

ANÁLISE CONJUNTA DE EXPERIMENTOS  
EM BLOCOS INCOMPLETOS  
BALANCEADOS COM ALGUNS TRATAMENTOS EM COMUM

LUIS CARLOS GREINER  
Engenheiro Agrônomo

Orientador: Prof. Dr. DÉCIO BARBIN

Dissertação apresentada à  
Escola Superior de Agricultura  
"Luiz de Queiroz" da  
Universidade de São Paulo,  
para obtenção do título de  
Mestre em Agronomia. Área  
de concentração: Estatística  
e Experimentação Agrôn  
mica.

PIRACICABA

ESTADO DE SÃO PAULO - BRASIL

SETEMBRO, 1986

A *Deus*, por este trabalho

Aos *meus pais Arthur e Anna*,  
pela constante dedicação,

Aos *meus irmãos*  
pela constante cooperação

DEDICO.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof.Dr. *Décio Barbin*, Professor Titular do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pela amizade e orientação neste trabalho.

Aos Professores do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP pelos ensinamentos prestados.

Ao Professores *Amauri de A. Machado*, *Élio P. Zonta*, e *João G. C. da Silva* pela amizade e constante incentivo.

Ao colega *Antônio Carlos de Oliveira* pelo valioso auxílio prestado na interpretação dos textos.

Ao colega *Renato César Dittrich*, pela amizade e confiança depositada nestes primeiros passos.

À *Empresa Catarinense de Pesquisa Agropecuária - EMPASC*, pela oportunidade concedida e auxílio financeiro concedido para a realização do curso.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, em especial às srtas. Maria Izalina F. Alves e Rosa Maria Alves, pela amizade e cooperação.

Aos colegas do curso de pós-graduação, pelo convívio amigo.

A todos, que de uma forma ou outra, contribuíram para a realização deste trabalho, minha gratidão.

## Í N D I C E

	PÁG.
RESUMO .....	.viii.
SUMMARY .....	.xiii.
1. INTRODUÇÃO .....	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	5
2.1. Ensaios em Blocos Incompletos Balanceados (BIB)	5
2.1.1. Definição .....	5
2.1.2. Classificação .....	7
2.1.3. Análise da variância intrablocos .....	11
2.1.4. Eficiência .....	13
2.2. Análise conjunta de um grupo de experimentos.	15
3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO .....	23
3.1. Modelo matemático .....	23
3.2. Sistema de equações normais .....	27
3.3. Solução do sistema de equações normais .....	31
3.4. Obtenção do sistema de equações normais ajustadas $\tilde{C}\tilde{I} = \tilde{Q}$ .....	33
3.4.1. Considerações gerais .....	33
3.4.2. Obtenção da matriz C .....	36
3.4.3. Obtenção do vetor $\tilde{Q}$ .....	42
3.4.4. Estimação dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos .....	45

3.4.4.1. Método clássico .....	45
3.4.4.2. Método simplificado .....	46
3.4.4.2.a. Estimacão dos efei- tos ajustados dos tratamentos comuns	47
3.4.4.2.b. Estimacão dos efei- tos ajustados dos tratamentos regula- res .....	48
3.4.5. Construo da matriz $M^{-1}$ .....	52
3.4.6. Esperança matemática de $\hat{I}$ .....	54
3.4.7. Matriz de dispersão para $\hat{I}$ .....	55
3.4.8. Variância de uma funo linear estim- vel .....	56
3.4.9. Casos particulares .....	61
3.4.10. Procedimento para a obteno da soma de quadrados para a interao T x A ..	74
3.4.11. Estimadores das médias ajustadas de tra- tamentos .....	77
3.4.11.1. Experimentos em BIB .....	77
3.4.11.2. Experimentos em blocos ao acaso .....	77
3.5. Somas de quadrados .....	81
3.6. Esperança matemática das somas de quadrados .	83

3.7. Testes de interesse e quadros de análise da variância	88
3.8. Independência e distribuição das formas quadráticas .....	96
3.9. Comparações múltiplas .....	98
4. ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO .....	100
5. CONCLUSÕES .....	112
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	116

ANÁLISE CONJUNTA DE EXPERIMENTOS  
EM BLOCOS INCOMPLETOS  
BALANCEADOS COM ALGUNS TRATAMENTOS EM COMUM

Autor: Luis Carlos Greiner

Orientador: Prof.Dr. Décio Barbin

RESUMO

O presente trabalho trata da análise conjunta de experimentos conduzidos em blocos incompletos balanceados (BIB) com alguns tratamentos comuns a todos os experimentos, possuindo não necessariamente os mesmos parâmetros de um experimento para outro. Os tratamentos pertencentes a todos os experimentos são designados de "tratamentos comuns" e os restantes, os quais ocorrem em somente um dos experimentos, de "tratamentos regulares". O objetivo foi justificar os fundamentos teóricos da análise da variância e testes de significância derivados para este tipo de ensaio.

O modelo matemático adotado foi:

$$y_{ijl} = \mu + t_i + (b/a)_{jl} + a_l + (ta)_{il} + e_{ijl}$$



onde para  $i = 1, 2, \dots, v_l$ ;  $j = 1, 2, \dots, u_l$   $l = 1, 2, \dots, g$ ,

- $y_{ijl}$  é a observação do  $i$ -ésimo tratamento no  $j$ -ésimo bloco do experimento  $l$ ;
- $\mu$  é uma constante inerente a todas as observações;
- $t_i$  é o efeito do  $i$ -ésimo tratamento;
- $(b/a)_{jl}$  é o efeito do  $j$ -ésimo bloco dentro do  $l$ -ésimo experimento;
- $a_l$  é o efeito do  $l$ -ésimo experimento;
- $(ta)_{il}$  é o efeito da interação entre o  $i$ -ésimo tratamento comum com o  $l$ -ésimo experimento;
- $e_{ijl}$  é o erro experimental atribuído à respectiva observação  $y_{ijl}$ , onde se supõe que os  $e_{ijl}$ 's são independentes e normalmente distribuídos, com média zero e variância constante  $\sigma^2$ .

Verificou-se que  $(b/a)_{jl} + a_l = b_j$ . Além disso, para maior facilidade nas deduções teóricas, utilizou-se o modelo sem o efeito da média geral, resultando:

$$y_{ijl} = t_i + b_j + (ta)_{il} + e_{ijl}$$

ou, na forma matricial,

$$\underline{y} = X_1 \underline{\tau} + X_2 \underline{\beta} + X_3 \underline{\gamma} + \underline{\varepsilon}$$

Os parâmetros para cada um dos experimentos , foram definidos como:

$v_l$ : número de tratamentos do experimento  $l$  ;

$u_l$ : número de blocos do experimento  $l$  ;

$k_l$ : número de parcelas por bloco do experimento  $l$  ;

$r_l$ : número de repetições para cada tratamento no experimento  $l$  ;

$\lambda_l$ : número de blocos nos quais dois tratamentos ocorrem sempre juntos no experimento  $l$  .

A união dos  $g$  experimentos em um só, para a realização da análise conjunta, resultou em um novo delineamento caracterizado pelos seguintes parâmetros:

$v = c + \sum_{l=1}^g z_l$  : número de tratamentos diferentes, sendo  $c$  o número de tratamentos comuns e  $z_l$ , o número de tratamentos regulares do experimento  $l$  ;

$u = \sum_{l=1}^g u_l$  : número total de blocos;

$r = \sum_{l=1}^g r_l$  : número de repetições para os tratamentos comuns;

$n = \sum_{l=1}^g r_l (c + z_l)$  número total de observações

Dado um par de tratamentos  $(i, i')$ , o número de vezes que eles aparecem juntos é:

$\lambda_{ii} = r$  , para tratamentos comuns;

$\lambda_{ii'} = \begin{cases} \sum_{z=1}^g \lambda_z = \lambda_{.} & \text{para o tratamento comum } s \text{ com o tratamento comum } s'; \\ \lambda_z & \text{para o tratamento comum } s \text{ com o tratamento regular } i; \end{cases}$

$\lambda_{ii}^{(z)} = r_z$  , para o tratamento regular  $i$  do experimento  $z$ ;

$\lambda_{ii'}^{(z)} = \lambda_z$  , para o tratamento regular  $i$  com tratamento regular  $i'$  no mesmo experimento;

$\lambda_{ii'} = 0$  , para dois tratamentos regulares de experimentos diferentes.

Sob essas condições foram determinados: o sistema de equações normais, os estimadores dos efeitos ajustados de tratamentos, a matriz de dispersão dos efeitos de tratamentos, as somas de quadrados, a variância da estimativa dos contrastes possíveis entre duas médias de tratamentos, além de ser dado um procedimento para a obtenção da soma de quadrados para a interação e para as esperanças matemáticas das somas de quadrados.

Um exemplo numérico é apresentado para ilustrar a aplicação das fórmulas e procedimentos apresentados neste trabalho.

COMBINED ANALYSIS OF EXPERIMENTS IN BALANCED INCOMPLETE BLOCK  
DESIGNS WITH SOME TREATMENTS IN COMMON

Author : Luis Carlos Greiner

Adviser: Prof.Dr. Décio Barbin

SUMMARY

The present work deals with the combined analysis of a group of experiments in balanced incomplete block designs (BIB) with some common treatments to the whole set. The experiments may not have the same parameters.

The objective of this dissertation was to justify the theoretical basis of the variance analysis and derived significance tests for this type of combined analysis of experiments with some treatments appearing in the whole set of experiments (**common treatments**), and the others, in only one of the experiments (**regular treatments**).

The following mathematical model was considered:

$$Y_{ijl} = \mu + t_i + (b/a)_{jl} + a_l + (ta)_{il} + e_{ijl} \quad ,$$

$i = 1, 2, \dots, v_l; j = 1, 2, \dots, u_l; l = 1, 2, \dots, g$ , where:

$Y_{ijl}$  observation of the  $i^{\text{th}}$  treatment in the  $j^{\text{th}}$  block of the  $l^{\text{th}}$  experiment,  
 $\mu$  general mean,  
 $t_i$   $i^{\text{th}}$  treatment effect,  
 $(b/a)_{jl}$   $j^{\text{th}}$  block effect within the  $l^{\text{th}}$  experiment,  
 $a_l$   $l^{\text{th}}$  experiment effect,  
 $(ta)_{il}$  common treatments x experiments interaction effect,  
 $e_{ijl}$  random error component inherent to the observation  $Y_{ijl}$ , with expectation zero and variance  $\sigma^2$ , the  $e_{ijl}$ 's being distributed normally and independently.

However, for simplicity in theoretical developments, the model may be simplified to the following:

$$Y_{ijl} = t_i + b_j + (ta)_{il} + e_{ijl},$$

$$\text{where, } b_j = \mu + (b/a)_{jl} + a_l.$$

or, in matrix form,

$$\underline{y} = X_1 \underline{\tau} + X_2 \underline{\beta} + X_3 \underline{\gamma} + \underline{\epsilon}.$$

The following parameters were considered as pertinent to each experiment:

$v_l$ : number of treatments,

$u_l$ : number of blocks,

$k_l$ : number of plots per block,

$r_l$ : number of replication of each treatment,

$\lambda_l$ : number of times any two treatments occur together in the design.

The grouping of all the experiments for the combined analysis resulted in a new design characterized by the following parameters:

$v = c + \sum_{l=1}^g z_l$ : total number of distinct treatments, where  $c$  is the number of common treatments and  $z_l$ , the number of regular treatments in the  $l^{\text{th}}$  experiment,

$u = \sum_{l=1}^g u_l$ : total number of blocks,

$r = \sum_{l=1}^g r_l$ : total number of replication of the common treatments,

$n = \sum_{l=1}^g r_l (c + z_l)$  total number of observations.

The number of times in which a pair of treatments appears together is:

$$\lambda_{ii} = r, \quad \text{for common treatments,}$$

$$\lambda_{ii'} = \begin{cases} \sum_{l=1}^g \lambda_{il} = \lambda, & \text{for the } s^{\text{th}} \text{ common treatment, with the } s^{\text{th}} \\ & \text{common treatment,} \\ \lambda_{il} & \text{for the } s^{\text{th}} \text{ common treatment with the } i^{\text{th}} \\ & \text{regular treatment,} \end{cases}$$

$$\lambda_{ii}^{(l)} = r_l, \quad \text{for any two regular treatments from the } l^{\text{th}} \\ \text{experiment,}$$

$$\lambda_{ii'}^{(l)} = \lambda_{il}^{(l)}, \quad \text{for the } i^{\text{th}} \text{ regular treatment with the } i'^{\text{th}} \\ \text{treatment from the same experiment,}$$

$$\lambda_{ii'} = 0, \quad \text{for any two regular treatments from} \\ \text{different experiments.}$$

Under the given conditions, the solution of the normal equations, the estimators of adjusted treatments effects, the dispersion matrix for treatment effects, the sum of squares, the variances of the four different types of contrasts among treatments effects were obtained. In addition, a procedure to obtain the sum of squares of interaction and expectations of sum of squares is also presented.



## 1. INTRODUÇÃO

Um tipo de ensaio de grande importância na experimentação agrônômica é, sem dúvida, o delineamento em blocos incompletos balanceados.

Nos programas de avaliação e melhoramento de plantas, frequentemente o pesquisador depara-se com um número relativamente grande de tratamentos a serem testados, acarretando sérias limitações quanto ao tamanho do experimento.

A dificuldade de se conseguir áreas homogêneas quanto às características do solo reveste-se de grande importância nesse tipo de experimento, uma vez que, com o uso dos delineamentos em blocos ao acaso, os mesmos não terão a homogeneidade dentro dos blocos comprometendo, dessa forma, as comparações entre os tratamentos.

Outras vezes, o material experimental em estudo é muito heterogêneo, ou ainda outras limitações como a quantidade de sementes disponíveis, restringem excessivamente o tamanho dos blocos, podendo, com muitas parcelas, tornar-se heterogêneo, havendo a necessidade de adotarem-se outros tipos de delineamentos.

Por essas e outras razões, os delineamentos em blocos incompletos balanceados, introduzidos por YATES (1936), abreviadamente chamados de BIB ("Balanced Incomplete Block Designs") por diversos autores, oferecem uma boa alternativa para o pesquisador testar um número elevado de tratamentos, problema muito comum na área do melhoramento genético. Nesses delineamentos, como o próprio nome indica, não incluem todos os tratamentos num único bloco, ou seja, a restrição de que o número de parcelas por bloco seja igual ao número de tratamentos é dispensada. As parcelas são distribuídas nos blocos de tal forma que qualquer par de tratamentos ocorra no experimento o mesmo número de vezes. Dessa forma, todas as comparações entre tratamentos têm a mesma precisão.

Por outro lado, pode ocorrer ainda que, o pesquisador faça a divisão dos tratamentos em vários experimentos independentes, onde somente alguns tratamentos são comuns a todos eles. Os demais tratamentos, chamados de tratamentos regulares, são os tratamentos novos, os quais são comparados com os tratamentos comuns, de comportamento já conhecido, e

que atuarão como uma espécie de controle ou testemunha. Na escolha dos tratamentos comuns, em geral, são levados em consideração, além da produção, a estabilidade, a boa aceitação pelos agricultores, a resistência a doenças e pragas, etc. Na prática, esses tratamentos são, por exemplo, as melhores variedades em cultivo pelos agricultores.

A análise conjunta desses experimentos é relativamente fácil, desde que se utilizem métodos adequados. Para isso, procede-se da seguinte forma:

- i) Os tratamentos são subdivididos em  $g$  experimentos independentes, onde cada experimento corresponde a um delineamento BIB com parâmetros  $(v_l, b_l, r_l, k_l \text{ e } \lambda_l)$ ,  
 $l = 1, 2, \dots, g$ ;
- ii) Selecionam-se alguns tratamentos cujo comportamento já é de prévio conhecimento do pesquisador e colocam-se os mesmos em todos os experimentos;
- iii) Efetua-se a análise estatística usual para cada experimento, obtendo-se as conclusões para cada experimento individual;
- iv) Estrutura-se a análise conjunta de todos os experimentos tendo como "elo de ligação" entre eles, os tratamentos comuns.

A finalidade desse trabalho é apresentar a análise conjunta de um grupo de experimentos planejados em delineamentos de blocos incompletos balanceados com alguns tra-

tamentos comuns em diferentes regiões, em uma mesma época ou vice-versa, com o objetivo de observar, de uma maneira geral, o comportamento dos tratamentos estudados, supondo que a interação tratamentos comuns x experimentos seja não significativa. Como salienta PIMENTEL GOMES (1985), isso indica que os tratamentos comuns se comportaram de maneira semelhante em todos os ensaios, o que sugere que tenha ocorrido o mesmo com os tratamentos regulares.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1. Ensaios em Blocos Incompletos Balanceados (BIB)

#### 2.1.1. Definição

Yates (apud OLIVEIRA, 1985), dentre outros, apresenta os delineamentos em blocos incompletos balanceados como sendo aqueles em que os  $v$  tratamentos são dispostos em  $u$  blocos de tamanho  $k$  ( $k < v$ ), de tal forma que cada par de tratamentos apareça sempre junto nos blocos, o mesmo número de vezes  $\lambda$ .

Pela definição, pode-se tirar as características do BIB ou seja:

- i) Os pares de tratamentos ocorrem juntos em  $\lambda$  blocos e, no experimento, estão  $\binom{v}{2}$  pares de tratamentos;
- ii) Cada bloco contém  $\binom{k}{2}$  pares de tratamentos e, então, em  $u$  blocos há  $u\binom{k}{2}$  pares. Desse modo, observa-se que:

$$\lambda \binom{v}{2} = u \binom{k}{2}$$

$$\therefore \lambda v(v-1) = uk(k-1)$$

Por outro lado, o número total de parcelas é dada por:

$$n = uk = rv$$

que substituído na expressão acima, resulta:

$$\lambda(v-1) = r(k-1)$$

que fornece a propriedade fundamental dos delineamentos BIB, ou seja, a condição de balanceamento para o experimento.

Segundo JEMMA (1985), a adoção do balanceamento nos ensaios com blocos incompletos nos leva a uma série de

vantagens sobre os esquemas não balanceados, como a simplificação dos cálculos, a obtenção de regras gerais e a estimação de contrastes com a mesma precisão.

### 2.1.2. Classificação

De modo geral, os autores classificam os delineamentos em blocos incompletos balanceados em três tipos básicos, a saber:

#### i) Tipo I

Quando os blocos podem ser arranjados em repetições de tratamentos. O modelo matemático considerado é:

$$Y_{ijl} = \mu + t_i + (u/r)_{jl} + r_l + e_{ijl}$$

onde:

$Y_{ijl}$  é a observação do  $i$ -ésimo tratamento situado no  $j$ -ésimo bloco da  $l$ -ésima repetição;

$\mu$  é a média geral;

$t_i$  é o efeito do  $i$ -ésimo tratamento;

$(u/r)_{jl}$  é o efeito do  $j$ -ésimo bloco dentro da repetição  $l$ ;

$r_l$  é o efeito da  $l$ -ésima repetição;

$e_{ijl}$  é o erro aleatório associado à respectiva observação

$Y_{ijl}$ .

com o seguinte esquema de decomposição dos graus de liberdade:

Causas da variação	G.L.
Repetições	$r - 1$
Blocos/Rep.	$r(u' - 1) = u - r$
Blocos	$(u - 1)$
Trats. (aj.)	$v - 1$
Resíduo	$u(k - 1) - (v - 1)$
TOTAL	$uk - 1$

onde  $u'$  é o número de blocos em cada repetição.

#### ii) Tipo II

Quando os blocos não podem ser arranjados em repetições de tratamentos, mas podem ser arranjados em grupos de repetições. O modelo matemático é:

$$y_{ijl} = \mu + t_i + g_l + (b/g)_{jl} + e_{ijl}$$

onde:

$g_l$  é o efeito do grupo  $l$ ;

$(b/g)_{jl}$  é o efeito do  $j$ -ésimo bloco dentro do grupo  $l$ ;

sendo que os demais efeitos têm o mesmo significado do modelo dado no item (i).



O esquema de análise da variância fica:

Causas da variação	G.L.
Grupos	$g - 1$
Blocos/Grupos	$g(u' - 1) = u - g$
Blocos	$u - 1$
Trats (aj.)	$v - 1$
Resíduo	$u(k - 1) - (v - 1)$
TOTAL	$uk - 1$

### iii) Tipo III

Quando os blocos não podem ser arranjados em repetições e nem mesmo em grupos de repetições de tratamentos. O modelo adotado é:

$$y_{ij} = \mu + t_i + b_j + e_{ij}$$

sendo que os efeitos têm o mesmo significado do item (i). O esquema de análise fica:

Causas da variação	G.L.
Blocos	$u - 1$
Trats (aj.)	$v - 1$
Resíduo	$u(k - 1) - (v - 1)$
TOTAL	$uk - 1$

Entretanto, outros autores, como COCHRAN e COX (1960) acrescentam ainda dois tipos de ensaios em BIB:

iv) Tipo IV

Quando o número de tratamentos é igual ao número de blocos, sendo um caso particular do tipo III e analisado de acordo com o modelo deste tipo.

v) Tipo V

Quando o número total de parcelas é pequeno em relação ao número de tratamentos e de blocos, acarretando um pequeno número de graus de liberdade para o resíduo. É analisado de acordo com o modelo de um dos três primeiros tipos, conforme o seu enquadramento em um deles.

## 2.1.3. Análise da variância intrablocos

Conforme IEMMA (1981), os autores são unâni -  
mes quanto à decomposição da soma de quadrados total na análi -  
se da variância. A análise é feita como se o delineamento fos -  
se em blocos casualizados completos com a diferença de que a  
soma de quadrados de tratamentos é ajustada para efeitos de  
blocos. Nos delineamentos Tipo I e Tipo II a soma de quadra -  
dos de blocos pode ainda ser decomposta.

Em geral, Rao (1947) considera o método clás -  
sico de análise para a estimação dos efeitos de tratamentos  
ajustados para blocos, com o seguinte sistema de equações nor -  
mais

$$\hat{C}\hat{\tau} = Q$$

onde:

C é uma matriz singular, de dimensão  $v \times v$  e posto  $(v - 1)$

com os elementos:

$$c_{ii'} = \begin{cases} r(1 - \frac{1}{k}), & \text{se } i = i' \\ -\lambda/k, & \text{se } i \neq i' \end{cases}$$

$\hat{\tau}$  é o vetor de soluções de mínimos quadrados para os efeitos  
de tratamentos, de dimensão  $v \times 1$ , e

Q é o vetor de dimensão  $v \times 1$  com os elementos  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, v$ ) definidos por:

$$q_i = T_i - \frac{1}{k} A_i$$

sendo  $T_i$  o total do  $i$ -ésimo tratamento e  $A_i$ , a soma dos totais de blocos que contêm o  $i$ -ésimo tratamento.

IEMMA (1985) apresenta a solução do sistema de duas maneiras distintas: para o sistema irrestrito e restrito. Para o primeiro caso, considera:

$$C^+ = \begin{cases} c_{ii}^+ = \frac{1}{rEv} (v - 1), & \text{para } i = i' \\ c_{ii}^+ = -\frac{1}{rEv} & , \text{ para } i \neq i' \end{cases}$$

onde  $C^+$  é a inversa de Moore-Penrose e  $E$  é a eficiência do de lineamento.

Dessa forma,

$$\hat{\tilde{I}} = C^+ Q$$

Para a solução do sistema restrito, o autor considera a família de funções paramétricas não estimáveis  $A'\tilde{I} = \psi$  tal que  $\sqrt{\frac{\lambda}{k}} A'\tilde{I} = \psi$ . Fazendo  $(C + \frac{\lambda}{k} AA')$  =  $M$ , matriz essa suposta não singular, o autor apresenta a solução para  $\tilde{I}$  como sendo

$$\hat{\tilde{I}} = M^{-1}Q$$

onde  $M^{-1} = \frac{k}{\lambda v} I(v)$ , sendo  $I(v)$  uma matriz identidade de dimensão  $v \times v$ . Portanto,  $\hat{\tilde{I}} = \frac{k}{\lambda v} Q$  e conseqüentemente,

$$SQT(aj.) = \hat{\tilde{I}}'Q = \frac{k}{\lambda v} Q'Q$$

#### 2.1.4. Eficiência

Como ressaltam SILVEIRA JUNIOR *et alii* (1982), a eficiência é muito importante nos delineamentos BIB, devendo-se dar preferência ao plano em que o valor de E for o mais próximo possível de um.

A eficiência dos delineamentos BIB é calculada em relação aos blocos casualizados. Supondo  $v$  tratamentos e  $r$  repetições, a variância do contraste entre duas médias de tratamentos nos blocos casualizados é dada por

$$V(\hat{m}_i - \hat{m}'_i) = \frac{2}{r} \sigma^2$$

e nos blocos incompletos balanceados conforme menciona CHAKRA BARTI (1962) por:

$$V(\hat{m}_i - \hat{m}'_i) = \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2.$$

Então, a eficiência  $E$  é dada pela razão

$$E = \frac{\frac{2}{r} \sigma^2}{\frac{2k}{\lambda v} \sigma^2} = \frac{\lambda v}{rk}.$$

Porém,  $\lambda(v - 1) = r(k - 1)$

Logo,

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{k - 1}{v - 1}$$

que substituído na expressão de  $E$  fica:

$$E = \frac{k - 1}{v - 1} \cdot \frac{v}{k}$$

Dividindo a expressão de  $E$  por  $vk$ , tem-se:

$$E = \frac{v(k - 1)/vk}{k(v - 1)/vk} = \frac{(k - 1)/k}{(v - 1)/v} = \frac{1 - 1/k}{1 - 1/v}$$

Porém, nos delineamentos BIB sempre tem-se  $v > k$ . Dividindo a expressão acima por  $vk$ , vem:

$$\frac{v}{vk} > \frac{k}{vk} \Rightarrow \frac{1}{k} > \frac{1}{v}$$

que multiplicado por  $-1$  e somando-se o valor  $1$ , obtêm-se:

$$1 - \frac{1}{k} < 1 - \frac{1}{v}$$

Dividindo ambos os membros por  $1 - 1/v$  resulta:

$$\frac{1 - 1/k}{1 - 1/v} < 1, \text{ ou seja } E < 1.$$

Vê-se que, a eficiência nos delineamentos BIB é sempre menor do que um, resultado concordante com CHAKRABARTI (1962), PIMENTEL GOMES (1985), dentre outros.

## 2.2. Análise conjunta de um grupo de experimentos

Segundo YATES e COCHRAN (1938), a análise estatística apropriada para os dados de uma série de experimentos depende do objetivo da pesquisa. Entretanto, os estágios preliminares das análises tendem a ser os mesmos em todos os casos.

A análise conjunta de experimentos tem sido assunto de vários trabalhos. Dentre eles, destacam-se os trabalhos pioneiros de COCHRAN (1937) e YATES e COCHRAN (1938). É discutida também em vários textos tradicionais de delineamentos de experimentos como, por exemplo, CAMPOS (1984), COCHRAN e COX (1960), KEMPTHORNE (1973) e PIMENTEL GOMES (1985).

Por outro lado, diversos autores têm se preocupado com a análise de experimentos em blocos com alguns tratamentos comuns, principalmente após o primeiro trabalho desenvolvido por PIMENTEL GOMES e GUIMARÃES (1958) quando, a partir daí, começaram a surgir diversos estudos sobre o assunto. Esses autores consideraram o caso da análise intrablocos de um grupo de experimentos em blocos ao acaso repetidos  $r$  vezes, onde somente alguns tratamentos são comuns para todos os grupos. Estes tratamentos foram considerados como tratamentos comuns e os restantes, específicos para cada grupo, como tratamentos regulares. O conjunto de experimentos é analisado como um caso especial da análise intra e intergrupos de um delineamento em blocos incompletos balanceados (BIB), tipo I, proposto por Rao (1947) e comparado a uma situação semelhante discutida por Yates (1936). Consideraram  $g$  diferentes experimentos em blocos ao acaso com os seguintes parâmetros:

$r$             repetições;  
 $c$             tratamentos comuns repetidos  $gr$  vezes;  
 $z$             tratamentos regulares repetidos  $r$  vezes;  
 $k = z + c$     tratamentos por experimento;  
 $v = gz + c$    número total de tratamentos.

Após a obtenção das somas de quadrados para blocos não ajustados, para a interação entre tratamentos e ex



perimentos da maneira usual e da soma de quadrados do resíduo dada pela adição das somas de quadrados do resíduo das análises individuais, a soma de quadrados de tratamentos ajustada para blocos, pela análise proposta, é obtida da seguinte forma:

$$\text{SQT (aj.)} = \text{SQ Total} - [\text{SQ Blocos (não aj.)} + \text{SQ Trats} \times \text{Exps.} \\ + \text{SQ Resíduo}]$$

Um método para a análise conjunta de experimentos em blocos incompletos balanceados (BIB) com alguns tratamentos comuns foi apresentado por PAVATE (1961). Considerou  $g$  experimentos em BIB com os mesmos parâmetros ( $v, b, r, k$  e  $\lambda$ ) para serem analisados conjuntamente. Supôs, haver  $c$  tratamentos comuns para cada experimento, havendo, portanto, um total de  $v = g(v - c)$  tratamentos diferentes no conjunto. Para a obtenção da soma de quadrados de tratamentos ajustada para blocos, além de resumir a solução geral do método clássico proposto por Rao (1947) que consiste na solução das equações normais  $C\hat{\tau} = Q$ , sugeriu um método simplificado para a obtenção dos efeitos ajustados de tratamentos, baseado nas análises individuais dos  $g$  experimentos em BIB.

O autor apresenta as fórmulas para a obtenção das estimativas dos efeitos de tratamentos e para as variân -

cias dos quatro contrastes possíveis. Considera, ainda quatro casos particulares de análise conjunta quando os experimentos tenham sido planejados em BIB, a saber:

- i) Experimentos com apenas um tratamento comum, ou seja  $c = 1$ ;
- ii) Caso em que  $v = c$ , isto é, todos os experimentos possuem o mesmo conjunto de tratamentos.
- iii) Caso em que  $u = r = \lambda$  e  $k = v$ , ou seja, quando os blocos incompletos balanceados reduzem-se a blocos completos casualizados com  $c$  tratamentos comuns, considerando, nesse caso, o trabalho de PIMENTEL GOMES e GUIMARÃES (1958) como um caso particular do método geral sugerido.

GIRI (1963) baseando-se nos trabalhos de PIMENTEL GOMES e GUIMARÃES (1958) e de PAVATE (1961) obteve a análise conjunta de um grupo de experimentos, quando estes individualmente tenham sido planejados em Quadrados de Youden ou em Quadrado Latino. Para isso, aplicou a metodologia sugerida por PAVATE (1961) para os  $g$  experimentos em Quadrados de Youden e o método de PIMENTEL GOMES e GUIMARÃES (1958) para os  $g$  experimentos em Quadrado Latino. Apresenta, também as estimativas dos efeitos de tratamentos, bem como as estimativas das variâncias dos contrastes.

SWAMINATHAN e DAS (1964) apresentam um método de análise intrablocos quando os parâmetros do delineamento em BIB ( $v_1, u_1, r_1, k_1$  e  $\lambda_1$ ) são diferentes de um experimento

para outro, mas há um ou mais tratamentos comuns a todos os experimentos. Supondo que há  $c$  tratamentos comuns, há  $v = \sum_{l=1}^g (v_l - c)$  tratamentos diferentes ao todo. Esses autores apresentam o método clássico para a obtenção da soma de quadrados ajustada, bem como fórmulas práticas para a obtenção das estimativas dos efeitos ajustados de tratamentos e das variâncias dos principais contrastes entre duas médias de tratamentos. Citam ainda, três casos particulares:

- i) Caso em que  $v_l = v$ ,  $r_l = r$ ,  $k_l = k$ ,  $u_l = u$  e  $\lambda_l = \lambda$ ,  $l = 1, 2, \dots, g$ ; a análise reduz-se para aquela do delineamento considerado por PAVATE (1961).
- ii) Caso em que  $k = v$ , a análise reduz-se para o caso do delineamento em blocos ao acaso e, portanto, a análise é aquela considerada por PIMENTEL GOMES e GUIMARÃES (1958).
- iii) Quando  $v_l = v$ ,  $r_l = r$ ,  $k_l = k$ ,  $\lambda_l = \lambda$  e  $c = v$ ,  $l = 1, 2, \dots, g$ , a análise conjunta é a mesma de um experimento em BIB, porém repetido  $g$  vezes, ou seja, a análise reduz-se a um grupo de experimentos delineados em BIB.

AFONJA (1968) à semelhança de SWAMINATHAN e DAS (1964) apresentou também um método de análise conjunta para  $g$  experimentos em BIB com alguns tratamentos comuns, os quais podem ser convenientemente combinados quando os tratamentos regulares ocorrem em somente um dos experimentos. O autor utiliza a matriz de covariância das estimativas dos efei

tos de tratamentos para obter resultados gerais para os delineamentos em BIB com os seus parâmetros ( $v_l, u_l, k_l, r_l$  e  $\lambda_l$ ) variando de um experimento para outro. Considera, ainda, os casos estudados por PIMENTEL GOMES e GUIMARÃES (1958) e PAVANTE (1961) como particulares do seu.

Após ter sido obtido o sistema de equações normais  $C\hat{\tau} = Q$  e somada uma matriz  $AA'$  de restrição, obtendo-se a matriz  $M = C + AA'$ , o autor fornece um algoritmo para a inversão de  $M$  que envolve inverter uma matriz  $F$  de dimensão  $(g + 1) \times (g + 1)$  cujo procedimento é dado, facilitando, dessa forma, a obtenção dos efeitos ajustados de tratamentos e conseqüentemente, a soma de quadrados de tratamentos ajustada.

Estendendo o método apresentado em 1958, PIMENTEL GOMES (1970) considerou o caso em que o número de repetições para tratamentos varia de um experimento em blocos ao acaso para outro. Dessa forma, para a análise conjunta do grupo de experimentos há  $v = c + \sum_{l=1}^g z_l$  tratamentos diferentes. Apresenta, ainda, o esquema da análise da variância e as diversas somas de quadrados são obtidas de modo semelhante ao trabalho desenvolvido por PIMENTEL GOMES e GUIMARÃES (1958).

Entre os diversos trabalhos sobre a análise conjunta de experimentos encontrados na literatura pode-se citar: FEDERER (1956) que tratou da análise de delineamentos aumentados, ou seja aquele delineamento formado a partir de qualquer delineamento pelo acréscimo de parcelas nos blocos ;

COCHRAN e COX (1960), CAMPOS (1984) e PIMENTEL GOMES (1985) propuseram a análise de um conjunto de experimentos em blocos ao acaso com  $v$  tratamentos e  $r$  repetições conduzidos em  $l$  locais; KEMPTHORNE (1973) apresenta um método para a análise de um grupo de experimentos instalados em diversos locais, onde considera a informação de cada parcela do experimento ao invés do total ou das médias de tratamentos em cada local.

Para a obtenção da análise conjunta de experimentos é pressuposto que os quadrados médios residuais sejam os mesmos para todos os experimentos. Segundo COCHRAN e COX (1960) e KEMPTHORNE (1973) testa-se a homogeneidade das variâncias residuais pelo teste de Bartlett, dentre outros. Porém, segundo Box (1953), citado por PIMENTEL GOMES (1985), esse teste é muito sensível à falta de normalidade dos dados e deve ser desprezado. Entretanto, segundo o mesmo autor, estudos realizados por BOX (1954) indicam que, se em todos os experimentos, os tratamentos tiverem o mesmo número de parcelas, a relação entre o maior e o menor quadrado médio residual for até 3 ou 4, a análise da variância e os testes complementares podem ser efetuados sem que isso cause prejuízos consideráveis para os mesmos.

PIMENTEL GOMES (1985) citando Dagnelie (1975) comenta o uso do teste F máximo e conclui que se, a relação entre o maior e o menor quadrado médio residual for menor do que 7, quase sempre a análise conjunta poderá ser efetuada

sem maiores problemas. Por outro lado, quando essa relação for muito além disso, convém considerar separadamente subgrupos de experimentos com quadrados médios residuais não muito heterogêneos. Outra alternativa para a solução desse problema é fazer o ajuste do número de graus de liberdade pelo método proposto por Cochran (1954), que também é apresentado por PIMENTEL GOMES (1985).

### 3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

#### 3.1. Modelo matemático

Supondo uma relação linear entre as variáveis independentes e a variável dependente, o modelo matemático adotado é

$$Y_{ijl} = \mu + t_i + (b/a)_{jl} + a_l + (ta)_{il} + e_{ijl}, \quad (1)$$

onde para  $i = 1, 2, \dots, v_l$ ;  $j = 1, 2, \dots, u_l$ ;  $l = 1, 2, \dots, g$ ,

$Y_{ijl}$  é o valor observado do  $i$ -ésimo tratamento situado no  $j$ -ésimo bloco do  $l$ -ésimo experimento;

$\mu$  é uma constante inerente a todas as observações;

$t_i$  é o efeito do  $i$ -ésimo tratamento;

$(b/a)_{j\lambda}$  é o efeito do  $j$ -ésimo bloco dentro do  $\lambda$ -ésimo experimento;

$a_\lambda$  é o efeito do  $\lambda$ -ésimo experimento;

$(ta)_{i\lambda}$  é o efeito da interação entre o  $i$ -ésimo tratamento comum e o  $\lambda$ -ésimo experimento;

$e_{ij\lambda}$  é o erro experimental associado à respectiva observação  $y_{ij\lambda}$ , suposto independente e normalmente distribuído com média zero e variância constante  $\sigma^2$ , isto é,  $e_{ij\lambda} \sim N(0, \sigma^2)$ .

Considerando que, os efeitos  $(b/a)_{j\lambda} + a_\lambda = b_j$ , o modelo (1) pode ser representado na seguinte forma:

$$y_{ij\lambda} = \mu + t_i + b_j + (ta)_{i\lambda} + e_{ij\lambda} \quad (2)$$

onde,  $b_j$  é o efeito do  $j$ -ésimo bloco.

Tomando um modelo linear, o modelo (2) pode ser escrito na seguinte forma matricial

$$\underline{y} = X\underline{\theta} + \underline{\varepsilon} \quad (3)$$



onde:

$\underline{y}$  é um vetor de realizações de variáveis aleatórias;

$X$  é a matriz conhecida dos coeficientes dos parâmetros;

$\underline{\theta}$  é um vetor que contém os parâmetros;

$\underline{\varepsilon}$  é o vetor dos erros aleatórios, sendo que  $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, I\sigma^2)$ .

Como ressalta MACHADO (1982), um procedimento que facilita muito as deduções teóricas é considerar o efeito da média geral somado a um dos efeitos, geralmente ao efeito de maior ordem. Embora a notação continue a mesma, supor-se-á que, sem perda de generalidade, o efeito da média está somado ao efeito de blocos. Assim, pode-se reescrever (2) na seguinte forma:

$$y_{ijl} = t_i + b_j + (ta)_{il} + e_{ijl} \quad (4)$$

Efetuando-se a partição de modo conveniente da matriz  $X$ , conforme PIMENTEL GOMES (1967) em:

$$X = [X_1 | X_2 | X_3], \quad (5)$$

o modelo (4) pode ser escrito na seguinte forma:

$$\underline{y} = X_1 \underline{\tau} + X_2 \underline{\beta} + X_3 \underline{\gamma} + \underline{\varepsilon}, \quad (6)$$

sendo:

- $X_1$ : matriz de dimensão  $n \times v$  composta de 0's e 1's associada aos coeficientes dos efeitos de tratamentos;
- $\underline{I}$ : vetor de dimensão  $v \times 1$  que contém os efeitos de tratamentos;
- $X_2$ : matriz de dimensão  $n \times u$ , semelhante à  $X_1$ , referente aos coeficientes dos efeitos de blocos;
- $\underline{\beta}$ : vetor de dimensão  $u \times 1$  que contém os efeitos de blocos;
- $X_3$ : matriz de dimensão  $n \times p$  de definição semelhante à  $X_1$  e  $X_2$ , referente aos coeficientes das interações  $(\tau\alpha)_{ij}$ ;
- $\underline{\gamma}$ : vetor de dimensão  $p \times 1$  que contém os efeitos das interações;
- $\underline{\varepsilon}$ : vetor de dimensão  $n \times 1$  que contém os erros experimentais, sendo que  $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, I\sigma^2)$ .

Nas definições acima tem-se  $n$  é o número de parcelas,  $u$  é o número de blocos,  $v$  é o número de tratamentos e  $p$  é o número de interações.

Como a soma de quadrados para a interação entre tratamentos e experimentos pode ser obtida por diferença entre as demais somas de quadrados, como pode ser visto no item 3.5., todas as demais somas de quadrados serão obtidas considerando o modelo

$$\underline{y} = X_1 \underline{I} + X_2 \underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \quad (7)$$

### 3.2. Sistema de equações normais

Através do modelo linear  $\underline{y} = X\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}$  e pelo método dos quadrados mínimos, obteve-se o sistema de equações normais

$$X'X\hat{\underline{\theta}} = X'\underline{y} ,$$

que pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'X_3 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 & X_2'X_3 \\ X_3'X_1 & X_3'X_2 & X_3'X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{T}} \\ \hat{\underline{\beta}} \\ \hat{\underline{\gamma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1'\underline{y} \\ X_2'\underline{y} \\ X_3'\underline{y} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Para facilitar os desenvolvimentos posteriores, as submatrizes do sistema (8) foram denotadas por

$$\begin{bmatrix} R & N & H \\ N' & K & D \\ H' & D' & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{T}} \\ \hat{\underline{\beta}} \\ \hat{\underline{\gamma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T} \\ \underline{B} \\ \underline{\Delta} \end{bmatrix} \quad (9)$$

onde as submatrizes de  $X'X$  têm a composição que se segue:

$R$  é uma matriz diagonal de dimensão  $v \times v$  que contém as repetições dos tratamentos;

$N = \begin{matrix} v \\ \left( n_{ij} \right) \\ u \end{matrix}$  é a matriz de incidência dos tratamentos em relação aos blocos, de dimensão  $v \times u$ , com

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo tratamento ocorre no } j \\ & \text{-ésimo bloco} \\ 0, & \text{em caso contrário;} \end{cases}$$

$H = \begin{matrix} v \\ \left( h_{il} \right) \\ p \end{matrix}$  é a matriz de incidência dos tratamentos em relação aos pares  $(ta)_{il}$ , de dimensão  $v \times p$ , onde  $h_{il}$  é o número de vezes que o tratamento  $i$  ocorre no experimento  $l$ ;

$K$  é uma matriz diagonal de dimensão  $u \times u$  que contém o número de unidades experimentais ou parcelas por bloco;

$D = \begin{bmatrix} d_{ji} \\ \vdots \\ d_{ji} \end{bmatrix}_{u \times p}$  é a matriz de incidência da interação  $(ta)_{i\lambda}$  no  $j$ -ésimo bloco, de dimensão  $u \times p$ , onde:

$$d_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{se } (ta)_{i\lambda} \text{ ocorre no } j\text{-ésimo bloco,} \\ 0, & \text{em caso contrário;} \end{cases}$$

$L$  é uma matriz diagonal de dimensão  $p \times p$  associada ao número de repetições dos pares  $(ta)_{i\lambda}$ ;

enquanto que:

$$\hat{t} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \dots \\ \epsilon_c \\ \dots \\ \epsilon_1^{(1)} \\ \epsilon_2^{(1)} \\ \dots \\ \epsilon_{z_1}^{(1)} \\ \dots \\ \epsilon_1^{(g)} \\ \epsilon_2^{(g)} \\ \dots \\ \epsilon_{z_g}^{(g)} \end{bmatrix}$$

é o vetor de soluções de mínimos quadrados para os efeitos de tratamentos, sendo  $c$  o número de tratamentos comuns e  $z_\lambda$ , o número de tratamentos regulares do experimento  $\lambda$ .

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \dots \\ T_v \end{bmatrix}$$

é o vetor dos totais observados para os tratamentos;

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \dots \\ B_u \end{bmatrix}$$

é o vetor dos totais observados para os blocos;

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \\ \beta_u \end{bmatrix}$$

é o vetor de soluções de mínimos quadrados para os efeitos de blocos;

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} (fa)_{11} \\ (fa)_{21} \\ \dots \\ (fa)_{c_1} \\ (fa)_{12} \\ (fa)_{22} \\ \dots \\ (fa)_{c_2} \\ \dots \\ (fa)_{1g} \\ (fa)_{2g} \\ \dots \\ (fa)_{cg} \end{bmatrix}_p \quad \begin{matrix} \text{é o vetor solução} \\ \text{ção de mínimos} \\ \text{quadrados para} \\ \text{os efeitos da} \\ \text{interação } (ta)_{i\ell}; \end{matrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} TA_{11} \\ TA_{21} \\ \dots \\ TA_{c_1} \\ TA_{12} \\ TA_{22} \\ \dots \\ TA_{c_2} \\ \dots \\ TA_{1g} \\ TA_{2g} \\ \dots \\ TA_{cg} \end{bmatrix}_p \quad \begin{matrix} \text{é o vetor dos to-} \\ \text{tais observados pa-} \\ \text{ra a interação} \\ (ta)_{i\ell}; \end{matrix}$$

sendo:

$$T_i = \sum_{\ell=1}^g \sum_{j=1}^u \delta_{ij}^{(\ell)} y_{ij\ell}, \text{ o total do } i\text{-ésimo tratamento;}$$

$$B_j = \sum_{\ell=1}^g \sum_{i=1}^v \delta_{ij}^{(\ell)} y_{ij\ell}, \text{ o total do } j\text{-ésimo bloco}$$

onde:  $\delta_{ij}^{(\ell)} = \begin{cases} 1, & \text{se o tratamento } i \text{ ocorre no bloco } j \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$

$(TA)_{i\ell}$  é o total observado para a interação entre o  $i$ -ésimo tratamento comum com o  $\ell$ -ésimo experimento.

### 3.3. Solução do sistema de equações normais

Através de (9), efetuando-se as multiplicações, obtém-se o sistema de equações normais

$$\hat{R}\hat{I} + N\hat{\beta} + H\hat{Y} = \hat{T} \quad (10)$$

$$N'\hat{I} + K\hat{\beta} + D\hat{Y} = \hat{B} \quad (11)$$

$$H'\hat{I} + D'\hat{\beta} + L\hat{Y} = \hat{\Delta} \quad (12)$$

No entanto, a obtenção simultânea de todas as estimativas dos parâmetros torna-se frequentemente, trabalhosa devido à presença de matrizes de ordem elevada, cuja dimensão será igual ao número de parâmetros independentes. Pode-se, então, lançar mão de um processo descrito em muitos textos, como em SEARLE (1971), denominado de "absorção de equações". Esta absorção é feita de forma que sejam "absorvidas" as equações referentes ao efeito que tenha o maior número de níveis. Supor-se-á, aqui que a fonte de variação blocos possua o maior número de níveis.

Como foi dito anteriormente, a soma de quadrados para a interação pode ser obtida por diferença entre somas de quadrados. Sendo assim, aqui será usado o seguinte sub-sistema de (8):

$$\hat{R}\hat{I} + N\hat{\beta} = \hat{T} \quad (13)$$

$$N'\hat{I} + K\hat{\beta} = \hat{B} \quad (14)$$

Os efeitos de tratamentos ajustados para blocos são estimados eliminando o efeito de blocos da equação (13). Isolando  $\underline{\hat{\beta}}$  em (14)

$$\underline{\hat{\beta}} = \underline{K}^{-1} [\underline{B} - \underline{N}'\underline{\hat{I}}]$$

e substituindo em (13) vem:

$$\underline{R}\underline{\hat{I}} + \underline{N}\underline{K}^{-1}\underline{B} - \underline{N}\underline{K}^{-1}\underline{N}'\underline{\hat{I}} = \underline{T}$$

$$(\underline{R} - \underline{N}\underline{K}^{-1}\underline{N}')\underline{\hat{I}} = \underline{T} - \underline{N}\underline{K}^{-1}\underline{B}$$

ou como é usual na teoria geral dos delineamentos em blocos incompletos

$$\underline{C}\underline{\hat{I}} = \underline{Q} \tag{15}$$

que é o sistema de equações normais de tratamentos ajustados para blocos, equivalente ao sistema (13) e (14), absorvida a equação

$$\underline{\hat{\beta}} = \underline{K}^{-1}[\underline{B} - \underline{N}'\underline{\hat{I}}] \quad , \text{ onde:}$$

$\underline{C}$  é a matriz dos coeficientes das equações normais para tratamentos, cujos efeitos de blocos foram eliminados;

$\underline{Q}$  é o valor dos totais de tratamentos ajustados para blocos.



O sistema (15) pode ser facilmente obtido, com forme o procedimento utilizado por PIMENTEL GOMES (1967), definindo:

$$W = [I_{(v)} - NK^{-1}] \quad (16)$$

Pré-multiplicando (13) e (14) por  $W$ , obtém-se

$$[(R - NK^{-1}N')\hat{T} \quad \phi] = [T - NK^{-1}B] \quad (17)$$

$$\therefore \hat{CT} = \underline{Q}$$

### 3.4. Obtenção do sistema de equações normais ajustadas

$$\hat{CT} = \underline{Q}$$

#### 3.4.1. Considerações gerais

Supondo que há  $g$  experimentos em BIB, onde cada um deles possui os seguintes parâmetros:

$v_z$  : número de tratamentos;

$u_z$  : número de blocos;

$k_z$  : número de tratamentos (ou parcelas) por bloco;

$r_z$  : número de repetições para cada tratamento;

$\lambda_z$  : número de blocos nos quais dois tratamentos ocorrem sempre juntos,

então na obtenção da análise conjunta, consideram-se os  $g$  experimentos como um só, o qual será caracterizado pelos parâmetros que seguem:

$v = c + \sum_{l=1}^g z_l$  : número total de tratamentos diferentes, onde  $c$  é o número de tratamentos comuns e  $z_l$ , o número de tratamentos regulares para o experimento  $l$ .

$r = \sum_{l=1}^g r_l$  : número de repetições para os tratamentos comuns;

$u = \sum_{l=1}^g u_l$  : número total de blocos;

$n = \sum_{l=1}^g r_l (c + z_l)$  : número total de observações.

Dados dois tratamentos ( $i$  e  $i'$ ), o número de vezes que eles aparecem juntos é:

$\lambda_{ii} = \sum_{j=1}^u n_{ij}^2 = r$  : para dois tratamentos comuns;

$\lambda_{ii'} = \sum_{j=1}^u n_{ij} n_{i'j} = \lambda = \sum_{l=1}^g \lambda_l$  : para o tratamento comum  $s$  com o tratamento comum  $s'$ ;

$$\lambda_{ii'} = \sum_{j=1}^u n_{ij} n_{i'j} = \lambda_l :$$

para o tratamento comum s com o tratamento regular i' ;

$$\lambda_{ii}^{(l)} = \sum_{j=1}^u n_{ij}^2 = r_l :$$

para o i-ésimo tratamento regular no experimento l ;

$$\lambda_{ii'}^{(l)} = \sum_{j=1}^u n_{ij} n_{i'j} = \lambda_l :$$

para o i-ésimo tratamento regular com tratamento regular i' no mesmo experimento ;

$$\lambda_{ii'} = 0 :$$

para dois tratamentos regulares de experimentos diferentes.

Como se sabe da teoria geral dos delineamentos em blocos incompletos, o sistema de equações normais ajustadas para os efeitos de blocos é dado por:

$$C\tilde{T} = \tilde{Q}$$

onde :

$$C = R - NK^{-1}N'$$

$$\tilde{Q} = \tilde{T} - NK^{-1}\tilde{B}$$

Deve-se lembrar ainda que:

$$R = \begin{pmatrix} r_i \end{pmatrix} = \begin{cases} r \cdot I(c), & \text{para os tratamentos comuns;} \\ r_z I(z_z), & \text{para os tratamentos regulares;} \end{cases}$$

é uma matriz diagonal de dimensão  $v \times v$  que contém as repetições dos  $v$  tratamentos;

$N = \begin{pmatrix} n_{ij} \end{pmatrix}$  é a matriz de incidência dos  $v$  tratamentos nos  $u$  blocos; de dimensão  $v \times u$ , cujos elementos são:

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o tratamento } i \text{ ocorre no bloco } j; \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

$K = k_z I(u)$  é uma matriz diagonal de dimensão  $u \times u$ , contendo os elementos  $k_z$ , ou seja, o tamanho dos blocos;

$T$  é um vetor de dimensão  $v \times 1$  que contém os totais dos tratamentos;

$B$  é um vetor de dimensão  $u \times 1$  que contém os totais dos blocos.

#### 3.4.2. Obtenção da matriz C

A obtenção dos elementos que formarão a matriz C será feita conforme AFONJA (1968). Escrevendo os ele-

mentos das matrizes  $N$ ,  $K$  e  $R$  em função dos valores dos experimentos individuais e partindo-se as mesmas adequadamente em partes correspondentes aos tratamentos comuns e tratamentos regulares, como:

$$N = \begin{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} N_{C_1} & N_{C_2} & N_{C_3} & \dots & N_{C_g} \\ N_1 & \phi & \phi & \dots & \phi \\ \phi & N_2 & \phi & \dots & \phi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi & \phi & \phi & \dots & N_g \end{array} \right] \\ \begin{matrix} v \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ u \end{matrix} & \end{matrix}$$

onde:

$N_{C_l}$ , com  $l = 1, 2, \dots, g$  é a matriz de incidência dos tratamentos comuns nos blocos para o  $l$ -ésimo experimento de dimensão  $c \times u_l$ .

$N_l$  é a matriz de incidência dos tratamentos regulares nos blocos para o  $l$ -ésimo experimento de dimensão  $z_l \times u_l$ .

$$R = \begin{bmatrix} r \cdot I(c) & \phi & \phi & \dots & \phi \\ \phi & r_1 I(z_1) & \phi & \dots & \phi \\ \phi & \phi & r_2 I(z_2) & \dots & \phi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi & \phi & \phi & \dots & r_g I(z_g) \end{bmatrix} \quad (18)$$

e

$$K = \begin{bmatrix} k_1 I(u_1) & \phi & \dots & \phi \\ \phi & k_2 I(u_2) & \dots & \phi \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi & \phi & \dots & k_g I(u_g) \end{bmatrix} \quad u$$

Efetuando-se o produto  $NK^{-1}N'$  obtém-se:

$$NK^{-1}N' = \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{k_1} Nc_1N'c_1 + \frac{1}{k_2} Nc_2N'c_2 + \dots + \frac{1}{k_g} Nc_gN'c_g \right) & \frac{1}{k_1} Nc_1N'_1 & \frac{1}{k_2} Nc_2N'_2 & \dots & \frac{1}{k_g} Nc_gN'_g \\ \frac{1}{k_1} N_1N'_1c_1 & \frac{1}{k_1} N_1N'_1 & \phi & \dots & \phi \\ \frac{1}{k_2} N_2N'_2c_2 & \phi & \frac{1}{k_2} N_2N'_2 & \dots & \phi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{k_g} N_gN'_gc_g & \phi & \phi & \dots & \frac{1}{k_g} N_gN'_g \end{bmatrix} \quad (19)$$

Por outro lado, tendo-se em vista a representação geral dada à matriz N e conforme as considerações feitas no item 3.4.1, verifica-se que:

$$\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
 r_1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1 & & \lambda_g & \lambda_g & \dots & \lambda_g \\
 \lambda_1 & r_1 & \dots & \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1 & \dots & \lambda_g & \lambda_g & \dots & \lambda_g \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \lambda_1 & \lambda_1 & \dots & r_1 & \lambda_1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1 & & \lambda_g & \lambda_g & \dots & \lambda_g \\
 \hline
 \lambda_1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1 & r_1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1 & & & & & \\
 \lambda_1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1 & \lambda_1 & r_1 & \dots & \lambda_1 & & & & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \phi & & \\
 \lambda_1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_1 & \dots & r_1 & & & & & \\
 \dots & \dots & & & & & & & & & & & \\
 \hline
 \lambda_g & \lambda_g & \dots & \lambda_g & & & & & & r_g & \lambda_g & \dots & \lambda_g \\
 \lambda_g & \lambda_g & \dots & \lambda_g & & \phi & & & \dots & \lambda_g & r_g & \dots & \lambda_g \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \lambda_g & \lambda_g & \dots & \lambda_g & & & & & & \lambda_g & \lambda_g & \dots & r_g
 \end{array} \quad (20)$$

Assim, a representação da matriz  $C = R-NK^{-1}N'$  de dimensão  $v \times v$  é obtida tomando-se as submatrizes de (18), (19) e (20) adequadamente, como será feito a seguir:

a. Para os tratamentos comuns

$$c \begin{bmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r \end{bmatrix}_c - \frac{1}{k_1} \begin{bmatrix} r_1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1 \\ \lambda_1 & r_1 & \dots & \lambda_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \dots & r_1 \end{bmatrix}_c - \dots - \frac{1}{k_g} \begin{bmatrix} r_g & \lambda_g & \dots & \lambda_g \\ \lambda_g & r_g & \dots & \lambda_g \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_g & \lambda_g & \dots & r_g \end{bmatrix}_c$$

$$c_{ii'} = r \cdot - \left( \frac{r_1}{k_1} + \frac{r_2}{k_2} + \dots + \frac{r_g}{k_g} \right) = r \cdot - \sum_{l=1}^g \frac{r_l}{k_l}, \text{ para todo } i = i' \tag{21}$$

$$c_{ii'} = - \left( \frac{\lambda_1}{k_1} + \frac{\lambda_2}{k_2} + \dots + \frac{\lambda_g}{k_g} \right) = - \sum_{l=1}^g \frac{\lambda_l}{k_l}, \text{ para todo } i \neq i'$$

b. Para os tratamentos comuns com os tratamentos regulares do experimento  $l$

$$c \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{z_l} - \frac{1}{k_l} \begin{bmatrix} \lambda_l & \lambda_l & \dots & \lambda_l \\ \lambda_l & \lambda_l & \dots & \lambda_l \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_l & \lambda_l & \dots & \lambda_l \end{bmatrix}_{z_l} = - \frac{\lambda_l}{k_l} (c) J_{(z_l)},$$

onde  $J$  é uma matriz de uns.



$$\therefore c_{ii'} = -\frac{\lambda_l}{k_l}, \text{ com } \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, c \\ i' = c + 1, c + 2, \dots, v \end{array} \quad (22)$$

c. Para os tratamentos regulares no mesmo experimento

$$\begin{bmatrix} r_l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_l & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_l \end{bmatrix}_{z_l} - \frac{1}{k_l} \begin{bmatrix} r_l & \lambda_l & \dots & \lambda_l \\ \lambda_l & r_l & \dots & \lambda_l \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_l & \lambda_l & \dots & r_l \end{bmatrix}_{z_l}$$

$$\therefore c_{ii'} = r_l - \frac{r_l}{k_l}, \text{ para todo } i = i' \quad (23)$$

$$c_{ii'} = -\frac{\lambda_l}{k_l}, \text{ para todo } i \neq i'$$

d. Para tratamentos regulares de experimentos diferentes

Como pode ser visto, pelas submatrizes envolvidas, todos os seus elementos são nulos.

$$\therefore c_{ij} = 0 \quad (24)$$

3.4.3. Obtenção do vetor  $\underline{Q}$ 

Os totais ajustados de tratamentos são obtidos pela subtração da correção  $NK^{-1}\underline{B}$  dos totais dos tratamentos.

Desenvolvendo o produto  $NK^{-1}\underline{B}$ , tem-se:

$$NK^{-1}\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} N_{c_1} B_1 + \frac{1}{k_2} N_{c_2} B_2 + \dots + \frac{1}{k_g} N_{c_g} B_g \\ \frac{1}{k_1} N_1 B_1 \\ \frac{1}{k_2} N_2 B_2 \\ \dots \\ \frac{1}{k_g} N_g B_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{(0)} \\ z_1^{-1} B^{(1)} \\ z_2^{-1} B^{(2)} \\ \dots \\ z_g^{-1} B^{(g)} \end{bmatrix}$$

onde:

$B_{\underline{z}}$  : vetor dos totais de blocos do experimento  $\underline{z}$ , de dimensão  $u_{\underline{z}} \times 1$ ;

$B^{(\underline{z})}$  : vetor das correções para o efeito de blocos com  $\underline{z} = 0, 1, 2, \dots, g$ .

Assim, o vetor  $\underline{Q}$  dos totais ajustados de tratamentos para blocos é dado por:

i) Para tratamentos comuns

$$\underline{Q}^{(0)} = \underline{T}^{(0)} - \underline{B}^{(0)}, \text{ ou ainda}$$

$$Q_s = T_s - \sum_{l=1}^g \frac{1}{k_l} \sum_{j=1}^{u_l} \delta_j^{(l)} (s) B_j^{(l)} (s)$$

onde:

$T_s$  é a soma das  $\sum_{l=1}^g r_l$  unidades experimentais onde o tratamento comum s aparece;

$B_j^{(l)} (s)$  é o total do bloco j no experimento l

$$\delta_j^{(l)} (s) = \begin{cases} 1, & \text{se o tratamento comum s ocorre no bloco j} \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

ii) Para os tratamentos regulares do experimento l

$$\underline{Q}^{(l)} = \underline{T} - \underline{B}^{(l)}, \text{ ou}$$

$$Q_i^{(l)} = T_i^{(l)} - \frac{1}{k_l} \sum_{j=1}^{u_l} \delta_j^{(l)} (i) B_j^{(l)} (i) \quad (26)$$

onde:

$T_i^{(l)}$  é a soma das  $r_l$  unidades experimentais do tratamento regular i;

$B_j^{(l)} (i)$  é a soma das observações das  $k_l$  unidades experimentais do j-ésimo bloco no experimento l .

$$\delta_j^{(l)} (i) = \begin{cases} 1, & \text{se o tratamento regular i ocorre no bloco j do} \\ & \text{experimento l} \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Assim de acordo com (21), (22), (23), (24), (25) e (26), a representação geral do sistema (15) é dada por:



### 3.4.4. Estimação dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos

Uma vez obtidas as matrizes C e Q, os efeitos de tratamentos podem ser estimados. Para isso, serão considerados dois métodos: método clássico e o método simplificado.

#### 3.4.4.1. Método Clássico

O método geral sugerido por Rao (apud PAVATE, 1961) trata os dados combinados como um novo experimento em blocos incompletos. Consiste na solução das equações normais ajustadas

$$C\bar{\tau} = Q \quad (28)$$

Como C é uma matriz singular de posto  $(v - 1)$ , o sistema (28) pode ser resolvido conforme SWAMINATHAN e DAS (1964), mediante a introdução de uma matriz de restrição A, com a mesma dimensão de C e posto igual ao grau de singularidade da matriz C, tal que a solução do sistema seja única. As restrições introduzidas produzem um sistema de equações, que pode ser escrito na forma:

$$A\bar{\tau} = \phi \quad (29)$$

A matriz A, para o caso em questão, seguindo SWAMINATHAN e DAS (1964), tem a seguinte estrutura:

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^g \frac{\lambda_l}{k_l} (c) J(c) & - \frac{\lambda_l}{k_l} (c) J(v - c) \\ \hline \phi & \phi \end{bmatrix}_v \quad (30)$$

onde J é uma matriz de elementos unitários.

De (28) e (29) efetuando-se a subtração, obtém-se:

$$(C - A)\hat{\underline{\Gamma}} = \underline{Q} \quad (31)$$

Fazendo  $C - A = M$ , onde M é uma matriz não singular, a solução do sistema (31) é dado por:

$$\hat{\underline{\Gamma}} = M^{-1}\underline{Q} \quad (32)$$

#### 3.4.4.2. Método Simplificado

Este método é útil para os pesquisadores que não estão familiarizados com a álgebra matricial. O método aqui sugerido está baseado na obtenção de fórmulas práticas para os efeitos ajustados de tratamentos e para as variâncias

dos contrastes entre duas médias de tratamentos, conforme propôs PAVATE (1961).

### 3.4.4.2.a. Estimação dos efeitos ajustados dos tratamentos comuns

Do sistema (27), tomando-se a primeira linha da matriz C, tem-se:

$$\left( r - \sum_{l=1}^g \frac{r_l}{k_l} \right) \hat{t}_1 - \sum_{l=1}^g \frac{\lambda_l}{k_l} (\hat{t}_2 + \dots + \hat{t}_c) - \frac{\lambda_1}{k_1} (\hat{t}_1^{(1)} + \hat{t}_2^{(1)} + \dots + \hat{t}_{z_1}^{(1)}) + \dots - \frac{\lambda_g}{k_g} (\hat{t}_1^{(g)} + \hat{t}_2^{(g)} + \dots + \hat{t}_{z_g}^{(g)}) = Q_1$$

Somando e subtraindo  $\sum_{l=1}^g \frac{\lambda_l}{k_l} \hat{t}_1$ , resulta

$$\left( r - \sum_{l=1}^g \frac{r_l}{k_l} + \sum_{l=1}^g \frac{\lambda_l}{k_l} \right) \hat{t}_1 - \sum_{l=1}^g \frac{\lambda_l}{k_l} (\hat{t}_1 + \dots + \hat{t}_c) - \frac{\lambda_1}{k_1} (\hat{t}_1^{(1)} + \hat{t}_2^{(1)} + \dots + \hat{t}_{z_1}^{(1)}) + \dots - \frac{\lambda_g}{k_g} (\hat{t}_1^{(g)} + \hat{t}_2^{(g)} + \dots + \hat{t}_{z_g}^{(g)}) = Q_1$$

Impondo a restrição  $\sum_{l=1}^g \frac{\lambda_l}{k_l} \sum_{s=1}^c t_s + \sum_{l=1}^g \frac{\lambda_l}{k_l} \sum_{i=1}^{z_l} t_i^{(l)} = 0$ , definida em (29) e (30) tem-se então que:

$$\left( r - \sum_{l=1}^g \frac{r_l}{k_l} + \sum_{l=1}^g \frac{\lambda_l}{k_l} \right) \hat{t}_1 = Q_1$$

Fazendo  $r = \sum_{l=1}^g \frac{r_l}{k_l} + \sum_{l=1}^g \frac{\lambda_l}{k_l} = \sum_{l=1}^g r_l E_l = S$ , segue-se que:

$$\hat{\tau}_1 = Q_1/S. \quad (33)$$

Dessa forma, para o  $s$ -ésimo tratamento comum, tem-se que:

$$\hat{\tau}_s = Q_s/S. \quad (34)$$

que é a expressão para a obtenção do estimador do  $s$ -ésimo efeito do tratamento comum.

#### 3.4.4.2.b. Estimação dos efeitos ajustados dos tratamentos regulares

Tomando a  $(c + 1)$ -ésima equação do sistema  $\hat{C}\tilde{\tau} = \underline{Q}$ , dado em (27) tem-se que:

$$-\frac{\lambda_1}{k_1}(\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \dots + \hat{\tau}_c) + \left(r_1 - \frac{r_1}{k_1}\right)\hat{\tau}_1^{(1)} - \frac{\lambda_1}{k_1}(\hat{\tau}_2^{(1)} + \hat{\tau}_3^{(1)} + \dots + \hat{\tau}_{z_1}^{(1)}) = \underline{Q}_1^{(1)}$$

Somando e subtraindo  $\frac{\lambda_1}{k_1}\hat{\tau}_1^{(1)}$ , vem:

$$-\frac{\lambda_1}{k_1}\hat{\tau}_1 + \left(r_1 - \frac{r_1}{k_1} + \frac{\lambda_1}{k_1}\right)\hat{\tau}_1^{(1)} - \frac{\lambda_1}{k_1}\hat{\tau}_1^{(1)} = \underline{Q}_1^{(1)}$$



$$-\frac{\lambda_1 \bar{t}}{k_1} + \left( \frac{r_1 (k_1 - 1) + \lambda_1}{k_1} \right) \bar{t}_1^{(1)} - \frac{\lambda_1 \bar{t}^{(1)}}{k_1} = Q_1^{(1)} \quad (35)$$

Porém, pela propriedade fundamental dos delineamentos BIB, tem-se que  $\lambda_l (v_l - 1) = r_l (k_l - 1)$  que substituído em (35) resulta

$$-\frac{\lambda_1 \bar{t}}{k_1} + \frac{\lambda_1 v_1 \bar{t}_1^{(1)}}{k_1} - \frac{\lambda_1 \bar{t}^{(1)}}{k_1} = Q_1^{(1)} \quad (36)$$

Generalizando para o  $i$ -ésimo tratamento regular do experimento  $l$ , segue-se que:

$$-\frac{\lambda_l \bar{t}}{k_l} + \frac{\lambda_l v_l \bar{t}_i^{(l)}}{k_l} - \frac{\lambda_l \bar{t}^{(l)}}{k_l} = Q_i^{(l)} \quad (37)$$

Somando (37) em relação a  $i$ , ou seja, em relação a todos os tratamentos regulares, obtém-se:

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda_l}{k_l} \sum_{i=1}^{z_l} \bar{t} + \frac{\lambda_l v_l}{k_l} \sum_{i=1}^{z_l} \bar{t}_i^{(l)} - \frac{\lambda_l}{k_l} \sum_{i=1}^{z_l} \bar{t}^{(l)} &= \sum_{i=1}^{z_l} Q_i^{(l)} \\ -\frac{\lambda_l z_l}{k_l} \bar{t} + \frac{\lambda_l v_l}{k_l} \bar{t}^{(l)} - \frac{\lambda_l z_l}{k_l} \bar{t}^{(l)} &= Q^{(l)} \\ -\frac{\lambda_l z_l}{k_l} \bar{t} + \frac{\lambda_l}{k_l} (v_l - z_l) \bar{t}^{(l)} &= Q^{(l)} \end{aligned} \quad (38)$$

Porém,  $v_l - z_l = c$  que, substituído em (38) resulta:

$$-\frac{\lambda_l z_l}{k_l} \bar{\epsilon} + c \frac{\lambda_l}{k_l} \bar{\epsilon}^{(l)} = Q^{(l)}$$

$$\bar{\epsilon}^{(l)} = \frac{k_l}{c \lambda_l} Q^{(l)} + \frac{1}{c} z_l \bar{\epsilon} \quad (39)$$

Somando-se (34) em relação aos tratamentos comuns, tem-se que:

$$\bar{\epsilon} = Q / S \quad (40)$$

Substituindo as expressões obtidas em (39) e (40) em (37) resulta:

$$-\frac{\lambda_l}{k_l} \frac{Q}{S} + \frac{\lambda_l v_l}{k_l} \bar{\epsilon}_i^{(l)} - \frac{\lambda_l}{k_l} \left( \frac{k_l}{c \lambda_l} Q^{(l)} + \frac{1}{c} z_l \frac{Q}{S} \right) = Q_i^{(l)}$$

$$-\frac{\lambda_l}{k_l} \frac{Q}{S} + \frac{\lambda_l v_l}{k_l} \bar{\epsilon}_i^{(l)} - \frac{1}{c} Q^{(l)} - \frac{\lambda_l z_l}{c k_l} \frac{Q}{S} = Q_i^{(l)}$$

$$-\frac{\lambda_l}{k_l} \frac{Q}{S} \left( 1 + \frac{z_l}{c} \right) + \frac{\lambda_l v_l}{k_l} \bar{\epsilon}_i^{(l)} - \frac{1}{c} Q^{(l)} = Q_i^{(l)}$$

Como  $1 + \frac{z_l}{c} = \frac{1}{c} (c + z_l) = \frac{v_l}{c}$ , fica:

$$-\frac{\lambda_l v_l Q_i}{k_l c s} + \frac{\lambda_l v_l}{k_l} \hat{\tau}_i^{(l)} - \frac{1}{c} Q_i^{(l)} = Q_i^{(l)}$$

$$\frac{\lambda_l v_l}{k_l} \hat{\tau}_i^{(l)} = Q_i^{(l)} + \frac{1}{c} Q_i^{(l)} + \frac{\lambda_l v_l Q_i}{c k_l s}$$

$$\hat{\tau}_i^{(l)} = \frac{k_l}{\lambda_l v_l} \left( Q_i^{(l)} + \frac{1}{c} Q_i^{(l)} + \frac{\lambda_l v_l Q_i}{c k_l s} \right)$$

$$\hat{\tau}_i^{(l)} = \frac{k_l}{\lambda_l v_l} Q_i^{(l)} + \frac{k_l}{c \lambda_l v_l} Q_i^{(l)} + \frac{Q_i}{c s}$$

Como  $E_l = \frac{\lambda_l v_l}{k_l r_l}$ , resulta:

$$\hat{\tau}_i^{(l)} = \frac{1}{r_l E_l} Q_i^{(l)} + \frac{1}{c r_l E_l} Q_i^{(l)} + \frac{1}{c s} Q_i \quad (41)$$

que é a expressão para a obtenção do estimador do  $i$ -ésimo efeito do tratamento regular do experimento  $l$ . Os resultados obtidos em (34) e (41) são concordantes aos obtidos por SWAMI NATHAN e DAS (1964).

Baseando-se nas expressões (34) e (41), os estimadores dos efeitos de tratamentos para a análise conjunta podem ser obtidas através das estimativas desses efeitos das análises individuais. Denotando  $\hat{\tau}_s^{(l)}$  como sendo a estimativa

do s-ésimo efeito do tratamento comum no experimento  $l$  e  $\hat{t}_i^{(l)}$ , o estimador do i-ésimo efeito do tratamento regular do experimento  $l$ , com significado similar para os  $Q_i^{(l)}$ , tem-se:

$$\hat{t}_s = \frac{1}{g} \sum_{l=1}^g r_{lE_l} \hat{t}_s^{(l)} \quad (42)$$

$$\hat{t}_i^{(l)} = \hat{t}_i^{(l)} + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{z_l} \hat{t}_i^{(l)} + \frac{1}{c} \sum_{s=1}^c \hat{t}_s, \text{ para } v_l - c \geq c$$

ou

$$\hat{t}_i^{(l)} = \hat{t}_i^{(l)} - \frac{1}{c} \sum_{s=1}^c \hat{t}_s^{(l)} + \frac{1}{c} \sum_{s=1}^c \hat{t}_s, \text{ para } v_l - c < c \quad (43)$$

### 3.4.5. Construção da matriz $M^{-1}$

Sabe-se que de (32)  $\hat{\tau} = M^{-1}Q$ . Além disso por (34)  $\hat{t}_s = Q_s/S$  e por (41)  $\hat{t}_i^{(l)} = \frac{1}{r_{lE_l}} Q_i^{(l)} + \frac{1}{cr_{lE_l}} Q_i^{(l)} + \frac{1}{cS} Q$ . Assim, baseando-se nas expressões de  $\hat{t}_s$  e de  $\hat{t}_i^{(l)}$ , os

elementos da matriz  $M^{-1}$  podem ser facilmente determinados. Partindo-se a mesma em submatrizes como

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} M^{00} & \phi & \phi & \dots & \phi \\ M^{01} & M^{11} & \phi & \dots & \phi \\ M^{02} & \phi & M^{22} & \dots & \phi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M^{0g} & \phi & \phi & \dots & M^{gg} \end{bmatrix}_v, \text{ onde:}$$

$M^{00} = \frac{1}{S} I_{(c)}$  é uma submatriz diagonal de dimensão  $c \times c$ , referente aos tratamentos comuns.

$M^{0g} = \frac{1}{cS} (z_{\lambda})^J_{(c)}$  é uma submatriz de dimensão  $c \times z_{\lambda}$ , referente aos tratamentos comuns com os tratamentos regulares do experimento  $\lambda$ .

$M^{gg}$  é uma submatriz de dimensão  $z_g \times z_g$ , referente aos tratamentos regulares do  $\lambda$ -ésimo experimento, onde:

$$m_{ii'}^{(\lambda)} = \frac{1}{r_{\lambda} E_{\lambda}} \left(1 + \frac{1}{c}\right), \text{ para } i = i';$$

e

$$m_{ii'}^{(\lambda)} = \frac{1}{cr_{\lambda} E_{\lambda}}, \text{ para } i \neq i'.$$

3.4.6. Esperança matemática de  $\hat{\underline{\Gamma}}$ 

Considerando o modelo (7) e seguindo o procedimento apresentado por PIMENTEL GOMES (1967), tem-se que:

$$E(\hat{\underline{\Gamma}}) = E(M^{-1}Q)$$

onde  $Q = WX'y$ , conforme relatado em (16). Logo,

$$\begin{aligned} E(\hat{\underline{\Gamma}}) &= M^{-1}WX'E(\underline{y}), \text{ mas } E(\underline{y}) = X\underline{\theta} \\ &= M^{-1}WX'X\underline{\theta} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\text{Mas } WX'X = \begin{bmatrix} I_V & -NK^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & N \\ N' & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R - NK^{-1}N' & \phi \\ \phi' & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \phi \end{bmatrix}$$

voltando-se em (44), tem-se então que:

$$\begin{aligned} E(\hat{\underline{\Gamma}}) &= M^{-1} \begin{bmatrix} C & \phi \end{bmatrix} \underline{\hat{\theta}} = M^{-1}C\underline{\Gamma} \\ &= M^{-1}(M + A)\underline{\Gamma} \\ &= \underline{\Gamma} + M^{-1}A\underline{\Gamma} \end{aligned}$$

Admitindo-se que a equação (29) para  $\hat{\underline{\Gamma}}$  seja válida também para os parâmetros, então  $A\underline{\Gamma} \equiv \underline{\phi}$ . Logo,

$$E(\hat{\underline{\Gamma}}) = \underline{\Gamma}$$

ou seja,  $\hat{\underline{\Gamma}}$  é um estimador imparcial de  $\underline{\Gamma}$ .

3.4.7. Matriz de dispersão para  $\hat{\underline{\Gamma}}$ 

Por definição, a matriz de dispersão para  $\hat{\underline{\Gamma}}$  é

$$D(\hat{\underline{\Gamma}}) = E\left\{[\hat{\underline{\Gamma}} - E(\hat{\underline{\Gamma}})][\hat{\underline{\Gamma}} - E(\hat{\underline{\Gamma}})]'\right\}$$

Viu-se, em (32), que

$$\hat{\underline{\Gamma}} = M^{-1}\underline{Q}$$

Como  $\underline{Q} = WX'\underline{y}$ , fica:

$$\hat{\underline{\Gamma}} = M^{-1}WX'\underline{y} \quad (45)$$

ou

$$\hat{\underline{\Gamma}} = M^{-1}WX'(X\underline{\theta} + \underline{\varepsilon})$$

donde

$$\hat{\underline{\Gamma}} = M^{-1}WX'X\underline{\theta} + M^{-1}WX'\underline{\varepsilon}$$

Logo,

$$E(\hat{\underline{\Gamma}}) = M^{-1}WX'X\underline{\theta}$$

ou ainda, por (17)

$$E(\hat{\underline{\Gamma}}) = M^{-1}C\underline{\theta}$$

De forma que

$$\hat{\underline{I}} - E(\hat{\underline{I}}) = M^{-1}WX'\underline{\varepsilon}$$

e

$$[\hat{\underline{I}} - E(\hat{\underline{I}})][\hat{\underline{I}} - E(\hat{\underline{I}})]' = M^{-1}WX'\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}'XW'M^{-1}$$

Como admite-se em (3.1) que  $E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') = \sigma^2 I$ , então:

$$D(\hat{\underline{I}}) = M^{-1}WX'XW'M^{-1}\sigma^2$$

que por (17), fica:

$$D(\hat{\underline{I}}) = M^{-1}CM^{-1}\sigma^2 \quad (46)$$

#### 3.4.8. Variância de uma função linear estimável

Se  $\underline{p}'\hat{\underline{I}}$  é uma função linear estimável, então existe um vetor  $\underline{a}$ , tal que  $\underline{p}' = \underline{a}'C$ , ou seja,  $\underline{p} = C\underline{a}$ . Dessa forma, conforme PIMENTEL GOMES (1967), a expressão (46) fica:

$$V(\underline{p}'\hat{\underline{I}}) = \underline{p}'M^{-1}CM^{-1}C\underline{a}\sigma^2 \quad (47)$$

Por outro lado, PIMENTEL GOMES (1967), IEMMA (1985), dentre outros, mostram que  $M^{-1}$  é uma inversa condicional de  $C$ . Assim,



$$CM^{-1}C = C \quad (48)$$

e como C é uma matriz simétrica, segue-se também que:

$$CM^{-1}'C = C \quad (49)$$

Substituindo (49) em (47) vem:

$$V(\underline{p}'\hat{\underline{I}}) = \underline{p}'M^{-1}C\underline{a}\sigma^2$$

Mas  $C\underline{a} = \underline{p}$ , logo

$$V(\underline{p}'\hat{\underline{I}}) = \underline{p}'M^{-1}\underline{p}\sigma^2 \quad (50)$$

Como foi visto no item (3.4.5), a matriz  $M^{-1}$  pode ser obtida e dessa forma a variância de um contraste entre dois tratamentos pode ser determinada através de (50), pois os contrastes representam um subconjunto das funções lineares estimáveis.

Para o caso em questão, há quatro tipos de contrastes possíveis entre médias de dois tratamentos, a saber:

**1º tipo:** Variância de um contraste envolvendo dois tratamentos comuns

$$V(\hat{m}_s - \hat{m}_{s'}) = V(\underline{t}_s - \underline{t}_{s'}) = \begin{bmatrix} 0, \dots, 1^{(s)}, \dots, -1^{(s')}, \dots, 0, \dots \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ -1 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ \phi \end{bmatrix}$$

$$V(\hat{m}_S - \hat{m}'_S) = \left( \frac{1}{S} + \frac{1}{S} \right) \sigma^2$$

$$V(\hat{m}_S - \hat{m}'_S) = \frac{2}{S} \sigma^2$$

e sua estimativa,

$$V(\hat{m}_S - \hat{m}'_S) = \frac{2}{S} s^2 \quad (51)$$

2º tipo: Variância de um contraste envolvendo um tratamento comum e um tratamento regular

$$V(\hat{m}_S - \hat{m}_i^{(2)}) = V(\hat{\tau}_S - \hat{\tau}_i^{(2)}) = [0, \dots, \overset{(s)}{1}, \dots, 0, \dots, \overset{(i)}{-1}, \dots, 0] M^{-1} \begin{bmatrix} c \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \sigma^2$$

$$= \left( \frac{1}{S} + \frac{1}{r_l E_l} \left( 1 + \frac{1}{c} \right) - \frac{1}{cS} \right) \sigma^2$$

Fazendo algumas simplificações, segue-se que:

$$V(\hat{m}_S - \hat{m}_i^{(2)}) = \left[ \left( 1 - \frac{1}{c} \right) / S + \frac{1}{r_l E_l} \left( 1 + \frac{1}{c} \right) \right] \sigma^2$$

Logo, a sua estimativa é dada por:

$$V(\hat{m}_s - \hat{m}_i^{(z)}) = \left[ \left(1 - \frac{1}{c}\right) / S + \frac{1}{r_z E_z} \left(1 + \frac{1}{c}\right) \right] s^2 \quad (52)$$

**3º tipo:** Variância de um contraste entre dois tratamentos regulares do mesmo experimento.

$$V(\hat{m}_i^{(z)} - \hat{m}_{i'}^{(z)}) = V(\bar{t}_i^{(z)} - \bar{t}_{i'}^{(z)}) = [\underbrace{\phi \dots 0, \dots, 1}_{(i)}, \dots, \underbrace{-1, \dots, 0 \dots \phi}_{(i')}] M^{-1} \sigma^2$$

$$M^{-1} \begin{bmatrix} \phi \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ -1 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ \phi \end{bmatrix} \sigma^2$$

$$= \left[ \frac{1}{r_z E_z} \left(1 + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{r_z E_z} \left(1 + \frac{1}{c}\right) - \frac{1}{cr_z E_z} - \frac{1}{cr_z E_z} \right] \sigma^2$$

$$= \left[ \frac{2(c+1)}{cr_z E_z} - \frac{2}{cr_z E_z} \right] \sigma^2$$

$$V(\hat{m}_i^{(z)} - \hat{m}_{i'}^{(z)}) = \frac{2(c+1-1)}{cr_z E_z} \sigma^2$$

$$V(\hat{m}_i^{(z)} - \hat{m}_{i'}^{(z)}) = \frac{2}{r_z E_z} \sigma^2$$

e sua estimativa,

$$V(\hat{m}_i^{(z)} - \hat{m}_{i'}^{(z)}) = \frac{2}{r_{z,E_z}} s^2 \tag{53}$$

4º tipo: Variância de um contraste envolvendo dois tratamentos regulares de experimentos diferentes.

$$V(\hat{m}_i^{(z)} - \hat{m}_{i'}^{(z)}) = V(\xi_i^{(z)} - \xi_{i'}^{(z)}) = \begin{bmatrix} \dots, \dots, 1, \dots, 0, 0, \dots, -1, \dots, 0 \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} \phi \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \sigma^2$$

$$= \left[ \frac{1}{r_{z,E_z}} \left(1 + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{r_{z,E_{z'}}} \left(1 + \frac{1}{c}\right) \right] \sigma^2$$

$$= \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left( \frac{1}{r_{z,E_z}} + \frac{1}{r_{z,E_{z'}}} \right) \sigma^2$$

e sua estimativa,

$$V(\hat{m}_i^{(z)} - \hat{m}_{i'}^{(z)}) = \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left( \frac{1}{r_{z,E_z}} + \frac{1}{r_{z,E_{z'}}} \right) s^2 \tag{54}$$

onde  $s^2$  é o quadrado médio da interação trats comuns x experi-  
mentos ajustada. Se o quadrado médio da interação não for  
significativo quando comparado com o quadrado médio residual,  
então o valor de  $s^2$  é dado pelo quadrado médio residual

Segundo GIRI (1963), o valor mais apropriado  
de  $s^2$  para a comparação de tratamentos regulares pertencentes  
a experimentos diferentes é o quadrado médio da interação en-  
tre tratamentos comuns e experimentos mesmo que essa seja não  
significativa.

#### 3.4.9. Casos particulares

Serão considerados aqui os vários casos que  
podem ocorrer com os experimentos em BIB, obtendo-se, assim,  
simplificações para as estimativas dos efeitos de tratamentos,  
bem como das variâncias das estimativas dos vários contrastes  
possíveis entre duas médias de tratamentos.

**Caso 1:** quando há vários experimentos em BIB com apenas um  
tratamento comum, o qual representa um tratamento con-  
trole. Seja  $t_1$  denotando o tratamento comum.

a. Soma de quadrados de tratamentos ajustada

$$SQT(aj.) = \sum_{l=1}^g [SQT(aj.)]_l$$

isto é, a soma de quadrados de tratamentos ajustada é dada pela soma de quadrados de tratamentos ajustada das análises individuais. Nesse caso não há interação entre tratamentos comuns com experimentos.

b. Estimativas dos efeitos de tratamentos ajustados

b.1. para tratamentos comuns

$$\bar{\tau}_1 = \frac{1}{g} \sum_{l=1}^g \tau_1^{(l)}$$

b.2. para tratamentos regulares

$$\tau_i^{(l)} = \tau_i^{(l)} - \tau_i^{(l)} + \bar{\tau}_1, \text{ baseado em (43).}$$

c Estimativas das variâncias das estimativas dos contrastes

c.1. Entre duas médias de tratamentos comuns - este caso não ocorre.

c.2. Entre o tratamento comum e um tratamento regular do experimento  $l$ .

$$\mathcal{V}\left(\hat{m}_1 - \hat{m}_i^{(l)}\right) = \frac{2}{r_l E_l} s^2$$

c.3. Entre dois tratamentos regulares do mesmo experimento

$$\mathcal{V}\left(\hat{m}_i^{(l)} - \hat{m}_{i'}^{(l)}\right) = \frac{2}{r_l E_l} s^2$$

c.4. Entre dois tratamentos regulares de experimentos diferentes

$$\mathcal{V}\left(\hat{m}_i^{(l)} - \hat{m}_{i'}^{(l')}\right) = 2\left(\frac{1}{r_l E_l} + \frac{1}{r_{l'} E_{l'}}\right) s^2$$

**Caso 2:** Quando há vários experimentos em BIB com os mesmos tratamentos, com os demais parâmetros variáveis. Neste caso  $c = v$ . Em outras palavras, se quer combinar vários experimentos em BIB com os mesmos tratamentos em todos os experimentos, conduzidos em vários locais num mesmo ano, ou vice-versa. Neste caso, segue - se que:

a. Soma de quadrados de tratamentos ajustada

$$SQT(aj.) = \sum_{i=1}^v \frac{Q_i^2}{S}$$

b. Estimativa dos efeitos ajustados de tratamentos

$$\hat{\tau}_i = Q_i / S$$

c. Estimativa da variância da estimativa de um contraste entre duas médias de tratamentos

$$V(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2}{S} s^2$$



Os demais casos considerados no item anterior não ocorrem aqui.

Caso 3: Um caso importante dos delineamentos BIB é obtido quando  $v_l = v$ ,  $k_l = k$ ,  $r_l = r$ ,  $u_l = u$  e  $\lambda_l = \lambda$ . Neste caso, os delineamentos BIB com parâmetros variáveis de um experimento para outro, reduzem-se para os delineamentos BIB com os mesmos parâmetros e tratamentos comuns para todos os experimentos.

a. Estimativa das variâncias das estimativas dos contrastes

a.1. Entre dois tratamentos comuns

$$V(\hat{m}_s - \hat{m}_{s'}) = \frac{2}{rEg} s^2$$

a.2. Entre um tratamento comum e um tratamento regular do experimento  $l$

$$V(\hat{m}_s - \hat{m}_i^{(l)}) = \frac{1}{rE} \left( 1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{g} - \frac{1}{gc} \right) s^2$$

a.3. Entre dois tratamentos regulares do mesmo experimento

$$V(\hat{m}_i^{(l)} - \hat{m}_{i'}^{(l)}) = \frac{2}{rE} s^2$$

a.4. Entre dois tratamentos regulares de experimentos diferentes

$$\hat{V}\left(\hat{m}_i^{(z)} - \hat{m}_i^{(z')}\right) = \left(1 + \frac{1}{c}\right) \frac{2}{rE} s^2$$

Esses resultados são concordantes aos obtidos por PAVATE (1961).

b. Estimativa dos efeitos ajustados de tratamentos

$$\hat{t}_s = Q_s / rEg$$

e

$$\hat{t}_i^{(z)} = \frac{1}{rE} \left( \frac{1}{gc} Q_i + \frac{1}{c} Q_i^{(z)} + Q_i^{(z)} \right)$$

As expressões para a obtenção desses efeitos a partir dos efeitos das análises individuais são idênticas àquelas obtidas em (42) e (43).

c. Se  $c = 1$ , isto é, há apenas um tratamento comum, as fórmulas para as estimativas das variâncias das estimativas dos contrastes modificam-se para:

c.1. Entre o tratamento comum e um tratamento regular do experimento  $z$

$$\hat{V}\left(\hat{m}_1 - \hat{m}_i^{(z)}\right) = \frac{2}{rE} s^2$$

c.2. Entre dois tratamentos regulares do mesmo experimento

$$V\left(\hat{m}_i^{(l)} - \hat{m}_{i'}^{(l)}\right) = \frac{2}{rE} s^2$$

c.3. Entre dois tratamentos regulares de experimentos diferentes

$$V\left(\hat{m}_i^{(l)} - \hat{m}_{i'}^{(l')}\right) = \frac{4}{rE} s^2$$

d. Se  $c = v$ , isto é, há vários experimentos em BIB com os mesmos tratamentos e parâmetros idênticos. Neste caso, os resultados são os que seguem:

d.1. Soma de quadrados de tratamentos ajustada

$$SQT(aj.) = \frac{1}{rEg} \sum_i^v Q_i^2$$

$$SQT(aj.) = \sum_{l=1}^g [SQT(aj.)]_l - SQT \times A(aj.)$$

d.2. Estimativa dos efeitos ajustados de tratamentos

$$\hat{t}_i = \frac{1}{g} \sum_{l=1}^g t_i^{(l)}, \text{ onde } t_i^{(l)} \text{ é o efeito individual do } i\text{-ésimo tratamento do experimento } l.$$

ou

$$t_i = \frac{1}{rEg} Q_i$$

d.3. Estimativa da variância da estimativa do contraste entre duas médias de tratamentos

$$V(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2}{rEg} s^2$$

Caso 4: Quando ocorrer que  $u_l = r_l = \lambda_l$  e  $k_l = v_l$ , os experimentos em BIB reduzem-se para os delineamentos em blocos ao acaso com tamanhos diferentes de um experimento para outro. Assim, várias simplificações nas expressões surgem como serão descritas a seguir:

a. Estimativas dos efeitos de tratamentos

$$t_s = Q_s/r.$$

e

$$t_i^{(l)} = \frac{1}{cr_l} Q_i^{(l)} + \frac{1}{cr} Q_i + \frac{1}{r_l} Q_i^{(l)}$$

ou a partir das análises individuais:

$$t_s = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^g r_l t_i^{(l)}$$

e

$$t_i^{(l)} = t_i^{(l)} + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^z t_i^{(l)} + \frac{1}{c} \sum_{s=1}^c t_s$$

ou

$$\hat{t}_1^{(l)} = \hat{t}_1^{(l)} - \frac{1}{c} \sum_{s=1}^c \hat{t}_s^{(l)} + \frac{1}{c} \sum_{s=1}^c \hat{t}_s$$

b. Estimativa das variâncias das estimativas dos contrastes entre dois tratamentos

b.1. Entre dois tratamentos comuns

$$V(\hat{m}_s - \hat{m}_{s'}) = \frac{2}{r} s^2$$

b.2. Entre um tratamento comum com um tratamento regular do experimento  $l$

$$V(\hat{m}_s - \hat{m}_i^{(l)}) = \left[ \frac{1}{r_l} \left( 1 + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{c} \right) \right] s^2$$

b.3. Entre dois tratamentos regulares do experimento  $l$

$$V(\hat{m}_i^{(l)} - \hat{m}_{i'}^{(l)}) = \frac{2}{r_l} s^2$$

b.4. Entre dois tratamentos regulares de experimentos diferentes

$$V(\hat{m}_i^{(l)} - \hat{m}_{i'}^{(l')}) = \left( 1 + \frac{1}{c} \right) \left( \frac{1}{r_l} + \frac{1}{r_{l'}} \right) s^2$$

Essas expressões são todas concordantes com aquelas obtidas por PIMENTEL GOMES (1970).

c. Se  $c = 1$ , isto é, há apenas um tratamento comum

c.1. Estimativas dos efeitos de tratamentos

$$\bar{t}_i = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^g r_l \bar{t}_i^{(l)}$$

$$\bar{t}_i^{(l)} = \bar{t}_i'^{(l)} - \bar{t}_i^{(l)} + \bar{t}_s$$

c.2. Estimativa das variâncias das estimativas dos contrastes

$$V(\bar{m}_1 - \bar{m}_i^{(l)}) = \frac{2}{r_l} s^2$$

$$V(\bar{m}_i^{(l)} - \bar{m}_i'^{(l)}) = \frac{2}{r_1} s^2$$

$$V(\bar{m}_i^{(l)} - \bar{m}_i'^{(l)}) = 2 \left( \frac{1}{r_l} + \frac{1}{r_l'} \right) s^2$$

- **Caso 5:** Um dos casos particulares mais importantes dos delineamentos BIB, ocorre quando  $u = r = \lambda$  e  $k = v$ . Aqui, os delineamentos BIB reduzem-se para os conhecidos blocos ao acaso com  $c$  tratamentos comuns e com a mesma estrutura de um experimento para outro. As simplificações são:

a. Soma de quadrados de tratamentos ajustada

Poderã ser obtida de duas formas distintas:

$$a.1. \text{SQT(aj.)} = \sum_{l=1}^g [\text{SQT(aj.)}]_l - \text{SQT} \times A(\text{aj.})$$

$$a.2. \text{SQT(aj.)} = \text{SQT(não aj.)} - (\text{SQA} - \text{SQA}^*)$$

onde

$$\text{SQA}^* = \sum_{l=1}^g \left[ \frac{G_c^{(l)}}{c r_l} \right]^2 - \frac{G_c^2}{c r} , \text{ sendo } G_c^{(l)} \text{ o total dos tratamentos comuns no experimento } l \text{ e } G_c, \text{ o total dos tratamentos comuns.}$$

e

$$\text{SQA} = \sum_{l=1}^g \frac{A_l^2}{n_l} - C_o, \text{ como definido em (62)}$$

sendo  $A_l$  e  $C_o$  o total do experimento  $l$  e termo correção, respectivamente.

b. Estimativa dos efeitos de tratamentos

$$\bar{t}_s = Q_s / g r$$

e

$$\bar{t}_i^{(l)} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{g c} Q_{.} + \frac{1}{c} Q_{.}^{(l)} + Q_i^{(l)} \right)$$

ou a partir das análises individuais:

$$\bar{t}_s = \frac{1}{g} \sum_{l=1}^g \bar{t}_s^{(l)}$$

$$\bar{t}_i^{(l)} = \bar{t}_i^{(l)} + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^z \bar{t}_i^{(l)} + \frac{1}{c} \sum_{s=1}^c \bar{t}_s$$

ou

$$\hat{t}_i^{(l)} = \hat{t}_i^{(l')} - \frac{1}{c} \sum_{s=1}^c \hat{t}_s^{(l)} + \frac{1}{c} \sum_{s=1}^c \hat{t}_s, \text{ como em (43)}$$

c. Estimativa das variâncias das estimativas dos contrastes entre dois tratamentos

c.1. Entre dois tratamentos comuns

$$\hat{v}(\hat{m}_s - \hat{m}_{s'}) = \frac{2}{gr} s^2$$

c.2. Entre um tratamento comum e um tratamento regular do experimento  $l$ .

$$\hat{v}(\hat{m}_s - \hat{m}_i^{(l)}) = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{g} - \frac{1}{cg} \right) s^2$$

c.3. Entre dois tratamentos regulares do mesmo experimento

$$\hat{v}(\hat{m}_i^{(l)} - \hat{m}_{i'}^{(l)}) = \frac{2}{r} s^2$$

c.4. Entre dois tratamentos regulares de experimentos diferentes

$$\hat{v}(\hat{m}_i^{(l)} - \hat{m}_{i'}^{(l')}) = \frac{2}{r} \left( 1 + \frac{1}{c} \right) s^2$$



Estes resultados são todos idênticos aos obtidos por PIMENTEL GOMES e GUIMARÃES (1958).

d. Se  $c = 1$ , as simplificações decorrentes são:

d.1. Soma de quadrados de tratamentos

$$SQT = \sum_{l=1}^g (SQT)_l$$

d.2. Estimativa das variâncias das estimativas dos contrastes entre dois tratamentos

$$V(\hat{m}_1 - \hat{m}_{i'}^{(l)}) = \frac{2}{r} s^2$$

$$V(\hat{m}_i^{(l)} - \hat{m}_{i'}^{(l)}) = \frac{2}{r} s^2$$

$$V(\hat{m}_i^{(l)} - \hat{m}_{i'}^{(l')}) = \frac{4}{r} s^2$$

e. Se  $c = v$ , isto é, há  $g$  experimentos em blocos ao acaso para serem analisados conjuntamente.

e.1. Soma de quadrados de tratamentos

$$SQT = \sum_{i=1}^v \frac{T_i^2}{rg} - \frac{G^2}{gvr}$$

onde,  $T_i$  é o total do  $i$ -ésimo tratamento em todos os experimentos e  $G$ , o total geral.

e.2. Estimativa da variância da estimativa do contraste entre duas médias de tratamentos.

$$V(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2}{r} s^2.$$

3.4.10. Procedimento para a obtenção da soma de quadrados para a interação T x A

A soma de quadrados para a interação entre tratamentos comuns e experimentos ajustada pode ser obtida a partir dos totais ajustados de tratamentos das análises individuais. Para isso, constrói-se uma tabela de dupla entrada entre tratamentos comuns e experimentos, onde as caselas da tabela conterão os totais ajustados de tratamentos das análises individuais ponderadas por  $r_l E_l$ . Seja  $Q_s^{(l)}$  o total ajustado do  $s$ -ésimo tratamento comum do experimento  $l$ . Forma-se, então a seguinte tabela:

Tabela de dupla entrada de tratamentos comuns e experimentos com os valores  $Q_s^{1,2}$ 

Exps.	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	...	T <sub>c</sub>	TOTALS
$A_1$	$Q_1^1 (1) (r_1 E_1)^*$	$Q_2^1 (1) (r_1 E_1)$	...	$Q_c^1 (1) (r_1 E_1)$	$Q_1^1 (c r_1 E_1)$
$A_2$	$Q_1^2 (2) (r_2 E_2)$	$Q_2^2 (2) (r_2 E_2)$	...	$Q_c^2 (2) (r_2 E_2)$	$Q_2^2 (c r_2 E_2)$
...	...	...	...	...	...
$A_g$	$Q_1^g (g) (r_g E_g)$	$Q_2^g (g) (r_g E_g)$	...	$Q_c^g (g) (r_g E_g)$	$Q_1^g (c r_g E_g)$
TOTALS	$Q_1 (S)$	$Q_2 (S)$	...	$Q_c (S)$	$Q (S)$

(\*) Os termos entre parênteses na tabela indicam as ponderações para cada casela, com os respectivos totais marginais.

Aqui tem-se que:

$$Q_s = \sum_{l=1}^g Q'_s(l); \quad Q_{\cdot}(l) = \sum_{s=1}^c Q'_s(l) \quad \text{e} \quad Q_{\cdot} = \sum_{l=1}^g \sum_{s=1}^c Q'_s(l)$$

Assim,

$$SQA^* = \left\{ \frac{1}{c} \sum_{l=1}^g \frac{1}{r_l E_l} [Q_{\cdot}(l)]^2 \right\} - \frac{1}{cS_{\cdot}} (Q_{\cdot})^2$$

$$SQT^* = \frac{1}{S_{\cdot}} \sum_{s=1}^c (Q_s)^2 - \frac{1}{cS_{\cdot}} (Q_{\cdot})^2$$

$$SQT^*, A^* = \sum_{l=1}^g \frac{1}{r_l E_l} \sum_{s=1}^c [Q'_s(l)]^2 - \frac{1}{cS_{\cdot}} (Q_{\cdot})^2$$

e finalmente,

$$SQT \times A(\text{aj.}) = SQT^*, A^* - (SQT^* + SQA^*).$$

Para os delineamentos em blocos ao acaso, os termos  $Q'_s(l)$  e  $r_l E_l$  no corpo da tabela devem ser substituídos pelos totais  $T_s$  e repetições  $r_l$  dos respectivos tratamentos comuns. Segue-se, depois, a mesma seqüência de cálculos para a obtenção da soma de quadrados entre tratamentos comuns e experimentos.

### 3.4.11. Estimadores das médias ajustadas de tratamentos

#### 3.4.11.1. Experimentos em BIB

A obtenção das estimativas das médias ajustadas de tratamentos para os delineamentos em BIB são dadas por

$$\hat{m}_i = \hat{m} + \hat{t}_i, \text{ com } i = 1, 2, \dots, c, c + 1, \dots, v .$$

onde:

$\hat{m}$  é a média geral de todos os experimentos e

$\hat{t}_i$  o efeito do  $i$ -ésimo tratamento (comum ou regular).

#### 3.4.11.2. Experimentos em blocos ao acaso

##### i. Tratamentos comuns

$$\hat{m}_s = \hat{m} + \hat{t}_s \quad (55)$$

Porém, de (34)  $\hat{t}_s = Q_s/S$ , resulta:

$$\hat{t}_s = \frac{1}{r} \left( T_s - \sum_{l=1}^g \frac{1}{k_l} \sum_{j=1}^{u_l} B_j^{(l)}(s) \right)$$

$$\hat{t}_s = \frac{1}{r} T_s - \frac{1}{r} \sum_{l=1}^g \frac{1}{k_l} G_s^{(l)}$$

$$\hat{t}_s = \frac{1}{r} T_s - \hat{m} \quad (56)$$

Substituindo (56) em (55) resulta

$$\hat{m}_s = \hat{m} + \frac{1}{r} T_s - \hat{m}$$

$$\hat{m}_s = \frac{1}{r} T_s$$

ou seja, as estimativas das médias ajustadas para tratamentos comuns são dadas pela médias aritméticas dos respectivos tratamentos comuns, não necessitando de nenhum ajuste.

ii. Tratamentos regulares

$$\hat{m}_i^{(l)} = \hat{m} + \hat{t}_i^{(l)} \quad (57)$$

Mas, conforme foi obtido no item 3.4.9, a estimativa do efeito do  $i$ -ésimo tratamento regular é dada por:

$$\hat{t}_i^{(l)} = \frac{1}{cr_l} Q_i^{(l)} + \frac{1}{cr} Q_i + \frac{1}{r_l} Q_i^{(l)}$$

$$\hat{t}_i^{(l)} = \frac{1}{cr_l} (T_i^{(l)} - \sum_{i=1}^{z_l} \frac{G_l}{k_l}) + \frac{1}{cr} (T_i - c \sum_{l=1}^g \frac{1}{k_l} G_l) + \frac{1}{r_l}$$

$$(T_i^{(l)} - \frac{1}{k_l} G_l)$$

$$= \frac{1}{cr_l} T^{(l)} - \frac{1}{cr_l} z_l \frac{G_l}{k_l} + \frac{1}{cr} T - \frac{1}{r} \sum_{l=1}^g \frac{1}{k_l} G_l + \frac{1}{r_l}$$

$$T_i^{(l)} - \frac{1}{r_l k_l} G_l$$

Porém,  $\frac{1}{r} \sum_{l=1}^g \frac{1}{k_l} G_l = \hat{m}$ , resulta

$$\hat{t}_i^{(l)} = \frac{1}{cr_l} T^{(l)} - \frac{1}{cr_l} z_l \frac{G_l}{k_l} + \frac{1}{cr} T - \hat{m} + \frac{1}{r_l} T_i^{(l)} - \frac{1}{r_l k_l} G_l \quad (58)$$

Substituindo a expressão (58) em (57), segue-se que

$$\hat{m}_i^{(l)} = \frac{1}{r_l} T_i^{(l)} - \left( \frac{z_l}{cr_l k_l} + \frac{1}{r_l k_l} \right) G_l + \frac{1}{cr_l} T^{(l)} + \frac{1}{cr} T. \quad (59)$$

Mas  $\left( \frac{z_l}{cr_l k_l} + \frac{1}{r_l k_l} \right) = \frac{z_l + c}{cr_l k_l} = \frac{1}{cr_l}$ , que substituindo em (59),

vem:

$$\begin{aligned} \hat{m}_i^{(l)} &= \frac{1}{r_l} T_i^{(l)} - \frac{1}{cr_l} G_l + \frac{1}{cr_l} T^{(l)} + \frac{1}{cr} T. \\ &= \frac{1}{r_l} T_i^{(l)} - \frac{1}{cr_l} (G_l - T^{(l)}) + \frac{1}{cr} T. \end{aligned}$$

Como  $G_l = G_c^{(l)} + T_i^{(l)}$ , onde  $G_c^{(l)}$  é o total dos tratamentos comuns no experimento  $l$  e  $T_i = G_c$  é o total dos tratamentos comuns em todos os experimentos, resulta:

$$\hat{m}_i^{(l)} = \frac{1}{r_l} T_i^{(l)} - \frac{1}{cr_l} G_c^{(l)} + \frac{1}{cr} G_c$$

$$\hat{m}_i^{(l)} = \frac{1}{r_l} T_i^{(l)} - \left[ \frac{1}{cr_l} G_c^{(l)} - \frac{1}{cr} G_c \right]$$

$$\hat{m}_i^{(l)} = \frac{1}{r_l} T_i^{(l)} - c_l \tag{60}$$

$$\text{onde, } c_l = \frac{1}{cr_l} G_c^{(l)} - \frac{1}{cr} G_c$$

Pela expressão (60) vê-se que, as médias ajustadas dos tratamentos regulares são obtidas pela média do tratamento regular  $i$  do experimento  $l$  subtraída da correção  $c_l$ , onde:

$c_l = (\text{média dos tratamentos comuns no experimento } l) - (\text{média geral dos tratamentos comuns}).$



### 3.5. Somas de quadrados

Uma vez obtidos os efeitos ajustados de tratamentos como em (32) ou por (34) e (41) obtém-se a soma de quadrados de tratamentos ajustada da mesma forma como nos delineamentos em blocos incompletos. A soma de quadrados para a interação entre tratamentos comuns e experimentos ajustada é obtida pelo procedimento dado no item 3.4.10 ou pela diferença entre as demais somas de quadrados, uma vez que o resíduo para a análise conjunta é uma função linear dos resíduos das análises individuais.

- . Soma de quadrados da média geral (correção)

$$C_0 = \left( \sum_{l=1}^g \sum_{j=1}^{b_l} \sum_{i=1}^{v_l} y_{ijl} \right)^2 / n$$

- . Soma de quadrados de tratamentos ajustada

$$SQT(aj.) = \tilde{I}'\tilde{Q} = \sum_{s=1}^c \tilde{t}_s Q_s + \sum_{l=1}^g \sum_{i=1}^{z_l} \tilde{t}_i^{(l)} Q_i^{(l)} \quad (61)$$

- . Soma de quadrados entre experimentos não ajustada

$$SQA(\text{não aj.}) = \sum_{l=1}^g \frac{1}{n_l} A_l^2 - C_0, \quad (62)$$

sendo  $A_l$  o total do experimento  $l$ .

- Soma de quadrados entre blocos não ajustada

$$SQB(\text{n\~{a}o aj.}) = \sum_{l=1}^g \frac{1}{k_l} \sum_{j=1}^{u_l} B_j^2 - C_o$$

sendo  $B_j$  o total do  $j$ -ésimo bloco.

- Soma de quadrados entre blocos dentro de experimentos não ajustada

$$SQBd. A(\text{n\~{a}o aj.}) = SQB(\text{n\~{a}o aj.}) - SQA(\text{n\~{a}o aj.})$$

- Soma de quadrados total

$$SQTotal = \sum_{l=1}^g \sum_{j=1}^{u_l} \sum_{i=1}^{v_l} y_{ijl}^2 - C_o$$

- Soma de quadrados do Resíduo

$$SQR = SQTotal - [SQB(\text{n\~{a}o aj.}) + SQT(\text{aj.}) + SQT \times A(\text{aj.})]$$

ou ainda,

$$SQR = \sum_{l=1}^g SQR_l$$

- . Soma de quadrados para a interação entre tratamentos comuns e experimentos ajustada

$$SQT \times A(aj.) = SQT^*, A^* - (SQT^* + \hat{SQA}^*)$$

como no item 3.4.10 ou, ainda:

$$SQT \times A(aj.) = SQT_{Total} - [SQT(aj.) + SQB(não aj.) + SQR] \quad (63)$$

### 3.6. Esperança matemática das somas de quadrados

Como ressalta VALÉRIO FILHO, (1983), todos os métodos para a obtenção das esperanças matemáticas para dados não balanceados usam as formas quadráticas das observações. Considerando o modelo em (4) e (5), onde o vetor  $\theta'$  e a matriz  $X$  foram partidos em

$$\theta' = [\underline{\gamma}' \mid \underline{\beta}' \mid \underline{\gamma}'] \quad (64)$$

$$X = [X_1 \mid X_2 \mid X_3],$$

onde  $\underline{\gamma}'$  e  $\underline{\beta}'$  contêm os efeitos fixos do modelo e  $\underline{\gamma}'$ , os aleatórios.

Por outro lado, as somas de quadrados, em termos de formas quadráticas, podem ser escritas como:

$$\underline{y}'P^*\underline{y} = \underline{y}'P_1^*\underline{y} + \underline{y}'P_2^*\underline{y} + \underline{y}'P_3^*\underline{y} + \underline{y}'P_4^*\underline{y}, \quad (65)$$

onde:

$P^* = [I_{(n)} - \frac{1}{n} J_{(n)}]$  é o núcleo da forma quadrática (projetor ortogonal), idempotente, de posto  $(n - 1)$  que dá a soma de quadrados total;

$P_1^* = [P_2 - \frac{1}{n} J_{(n)}]$  é o núcleo da forma quadrática, idempotente, de posto  $(u - 1)$ , que fornece a soma de quadrados para blocos, ignorando tratamentos, onde  $P_2 = X_2(X_2'X_2)^G X_2'$  é o projetor ortogonal de  $\underline{y}$  no espaço coluna de  $X_2$ .

$P_2^* = [P_{12} - P_2]$  é o núcleo da forma quadrática, idempotente, de posto  $(v - 1)$  que fornece a soma de quadrados de tratamentos ajustada para blocos, sendo que  $P_{12} = X_{12}(X_{12}' - X_{12})^G X_{12}'$  é o projetor ortogonal de  $\underline{y}$

no espaço coluna  $X_{12}$ , onde  $X_{12}$  representa as submatrizes  $X_1$  e  $X_2$  de  $X$ .

$$P_3^* = [P - P_{12}]$$

é o núcleo da forma quadrática, idempotente, de posto  $[(c - 1)(g - 1)]$  que fornece a soma de quadrados para a interação entre tratamentos comuns e experimentos ajustada, onde  $P = X(X'X)^G X'$  é o projetor ortogonal de  $\underline{y}$  no espaço coluna de  $X$ .

$$P_4^* = [I - P^*]$$

é o núcleo da forma quadrática, idempotente, de posto  $n_r$  que fornece a soma de quadrados do resíduo.

OBSERVAÇÃO: Em todas as expressões acima onde ocorrer o expoente  $G$  indica qualquer matriz inversa generalizada nas matrizes envolvidas.

Para os efeitos aleatórios  $\underline{\gamma}$  e  $\underline{\varepsilon}$ , as seguintes pressuposições são necessárias:

i.  $E(\underline{\varepsilon}) = E(\underline{\gamma}) = \underline{\phi}$ , isto é, possuem média zero;

ii.  $E(\underline{I} \underline{\varepsilon}') = E(\underline{\beta} \underline{\varepsilon}') = E(\underline{I} \underline{\gamma}') = E(\underline{\beta} \underline{\gamma}') = E(\underline{\gamma} \underline{\varepsilon}') = \underline{\phi}$ , isto é, os efeitos de cada fator aleatório possuem covariância nula com os efeitos dos demais fatores.

Então de (6): tem-se

$$E(\underline{y}) = X_1 \underline{\Gamma} + X_2 \underline{\beta} \quad (66)$$

e

$$V = \text{Var}(\underline{y}) = X_3 V(\underline{\gamma}) X_3' + \sigma^2 I_{(n)} \quad (67)$$

sendo  $V(\underline{\gamma})$  a matriz de covariância do efeito aleatório  $\underline{\gamma}$ .

Segundo SEARLE (1971), a esperança matemática de uma forma quadrática  $\underline{y}' P \underline{y}$  é:

$$E(\underline{y}' P \underline{y}) = E(\underline{y}') P E(\underline{y}) + \text{tr}(P V), \text{ se } \underline{y} \sim (X \underline{\theta}, V), \quad (68)$$

onde,  $V$  e "tr" indicam, respectivamente, a matriz de covariância de  $\underline{y}$  e a operação traço sobre a matriz  $PV$ , cujo valor é a soma dos elementos da diagonal principal.

Baseado nesse método será dado o procedimento para a determinação das esperanças das somas de quadrados para o modelo (6), cujo desenvolvimento será feito a seguir.

Considerando a partição do vetor  $\underline{\theta}'$  em (64)

como:

$$\underline{\theta}' = [\underline{\theta}'_1 \mid \underline{\theta}'_2] \quad (69)$$

onde  $\theta_1' = [\alpha', \beta']$  contém todos os componentes de efeito fixo do modelo (6) e  $\theta_{\gamma}' = \gamma'$  representa o efeito aleatório  $\gamma$ . Então, o modelo (6) é escrito em termos de (69) como

$$\tilde{y} = X_1 \theta_1 + X_{\gamma} \theta_{\gamma} + \varepsilon,$$

onde a matriz X foi partida convenientemente. Sendo assim,

$$X = [X_1 \mid X_{\gamma}]$$

onde  $X_1$  corresponde às submatrizes  $X_1$  e  $X_2$  de X e  $X_{\gamma}$ , à submatriz  $X_3$ .

Considerando as suposições feitas acima pode-se escrever:

$$E(\tilde{y}) = X_1 \theta_1 \quad (70)$$

e

$$V = \text{Var}(\tilde{y}) = X_{\gamma}' V(\theta_{\gamma}) X_{\gamma} + \sigma^2 I_{(n)} \quad (71)$$

onde  $V(\theta_{\gamma})$  é a matriz de covariância do efeito aleatório  $\gamma$ . Pressupõem-se que esse efeito é independente, com variância uniforme  $\sigma_{\gamma}^2$ , assim:

$$V(\theta_{\gamma}) = \begin{bmatrix} \phi & \phi \\ \phi & \sigma_{\gamma}^2 I_{[(c-1)(g-1)]} \end{bmatrix} \quad (72)$$

Substituindo (72) em (71), o valor esperado da forma quadrática dada em (68) é:

$$E(\underline{y}'P^*\underline{y}) = (\underline{X}_1\theta_1)'P^*\underline{X}_1\theta_1 + \sigma_Y^2 \text{tr}(P^*\underline{X}_1\underline{X}_1') + \sigma^2 \text{tr}(P^*) \quad (73)$$

Desse modo, usando-se a expressão (73) chega-se ao resultado para as esperanças dos quadrados médios apresentados no Quadro 1, em cujas expressões apresentam os coeficientes  $w^S$  variando de um quadrado médio para outro.

### 3.7. Testes de interesse e quadros de análise da variância

Na análise conjunta de delineamentos em BIB existe, geralmente, interesse em testar duas hipóteses básicas, a saber:

$$H_0^{(1)} : t_i = 0; i = 1, 2, \dots, v$$

$$H_0^{(2)} : \sigma_{ta}^2 = K;$$

que são respectivamente, as hipóteses de nulidade para os efeitos de tratamentos e a hipótese de igualdade para os efeitos da interação entre tratamentos comuns e experimentos.



Quadro 1 - Esquema da análise da variância e esperanças dos quadrados médios.

Causa da variação	G.L.	Q.M.	E(Q.M.)
Experimentos	$g - 1$	$SQA / (g - 1)$	-
Blocos d. Exps.	$u - g$	$SQb.d.A / (u - g)$	-
<hr style="border-top: 1px dashed black;"/>			
Blocos (não aj.)	$u - 1$	$SQB / (u - 1)$	-
Tratamentos (aj.)	$v - 1$	$SQT(aj.) / (v - 1)$	$\sigma^2 + w_1 \sigma^2_Y + f_1(\theta_1)$
Trats x Exps (aj.)	$(c - 1)(g - 1)$	$SQT \times A(aj.) / [(c - 1)(g - 1)]$	$\sigma^2 + w_2 \sigma^2_Y$
Resíduo	$n_r$	$SQR / n_r$	$\sigma^2$
TOTAL	$n - 1$	-	

onde:

$$w_1 = \frac{1}{v-1} \text{tr}(P_2^* X_{\gamma} X'_{\gamma});$$

$$w_2 = \frac{1}{(c-1)(g-1)} \text{tr}(P_3^* X_{\gamma} X'_{\gamma});$$

$$f_1(\theta_1) = \frac{1}{v-1} \theta_1' X_1' P_2^* X_1 \theta_1$$

$$e n_F = n - u - v + 1 - (c-1)(g-1)$$

Conforme relata VALÉRIO FILHO (1983), sempre que a matriz  $X_{\gamma} X'_{\gamma}$  for composta somente de zeros e uns, então  $\text{tr}(P_i^* X_{\gamma} X'_{\gamma})$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , é a soma dos produtos dos elementos respectivos das matrizes  $P_i^*$  e  $X_{\gamma} X'_{\gamma}$ , ou seja, é a soma dos elementos de  $P_i^*$  correspondentes aos uns de  $X_{\gamma} X'_{\gamma}$ .

Analisando as esperanças dos quadrados médios do Quadro 1, vê-se que, o teste F para a interação é feita da maneira usual, ou seja contra o quadrado médio residual fato que pode ser confirmado no item 3.8. Porém, para se testar os efeitos médios de tratamentos surge uma dificuldade, devido os coeficientes  $w_1$  e  $w_2$  serem diferentes para o componente  $\sigma_{\gamma}^2$  como pode ser visto no Quadro 1. Um caminho aproximado consiste em ajustar o valor F de tal maneira que se elimine essa dificuldade. Para isso, procede-se de

modo análogo ao apresentado por OSTLE (1954), cujo procedimento é o seguinte:

$$\frac{QMT(aj.)}{f_1} \sim F [(v - 1), n'] \quad (74)$$

onde  $f_1$  é uma combinação linear dos quadrados médios da interação e do resíduo dada pela expressão:

$$f_1 = m_1 QMT \times A(aj.) + m_2 QMR \quad (75)$$

sendo:

$$m_1 = \frac{W_1}{W_2} \text{ e } m_2 = 1 - \frac{W_1}{W_2}$$

Compara-se o valor de  $F$  obtido por (74) com  $F_{[\alpha, (v - 1), n']}$ ,

onde:

$n'$  é um valor aproximado, obtido de acordo com SATTERTHWAITTE (1946), para o número de graus de liberdade relativo à combinação linear dos quadrados médios dado por:

$$n' = \frac{f_1^2}{\frac{[m_1 QMT \times A(aj.)]^2}{(c - 1)(g - 1)} + \frac{(m_2 QMR)^2}{n_r}} \quad (76)$$

Em termos do valor observado de  $F$ , a expressão (74) fica:

$$F_{\text{obs.}} = \frac{\hat{\sigma}^2 + w_1 \sigma_{\gamma}^2 + f_1(\hat{\theta}_1)}{\frac{w_1}{w_2} (\hat{\sigma}^2 + w_2 \hat{\sigma}_{\gamma}^2) + (1 - \frac{w_1}{w_2}) \hat{\sigma}^2}$$

$$F_{\text{obs.}} = \frac{\hat{\sigma}^2 + w_1 \hat{\sigma}_{\gamma}^2 + f_1(\hat{\theta}_1)}{\hat{\sigma}^2 + w_1 \hat{\sigma}_{\gamma}^2} \quad (77)$$

Como se vê, pela expressão (77), os efeitos de tratamentos são realmente testados, de forma aproximada, ou seja,  $H_O^{(1)} : t_i = 0, i = 1, 2, \dots, v$ .

GIRI (1963) e PIMENTEL GOMES (1985) ressaltam que, quando a interação  $T \times A$  é significativa, isso indica que os tratamentos comuns não se comportam da mesma forma em todos os experimentos, devendo ocorrer o mesmo com os tratamentos regulares. Segundo esses autores, em tal situação, o valor mais apropriado de  $s^2$  para a comparação de tratamentos regulares de experimentos diferentes deve ser o quadrado médio da interação entre tratamentos comuns e experimentos.

Por outro lado, havendo interesse em testar a hipótese  $H_O^{(3)} : b_j = 0$ , há a necessidade de obter-se a soma de quadrados de blocos ajustada para tratamentos. Segundo BARBIN (1977), uma vez obtida a soma de quadrados de tratamentos

ajustada, um modo simples e imediato consiste em se admitir uma das seguintes igualdades:

$$SQB(aj.) = SQTotal - SQT(não aj.) - SQT \times A(aj.) - SQR \quad (78)$$

ou ainda,

$$SQB(aj.) = SQB(não aj.) + SQT(aj.) - SQT(não aj.) \quad (79)$$

O esquema da análise da variância com as respectivas esperanças matemáticas dos quadrados médios é dado no Quadro 2.

Quadro 2 - Esquema da análise da variância

Causa da variação	G.L.	Q.M.	E(Q.M.)
Experiamentos	$g - 1$	$SOA/(g - 1)$	-
Blocos d. Exps.	$u - g$	$SOB d. A/(u - g)$	-
Blocos(aj.)	$u - 1$	$SOB(aj.)/(u - 1)$	$\sigma^2 + w_3 \sigma_y^2 + f_2(\theta_1)$
Trats(não aj.)	$v - 1$	$SOT/(v - 1)$	-
Trats x Exps(aj.)	$(c - 1)(g - 1)$	$SOTxA(aj.)/[(c-1)(g-1)]$	$\sigma^2 + w_2 \sigma_y^2$
Resíduo	$n_r$	$SQR/n_r$	$\sigma^2$
TOTAL	$n - 1$		

onde:

$$w_3 = \frac{1}{u-1} \text{tr} (P_3^* X_Y X_Y'); \quad f_2(\theta_1) = \frac{1}{u-1} \theta_1' X_1 P_3^* X_1 \theta_1$$

sendo  $P_3^* = (P_{12} - P_1)$ , onde  $P_{12} = X_{12} (X_{12}' X_{12})^{-1} X_{12}'$   
e  $P_1 = X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1'$ .

À semelhança do teste F para tratamentos, obtêm-se um teste F aproximado, devido o coeficiente  $w_3$  ser diferente do coeficiente  $w_2$  nas esperanças dos quadrados médios, através de uma combinação linear dos quadrados médios. Assim, sob  $H_0$

$$\frac{QMB(aj.)}{f_2} \sim F [(u-1), n''] \quad (80)$$

onde  $f_2 = m_3 QMT \cdot x A(aj.) + m_4 QMR$

sendo que  $m_3 = \frac{w_3}{w_2}$  e  $m_4 = 1 - \frac{w_3}{w_2}$

O número de graus de liberdade, obtido pela fórmula de SATTERTHWAITTE (1946) é:

$$n'' = \frac{f_2^2}{\frac{[m_3 QMT \cdot x A(aj.)]^2}{(c-1)(g-1)} + \frac{(m_4 QMR)^2}{n_r}}$$

Reescrevendo a expressão (81) tem-se que:

$$F_{\text{obs.}} = \frac{\text{QMB}(aj.)}{m_3 \text{QMT} \times A(aj.) + m_4 \text{QMR}}$$

$$F_{\text{obs.}} = \frac{\hat{\sigma}^2 + w_3 \hat{\sigma}_Y^2 + f_2(\hat{\theta}_1)}{\frac{w_3}{w_4} (\hat{\sigma}^2 + w_2 \hat{\sigma}_Y^2) + (1 - \frac{w_3}{w_2}) \hat{\sigma}^2}$$

$$\dots$$

$$F_{\text{obs.}} = \frac{\hat{\sigma}^2 + w_3 \hat{\sigma}_Y^2 + f_2(\hat{\theta}_1)}{\hat{\sigma}^2 + w_3 \hat{\sigma}_Y^2} \quad (81)$$

Vê-se que, através da expressão (82), testa-se, realmente o efeito de blocos, ou seja,  $H_0^{(3)} : b_j = 0, j=1, 2, \dots, u$ .

Pelos quadros 1 e 2, nota-se que se têm  $(c-1)(g-1)$  graus de liberdade para a interação T x A, o que, à primeira vista, deveria ser  $(v-1)(g-1)$ . Isto se deve ao fato de que, somente os  $c$  tratamentos comuns interagem com os  $g$  experimentos.

### 3.8. Independência e distribuição das formas quadráticas

Para estudar-se a independência e a distribuição das formas quadráticas será enunciado o seguinte teorema:



## Teorema de Cochran (JOHN, 1971)

Se  $\underline{y} \sim N(X\underline{\theta}, I\sigma^2)$  e se  $\underline{y}'\underline{y} = \underline{y}'P_1^*\underline{y} + \underline{y}'P_2^*\underline{y} + \dots + \underline{y}'P_k^*\underline{y}$ , onde  $\underline{y}$  possui  $n$  observações e  $r(P_i^*) = n_i$ , então uma condição necessária e suficiente para que as formas quadráticas  $\underline{y}'P_i^*\underline{y}$  sejam independentemente distribuídas com distribuição de  $\chi^2(n_i, \delta_i)$  é que  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ , onde  $\delta_i = \underline{\theta}'X_i'P_i^*X_i\underline{\theta}$  é o parâmetro de não centralidade.

Aqui, para a análise proposta tem-se:

$$\underline{y}'P_1^*\underline{y} = \text{SQB}(\text{não aj.}); \quad r(P_1^*) = u - 1$$

$$\underline{y}'P_2^*\underline{y} = \text{SQT}(\text{aj.}) \quad ; \quad r(P_2^*) = v - 1$$

$$\underline{y}'P_3^*\underline{y} = \text{SQT} \times \text{A}(\text{aj.}); \quad r(P_3^*) = (c - 1)(g - 1)$$

$$\underline{y}'P_4^*\underline{y} = \text{SQR} \quad ; \quad r(P_4^*) = n - u - v - (c - 1)(g - 1) + 1$$

$$\underline{y}'P^*\underline{y} = \text{SQTotal} \quad ; \quad r(P^*) = n - 1$$

$$\therefore r(P^*) = r(P_1^*) + r(P_2^*) + r(P_3^*) + r(P_4^*) = n - 1$$

Vê-se que, as formas quadráticas  $\underline{y}'P_i^*\underline{y}$  são independentes e têm distribuição de  $\chi^2(n_i, \delta_i)$ , onde o número de

graus de liberdade é igual ao posto de  $P_i^*$  e, portanto, as correspondentes razões possuem distribuição de F.

Sendo assim,

$$\frac{QMT(aj.)}{QMT \times A(aj.)} \sim F[\alpha; (v - 1), (c - 1)(g - 1); \delta_1]$$

e

$$\frac{QMT \times A(aj.)}{QMR} \sim F[\alpha; (c - 1)(g - 1), n_r; \delta_2]$$

onde,  $\delta_1$  e  $\delta_2$  são os parâmetros de não centralidade.

### 3.9. Comparações múltiplas

Considerando a possibilidade de rejeição de , pelo menos uma das hipóteses de nulidade, referentes aos efeitos de tratamentos ou de blocos, aplicam-se os testes de comparações múltiplas entre duas médias dos parâmetros envolvidos.

Nesse estudo, optou-se pelo método de Tukey , apenas a título de ilustração, podendo, é claro, ser aplicados quaisquer outros métodos tais como Duncan, Scheffé, dentre outros. Conforme relatado no item 3.4.7 há quatro casos clássicos de comparações múltiplas entre duas médias de tratamentos.

A diferença mínima significativa (d.m.s.) é dada por:

$$\text{d.m.s.} = q \sqrt{\frac{1}{2} \hat{V}(\hat{y})}$$

onde:

$q$  é o valor da amplitude total estudentizada, obtido de tabela apropriada, a um nível de significância  $\alpha$  previamente estabelecido, com  $n'$  e  $(c - 1)(g - 1)$  graus de liberdade, caso a interação seja significativa; em caso contrário, com  $n'$  e  $n_r = (n - u - v + 1)$  graus de liberdade;

$\hat{V}(\hat{y})$  é a estimativa da variância da estimativa do contraste de interesse, obtido no item 3.4.8.

#### 4. ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

Para ilustrar a metodologia proposta nesse trabalho, considerou-se dados fictícios para dois planos de experimentos em delineamentos BIB, encontrados na literatura. A opção em empregar dados desse tipo deu-se pelo fato da falta de experimentos reais sobre o assunto.

O primeiro experimento refere-se a um delineamento BIB, cujos dados encontram-se na Tabela 3, no qual foram usados  $v_1 = 5$  tratamentos em  $u_1 = 10$  blocos de  $k_1 = 3$  parcelas. O segundo experimento em delineamento BIB cujos dados encontram-se Tabela 4, onde foram usados  $v_2 = 4$  tratamentos

em  $u_2 = 6$  blocos de  $k_2 = 2$  parcelas. Conforme classificação feita no item 2.1.2., os delineamentos BIB são do tipo II e I, respectivamente.

Tabela 3

## Experimento I - Dados fictícios

Grupo I - Repetições I, II, III					Grupo II - Repetições IV, V, VI						
$b_j$	$t_i$	$y_{ij}$	$t_i$	$y_{ij}$	$t_i$	$y_{ij}$	$b_j$	$t_i$	$y_{ij}$	$t_i$	$y_{ij}$
(1)	$t_1$	8,0	$t_2$	5,0	$t_3$	6,0	(6)	$t_1$	8,0	$t_2$	6,0
(2)	$t_1$	10,0	$t_2$	5,0	$t_5$	2,0	(7)	$t_1$	10,0	$t_3$	6,0
(3)	$t_1$	9,0	$t_4$	10,0	$t_5$	4,0	(8)	$t_1$	9,0	$t_3$	5,0
(4)	$t_2$	4,0	$t_3$	5,0	$t_4$	10,0	(9)	$t_2$	3,0	$t_3$	6,0
(5)	$t_3$	3,0	$t_4$	10,0	$t_5$	2,0	(10)	$t_2$	5,0	$t_4$	9,0

Tabela 4.

## Experimento II - Dados fictícios

Repetição I			Repetição II			Repetição III				
$b_j$	$t_i$	$y_{ij}$	$t_i$	$y_{ij}$	$b_j$	$t_i$	$y_{ij}$	$b_j$	$t_i$	$y_{ij}$
(1)	$t_1$	4,0	$t_2$	5,0	(3)	$t_1$	2,0	(5)	$t_1$	3,0
(2)	$t_6$	6,0	$t_7$	4,0	(4)	$t_2$	1,0	(6)	$t_2$	4,0
									$t_7$	3,0
									$t_6$	6,0

Os parâmetros e os totais de tratamentos e blocos para os dois experimentos são:

i) Experimento 1

$$v_1 = 5, \quad u_1 = 10, \quad r_1 = 6, \quad k_1 = 3, \quad \lambda_1 = 3,$$

$$z_1 = 3, \quad n_1 = 30$$

$$T_1 = 54,0; T_2 = 28,0; T_3 = 31,0; T_4 = 55,0; T_5 = 16,0;$$

$$G_1 = 184,0;$$

$$B_1 = 19,0; B_2 = 17,0; B_3 = 23,0; B_4 = 19,0; B_5 = 15,0;$$

$$B_6 = 22,0; B_7 = 24,0; B_8 = 17,0 \text{ e } B_9 = 11,0 \text{ e}$$

$$B_{10} = 17,0.$$

i) Experimento 2

$$v_2 = 4, \quad u_2 = 6, \quad r_2 = 3, \quad k_2 = 2, \quad \lambda_2 = 1,$$

$$z_2 = 2, \quad n_2 = 12$$

$$T_1 = 9,0; T_2 = 10,0; T_6 = 18,0; T_7 = 13,0; G_2 = 50,0,$$

$$B_1 = 9,0; B_2 = 10,0; B_3 = 8,0; B_4 = 7,0; B_5 = 6,0;$$

$$B_6 = 10,0.$$

A análise da variância para cada experimento pode ser desenvolvida com o auxílio das seguintes tabelas:

Tabela 5

Tabela auxiliar da análise da variância do experimento 1

Tratamentos	$T_i^{(1)}$	$\sum_j \delta_j^{(1)} B_j^{(1)}$	$Q_i^{(1)}$	$t_i^{(1)}$
1	54,0	122,0	13,3333	2,6667
2	28,0	105,0	- 7,0000	- 1,4000
3	31,0	105,0	- 4,0000	- 0,8000
4	55,0	120,0	15,0000	3,0000
5	16,0	100,0	-17,3333	- 3,4667
TOTAIS	184,0	552,0	0,0	0,0

$$\therefore SQT(aj.)_1 = \sum_{i=1}^5 t_i^{(1)} Q_i^{(1)} = 153,6444$$

Tabela 6

Tabela auxiliar da análise da variância do experimento 2

Tratamentos	$T_i^{(2)}$	$\sum_j \delta_j^{(2)} B_j^{(2)}$	$Q_i^{(2)}$	$t_i^{(2)}$
1	9,0	23,0	- 2,5	- 1,2500
2	10,0	26,0	- 3,0	- 1,5000
6	18,0	28,0	4,0	2,0000
7	13,0	23,0	1,5	0,7500
TOTAIS	50,0	100,0	0,0	0,0

$$\therefore SQT(aj.)_2 = \sum_{i=1}^4 t_i^{(2)} Q_i^{(2)} = 16,7500$$

As análises intrablocos dos experimentos individuais apresentou os seguintes resultados:

Quadro 3

## Análises individuais

Experimento 1			Experimento 2		
Causas da variação	G.L.	S.Q.	Causas da variação	G.L.	S.Q.
Grupos	1	0,1367	Repetições	2	2,1667
Blocos/Grupos	8	45,9996	Blocos/ repetições	3	4,5000
Blocos (não aj.)	9	46,1333	Blocos (não aj.)	5	6,6667
Tratamentos (aj.)	4	153,6444	Tratamentos (aj.)	3	16,7500
Resíduo	16	19,6890	Resíduo	3	8,2500
TOTAL	29	219,4667	TOTAL	11	31,6667

Da mesma forma, constrói-se a seguinte tabela para a realização da análise conjunta.



Tabela 6

Tabela auxiliar da análise conjunta

Tratamentos	$T_i$	$B^{(l)}$	$Q_i$	$t_i$	$\hat{m}_i$
1	63,0	52,1667	10,8333	1,5476	7,1190
2	38,0	48,0000	-10,0000	-1,4286	4,1429
3	31,0	35,0000	-4,0000	-1,3738	4,1976
4	55,0	40,0000	15,0000	2,4262	7,9976
5	16,0	33,3333	-17,3333	-4,0405	1,5309
6	18,0	14,0000	4,0000	3,4345	9,0059
7	13,0	11,5000	1,5000	2,1845	7,7559
	234,0		0,0		

com

$$Q = 0,8333$$

$$Q^{(1)} = -6,3333$$

$$Q^{(2)} = 5,5000$$

Os efeitos ajustados de tratamentos podem ser estimados utilizando-se as expressões obtidas em (34), (41), (42) e (43), ou seja:

i) Para tratamentos comuns

$$\hat{t}_s = Q_s / 7$$

ou, a partir das análises individuais por:

$$\bar{t}_s = \frac{1}{7}(5\bar{t}_s^{(1)} + 2\bar{t}_s^{(2)})$$

ii) Para tratamentos regulares

$$\bar{t}_i^{(1)} = \frac{1}{5}Q_i^{(1)} + \frac{1}{10}(-6,3333) + \frac{1}{14}(0,8333) = \frac{1}{5}Q_i^{(1)} + (-0,5738),$$

para os tratamentos regulares do 1º experimento

$$\text{e } \bar{t}_i^{(2)} = \frac{1}{2}Q_i^{(2)} + \frac{1}{4}(5,5000) + \frac{1}{14}(0,8333) = \frac{1}{2}Q_i^{(2)} + 1,4345,$$

para os tratamentos regulares do 2º experimento

ou, ainda, a partir das análises individuais por

$$\bar{t}_i^{(1)} = \bar{t}_i^{(1)} + \frac{1}{2}(-1,2667) + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^c \bar{t}_s,$$

para os tratamentos regulares do 1º experimento

$$\text{e } \bar{t}_i^{(2)} = \bar{t}_i^{(2)} + \frac{1}{2}(2,7500) + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^c \bar{t}_s,$$

para os tratamentos regulares do 2º experimento cujos resultados encontram-se na Tabela 6.

A soma de quadrados de tratamentos por (61)

fica:

$$SQT(\text{aj.}) = \sum_{s=1}^c \bar{t}_s Q_s + \sum_{l=1}^g \sum_{i=1}^z \bar{t}_i^{(l)} Q_i^{(l)}$$

$$SQT(\text{aj.}) = 159,9897$$

A soma de quadrados da interação entre tratamentos comuns e experimentos, conforme o procedimento dado no item 3.4.10 é obtida com o auxílio da seguinte tabela de tratamentos comuns e experimentos com os valores  $Q_S^{(2)}$ .

Tabela 7

Totais ajustados de tratamentos comuns

Trats. Comuns Experimentos	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	Totais
A <sub>1</sub>	13,3333 <sup>(5)</sup>	- 7,0000 <sup>(5)</sup>	6,3333 <sup>(10)</sup>
A <sub>2</sub>	- 2,5000 <sup>(2)</sup>	- 3,0000 <sup>(2)</sup>	- 5,5000 <sup>(4)</sup>
Totais	10,8333 <sup>(7)</sup>	-10,0000 <sup>(7)</sup>	0,8333 <sup>(14)</sup>

Então:

$$SQA^* = \frac{1}{10} (6,3333)^2 + \frac{1}{4} (-5,500)^2 - \frac{1}{14} (0,8333)^2$$

ou seja,  $SQA^* = 11,5240$

$$SQT^* = \frac{1}{7} [(10,8333)^2 + (-10,0000)^2] - \frac{1}{14} (0,8333)^2$$

ou seja,  $SQT^* = 31,0020$

$$SQT^*, A^* = \frac{1}{5}[(13,3333)^2 + (-7,0000)^2] + \frac{1}{2}[(-2,5000)^2 + (-3,0000)^2] - \frac{1}{14}(0,8333)^2$$

ou seja,  $SQT^*, A^* = 52,9310$

Portanto,

$$SQT \times A(aj.) = 52,9310 - 31,0020 - 11,5240$$

ou seja,  $SQT \times A(aj.) = 10,4050$

As demais somas de quadrados são obtidas como relatado no item 3.5, da maneira usual e resultaram em:

$$SQB(\text{não aj.}) = 85,9524$$

$$SQA(\text{não aj.}) = 33,1524$$

$$SQBd. A(\text{não aj.}) = 52,8000$$

$$SQT_{\text{Total}} = 284,2857$$

Assim, o quadro de análise da variância resultou no que segue:

Quadro 4 - Análise conjunta da variância

Causas da variação	G.L.	S.Q.	Q.M.
Experimentos	1	33,1524	33,1524
Blocos d. Exps.	14	52,8000	3,7714
Blocos (não aj.)	15	85,9524	5,7302
Tratamentos (aj.)	6	159,9897	26,6649
Trats x Exps. (aj.)	1	10,4050	10,4050*
Resíduo	19	27,9386	1,4705
TOTAL	41	284,2857	

Conforme (74), não há o teste F exato para tratamentos. Obteve-se os coeficientes  $w_1$  e  $w_2$ , como sendo:

$$w_1 = 8,1429 \quad \text{e} \quad w_2 = 2,8571$$

Assim, por (75) e (76) tem-se:

$$f_1 = 26,9335 \quad \text{e} \quad n' = 0,82$$

Portanto,

$$F = \frac{26,6649}{26,9335} - 0,99 \text{ n.s.}$$

As estimativas das variâncias das estimativas dos contrastes entre dois efeitos de tratamentos, calculadas com base em (51), (52), (53) e (54) são:

- i) Contraste envolvendo dois tratamentos comuns

$$\hat{V}(\bar{t}_s - \bar{t}_s') = 2,9728$$

- ii) Contraste envolvendo um tratamento comum e um tratamento regular do 1º experimento

$$\hat{V}(\bar{t}_s - \bar{t}_i^{(1)}) = 3,8646$$

- iii) Contraste envolvendo um tratamento comum e um tratamento regular do 2º experimento

$$\hat{V}(\bar{t}_s - \bar{t}_i^{(2)}) = 8,5468$$

- iv) Contraste envolvendo dois tratamentos regulares do 1º experimento

$$\hat{V}(\bar{t}_i^{(1)} - \bar{t}_i'^{(1)}) = 4,1619$$

- v) Contraste envolvendo dois tratamentos regulares do 2º experimento

$$\hat{V}(\bar{t}_i^{(2)} - \bar{t}_i'^{(2)}) = 10,4050$$

- vi) Contraste envolvendo um tratamento regular do 1º experimento com um tratamento regular do 2º experimento

$$\hat{V}(\bar{t}_i^{(1)} - \bar{t}_i^{(2)}) = 10,9251$$

OBSERVAÇÃO: Para a obtenção das estimativas das variâncias das estimativas dos contrastes entre os efeitos de tratamentos, o valor de  $s^2$  é dado pelo quadrado médio da interação, pois como se verifica pelo quadro da análise conjunta, a mesma foi significativa ao nível de 0,05 de significância.

Como se vê, o método simplificado utilizado para a obtenção da soma de quadrados de tratamentos ajustada, é prático, por não necessitar a inversão da matriz  $M$ , possibilitando, dessa forma, maior rapidez nos cálculos por fazer uso dos valores obtidos na realização das análises de cada experimento.

## 5. CONCLUSÕES

A análise conjunta de vários experimentos em delineamentos BIB com tratamentos comuns e com os parâmetros ( $v$ ,  $b$ ,  $r$ ,  $k$  e  $\lambda$ ) variando de um experimento para outro, permitem as seguintes conclusões:

a. Quanto ao modelo matemático

- modelo matemático apresentou-se adequado aos objetivos propostos, permitindo a avaliação dos efeitos dos tratamentos comuns e regulares.



b. Quanto à estimação dos efeitos dos tratamentos

b.1. Os estimadores dos efeitos ajustados de tratamentos são dadas pelas expressões:

$$\hat{t}_s = Q_s / S,$$

para o tratamento comum  $s$ , onde  $S = \sum_{l=1}^g r_l E_l$ .

$$\hat{t}_i^{(l)} = \frac{1}{r_l E_l} Q_i^{(l)} + \frac{1}{c r_l E_l} Q_i^{(l)} + \frac{1}{c S} Q_i,$$

para o  $i$ -ésimo tratamento regular do experimento  $l$ .

b.2. A estimação dos efeitos ajustados de tratamentos podem, ainda, ser obtidos mais facilmente, a partir dos estimadores dos efeitos das análises individuais, cu seja:

$$\hat{t}_s = \frac{1}{\sum_{l=1}^g r_l E_l} \sum_{l=1}^g r_l E_l \hat{t}'_s^{(l)}, \quad \text{para o tratamento comum } s$$

$$\text{e } \hat{t}_i^{(l)} = \hat{t}'_i^{(l)} + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^z \hat{t}'_i^{(l)} + \frac{1}{c} \sum_{s=1}^c \hat{t}_s, \text{ se } v - c \geq c,$$

ou ainda

$$\hat{t}_i^{(l)} = \hat{t}_i^{(l)} - \frac{1}{c} \sum_{s=1}^c \hat{t}_s^{(l)} + \frac{1}{c} \sum_{s=1}^c \hat{t}_s, \quad \text{se } v - c < c,$$

para o  $i$ -ésimo tratamento regular do experimento  $l$ .

b.3. A estimação dos efeitos de tratamentos através do método simplificado facilita a computação dos dados, que ao contrário do método clássico, não exige a inversão de matrizes de ordem elevada.

b.4. Os estimadores dos efeitos de tratamentos comuns e regulares em delineamentos BIB com os mesmos parâmetros podem ser obtidos, a partir dos estimadores dos efeitos desses tratamentos em delineamentos BIB com parâmetros variáveis, tomando-se  $v_l = v$ ,  $k_l = k$ ,  $b_l = b$ ,  $r_l = r$  e  $\lambda_l = \lambda$ . Para experimentos em blocos ao acaso fica  $v_l = k$  e  $b_l = r = \lambda_l$ , ou ainda,  $v = k$  e  $b = r = \lambda$ .

c. Quanto às somas de quadrados

Com exceção da soma de quadrados de tratamentos ajustada para os efeitos de blocos e da soma de quadrados da interação, entre tratamentos comuns e experimentos ajustada

para tratamentos e blocos, as demais somas de quadrados são obtidas de modo usual.

d. Quanto à variância da estimativa de um contraste entre duas médias de tratamentos.

Todos os contrastes entre duas médias de tratamentos são estimados com a mesma precisão.

e. Quanto aos testes de significância

O teste F para a interação tratamentos comuns com experimentos ajustada portou-se de modo usual e é exato. O teste F para os efeitos de tratamentos, apesar de aproximado, pois foi necessário obter uma combinação linear dos quadrados médios do resíduo e da interação, revelou através do estudo das formas quadráticas ser bastante razoável para os propósitos de experimentos dessa natureza.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AFONJA, B., 1968. Analysis of a group of balanced block experiments having error variance and some treatments in common. *Biometrics*, Tucson, 24(2):389-400.
- BARBIN, D., 1977. Aspectos estatísticos de alguns modelos matemáticos usados no melhoramento do gado de corte. Piracicaba, ESALQ/USP, 110 p. [Tese de Livre Docência].
- CAMPOS, H., 1984. Estatística aplicada à experimentação com cana-de-açúcar. Fundação de Estudos Agrários Luiz de Queiroz - FEALQ, Piracicaba, 292 p.

CHAKRABARTI, M.C., 1962. *Mathematics of Design and Analysis of Experiments*. Asia Publishing House, Londres, 120 p.

COCHRAN, W.G., 1937. Problems arising in the analysis of a series of similar experiments. *Suppl. Jour. Roy. Stat. Soc.*, Londres, 4(1):102-118.

COCHRAN, W.G. & G.M. COX, 1960. *Experimental Designs*. 3ª ed., John Wiley & Sons, Inc., Nova York. 611 p.

FEDERER, W.T., 1956. Augmented (or Hoonuiaku) designs. *The Hawaiian Planter's Record*, 55:191-208.

GIRI, N.C., 1963. On the combined analysis of youden squares and of latin squares designs with some treatments in common. *Biometrics*, Atlanta, 19:171-174.

IEMMA, A.F., 1981. *Análise de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos em blocos incompletos balanceados*. Piracicaba, ESALQ/USP, 145 p. [Tese de Doutorado].

1985. Modelos Lineares - Uma Introdução para Profissionais da Pesquisa Agropecuária. ESALQ/USP, Piracicaba, 142 p. [19 Simpósio de Estatística aplicada à Experimentação Agronômica].
- JOHN, P.M.W., 1971. Statistical Design and Analysis of Experiments. Nova York, The MacMillan Company. 355 p.
- KEMPTHORNE, O., 1973. The Design and Analysis of Experiments. 6ª ed. Nova York, Krieger. 631 p.
- MACHADO, A.A., 1982. Análises da variância e da covariância linear de dados de uma classificação dupla não balanceada. Piracicaba, ESALQ/USP, 97 p. [Dissertação de Mestrado].
- OLIVEIRA, A.C., 1985. Análise intrablocos de experimentos em blocos incompletos parcialmente balanceados com alguns tratamentos comuns adicionados em cada bloco. Piracicaba, ESALQ/USP, 153 p. [Tese de Doutorado].
- OSTLE, B., 1954. Statistics in Research. 1ª ed. The Iowa State College Press, Ames, Iowa, 487 p.

PAVATE, M.V., 1961. Combined analysis of balanced incomplete block designs with some common treatments. *Biometrics*, Raleigh, 17:111-119.

PIMENTEL GOMES, F. & R.F. GUIMARÃES, 1958. Joint analysis of experiments in complete block designs with some common treatments. *Biometrics*, Tallahassee, 14:521-526.

PIMENTEL GOMES, F., 1967. The solution of normal equations of experiments in incomplete blocks. *Ciência e Cultura*, São Paulo, 20:733-746.

\_\_\_\_\_, 1970. An extension of the method of joint analysis of experiments in complete randomised blocks. *Biometrics*, Raleigh, 26:331-336.

\_\_\_\_\_, 1985. *Curso de Estatística Experimental*. 11ª ed. Livraria Nobel, Piracicaba, 466 p.

SATTERTHWAITE, F.E., 1946. An approximate distribution of estimates of variance components. *Biometrics*, Fort Collins, 2:110-114.

SEARLE, S.R., 1971. **Linear Models**. John Wiley & Sons, Inc., Nova York, 531 p.

SILVEIRA JÚNIOR, P. *et alii*, 1982. Experimentos em blocos incompletos. UFPEL, Pelotas, 145 p. [10º fascículo - Série Estatística Experimental].

SWAMINATHAN, S.S. & M.N. DAS, 1964. Combined analysis of incomplete block designs. **Jour. Indian Soc. Agric. Statist.**, Nova Delhi, 16:296-303.

VALÉRIO FILHO, W.V., 1983. Métodos de Henderson para componentes da variância de dados não balanceados. Piracicaba, ESALQ/USP, 137 p. [Dissertação de Mestrado].

YATES, F., 1936. Incomplete randomized blocks. **Annals of Eugenics**, Londres, 7:121-140.

YATES, F. & W.G. COCHRAN, 1938. The analysis of groups of experiments. **Jour. of Agric. Sci.**, London, 28:556-580.