INFERÊNCIA SOBRE PARÂMETROS DA FUNÇÃO DE COBB-DOUGLAS

MANUEL LUIZ FIGUEIRÔA
Economista

Orientador: Prof. Dr. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Agronomia. Área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Agosto - 1986

À *Marli*

A meus filhos,

Mário,

Vanessa,

Fábio,

Walker, e

Wagner,

OFEREÇO

À memória de meus

pais e meus irmãos,

DEDICO

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. *Antonio Francisco Iemma*, do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela orientação na execução do presente *trabalho*.

Ao Prof. Dr. *Décio Barbin*, chefe do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelo *apoio*.

Ao Prof. Dr. *Humberto de Campos*, do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelos *incentivos*.

Ao Prof. Dr. *Frederico Pimentel Gomes*, do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela *orientação* inicial deste *trabalho*.

À Prof[a] Dra. *Marli de Bem Gomes*, do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelo *Summary*, *críticas e sugestões e apoio*.

Aos demais professores do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelos *ensinamentos*.

À *Academia da Força Aérea* por sua política de especialização de *docentes*.

Ao Cel. Av. *Kunioki Shibao*, ex-chefe da Subdivisão de Instrução da Divisão de Ensino da Academia da Força Aérea, pelo *apoio, confiança e amizade*.

Ao Cel. Av. *Álvaro Braga Barroso*, ex-chefe da Divisão de Ensino da Academia da Força Aérea, pelo *apoio, confiança e amizade*.

Ao Cel. Av. *Renato Paiva Lamounier*, ex-chefe da Divisão de Ensino da Academia da Força Aérea, pelo *apoio, confiança e amizade*.

Ao Cel. Av. *Adjanir Matthiesen Queiroz*, chefe da Divisão de Ensino da Academia da Força Aérea, pelo *apoio, confinaça e amizade*.

Ao Maj. Int. *Walter Miglorância Filho*, chefe da Subdivisão de Instrução da Divisão de Ensino da Academia da Força Aérea, pelo *apoio, confiança e amizade*.

Aos companheiros da Academia da Força Aérea pelos *incentivos*.

Ao Dr. *R.H.Moore* da "Statistical Research Division Bureau of the Census", Washington, USA, pela *colaboração*.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior , *CAPES* , pela *bolsa de estudo*.

À *todos* , que direta ou indiretamente , colaboraram para a realização deste *trabalho* .

Í N D I C E

PÁG.

PÁG.

PÁG.

INFERÊNCIA SOBRE PARÂMETROS DA FUNÇÃO DE COBB-DOUGLAS

AUTOR : MANUEL LUIZ FIGUEIRÔA

ORIENTADOR: ANTONIO FRANCISCO IEMMA

RESUMO

A função de Cobb-Douglas tem sido de grande valia em muitas áreas do conhecimento humano. Para tanto, vários tem sido, ao longo do tempo, os processos adotados na sua utilização prática, tanto no tocante a sua linearização quanto na escolha do processo iterativo.

Neste estudo, apresenta-se uma proposta, visando simplificar e portanto generalizar o uso da função de Cobb-Douglas. O método aqui proposto está fundamentado no desenvolvimento da Fórmula de Taylor até fatores do primeiro grau, em associação com o método de mínimos quadrados.

Ademais, são abordadas as condições de homocedasticia e heterocedasticia de variâncias, tendo em vista ampliar a aplicabilidade do método.

Nesse contexto, após a linearização, são obtidas estimativas por pontos e por intervalos, bem como os testes para os parâmetros de interesse. Por outro lado, buscando tornar a leitura acessível a profissionais cuja formação não tem compromisso com a matemática, apresenta-se casos particulares de grande utilidade, acompanhados de pequenos exemplos que podem ser facilmente reproduzidos e interpretados.

Os resultados obtidos, bem como o número de iterações exigidas, pareceram evidenciar a plena adequação do método proposto, que sem dúvida passa a ser uma alternativa para os usuários da função de Cobb-Douglas.

INFERENCE ON PARAMETERS OF COBB-DOUGLAS FUNCTION

AUTHOR : MANUEL LUIZ FIGUEIRÔA

ADVISER: ANTONIO FRANCISCO IEMMA

SUMMARY

The Cobb-Douglas function has been very useful in many areas of human knowledge. Thus, many processes have been adopted for its practical use, in its linearization as well as in the choice of the iterative process.

In this work, it is proposed a simplification and a generalization of the Cobb-Douglas function. The proposed method is based in the development of Taylor's formula up to the first degree factors, in association with the minimum squares method.

The homoscedasticity and heteroscedasticity conditions of variances are also studied aiming to amplify the applicability of the method.

In this context, after the linearization , the points and interval estimates are obtained as well as the en-

visaged parameter tests. On the other hand trying to render easier the reading to professionals lacking special mathematical training, particular cases of great usefulness are presented, followed by examples which may be easily reproduced and interpreted.

The results obtained, as well as the number of iterations required, suggest a complete adequation of the proposed method, which undoubtedly may become an alternative for the users of the Cobb-Douglas function.

1. INTRODUÇÃO

O problema de regressão nem sempre é tão simples como tem sido apresentado na literatura estatística.

A análise da regressão pressupõe um problema de especificação, isto é, a determinação do modelo matemático mais adequado para representar o fenômeno que se pretende estudar. É importante estabelecer, claramente, as pressuposições que serão adotadas para apresentação da solução de um problema de regressão.

A hipótese da homocedasticia tem sido bastante frequente nos trabalhos de regressão com o objetivo de obter simplicidade na solução de mínimos quadrados. É mais raro a admissão da heterocedasticia, hipótese esta que implica, no caso mais geral, num problema de mínimos quadrados generalizados.

Neste trabalho serao admitidas as seguintes pressuposições :

a. Sob hipótese de homocedasticia

i. a relação entre X e Y é do tipo Cobb-Douglas, evitando o problema de especificação ;

ii. os valores de X são fixos , isto é , X não é uma variável aleatória ;

iii. a média do erro é nula , isto é , $E(e_i) = 0$;

iv. para um dado valor de X a variância do erro e é sempre σ^2 , denominada variância residual , isto é , $E(e_i^2) = \sigma^2$;

v. o erro de uma observação é independente do erro de outra observação , isto é , $E(e_i e_{i'}) = 0$ para $i \neq i'$;

vi. os erros têm distribuição normal.

b. Sob a hipótese de heterocedasticia

Mantêm-se as hipóteses anteriores i , ii , iii , v e vi , e a pressuposição iv passa a ser : para um dado valor de X a variância do erro e_i será $X_i^2\sigma^2$, isto é ,

$$E(e_i^2) = X_i^2\sigma^2 .$$

Esta será a condição de heterocedasticia.

O modelo estatístico adotado é ,

$$Y_j = aX_{1j}^{\beta_1} \, X_{2j}^{\beta_2} \; \ldots \; X_{IJ}^{\beta_I} + e_j \; ,$$

$$i = 1, 2, \ldots, I \; ; \; j = 1, 2, \ldots, J$$

não-linear nos parâmetros.

Onde :

$a, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_I$	são os parâmetros a serem estimados;
X_{ij}	é a variável independente considerada fixa ;
Y_j	é a variável dependente ;
e_j	é o erro aleatório .

A função de Cobb-Douglas tem para expressão

$$Y = aX_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \; \ldots \; X_I^{\beta_I}$$

onde :

$X_1, X_2, \ldots, X_I$	são os fatores de produção ;
Y	é a produção obtida com a combinação dos fatores X_i ;

a , β_1 , β_2 , ... , β_I são constantes .

As constantes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_I$ são as elasticidades da produção Y em relação aos fatores de produção X_i dada pela expressão

$$\beta_i = \frac{\partial Y}{\partial X_i} \frac{X_i}{Y}$$

Após as suposições anteriores , observe-se ainda que , devido a importância para o mundo atual de um prévio conhecimento da tonelagem de alimentos disponíveis , por safras agrícolas , torna-se imprescindível o conhecimento de técnicas que apresentem boas estimativas dessas produções. Como é sabido a função de Cobb-Douglas tem sido uma das mais utilizadas para estimar produção no setor agrícola, entretanto a literatura consultada deixa uma lacuna por não considerar essa função com a sua característica de não-linearidade nos parâmetros , pois consideram o erro como fator multiplicativo.

Este trabalho visa , além de atender a essa necessidade , estabelecer nas condições de homocedasticia e heterocedasticia as estimativas dos parâmetros , sua matriz de dispersão , o teste t , análise de variância e estimativas por intervalos , ao nível de confiança $1 - \alpha$.

Para tanto pretende-se lançar mão do desenvolvimento do modelo até fatores do primeiro grau através da Fórmula de Taylor e do método de mínimos quadrados.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os trabalhos , aqui comentados , dentre os citados na bibliografia foram os que influenciaram o autor desta tese. Particularmente a tese de MOORE (1962) , devido a elegância do tratamento matemático e a sua relevante didática , foi a que mais contribuiu para execução deste trabalho.

Os artigos de CURRY (1944) e LEVENBERG (1944) que eram colegas no Arsenal de Frankford foram praticamente desenvolvidos na mesma época. Ambos tinham como objetivo estabelecer uma ação de combate ao fogo. Os tratamentos dados aos dois trabalhos foram eminentemente teóricos , tendo sido o de LEVENBERG (1944) o mais aceito pelos engenheiros do Arsenal de Frankford.

Os trabalhos de HARTLEY desenvolvidos em 1948 , 1961 e 1965 apresentaram excelente contribuição na apreciação da regressão para modelos não-lineares. Em 1948 desenvolveu um método original denominado de mínimos quadrados internos. Em 1961 apresentou uma modificação para o método de Gauss-Newton. Em 1965 em colaboração com BOOKER justificou o seu método iterativo através de alguns teoremas sobre limite estocástico.

CURRY (1944) estudou um processo de "minimização passo a passo", aplicado em funções não-lineares, com o objetivo de resolver problemas de engenharia encontrados na Seção de Pesquisa e Engenharia da Divisão Experimental de Controle do Fogo no Arsenal de Frankford.

Descreveu o método iterativo da seguinte forma :

i. escolhe-se um ponto de partida na superfície ;

ii. determina-se a direção em que a função G decresce mais rapidamente, isto é, $Z^0 = -\lambda$ grad G, onde Z^0 é essa direção, λ é um fator de proporcionalidade positivo e arbitrário e grad G é o gradiente de G que vale $\dfrac{\partial G}{\partial x_i}$, $i = 1,2,\ldots, n$;

iii. dada a função $g(t) = G(X^0 + tz)$ é sempre possível encontrar um $t > 0$ tal que $g(t) < g(0)$ e para cada t toma-se $X^1 = X^0 + tz^0$ como um novo ponto inicial e se repete o processo. Dessa forma tem-se a sequencia $X^0, X^1, X^2, \ldots$ tal que $G(X^{k+1}) < G(X^k)$.

A interpretação geométrica do método seria: começando por X^0 determina-se a direção que

$$Y = G(X) = G(X_1, \ldots, X_n)$$

é decrescente mais rapidamente, continuando nessa direção até encontrar uma seção horizontal da superfície, aí pa-ra-se e repete o processo em outra direção. Dessa forma a direção da "minimização passo a passo" é sempre normal ao contorno e segue-se que as direções Z^k e Z^{k+1} formam ângulo reto.

Finalmente discutiu problemas de convergência e apresentou algumas sugestões que devem ser consideradas como aspecto prático do método exposto.

LEVENBERG (1944) admitiu em situações não lineares $H(x, y, z, \ldots, \alpha, \beta, \gamma; \ldots)$, onde $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ são parâmetros desconhecidos, como uma aproximação de $h(x, y, z, \ldots)$. Tomou os resíduos para os pontos $(x_i, y_i, z_i, \ldots)$ $i = 1, \ldots, n$ como

$$f_i(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = H(x_i, y_i, z_i, \ldots \alpha, \beta, \gamma, \ldots) - h(x_i, y_i, z_i, \ldots)$$

e impôs a condição de minimização para o resíduo $S(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2$.

O seu método consiste em escolher uma solução inicial, $P_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \ldots)$, para a qual é admitido que S não tem valor estacionário, e desenvolver o resíduo através da expansão de Taylor, para o ponto P_0, obtendo-se,

$$f_i(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = F_i(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = f_i(P_0) + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial f_i}{\partial \beta}\Delta\beta + \frac{\partial f_i}{\partial \gamma}\Delta\gamma + \ldots,$$

onde,

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0 \quad , \quad \Delta\beta = \beta - \beta_0 \quad , \quad \Delta\gamma = \gamma - \gamma_0 \quad , \quad \ldots$$

Dessa forma o problema, agora, é de minimizar $S(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2$, cuja solução é bem conhecida.

Discutiu, o autor, a possibilidade dos incrementos $\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma, \ldots$ serem altos, em valores absolutos, de tal forma que invalida a aproximação do resíduo pela expansão de Taylor. Procurou, então, manter a minimização do resíduo, impondo, também, que a soma dos quadrados dos incrementos seja minimizada. Portanto satisfazendo essas últimas condições a expressão a ser minimizada será

$$\bar{S}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = \omega S(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) + a(\Delta\alpha)^2 + b(\Delta\beta)^2 + c(\Delta\gamma)^2 + \ldots ,$$

onde a,b,c, ... são fatores de ponderação , expressando a relativa importância do amortecimento dos diferentes incrementos e ω é uma quantidade positiva que expressa a importância relativa dos resíduos e dos incrementos.

Daí , por diante a solução indicada é a solução padrão para problemas de regressão não-linear.

HARTLEY (1948) apontou algumas das dificuldades da regressão não-linear como sejam :

i. dificuldade do procedimento computacional na estimativa dos parâmetros não-lineares por métodos eficientes e semelhantes ao de mínimos quadrados ;

ii. ausência de bons testes e a dificuldade de estabelecer distribuições provenientes de amostras aleatórias para o ajustamento estatístico ;

iii. dificuldade em decidir que algumas regressões não-lineares são sugeridas pela teoria específica.

Apresentou , através de exemplos , o princípio da regressão interna , que consiste em ter uma equação de regressão em que a variável dependente y está relacionada com a sua própria soma repetida

$${}_1Y_j = \sum_{i=0}^{j} y_j \;,\quad {}_2Y_j = \sum_{k=0}^{j} \sum_{i=0}^{k} y_i , \ldots \qquad \text{etc.}$$

onde y é uma função de x.

Por meio de três exemplos apresentou, detalhadamente, a estimativa dos parâmetros, por mínimos quadrados internos, da lei exponencial

$$y = A - B \exp(-cx).$$

Desenvolveu, em seguida, o método de mínimos quadrados internos na estimativa dos parâmetros da curva logística

$$y = A + B/\left[1 + C \exp(-kx)\right]$$

e da curva de Makeham-Gompertz

$$y = A \exp(-B \; e^{-kx}).$$

Discutiu, finalmente, sobre a eficiência do estimador de mínimos quadrados internos e comparou as estimativas das variâncias das estimativas dos parâmetros, obtidas pelo método de mínimos quadrados internos, com as obtidas pelo método de máxima verossimilhança.

BOX e LUCAS (1959) apresentaram um estudo cujo objetivo foi a estimativa de parâmetros e suas variâncias em modelos não-lineares. Inspiraram-se numa reação química onde um produto A se transforma em outro produto B e este em C pressupondo-se que essas reações são espontâneas e irreversíveis. Admitiram, ainda, que depois de decorrido um tempo ξ_1 a produção η do produto intermediário B é dada por

$$\eta = \frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_2} \left[\exp(-\theta_2\xi_1) - \exp(\theta_1\xi_1)\right].$$

Fizeram, ainda, as seguintes pressuposições :

i. $E(Y_u) = \eta_u = f(\xi_u, \theta)$;

ii. $E\ (Y_u - \eta_u)(Y_v - \eta_v) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{para } u = v \\ 0 & \text{para } u \neq v \end{cases} \quad u,v=1,2,\ldots,N,$

e daí desenvolveram um adequado tratamento matemático que consistiu em minimizar

$$\sum_{u=1}^{N} \left[Y_u - f(\xi_u, \theta) \right]^2 .$$

Apresentaram exemplos de aplicação para os seguintes modelos :

i. $\eta = \theta_1 \exp(\theta_2 \xi_1)$, $0 \leq \xi_1 \text{ (mín.)} \leq \xi_{11} < \xi_{12} \leq \xi_1 \text{ (máx.)}$;
$\theta_1 > 0$ e $\theta_2 > 0$;

ii. $\eta = \theta_1 + \theta_2 \exp(\theta_3 \xi_1)$, $0 \leq \xi_1 \text{ (mín.)} \leq \xi_{11} < \xi_{12} < \xi_{13} \leq \xi_1 \text{ (máx.)}$; $\theta_3 < 0$ e $\theta_2 < 0$,

que é a bem conhecida lei de Mitscherlich de retornos decrescentes.

Finalmente , apresentaram uma discussão onde chamam a atenção para a importância do problema de especificação , isto é , a escolha do modelo matemático mais adequado.

KENDALL e STUART (1960) apresentaram relevante estudo sobre a teoria geral da regressão.

Nessas notas são discutidos os critérios básicos , que devem ser levados em consideração , para um trabalho de regressão.

Dentre outros assuntos abordados os autores destacaram os seguintes : teoria analítica da regressão , critérios para a regressão linear , modelo geral da regressão linear , intervalo de confiança e testes para os parâmetros do modelo linear.

HARTLEY (1961) apresentou importante artigo sugerindo uma modificação ao método de Gauss-Newton aplicado a solução de equações não-lineares. Referiu-se à metodologia de problemas de regressão não-linear que juntamente com a técnica numérica soluciona o problema de mínimos quadrados.

Formulou o problema da regressão não-linear admitindo a função de regressão na forma

$$f(x, \theta) = f(x_1, \ldots, x_k; \theta_1, \ldots, \theta_m)$$

onde se deseja determinar o conjunto θ_i $(i = 1, \ldots, m)$ para os quais se tem

$$Q(\theta) = \sum_{h=1}^{n} \left[Y_h - f(x_h ; \theta)\right]^2$$

como um mínimo

Na solução desse problema admitiu as seguintes pressuposições :

i. $f_i(x, \theta) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial \theta_i}$; $f_{ij}(x, \theta)$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ são funções contínuas de θ para todas as repetições ;

ii. dado um conjunto μ_i $(i=1,\ldots,m)$ com $\Sigma\mu_i^2 > 0$ tem-se

$$\sum_{h=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} \mu_i\, f_i(x_h, \theta)\right]^2 > 0$$

para o vetor x_h e para todo θ num conjunto convexo fechado S do espaço paramétrico ;

iii: sendo

$$Q = \lim_{\overline{S}} \inf Q(x , \theta)$$

onde $\overline{s}$ é o complemento de s , sempre é possível encontrar um vetor $_0\theta$ no interior de s tal que

$$Q (x ; {}_0\theta) < Q.$$

Essa pressuposição garante a convergência do método iterativo.

Descreveu formalmente o processo do método modificado de Gauss-Newton e logo em seguida , demosntrou o teorema da unicidade na solução de mínimos quadrados.

Ilustrou o seu artigo apresentando um exemplo de aplicação através da função de Mitscherlisch de retornos decrescentes , já tão bem conhecida. Para finalizar fez uma análise das propriedades estatísticas dos estimadores de mínimos quadrados.

MOORE (1962) classificou os modelos não-lineares em três tipos : (1) não-linear somente nos parâmetros , (2) não-linear somente nas variáveis aleatórias e

(3) não-linear em ambos. O seu trabalho foi destinado, exclusivamente, ao primeiro tipo.

A apresentação de sua tese foi através de nove capítulos asiim distribuídos:

i. o primeiro capítulo consistiu de uma introdução onde foi feita uma rápida explanação histórica que atribui a Karl Friedrich Gauss como o primeiro a estudar o problema de mínimos quadrados no caso não-linear;

ii. o segundo capítulo doi destinado a descrição do problema geral de mínimos quadrados e do método iterativo de Gauss. O modelo adotado foi
$Y = F(X;\alpha) + E$ onde, $Y' = [y_1, y_2, \ldots, y_I]$;
$F'(X, \alpha) = [f(X_1, \alpha), f(X_2, \alpha), \ldots, f(X_I, \alpha)]$;
$E' = [e_1, e_2, \ldots, e_I]$ e $\alpha' = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$.
Para obtenção do vetor de parâmetros foi adotado o método de Aitkin que consiste em supor o vetor de erros E ter uma matriz de variâncias e covariâncias, V, conhecida. Desta forma a estimativa do vetor paramétrico seria de tal forma que a soma de quadrados generalizada

$$[Y - F(X;\alpha)]' V^{-1} [Y - F(X;\alpha)]$$

é minimizada.

iii. o terceiro capítulo doi destinado a um interessante estudo das condições suficientes para múltiplos mínimos da soma de quadrados da superfície ;

iv. o quarto capítulo consistiu de uma discussão de um programa de FORTRAN II que foi utilizado nos exemplos de aplicação.

v. os capítulos quinto , sexto , sétimo e oitavo foram usados para exemplificação prática através do modelo exponencial

$$Y = \beta \exp (\delta t) + e \quad ;$$

vi. o nono capítulo diz respeito as conclusões e extensões do exposto. Concluiu o autor que a estatística t para uso em intervalos de confiança e testes de significância é satisfatória. Chama atenção ainda da possibilidade de se enfrentar o problema , aqui discutido , com o método de Monte Carlo desde que esteja disponível , para uso , computador de alta velocidade.

WILLIANS (1962) apresentou um trabalho sobre a determinação dos limites de confiança das estimativas dos parâmetros em regressão não-linear. Propôs , ainda , uma medida da não-linearidade. No desenvolvimento teórico adotou a função de regressão.

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 f(x , \gamma)$$

onde apenas γ é o parâmetro não-linear. Usou para estimativa dos parâmetros, os símbolos, b_0, b_1 e c respectivamente, tendo apenas discutido, por razões óbvias, as condições da estimativa de c. O processo escolhido na estimação de γ, como era esperado, foi iterativo. Ao teorizar a determinação dos limites de confiança trabalhou a função

$$f(x, c) = x_1 + x_2 c$$

e demonstrou que o resultado obtido independentemente do caminho escolhido, é invariante. Definiu a medida de não-linearidade como sendo a derivada de c_1 com respeito a c_0 em

$$c_1 = c_0 + b_2 / b_1$$

onde b_2/b_1 é determinado pela regressão dupla sobre $f(C_0)$ e $f'(C_0)$. Apresentou exemplos de aplicação tendo primeiramente estudado a estimativa de c em

$$y = b_0 + b_1 \exp(-cx)$$

para em seguida estudar um problema de patologia através da função $Y = cx_1 + c^2x_2$

Discutiu , também , aproximações alternativas da vizinhança dos limites de confiança. Finalmente, comentou sobre a extensão do método empregado para mais de um parâmetro , bem como para a estimação em geral.

MARQUARDT (1963) apresentou um algorítmo para a solução de problemas não-lineares. Denominou esse método como o da máxima vizinhança que nada mais é que uma interpolação entre o método da série de Taylor e o método do gradiente.

A apresentação do problema foi como segue: seja o modelo a ser ajustado

$$Y = E(y) = f(x_1, \ldots, x_m; \beta_1, \ldots, \beta_k) = f(X,\beta)$$

onde

$$X' = [x_1, \ldots, x_m] \quad e \quad \beta' = [\beta_1, \ldots, \beta_k].$$

O que se deseja é estimar o vetor β nas condições de minimização de

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = // Y - \hat{Y}_i //^2 .$$

Criticou a solução do problema pelos métodos da série de Taylor e do gradiente para em seguida apresentar uma interpolação entre as aproximações de Taylor (δ_t) e do gradiente (δ_q).

O seu algorítmo para a r-ésima iteração é

$$(A^{*(r)} + \lambda^{(r)} I)\ \delta^{*(r)} = g^{*(r)}$$

e essa equação resolvida para $\delta^{*(r)}$ fica

$$\delta^{*(r)} = (A^{*(r)} + \lambda^{(r)} I)^{-1}\ g^{*(r)} .$$

A estratégia adotada para atingir uma máxima vizinhança é a seguinte : sejam $v > 1$ e $\lambda^{(r-1)}$ com λ conhecida para a r-ésima iteração. Primeiramente faça-se $\lambda^{(0)} = 10^{-2}$ e calcula-se $\phi\ (\lambda^{(r-1)})$ e $\phi\ (\lambda^{(r-1)} / v)$.

i. se $\phi\ (\lambda^{(r-1)}/v) \leq \phi^{(r)}$ dado $\lambda^{(r)} = \lambda^{(r-1)}/ v$;

ii. se $\phi\ (\lambda^{(r-1)}/v) > \phi^{(r)}$ e $\phi\ (\lambda^{(r-1)} \leq \phi^{(r)}$ dado $\lambda^{(r)} = \lambda^{(r-1)}$;

iii. se $\phi\ (\lambda^{(r-1)}/v) > \phi^{(r)}$ e $\phi\ (\lambda^{(r-1)}) > \phi^{(r)}$, incremento λ por sucessivas multiplicações por v para algum pequeno ω, tal que, $\phi(\lambda^{(r-1)} v^{\omega}) \leq \phi^{(r)}$ dado $\lambda^{(r)} = \lambda^{(r-1)} v^{\omega}$.

Essa iteração para quando

$$\frac{|\delta_j^{(r)}|}{T + |b_j^{(r)}|} < \varepsilon$$

para todo j e algum adequado $\varepsilon > 0$ muito pequeno ($\varepsilon = 10^{-5}$) e um T pequeno, por exemplo $T = 10^{-3}$. Na prática o v tem sido adotado como igual a 10.

Finalmente, indicou outras aplicações para o seu algorítmo. Sugeriu a interpolação entre os métodos do gradiente e de Newton-Raphson para soluções de sistemas de equações algébricas não-lineares. Sugeriu, ainda, que o seu algorítmo, empregado convenientemente, poderá resolver problemas de equações diferenciais simultâneas não-lineares, associado a problemas de fronteiras não-lineares.

GIRÃO (1965) realizou um trabalho sobre a função de produção de Cobb-Douglas e a análise inter-regional da produção agrícola, através da comparação das produtividades dos fatores de produção, em grupos regionais de explorações agrícolas. Apresentou as vantagens e as desvantagens do tipo de função utilizada, os aspectos metodológicos próprios da regressão linear múltipla, a interpretação estatística de regressões obtidas a partir dos dados referentes às explorações agrícolas em cinco regiões diferentes de Portugal. O tratamento dado ao modelo matemático foi o de erro multiplicativo que através de aplicação de logarítmos transformou-se num modelo de regressão linear.

HARTLEY e BOOKER (1965) adotaram o modelo

$$y_t = f(x_t , \theta) + e_t \quad , \qquad t = 1 , 2 , \ldots , N ,$$

onde x_t é um vetor fixo de N elementos , θ é o vetor de parâmetros desconhecidos , e e_t é o vetor dos erros residuais que foram admitidos como independentes com distribuição normal de média zero e variância σ^2 desconhecida.

Desenvolveram, um método iterativo de solução de equações normais não-lineares com propriedades de convergência para N finito , e eficiência assintótica quando N tende para infinito.

Estudaram , ainda , nesse artigo , os seguintes temas :

i. formulação da teoria , para grandes amostras do estimador por pontos de mínimos quadrados ;

ii. consistência dos estimadores ;

iii. eficiência assintótica dos estimadores ;

iv. alguns teoremas sobre limite estocástico, que fundamentaram o método iterativo apresentado.

Finalmente, apresentaram um exemplo de aplicação no qual foi utilizada a lei exponencial

$$Y_{hr} = \theta_1 \exp (\theta_2 x_{hr}) + e_{hr}$$

onde $h = 1 , 2$ e $r = 1 , 2 , \ldots , 10$.

DRAPER e SMITH (1966) apresentaram um estudo sobre a estimação em modelos não-lineares. Desenvolveram teoria através de um modelo geral, para estimativas dos parâmetros , pelo método de mínimos quadrados admitindo que o erro aleatório tem distribuição normais citaram os seguintes métodos :

i. linearização (série de Taylor) ;

ii. "steepest descent" (minimização passo a passo descendente) ;

iii. Marquardt.

Discutiram a obtenção dos intervalos de confiança e analizaram , ainda , a interpretação geométrica para o método de mínimos quadrados nos casos dos modelos linear e não-linear , respectivamente.

Finalmente , comentaram sobre o espaço amostral , as respectivas interpretações geométricas. Esses estudos apesar de elucidativos , ainda, foram enriquecidos , pelos autores , com exemplos de aplicação.

HOFFMANN e VIEIRA (1977) apresentaram um estudo sobre a regressão assintótica. Estudaram a estimação dos parâmetros ,pelos métodos de Newton e de Gauss-Newton , da equação

$$Y_i = \alpha + \beta\rho^{X_i} + e_i \quad ,$$

que é uma das formas de representar a equação de Mitscherlich.

Discutiram a pressuposição da heterocedasticia dando destaque , para a estimativa dos parâmetros, no uso do método de mínimos quadrados generalizados e mínimos quadrados ponderados.

Estudaram , ainda , o caso de autocorrelação nos resíduos e indicaram para a estimativa dos parâmetros , nestas condições , os métodos de mínimos quadrados de dois estágios e o método da variável instrumental.

FIGUEIRÔA (1980) , na estimativa dos parâmetros da função de Cobb-Douglas adotou o erro aleatório como fator aditivo e aplicou o método dos mínimos quadrados ordinário no modelo

$$Y_i = a \prod_{j=1}^{n} X_j^{\beta_j} + e_i , \qquad i = 1,\ldots,N.$$

Adotou , também , o erro aleatório como fator multiplicativo , no modelo

$$Y_i = a \prod_{j=1}^{n} X_j^{\beta_j} \cdot e_i$$

e usou as estimativas de a e β_j , assim obtidas, como valores iniciais de processo iterativo.

Através de processo iterativo e pelo método dos mínimos quadrados estimou , finalmente , os parâmetros a e β_j e obteve as seguintes conclusões:

a. o método dos mínimos quadrados apresentou um melhor ajustamento que o tradicional , isto é , o que usa o erro aleatório como fator multiplicativo;

b. o número de iterações exigido pelo processo foi considerado pequeno.

BERKEY (1982) adotou uma curva de Jenss a quatro parâmetros , para estudar o crescimento de crianças nos seus seis primeiros anos de vida.

A função estudada foi ,

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 x - \exp(\beta_0 + \beta_1 x)$$

onde :

x	=	ano ;
Y	=	comprimento ;
α_0, α_1, β_0 e β_1		são os parâmetros a serem estimados.

Espera-se que as crianças cresçam mais rapidamente nos primeiros anos de vida e a seguir tenham uma velocidade de crescimento amortecida.

Desta forma se α_0, α_1 e β_0 forem positivos e β_1 for negativo a curva de Jenss acima permite estudar esse fenômeno de crescimento de crianças.

Uma empírica aproximação de Bayes foi desenvolvida para o modelo ajustado e os parâmetros foram estimados, de uma grande amostra, pelo método de mínimos quadrados.

3. MATERIAL

Os dados para ajustamento dos modelos $Y = X^{\beta} + e$, $Y = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} + e$, $Y = aX^{\beta} + e$ e $Y = aX_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} + e$, foram obtidos através das seguintes funções geradoras :

$$Y = X^{0,3432} + e \qquad , e \cap N(0,4) ;$$

$$Y = X_1^{0,2534} X_2^{0,4725} + e \qquad , e \cap N(0,6) ;$$

$$Y = 70,52\, X^{0,2530} + e \qquad , e \cap N(0,8) ;$$

$$Y = 68,2857\, X_1^{0,2168} X_2^{0,3542} + e \qquad , e \cap N(0,4).$$

Os erros aleatórios foram obtidos da tabela de números aleatórios de DIXON e MASSEY (1951).

Convém , nesta oportunidade , antecipar - se a algumas perguntas que possivelmente seriam feitas pelo leitor , como sejam :

Por que usar simulação e não dados reais ?

Por que usar quatro modelos particulares quando poderia ser usado o modelo generalizado $Y = aX_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \ldots X_I^{\beta_I} + e$?

Por que foram essas as funções geradoras escolhidas ?

Quanto a simulação de dados adotada , apresenta a vantagem da comparação dos resultados, posteriomente obtidos, além de suprir a dificuldade da obtenção de dados que atenderiam as necessidades deste trabalho.

Realmente o modelo generalizado $Y = aX_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \ldots X_I^{\beta_I} + e$ satisfaria as necessidades do tratamento matemático , aqui exposto , entretanto , optou-se pelos casos particulares para se ganhar no aspecto didático da exposição.

A escolha das funções geradoras foi arbitrária.

4. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

4.1. Introdução

Na execução desta tese, por razoes exclusivamente didáticas , optou-se pela subdivisão dos casos em homocedasticia e heterocedasticia de variância , uma vez que é do conhecimento geral ser a homocedasticia uma particularização da heterocedasticia.

A vantagem desse procedimento está em se elevar gradualmente o nível de dificuldade da apresentação, facilitando desta forma a compreensão do leitor , para o problema exposto.

4.2. Sob a hipótese de homocedasticia de variâncias

4.2.1. Construção do problema

Admita-se um conjunto de observações Y_j ($j = 1, 2, \ldots J$) resultantes de um processo produtivo da combinação dos fatores de produção X_i ($i = 1, 2, \ldots, I$).

O problema que se pretende resolver é o de ajustar uma função do tipo Cobb-Douglas a esses dados e determinar algumas inferências sobre os seus parâmetros.

Considere o modelo

$$Y_j = a \prod_{i=1}^{I} X_{ij}^{\beta_i} + e_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots J \qquad \text{(I)}$$

que explicitado é :

$$\begin{array}{l}
Y_1 = a\, X_{11}^{\beta_1}\, X_{21}^{\beta_2} \;\ldots\; X_{I1}^{\beta_I} + e_1 \\
Y_2 = a\, X_{12}^{\beta_1}\, X_{22}^{\beta_2} \;\ldots\; X_{I2}^{\beta_I} + e_2 \\
\text{- - - - - - - - - - - - - - - - -} \\
Y_j = a\, X_{1j}^{\beta_1}\, X_{2j}^{\beta_2} \;\ldots\; X_{Ij}^{\beta_I} + e_j \\
\text{- - - - - - - - - - - - - - - - -} \\
Y_J = a\, X_{1J}^{\beta_1}\, X_{2J}^{\beta_2} \;\ldots\; X_{IJ}^{\beta_I} + e_J
\end{array}$$

onde os e_j são erros aleatórios, independentes, normalmente distribuídos com média zero e variância σ^2.

4.2.2. Linearização de $Y_j = a \prod_{i=1}^{I} X_{ij}^{\beta_i} + e_j$, $j = 1, 2, \ldots, J$, através da fórmula de Taylor.

O desenvolvimento da fórmula de Taylor para uma função $f(\xi_\mu, \theta)$, numa vizinhança de θ_0 até o primeiro grau, onde θ é o vetor paramétrico e ξ_μ é o vetor das variáveis independentes, é

$$f(\xi_\mu, \theta) = f(\xi_\mu, \theta_0) + \sum_{i=1}^{I} \left[\frac{\partial f(\xi_\mu, \theta)}{\partial \theta_i} \right] \Bigg|_{\theta = \theta_0} \cdot \left[\theta_i - \theta_0 \right] \qquad \text{(II)}$$

Admita-se :

$$\theta = \left[a_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_I \right] \quad ; \quad \theta_k = \left[a_{0k}, \beta_{1k}, \beta_{2k}, \ldots, \beta_{ik} \right] \quad ;$$

com $k = 0, 1, 2, \ldots, K$. Desta forma tem-se :

$k = 0 \quad ; \quad \theta_0 = [a_{00}, \beta_{10}, \beta_{20}, \ldots, \beta_{I0}] \quad ;$ vetor incial ;

$k = 1 \quad ; \quad \theta_0 = [a_{01}, \beta_{11}, \beta_{21}, \ldots, \beta_{I1}] \quad ;$ vetor obtido na 1ª iteração ;

— —

$k = K \quad ; \quad \theta_K = [a_{0K}, \beta_{1K}, \beta_{2K}, \ldots, \beta_{IK}] \quad ;$ vetor obtido na K-ésima iteração .

e ,

$$Y_j^* = a \sum_{i=1}^{I} X_{ij}^{\beta_i} = a\, X_{1j}^{\beta_1} X_{2j}^{\beta_2} \ldots X_{IJ}^{\beta_I} \qquad , j = 1, 2, \ldots J$$

Aplicando , convenientemente , (II) em (I) tem-se :

$$Y_j = Y_j^* \Big|_{\theta=\theta_0} + \sum_{k=0}^{I} \left[\frac{\partial Y_j^*}{\partial \theta_k} \right] \Big|_{\theta=\theta_0} \cdot \left[\theta_k - \theta_0 \right] + e_j \quad \text{(III)}$$

que explicitada assume a forma ,

$$Y_j = a_{00} X_{1j}^{\beta_{10}} X_{2j}^{\beta_{20}} \ldots X_{Ij}^{\beta_{I0}} + X_{1j}^{\beta_{10}} X_{2j}^{\beta_{20}} \ldots X_{Ij}^{\beta_{I0}} \; (a - a_{00}) \; +$$

$$+ \; a_{00} X_{1j}^{\beta_{10}} X_{2j}^{\beta_{20}} \ldots X_{Ij}^{\beta_{I0}} \ln X_{1j} \cdot (\beta_1 - \beta_{10}) \; +$$

$$+ \; a_{00} X_{1j}^{\beta_{10}} X_{2j}^{\beta_{20}} \ldots X_{Ij}^{\beta_{I0}} \ln X_{2j} \; (\beta_2 - \beta_{20}) \; +$$

$$\ldots + a_{00} X_{1j}^{\beta_{10}} X_{2j}^{\beta_{20}} \ldots X_{Ij}^{\beta_{I0}} \ln X_{Ij} \; (\beta_I - \beta_{I0}) \; + \; e_j \; ,$$

de um modelo de regressão linear múltipla.

Desta forma , o problema agora é obter um estimador do vetor $\Delta\theta_k = [\Delta a_{0k}, \Delta\beta_{1k}, \Delta\beta_{2k}, \ldots, \Delta\beta_{Ik}]$ caracterizando um processo iterativo que exige solução inicial.

O vetor $\theta_{\bullet}$ indica a solução inicial que pode ser obtida através de métodos não iterativos ou de informações previamente conhecidas. Uma boa escolha na solução de partida facilitará o processo de convergência do método.

O que vem a ser uma boa escolha inicial ?

Uma boa escolha inicial é aquela que leva o processo à convergência mais rapidamente. Ocorre que a afirmação de se ter feito uma boa escolha inicial só pode ser feita à posteriori , isto é , depois da verificação da convergência.

Os critérios indicados pela literatura para escolhas iniciais de métodos iterativos , em modelos não-lineares , além dos dois já citados são:

i. utilização da experiência do experimentador na escolha de soluções prováveis ;

ii. tentativa.

4.2.3. A matriz das estimativas das variâncias e covariâncias das estimativas dos parâmetros e o teste t ao nível α de significância

A matriz de dispersão do modelo linearizado será dada por

$$
D = \begin{bmatrix}
\hat{V}(\hat{\alpha}) & \hat{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1) & \hat{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_2) & \cdots & \hat{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_I) \\
\hat{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1) & \hat{V}(\hat{\beta}_1) & \hat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \cdots & \hat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_I) \\
\hat{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_2) & \hat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \hat{V}(\hat{\beta}_2) & \cdots & \hat{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_I) \\
- & - & - & - & - \\
\hat{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_I) & \hat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_I) & \hat{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_I) & \cdots & \hat{V}(\hat{\beta}_I)
\end{bmatrix}
$$

cuja obtenção no caso da regressão linear já é bem conhecida, e, para o modelo $Y = a\, X_1^{\beta_1}\, X_2^{\beta_2}$ é

$$D = \begin{bmatrix} \Sigma X_1^{2\beta_{1k}} X_2^{2\beta_{2k}} & \Sigma a_{0k} X_1^{2\beta_{1k}} X_2^{2\beta_{2k}} \ln X_1 & \Sigma a_{0k} X_1^{2\beta_{1k}} X_2^{2\beta_{2k}} \ln X_2 \\ \Sigma a_{0k} X_1^{2\beta_{1k}} X_2^{2\beta_{2k}} \ln X_1 & \Sigma a_{0k}^2 X_1^{2\beta_{1k}} X_2^{2\beta_{2k}} \ln^2 X_1 & \Sigma a_{0k}^2 X_1^{2\beta_{1k}} X_2^{2\beta_{2k}} \ln X_1 \ln X_2 \\ \Sigma a_{0k} X_1^{2\beta_{1k}} X_2^{2\beta_{2k}} \ln X_2 & \Sigma a_{0k}^2 X_1^{2\beta_{1k}} X_2^{2\beta_{2k}} \ln X_1 \ln X_2 & \Sigma a_{0k}^2 X_1^{2\beta_{1k}} X_2^{2\beta_{2k}} \ln^2 X_2 \end{bmatrix}^{-1} . S^2$$

onde $S = \dfrac{\Sigma\ (Y - \hat{Y})^2}{N - P}$

O teste t será realizado através da expressão

$$t = \frac{\hat{\theta}}{s(\hat{\theta})} \quad ,$$

onde $s(\hat{\theta})$ é o erro padrão de $\hat{\theta}$.

4.2.4. Análise da variância

Serão adotadas as seguintes convenções:

G.L. = graus de liberdade ;

SQT = soma de quadrado total ;

SQreg = soma de quadrado da regressão ;

SQR = soma de quadrado de resíduo ;

Q.M. = quadrado médio .

4.2.4.1. Caso em que $p > 1$.

O quadro da análise é,

Causa da Variação	G.L.
Regressão	p-1
Resíduo	N-p
Total	N-1

e,

$$SQT = \Sigma (Y - \bar{Y})^2 \quad ;$$

$$SQR = \Sigma\, e^2 \quad ;$$

$$SQ\ Reg = SQT - SQR.$$

4.2.4.2. Caso em que $p = 1$.

O quadro da análise é,

Causa da Variação	G.L.
Parâmetro	p
Resíduo	N-p
Total	N

, e,

$$SQT = \Sigma\, Y^2 \quad ;$$

$$SQR = \Sigma\, e^2 \quad ;$$

$$SQ\ Reg = SQT - SQR.$$

Onde N é o número total de observações e p o de parâmetros.

OBS.: Convém ressaltar que as hipótese de nulidade na aplicação dos testes são:

$$H_0 : a = 0$$

$$H_0 : \beta_i = 0 , \quad \forall i.$$

4.2.5. Estimativas por intervalo ao nível de confiança $1 - \alpha$

As estimativas por intervalo para os parâmetros serão assim definidas:

$$\hat{\theta} - t_0 s(\hat{\theta}) < \theta < \hat{\theta} + t_0 s(\hat{\theta})$$

onde t_0 é o limite superior da distribuição t ao nível $\frac{\alpha}{2}$ e com o número de graus de liberdades correspondentes.

4.3. Sob a hipótese de heterocedasticia de variâncias

4.3.1. Construção do problema

Admita-se as mesmas condições de 4.2.1. desta feita com heterocedasticia. Convém esclarecer que a hipótese de heterocedasticia adotada é o caso em que a variância do erro é proporcional ao quadro da respectiva observação, isto é,

$$E(e_i^2) = X_i^2 \sigma^2 .$$

Tome-se, portanto, o modelo (III)

$$Y_j = Y^* \Big|_{\theta=\theta_0} + \sum_{k=0}^{I} \left[\frac{\partial Y_j^*}{\partial \theta k} \right] \Big|_{\theta=\theta_0} . (\theta_k - \theta_0) + e_j .$$

No caso específico a transformação indicada é ,

$$\frac{Y_j}{X_i} = \frac{1}{X_i} \left\{ Y^* \Big|_{\theta=\theta_0} + \sum_{k=0}^{I} \left[\frac{\partial Y_j^*}{\partial \theta k} \right] \Big|_{\theta=\theta_0} (\theta_k - \theta_0) \right\} + \frac{e_j}{X_i} ,$$

com $Z = \dfrac{Y_j}{X_i}$ e $\varepsilon_j = \dfrac{e_j}{X_i}$ tem-se ,

$$E(\varepsilon_j^2) = \frac{1}{X_i^2} E(e_j^2) = \frac{1}{X_i^2} . X_i^2 \sigma^2 = \sigma^2 \qquad \text{e}$$

$$Z = \frac{1}{X_i} \left\{ Y^* \Big|_{\theta=\theta_0} + \sum_{k=0}^{I} \left[\frac{\partial Y_j^*}{\partial \theta_k} \right] \Big|_{\theta=\theta_0} (\theta_k - \theta_0) \right\} + \varepsilon_j$$

4.3.2. Linearização do modelo $Y = X^{\beta} + e$

De acordo com (III) numa vizinhança de β_0 tem-se

$$Y = X^{\beta_0} + (\beta_1 - \beta_0)\ X^{\beta_0} \ln X + e.$$

Daí,

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{X} X^{\beta_0} + \frac{1}{X} (\beta_1 - \beta_0)\ X^{\beta_0} \ln X + \frac{1}{X} e$$

$$Z = X^{\beta_0 - 1} + (\beta_1 - \beta_0)\ X^{\beta_0 - 1} \ln X + \varepsilon \text{ , com } Z^* = Z - X^{\beta_0 - 1}$$

$$\text{vem , } Z^* = (\beta_1 - \beta_0)\ X^{\beta_0 - 1} \ln X + \varepsilon \text{ .}$$

que é uma equação de regressão linear cujo erro tam média zero e variância σ^2.

4.3.3. Linearização do modelo $Y = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} + e$

De acordo com (III) numa vizinhança de

β_{10} e β_{20} tem-se:

$$Y = X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}} + (\beta_1 - \beta_{10}) X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}} \ln X_1 + (\beta_2 - \beta_{20}) X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}} \ln X_2 + e.$$

onde $E(\epsilon^2) = X_1^2 X_2^2 \sigma^2$

Considere-se:

$$\frac{Y}{X_1 \; X_2} = X_1^{\beta_{10}-1} X_2^{\beta_{20}-1} + (\beta_1 - \beta_{10}) X_1^{\beta_{10}-1} X_2^{\beta_{20}-1} \ln X_1 +$$

$$+ (\beta_2 - \beta_{20}) X_1^{\beta_{10}-1} X_2^{\beta_{20}-1} \ln X_2 + \frac{e}{X_1 \; X_2} .$$

Faça-se:

$$Z = \frac{Y}{X_1 \; X_2}, \; Z^{**} = Z - X_1^{\beta_{10}-1} X_2^{\beta_{20}-1}, \beta_1 - \beta_{10} = \Delta\beta_1 , \; \beta_2 - \beta_{20} = \Delta\beta_2$$

$$\text{e} \quad \varepsilon = \frac{e}{X_1 \; X_2}$$

e obtenha-se ,

$$Z^{**} = \Delta\beta_1 X_1^{\beta_{10}-1} X_2^{\beta_{20}-1} \ln X_1 + \Delta\beta_2 \; X_1^{\beta_{10}-1} X_2^{\beta_{20}-1} \ln X_2 + \varepsilon$$

com $E(\varepsilon^2) = \sigma^2$.

Faça-se, ainda :

$C_{12} = X_1^{\beta_{10}-1} X_2^{\beta_{20}-1}$; $d_{1_i} = C_{12} \ln X_1$ e $d_{2_i} = C_{12} \ln X_2$, finalmente obtendo-se,

$$Z^{**} = d_{1_i} \, \Delta\beta_1 + d_{2_i} \, \Delta\beta_2 + \varepsilon$$

que é uma equação de regressão de solução conhecida.

4.4. Descrição do processo iterativo

Admita-se que $\hat{\theta}_0 = [\hat{a}_{00}, \hat{\beta}_{10}, \hat{\beta}_{20}, \ldots, \hat{\beta}_{I0}]$ seja o vetor das estimativas iniciais dos parâmetros a e β_i , que é determinado adotando o modelo estatístico com erro multiplicativo.

A seguir determina-se através da combinação da Fórmula de Taylor com o método de mínimos quadrados, conforme (4.2.2) o vetor de correção

$$\Delta\hat{\theta}_k = [\Delta\hat{a}_{0_k}, \Delta\hat{\beta}_{1_k}, \Delta\hat{\beta}_{2_k}, \ldots, \Delta\hat{\beta}_{IK}].$$

Caso a correção $\Delta\hat{\beta}_k$ não seja muito pequena ($|\Delta\theta_K| \leq 10^{-5}$), obtém-se $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_0 + \Delta\hat{\theta}_k$. Utilizando, agora, $\hat{\theta}_1$ como uma nova estimativa inicial, repete-se o procedimento, obtendo-se nova correção.

Admitindo convergência, os cálculos são repetidos até que as correções $\Delta\hat{\theta}_k$ sejam desprezíveis. Desta forma determinam-se as estimativas dos parâmetros a e β_i, $(i = 1, 2, \ldots, I)$.

5. APLICAÇÕES AOS MODELOS $Y = X^{\beta} + e$, $Y = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} + e$, $Y = aX^{\beta} + e$ E $Y = aX_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} + e$. SOB HOMOCEDASTICIA

5.1. Para o modelo $Y = X^{\beta} + e$.

Sejam os seguintes valores simulados:

X	Y
1	1,00
5	1,20
25	2,85

5.1.1. Obtenção da estimativa inicial

Seja $Y = X^{\beta}\varepsilon$ e obtenha-se $\ln Y = \beta \ln X + \ln\varepsilon$ onde, com $Y_* = \ln Y$, $X_* = \ln X$ e $\varepsilon_* = \ln\varepsilon$ resulta $Y_* = \beta X_* + \varepsilon_*$. O estimador de mínimos quadrados para β é

$$\frac{\Sigma X_* Y_*}{\Sigma X_*^2}.$$

Dessa forma, tem-se:

$X_* = \ln X$	$Y_* = \ln Y$	$X_* Y_*$	X_*^2
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1,60944	0,18232	0,29343	2,59030
3,21888	1,04732	3,37120	10,36119
		3,66463	12,95149

e, portanto a estimativa inicial é $\beta_0 = 0{,}28295$

5.1.2. Linearizando o modelo (fórmula de Taylor) e estimando β

De acordo com (III) o modelo $Y = X^{\beta} + e$ fica

$$Y = X^{\beta_0} + (\beta_1 - \beta_0)\ X^{\beta_0} \ln X + e$$

$$Y - X^{\beta_0} = (\beta_1 - \beta_0)\ X^{\beta_0} \ln X + e$$

Faça-se

$$Y^{**} = Y - X^{\beta_0}, (\beta_1 - \beta_0) = \Delta\beta, \text{ obtendo-se}$$

$$Y^{**} = (\Delta\beta) X^{\beta_0} \ln X + e.$$

O estimador de mínimos quadrados para $\Delta\beta$ é $(\Sigma Y^{**} X^{\beta_0} \ln X) \,/\, \left[\Sigma X^{2\beta_0} (\ln X)^2\right]$. (IV)

Como $\hat{\Delta\beta} = \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0$, então $\hat{\beta}_1 = \hat{\Delta\beta} + \hat{\beta}_0$ e se repete o processo até β_k tal que o $\Delta\beta$ obtido seja muito pequeno, por exemplo $|\Delta\beta| \leqq 0{,}00001$.

Foram realizadas, adotando 0,28295 como valor inicial, 3 iterações, cujos principais resultados se encontram na tabela a seguir, e, os cálculos intermediários no apêndice 1.

Iteração	$\hat{\Delta\beta}$	$\hat{\beta}$
1.ª	0,02773	0,31068
2.ª	-0,00047	0,31021
3.ª	-0,00001	0,31020

5.1.3. Estimativa da variância de $\hat{\beta}$ e o teste t ao nível α de significância

De (IV) infere-se que, $\hat{V}(\hat{\beta}) = \frac{1}{\Sigma X^{2\hat{\beta}} (\ln X)^2} . S^2$,

onde $S^2 = \frac{\Sigma (Y - X^{\hat{\beta}})^2}{N - p}$.

Desta forma concluí-se,

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = \frac{1}{83,36503} . 0,10934$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = 0,00131.$$

Sabe-se que, $t = \frac{\hat{\beta}}{s(\hat{\beta})}$ e portanto

$$t = \frac{0,31020}{0,03619}$$

$$t = 8,571$$

Ao nível de significância de 0,05 o t tabelado com 2 graus de liberdade é 4,303 concluindo-se que o teste para β foi significativo, isto é, rejeita-se a hipótese de nulidade.

Ao nível de significância de 0,01 o t ta belado com 2 graus de liberdade é 9,925 concluindo-se que o teste para β foi não significativo, isto é, não se rejeita a hipótese de nulidade.

5.1.4. Análise da variância

Conforme visto em (4.2.4.2) obteve-se:

$$SQT = \Sigma Y^2 = 10{,}56250$$

$$SQR = \Sigma(Y - X\hat{\beta})^2 = 0{,}21869$$

$$SQReg = SQT - SQR = 10{,}34381$$

Causa da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Parâmetro	1	10,34381	10,34381	94,59
Resíduo	2	0,21869	0,10935	
Total	3	10,56250		

Coeficiente de determinação:

$$r^2 = 0{,}9793$$

O coeficiente de determinação indica que a regressão explica 97,93% das variações, isto é, os valores de Y são explicados em 97,93% pelos valores de X.

O teste de F ao nível de significância de 0,05 foi significativo, isto é, rejeitou-se a hipótese de nu lidade.

O teste F ao nível de significância de 0,01 foi não significativo, isto é, não foi rejeitada a hipótese de nulidade.

5.1.5. Estimativa por intervalo para β ao nível de confiança $1 - \alpha$

Estimativa por intervalo ao nível de confiança de 0,01 de probabilidade é,

$$\hat{\beta} - t_0 s(\hat{\beta}) \leq \beta \leq \hat{\beta} + t_0 s(\hat{\beta})$$

onde t_0 a 0,01 com 2 G.L. é 9,925 , e portanto

$$-0{,}04899 \leq \beta \leq 0{,}66939$$

Estimativa por intervalo ao nível de confiança de 0,05 de probabilidade é,

$$\hat{\beta} - t_0 s(\hat{\beta}) \leq \beta \leq \hat{\beta} + t_0 s(\hat{\beta})$$

onde t_0 a 0,05 com 2 G.L. é 4,303 , e portanto,

$$0{,}15447 \leq \beta \leq 0{,}46593 .$$

5.2. Para o modelo $Y = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} + e$

Sejam os seguintes valores simulados:

X_1	X_2	Y
1	3	0,90
4	9	7,73
16	27	12,21
64	81	78,91
256	243	242,96
1024	729	827,15

5.2.1. Obtenção das estimativas iniciais

Seja $Y = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \varepsilon$ e obtenha-se $\ln Y = \beta_1 \ln X_1 + \beta_2 \ln X_2 + \ln\varepsilon$ onde, com $Y_* = \ln Y$, $X_{1*} = \ln X_1$, $X_{2*} = \ln X_2$ e $\varepsilon_* = \ln\varepsilon$, resulta $Y_* = \beta_1 X_{1*} + \beta_2 X_{2*} + \varepsilon_*$.

Os estimadores de mínimos quadrados de β_1 e β_2 são dados por:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma X^2_{1*} & \Sigma X_{1*} X_{2*} \\ \\ \Sigma X_{1*} X_{2*} & \Sigma X^2_{2*} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma X_{1*} Y_{*} \\ \\ \Sigma X_{2*} Y_{*} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105{,}69964 & 106{,}60996 \\ \\ 106{,}60996 & 109{,}83229 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 104{,}96480 \\ \\ 106{,}27678 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}45096 & -0{,}43773 \\ \\ -0{,}43773 & 0{,}43400 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 104{,}96480 \\ \\ 106{,}27678 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}81439 \\ \\ 0{,}17788 \end{bmatrix}$$

Portanto as estimativas iniciais são $\hat{\beta}_{10} = 0{,}81439$ e $\hat{\beta}_{20} = 0{,}17788$.

5.2.2. Linearizando o modelo (fórmula de Taylor) e estimando β_1 e β_2.

De acordo com (III) o modelo $Y = X_1^{\beta_1} \; X_2^{\beta_2} + e$ fica,

$$Y = X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}} + (\beta_1 - \beta_{10}) X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}} \ln X_1 + (\beta_2 - \beta_{20}) X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}} \ln X_2 + e$$

$$Y - X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}} = (\beta_1 - \beta_{10}) X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}} \ln X_1 + (\beta_2 - \beta_{20}) X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}} \ln X_2 + e .$$

Faça-se,

$$\overset{**}{Y} = Y - X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}} , \quad \beta_1 - \beta_{10} = \Delta\beta_1 , \quad \beta_2 - \beta_{20} = \Delta\beta_2 \quad \text{e}$$

obtenha-se,

$$\overset{**}{Y} = \Delta\beta_1 \, X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}} \ln X_1 + \Delta\beta_2 X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}} \ln X_2 + e.$$

Faça-se,

$$C_{12} = X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}} , \quad d_{1_i} = C_{12} \ln X_1 \quad \text{e} \quad d_{2_i} = C_{12} \ln X_2$$

e portanto obtenha-se,

$$\overset{**}{Y} = d_{1_i} \, \Delta\beta_1 + d_{2_i} \, \Delta\beta_2 + e .$$

Os estimadores de mínimos quadrados para $\Delta\beta_1$ e $\Delta\beta_2$ são dados por

$$\begin{bmatrix} \Delta\hat{\beta}_1 \\ \Delta\hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma d_{1_i}^2 & \Sigma d_{1_i} d_{2_i} \\ \Sigma d_{1_i} d_{2_i} & \Sigma d_{2_i}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma d_{1_i} Y^{**} \\ \Sigma d_{2_i} Y^{**} \end{bmatrix} \qquad (V)$$

Como $\Delta\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{10}$ e $\Delta\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_{20}$ tem-se $\hat{\beta}_1 = \Delta\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_{10}$ e $\hat{\beta}_2 = \Delta\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_{20}$. O processo é repetido até que os $\Delta\hat{\beta}_1$ e $\Delta\hat{\beta}_2$ sejam muito pequenos, por exemplo $|\Delta\hat{\beta}_1| \leq 0{,}00001$ e $|\Delta\hat{\beta}_2| \leq 0{,}00001$.

Foram realizadas, adotando $\hat{\beta}_{10} = 0{,}81439$ e $\hat{\beta}_{20} = 0{,}17788$ como valores iniciais, 3 iterações cujos principais resultados se encontram na tabela a seguir, e , os cálculos intermediários no apêndice 2.

Iteração	$\Delta\hat{\beta}_1$	$\Delta\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
1.ª	-0,37795	0,38297	0,43644	0,56085
2.ª	-0,00911	0,00892	0,42733	0,56977
3.ª	0,00001	0,00000	0,42734	0,56977

5.2.3. Estimativas das variâncias e covariâncias de $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$ e o teste t ao nível α de significância

De (V) infere-se que,

$$D = \begin{bmatrix} \Sigma d_{1_i}^2 & \Sigma d_{1_i} d_{2_i} \\ \Sigma d_{1_i} d_{2_i} & \Sigma d_{2_i}^2 \end{bmatrix}^{-1} s^2$$

onde D é a matriz de variância e covariâncias

$$s^2 = \frac{\Sigma (Y - X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2})^2}{N - p} .$$

Dessa forma tem-se ,

$$D = \begin{bmatrix} 0,000231224 & -0,000242503 \\ -0,000242503 & 0,000254363 \end{bmatrix} . 33,28212$$

$$D = \begin{bmatrix} 0,00770 & -0,00807 \\ -0,00807 & 0,00847 \end{bmatrix}$$,isto é, $\hat{V}(\hat{\beta}_1) = 0,00770$

$\hat{V}(\hat{\beta}_2) = 0,00847$ e $\hat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = -0,00807$

Sabe-se que ,

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{s(\hat{\beta}_1)} = \frac{0,42734}{0,08775} = 4,870$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_2}{s(\hat{\beta}_2)} = \frac{0,56977}{0,09203} = 6,191$$

Ao nível de significância 0,01 o t tabelado com 4 graus de liberdade é 3,747 concluindo-se que os testes para β_1 e β_2 foram significativos, isto é, rejeitam-se as hipóteses de nulidade.

5.2.4. Análise da variância

Conforme visto em (4.2.4.a) obteve-se:

$$SQT = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 488142,84$$

$$SQR = \Sigma(Y - X_1^{\hat{\beta}_1} X_2^{\hat{\beta}_2})^2 = 133,12$$

$$SQReg = SQT - SQR = 488009,72$$

Causa de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Regressão	1	488009,72	488009,72	14663,75
Resíduo	4	133,12	33,28	
Total	5	488142,84		

Coeficiente de determinação :

$$r^2 = 0,9997$$

O coeficiente de determinação indica que a regressão explica 99,97% das variações, isto é, os valores de Y são explicados em 99,97% pelos valores de X.

O teste de F ao nível de significância de 0,01 foi significativo, isto é, rejeita-se a hipótese de nulidade.

5.2.5. Estimativas por intervalo para β_1 e β_2 ao nível de confiança $1 - \alpha$

Ao nível de significância de 0,05 com 4 graus de liberdade o t tabelado é 2,132 e os intervalos de confiança para β_1 e β_2 são respectivamente.

$$0,24026 < \beta_1 < 0,61442$$

$$0,37356 < \beta_2 < 0,76598$$

Ao nível de significância de 0,01 com 4 graus de liberdade o t tabelado é 3,747 e os intervalos de confiança para β_1 e β_2 são respectivamente.

$$0,09854 < \beta_1 < 0,75614$$

$$0,22492 < \beta_2 < 0,91462$$

5.3. Para o modelo $Y = aX^{\beta} + e$

Sejam os seguintes valores simulados:

X	Y
1	57,48
4	109,66
16	146,22
64	191,40
256	297,97
1024	404,92

5.3.1. Obtenção das estimativas iniciais

Seja $Y = aX^{\beta}\varepsilon$ e obtenha-se $\ln Y = \ln a + \beta \ln X + \ln \varepsilon$ onde com $Y_* = \ln Y$; $a_* = \ln a$; $X_* = \ln X$ e $\varepsilon_* = \ln \varepsilon$ resulta $Y_* = a_* + \beta X_* + \varepsilon_*$. Os estimadores de mínimos quadrados para a e β são dados por

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_* \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = (X_*'X_*)^{-1} X_*' Y_*$$

$X_* = \ln X$	$Y_* = \ln Y$	X_*^2	$X_* Y_*$
0,00000	4,05144	0,00000	0,00000
1,38629	4,69738	1,92180	6,51193
2,77259	4,98511	7,68726	13,82167
4,15888	5,25437	17,29628	21,85229
5,54518	5,69699	30,74902	31,59084
6,93147	6,00369	48,04528	41,61440
20,79441	30,68898	105,69964	115,39112

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_* \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 20,79441 \\ 20,79441 & 105,69964 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 30,68898 \\ 115,39112 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_* \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,52381 & -0,10305 \\ -0,10305 & 0,02973 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30,68898 \\ 115,39112 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_* \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,18414 \\ 0,26808 \end{bmatrix}$$

$$\ln\hat{a} = 4,18414 \;;\; \hat{a} = 65,63703$$

Portanto as estimativas iniciais são $\hat{a}_0 = 65,63703$ e $\hat{\beta}_0 = 0,26808$

5.3.2. Linearizando o modelo (fórmula de Taylor) e estimando a e β.

De acordo com (III) o modelo $Y = a\,X^{\beta} + e$ fica,

$$Y = a_0X^{\beta_0} + X^{\beta_0}\,(a_1 - a_0) + a_0\,X^{\beta_0}\,(\ln X)(\beta_1 - \beta_0) + e\,,$$

$$Y - a_0X^{\beta_0} = X^{\beta_0}\,(a_1 - a_0) + a_0\,X^{\beta_0}\,(\ln X)(\beta_1 - \beta_0) + e\,.$$

Faça-se

$$Y_*^* = Y - a_0\,X^{\beta_0}\,,\quad \Delta a = a_1 - a_0\,,\quad \Delta\beta = \beta_1 - \beta_0 \text{ e}$$

obtenha-se

$$Y_*^* = (\Delta a)X^{\beta_0} + (\Delta\beta)a_0X^{\beta_0}\ln(X) + e\,.$$

Faça-se ,

$$C_{1_i} = X^{\beta_0} \text{ e } d_{1_i} = a_0 \, C_{1_i} \, \ln X_i$$ e portanto

obtenha-se ,

$$Y_*^* = C_1(\Delta a) + d_1 (\Delta\beta) + e \, .$$

Os estimadores de mínimos quadrados para Δa e $\Delta\beta$ são dados por

$$\begin{bmatrix} \hat{\Delta a} \\ \hat{\Delta\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma C_1^2 & \Sigma C_1 d_1 i \\ \Sigma C_1 d_{1_i} & \Sigma d^2_1 i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma C_1 Y_*^* \\ \Sigma d_1 Y_*^* \end{bmatrix} \qquad \text{(VI)}$$

Como $\hat{\Delta a} = \hat{a}_1 - \hat{a}_0$ e $\hat{\Delta\beta} = \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0$ tem-se $\hat{a}_1 = \hat{\Delta a} + \hat{a}_0$ e $\hat{\beta}_1 = \hat{\Delta\beta} + \hat{\beta}_0$. O processo é repetido até que os $\hat{\Delta a}$ e $\hat{\Delta\beta}$ sejam muito pequenos, por exemplo, $|\hat{\Delta a}| \leq 0{,}00001$ e $|\hat{\Delta\beta}| \leq 0{,}00001$.

Foram realizadas, adotando $\hat{a}_0 = 65{,}63703$ e $\hat{\beta}_0 = 0{,}26808$ como valores iniciais , 11 iterações cujos principais resultados se encontram na tabela a seguir, e , os cálculos intermediários no apêndice 3.

Iteração	$\hat{\Delta a}$	$\hat{\Delta \beta}$	$\hat{a}$	$\hat{\beta}$
1ª	4,40412	-0,01447	70,04115	0,25361
2ª	0,16469	0,00110	70,20584	0,25471
3ª	-0,00192	-0,00021	70,20392	0,25450
4ª	-0,00917	-0,00011	70,19475	0,25439
5ª	-0,00267	-0,00008	70,19208	0,25431
6ª	-0,00183	-0,00004	70,19025	0,25427
7ª	-0,00077	-0,00003	70,18948	0,25424
8ª	-0,00048	-0,00002	70,18900	0,25422
9ª	-0,00030	-0,00001	70,18870	0,25421
10ª	-0,00013	0,00000	70,18857	0,25421
11ª	0,00000	0,00000	70,18857	0,25421

5.3.3. Estimativas das variâncias e covariâncias de $\hat{a}$ e $\hat{\beta}$ e o teste t ao nível α de significância

De (VI) infere-se que,

$$D = \begin{bmatrix} \Sigma C_{1_i}^{2} & \Sigma C_{1_i} d_{1_i} \\ \Sigma C_{1_i} d_{1_i} & \Sigma d_{1_i}^{2} \end{bmatrix}^{-1} S^2$$

onde,

$$D = \begin{bmatrix} \hat{V}(\hat{a}) & \hat{Cov}(\hat{a}, \hat{\beta}) \\ \hat{Cov}(\hat{a}, \hat{\beta}) & \hat{V}(\hat{\beta}) \end{bmatrix} \text{ e } S^2 = \frac{\Sigma (Y - aX^{\beta})^2}{N - p}$$

Desta forma conclui-se ,

$$D = \begin{bmatrix} 0,19894 & -0,00046 \\ -0,00046 & 0,00001 \end{bmatrix} \times 128,90$$

$$D = \begin{bmatrix} 25,64337 & -0,05929 \\ -0,05929 & 0,00013 \end{bmatrix}$$

Sabe-se que ,

$$t = \frac{\hat{\alpha}}{S(\hat{\alpha})} = \frac{70,18857}{5,06393} = 13,860$$

$$t = \frac{\hat{\beta}}{s(\hat{\beta})} = \frac{0,25421}{0,01140} = 22,299$$

Ao nível de significância de 0,01 o t tabelado com 4 graus de liberdade é 3,747 concluindo-se que os testes para a e β foram significativos, isto é, rejeitam-se as hipóteses de nulidade correspondentes.

5.3.4. Análise da variância

Conforme visto em (4.2.4.1) obteve-se:

$$SQT = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 79988,48$$

$$SQR = \Sigma(Y - \hat{a}X^{\hat{\beta}})^2 = 515,59$$

$$SQReg = SQT - SQR = 79472,89$$

Causa de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Regressão	1	79472,89	79472,89	616,55
Resíduo	4	515,59	128,90	
Total	5	79988,48		

Coeficiente de determinação:

$$r^2 = 0,9935$$

O coeficiente de determinação indica que a regressão explica 99,35% das variações, isto é, os valores de Y são explicados em 99,35% pelos valores de X.

O teste F ao nível de significância de 0,01 foi significativo, isto é, rejeita-se a hipótese de nulidade.

5.3.5. Estimativas por intervalo para a e ß ao nível de confiança $1 - \alpha$

O intervalo de confiança para a é

$\hat{a} - t_0\, s(\hat{a}) \leq a \leq \hat{a} + t_0\, s(\hat{a})$.

Ao nível de siginificância de 0,05 com 4 graus de liberdade $t_0 = 2,132$.

O intervalo de confiança de a é

$59,39227 \leq a \leq 80,98487$

O intervalo de confiança de ß é

$0,22991 \leq \beta \leq 0,27851$

Ao nível de significância de 0,01 com 4 graus de liberdade $t_0 = 3,747$.

O intervalo de confiança de a é

$$51,21402 \leq a \leq 89,16312$$

O intervalo de confiança de β é

$$0,21149 \leq \beta \leq 0,29693$$

5.4. Para o modelo $Y = aX_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} + e$

Sejam os seguintes valores simulados:

X_1	X_2	Y
0,1	0,2	25,65
0,3	0,4	41,40
0,5	0,6	52,20
0,7	0,8	60,27
0,9	1,0	68,97
1,1	1,2	76,95

5.4.1. Obtenção das estimativas iniciais

Seja $Y = aX_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \varepsilon$ e obtenha-se,

$$\ln Y = \ln a + \beta_1 \ln X_1 + \beta_2 \ln X_2 + \ln \varepsilon$$

onde com

$$Y_* = \ln Y,\ a_* = \ln a,\ X_{1*} = \ln X_1,\ X_{2*} = \ln X_2 \text{ e } \varepsilon_* = \ln \varepsilon,$$

resulta

$$Y_* = a_* + \beta_1 X_{1*} + \beta_2 X_{2*} + \varepsilon_* \ .$$

Os estimadores de mínimos quadrados de a_*, β_1 e β_2 são dados por

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_* \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & \Sigma X_{1*} & \Sigma X_{2*} \\ \Sigma X_{1*} & \Sigma X_{1*}^2 & \Sigma X_{1*} X_{2*} \\ \Sigma X_{2*} & \Sigma X_{1*} X_{2*} & \Sigma X_{2*}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma Y_* \\ \Sigma X_{1*} Y_* \\ \Sigma X_{2*} Y_* \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_* \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4{,}56643 & -3{,}07738 \\ -4.56643 & 7{,}37930 & 5{,}26010 \\ -3{,}07738 & 5{,}26010 & 3{,}77386 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 23{,}59857 \\ -16{,}18909 \\ -10{,}77663 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_* \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,26615 \\ 0,28912 \\ 0,22025 \end{bmatrix}$$

Portanto as estimativas iniciais são

$\hat{a} = 71,24672$; $\hat{\beta}_{10} = 0,28912$ e $\hat{\beta}_{20} = 0,22025$

5.4.2. Linearizando o modelo (fórmula de Taylor) e estimando a, β_1 e β_2

De acordo com (III) o modelo $Y = aX_1^{\beta_1}X_2^{\beta_2} + e$ fica,

$$Y = a_0X_1^{\beta_{10}}X_2^{\beta_{20}} + (a_1 - a_0)X_1^{\beta_{10}}X_2^{\beta_{20}} + (\beta_1 - \beta_{10})a_0X_1^{\beta_{10}}X_2^{\beta_{20}}\ln X_1 + (\beta_2 - \beta_{20})a_0X_1^{\beta_{10}}X_2^{\beta_{20}}\ln X_2 + e$$

$$Y - a_0X_1^{\beta_{10}}X_2^{\beta_{20}} = (a_1 - a_0)X_1^{\beta_{10}}X_2^{\beta_{20}} + (\beta_1 - \beta_{10})a_0X_1^{\beta_{10}}X_2^{\beta_{20}}\ln X_1 + (\beta_2 - \beta_{20})a_0X_1^{\beta_{10}}X_2^{\beta_{20}}\ln X_2 + e$$

Faça-se,

$${}_*Y^* = Y - a_0X_1^{\beta_{10}}X_2^{\beta_{20}}, \quad a_1 - a_0 = \Delta a, \quad \beta_1 - \beta_{10} = \Delta\beta_1, \quad \beta_2 - \beta_{20} = \Delta\beta_2$$

e obtenha-se,

$$ {}_*Y^* = (\Delta a) X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}} + (\Delta\beta_1) a_0 X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}} \ln X_1 + (\Delta\beta_2) a_0 X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}} \ln X_2 + e $$

Faça-se ,

$C_{12} = a_0 X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}}$, $d_{1_i} = C_{12} \ln X_1$, $d_{2_i} = C_{12} \ln X_2$ e $d_{0_i} = X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}}$ e

portanto obtenha-se ,

$$ {}_*Y^* = d_{0_i}\,\Delta a + d_{1_i}\,\Delta\beta_1 + d_{2_i}\,\Delta\beta_2 + e $$

Os estimadores de mínimos quadrados para Δa , $\Delta\beta_1$ e $\Delta\beta_2$ são dados por

$$ (VII) \quad \begin{bmatrix} \widehat{\Delta a} \\ \widehat{\Delta\beta_1} \\ \widehat{\Delta\beta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma d_{0_i}^2 & \Sigma d_{0_i} d_{1_i} & \Sigma d_{0_i} d_{1_i} \\ \Sigma d_{0_i} d_{1_i} & \Sigma d_{1_i}^2 & \Sigma d_{1_i} d_{2_i} \\ \Sigma d_{0_i} d_{2_i} & \Sigma d_{1_i} d_{2_i} & \Sigma d_{2_i}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma d_{0_i} {}_*Y^* \\ \Sigma d_{1_i} {}_*Y^* \\ \Sigma d_{2_i} {}_*Y^* \end{bmatrix} $$

Como $\widehat{\Delta a} = \hat{a}_1 - \hat{a}_{10}$, $\widehat{\Delta\beta_1} = \hat{\beta}_1 - \beta_{10}$ e $\widehat{\Delta\beta_2} = \hat{\beta}_2 - \beta_{20}$

tem-se ,

$$ \hat{a}_1 = \widehat{\Delta a} + \hat{a}_{10} \ , \quad \hat{\beta}_1 = \widehat{\Delta\beta} + \beta_{10} \ \text{e} \ \hat{\beta}_2 = \widehat{\Delta\beta_2} + \beta_{20} . $$

O processo é repetido até que os $\widehat{\Delta a}$, $\widehat{\Delta\beta_1}$ e $\widehat{\Delta\beta_2}$ sejam muito pequenos, por exemplo, $|\Delta \hat{a}| \leq 0,00001$, $|\Delta \hat{\beta}_1| \leq 0,00001$ e $|\Delta \hat{\beta}_2| \leq 0,00001$.

Foram realizadas, adotando $\hat{a} = 71,24672$, $\hat{\beta}_{10} = 0,28912$ e $\hat{\beta}_{20} = 0,22025$ como valores iniciais , 4 iterações, cujos principais resultados se encontram na tabela a seguir, e, os cálculos intermediários no apêndice 4.

Iteração	$\Delta\hat{\alpha}$	$\Delta\hat{\beta}_1$	$\Delta\hat{\beta}_2$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
1ª	-0,31415	-0,05137	0,06762	70,93257	0,23775	0,28787
2ª	0,00047	-0,00016	0,00022	70,93304	0,23759	0,28809
3ª	-0,00002	0,00000	0,00001	70,93302	0,23759	0,28810
4ª	0,00002	0,00000	-0,00001	70,93304	0,23759	0,28809

5.4.3. Estimativa das variâncias e covariâncias de $\hat{a}$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$ e o teste t ao nível α de significância.

De (VII) infere-se que,

$$D = \begin{bmatrix} \Sigma d_{0_i}^2 & \Sigma d_{0_i} d_{1_i} & \Sigma d_{0_i} d_{2_i} \\ \Sigma d_{0_i} d_{1_i} & \Sigma d_{1_i}^2 & \Sigma d_{1_i} d_{2_i} \\ \Sigma d_{0_i} d_{2_i} & \Sigma d_{1_i} d_{2_i} & \Sigma d_{2_i}^2 \end{bmatrix}^{-1} . \; S^2$$

onde,

$$D = \begin{bmatrix} \hat{V}(\hat{a}) & \hat{Cov}(\hat{a}, \hat{\beta}_1) & \hat{Cov}(\hat{a}, \hat{\beta}_2) \\ \hat{Cov}(\hat{a}, \hat{\beta}_1) & \hat{V}(\hat{\beta}_1) & \hat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \\ \hat{Cov}(\hat{a}, \hat{\beta}_2) & \hat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \hat{V}(\hat{\beta}_2) \end{bmatrix}$$

e $$S^2 = \frac{\Sigma (Y - aX_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2})^2}{N - p}$$

Desta forma conclui-se ,

$$D = \begin{bmatrix} 1,62459 & 0,17973 & -0,22135 \\ 0,17973 & 0,02463 & -0,03087 \\ -0,22136 & -0,03087 & 0,03898 \end{bmatrix} \times 0,43676$$

$$D = \begin{bmatrix} 0,70956 & 0,07850 & -0,09668 \\ 0,70850 & 0,01076 & -0,01348 \\ -0,09668 & -0,01348 & 0,01702 \end{bmatrix}$$

Sabe-se que ,

$$t = \frac{\hat{a}}{s(\hat{a})} = \frac{70,93304}{0,84235} = 84,209$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{s(\hat{\beta}_1)} = \frac{0,23759}{0,10373} = 2,290$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_2}{s(\hat{\beta}_2)} = \frac{0,28809}{0,13046} = 2,208$$

Ao nível de significância de 0,05 o t tabelado com 3 graus de liberdade é 2,353. Os parâmetros β_1 e β_2 não diferem significativamente de zero, portanto não se rejeitam as respectivas hipóteses de nulidade.

Ao nível de significância de 0,01 o t tabelado com 3 graus de liberdade é 4,541 concluindo-se que o teste para a foi significativo, isto é, rejeita-se a hipótese de nulidade.

5.4.4. Análise da variância

Conforme visto em (4.2.4.1) obteve-se:

$$SQT = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 1755{,}49320$$

$$SQR = \Sigma(Y - \hat{a}X_1^{\hat{\beta}_1} X_2^{\hat{\beta}_2})^2 = 1{,}31028$$

$$SQReg = SQT - SQR = 1754{,}18292$$

Causa da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Regressão	2	1754,18292	877,09146	2008,17
Resíduo	3	1,31028	0,43676	
Total	5	1755,49320		

Coeficiente de determinação;

$r^2 = 0{,}9992$

O coeficiente de determinação indica que a regressão explica 99,92% das variações, isto é, os valores de Y são explicados em 99,92% pelos valores de X.

O teste F, ao nível de significância de 0,01, foi significativo, isto é, rejeitam-se as hipóteses de nulidade.

5.4.5. Estimativas por Intervalo para a, β_1 e β_2 ao nível de confiança $1 - \alpha$.

O intervalo de confiança para a é

$$\hat{a} - t_0\, s(\hat{a}) \leq a \leq \hat{a} + t_0\, s(\hat{a})$$

O intervalo de confiança para β_i é

$$\hat{\beta}_i - t_0\, s(\hat{\beta}_i) \leq \beta_i \leq \hat{\beta}_i + t_0\, s(\hat{\beta}_i) \; .$$

Ao nível de significância de 0,05 com 3 graus de liberdade $t_0 = 2{,}353$.

O intervalo de confiança de a é

$$68{,}95099 < a < 72{,}91509$$

O intervalo de confiança de β_1 é

$$-0{,}00649 < \beta_1 < 0{,}48167$$

O intervalo de confiança de β_2 é

$$-0{,}01888 < \beta_2 < 0{,}59506$$

Ao nível de significância de 0,01 com 3 graus de liberdade $t_0 = 4{,}541$.

O intervalo de confiança de a é

$$67{,}10793 < a < 74{,}75815$$

O intervalo de confiança de β_1 é

$$-0,23345 < \beta_1 < 0,70863$$

O intervalo de confiança de β_2 é

$$-0,30433 < \beta_2 < 0,88051 .$$

6. APLICAÇÕES AOS MODELOS $Y = X^{\beta} + e$ E $Y = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} + e$ SOB HETEROCEDASTICIA

6.1. Para o modelo $Y = X^{\beta} + e$

Considere-se os dados de 5.1 ,

X	Y	$Z = Y/X$
1	1,00	1,00000
5	1,20	0,24000
25	2,85	0,11400

e a estimativa inicial $\beta_0 = 0,28295$.

6.1.1. Estimativa do parâmetro β

O estimador de mínimos quadrados para β é dado por

$$\beta_1 - \beta_0 = \frac{\Sigma Z^* X^{\beta_0 - 1} \cdot \ln X}{\Sigma X^{2(\beta_0 - 1)} (\ln X)^2}$$

Foram realizadas 5 iterações, cujos principais resultados se encontram na tabela a seguir, e, os cálculos intermediários no apêndice 5.

Iteração	$\Delta\hat{\beta}$	$\hat{\beta}$
1ª	-0,09328	0,18967
2ª	-0,01684	0,17283
3ª	-0,00143	0,17140
4ª	-0,00009	0,17131
5ª	0,00000	0,17131

6.1.2. Estimativa da variância de $\hat{\beta}$ e o teste t ao nível α de significância

A variância $\hat{\beta}$ é dada pela expressão:

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = \frac{1}{\Sigma X^{2(\hat{\beta}-1)} \ln^2 X} \cdot S^2$$

onde ,

$$S^2 = \frac{\Sigma (Z - X^{\beta-1})^2}{N - p}$$

Portanto:

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = \frac{1}{0,22978} \cdot \frac{0,00253}{2} = 0,00553$$

Sabendo-se que $t = \dfrac{\hat{\beta}}{s(\hat{\beta})}$ e portanto

$$t = \frac{0,17131}{0,07434} = 2,300$$

Ao nível de significância de 0,05 o t tabelado com 2 graus de liberdade é 4,303 concluindo-se que o teste para β foi não significativo, isto é, não se rejeita a hipótese de nulidade.

6.1.3. Análise da vairância

Conforme visto em (4.2.4.2), obteve-se:

$$SQT = \Sigma Z^2 = 1,07060$$

$$SQR = \Sigma(Z - X^{\beta-1})^2 = 0,00253$$

$$SQReg = SQT - SQR = 1,06807$$

Causa da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Parâmetro	1	1,06807	1,06807	841,00
Resíduo	2	0,00253	0,00127	
Total	3	1,07060		

Coeficiente de determinação:

$$r^2 = 0,9976$$

O coeficiente de determinação indica que a regressão explica 99,76% das variações, isto é, os valores de Y são explicados em 99,76% pelos valores de X.

O teste F , aos níveis de significância de 0,01 foi significativo, isto é, rejeita-se a hipótese de nulidade.

6.1.4. Estimativa por intervalo para β ao nível de confiança $1 - \alpha$

O intervalo de confiança ao nível de significância de 0,05 de probabilidade é

$$\hat{\beta} - t_0 s(\hat{\beta}) \leq \beta \leq \hat{\beta} + t_0 s(\hat{\beta})$$

onde t_0 a 0,05 com 2 graus de liberdade é 4,303 e portanto

$$-0{,}14780 < \beta < 0{,}49042$$

O intervalo de confiança ao nível de significância de 0,01 de probabilidade é

$$\hat{\beta} - t_0 s(\hat{\beta}) \leq \beta \leq \hat{\beta} + t\ s(\hat{\beta})$$

onde t_0 a 0,01 com 2 graus de liberdade é 9,925 e portanto

$$-0{,}56473 < \beta < 0{,}90735$$

6.2. Para o modelo $Y = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} + e$

Considere-se os dados de 5.2.

X_1	X_2	Y	$Z = Y/X_1X_2$
1	3	0,90	0,30000
4	9	7,73	0,21472
16	27	12,21	0,02826
64	81	78,91	0,01522
256	243	242,96	0,00391
1024	729	827,15	0,00111

e as estimativas iniciais $\hat{\beta}_{10} = 0,81439$ e $\hat{\beta}_{20} = 0,17788$

6.2.1. Estimativas dos parâmetros β_1 e β_2

A expressão indicativa da solução da regressão é

$$\begin{bmatrix} \Delta\hat{\beta}_1 \\ \\ \Delta\hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma d_{1_i}^2 & \Sigma d_{1_i} d_{2_i} \\ \\ \Sigma d_{1_i} d_{2_i} & \Sigma d_{2_i}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma d_{1_i} Z^{**} \\ \\ \Sigma d_{2_i} Z^{**} \end{bmatrix} .$$

Foram realizadas 3 iterações, cujos principais resultados se encontram na tabela a seguir, e, os cálculos intermediários no apêndice 6.

Iteração	$\Delta\hat{\beta}_1$	$\Delta\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
1.ª	0,62939	-0,22207	1,44378	-0,04419
2.ª	-0,14639	0,00773	1,29739	-0,03646
3.ª	-0,00437	-0,00780	1,29302	-0,04426

Considerou-se para efeito de convergência

$|\Delta\hat{\beta}_1| \leq 10^{-2}$ e $|\Delta\hat{\beta}_2| \leq 10^{-2}$.

6.2.2. Estimativas das variâncias e covariâncias de $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$ e o teste t ao nível α de significância

A matriz de dispersão é

$$D = \begin{bmatrix} 20,74065 & -9,87002 \\ -9,87002 & 7,65359 \end{bmatrix} s^2$$

com

$$s^2 = \frac{\Sigma (Z - X_1^{\beta_1 - 1} \; X_2^{\beta_2 - 1})^2}{N - p} = \frac{0,00855}{4} = 0,00214$$

Dessa forma tem-se:

$$\hat{V}(\hat{\beta}_1) = 0,04438 \; ; \quad \hat{V}(\hat{\beta}_2) = 0,01638 \; ; \quad \hat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = -\,0,02112.$$

Sabe-se que $t = \dfrac{\hat{\beta}}{s(\hat{\beta})}$ e portanto:

$$t_1 = \frac{\hat{\beta}_1}{s(\hat{\beta}_1)} = \frac{1,29302}{0,21067} = 6,138$$

$$t_2 = \frac{\hat{\beta}_2}{s(\hat{\beta}_2)} = \frac{-0,04426}{0,12798} \doteq -0,346$$

Ao nível de significância de 0,01 o t tabelado com 4 graus de liberdade é 3,747 concluindo-se, que o teste para β_1 foi significativo, isto é, rejeita-se a hipótese de nulidade.

O teste para β_2, ao nível de significância de 0,05, foi não significativo, isto é, não se rejeitou a hipótese de nulidade.

6.2.3. Análise da variância

Conforme visto em (4.2.4.1.),obteve-se:

$$SQT = \Sigma(Z - \bar{Z})^2 = 0,08427$$

$$SQR = \Sigma(Z - X_1^{\beta_1 - 1} X_2^{\beta_2 - 1})^2 = 0,00855$$

$$SQReg = SQT - SQR = 0,07572$$

Causa da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Regressão	1	0,07572	0,07572	35,38
Resíduo	4	0,00855	0,00214	
Total	5	0,08427		

Coeficiente de determinação:

$$r^2 = 0{,}8985$$

O coeficiente de determinação indica que a regressão explica 89,85% das variações, isto é, os valores de Y são explicados em 89,85% pelos valores de X.

O teste F, ao nível de significância de 0,01, foi significativo, isto é, rejeita-se a hipótese de nulidade.

6.2.4. Estimativas por intervalo para β_1 e β_2 ao nível de confiança $1 - \alpha$

O intervalo de confiança para β_i é

$$\hat{\beta}_i - t_0 s(\hat{\beta}_i) \leq \beta \leq \hat{\beta}_i + t_0 s(\hat{\beta}_i) \;.$$

Ao nível de significância de 0,05 com 4 graus de liberdade , o t tabelado é 2,132 e os intervalos de confiança para β_1 e β_2 são respectivamente.

$$0{,}84387 \leq \beta_1 \leq 1{,}74217$$

$$-0{,}31596 \leq \beta_2 \leq 0{,}27170$$

Ao nível de significância de 0,01 com 4 graus de liberdade, o t tabelado é 3,747 e os intervalos de confiança para β_1 e β_2 são respectivamente.

$$0{,}50364 \leq \beta_1 \leq 2{,}08240$$
$$-0{,}52380 \leq \beta_2 \leq 0{,}43528$$

7. DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

O que se pretende neste ítem é discutir os resultados obtidos na aplicação dos modelos tipo Cobb-Douglas, bem como, apresentar algumas conclusões, face ao processo , para inferências aqui apresentadas.

7.1. Sob a hipótese de homocedasticia

Para $Y = X^{\beta}$

A estimativa do parâmetro exigiu três iterações e o coeficiente de determinação explicou 97,93% das variações. Os testes t e F aos níveis de significância de 0,05 rejeitaram as hipóteses de nulidade enquanto que a 0,01 foram não significativos.

Para $Y = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2}$

As estimativas dos parâmetros β_1 e β_2 exigiram três iterações e o coeficiente de determinação explicou 99,97% das variações. Os testes t e F aos níveis de significância de 0,05 e 0,01 respectivamente rejeitaram as hipóteses de nulidade.

Para $Y = aX^{\beta}$

As estimativas dos parâmetros a e β exigiram onze iterações e o coeficiente de determinação explicou 99,35% das variações. Os testes t e F ao nível de significância de 0,01 rejeitaram as hipóteses de nulidade.

Para $Y = aX_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2}$

As estimativas dos parâmetros a, β_1 e β_2 exigiram quatro iterações e o coeficiente de determinação explicou 99,92% das variações. O teste t ao nível de significância de 0,01 foi significativo para a e a 0,05 foi não significativo para β_1 e β_2. O teste F foi significativo a 0,01.

Como se depreende desses resultados além das variações terem sido explicadas em pelo menos 97% a maioria dos testes de hipóteses, rejeitaram as hipóteses de nulidade.

7.2. Sob a hipōtese de heterocedasticia

Para $Y = X^{\beta}$

A estimativa do parâmetro exigiu cinco iterações e o coeficiente de determinação explicou 99,76% das variações. Os testes t ao nível de significância de 0,05, não rejeitou a hipótese de nulidade, entretanto, o teste F a 0,01 foi significativo.

Para $Y = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2}$

As estimativas dos parâmetros exigiram três iterações e o coeficiente de determinação explicou 89,85% das variações. O teste F foi significativo ao nível de 0,01, enquanto que o teste t só registrou significância para o parâmetro β_1 a esse nível de significância.

Esses resultados explicam pelo menos 89% das variações, entretanto, são menos confortáveis que os submetidos a primeira hipótese.

7.3. Conclusões gerais

Face aos resultados obtidos concluí-se que:

i. o método utilizado apresentou boas soluções para as duas hipóteses estabelecidas, a homocedasticia e a heterocedasticia, haja vista que se explicou pelo menos 89% das variações, bem como a significância ocorreu na maioria dos parâmetros ;

ii. o uso da fórmula de Taylor combinada com o método de mínimos quadrados resultou numa maior simplicidade, em relação aos métodos descritos na revisão bibliográfica, para as estimativas por pontos e por intervalos. Métodos como o de Newton, Gauss-Newton e outros, obtêm, primeiramente as equações normais que se apresentam com a não-linearidade nos parâmetros, para em seguida obter a linearidade através da fórmula de Taylor, que é aplicada em cada uma dessas equações. O método proposto é, portanto, mais simples.

iii. nos ajustamentos dos modelos matemáticos foram necessárias, poucas iterações o que nos garante terem sido ótimas as estimativas iniciais.

iv. as variâncias dos parâmetros tipo β em relação as do tipo a apresentaram pequena variabilidade, caracterizando uma maior aderência para as elasticidades de produção em relação aos insumos adotados no processo produtivo. Essa conclusão é muito importante para decisões econômicas, pois, o conhecimento das elasticidades de produção dos fatores de produção, permite um prévio conhecimento da estimativa do retorno relativo do produto em decorrência do acréscimo de um dos insumos. Essa informação permite o cálculo da rentabilidade da utilização do capital.

8. BIBLIOGRAFIA

AITKIN, M. e B. FRANCIS, 1982. Interative Regression Modelling. Biometrics (s.l.) 38: 511-516.

ANDER, H. F. , 1977. Constrained Nonlinear Estimation Applied to Earth Resources Satellite Data. Texas A. M. University. 78 pp. (Ph. D. Thesis).

BARNES, J. G. P. , 1965. An algorithm for solving non-linear equations based on the secant method. The Computer Journal (s.l.) 8: 66-72.

BATES, D.M., 1978. Curvature Measures of Nonlinearity. Canada University of Kingston. 105 pp. (Ph. D. Thesis).

BEARLE, E. M. L., 1960. Confidence region in nom-linear estimation. Journal Roy Statistics Society. Teddington 8-22: 41-76.

BEARG, L., 1981. On Gauss-Markov processes as models of growth. Biometrical J. (s.l.) 23: 477-486.

BERGSTROM, A. R., 1976. Statistical inference in continuous time economics models . Amesterdam , North-Holland. 333pp.

BERKEY, S. C., 1982. Bayesian Approach for a Nonlinear Growth Model. Biometrics (s.l.) 38: 953-961.

BETRO, B. e B. BACCHELLT, 1980. A statistical analysis of earthquakes occurences in Italy. Revista Di Statistical Applicata. Italy. 13: 21-30.

BIBBY, J. e H. TOOTENBURG, 1977. Prediction and improved estimation in linear models. Chichester, J. Wiley. 188 pp.

BOX, G. E. P., 1964. Some notes on non-linear estimation. Unpublished, reissued as Technical. Department of Statistics, University of Wisconsin , Madison Wisconsin. Report nº 25.

BOX, G. E. P. e H. LUCAS, 1959. Design of experiments in non-linear situation. Biometrika. Princeton. 46: 77-90.

BUNKE, H., 1981. A note on parameter estimation in inadequate nonlinear regression models. Mathematische Operations Forschung und Statistik (s.l). 12: 7-11.

BURGUETE, J. F., 1980. Asymptotic Theory of Instrumental Variables In Non-linear Regression. North Caroline State, University at Raleigh , 85 pp. (Ph. D. Thesis).

CRIST, C. F., 1966. Econometric models and methods. New York, J. Wiley. 705 pp.

CURRY, H. B., 1944. The method of steepest descent for non-linear minimization problems. Quart. Appl. Math. Frankford. 2: 258-261.

DIPPO, C. S., 1981. Variance Estimation For Nonlinear Estimators Based Upon Stratified Samples From Finite Populations. Washington. The George Washington University. 305 pp. (Ph. D. Thesis).

DIXON, J. W. e F. J. MASSEY Jr., 1951. _Introduction to Statistical Analysis_. Nova York, Mc Graw-Hill, 370 pp.

DRAPER , N. R. e H. SMITH, 1966. _Applied Regression Analysis_. New York. John Wiley e Sons Inc. 407 pp.

DRAPER , N. R. e J. A. JOHN, 1981. Influential observations and outliers in regression. _Tchnometrics._ (s.l.) _23_: 21-26 .

DRAPER , N. R. e H. SMITH, 1981. Review of applied regression analysis. _Biometrics._ (s.l.) _37_: 863.

FIGUEIRÔA, M. L., 1980. A função de "Cobb-Douglas", a partir do modelo matemático com erro aditivo. Piracicaba, ESALQ/USP. 55 pp. (Dissertação de Mestrado).

FISCHER, F. M., 1961. Identifiability critéria in nonlinear systems. _Econometrica_ (s.l.) _29(4)_: 574-590.

FISCHER, F. M., 1965. Identifiability critéria in nonlinear systems: a further note. _Econometrics._ (s.l.) _23(1)_:197-205.

FOX, T. et alii, 1981. Correction to jack knifing in non-linear regression. <u>Technometrics</u>. (s.l.) <u>22</u>: 29-33.

FREUND, R. J. e P. D. MINTON , 1979. <u>Regression methods: a food for data analysis.</u> New York, M. Dekker. 261 pp.

FRIESE, C. L., 1978. A Nonlinear Regression Algorithm. Based On Predictions Generated By An Eigensystem. Missouri. University of Missouri. Rolla. 111 pp. (Ph. D. Thesis).

FRYDMAN, R., 1980. A proof of the consistency of maximum likelihood estimators of nonlinear regressions models with autocorrelated erros. <u>Econometrica</u>. (s.l.) 48: 853-860.

GAJJALA, R. M., 1982. A Critique of Linear and Nonlinear Regression Problems with Four Different Minimization Criteria. Case Western Reserve University. 112 pp. (Ph. D. Thesis).

GLASBEY, C. A., 1980. Nonlinear Regression with Autor-regressive Time Series Errors. <u>Biometrics</u> . Edinburgh. <u>36</u>:135-140.

GIRÃO, J. A., 1965. A Função de Produção de Cobb-Douglas e a Análise Inter-Regional da Produção Agrícola. Lisboa, Fundação Collouste. Gulben Kian. Centro de Estudos de Economia Agrária , 119 pp.

GUSEO, R., 1981. Confidence regions for the parameters in nonlinear regression: a preliminary survey. In: European Young Statisticians Meeting, Paduva. Procedings : 95-102.

GUTTMAN, I. e D. A. MEETER, 1964. Use of transformations on parameters in non-linear theory, I and transformations to accelerate convergence in non-linear least squares. Technical . Wisconsin. Department of Statistics, University of Wisconsin, Madson , Wisconsin. Report nº 37.

GUTTMAN, I. e D. A. MEETER, 1965. On Beale's measures of non-linearity. Technometrics . Wisconsin. 7: 623-637.

HALE, F. TRUTTER, 1957. Theory of least Squares. English translation. Princeton University. Statistical Techniques Research Group. Princeton. Tecnical Report nº 5.

HALPERIN, M., 1962. Confidence interval estimation in non-linear regression. Program 360. Applied Mathematics Department SRRC-RR , 62-68, Sperry-Rand Research Center.

HAMILTON, D. C., 1980. Experimental Design For Nonlinear Regression Models. Canadá , Queen's University at Kingston 187 pp. (Ph. D. Thesis).

HARTLEY, H. O., 1948. The estimation of non-linear parameters by internal least squares. Biometrika. (s.l.) 35:32 - 45.

HARTLEY, H. O., 1961. The modified Gauss-Newton method for the fitting of non-linear regression functions by least aquares. Technometrics. Iowa. 3: 269-280.

HARTLEY, H. O., 1964. Exact confidence regions for the parameters in non-linear regressions laws. Biometrika. (s.l.) 51: 347 - 353.

HARTLEY, H. O. e A. BOOKER, 1965. Non-linear least squares estimations. Annals Math. Statist. Iowa . 36: 638-650.

HOFFMANN, R. e S. VIEIRA, 1977. Análise de Regressão. Uma Introdução à Econometria. São Paulo, HUCITEC-EDUSP 339 pp.

HUNTER, W. G., 1963. Generation and analysis of data in non-linear situations. Wisconsin. University of Wisconsin, Madison. 202 pp. (Ph. D. Thesis).

JACQUEZ, J. A. e M. NORUSIS, 1973. Sampling Experiments on the Estimation of Parameters in Heteriscedastic Linear Regression. Biometrics. (s.l.) 29: 771-779.

JOHNSON, P. M., 1977. A Two-step Procedure For Analyzing Fixed And Randon Effects Nonlinear Models And Nonlinear Errors-In-Variable Models. Kansas. Kansas State University. 105 pp. (Ph. D. Thesis).

KATZ. D. e S. P. AZEN e A. SCHUMITZKY, 1981. Bayesian Approach to the Analysis of Nonlinear Models: Implementation and Evaluation. Biometrics. Los Angeles. 37: 137-142.

KENDALL, M. e STUART, A., 1960. The Advanced Theory of Statistics. 4ª edição, Londres, Charles Griffins. 748 pp.

KOEPPER, F. e C. HAMAN, 1980. A program for non-linear regression analysis to be used on desketop computers, Computer Programs in Biomedicine. (s.l.) 12: 121-128.

KREUSER, J. L., 1979. Superlinearly Globally Convergent Algorithms For Nonlinear Programming Via Sequencial Linear Programs. Wisconsin. University of Wisconsin. Madison 211 pp. (Ph. D. Thesis).

LACHIN, J. M., 1973. On a stepwise procedure for two populations Bayes Decision Rules using discrete variables. Biometrics. (s.l.) 29: 551-564.

LEVEMBRTG, K., 1944. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. Quart. Appl. Math. Chicago. 2: 164-168.

LU, AN-LING A., 1981. The Estimation of Implicit Functions of Parameters in Nonlinear Regression Models. Kentucky University of Kentucky. 134 pp. (Ph. D. Thesis).

MALINVAUD, E., 1970. Statistical methods of econometrics. 2ª ed. Amesterdam, North-Holland. 744 -pp.

MARQUARDT, D. W., 1963. An algorithm for least squares estimations of non-linear parameters. Journal Soc. In. Appl. Math. Delaware 2: 431-441.

MATLOFF, N. S., 1981. Use of regression function for improved estimations of means. Biometrika. (s.l.) 68: 68-79.

Mc MILLAN, I. e Ch. E. MINDER, 1981. Parameter estimation for the one compartment for model. Computers and Biomedical Research. (s.l.) 14: 232-239.

MEETER, D. A., 1964. Problems in the analysis of non-linear models by least squares. Wisconsin. University of Wisconsin, Madison. 78 pp. (Ph. D. Thesis).

MOORE, R., 1962. On the least squares estimation of parameters in non-linear models. Okla homa. Okla homa State University. 55pp. (Ph. D. Thesis).

NEIDERT, G. L., 1980. Comparison of the Five Point Linear--Plateau Family And Other Estimation Techniques On Selected Non-linear Systems. Kentueky. University of Kentucky. 157 pp. (Ph. D. Thesis).

NERLOVE, M., 1965. Estimation and indentification of Cobb--Douglas production functions. Chicago, North-Holland, 187 pp.

PEDUZZI, P. N. et alii., 1980. A Stepwise Variable Selection Procedure for Nonlinear Regression Models. Biometrics . Connecticut. 36: 511-516.

RAMSDELL, J. D., 1982. Structural Analysis of Large Sparse Systems of Nonlinear Equations with Applications to Fire Modeling. Harvard. Harvard University. 93pp. (Ph. D. The sis).

REED, J. W., 1980. Optimum Age-Specific Harvesting in a Non--linear Population Model. Biometrics. Canadã. 36: 579 - - 593.

ROSEN, J. B., 1960. The Gradient Projection Method For Nonli near Programming. Part I. Linear Constraints. J.Soc.Ind. Appl. Marth. California. 8: 181-217.

ROSEN, J. B., 1961. The Gradient Projection Method For Nonli near Programming. Part II. Linear Constraints. J. Soc. Ind. Appl. Math. California. 9: 514-532 .

RUSKIN, D. M., 1978. M-Estimates of Nonlinear Regression Parameters And Their Jackknife Constructed Confidence Intervals. Los Angels. University of California, 79 pp. (Ph. D. Thesis).

SAATY, T. L. and J. BRAM. 1964. Nonlinear Mathematics. New York. Mc Graw-Hill Book Co. 381 pp.

SHAH, B. K., 1979. On the Method of Internal Least Squares. Biometrics. New York. 35: 497-502.

SOUZA, G. S., 1979. Statistical Inference In Nonlinear Models: A Pseudo Likelihood Approach. North Carolina.North Carolina State University at Raleigh, 67 pp. (Ph. D. Thesis).

SPANG, H. A., 1962. A review of minimization techniques for nonlinear functions. Society for Industrial and Applied Mathematics Review. (s.l.) 4: 343-365.

THEIL, H., 1971. Principles of Econometrics. New York, J. Wiley. 736 pp.

THEILL, H., 1978. Introduction to econometrics. Englewood Cliffs, Pretice-Hall. 747 pp.

TISHLER, A. e I. ZANG, 1981. A maninum likelihood method for piecewise regression models with a continuos dependent variable. Applied Statistical (s.l.). 30: 116-124.

TISHLER, A, e I. ZANG, 1981. A new maximim likelihood algorithm for piecewise regression. JASA (s.l.) 76: 580-587.

WHITE, H. e G. M. Mac DONALD, 1981 a . Consequences and detection of misspecified nonlinear regression models. JASA (s.l.) 76: 419-433.

WHITE, H. e G. M. Mac DONALD, 1981 b . Correction to some large-sample tests for nonormality in the linear regression model. JASA (s.l.) 76: 1022-1023.

WILLIANS, E.J., 1962. Exact fiducial distribution in non-linear estimation. J. Roy. Statistics Soc. Cambersa. B-24 : 125-139.

9. APÊNDICE

APÊNDICE 1

Cálculos auxiliares nas iterações do modelo 5.1. cujo valor inicial foi 0,28295.

1ª iteração

X^{β_0}	$Y^{**}=Y-X^{\beta_0}$	$Y^{**}X^{\beta_0}\ln X$	$X^{2\beta_0}$	$X^{2\beta_0}(\ln X)^2$
1,00000	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000
1,57679	-0,37679	-0,95620	2,48627	6,44019
2,48626	0,36374	2,91100	6,18149	64,04759
		1,95480		70,48778

2ª iteração

X^{β_1}	$Y^{**}=Y-X^{\beta_1}$	$Y^{**}X^{\beta_1}\ln X$	$X^{2\beta_1}$	$X^{2\beta_1}(\ln X)^2$
1,00000	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000
1,64875	-0,44875	-1,19079	2,71838	7,04142
2,71839	0,13161	1,15161	7,38964	76,56546
		-0,03918		83,60688

3ª iteração

X^{β_2}	$Y^{**}=Y-X^{\beta_2}$	$Y^{**}X^{\beta_2}\ln X$	$X^{2\beta_2}$	$X^{2\beta_2}(\ln X)^2$
1,00000	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000
1,64751	-0,44751	-1,18660	2,71429	7,03083
2,71428	0,13572	1,18578	7,36732	76,33420
		-0,00082		83,36503

APÊNDICE 2

Cálculos auxiliares nas iterações do modelo 5.2. cujos valores iniciais foram $\hat{\beta}_{10} = 0{,}81439$ e $\hat{\beta}_{20} = 0{,}17788$.

1ª iteração

$c_{12}=X_1^{\beta_{20}}X_2^{\beta_{20}}$	$\overset{**}{Y}=Y-c_{12}$	$d_{1i}=c_{12}\ln X_{1i}$	$d_{2i}=c_{12}\ln X_{2i}$
1,21582	-0,31582	0,00000	1,33571
4,57143	3,15857	6,33735	10,04446
17,18835	-4,97835	47,65623	56,65000
64,62733	14,28267	268,77751	284,00152
242,95548	-0,03548	1347,45306	1334,78910
913,65062	-86,50062	6332,94351	6022,48679

$d_{1i}\,d_{2i}$	d_{1i}^2	d_{2i}^2
0,00000	0,00000	1,78412
63,65526	40,16201	100,89118
2699,72543	2271,11626	3209,22250
76333,22138	72241,34988	80656,86336
1798565,657	1815629,749	1781661,941
38140068,63	40106173,50	36270347,14
40017730,89	41996355,88	38135977,84

$d_{1i}\overset{**}{Y}$	$d_{2i}\overset{**}{Y}$
0,00000	-0,42184
20,01696	31,72613
-237,24939	-282,02353
3838,86048	4056,29999
-47,80763	-47,35832
-547803,5400	-520948,8413
-544229,7196	-517190,6189

2ª iteração

$c_{12}=X_1^{\beta_{11}}X_2^{\beta_{21}}$	$\overset{**}{Y}=Y-c_{12}$	$d_{1_i}=c_{12}\ln X_{1_i}$	$d_{2_i}=c_{12}\ln X_{2_i}$
1,85180	-0,95180	0,00000	2,03441
6,27986	1,45014	8,70573	13,79826
21,29641	-9,08641	59,04619	70,18949
72,22092	6,68908	300,35836	317,37116
224,91734	-1,95734	1358,11011	1345,34600
830,56963	-3,41963	5757,06997	5474,84401

$d_{1_i}d_{2_i}$	$d_{1_i}^2$	$d_{2_i}^2$
0,00000	0,00000	4,13882
120,12393	75,78973	190,39198
4144,42196	3486,45255	4926,56451
95325,08113	90215,14442	100724,4532
1827128,004	1844463,071	1809955,860
31519060,04	33143854,64	29973916,93
33445777,67	35082095,10	31889718,34

$d_{1_i}\overset{**}{Y}$	$d_{2_i}\overset{**}{Y}$
0,00000	-1,93635
12,62453	20,00941
-536,51789	-637,77048
2009,12110	2122,92108
-2658,28324	-2633,29954
-19687,04918	-18721,94082
-20860,10469	-19852,01671

3ª iteração

$c_{12}=X_1^{\beta_{12}}X_2^{\beta_{22}}$	$\overset{**}{Y}=Y-c_{12}$	$d_{1_i}=c_{12}\ln X_{1_i}$	$d_{2_i}=c_{12}\ln X_{2_i}$
1,87003	-0,97003	0,00000	2,05444
6,32378	1,40622	8,76662	13,89476
21,38478	-9,17478	59,29120	70,48075
72,31567	6,59433	300,75242	317,78753
244,54572	-1,58572	1356,04941	1343,30467
826,96617	0,18383	5732,09269	5451,09118

$d_{1_i}\ d_{2_i}$	$d_{1_i}^2$	$d_{2_i}^2$
0,00000	0,00000	4,22072
121,81008	76,85363	193,06436
4178,88824	3515,44640	4967,53612
95575,36869	90452,01814	100988,9142
1821587,505	1838870,002	1804467,436
31246159,91	32856886,61	29714395,05
33167623,48	34789800,93	31625016,22

$d_{1_i}\overset{**}{Y}$	$d_{2_i}\overset{**}{Y}$
0,00000	-1,99287
12,32780	19,53909
-543,98372	-646,64538
1983,26071	2095,59584
-2150,31467	-2130,10508
1053,73060	1002,07409
355,02072	338,46570

APÊNDICE 3

Cálculos auxiliares nas iterações do modelo 5.3. cujos valores iniciais foram $\hat{\alpha}_0 = 65,63703$ e $\hat{\beta}_0 = 0,26808$.

1ª iteração

$c_{1_i}=X_{1_i}^{\beta_0}$	$d_{1_i}=\hat{\alpha}_0 c_{1_i} \ln X_{1_i}$	$d^2_{1_i}$	$c_{1_i}d_{1_i}$	$c^2_{1_i}$
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000
1,45011	131,94876	17410,47527	191,34022	2,10282
2,10281	382,67880	146443,0640	804,70081	4,42181
3,04930	832,38797	692869,7326	2538,20064	9,29823
4,42182	1609,40530	2590185,420	7116,50054	19,55249
6,41211	2917,26143	8510414,251	18705,80119	41,11515
		11957322,942	29356,54340	77,49050

$\alpha_0 X_1^{\beta_0}$	$Y^*_* = Y-\alpha_0 X_1^{\beta_0}$	$c_{1_i}Y^*_*$	$d_{1_i}Y^*_*$
65,63703	-8,15703	-8,15703	0,00000
95,18091	14,47909	20,99627	1910,49797
138,02220	8,19780	17,23842	3137,12427
200,14700	-8,74700	-26,67223	-7280,89757
290,23513	7,73487	34,20220	12448,54077
420,87186	-15,95186	-102,28508	-46535,74591
		-64,67745	-36320,48047

2ª iteração

$c_{1i}=X_{1i}^{\hat{\beta}_1}$	$d_{1i}=\alpha_1 c_{1i}\ln X_{1i}$	d_{1i}^2	$c_{1i}d_{1i}$	c_{1i}^2
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000
1,42131	138,00587	19045,62015	196,14912	2,02012
2,02012	392,29782	153897,5796	792,48867	4,08088
2,87121	836,36324	699503,4692	2401,37450	8,24385
4,08088	1584,97546	2512147,209	6468,09466	16,65358
5,80019	2815,92415	7929428,819	16332,89510	33,64220
		11314022,696	26191,00205	65,64063

$\alpha_1 X_1^{\hat{\beta}_1}$	$Y_*^*=Y-\alpha_1 X_1^{\hat{\beta}_1}$	$c_{1i}Y_*^*$	$d_{1i}Y_*^*$
70,04115	-12,56115	-12,56115	0,00000
99,55019	10,10981	14,36917	1395,21312
141,49153	4,72847	9,55208	1854,96847
201,10285	-9,70285	-27,85892	-8115,10706
285,82953	12,14047	49,54380	19242,34702
406,25198	-1,33198	-7,72574	-3750,75465
		25,31924	10626,66690

3ª iteração

$c_{1_i} = X_{1i}^{\beta_2}$	$d_{1_i} = \alpha_2 c_{1_i} \ln X_{1_i}$	$d_{1_i}^2$	$c_{1_i} d_{1_i}$	c_{1i}^2
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000
1,42348	138,54134	19193,70289	197,21083	2,02630
2,02629	394,42106	155567,9726	799,21145	4,10585
2,88438	842,17443	709257,7705	2429,15108	8,31965
4,10585	1598,42215	2554953,370	6562,88158	16,85800
5,84458	2844,14807	8089178,244	16622,85093	34,15912
		11528151,058	26611,30587	66,46892

$\alpha X_{1i}^{\beta_2}$	$Y_*^* = Y - aX_{1i}^{\beta_2}$	$c_{1_i} Y_*^*$	$d_{1_i} Y_*^*$
70,20584	-12,72584	-12,72584	0,00000
99,93646	9,72354	13,84126	1347,11226
142,25733	3,96267	8,02952	1562,96050
202,50015	-11,10015	-32,01705	-9348,26250
288,25446	9,71554	39,89055	15529,53434
410,32383	-5,40383	-31,58312	-15369,29267
		-14,56468	-6277,94807

4ª iteração

$c_{1_i}=X_{1_i}^{\beta_3}$	$d_{1_i}=\alpha_3 c_{1_i}\ln X_{1_i}$	$d_{1_i}^2$	$c_{1_i}d_{1_i}$	$c_{1_i}^2$
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000
1,42306	138,49723	19181,48272	197,08987	2,02510
2,02511	394,18069	155378,4164	798,25926	4,10107
2,88186	841,41622	707981,2553	2424,84375	8,30512
4,10107	1596,51823	2548870,459	6547,43302	16,81878
5,83608	2839,93345	8065222,000	16574,07881	34,05983
		11496633,612	26541,70471	66,30990

$\alpha X_{1_i}^{\beta_3}$	$Y_*^*=Y-\alpha\ X_{1_i}^{\beta_3}$	$c_{1_i}Y_*^*$	$d_{1_i}Y_*^*$
70,20392	-12,72392	-12,72392	0,00000
99,90463	9,75537	13,88248	1351,09172
142,17063	4,04937	8,20042	1596,18346
202,31783	-10,91783	-31,46366	-9186,43925
287,91112	10,05888	41,25217	16059,18529
409,71579	-4,79579	-27,98861	-13619,72444
		-8,84112	-3797,70322

5ª iteração

$c_{1i}=X_{1i}^{\hat{\beta}_4}$	$d_{1i}=\alpha c_{1i}\ln X_1$	d_{1i}^2	$c_{1i}\,d_{1i}$	c_{1i}^2
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000
1,42285	138,45802	19170,62330	197,00499	2,02450
2,02449	394,00902	155243,1078	797,66732	4.09856
2,88054	840,92152	707149,0028	2422,30808	8,29751
4,09857	1595,33629	2545097,878	6538,59746	16,79828
5,83163	2837,39826	8050828,886	16546,65681	34,00791
		11477489,496	26502,23466	66,22676

$\hat{\alpha}_4 X_{1i}^{\beta_4}$	$Y_*^*=Y-\alpha X_{1i}^{\beta_4}$	$c_{1i}Y_*^*$	$d_{1i}\ Y_*^*$
70,19475	-12,71475	-12,71475	0,00000
99,87635	9,78365	13,92067	1354,62481
142,10872	4,11128	8,32325	1619,88140
202,19888	-10,79888	-31,10661	-9081,01058
287,69797	10,27203	42,10063	16387,34223
409,35004	-4,43004	-25,83435	-12569,78779
		-5,31116	-2288,94993

6ª iteração

$c_{1_i} = X_{1i}^{\beta_6}$	$d_{1_i} = \alpha c_{1_i} \ln X_{1_i}$	$d_{1_i}^2$	$c_{1_i} d_{1_i}$	$c_{1_i}^2$
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000
1,42269	138,43740	19164,91372	196,95350	2,02405
2,02404	393,90665	155162,4489	797,28282	4,09674
2,87958	840,60981	706624,8527	2420,60320	8,29198
4,09675	1594,56808	2542647,362	6532,54678	16,78336
5,82840	2835,71745	8041293,456	16527,69559	33,97025
		11464893,031	26475,08189	66,16638

$\hat{\alpha}_6 X_{1i}^{\hat{\beta}_6}$	$Y_*^* = Y - \alpha_6 X_{1_i}$	$c_{1_i} Y_*^*$	$d_{1_i} Y_*^*$
70,19208	-12,71208	-12,71208	0,00000
99,86148	9,79852	13,94026	1356,48163
142,07179	4,14821	8,39614	1634,00750
202,12393	-10,72393	-30,88041	-9014,64076
287,55943	10,41057	42,64950	16600,36262
409,10755	-4,18755	-24,40672	-11874,70861
		-3,01331	-1298,49762

7ª iteração

$c_{1i}=X_{1i}^{\beta_7}$	$d_{1i}=\alpha c_{1i}\ln X_{1i}$	d_{1i}^2	$c_{1i}d_{1i}$	c_{1i}^2
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000
1,42261	138,42612	19161,79070	196,92638	2,02382
2,02382	393,85270	155119,9493	797,08697	4,09585
2,87910	840,44807	706352,9584	2419,73404	8,28922
4,09584	1594,17287	2541387,139	6529,47701	16,77591
5,82678	2834,85742	8036416,592	16518,09052	33,95137
		11458438,428	26461,31492	66,13617

$\alpha_7 X_{1i}^{\beta_7}$	$Y_*^*=Y-\hat{\alpha}_7 X_{1i}^{\beta_7}$	$c_{1i}\ Y_*^*$	$d_{1i}\ Y_*^*$
70,19025	-12,71025	-12,71025	0,00000
99,85334	9,80666	13,95105	1357,49789
142,05234	4,16766	8,43459	1641,44414
202,08504	-10,68504	-30,76330	-8980,22125
287,48816	10,48184	42,93194	16709,86496
408,98347	-4,06347	-23,67695	-11519,35808
		-1,83292	-790,77234

8ª iteração

$c_{1i}=X_{1i}^{\beta_8}$	$d_{1i}=\alpha c_{1i}\ln X_{1i}$	d_{1i}^2	$c_{1i}d_{1i}$	c_{1i}^2
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000
1,42255	138,41884	19159,77527	196,90772	2,02365
2,02365	393,81562	155090,7426	796,94498	4,09516
2,87874	840,33400	706161,2316	2419,10310	8,28714
4,09516	1593,89021	2504486,002	6527,23543	16,77034
5,82557	2834,23689	8032898,749	16511,04540	33,93727
		11453796,499	26451,23663	66,11356

$\hat{\alpha}_8 X_{1i}^{\beta_8}$	$Y_*^*=Y-\hat{\alpha}_8 X_{1i}^{\hat{\beta}_8}$	$c_{1i}\,Y_*^*$	$d_{1i}Y_*^*$
70,18948	-12,70948	-12,70948	0,00000
99,84809	9,81191	13,95793	1358,15320
142,03896	4,18104	8,46096	1646,55886
202,05761	-10,65761	-30,68049	-8955,95204
287,43718	10,53282	43,13358	16788,15868
408,89395	-3,97395	-23,15052	-11263,11569
		-0,98802	-426,19699

9ª iteração

$c_{1i}=X_{1i}^{\beta_9}$	$d_{1i}=\alpha c_{1i}\ln X_{1i}$	d_{1i}^2	$c_{1i}d_{1i}$	c_{1i}^2
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000
1,42251	138,41406	19158,45201	196,89538	2,02353
2,02354	393,79109	155071,4226	796,85202	4,09471
2,87851	840,25835	706034,0947	2418,69206	8,28582
4,09471	1593,70255	2539887,818	6525,74977	16,76665
5,82477	2833,82463	8030562,034	16506,37669	33,92795
		11450713,820	26444,56592	66,09866

$\hat{\alpha}_9 X_{1i}^{\beta_9}$	$Y_*^* = Y - \hat{\alpha}_9 X_{1i}^{\beta_9}$	$c_{1i} Y_*^*$	$d_{1i} Y_*^*$
70,18900	-12,70900	-12,70900	0,00000
99,84464	9,81536	13,96245	1358,58383
142,03011	4,18989	8,47841	1649,94135
202,03943	-10,63943	-30,62571	-8939,86990
287,40335	10,56665	43,26737	16840,09705
408,83447	-3,91447	-22,80089	-11092,92150
		-0,42737	-184,16917

10ª iteração

$c_{1i}=X_{1i}^{\beta_{10}}$	$d_{1i}=\alpha c_{1i}\ln X_{1i}$	d_{1i}^2	$c_{1i}d_{1i}$	c_{1i}^2
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000
1,42249	138,41155	19157,75662	196,88905	2,02348
2,02348	393,77849	155061,5010	796,80290	4,09447
2,87839	840,21982	705969,3439	2418,48033	8,28513
4,09448	1593,60737	2539584,435	6524,99350	16,76477
5,82436	2833,61610	8029380,213	16504,00027	33,92317
		11449153,248	26441,16605	66,09102

$\hat{\alpha}_{10}X_{1i}^{\beta_{10}}$	$Y_*^*=Y-\hat{\alpha}_{10}X_{1i}^{\beta_{10}}$	$c_{1i}Y_*^*$	$d_{1i}Y_*^*$
70,18870	-12,70870	-12,70870	0,00000
99,84283	9,81717	13,96483	1358,80972
142,02557	4,19443	8,48735	1651,67631
202,03016	-10,63016	-30,59775	-8931,67112
287,38618	10,58382	43,33524	16866,45355
408,80439	-3,88439	-22,62409	-11006,87004
		-0,14312	-61,60158

11ª iteração

$c_{1_j}=X_{1_j}^{\beta_{11}}$	$d_{1_j}=\alpha c_{1_j}\ln X_{1_j}$	$d_{1_j}^2$	$c_{1_j}d_{1_j}$	$c_{1_j}^2$
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000
1,42249	138,41129	19157,68565	196,88868	2,02348
2,02348	393,77776	155060,9266	796,80142	4,09447
2,87839	840,21826	705966,7288	2418,47584	8,28513
4,09448	1593,60441	2539575,028	6524,98138	16,76477
5,82436	2833,61085	8029350,470	16503,96969	33,92317
		11449110,837	26441,11701	66,09102

$\alpha_{11}X_{1_j}^{\beta_{11}}$	$Y_*^*=Y-\alpha_{11}X_{1_j}^{\beta_{11}}$	$c_{1_j}Y_*^*$	$d_{1_j}Y_*^*$
70,18857	-12,70857	-12,70857	0,00000
99,84264	9,81736	13,96510	1358,83346
142,02531	4,19469	8,48787	1651,77563
202,02979	-10,62979	-30,59668	-8931,34366
287,38565	10,58435	43,33741	16867,26684
408,80363	-3,88363	-22,61966	-11004,69611
		-0,13453	-58,16384

Cálculos auxiliares nas iterações do modelo. 5.4 cujos valores iniciais foram $\hat{a}_0 = 71,24672$; $\hat{\beta}_{10} = 0,28912$ e $\hat{\beta}_{20} = 0,22025$.

1ª iteração

$d_{0_i} = X_1^{\beta_{10}} X_2^{\beta_{20}}$	$X = \hat{\alpha}_0 d_{0_i}$	$d_{1_i} = C_{12} \ln X_1$	$d_{2_i} = c_{12} \ln X_2$	$d^2_{0_i}$
0,36052	25,68587	-59,14390	-41,33981	0,12997
0,57700	41,10936	-49,49455	-37,66813	0,33293
0,73131	52,10344	-36,11535	-26,61577	0,53481
0,85876	61,18383	-21,82274	-13,65278	0,73747
0,97000	69,10932	-7,28139	0,00000	0,94090
1,07006	76,23827	7,26628	13,89988	1,14503
				3,82112

d^2_{1i}	d^2_{2i}	$d_{0_i} d_{1_i}$	$d_{0_i} d_{2i}$
3498,00091	1708,97989	-21,32256	-14,90383
2449,71048	1418,88802	-28,55836	-21,73451
1304,31851	708,39921	-26,41152	-19,46438
476,23198	186,39840	-18,74050	-11,72446
53,01864	0,00000	-7,06295	0,00000
52,79883	193,20666	7,77536	14,87371
7834,07934	4215,87219	-94,32052	-52,95347

$d_{1_i} \; d_{2_i}$	$Y^* = Y - c_{12}$	$\Sigma d_{0_i} Y^*$	$\Sigma d_{1_i} Y^*$	$\Sigma d_{2_i} Y^*$
2444,99759	-0,03587	-0,01293	2,12149	1,48286
1864,36714	0,29064	0,16770	-14,38510	-10,94787
961,23785	0,09656	0,07062	-3,48730	-2,57002
297,94107	-0,91383	-0,78476	19,94227	12,47632
0,00000	-0.13932	-0,13514	1,01444	0,00000
101,00042	0,71173	0,76159	5,17163	9,89296
5669,54407		0,06708	10,37744	10,33426

2ª iteração

$d_{0_i}=X_1^{\hat{\beta}_{11}}X_2^{\hat{\beta}_{22}}$	$c_{12}=\hat{\alpha}_1 d_{0_i}$	$d_{1_i}=c_{12}\ln X_1$	$d_{2_i}=c_{12}\ln X_2$	$d_{0_i}^2$
0,36395	25,81566	-59,44275	-41,54870	0,13246
0,57694	40,92383	-49,27118	-37,49813	0,33286
0,73209	51,92927	-35,99463	-26,52680	0,53596
0,86154	61,11112	-21,79681	-13,63655	0,74225
0,97526	69,17782	-7,28861	0,00000	0,95113
1,07804	76,46817	7,28820	13,94180	1,16217
				3,85683

d_{1i}^2	d_{2i}^2	$d_{0i}\ d_{2i}$	$d_{0i}d_{2i}$
3533,44099	1726,29463	-21,63419	-15,12165
2427,64902	1406,10946	-28,42651	-21,63417
1295,61318	703,67121	-26,35131	-19,42001
475,10072	185,95556	-18,77882	-11,74843
53,12385	0,00000	-7,10829	0,00000
53,11779	194,37367	7,85697	15,02982
7838,04554	4216,40453	-94,44215	-52,89444

$d_{1_i}d_{2_i}$	$_*Y^* = Y - c_{12}$	$\Sigma d_{0_i}{}_*Y^*$	$\Sigma d_{1_i}{}_*Y^*$	$\Sigma d_{2_i}{}_*Y^*$
2469,76899	-0,16566	-0,06029	9,84729	6,88296
1847,57711	0,47617	0,27472	-23,46146	-17,85548
954,82235	0,27073	0,19820	-9,74483	-7,18160
297,23329	-0,84112	-0,72466	18,33373	11,46997
0,00000	-0,20782	-0,20268	1,51472	0,00000
101,61063	0,48183	0,51943	3,51167	6,71758
5671,01237		0,00472	0,00113	0,03342

3ª iteração

$d_{0_i}=X_{1i}^{\hat{\beta}_{21}}\ X_2^{\hat{\beta}_{22}}$	$c_{12}=\hat{\alpha}_2 d_{0_i}$	$d_{1_i}=c_{12}\ln X_1$	$d_{2_i}=c_{12}\ln x_2$	$d_{0_i}^2$
0,36395	25,81620	-59,44400	-41,54957	0,13256
0,57693	30,92374	-49,27107	-37,49804	0,33285
0,73209	51,92954	-35,99481	-26,52694	0,53596
0,86155	61,11202	-21,79712	-13,63675	0,74227
0,97528	69,17944	-7,28878	0,00000	0,95117
1,07807	76,47058	7,28842	13,94224	1,16223
				3,85694

$d_{1_i}^2$	$d_{2_i}^2$	$d_{0_i}\ d_{1_i}$	$d_{0_i}\ d_{2_i}$
3533,58914	1726,36677	-21,63464	-15,12197
2427,63834	1406,10300	-28,42596	-21,63374
1295,62635	703,67855	-26,35144	-19,42011
475,11444	185,96095	-18,77931	-11,74874
53,12631	0,00000	-7,10860	0,00000
53,12107	194,38606	7,85743	15,03071
7838,21564	4216,49532	-94,44253	-52,89385

$d_{1_i}\ d_{2_i}$	${}_*Y^* = Y - c_{12}$	$\Sigma d_{0_i *} Y^*$	$\Sigma d_{1_i *} Y^*$	$\Sigma d_{2_i *} Y^*$
2469,87264	-0,16620	-0,06049	9,87959	6,90554
1847,56855	0,47626	0,27477	-23,46584	-17,85882
954,83217	0,27046	0,19800	-9,73516	-7,17448
297,24188	-0,84202	-0,72544	18,35361	11,48242
0,00000	-0,20944	-0,20426	1,52656	0,00000
101,61690	0,47942	0,51685	3,49421	6,68419
5671,13214		-0,00058	0,05298	0,03885

4ª iteração

$d_i = X_{1i}^{\hat\beta_{13}} X_{2i}^{\hat\beta_{23}}$	$c_{12} = \hat\alpha_3 d_{0_i}$	$d_{1_i} = c_{12} \ln X_1$	$d_{2_i} = c_{12} \ln X_2$	$d_{0_i}^2$
0,36395	25,81578	-59,44302	-41,54890	0,13246
0,57693	40,92335	-49,27060	-37,49769	0,33285
0,73209	51,92926	-35,99462	-26,52680	0,53596
0,86154	61,11186	-21,79707	-13,63672	0,74225
0,97528	69,17942	-7,28878	0,00000	0,95117
1,07807	76,47070	7,28844	13,94226	1,16223
				3,85692

d_{1i}^2	d_{2i}^2	$d_{0i}\ d_{1i}$	$d_{0i}\ d_{2i}$
3533,47263	1726,31109	-21,63429	-15,12172
2427,59202	1406,07676	-28,42569	-21,63354
1295,61267	703,67112	-26,35130	-19,42001
475,11226	185,96013	-18,77905	-11,74858
53,12631	0,00000	-7,10860	0,00000
53,12136	194,38661	7,85745	15,03073
7838,03725	4216,40571	-94,44148	-52,89312

$d_{1_i}\ d_{2_i}$	$_*Y^* = Y - c_{12}$	$d_{0_i}\ _*Y^*$	$d_{1_i}\ _*Y^*$	$d_{2_i}\ _*Y^*$
2469,79209	-0,16578	-0,06034	9,85446	6,88798
1847,53369	0,47665	0,27499	-23,48483	-17,87327
954,82209	0,27074	0,19821	-9,74518	-7,18187
297,24054	-0,84186	-0,72530	18,35008	11,48021
0,00000	-0,20942	-0,20424	1,52642	0,00000
101,61733	0,47930	0,51672	3,49335	6,68253
5671,00573		0,00004	-0,00570	-0,00443

APÊNDICE 5

Cálculos auxiliares nas iterações do exemplo de aplicação 6.2.1 cujo valor inicial foi 0,28295.

1ª iteração ($\hat{\beta}_0 - 1 = 0,71705$)

$X^{\beta_0 - 1}$	$X^{\beta_0 - 1} \ln X$	$Z^* = Z - X^{\beta_0 - 1}$	$Z^* X^{\beta_0 - 1} \ln X$	$[X^{\beta_0 - 1} \ln X]^2$
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,31536	0,50755	-0,07536	-0,03825	0,25761
0,09945	0,32012	0,01455	0,00466	0,10248
			-0,03359	0,36009

2ª iteração ($\hat{\beta}_1 - 1 = -0,81033$)

$X^{\beta_1 - 1}$	$X^{\beta_1 - 1} \ln X$	$Z^* = Z - X^{\beta_1 - 1}$	$Z^* X^{\beta_1 - 1} \ln X$	$[X^{\beta_1 - 1} \ln X]^2$
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,27140	0,43680	-0,03140	-0,01372	0,19079
0,07366	0,23710	0,04034	0,00956	0,05622
			-0,00416	0,24701

3ª. iteração ($\hat{\beta}_2 - 1 = 0{,}82717$)

X^{β_2-1}	$X^{\beta_2-1}\ln X$	$Z^*=Z-X^{\beta_2-1}$	$Z^*X^{\beta_2-1}\ln X$	$[X^{\beta_2-1}\ln X]^2$
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,26414	0,42512	-0,02414	-0,01026	0,18073
0,06977	0,22458	0,04423	0,00993	0,05044
			-0,00033	0,23117

4ª. iteração ($\hat{\beta}_3 - 1 = -0{,}82860$)

X^{β_3-1}	$X^{\beta_3-1}\ln X$	$Z^*=Z-X^{\beta_3-1}$	$Z^*X^{\beta_3-1}\ln X$	$[X^{\beta_3-1}\ln X]^2$
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,26353	0,42414	-0,02353	-0,00998	0,17989
0,06945	0,22355	0,04455	0,00996	0,04997
			-0,00002	0,22986

5ª. iteração ($\hat{\beta}_4 - 1 = 0{,}82869$)

X^{β_4-1}	$X^{\beta_4-1}\ln X$	$Z^*=Z-X^{\beta_4-1}$	$Z^*X^{\beta_4-1}\ln X$	$[X^{\beta_4-1}\ln X]^2$
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,26349	0,42408	-0,02349	-0,00996	0,17984
0,06943	0,22348	0,04457	0,00996	0,04994
			0,00000	0,22978

APÊNDICE 6

Cálculos auxiliares nas iterações do exemplo 6.3.1 cujos valores iniciais são $\hat{\beta}_{10} = 0{,}81439$ e $\hat{\beta}_{20} = 0{,}17788$.

1ª iteração

$c_{12} = X_1^{\beta_{10}-1} X_2^{\beta_{20}-1}$	$d_{1_i} = c_{12} \ln X_1$	$d_{2_i} = c_{12} \ln X_2$	$Z^{**} = Z - c_{12}$
0,40527	0,00000	0,44524	-0,10527
0,12698	0,17604	0,27900	0,08774
0,03979	0,11032	0,13114	-0,01153
0,01247	0,05185	0,05480	0,00275
0,00391	0,02166	0,02148	0,00000
0,00122	0,00848	0,00804	-0,00001

d^2_{1i}	d^2_{2i}	$d_{1_i} d_{2_i}$	$d_{1_i} Z^{**}$	$d_{2_i} Z^{**}$
0,00000	0,19824	0,00000	0,00000	-0,04687
0,03099	0,07784	0,04912	0,01545	0,02448
0,01217	0,01720	0,01447	-0,00127	-0,00151
0,00269	0,00300	0,00284	0,00014	0,00015
0,00047	0,00046	0,00047	0,00000	0,00000
0,00007	0,00006	0,00007	0,00000	0,00000
0,04639	0,29680	0,06697	0,01432	-0,02375

2ª iteração

$c_{12}=X_1^{\beta_{11}-1}\ X_2^{\beta_{12}-1}$	$d_{1_i}=c_{12}\ln X_1$	$d_{2_i}=c_{12}\ln X_2$	$Z^{**} = Z - c_{12}$
0,31754	0,00000	0,34885	-0,01754
0,18654	0,25860	0,40987	0,02818
0,10958	0,30383	0,36116	-0,08132
0,06438	0,26773	0,28291	-0,04916
0,03782	0,20971	0,20775	-0,03391
0,02222	0,15399	0,14647	-0,02111

$d_{1_i}^2$	$d_{2_i}^2$	$d_{1_i}\ d_{2_i}$	$d_{1_i}Z^{**}$	$d_{2_i}Z^{**}$
0,00000	0,12170	0,00000	0,00000	-0,00612
0,06687	0,16799	0,10599	0,00729	0,01155
0,09231	0,13044	0,10973	-0,02471	-0,02937
0,07162	0,08044	0,07574	-0,01316	-0,01391
0,04398	0,04316	0,04357	-0,00711	-0,00704
0,02371	0,02145	0,02256	-0,00325	-0,00309
0,29855	0,56478	0,35758	-0,04094	-0,04798

3ª iteração

$c_{12}=X_1^{\beta_{12}-1}\ X_2^{\beta_{22}-1}$	$d_{1_i}=c_{12}\ln X_1$	$d_{2_i}=c_{12}\ln X_2$	$Z^{**}=Z-c_{12}$
0,32025	0,00000	0,35183	-0,02025
0,15489	0,21472	0,24033	0,05983
0,07491	0,20770	0,24689	-0,04665
0,03623	0,15068	0,15921	-0,02101
0,01752	0,09717	0,09624	-0,01361
0,00847	0,05874	0,05583	-0,00736

$d_{1_i}^2$	$d_{2_i}^2$	$d_{1_i}d_{2_i}$	$d_{1_i}Z^{**}$	$d_{2_i}Z^{**}$
0,00000	0,12378	0,00000	0,00000	-0,00712
0,04610	0,11582	0,07308	0,01285	0,02037
0,04314	0,06095	0,05128	-0,00969	-0,01152
0,02270	0,02535	0,02399	-0,00317	-0,00335
0,00944	0,00926	0,00935	-0,00132	-0,00131
0,00345	0,00312	0,00328	-0,00043	-0,00041
0,12483	0,33828	0,16098	-0,00180	-0,00334