);

$j = 1, \ldots, r_\ell = J = 4$ blocos;

$k = 1, \ldots, K = 2$ tratamentos secundários (sanidades).

5.2.1. Teste sobre a Estrutura das Matrizes de Covariâncias

Preliminarmente foi necessário testar se as matrizes de um mesmo tratamento comum são uniformes de um grupo para outro.

Assim, para $G_{f(\ell)}$, com $f = 1, 2, 3$ e $\ell = 1,2$, tem-se o sumário dos testes nas tabelas 8 e 9.

TABELA 8 - Sumário do teste de homogeneidade das matrizes de covariâncias para os tratamentos comuns.

	Tratamentos Comuns		
	1	2	3
$G_{f(1)}$	$\begin{bmatrix} 839,39 & -61,92 \\ -61,92 & 12,83 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 105,70 & 21,68 \\ 21,68 & 350,17 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 17,37 & 11,33 \\ 11,33 & 257,74 \end{bmatrix}$
$G_{f(2)}$	$\begin{bmatrix} 121,98 & 143,07 \\ 143,07 & 318,75 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 251,74 & 103,76 \\ 103,76 & 62,45 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 148,49 & 77,23 \\ 77,23 & 58,16 \end{bmatrix}$
G_f	$\begin{bmatrix} 480,68 & 40,58 \\ 40,58 & 165,79 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 178,72 & 62,72 \\ 62,72 & 206,31 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 82,93 & 44,28 \\ 44,28 & 158,10 \end{bmatrix}$
$\lvert G_{f(1)}\rvert$	6392,4466	36543,6255	4347,5823
$\lvert G_{f(2)}\rvert$	18412,5569	4953,2864	2716,9562
$\lvert G_f\rvert$	78045,3312	32937,1006	11150,1114
$\ell n\lvert G_{f(1)}\rvert$	8,8440	10,5063	8,3774
$\ell n\lvert G_{f(2)}\rvert$	9,8202	8,5078	7,9073
$\ell n\lvert G_f\rvert$	11,2650	10,4024	9,3192
g_3	11,5959	5,3718	7,0611
f_1	0,3611	0,3611	0,3611
χ^2_{obs}	7,41	3,43	4,51
g.ℓ.	3	3	3
χ^2_{tab}	7,82	7,82	7,82

TABELA 9 - Sumário do teste de uniformidade da matriz comum de covariâncias para os tratamentos comuns.

	Tratamentos Comuns					
	1		2		3	
G^*_f	323,24	40,58	192,52	62,72	120,52	44,28
	40,58	323,24	62,72	192,52	44,28	120,52
$\|G^*_f\|$	102834,1288		33130,1520		12564,3520	
g_4	0,7589		0,9942		0,8874	
g_5	1,6550		0,0351		0,7165	
g_6	0,2500		0,2500		0,2500	
χ^2_{obs}	1,24		0,03		0,53	
f_3	1		1		1	
χ^2_{tab}	3,84		3,84		3,84	

Considerando que as matrizes de um mesmo tratamento comum são homogêneas e uniformes nos dois grupos, trabalhou-se com apenas uma matriz, para cada tratamento primário, estruturando-se os testes para os 26 tratamentos primários.

5.2.1.1. Teste de homogeneidade das matrizes de covariâncias para todos os tratamentos primários

Tomando-se as G_f^*, f = 1,2,3 e $G_{n_{\ell h}}$, l = 1,2 e h = 1,2,...N_ℓ (N_1 = 14 e N_2 = 9) estimativas das matrizes de covariâncias para os 26 tratamentos primários, já calculados anteriormente, tem-se a estimativa G para a matriz comum de covariâncias:

$$G = \begin{bmatrix} 120,09 & 24,13 \\ 24,13 & 87,44 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad |G| = 9918,6500 \quad \text{e} \quad \ell n\ |G| = 9,2022$$

Então para o teste de

H_0: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \ldots = \Sigma_{26} = \Sigma$

H_1: $\Sigma_i \neq \Sigma_{i'}$, para algum i, i', (i ≠ i')

foram obtidos:

$$g_3 = (r-1)\ [v\ \ell n\ |G| - \sum_{i=1}^{v} \ell n\ |G_i|]$$

$$g_3 = (4-1)\ [26 \times 9,2022 - (31,3877 + 110,2637 + 63,1648)]$$

$$= 103,32$$

$$g_1 = [(v+1)/(rv-v)]\ (2K^2+3K-1)/[6(K+1)]$$

$$g_1 = 0,25$$

$$\therefore \chi^2_{obs} = (1-g_1)g_3 = 77,49$$

e

$$f_1 = K + K(K-1)/2\ (v-1)$$

$$f_1 = 75\ g.\ell.$$

Assim, como $\chi^2_{obs} = 77{,}49 < \chi^2_{tab} = \chi^2_{5\%,\ 75}$, não há evidência para a rejeição de H_o.

Deste modo, adotou-se a matriz comum de covariâncias Σ, estimada pela matriz G, para representar as covariâncias entre tratamentos secundários, pertencentes ao mesmo tratamento primário.

5.2.1.2. Teste de uniformidade da matriz comum de covariâncias

Conforme o ítem 2 do Apêndice 2, determinou-se a estimativa G*, da matriz uniforme Σ^*:

$$G^* = \begin{bmatrix} 103{,}76 & 24{,}13 \\ 24{,}13 & 103{,}76 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad |G^*| = 10184{,}9183$$

Assim para o teste de:

$$H_o:\ \Sigma = \Sigma^*$$

$H_1:\ \Sigma \neq \Sigma^*$, foram obtidos

$$g_4 = \frac{|G|}{|G^*|} = \frac{9918{,}6500}{10184{,}9183} = 0{,}9739$$

$$g_5 = -(r \times v - v) \quad \ell n \ g_4$$

$$= -(4x26-26) \quad \ell n \quad g_4$$

$$= \quad 2,0663$$

$$g_5 = \frac{K(K+1)^2 \ (2K-3)}{6(rv-v)(K-1)(K^2+K-4)}$$

$$g_6 = \frac{2(2+1)^2 \quad (2x2-3)}{6(4x26-26) \ (2-1) \ (2^2+2-4)}$$

$$g_6 = \quad 0,019$$

$$\therefore \quad \chi^2_{obs} = (1-g_6)g_5 = 2,03$$

$$f_3 = (K^2+K-4)/2 \quad = \quad (2^2+2-4)/2$$

$$f_3 = 1 \ g.\ell.$$

Como $\chi^2_{obs} = 2,03 < \chi^2_{tab} = \chi^2_{5\%,1} = 3,84$, não há evidências para a rejeição de H_o.

Desta forma, adotou-se a estimativa G*, da matriz uniforme de covariâncias $\not\Sigma^*$, para todos os tratamentos.

5.2.2. Equações Normais

$$
\begin{bmatrix}
X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'X_3 & X_1'X_4 & X_1'X_5 & X_1'X_6 & X_1'X_7 & X_1'X_8 & X_1'X_9 \\
X_2'X_1 & X_2'X_1 & X_2'X_3 & X_2'X_4 & X_2'X_5 & X_2'X_6 & X_2'X_7 & X_2'X_8 & X_2'X_9 \\
X_3'X_1 & X_3'X_2 & X_3'X_3 & X_3'X_4 & X_3'X_5 & X_3'X_6 & X_3'X_7 & X_3'X_8 & X_3'X_9 \\
X_4'X_1 & X_4'X_2 & X_4'X_3 & X_4'X_4 & X_4'X_5 & X_4'X_6 & X_4'X_7 & X_4'X_8 & X_4'X_9 \\
X_5'X_1 & X_5'X_2 & X_5'X_3 & X_5'X_4 & X_5'X_5 & X_5'X_6 & X_5'X_7 & X_5'X_8 & X_5'X_9 \\
X_6'X_1 & X_6'X_2 & X_6'X_3 & X_6'X_4 & X_6'X_5 & X_6'X_6 & X_6'X_7 & X_6'X_8 & X_6'X_9 \\
X_7'X_1 & X_7'X_2 & X_7'X_3 & X_7'X_4 & X_7'X_5 & X_7'X_6 & X_7'X_7 & X_7'X_8 & X_7'X_9 \\
X_8'X_1 & X_8'X_2 & X_8'X_3 & X_8'X_4 & X_8'X_5 & X_8'X_6 & X_8'X_7 & X_8'X_8 & X_8'X_9 \\
X_9'X_1 & X_9'X_2 & X_9'X_3 & X_9'X_4 & X_9'X_5 & X_9'X_6 & X_9'X_7 & X_9'X_8 & X_9'X_9
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\hat{\underset{\sim}{\mu}} \\ \hat{\underset{\sim}{g}} \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}} \\ \hat{\underset{\sim}{\tau}} \\ \hat{\underset{\sim}{\delta}} \\ \hat{\underset{\sim}{\alpha}} \\ \hat{\underset{\sim}{\lambda}} \\ \hat{\underset{\sim}{\gamma}} \\ \hat{\underset{\sim}{\zeta}}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
X_1'\underset{\sim}{y} \\ X_2'\underset{\sim}{y} \\ X_3'\underset{\sim}{y} \\ X_4'\underset{\sim}{y} \\ X_5'\underset{\sim}{y} \\ X_6'\underset{\sim}{y} \\ X_7'\underset{\sim}{y} \\ X_8'\underset{\sim}{y} \\ X_9'\underset{\sim}{y}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\underset{\sim}{G} \\ \underset{\sim}{E} \\ \underset{\sim}{B} \\ \underset{\sim}{T} \\ \underset{\sim}{D} \\ \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{L} \\ \underset{\sim}{N} \\ \underset{\sim}{Z}
\end{bmatrix}
$$

com

$$X_1'X_1 = N = K\ \Sigma r_\ell p_\ell = 232$$

$$X_1'X_2 = 2\ {}_1[68 \quad 48]_2$$

$$X_1'X_3 = 2\ {}_1[17 \quad 17 \quad 17 \quad 17 \quad 12 \quad 12 \quad 12 \quad 12]_8$$

$$X_1'X_4 = 2\ {}_1[4 \quad 4 \ \ldots \ 4]_{29}$$

$$X_1'X_5 = 2\ {}_1[4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4]_6$$

$$X_1'X_6 = {}_1[116 \quad 116]_2$$

$$X_1'X_7 = {}_1[68 \quad 68 \quad 48 \quad 48]_4$$

$$X_1'X_8 = {}_1[4 \quad 4 \ \ldots \ 4]_{58}$$

$$X_1'X_9 = {}_1[4 \quad 4 \quad \cdots \quad 4]_{12}$$

$$X_2'X_2 = 2\,{}_2\begin{bmatrix} 68 & 0 \\ 0 & 48 \end{bmatrix}_2$$

$$X_2'X_3 = 2\,{}_2\begin{bmatrix} 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 \end{bmatrix}_8$$

$$X_2'X_4 = 2\,{}_2\begin{bmatrix} 4 & 4 & \cdots & 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 4 & \cdots & 4 \end{bmatrix}_{29}$$

$$X_2'X_5 = 2\,{}_2\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}_6$$

$$X_2'X_6 = {}_2\begin{bmatrix} 68 & 68 \\ 48 & 48 \end{bmatrix}_2$$

$$X_2'X_7 = {}_2\begin{bmatrix} 68 & 68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 48 \end{bmatrix}_4$$

$$X_2'X_8 = {}_2\begin{bmatrix} 4 & 4 & \cdots & 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 4 & \cdots & 4 \end{bmatrix}_{58}$$

$$X_2'X_9 = {}_2\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}_{12}$$

$$X_3'X_3 = 2\,{}_8\begin{bmatrix} (X_3'X_3)_a & \phi \\ \phi & (X_3'X_3)_b \end{bmatrix}_8$$

onde,

$$(X_3'X_3)_a = 17\ I_4 \quad ; \quad (X_3'X_3)_b = 12\ I_4$$

$$X_3'X_4 = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{8 \times 29}$$

$$X_3'X_5 = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{8 \times 6}$$

$$X_3'X_6 = {}_8\begin{bmatrix} 17 & 17 \\ 17 & 17 \\ 17 & 17 \\ 17 & 17 \\ 12 & 12 \\ 12 & 12 \\ 12 & 12 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}_2$$

$$X_3'X_7 = {}_8\begin{bmatrix} 17 & 17 & 0 & 0 \\ 17 & 17 & 0 & 0 \\ 17 & 17 & 0 & 0 \\ 17 & 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \end{bmatrix}_4$$

$$X_3'X_8 = {}_8\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}_{58}$$

$$X'_3X_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{8 \times 12}$$

$X'_4X_4 = 8\ I_{(29)}$, de dimensões $(29)\text{x}(29)$

$X'_4X_5 = I_{(2)} \otimes 2 \begin{bmatrix} H_\ell \\ J_\ell \end{bmatrix}$, de dimensões (29) x (6)

$$H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3} ; \quad J_1 = {}_{(14)}\phi_{(3)} ; \quad J_2 = {}_{(9)}\phi_{(3)}$$

$$X'_4X_6 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \\ \cdots & \cdots \\ 4 & 4 \end{bmatrix}_{29 \times 2}$$

$$X'_4X_7 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}_{29 \times 4}$$

$$X'_4X_8 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 4 \end{bmatrix}_{29 \times 58}$$

$$X'_4X_9 = I_{(2)} \otimes \begin{bmatrix} P_\ell \\ U_\ell \end{bmatrix}, \text{ de dimensões } (29)\text{x}(12)$$

$$P_1 = P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 6}$$

$$U_1 = {}_{(14)}\phi_{(6)} \quad ; \quad U_2 = {}_{(9)}\phi_{(6)}$$

$$X'_5X_5 = 8\ I_{(6)}, \text{ de dimensões } (6)\text{x}(6)$$

$$X_5'X_6 = {}_6\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \\ 4 & 4 \\ 4 & 4 \\ 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}_2$$

$$X_5'X_7 = {}_6\begin{bmatrix} {}_3E_2 & \phi \\ \phi & {}_3E_2 \end{bmatrix}_4$$

onde, $${}_3E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$X_5'X_8 = I_{(2)} \otimes {}_6[Q_\ell \quad M_\ell]$, de dimensões (6)x(58)

$$Q_1 = Q_2 = {}_3\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}_6$$

$$M_1 = {}_{(3)}\phi_{(28)} \quad ; \quad M_2 = {}_{(3)}\phi_{(18)}$$

$$X_5'X_9 = {}_6\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 4 \end{bmatrix}_{12}$$

$$X_6'X_6 = {}_2\begin{bmatrix} 116 & 0 \\ 0 & 116 \end{bmatrix}_2$$

$$X_6'X_7 = {}_2\begin{bmatrix} 68 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 68 & 0 & 48 \end{bmatrix}_4$$

$$X_6'X_8 = {}_2\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \cdots & 4 \end{bmatrix}_{58}$$

$$X_6'X_9 = {}_2\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \cdots & 4 \end{bmatrix}_{12}$$

$$X_7'X_7 = {}_4\begin{bmatrix} 68 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{bmatrix}_4$$

$$X_7'X_8 = {}_4\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \cdots & 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 4 & \cdots & 4 \end{bmatrix}_{58}$$

$$X_7'X_9 = {}_4\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{12}$$

$X_8'X_8 = 4\ I_{(58)}$, de dimensões $(58)\times(58)$

$X_8'X_9 = I_{(2)} \otimes \begin{bmatrix} R_\ell \\ S_\ell \end{bmatrix}$, de dimensões $(58)\times(12)$

$$R_1 = R_2 = {}_6\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_6$$

$$S_1 = {}_{28}\phi_6 \qquad ; \qquad S_2 = {}_{18}\phi_6$$

$X_9'X_9 = 4\ I_{(12)}$, de dimensões $(12)\times(12)$

$$\hat{\underset{\sim}{g}} = \begin{bmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_2 \end{bmatrix} \; ; \quad \hat{\underset{\sim}{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{b}_{1(1)} \\ \hat{b}_{2(1)} \\ \hat{b}_{3(1)} \\ \hat{b}_{4(1)} \\ \hat{b}_{1(2)} \\ \hat{b}_{2(2)} \\ \hat{b}_{3(2)} \\ \hat{b}_{4(2)} \end{bmatrix} \; ; \quad \hat{\underset{\sim}{\tau}} = \begin{bmatrix} \hat{t}_{1(1)} \\ \hat{t}_{2(1)} \\ \cdots \\ \hat{t}_{n_{1,14}} \\ \hat{t}_{1(2)} \\ \hat{t}_{2(2)} \\ \cdots \\ \hat{t}_{n_{2,9}} \end{bmatrix} \; ;$$

$$\hat{\underset{\sim}{\delta}} = \begin{bmatrix} \hat{gc}_{11} \\ \hat{gc}_{12} \\ \hat{gc}_{13} \\ \hat{gc}_{21} \\ \hat{gc}_{22} \\ \hat{gc}_{23} \end{bmatrix} \; ; \quad \hat{\underset{\sim}{g}}^* = \begin{bmatrix} \hat{g}^*_1 \\ \hat{g}^*_2 \end{bmatrix} \; ; \quad \hat{\underset{\sim}{\tau}}^* = \begin{bmatrix} \hat{t}^*_1 \\ \hat{t}^*_2 \\ \hat{t}^*_3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underset{\sim}{\alpha}} = \begin{bmatrix} \hat{t}'_1 \\ \hat{t}'_2 \end{bmatrix} \; ; \quad \hat{\underset{\sim}{\lambda}} = \begin{bmatrix} \hat{gt}'_{11} \\ \hat{gt}'_{12} \\ \hat{gt}'_{21} \\ \hat{gt}'_{22} \end{bmatrix} \; ; \quad \hat{\underset{\sim}{\gamma}} = \begin{bmatrix} \hat{tt}'_{11(1)} \\ \hat{tt}'_{12(1)} \\ \cdots \\ \hat{tt}'_{n_{1,14}{}^2} \\ \hat{tt}'_{11(2)} \\ \cdots \\ \hat{tt}'_{n_{2,9}{}^2} \end{bmatrix} \; ; \quad \hat{\underset{\sim}{\zeta}} = \begin{bmatrix} g\hat{c}t'_{111} \\ g\hat{c}t'_{112} \\ g\hat{c}t'_{121} \\ g\hat{c}t'_{122} \\ \cdots \\ g\hat{c}t'_{231} \\ g\hat{c}t'_{232} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underset{\sim}{\alpha}}^{*} = \begin{bmatrix} \hat{t}_{1}'^{*} \\ \hat{t}_{2}'^{*} \end{bmatrix} \qquad \hat{\underset{\sim}{\lambda}}^{*} = \begin{bmatrix} \widehat{g^{*}t}_{11}' \\ \widehat{g^{*}t}_{12}' \\ \widehat{g^{*}t}_{21}' \\ \widehat{g^{*}t}_{22}' \end{bmatrix} \qquad \hat{\underset{\sim}{\gamma}}^{*} = \begin{bmatrix} \widehat{tt}_{11}'^{*} \\ \widehat{tt}_{12}'^{*} \\ \cdots \\ \widehat{tt}_{32}'^{*} \end{bmatrix}$$

$$G = 13.053{,}1$$

$$G^* = 2.909{,}5$$

$$E = \begin{bmatrix} 7810{,}2 \\ 5242{,}9 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1999{,}5 \\ 1921{,}6 \\ 1947{,}2 \\ 1941{,}9 \\ 1337{,}9 \\ 1423{,}7 \\ 1215{,}1 \\ 1266{,}2 \end{bmatrix} \; ; \; T = \begin{bmatrix} 585{,}2 \\ 493{,}6 \\ 528{,}2 \\ 438{,}8 \\ 534{,}0 \\ 540{,}6 \\ 332{,}1 \\ 452{,}9 \\ 454{,}7 \\ 413{,}5 \\ 451{,}6 \\ 443{,}0 \\ 468{,}2 \\ 397{,}9 \\ 513{,}0 \\ 469{,}1 \\ 293{,}8 \\ 478{,}4 \\ 423{,}8 \\ 400{,}3 \\ 607{,}4 \\ 497{,}5 \\ 438{,}6 \\ 342{,}8 \\ 436{,}8 \\ 358{,}8 \\ 261{,}5 \\ 505{,}6 \\ 491{,}4 \end{bmatrix} \; ; \; D = \begin{bmatrix} 585{,}2 \\ 493{,}6 \\ 528{,}2 \\ 478{,}4 \\ 423{,}8 \\ 400{,}3 \end{bmatrix}$$

$$E^* = \begin{bmatrix} 1607{,}0 \\ 1302{,}5 \end{bmatrix}$$

$$T^* = \begin{bmatrix} 1063{,}6 \\ 917{,}4 \\ 928{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 7107,4 \\ 5945,7 \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} 4225,1 \\ 3585,1 \\ 2882,3 \\ 2360,6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A}^* = \begin{bmatrix} 1597,3 \\ 1312,2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{\sim}{L}^* = \begin{bmatrix} 880,3 \\ 726,7 \\ 717,0 \\ 585,5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{N}^* = \begin{bmatrix} 601,5 \\ 462,1 \\ 500,5 \\ 416,9 \\ 495,3 \\ 433,2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{N} = \begin{bmatrix} 332,8 \\ 252,4 \\ 270,3 \\ 223,3 \\ 277,2 \\ 251,0 \\ 228,3 \\ 210,5 \\ 300,3 \\ 233,7 \\ 292,4 \\ 248,2 \\ 183,6 \\ 148,5 \\ 219,2 \\ 233,7 \\ 277,8 \\ 176,9 \\ 219,2 \\ 194,3 \\ 225,3 \\ 226,3 \\ 258,6 \\ 184,4 \\ 237,1 \\ 231,1 \\ 216,6 \\ 181,3 \\ 274,5 \\ 238,5 \\ 250,5 \\ 218,6 \\ 161,4 \\ 132,4 \\ 268,7 \\ 209,7 \\ 230,2 \\ 193,6 \\ 218,1 \\ 182,2 \\ 313,9 \\ 293,5 \\ 280,8 \\ 216,7 \\ 230,0 \\ 208,6 \\ 192,5 \\ 150,3 \\ 258,5 \\ 178,3 \\ 191,3 \\ 167,5 \\ 160,1 \\ 101,4 \\ 269,3 \\ 236,3 \\ 268,9 \\ 222,5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{bmatrix} 332,8 \\ 252,4 \\ 270,3 \\ 223,3 \\ 277,2 \\ 251,0 \\ 268,7 \\ 209,7 \\ 230,2 \\ 193,6 \\ 218,1 \\ 182,2 \end{bmatrix}$$

5.2.3 Solução do Sistema

5.2.3.1. Efeito Estimado da Média ($\underset{\sim}{\mu}$)

De acordo com (α.3), obteve-se

$$\hat{\mu} = 13.053,1/232 = 56,2634$$

5.2.3.2. Efeitos Estimados de Grupos ($\underset{\sim}{g}$)

Segundo (α.4) e simplificando, resultou:

$$\underset{\sim}{\hat{g}} = \frac{1}{47.328} \begin{bmatrix} 55.117,2 \\ -78.082,7 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sum_{\ell=1}^{2} p_\ell \hat{g}_\ell = 0$$

5.2.3.3. Efeitos Estimados de Blocos dentro de Grupos ($\underset{\sim}{\beta}$)

Reportando-se a (α.5) e efetuando as simplificações, tem-se:

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \frac{1}{1632} \begin{bmatrix} 2253,6 \\ -1485,6 \\ -\ 256,8 \\ -\ 511,2 \\ 1847,9 \\ 7682,3 \\ -6502,5 \\ -3027,7 \end{bmatrix} \qquad \sum_{j=1}^{4} \hat{b}_{j(\ell)} = 0$$

5.2.3.4. Efeitos Estimados de Variedades ($\underset{\sim}{\tau}$)

Recorrendo-se a (α.6) e (α.7) e simplificando, encontrou-se:

$$\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \frac{1}{4896}\begin{bmatrix} 75353,4 \\ 30616,2 \\ 34012,8 \\ -12621,6 \\ 45640,8 \\ 49680,0 \\ -77922,0 \\ -3992,4 \\ -2890,8 \\ -28105,2 \\ -4788,0 \\ -10051,2 \\ 5371,2 \\ -37652,4 \\ 32788,8 \\ 5922,0 \\ -101361,6 \\ 27014,7 \\ -17722,5 \\ -14325,9 \\ 104340,9 \\ 37082,1 \\ 1035,3 \\ -57594,3 \\ -66,3 \\ -47802,3 \\ -107349,9 \\ 42039,3 \\ 33348,9 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{17} \hat{t}_{i(1)} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{12} \hat{t}_{i(2)} = 0$$

5.2.3.5. Efeitos Estimados da Interação Grupos x Variedades Comuns ($\underset{\sim}{\delta}$)

De acordo com (α.1) e efetuando as simplificações resultou:

$$\hat{\underset{\sim}{\delta}} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 15,9 \\ -95,1 \\ 79,2 \\ -15,9 \\ 95,1 \\ -79,2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sum_{\ell=1}^{2} (\hat{gc})_{\ell f} = \sum_{f=1}^{3} (\hat{gc})_{\ell f} = 0$$

5.2.3.6. Efeitos Estimados de Sanidades ($\underset{\sim}{\alpha}$)

Por (α.8), efetuando-se as simplificações devidas, tem-se:

$$\hat{\underset{\sim}{\alpha}} = \frac{1}{232}\begin{bmatrix} 1161,7 \\ -1161,7 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{2} \hat{t}'_k = 0$$

5.2.3.7. Efeitos Estimados da Interação Grupos x Sanidades ($\underset{\sim}{\lambda}$)

Recorrendo-se à (α.9), e simplificando, resultou:

$$\hat{\underset{\sim}{\lambda}} = \frac{1}{47328}\begin{bmatrix} -14266,8 \\ 14266,8 \\ 20211,3 \\ -20211,3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{2} (\hat{gt'})_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^{2} p_\ell (\hat{gt'})_{\ell k} = 0$$

5.2.3.8. Efeitos Estimados de Variedades x Sanidades ($\underset{\sim}{\gamma}$)

$$\hat{\underset{\sim}{\gamma}} = \frac{1}{4896} \begin{bmatrix} 21870{,}6 \\ -21870{,}6 \\ 4795{,}8 \\ -\ 4795{,}8 \\ -\ 1783{,}2 \\ 1783{,}2 \\ -12146{,}4 \\ 12146{,}4 \\ 17719{,}2 \\ -17719{,}2 \\ 4010{,}4 \\ -\ 4010{,}4 \\ -\ 1558{,}8 \\ 1558{,}8 \\ -31914{,}0 \\ 31914{,}0 \\ 38710{,}8 \\ -38710{,}8 \\ -\ 7801{,}2 \\ 7801{,}2 \\ -23652{,}0 \\ 23652{,}0 \\ 22370{,}4 \\ -22370{,}4 \\ -19368{,}0 \\ 19368{,}0 \\ -\ 1436{,}4 \\ 1436{,}4 \\ -\ 1008{,}0 \\ 1008{,}0 \\ -\ 3517{,}2 \\ 3517{,}2 \\ -\ 5292{,}0 \\ 5292{,}0 \\ 13795{,}5 \\ -13795{,}5 \\ -\ 3279{,}3 \\ 3279{,}3 \\ -\ 9858{,}3 \\ 9858{,}3 \\ -14121{,}9 \\ 14121{,}9 \\ 12622{,}5 \\ -12622{,}5 \\ -13509{,}9 \\ 13509{,}9 \\ -\ 780{,}3 \\ 780{,}3 \\ 22475{,}7 \\ -22475{,}7 \\ -12041{,}1 \\ 12041{,}1 \\ 9317{,}7 \\ -\ 9317{,}7 \\ -\ 6410{,}7 \\ 6410{,}7 \\ 1790{,}1 \\ -\ 1790{,}1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{\ell=1}^{p_\ell} (tt')_{ik(\ell)} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{2} (\hat{tt'})_{ik(\ell)} = 0$$

5.2.3.9. Efeitos Estimados da Interação Grupos x Variedades Comuns x Sanidades ($\underset{\sim}{\zeta}$)

Tomando-se como em (α.2), e simplificando, tem-se:

$$\hat{\underset{\sim}{\zeta}} = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 42,1 \\ -42,1 \\ 9,1 \\ -9,1 \\ -51,2 \\ 51,2 \\ -42,1 \\ 42,1 \\ -9,1 \\ 9,1 \\ 51,2 \\ -51,2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sum_{\ell=1}^{2} (g\hat{c}t')_{\ell fk} = \sum_{f=1}^{3} (g\hat{c}t')_{\ell fk} =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} (g\hat{c}t')_{\ell fk} = 0$$

5.2.4. Análise de Variância

A soma de quadrados é obtida multiplicando-se o estimador do parâmetro pelos respectivos segundos membros das equações normais, deste modo resultou:

5.2.4.1. Soma de Quadrados dos Grupos

$$SQG = \underset{\sim}{g}'\underset{\sim}{E} = \sum_{\ell=1}^{2} \frac{E_{\ell}^{2}}{Kr_{\ell}p_{\ell}} - Co$$

$$= 21.096.567{,}57/47328 = 445{,}7524$$

5.2.4.2. Soma de Quadrados de Blocos dentro de Grupos

$$SQB/G = \hat{\underset{\sim}{\beta}}'\underset{\sim}{B} = \sum_{\ell=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{4} \frac{B_{j(\ell)}^{2}}{Kp_{\ell}} - \frac{E_{\ell}^{2}}{Kr_{\ell}p_{\ell}} \right)$$

$$= 1833338{,}43/1632 = 1123{,}3691$$

5.2.4.3. Soma de Quadrados de Variedades

$$SQV = \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{T}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{8} \left(\sum_{f=1}^{3} T_{f}^{2} - \frac{2909{,}5^{2}}{24\ 3} \right) + \frac{1}{3} \sum_{\ell=1}^{2} \frac{E_{\ell}^{*2}}{r_{\ell}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\ell=1}^{2} \left(\sum_{h=1}^{N_{\ell}} \frac{T_{n_{\ell h}}^{2}}{r_{\ell}} - \frac{E_{\ell}^{2}}{r_{\ell}p_{\ell}} \right) \right]$$

$$= 21973{,}9362$$

5.2.4.4. Soma de Quadrados de Grupos x Variedades Comuns

$$SQGxC = \underset{\sim}{\hat{\delta}}'\underset{\sim}{D} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{\ell=1}^{2}\sum_{f=1}^{3}\frac{D^2_{\ell f}}{r_\ell} - \sum_{f=1}^{3}\frac{T^2_f}{8} - \sum_{\ell=1}^{2}\frac{E^{*2}_\ell}{12} + \frac{G^{*2}}{3x8}\right]$$

$$= 108{,}1213$$

5.2.4.5. Soma de Quadrados de Parcelas

$$SQPar = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{i=1}^{p\ell}\sum_{j=1}^{r\ell} y^2_{ij.(\ell)} - G^2/N$$

$$= \frac{1}{2}\ 1538447{,}17 - 13053{,}1^2/232$$

$$= 34812{,}2936$$

5.2.4.6. Soma de Quadrados do Resíduo (a)

$$SQRes(a) = SQPar - SQ(\underset{\sim}{\hat{g}}) - SQ(\underset{\sim}{\hat{\beta}}) - SQ(\underset{\sim}{\hat{\tau}}) - SQ(\underset{\sim}{\hat{\delta}})$$

$$= 11161{,}1146$$

5.2.4.7. Soma de Quadrados de Sanidades

$$SQS = \underset{\sim}{\hat{\alpha}}'\underset{\sim}{A} = \frac{\sum_{k=1}^{2} A^2_k}{\sum_{\ell=1}^{2} r_\ell p_\ell} - Co$$

$$= 1349546{,}89/232 = 5817{,}0125$$

5.2.4.8. Soma de Quadrados de Grupos x Sanidades

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\lambda}}) = \hat{\underset{\sim}{\lambda}}'\underset{\sim}{L} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \frac{L_{\ell k}^2}{r_\ell p_\ell} - \sum_{\ell=1}^{2} \frac{E_\ell^2}{K r_\ell p_\ell} - \sum_{k=1}^{2} \frac{A_k^2}{\sum_{\ell=1}^{2} r_\ell p_\ell} + \frac{G^2}{N}$$

$$= 29{,}8657$$

5.2.4.9. Soma de Quadrados de Variedades x Sanidades

$$SQ(\hat{\underset{\sim}{\gamma}}) = \hat{\underset{\sim}{\gamma}}'\underset{\sim}{N}$$

$$= \left(\frac{\sum_{f=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} N_{fk(.)}^2}{8} + \sum_{\ell=1}^{2} \sum_{h=1}^{N_\ell} \sum_{k=1}^{2} \frac{N_{n_{\ell h}k}^2}{4} \right) + \sum_{\ell=1}^{2} \frac{E_\ell^2}{K r_\ell p_\ell} -$$

$$- \left(\frac{\sum_{f=1}^{3} T_f^2}{16} + \sum_{\ell=1}^{2} \sum_{h=1}^{N_\ell} \frac{Tn_{\ell k}^2}{8} - \sum_{\ell=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \frac{L_{\ell k}^2}{r_\ell p_\ell} \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{\ell=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \frac{L^*_{\ell k}}{12} - \sum_{\ell=1}^{2} \frac{E_\ell^{*2}}{24} - \frac{\sum_{k=1}^{2} A_k^{*2}}{24} + \frac{G^{*2}}{48} \right) \right.$$

$$= 2223{,}4501$$

5.2.4.10. Soma de Quadrados de Grupos x Variedades Comuns x Sanidades

$$SQ(\underset{\sim}{\hat{\xi}}) = \underset{\sim}{\hat{\xi}}'\underset{\sim}{Z}$$

$$= \left(\sum_{\ell=1}^{2} \sum_{f=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} \frac{Z^2_{\ell fk}}{4} - \frac{G^{*2}}{48} \right) - \sum_{\ell=1}^{2} \sum_{f=1}^{3} \frac{D^2_{\ell f}}{8} - \sum_{\ell=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \frac{L^{*2}_{\ell k}}{12} -$$

$$- \sum_{f=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} \frac{N^{*2}_{fk}}{8} + \sum_{k=1}^{2} \frac{A^{*2}_{k}}{24} + \sum_{\ell=1}^{2} \frac{E^{*2}_{\ell}}{KCr_{\ell}} + \sum_{f=1}^{3} \frac{T^2_f}{16}$$

$$= 31,0879$$

5.2.4.11. Soma de Quadrados Total

$$SQTot = \sum_{\ell=1}^{2} \sum_{i=1}^{p_\ell} \sum_{j=1}^{r_\ell} \sum_{k=1}^{2} y^2_{ijk(\ell)}$$

$$= 50634,4186$$

5.2.4.12. Soma de Quadrados do Resíduo (b)

$$SQRes(b) = SQTot - SQPar - SQ(\underset{\sim}{\hat{\alpha}}) - SQ(\underset{\sim}{\hat{\lambda}}) - SQ(\underset{\sim}{\hat{\gamma}}) - SQ(\underset{\sim}{\hat{\xi}})$$

$$= 7720,7088$$

Os resultados obtidos permitiram a estruturação da seguinte análise de variância.

TABELA 10 - Testes de Hipóteses e Quadro da Análise de Variância Conjunta.

CAUSAS DE VARIAÇÃO	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Grupos (g)	1	445,7524	445,7524	3,24
Blocos/Grupos	6	1123,3691		
Variedades (V)	25	21973,9362	878,9574	6,38**
Trat.Com. x Grupos	2	108,1213	54,0607	0,39
Resíduo (a)	81	11161,1146	137,7915	
Parcelas	115	34812,2936		
Sanidades (S)	1	5817,0125	5817,0125	65,55**
Interação g x S	1	29,8657	29,8657	0,34
Interação V x S	25	2223,4501	88,9380	1,00
Interação Trat.Com xgxS	2	31,0879	15,5440	0,18
Resíduo (b)	87	7720,7088	88,7438	
Total	231	50634,4186		

C.V.(a) = 20,9%　　　　C.V.(b) = 16,7%

Isto evidencia rejeição de $H_o(1)$: $t_i = 0$ e $H_o(2)$: $t'_k = 0$, ao nível de 1% de probabilidade. Existe efeito significativo entre variedades e entre sanidades.

6. CONCLUSÕES

Em geral, os resultados obtidos permitem as seguintes conclusões.

1 - Quanto ao modelo

O modelo matemático utilizado apresentou-se adequado aos objetivos propostos, sendo viável a análise de variância de grupos de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos comuns e regulares nas parcelas.

2 - Quanto à estimação dos efeitos

Excluindo os tratamentos primários e a interação tratamentos primários x tratamentos secundários, todas as demais estimativas dos parâmetros são obtidas através de estimadores usuais.

3 - Quanto às somas de quadrados

Com exceção da soma de quadrados de tratamentos primários e da soma de quadrados da interação entre tratamentos primários e secundários, as demais somas de quadrados são obtidas de modo usual.

4 - Um método prático de obter a análise de variância de grupos de experimentos consiste em calcular, por subtração, as somas de quadrados de tratamentos primários e da interação tratamentos primários x tratamentos secundários, considerando que as somas de quadrados dos resíduos a e b são a soma das respectivas somas de quadrados das análises individuais.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AFONJA, B., 1968. Analysis of a Group of Balanced Block Experiments Having Error Variance and Some Treatments in Common. Biometrics, Tucson, 24(2): 389-400.

ANDERSON, R.L. e T.A. BANCROFT, 1952. Statistical Theory in Research. Nova York, McGraw-Hill Book Company, 399 p.

CALZADA BENZA, J., 1970. Métodos Estadísticos para la Investigación. 3ª ed., Lima, Peru, Editorial Jurídica, 643p.

CHAKRABARTI, M.C., 1962. Mathematics of Design and Analysis of Experiments. 1ª ed. Londres, Asia Publishing House, 120 p.

COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1976. Diseños Experimentales. Trillas, México, 3ª ed., 661p.

CONDÉ, A.R., 1974. Estudo dos Componentes de Variância nos Experimentos em Parcelas Subdvididididas. Piracicaba,ESALQ/ USP, 57 p. (Dissertação de Mestrado)

DINIZ, U.D., 1980. Análise de Experimentos com Parcelas Medidas Sucessivamente no Tempo. Piracicaba, ESALQ/USP,104 p. (Tese de Doutoramento).

FEDERER, W.T., 1955. Experimental Design. 1ª ed., Nova York, Macmillan Co., 544 p.

FEDERER, W.T., 1956. Augmented (or Hoonuiaku) Designs. Hawaiian Planter's Record 55: 191-208.

FEDERER, W.T., 1961a. Augmented Designs with One Way Elimination of Heterogeneity. Biometrics, 17: 447-473.

FEDERER, W.T., 1961b. Augmented Designs with Two Three and Higher way Elimination of Heterogeneity (abstract). Biometrics, 17: 166.

GILL, L.G., 1978. Design and Analysis of Experiments in the Animal and Medical Sciences. Ames, The Iowa State University Press. 1ª ed., vol. 3. 882p.

GRAYBILL, F.A., 1961. An Introduction to Linear Statistical Models. Nova York, McGraw-Hill. 463p.

HARTER, H.L., 1961. On the Analysis of Split-Plot Experiments. Biometrics, Raleigh, 18: 144-149.

IEMMA, A.F., 1981. Análise de Experimentos em Parcelas Subdivididas com Tratamentos Principais dispostos em Blocos Incompletos Balanceados. Piracicaba, ESALQ/USP, 145 p. (Tese de Doutoramento)

KEMPTHORNE, O., 1952. The Designs and Analysis of Experiments. 1ª Ed. Nova York, Wiley, 631p.

LEAL, M.L.S., 1979. Análises de Dados Experimentais com Medidas Repetidas. Brasília, Universidade Federal de Brasília, 99 p. (Dissertação de Mestrado).

LEONARD, W.M., e A.G. CLARK, 1939. Field Plot Technique. Mineapolis, Burgess, 288p.

LITTLE, T.M. e F.J. HILLS, 1972. Statistical Methods in Agricultural Research. 1ª ed., Davis, Univ. of California Press, 242p.

PAVATE, M.V., 1961. Combined Analysis of Balanced Incomplete Block Design with Some Common Treatments. Biometrics, Raleigh, 17: 111-119.

PIMENTEL GOMES, F. e R.F. GUIMARÃES, 1958. Joint Analysis of Experiments in Complete Randomized Blocks with Some Common Treatments. Biometrics, Tallahasse, 14: 521-526.

PIMENTEL GOMES, F., 1967. The Solution of Normal Equations of Experiments in Incomplete Blocks. Ciência e Cultura, São Paulo, 20: 733-746.

PIMENTEL GOMES, F., 1970. An Extension of the Method of Joint Analysis of Experiments in Complete Randomized Blocks. Biometrics, Raleigh, 26: 332-336.

PIMENTEL GOMES, F., 1978. Curso de Estatística Experimental. 8ª ed., Piracicaba, Nobel, 430p.

RAO, C.R., 1947. General Methods of Analysis for Incomplete Blocks Designs. Journal of the Amer. Stat. Association, Washington, 58: 541-561.

REES, D.H., 1969. The Analysis of Variance of Some Non Ortogonal Designs with Split-Plots. Biometrika, Londres, 56: 43-54.

ROBINSON, J., 1967. Incomplete Split Plot Designs. Biometrics, Raleigh, 23: 793-802.

SEARLE, S.R., 1971. Linear Models. 1ª ed. Willey, Nova York, 531 p.

SNEDECOR, G.W. e W.G. COCHRAN, 1967. Statistical Methods. 6ª ed. The Iowa State University Press, Ames, 593 p.

STEEL, R.G.D. e J.H, TORRIE, 1960. Principles and Procedures of Statistics. 1ª ed. Nova York, McGraw-Hill, 481p.

TAYLOR, J., 1950. The Comparison of Pairs of Treatments in Split-Plot Experiments. Biometrika, Londres, 37: 443-444.

TAYLOR, W.B., 1957. Incomplete Block Designs with row balanced and recovery of inter-block information. Biometrics, Raleigh, 13: 1-12.

VIZONI, E., 1984. Análise de Experimentos em Blocos Casualizados Completos Aumentados (Blocos de Federer) com Parcelas Subdivididas no Tempo. Piracicaba, ESALQ/USP, 125 p. (Dissertação de Mestrado).

APÊNDICE 1

Estes teoremas, extraídos de GRAYBILL (1961), foram citados em 4.2.4.6 e dão embasamento às discussões alí efetuadas.

Teorema 1

Se $\underset{\sim}{y} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, I)$ e se $\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} = \sum_{i=1}^{K} \underset{\sim}{y}'A_i\underset{\sim}{y}$, uma condição necessária e suficiente para que $\underset{\sim}{y}'A_i\underset{\sim}{y}$ tenha distribuição de $\chi^2\,(n_i, \lambda_i)$, onde n_i é o posto de A_i e $\lambda_i = \frac{1}{2}\,\underset{\sim}{\mu}'A_i\underset{\sim}{\mu}$ (parâmetro de não centralidade) e que $\underset{\sim}{y}_1'A_1\underset{\sim}{y}_1$, $\underset{\sim}{y}_2'A_2\underset{\sim}{y}_2$, ..., $\underset{\sim}{y}_k'A_k\underset{\sim}{y}_k$ sejam independentes, é que a soma dos postos de A_i seja igual ao posto da soma dos A_i, isto é, $\sum_{i=1}^{K} \rho(A_i) = \rho \sum_{i=1}^{K} A_i = \rho(I)$.

Teorema 2

Se $\underset{\sim}{y} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \sigma^2 I)$ e $\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}I\underset{\sim}{y} = \sum_{i=1}^{K} \underset{\sim}{y}'A_i\underset{\sim}{y}$ onde posto $(A_i) = n_i$, então uma das três asserções:

1) A_i é idempotente para qualquer i;

2) $A_iA_{i'} = \phi$ (para $i \neq i'$);

3) $\sum_{i=1}^{K} n_i = n$, onde n é a dimensão de I;

é condição necessária e suficiente para que as asserções seguintes sejam simultaneamente verdadeiras:

a) $(1/\sigma^2)\underset{\sim}{y}A_i\underset{\sim}{y} \sim \chi^2_{(n_i;\ \lambda_i)}$ com $\lambda_i = (1/2\sigma^2)\underset{\sim}{\mu}'A_i\underset{\sim}{\mu}$

b) $\underset{\sim}{y}'A_i\underset{\sim}{y}$ e $\underset{\sim}{y}A_{i'}\underset{\sim}{y}$ são independentes $(i \neq i')$

A P Ê N D I C E 2

Testes sobre a Estrutura da Matriz de Covariâncias

Segundo GILL (1978), LEAL (1979) e IEMMA (1981), dentre outros, a adequação dos modelos estudados aos dados experimentais, está diretamente associada à realização das pressuposições sobre as matrizes de covariâncias entre tratamentos secundários de cada tratamento primário, além das tradicionais hipóteses de normalidade, independência, aditividade, etc.

Se as hipóteses de homogeneidade e uniformidade não são satisfeitas, GILL (1978) e LEAL (1979) recomendam a análise multivariada (análise de perfil) como alternativa ao modelo univariado.

Com essa preocupação julgou-se necessário a apresentação dos testes sobre a estrutura dessas matrizes, os quais devem, obrigatoriamente, ser parte integrante do processo de análise alvo deste estudo.

Assim, transcreveu-se de IEMMA (1981) a marcha de aplicação dos testes enfocados:

1 - Teste de homogeneidade para as matrizes de covariâncias

Testes dessa natureza têm por objetivo verificar se as $\underline{v}$ matrizes de covariâncias $_{(k)}\Sigma_{i\ (k)}$ podem ser re presentadas por uma única matriz Σ, comum aos $\underline{v}$ tratamentos principais.

Dentre os mais usuais, optou-se, neste estudo, pelo critério de Box (1950), descrito por DANFORD et alii (1960) e GILL (1978), entre outros,

$$H_o: \Sigma_1 = \Sigma_2 = \ldots = \Sigma_v = \Sigma \quad ,$$

toma-se o seguinte critério:

$$g_3 = (r-1)\left[v \ \ell n\ |G| \ - \sum_{i=1}^{v} \ell n\ |G_i| \right]$$

onde,

- r = número de repetições por tratamento principal;
- v = número de tratamentos principais;
- G = $(g_{ss'})$ é, sob a hipótese de nulidade, uma estimativa não tendenciosa da matriz de covariâncias comum Σ;
- G_i = $(g_{ss',i})$ é a estimativa não tendenciosa para Σ_i, $i=1,\ldots,v$; a matriz de covariâncias entre tratamentos secundários, para o i-ésimo tratamento principal.

Ademais:

ℓn = logarítmo neperiano,

$|\ |$ = determinante

$$g_{ss'} \quad \frac{1}{n-v} \sum_{i,j} (y_{ijk} - \bar{y}_{.jk})(y_{ijk'} - \bar{y}_{.jk'})$$

(LEAL, 1979)

$$g_{ss',i} = \frac{1}{r-1} \sum_{i} (y_{ijk} - \bar{y}_{.jk})\ (y_{ijk'} - \bar{y}_{.jk'})$$

Obs.: Aqui, G e G* não se referem aos totais gerais já discutidos.

Se os valores dos determinantes são próximos de zero, GILL (1978) recomenda que sejam usados logarítmos em base 10 e que se multiplique g_3 por 2,3026.

A distribuição probabilística de g_3, não tem interesse prático para este estudo, no entanto, $(1-g_1)g_3$ tem distribuição aproximada de um χ^2 com f_1 graus de liberdade, onde

$$g_1 = [(v+1)/(n-v)] \; (2k^2+3k-1)/[6(k+1)]$$

e

$$f_1 = [k + k(k-1)/2] \; (v-1)$$

pois, dentro de cada tratamento existem <u>k</u> variâncias e $k(k-1)/2$.

Então, se $(1-g_1)g_3 < \chi^2_{\alpha, f_1}$, não se rejeita H_o, caso contrário, conclui-se pela existência de ao menos um par $\Sigma_i \neq \Sigma_{i'}$, para algum $i \neq i'$.

Por outro lado, essa aproximação é considerada adequada (MORRISON, 1976), se $v < 5$, $k < 5$ e $rv > 20$. Para GILL (1978), se $v \geq 5$ ou $k \geq 5$, ou ambos, uma melhor aproximação seria obtida através da distribuição F, com

$$g_3 \; [(1-g_1) - (f_1/f_2)]/f_1 \cap F_{\alpha, f_1, f_2}$$

onde, $f_2 = (f_1+2)/(g_2-g_1^2)$

$$g_2 = (v^2+v+1)(k^2+k-2)/[6(n-v)^2]$$

2 - Teste de uniformidade da matriz comum de covariâncias

Segundo LEAL (1979), a pressuposição da uniformidade da matriz comum de covariâncias pode ser testada através do critério de Wilks (1946), modificado por Box em 1949.

A hipótese de nulidade a ser testada é

$$H_o: \Sigma = \Sigma^*$$

onde Σ^* é uma matriz uniforme.

O critério do teste é dado por

$$g_4 = \frac{|G|}{|G^*|}$$

com

$$G^* = (g^*_{ss'}) = \begin{cases} (1/k) \sum\limits_{s=1}^{K} g_{ss'} \,, & \text{se } s=s' \\ 1/[k(k-1)] \sum\limits_{s=s'}^{K} g_{ss'} \end{cases}$$

Determina-se, então, $g_5 = (n-v) \ell n \; g_4$ e, sob a hipótese de nulidade $(1-g_6) \; g_5$ é aproximadamente distribuída segundo um χ^2 com f_3 graus de liberdade, onde, segundo

LEAL (1979),

$$g_6 = \frac{k(k+1)^2 \ (2k-3)}{6(n-v)(k-1)(k^2+k-4)}$$

$$f_3 = (k^2+k-4)/2$$

Desta feita, rejeita-se H_o, se $(1-g_6)\ g_5 > \chi^2_{\alpha, f_3}$