# ANÁLISE DE EXPERIMENTOS COM PARCELAS MEDIDAS SUCESSIVAMENTE NO TEMPO

UBIRAJARA DORIVAL DINIZ

Orientador: Dr. Décio Barbin

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Estatística e Experimentação Agronômica.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Outubro, 1 9 8 0

A meu pai *(in memoriam)*

DEDICO

A minha esposa,

A minha mãe,

A meus filhos,

OFEREÇO

## AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Décio Barbin, pela orientação segura e pelo incentivo a nós dispensados;

Ao Dr. Humberto de Campos, Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica, pelo apoio;

Ao Dr. Roberto Simionato Moraes pela colaboração na elaboração dos programas de computador por nós utilizados;

Ao Dr. Vivaldo Francisco da Cruz pelas sugestões;

Ao Prof. José Carlos Pinotti, Magnífico Reitor da Fundação Universidade Estadual de Londrina (FUEL) pela confiança e apoio;

Ao Prof. Ervino Nesello, Presidente da Coordenadoria de Recursos Humanos da FUEL pela confiança;

Aos colegas Prof. José Carani e Dr. Marco Antonio Fiori pelo incentivo;

Aos colegas do Departamento de Matemática, Estatística e Computação da FUEL, pela solidariedade;

Aos professores do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela amizade;

Ao Dr. Ricardo Sgrillo pela versão do resumo;

À Sra. Solange Maria Paes Cangiani Júlio, pela colaboração no trabalho de perfuração;

À Srta. Maria Izalina Ferreira Alves e Octávio Frasseto, funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela execução dos trabalhos datilográficos e de impressão da tese;

A todos que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

# Í N D I C E

## RESUMO

Considerou-se neste trabalho as produções, em kg por parcela, de um pómar experimental com laranjeiras Valência (*Citrus sinensis* L. Osbeck) durante os anos de 1970 a 1978. Fizeram-se as análises de variância:

1º) Com as produções dos anos pares: 1970, 1972, 1974, 1976 e 1978;

2º) Com as produções dos anos de 1970 a 1976.

Com a primeira análise verificou-se a adequacidade do modelo de parcelas subdivididas e, embora se tenha considerado correlação entre subparcelas, os testes de Tukey e Bonferroni para comparação de médias de tratamentos e anos se mostraram equivalentes.

Com a segunda análise verificou-se que o modelo de parcelas subdivididas somente é adequado para a análise referente

às parcelas.

Com relação à análise das subparcelas, verificou-se que cada contraste entre anos deverá ser testado com seu resíduo próprio.

Os testes de Tukey e Bonferroni para se detectar diferença significativa de médias de tratamentos se mostraram equivalentes, embora o teste de Tukey tenha apresentado um contraste significativo a mais.

Para se detectar diferenças significativas entre contrastes de anos, os testes de Tukey e Bonferroni apresentaram os mesmos resultados, mostrando-se equivalentes apesar da existência de correlação entre subparcelas.

## SUMMARY

Yields of "Valência" oranges (*Citrus sinensis* L. Osbeck), in kg for plot, were studied in an experimental orchard using a split-plot design in time during the period 1970-1978.

Analysis of variance for the even years showed the adequacy of the split-plot design. Even with the correlation among sub-plots, Tukey and Bonferroni tests for comparison of treatment and year means proved to be equivalent, but the split-plot design was adequate only for comparisons among plots for the years 1970 through 1976 and differences between years will have to be analyzed for each separate year.

Tukey and Bonferroni tests to detect significant differences in treatment means gave identical answers although the former indicated one extra significant contrast.

When used to detect significant differences among years, Tukey and Bonferroni tests gave the same results in spite of sub-plot correlations.

# 1. INTRODUÇÃO

Consideremos um experimento, realizado segundo um delineamento experimental, onde se quer estudar os efeitos de tratamento durante um certo período de tempo e fazendo-se observações nas mesmas parcelas.

Temos então que o tempo é um fator em tais experimentos e, além disso, deve surgir correlação entre medidas sucessivas da mesma parcela.

Os modelos experimentais usados em tais situações são de dois tipos:

1º) cada unidade experimental é tratada somente uma vez durante o experimento ou recebe o mesmo tratamento repetidamente;

2º) cada unidade experimental recebe uma sequência de tratamen tos sobre períodos sucessivos de tempo durante o curso do experimento.

No 2º tipo, entre outros, estão incluídos os modelos change-over. No 1º tipo, estão incluídos experimentos que estudam curvas de crescimento ou resposta e estudos de perfil.

As observações feitas na mesma parcela podem ser classificadas em:

a) observações que diferem entre si pelas suas características;
b) observações que têm a mesma característica, mas que diferem entre si somente quanto ao tempo.

Para a observação (a), a natureza dos dados é claramente multivariada. Pode-se então, ou efetuar uma análise multivariada, ou uma análise univariada para cada característica observada.

Para a observação (b), a natureza dos dados tem aparência univariada e, por isso, tradicionalmente, tem-se usado uma análise univariada.

Nos ateremos somente ao 1º tipo de experimento e caso (b) de observação, considerando ainda que as observações serão tomadas em tempos igualmente espaçados.

O tempo decorrido entre uma observação e outra, dependerá da natureza do material em estudo e/ou do objetivo do experimento. Assim, em se tratando de culturas perenes, o tempo decorrido entre uma observação e outra poderá ser de um ano, um trimestre, ou menos. Para o caso de animais, o tempo poderá ser de 30 dias, 15 dias, 7 dias, ou menos. Já em experimentos onde se quer testar o efeito de drogas (por exemplo), o tempo entre duas observações poderá ser de horas, ou minutos.

Para este tipo de dados, dois tipos de análise univariada podem ser feitas:

1) análise dos dados em cada tempo, separadamente;
2) análise dos dados segundo o delineamento em parcelas subdivididas no tempo.

Se considerarmos as medidas repetidas sobre a mesma parcela como um vetor de respostas, é válido um processo multivariado denominado análise de perfil.

Considerando-se ainda que é de se esperar que medidas adjacentes no tempo são mais altamente correlacionadas do que medidas distantes, esses dados, apesar de originados de um experimento aparentemente univariado, é essencialmente multivariado.

Se se considerarem as medidas repetidas sobre a mesma parcela como subparcelas no tempo, o delineamento em parcelas subdivididas, no tempo, pode ser empregado. No entanto, para a aplicação desse tipo de análise, algumas pressuposições devem ser observadas:

1º) Os tratamentos atribuídos às parcelas devem ser casualizados;
2º) Os tratamentos atribuídos às subparcelas devem ser casualizados (o que pode invalidar a análise, já que as observa-

ções repetidas no tempo não foram casualizadas);

3º) As medidas repetidas, tomadas sobre a mesma parcela, têm a mesma variância ($\sigma^2$) e são igualmente correlacionadas, ou seja, que medidas adjacentes no tempo são igualmente correlacionadas que com medidas distantes.

Assim, a matriz de variâncias e covariâncias para todas as parcelas deve ser do tipo:

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \cdots & \rho \\ & 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

denominado "uniforme" por GEISSER (1963).

Para se verificar a validade da aplicação desse análise, deve-se testar a uniformidade da matriz de variâncias e covariâncias, assim como se as variâncias e covariâncias, por tratamento, são as mesmas.

A análise multivariada de perfil, com relação à estrutura da matriz de variâncias e covariâncias de medidas repetidas no tempo, sobre a mesma parcela, adota pressuposição completamente geral, determinada pelos dados. COCHRAN e COX (1957) dizem que o modelo em parcelas subdivididas é vantajoso se os efeitos dos tratamentos aplicados às subparcelas e da interação, são de interesse maior do que os efeitos de tratamentos aplicados às parcelas.

Neste tipo de experimento, tanto o tempo como a interação são duas causas importantes. Daí a necessidade de se aplicarem os testes que permitam verificar a possibilidade de se analisar tal tipo de dados como em parcelas subdivididas.

Uma outra alternativa que algumas vezes possibilita o uso do modelo em parcelas subdivididas é: ao invés de se trabalhar com os dados originais, trabalha-se com diferenças entre as medidas sucessivas. Com dados de crescimento, as variâncias frequentemente aumentam com o tempo, e o uso dessa técnica algumas vezes reduz este efeito para um grau suficiente que possibilita que seja ignorado, já que se as correlações entre períodos de tempo não são iguais,tempo e interação tratamento x tempo não podem ser testadas da maneira usual.

Além das análises univariada e multivariada de perfil para este tipo de dados, existem procedimentos intermediários que levam em consideração a estrutura da matriz de variâncias e covariâncias.

O objetivo deste trabalho é verificar a validade da análise da variância pelo método de parcelas subdivididas e testar diferenças de médias de tratamentos de experimentos em blocos ao acaso, onde se aplica um único tratamento a cada unidade experimental e dela se colhem observações com a mesma característica em tempos igualmente espaçados.

Serão considerados os casos onde as observações repe tidas da mesma parcela, no tempo:

a) são igualmente correlacionadas e a estrutura da matriz de variâncias e covariâncias, $A_{kk'}$, é do tipo "uniforme";

b) não são igualmente correlacionadas e a estrutura da matriz de variâncias e covariâncias, $A_{kk'}$ é do tipo:

$$A_{kk'} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1k} \\ & 1 & \cdots & \rho_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Para ambos os casos, as medidas repetidas serão consideradas como tratamento secundário.

## 2. REVISÃO DE LITERATURA

A revisão aqui apresentada se prende somente aos objetivos deste trabalho, citando os vários métodos empregados na análise de experimento desse tipo. Assim sendo, considerar-se-á a análise univariada, a multivariada e aquela que se preocupa com a estrutura de correlação entre as observações repetidas da mesma parcela, já que tais observações constituem um segmento de uma série de tempo.

Vem sendo estudado há várias décadas o problema existente na análise de experimentos onde se fazem observações sobre a mesma parcela, sendo essas observações sobre uma mesma característica e cuja diferença entre elas é dada somente em relação ao tempo, igualmente espaçado, em que foram observadas. Assim é que:

PARKER e BATCHELOR (1932) verificaram a existência de correlação interanual entre as produções de laranjeiras, durante um período de 10 anos. Constataram ainda que a correlação entre anos consecutivos são altos e diminuem lentamente quando o intervalo de tempo aumenta. Tal resultado, no entanto, não foi constatado por DINIZ (1978) que, com as produções de 8 anos da laranjeira Valência, verificou também a existência de correlações negativas entre anos, o que se deve provavelmente ao fato de que, após uma alta produção, segue-se uma baixa.

WISHART (1938) criticou a análise feita em um experimento de ganho de peso de suinos, onde se considerou somente a diferença entre o peso inicial e o final. Tais pesagens foram feitas semanalmente e o autor aconselha explorar-se outros tipos de análises, utilizando-se todas as observações obtidas, tais como análise de covariância do ganho de peso, análise dos componentes polinomiais ortogonais linear e quadrático de todas as pesagens, para cada animal. Com os resultados obtidos para cada animal, faz a análise dos coeficientes de regressão linear e quadrática para o conjunto de animais e as análises de covariância destes coeficientes de regressão em relação ao peso inicial.

Recomenda ainda a exploração de outros procedimentos de análise, já que os dados podem ser considerados dependentes.

PARKER (1942), trabalhando com laranjeiras, verificou que as produções anuais não são igualmente correlacionadas, e devido a esse fato, SNEDECOR (1956) sugere uma análise baseada na soma das produções das parcelas e ANDERSON e BANCROFT (1952) sugerem que se separe o erro (b) em dois componentes B x A e B x T x A.

SNEDECOR e HABER (1946), utilizando um ensaio para produção de espargos durante 10 anos, usaram o modelo em parcelas subdivididas para a análise conjunta.

Com o objetivo de previsão de produção, calcularam, para cada bloco, os componentes linear e quadrático. Os autores consideraram cortes como subparcelas, nada mencionando sobre correlação entre cortes.

Para o caso de colheitas em culturas perenes, STEVENS (1949), lembrando o fato que, em cafeeiros, existem plantas que produzem mais em anos pares e outras em anos ímpares, observa que a análise deve ser feita baseada em um número par de anos. Trabalhando com um ensaio de variedade de café e com dados fornecidos por 10 colheitas consecutivas, estuda a diferença de produção entre anos pares e ímpares, agrupando anos sucessivos aos pares, para eliminar o efeito bienal através do contraste:

$$-2(P_1+P_2) - (P_3+P_4) + 0(P_5+P_6) + (P_7+P_8) + 2(P_9+P_{10})$$

BOX (1950), considerando observações sucessivas na mesma parcela, acha válida uma análise simples se se puder supor que as observações têm as mesmas variâncias e mesmas covariâncias, para todas as parcelas.

Diz ainda que para se verificar a validade da aplicação de uma análise de variância de um modelo em parcelas subdivididas, pada dados dessa natureza, deve-se usar o procedimento proposto por BOX (1949), que recomenda verificar a hipótese de que a matriz de covariâncias seja a mesma, para todos os tratamentos.

Além disso, deve-se verificar se a matriz de variâncias e covariâncias é da forma

$$\Sigma = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

designada "uniforme" por GEISSER (1963). Estabelece ainda um teste de significância aproximado para verificar a hipótese de igualdade de variâncias e covariâncias.

No entanto, se não se puder fazer tal suposição, ou seja, se as condições exigidas pelo modelo de parcelas subdivididas não forem satisfeitas, deve-se adotar uma matriz de covariâncias de estrutura mais geral. Aconselha ainda, que em experimentos onde os resultados aparecerão na forma de curvas de crescimento, a forma da matriz de covariância deva ser levada em consideração para se poder decidir sobre o modelo e método de análise apropriados, pois, considera, ainda, que é de se esperar que a correlação entre medidas tomadas no tempo decresçam à medida que elas se distanciem, ou seja, se correlacionam serialmente. Tal consideração é também feita por DANFORD *et alii* (1960), COLE e GRIZZLE (1966), BJÖRNSSON (1978) e outros. Em situações onde a análise univariada não é apropriada, BOX (1950) propõe uma extensão multivariada de testes de significância, como um procedimento alternativo. Para isso, utiliza o critério de WILKS (1932). Para testar diversas hipóteses de interesse, usa as distribuições aproximadas deste critério, dadas por BARTLETT (1938) e BOX (1949).

PEARCE (1953), trabalhando com cultura perene, concorda que o número de colheitas deve ser um número par e que a análise conjunta de tais dados pode ser efetuada pelo modelo de parcelas subdivididas, considerando-se o ano como subdivisão da menor unidade experimental, se houver homogeneidade do erro experimental dentro de anos. Faz também a análise de tais dados pelo modelo para experimentos em faixas, considerando os anos como tratamentos aplicados sistematicamente. Prefere, no entanto, o procedimento de STEVENS (1949).

MONROE e MASON (1955) consideram as observações repetidas sobre a mesma parcela de uma cultura perene como uma amostra aleatória e adotam o seguinte esquema de análise da variância para um ensaio com 5 tratamentos, 4 repetições e 3 estações.

| C.V. | G.L. | E(Q.M.) |
|---|---|---|
| Repetições (R) | 3 | $VE + 5V_{RS} + 15\ V_R$ |
| Tratamentos (T) | 4 | $VE + 3V_{RT} + 4V_{ST} + 12V_T$ |
| R x T (erro a) | 12 | $VE + 3V_{RT}$ |
| Estações (S) | 2 | $VE + 5V_{RS} + 20V_S$ |
| S x T | 8 | $VE + 4V_{ST}$ |
| R x S | 6 | $VE + 5V_{RS}$ |
| R x T x S (erro b) | 24 | $VE$ |

STEEL (1955), tomando as produções acumuladas para cada ano em um ensaio de variedades de alfafa, compara as análises univariada e multivariada, mostrando que ambas apresentam os mesmos resultados.

Segundo CORRÊA DA SILVA (1979), Hughes e Danford (1958), em ensaios biológicos onde se deseja estudar os efeitos de drogas ou outros tratamentos sobre indivíduos que foram extraídos de uma população específica, em períodos sucessivos de tempo, a correlação entre medidas sucessivas sobre o mesmo indivíduo é que diferencia esta situação dos delineamentos e análises usuais. Além disso, os indivíduos que hoje estão em uma determinada posição, na população, poderão sofrer mudanças.

Hughes e Danford (1958), tomando N indivíduos e g tratamentos, administraram a $n_i$ indivíduos o i-ésimo tratamento e mediram uma certa característica, periodicamente, em p ocasiões.

Consideraram que o modelo apropriado para tal delineamento é o modelo misto, onde tratamentos e ocasiões são efeitos fixos e indivíduos, aleatório.

Assim, $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + b_{j(i)} + \gamma_k + \delta_{ik} + e_{jk(i)}$, dá a observação na k-ésima ocasião, no j-ésimo indivíduo, que recebe o i-ésimo tratamento.

Ainda,

$i = 1, 2, \ldots, g$;

$j = 1, 2, \ldots, n_i$;

$k = 1, 2, \ldots, p$;

$\mu$ = média geral;

$\alpha_i$ = efeito do i-ésimo tratamento;

$b_{j(i)}$ = efeito do j-ésimo indivíduo que recebe o i-ésimo tratamento;

$\gamma_k$ = efeito do k-ésimo instante de tempo;

$\delta_{ik}$ = efeito da interação do i-ésimo tratamento e k-ésimo instante;

$e_{jk(i)}$ = efeito da interação do j-ésimo indivíduo e k-ésimo instante, dentro do i-ésimo tratamento, mais componente aleatório do erro.

Admitindo-se a hipótese da igualdade das variâncias e covariâncias para os instantes de tempo (ocasiões), tem-se

$$COV(y_{ijk}, y_{i'j'k'}) = \begin{cases} \sigma^2 & , \ i = i' \ , \ j = j' \ , \ k = k' \\ \rho\sigma^2 & , \ i = i' \ , \ j = j' \ , \ k \neq k' \\ 0 & , \ \text{caso contrário} \ . \end{cases}$$

Considerando-se ainda a análise univariada, segundo o delineamento completamente casualizado com parcelas subdivididas, com tratamentos em parcelas e ocasiões em subparcelas, os autores observam que se têm testes válidos para as hipóteses de nulidade referentes a efeitos de tratamentos, de ocasiões e interação tratamentos x ocasiões. Considerando-se as hipóteses usuais de normalidade das distribuições dos componentes aleatórios, as somas de quadrados têm distribuição de $\chi^2$ e são mutuamente independentes. Fornecem os valores dos quadrados médios para tal caso.

| F.V. | G.L. | Q.M. | E(Q.M.)* | F |
|---|---|---|---|---|
| Tratamentos | g-1 | $Q_1$ | $A + \phi_1(\alpha_i)$ | $F_1 = Q_1/Q_2$ |
| Indivíduos (dentro de Trat.) | N-g | $Q_2$ | A | |
| Ocasiões | p-1 | $Q_3$ | $B + \phi_2(\gamma_k)$ | $F_2 = Q_3/Q_5$ |
| Trat. x Ocasiões | (g-1)(p-1) | $Q_4$ | $B + \phi_3(\delta_{ik})$ | $F_3 = Q_4/Q_5$ |
| Ind. x Ocasiões (dentro de Trat.) | (p-1)(N-g) | $Q_5$ | B | |
| Total | | | | |

* $A = \sigma^2[1 + (p-1)\rho]$ e $B = \sigma^2(1-\rho)$

$\phi(.)$ = função não negativa dos efeitos fixos.

GEISSER e GREENHOUSE (1958) estabelecem que, sob as correspondentes hipóteses de nulidade, $F_1$ é exatamente distribuído como $F(g-1,N-g)$; $F_2$ é aproximadamente distribuído como

$$F\left[(p-1)\varepsilon\ ,\ (p-1)(N-g)\varepsilon\right]$$

e $F_3$ é aproximadamente distribuído como

$$F\left[(g-1)(p-1)\varepsilon\ ,\ (p-1)(N-g)\varepsilon\right]$$

onde

$$\varepsilon = \frac{p^2(\bar{\sigma}_{kk} - \bar{\sigma}_{..})^2}{(p-1)(\sum\limits_{k}\sum\limits_{k'} \sigma^2_{kk'} - 2p\sum\limits_{k}\bar{\sigma}^2_{k.} + p^2\,\bar{\sigma}^2_{..})}\ ,$$

$\bar{\sigma}_{kk}$ é a média dos p termos da diagonal; $\bar{\sigma}_{k.}$ é a média dos elementos da k-ésima linha (ou coluna) e $\bar{\sigma}_{..}$ é a média geral dos elementos da matriz $\Sigma$.

Se a matriz de covariâncias tem a forma arbitrária, comum a todos os tratamentos, a significância das estatísticas $F_2$ e $F_3$ pode ainda ser determinada através do uso das tabelas ordinárias da distribuição F, mas com graus de liberdade reduzidos. A significância da estatística $F_1$ pode ser estabelecida pelo teste F usual, já que ela resulta de uma análise de variância de classificação simples com variância comum para todas as observações.

Como a redução no número de graus de liberdade é uma função dos elementos da matriz de covariância da população e esta é geralmente desconhecida, as aproximações estabelecidas pelos autores somente poderão se basear nas estimativas das variâncias e covariâncias. Além disso, não é possível determinar o quanto $\varepsilon$ será afetado pelo uso das estimativas. Os autores recomendam então o uso de um teste conservador, substituindo-se $\varepsilon$ pelo seu mínimo $\frac{1}{p-1}$, que independe da matriz de covariância. Com esta correção para os graus de liberdade, os testes de significância conservadores comparam as estatísticas $F_2$ e $F_3$ com os valores tabelados da distribuição F para 1 e (N-g) graus de liberdade e para (g-1) e (N-g) graus de liberdade, respectivamente.

GREENHOUSE e GEISSER (1959), em trabalho sobre métodos de análise de dados de perfil, observam que os quocientes entre os quadrados médios obtidos nesta análise de variância para o modelo misto, só terão distribuição F exata se as observações no tempo forem normalmente distribuídas, com variâncias iguais e mutuamente independentes ou igualmente correlacionadas. Como essas pressuposições são muito restritivas, os autores preferem considerar as observações no tempo como um vetor de amostras de uma distribuição normal multivariada com matriz de covariância arbitrária. Estudam ainda o uso da análise de variância univariada sob pressuposições gerais a respeito da matriz de covariâncias de observações no tempo.

Considerando-se que as observações em diferentes indivíduos não são correlacionadas, e pressupondo-se que o perfil de cada indivíduo é um vetor aleatório proveniente de uma distribuição normal conjunta de $\underline{p}$ variáveis, a matriz de covariâncias arbitrárias será da forma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

Então, os autores utilizam resultados obtidos por GEISSER e GREENHOUSE (1958), que estendendo para vários grupos o resultado obtido por BOX (1954a, 1954b) para um grupo, mostram que cada uma das estatísticas $F_1$, $F_2$ e $F_3$ é uma razão de dois quadrados médios independentes, com mesmo valor esperado sob a hipótese de nulidade.

Considerando a análise de experimentos com medidas repetidas, dizem que, decidindo-se utilizar o critério estatístico F, deve-se primeiramente fazer a análise de variância e efetuar os testes de significância, comparando-se o valor encontrado com o valor tabelado com os graus de liberdade correspondentes, não reduzidos. Assim, querendo-se testar $F_3$, deve-se comparar o valor encontrado com o valor tabelado e com $(g-1)(p-1)$ e $(p-1)(N-g)$ graus de liberdade. Se $F_3$ for não significativo (para um nível $\alpha$ escolhido), encerra-se a análise. Se $F_3$ for significativo, faz-se a redução dos graus de liberdade pela aplicação do fator $1/(p-1)$ do teste conservador. Compara-se então o valor encontrado com o valor tabelado e com $(g-1)$ e $(N-g)$ graus de liberdade. Se $F_3$ for significativo, rejeita-se a hipótese de nulidade. Se $F_3$ for não significativo, é aconselhável que se estime $\varepsilon$ e se efetue o teste aproximado. Aconselham também, fazer-se o teste de hipótese de que a matriz de variâncias e covariâncias é a mesma para todos os tratamentos, aplicando-se o teste indicado por BOX (1949, 1950), que é uma extensão multivariada do teste de homogeneidade de variâncias de BARTLETT (1937). Indicam ainda o teste de BOX (1949, 1950), para se fazer o teste de uniformidade da matriz de variâncias e covariâncias, tendo em vista a análise univariada de parcelas subdivididas. Salientam também, que o teste para efeito de tratamentos independe da estrutura uniforme da matriz de variâncias e covariâncias, e a análise univariada é válida.

Além de apresentarem testes de significância aproximados e conservadores para a análise univariada, mencionam procedimentos exatos de análise de variância multivariada para testar as hipóteses de igualdade de vetores médios de tratamentos e da inexistência de interação tratamentos x ocasiões (paralelismo dos perfis dos tratamentos). Desenvolvem então o procedimento para o caso de dois tratamentos, que leva à estatística $T^2$ generalizada de HOTELLING (1951) e sumarizam a extensão para mais de dois tratamentos.

Além disso, citam que, para este caso geral, há três critérios estatísticos para testes de significância: razão de verossimilhança de WILKS (1932), traço ou soma de raízes características de HOTELLING (1951) e raiz característica máxima de ROY (1953).

No entanto, acham irrealístico admitir que três ou mais observações da mesma unidade experimental, em ocasiões diferentes, sejam igualmente correlacionadas ou tenham a mesma variância.

Salientando que a análise multivariada requer cálculos mais complexos do que a análise univariada, diz que o procedimento univariado permite analisar dados em situações que não podem ser tratados por procedimentos multivariados.

Como exemplo desse fato, citam o caso onde o número de medidas repetidas é maior que o número de unidades experimentais. Recomendam, entretanto, que se se verificar a igualdade de variâncias e covariâncias, a análise univariada é aplicável e preferível.

No exemplo discutido pelos autores, onde não se verifica a igualdade de variâncias e covariâncias, utilizam testes aproximados e testes conservadores, baseados na análise univariada, para as hipóteses que não podem ser testadas exatamente por esta análise.

STEEL e TORRIE (1960) consideram que experimentos desse tipo se assemelham em muitos aspectos aos experimentos em parcelas subdivididas e muitas vezes são analisados como tal. No entanto, lembram as diferenças existentes entre as análises de experimentos em parcelas subdivididas no espaço e no tempo.

Salientam que em parcelas subdivididas no tempo podem acontecer grandes diferenças entre colheitas e entre suas variâncias. Outra diferença entre os dois tipos de experimentos é que os desvios padrões para várias comparações de médias de tratamentos não são sempre os mesmos em ambas as análises. Devido a isso, recomendam que seja feita uma análise de variância para cada colheita. Se a cultura apresentar mais de uma colheita por ano, sugerem a análise de cada colheita, separadamente, para então fazer-se a análise para cada ano, e daí a análise conjunta para anos.

Trabalhando com um experimento de variedades de alfafa, em blocos casualizados, dizem que na análise conjunta pode acontecer que a interação blocos x corte seja relevante, devido à localização dos blocos. Devido a isso, a soma de quadrados da interação blocos x corte deve ser separada do erro b.

DANFORD *et alii* (1960) concordam com GREENHOUSE e GEISSER (1959), no que se refere aos testes de uniformidade da matriz de variâncias e covariâncias para a aplicação da análise de parcelas subdivididas, e da necessidade das matrizes de variâncias e covariâncias serem as mesmas para todos os tratamentos. Concordam também com a validade da análise univariada para testes de efeitos de tratamentos, independentemente da hipótese de uniformidade da matriz de covariâncias.

Admitem o mesmo modelo, pressuposições, hipóteses e esquema de análise de HUGHES E DANFORD (1958).

Observam ainda, que para testes multivariados para efeitos de ocasiões e de interação tratamentos x ocasiões, se pode empregar o critério da razão de verossimilhança ou o critério $T^2$ de HOTELLING (1951), e que esses testes são assintoticamente idênticos aos correspondentes testes univariados que testam aquelas hipóteses.

Argumentando que a análise univariada é preferível à multivariada, do ponto de vista de trabalho e interpretação dos resultados, ressalta a importância da verificação das pressuposições necessárias para a sua validade.

Com medidas repetidas tomadas no tempo, dizem que,as mais próximas são mais altamente correlacionadas do que as mais afastadas, do que resulta uma estrutura de correlação serial.

Devido a esse fato, consideram mais apropriado um modelo de correlação serial que é mais geral do que a pressuposição de uniformidade da matriz de covariâncias. Além disso, julgam ser mais específico e significativo do que a pressuposição geral da análise de variância multivariada.

Para estudar a correlação serial, os autores modificam a pressuposição de uniformidade da matriz de covariância de medidas repetidas, considerando somente a homogeneidade das variâncias.

POTTHOFF e ROY (1964), fazendo a medição de meninos e meninas em quatro idades diferentes, presumem que essas observações são correlacionadas serialmente. Adotam então o modelo de correlação serial simples, cuja matriz de covariâncias para as quatro observações sobre o mesmo indivíduo é da forma:

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Se a matriz de covariâncias é desconhecida, sugerem que a mesma seja substituída por uma outra, baseada em informações disponíveis, antes da realização do experimento. Dizem ainda que essa substituição é questionável, mas que é mais apropriado do que fazer $\Sigma = \sigma^2 I$, embora haja perda de sensibilidade com consequente perda de potência dos testes e alargamento dos intervalos de confiança.

COLE e GRIZZLE (1966) utilizam a análise de variância multivariada em dados de experimentos com medidas repetidas, segundo SMITH *et alii* (1962), e comentam a sua versatilidade para a construção de testes de hipóteses específicos de interesse que podem ser obtidos como casos particulares do procedimento de teste de hipótese linear geral multivariado. Com relação ao teste de tais hipóteses, concordam com GREENHOUSE e GEISSER (1959). Formulando três hipóteses para o experimento, comentam que as mesmas são equivalentes às respectivas hipóteses de nulidade usualmente testadas pelo procedimento univariado e ilustram o procedimento de teste destas hipóteses para as análises univariada e multivariada.

Dizem ainda que o analista sente-se pressionado a usar a técnica poderosa da análise de variância, sem no entanto verificar a validade da hipótese de uniformidade da matriz de covariâncias. Consideram ainda que o objetivo de experimentos com medidas repetidas é estudar os efeitos de tratamentos sobre o vetor inteiro de observações, ou alguma característica particular dele. Consideram também que, como todas as observações no vetor são similares e dife rem apenas no que se refere ao tempo ou local, os dados têm aparência nitidamente univariada.

Comentam ainda que, quando a estrutura da matriz de covariâncias para os vetores torna a análise univariada inapropriada, pode-se usar uma série de recursos para certas análises particulares, mas que o problema será grandemente simplificado se se puder utilizar a análise multivariada.

Mostram também que a análise multivariada é um instrumento prático, flexível e poderoso para analisar dados de medidas repetidas, mas que se a hipótese de uniformidade da matriz de covariâncias não for rejeitada, a análise univariada deve ser adotada.

Comentam ainda que, quando não se pode fazer a hipótese de uniformidade da matriz de covariâncias de medidas repetidas, a análise multivariada aplicada a um problema aparentemente univariado testará as mesmas hipóteses que a análise univariada. Se a matriz de covariâncias, para dados repetidos, é da forma "correlação serial", deve-se utilizar um método de análise que leve em conta a estrutura dessa matriz, para se ter um aumento de poder dos testes. No entanto, consideram que a análise multivariada é a mais conveniente, senão a única apropriada entre os procedimentos disponíveis.

SNEDECOR e COCHRAN (1967) empregam a metodologia de PEARCE (1953) para analisar as produções de 4 anos sucessivos de um ensaio com aspargos, alegando que ela evita os efeitos de correlação entre as produções sucessivas da mesma parcela.

GRIZZLE e ALLEN (1969) desenvolveram um método de análise de curvas de crescimento para medidas repetidas no tempo, utilizando a técnica da análise de covariância, alertando que os modelos utilizados para a análise de curvas de crescimento de tais dados são geralmente para dados longitudinais, e que, além disso, a suposição de independência entre pontos da curva pode ser negada. Cita ainda RAO (1965, 1966) como o iniciador do estudo de estimação e teste de hipóteses no modelo de curvas de crescimento, sob o ponto de vista da análise de covariância.

PATTERSON e LOWE (1970) admitem, nos ensaios de longa duração, a existência de correlação serial entre as observações nas mesmas parcelas. Consideram ainda que, se não se levar em conta esta correlação, pode acarretar perda de eficiência na estimação dos efeitos de tratamentos e vício na estimação do erro. No entanto, o vício na variância das médias de tratamentos pode ser eliminado completa ou parcialmente determinando-se dois erros: da parcela e parcela x erro.

HUYNH e FELDT (1970) mostram que as condições de igualdade da matriz de covariâncias para todos os tratamentos, e de uniformidade da matriz de covariâncias de observações tomadas sobre uma mesma unidade experimental, são suficientes mas não necessárias para que as estatísticas $F_2$ e $F_3$ tenham distribuição F exata, sob a hipótese de nulidade. Eles estabelecem que $F_2$ e $F_3$ têm distribuição

F exata sob a hipótese de nulidade, se e somente se a matriz de covariâncias $\Sigma_h$ do vetor de medidas repetidas sobre uma mesma parcela com o h-ésimo tratamento (h = 1, 2, ..., g), satisfizer à condição:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ii} + \sigma_{jj}}{2} - \lambda \quad , \qquad i \neq j \ ,$$

onde $\lambda$ é uma constante comum para todos os tratamentos. Esta relação entre variâncias e covariâncias garante que a correção $\varepsilon$ de GEISSER E GREENHOUSE (1958) seja igual a 1.

HUYNH e FELDT (1970) estabelecem também um teste para a condição necessária e suficiente para que $F_2$ e $F_3$ tenham distribuição F exata.

GILL e HAFS (1971) salientam a necessidade de se verificar se as matrizes de variâncias e covariâncias dos tratamentos são idênticas, assim como se a estrutura da matriz de variâncias e covariâncias é do tipo uniforme, para se poder aplicar o modelo em parcelas subdivididas. Se a hipótese de que as matrizes de variâncias e covariâncias, por tratamento, não são idênticas, apresentam alguns testes para efeitos de tratamentos e períodos, justificando a viabilidade de aplicação de cada um deles. Assim, o teste para tratamento seria feito dentro de cada período com um teste F aproximado (BOX, 1954b). Período seria testado dentro de cada tratamento pelo teste F ordinário, se a estrutura da matriz de variâncias e covariâncias fosse do tipo uniforme dentro de cada tratamento, ou pelo $T^2$ multivariado (HOTELLING, 1931), se a estrutura fosse heterogê nea. Consideram ainda o teste multivariado (HOTELLING, 1931), próprio para testar o fator repetido (período), indiferentemente da forma da matriz de variâncias e covariâncias.

BJÖRNSSON (1974), considerando variâncias constantes no tempo, salienta que métodos univariados são práticos para análises preliminares, mesmo quando as observações são altamente correlacionadas. No entanto, se se puder admitir uniformidade das correlações das observações, os métodos univariados são aplicáveis.

HALL (1975) considera que, na análise de dados dessa natureza, dois tipos de erro podem ser cometidos. O primeiro é quando se admite um modelo incorreto, e o segundo é aquele que surge na análise mesmo após a natureza de parcelas subdivididas ter sido reconhecida, porque não se verificaram as correlações entre períodos.

Salienta ainda, que esse erro pode ser sério se as correlações entre períodos de tempo são desiguais, já que não se pode testar tempo e interação tempo x tratamento pelo processo usual. Observa, também, que o teste para tratamentos é válido e pode ser feito usando-se a distribuição F, mesmo que as correlações entre períodos de tempo sejam desiguais.

ROWELL e WALTERS (1976) apresentam, para dados dessa natureza, alguns métodos de análise. Em 1º lugar, fazer-se a análise para cada tempo, separadamente; em seguida, fazer-se a análise segundo o modelo em parcelas subdivididas, se as pressuposições do modelo forem satisfeitas. Caso isso não ocorra, recomenda o uso de uma análise multivariada. No entanto, defendem a análise de curvas de crescimento pelo ajuste de equações polinomiais no tempo, para os dados de cada tratamento e comparando-se seus coeficientes em uma série de análises univariadas. Mas GRIZZLE e ALLEN (1969) apresentaram uma análise multivariada que seria usada, visto que os coeficientes de regressão entre unidades são correlacionados.

MORRISON (1976) afirma que o teste de Hotelling é menos sensível do que o teste F univariado usual, sob condições onde ambos são válidos (variâncias e covariâncias uniformes), a não ser que a verdadeira correlação entre os dados de dois períodos exceda a 0,5 em valor absoluto. Conclui, então, que um procedimento multivariado seria usado somente quando o teste F não fosse válido devido a variâncias e covariâncias heterogêneas, ou quando a correlação entre períodos fosse grande. Considera ainda o teste para a interação tratamento x período, quando se tem somente dois tratamentos. Fazendo o perfil de resposta sobre o tempo desses dois tratamentos, e verificando o paralelismo dos dois perfis. Este procedimento foi generalizado por EATON (1969) para mais de dois perfis, e MORRISON (1967, 1970) discutiu o teste de coincidência dos perfis de resposta.

SCHWERTMAN (1978) diz que a correção de GEISSER e GREENHOUSE (1958) é desnecessária, pois $\varepsilon = 1$, se os vetores observados em cada parcela tiverem distribuição normal multivariada com matriz de dispersão com a estrutura:

$$\Sigma = \sigma^2 \left[ I + aJ + \alpha\dot{J}' + \dot{J}\alpha' \right] \quad ,$$

onde, $I$ = matriz identidade pxp;

$J$ = matriz pxp, com todos os elementos iguais a 1;

$\dot{J}$ = vetor px1, com todos os elementos iguais a 1;

$\alpha$ = vetor px1, tal que $\alpha'\dot{J} = 0$;

$\sigma^2$ = escalar;

$a$ = escalar.

Observa ainda o autor que, mesmo que o número de observações por unidades experimentais seja diferente, a correção continua desnecessária.

BJÖRNSSON (1978), analisando uma série de experimentos de pastagens de longa duração, comenta que é geralmente reconhecida a presença de correlação serial (que ele chama "correlação de parcela") entre os desvios residuais anuais em uma mesma parcela. Devido à diferença de fertilidade (erro de parcela) que permanece de ano para ano, as correlações são usualmente positivas e decrescem com intervalos crescentes de tempo, especialmente em culturas perenes.

No entanto, a análise de séries de tempo aplica-se a séries bastante longas (não menos do que 50 elementos) e não repetidas, enquanto que, na experimentação agrícola, as séries são, de um modo geral, mais curtas e com repetições. Comenta ainda que esses fatos podem levar à escolha de diferentes procedimentos, ou a modificações daqueles disponíveis.

Considerando um experimento em blocos casualizados:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij} \quad ,$$

onde: $\mu$ = efeito médio;

$\tau_i$ = efeito do tratamento i;

$\beta_j$ = efeito do bloco j;

$e_{ij}$ = desvio residual dos efeitos de tratamentos e blocos;

diz que este modelo linear pode ser estendido a uma situação com observações anuais de rendimento, pelo acréscimo do índice t a cada termo.

Pressupondo que os vetores de resíduos $e_{ij}$ sejam distribuídos identicamente e independentemente, e que cada vetor de resíduo seja uma amostra de T observações de uma série de tempo fracamente estacionária, tem-se que

$$\text{COV}\,(e_{ijt}, e_{ij(t+h)}) = \begin{cases} \gamma_{(k)} & \text{, para todo i, j, t} \\ 0 & \text{, para todo ij} \neq \text{i'j'} \end{cases}$$

O coeficiente de auto-correlação correspondente à defasagem h é: $\rho_h = \gamma_{(h)}/\gamma_{(0)}$ , pressupondo-se que a variância não varia com o tempo, $\gamma_{(0)} = \sigma^2$. Então, a matriz de covariâncias dos resíduos sobre cada parcela pode ser expressa por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{T-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{T-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{T-1} & \rho_{T-2} & \rho_{T-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Diz ainda que um modelo mais geral para resíduos,que satisfaz a estas pressuposições, é:

$$e_{ijt} = w_{ij} + z_{ijt} \quad ,$$

onde, $w_{ij}$ = média da série, é uma variável aleatória, algumas vezes chamada "erro de parcela", com média zero e variância $\sigma_w^2$;

$z_{ijt}$ = componente anual do erro, gerado por uma série de tempo aleatória.

No caso mais simples, $z_{ijt}$ é puramente aleatório, isto é, distribuído identicamente e independentemente, com média zero e variância $\sigma_z^2$, para todo i, j, t. Neste caso, a matriz de covariâncias das observações sobre uma mesma parcela é uniforme e pode ser aplicada a análise de variância univariada.

EVANS e ROBERTS (1979) defendem, para dados dessa natureza, o ajuste de equações polinomiais, salientando que equações polinomiais de alta ordem são frequentemente requeridas. No entanto, devido à difícil interpretação dos coeficientes de alta ordem, este método é pouco usado.

# 3. MATERIAL

O material utilizado para a exemplificação neste trabalho é constituído pelas produções, em kg por parcela, de um pomar experimental de laranjeiras Valência (*Citrus sinensis* L. Osbeck),em idade adulta, dados gentilmente cedidos pelo Dr. Joaquim Teófilo Sobrinho, Chefe da Estação Experimental de Limeira, do Instituto Agronômico de Campinas.

Foram utilizadas as produções de um período de 9 (nove) anos, ou seja, 1970 a 1978.

O delineamento utilizado foi o de blocos ao acaso com 3 repetições, sendo que em cada uma das nove parcelas do bloco foram colocadas duas plantas.

Neste pomar, instalado em 1962, utilizaram-se nove variedades para porta-enxerto e uma para enxerto.

A variedade utilizada para enxerto foi a laranjeira Valência (*Citrus sinensis* L. Osbeck) e as variedades porta-enxertos foram:

$T_1$: Tangerineira-sunki (*Citrus sunki* Hort. ex Tanaka);

$T_2$: Limoeiro-rugoso-nacional (*Citrus jambhiri* Lush);

$T_3$: Limoeiro rugoso-da Flórida (*Citrus jambhiri* Lush);

$T_4$: Tangerineira Cleópatra (*Citrus reshni* Hort. ex Tanaka);

$T_5$: Citrange-Troyer(*Poncirus trifoliata* Raff x *Citrus sinensis* L. Osbeck);

$T_6$: Trifoliata (*Poncirus trifoliata* Raff);

$T_7$: Tangerineira-cravo (*Citrus reticulata* Blanco);

$T_8$: Laranjeira-caipira (*Citrus sinensis* L. Osbeck);

$T_9$: Limoeiro-cravo (*Citrus limonia* Osbeck).

Maiores detalhes sobre o experimento são fornecidos por TEÓFILO SOBRINHO (1972) e DINIZ (1978).

Os dados referentes ao material utilizado constam da Tabela 1.

Tabela 1 - Produções, em kg por parcela, de um ensaio de competição de porta-enxertos com a laranjeira Valência, nos anos de 1970 a 1978.

| | ANOS | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1970 | 169,0 | 76,0 | 130,0 |
| | 1971 | 145,0 | 156,5 | 180,2 |
| | 1972 | 288,5 | 300,0 | 219,1 |
| | 1973 | 155,5 | 173,5 | 102,3 |
| $T_1$ | 1974 | 330,4 | 335,3 | 366,6 |
| | 1975 | 337,9 | 241,1 | 279,8 |
| | 1976 | 410,8 | 338,0 | 412,3 |
| | 1977 | 82,6 | 102,0 | 51,6 |
| | 1978 | 490,5 | 396,4 | 565,3 |
| | 1970 | 196,0 | 90,0 | 94,5 |
| | 1971 | 104,5 | 184,0 | 80,5 |
| | 1972 | 181,4 | 161,2 | 93,7 |
| | 1973 | 152,4 | 181,0 | 105,3 |
| $T_2$ | 1974 | 195,3 | 207,2 | 127,6 |
| | 1975 | 173,6 | 193,0 | 161,5 |
| | 1976 | 177,3 | 197,1 | 104,5 |
| | 1977 | 71,6 | 30,0 | 65,0 |
| | 1978 | 177,5 | 238,2 | 227,7 |
| | 1970 | 128,0 | 114,0 | 148,0 |
| | 1971 | 108,5 | 111,0 | 129,1 |
| | 1972 | 148,2 | 193,5 | 171,1 |
| | 1973 | 156,1 | 142,6 | 131,0 |
| $T_3$ | 1974 | 256,8 | 268,5 | 245,3 |
| | 1975 | 187,5 | 241,7 | 233,0 |
| | 1976 | 290,7 | 323,2 | 335,9 |
| | 1977 | 22,0 | 33,4 | 29,4 |
| | 1978 | 420,2 | 435,9 | 448,6 |
| | 1970 | 110,5 | 97,5 | 48,5 |
| | 1971 | 74,0 | 134,8 | 171,0 |
| | 1972 | 222,0 | 167,5 | 233,4 |
| | 1973 | 81,0 | 139,5 | 96,7 |
| $T_4$ | 1974 | 286,6 | 268,3 | 274,2 |
| | 1975 | 239,1 | 306,6 | 301,4 |
| | 1976 | 309,5 | 323,9 | 323,6 |
| | 1977 | 115,9 | 70,2 | 47,7 |
| | 1978 | 498,5 | 430,4 | 557,8 |

| | ANOS | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1970 | 149,0 | 132,0 | 89,0 |
| | 1971 | 171,5 | 203,5 | 130,5 |
| | 1972 | 232,7 | 261,9 | 159,2 |
| | 1973 | 125,3 | 162,7 | 107,5 |
| $T_5$ | 1974 | 266,8 | 306,2 | 252,5 |
| | 1975 | 267,8 | 128,9 | 231,8 |
| | 1976 | 307,4 | 296,0 | 252,6 |
| | 1977 | 70,9 | 28,3 | 26,0 |
| | 1978 | 388,3 | 498,1 | 420,8 |
| | 1970 | 138,0 | 55,0 | 133,0 |
| | 1971 | 50,0 | 72,5 | 109,5 |
| | 1972 | 147,6 | 127,3 | 219,5 |
| | 1973 | 97,5 | 123,7 | 79,7 |
| $T_6$ | 1974 | 189,0 | 234,7 | 251,7 |
| | 1975 | 213,1 | 305,9 | 212,0 |
| | 1976 | 164,1 | 211,5 | 251,6 |
| | 1977 | 70,7 | 55,8 | 23,4 |
| | 1978 | 277,2 | 365,7 | 399,0 |
| | 1970 | 174,0 | 102,0 | 137,0 |
| | 1971 | 158,5 | 104,0 | 127,0 |
| | 1972 | 208,7 | 151,7 | 131,3 |
| | 1973 | 175,9 | 145,0 | 121,8 |
| $T_7$ | 1974 | 261,1 | 218,0 | 279,8 |
| | 1975 | 266,2 | 201,5 | 159,5 |
| | 1976 | 314,0 | 295,3 | 270,2 |
| | 1977 | 78,8 | 79,7 | 72,7 |
| | 1978 | 360,6 | 382,5 | 433,1 |
| | 1970 | 187,0 | 148,0 | 205,0 |
| | 1971 | 151,5 | 141,0 | 146,5 |
| | 1972 | 239,5 | 206,0 | 195,2 |
| | 1973 | 202,2 | 224,0 | 198,0 |
| $T_8$ | 1974 | 290,0 | 235,0 | 280,6 |
| | 1975 | 283,3 | 287,7 | 321,0 |
| | 1976 | 379,1 | 227,1 | 354,7 |
| | 1977 | 90,9 | 34,0 | 38,1 |
| | 1978 | 458,3 | 431,9 | 485,5 |

| | ANOS | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1970 | 49,0 | 185,0 | 182,0 |
| | 1971 | 94,5 | 143,5 | 193,6 |
| | 1972 | 169,0 | 220,0 | 274,5 |
| | 1973 | 177,3 | 155,0 | 94,2 |
| $T_9$ | 1974 | 342,9 | 252,5 | 311,8 |
| | 1975 | 200,2 | 194,2 | 259,5 |
| | 1976 | 285,0 | 336,8 | 411,5 |
| | 1977 | 136,0 | 71,5 | 93,6 |
| | 1978 | 362,0 | 404,7 | 476,7 |

# 4. MÉTODOS

Neste trabalho são tratados os ensaios em blocos casualizados, com I tratamentos, J blocos e K observações da mesma natureza em cada parcela, sendo que a diferença entre as observações de cada unidade experimental é estudada com relação ao tempo em que foram coletadas.

Adotou-se o modelo de parcelas subdivididas, sendo que as observações no tempo correspondem às subparcelas. Ainda, todos os efeitos são considerados fixos, com exceção dos erros das subparcelas, que são considerados aleatórios.

Em parcelas subdivididas, tanto os tratamentos principais como os secundários devem ser casualizados. Como as subparcelas não foram casualizadas, isto poderá invalidar o uso do delineamento. Veremos, então, as exigências que devem ser satisfeitas para que seja válido o uso desse modelo.

Considerando-se que somente parte das condições são satisfeitas, estabeleceremos uma metodologia de testes de significância para efeitos de tratamento, ano e interação tratamento x ano, assim como o cálculo das variâncias para testes de diferenças de médias de tratamentos, anos e blocos.

Para ambos os casos, o modelo considerado será:

$$y_{ijk} = \mu + t_i + b_j + (tb)_{ij} + a_k + (ta)_{ik} + (ba)_{jk} + e_{ijk} ,$$

onde, $\mu$ = média geral;

$t_i$ = efeito do i-ésimo tratamento;

$b_j$ = efeito do j-ésimo bloco;

$a_k$ = efeito do k-ésimo tratamento secundário;

$(tb)_{ij}$ = efeito da interação do i-ésimo tratamento com o j-ésimo bloco, ou efeito residual de parcelas;

$(ta)_{ik}$ = efeito da interação do i-ésimo tratamento com o k-ésimo tratamento secundário;

$(ba)_{jk}$ = efeito da interação do j-ésimo bloco e k-ésimo tratamento secundário;

$e_{ijk}$ = erro experimental ou efeito associado à ijk-ésima observação.

O quadro de análise de variância será:

| Causas de Variação | G.L. |
|---|---|
| Blocos (B) | J-1 |
| Tratamentos (T) | I-1 |
| T x B (resíduo a) | (I-1)(J-1) |
| Anos (A) | K-1 |
| T x A | (I-1)(K-1) |
| B x A | (J-1)(K-1) |
| B x T x A (resíduo b) | (I-1)(J-1)(K-1) |
| Total | IJK-1 |

Do modelo linear geral, $Y = X\beta + \varepsilon$, obtemos o sistema de equações normais, $X'X\beta = XY$, onde:

$$X = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccc}
1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hdashline
1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
\hdashline
\hdashline
1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hdashline
1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]$$

$IJK \times (I+J+K+IK+IJ+1+JK)$

X'X =

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | JK JK ... JK | IK IK ... IK | IJ IJ ... IJ | K K ... K ... K K ... K | J J ... J ... J J ... J | I I ... I ... I I ... I |
| JK | JK 0 ... 0 | K K ... K | J J ... J | K K ... K ... 0 0 ... 0 | J J ... J ... 0 0 ... 0 | 1 1 ... 1 ... 1 1 ... 1 |
| JK | 0 JK ... 0 | K K ... K | J J ... J | 0 0 ... 0 ... 0 0 ... 0 | 0 0 ... 0 ... 0 0 ... 0 | 1 1 ... 1 ... 1 1 ... 1 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| JK | 0 0 ... JK | K K ... K | J J ... J | 0 0 ... 0 ... K K ... K | 0 0 ... 0 ... J J ... J | 1 1 ... 1 ... 1 1 ... 1 |
| IK | K K ... K | IK 0 ... 0 | I I ... I | K 0 ... 0 ... K 0 ... 0 | 1 1 ... 1 ... 1 1 ... 1 | I I ... I ... I I ... I |
| IK | K K ... K | 0 IK ... 0 | I I ... I | 0 K ... 0 ... 0 K ... 0 | 1 1 ... 1 ... 1 1 ... 1 | I I ... I ... I I ... I |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| IK | K K ... K | 0 0 ... IK | I I ... I | 0 0 ... K ... 0 0 ... K | 1 1 ... 1 ... 1 1 ... 1 | I I ... I ... I I ... I |
| IJ | J J ... J | I I ... I | IJ 0 ... 0 | 1 1 ... 1 ... 1 1 ... I | J 0 ... 0 ... J 0 ... 0 | I 0 ... 0 ... I 0 ... 0 |
| IJ | J J ... J | I I ... I | 0 IJ ... 0 | 1 1 ... 1 ... 1 1 ... 1 | 0 J ... 0 ... 0 J ... 0 | 0 I ... 0 ... 0 I ... 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| IJ | J J ... J | I I ... I | 0 0 ... IJ | 1 1 ... 1 ... 1 1 ... 1 | 0 0 ... J ... 0 0 ... J | 0 0 ... I ... 0 0 ... I |
| K | K 0 ... 0 | K 0 ... 0 | 1 1 ... 1 | K 0 ... 0 ... 0 0 ... 0 | 1 1 ... 1 ... 0 0 ... 0 | 1 1 ... 1 ... 0 0 ... 0 |
| K | K 0 ... 0 | 0 K ... 0 | 1 1 ... 1 | 0 K ... 0 ... 0 0 ... 0 | 1 1 ... 1 ... 0 0 ... 0 | 0 0 ... 0 ... 0 0 ... 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| K | K 0 ... 0 | 0 0 ... K | 1 1 ... 1 | 0 0 ... K ... 0 0 ... 0 | 1 1 ... 1 ... 0 0 ... 0 | 0 0 ... 0 ... 1 1 ... 1 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| K | 0 0 ... K | K 0 ... 0 | 1 1 ... 1 | 0 0 ... 0 ... K 0 ... 0 | 0 0 ... 0 ... 1 1 ... 1 | 1 1 ... 1 ... 0 0 ... 0 |
| K | 0 0 ... K | 0 K ... 0 | 1 1 ... 1 | 0 0 ... 0 ... 0 K ... 0 | 0 0 ... 0 ... 1 1 ... 1 | 0 0 ... 0 ... 0 0 ... 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| K | 0 0 ... K | 0 0 ... K | 1 1 ... 1 | 0 0 ... 0 ... 0 0 ... K | 0 0 ... 0 ... 1 1 ... 1 | 0 0 ... 0 ... 1 1 ... 1 |
| J | J 0 ... 0 | 1 1 ... 1 | J 0 ... 0 | 1 1 ... 1 ... 0 0 ... 0 | J 0 ... 0 ... 0 0 ... 0 | 1 0 ... 0 ... 1 0 ... 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| J | J 0 ... 0 | 1 1 ... 1 | J 0 ... 0 | 1 1 ... 1 ... 0 0 ... 0 | 0 J ... 0 ... 0 0 ... 0 | 1 0 ... 0 ... 0 0 ... 1 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| J | 0 0 ... J | 1 1 ... 1 | J 0 ... 0 | 0 0 ... 0 ... 1 1 ... 1 | 0 0 ... 0 ... J 0 ... 0 | 1 0 ... 0 ... 1 0 ... 0 |
| J | 0 0 ... J | 1 1 ... 1 | 0 J ... 0 | 0 0 ... 0 ... 1 1 ... 1 | 0 0 ... 0 ... 0 J ... 0 | 0 1 ... 0 ... 0 1 ... 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| J | 0 0 ... J | 1 1 ... 1 | 0 0 ... J | 0 0 ... 0 ... 1 1 ... 1 | 0 0 ... 0 ... 0 0 ... J | 0 0 ... 1 ... 0 0 ... 1 |
| I | 1 1 ... 1 | I I ... I | I 0 ... 0 | 1 0 ... 0 ... 1 0 ... 0 | 1 0 ... 0 ... 1 0 ... 0 | I 0 ... 0 ... 0 0 ... 0 |
| I | 1 1 ... 1 | I I ... I | 0 I ... 0 | 1 0 ... 0 ... 1 0 ... 0 | 0 1 ... 0 ... 0 1 ... 0 | 0 I ... 0 ... 0 0 ... 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| I | 1 1 ... 1 | I I ... I | 0 0 ... I | 1 0 ... 0 ... 1 0 ... 0 | 0 0 ... 1 ... 0 0 ... 1 | 0 0 ... I ... 0 0 ... 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| I | 1 1 ... 1 | I I ... I | I 0 ... 0 | 0 0 ... 1 ... 0 0 ... 1 | 1 0 ... 0 ... 1 0 ... 0 | 0 0 ... 0 ... I 0 ... 0 |
| I | 1 1 ... 1 | I I ... I | 0 I ... 0 | 0 0 ... 1 ... 0 0 ... 1 | 0 1 ... 0 ... 0 1 ... 0 | 0 0 ... 0 ... 0 I ... 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| I | 1 1 ... 1 | I I ... I | 0 0 ... I | 0 0 ... 1 ... 0 0 ... 1 | 0 0 ... 1 ... 0 0 ... 1 | 0 0 ... 0 ... 0 0 ... I |

(I+J+K+IJ+IK+JK+1)x(I+J+K+IJ+IK+JK+1)

Fazendo-se a partição

$$X = [X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 : X_6 : X_7]$$

temos que:

$$X'X = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'X_3 & X_1'X_4 & X_1'X_5 & X_1'X_6 & X_1'X_7 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 & X_2'X_3 & X_2'X_4 & X_2'X_5 & X_2'X_6 & X_2'X_7 \\ X_3'X_1 & X_3'X_2 & X_3'X_3 & X_3'X_4 & X_3'X_5 & X_3'X_6 & X_3'X_7 \\ X_4'X_1 & X_4'X_2 & X_4'X_3 & X_4'X_4 & X_4'X_5 & X_4'X_6 & X_4'X_7 \\ X_5'X_1 & X_5'X_2 & X_5'X_3 & X_5'X_4 & X_5'X_5 & X_5'X_6 & X_5'X_7 \\ X_6'X_1 & X_6'X_2 & X_6'X_3 & X_6'X_4 & X_6'X_5 & X_6'X_6 & X_6'X_7 \\ X_7'X_1 & X_7'X_2 & X_7'X_3 & X_7'X_4 & X_7'X_5 & X_7'X_6 & X_7'X_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 \\ A_2' & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \\ A_3' & B_2' & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ A_4' & B_3' & C_2' & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \\ A_5' & B_4' & C_3' & D_2' & E_1 & E_2 & E_3 \\ A_6' & B_5' & C_4' & D_3' & E_2' & F_1 & F_2 \\ A_7' & B_6' & C_5' & D_4' & E_3' & F_2' & G_1 \end{bmatrix}$$

Ainda:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{\tau} \\ \hat{b} \\ \hat{a} \\ \widehat{tb} \\ \widehat{ta} \\ \widehat{ba} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X'Y = \begin{bmatrix} G \\ T \\ B \\ A \\ TB \\ TA \\ BA \end{bmatrix}$$

Em $\hat{\beta}$ temos:

$$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \vdots \\ \hat{t}_I \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_J \end{bmatrix}, \quad \hat{a} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_K \end{bmatrix},$$

$$\widehat{tb} = \begin{bmatrix} \widehat{tb}_{11} \\ \vdots \\ \widehat{tb}_{1J} \\ \vdots \\ \widehat{tb}_{I1} \\ \vdots \\ \widehat{tb}_{IJ} \end{bmatrix}, \quad \widehat{ta} = \begin{bmatrix} \widehat{ta}_{11} \\ \vdots \\ \widehat{ta}_{1K} \\ \vdots \\ \widehat{ta}_{I1} \\ \vdots \\ \widehat{ta}_{IK} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \widehat{ba} = \begin{bmatrix} \widehat{ba}_{11} \\ \vdots \\ \widehat{ba}_{1K} \\ \vdots \\ \widehat{ba}_{J1} \\ \vdots \\ \widehat{ba}_{JK} \end{bmatrix}$$

Em X'Y temos:

$$G = \text{total geral} \quad ,$$

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_I \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_J \end{bmatrix} , \quad A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_K \end{bmatrix} ,$$

$$TB = \begin{bmatrix} TB_{11} \\ \vdots \\ TB_{1J} \\ \vdots \\ TB_{I1} \\ \vdots \\ TB_{IJ} \end{bmatrix} , \quad TA = \begin{bmatrix} TA_{11} \\ \vdots \\ TA_{1K} \\ \vdots \\ TA_{I1} \\ \vdots \\ TA_{IK} \end{bmatrix} , \quad BA = \begin{bmatrix} BA_{11} \\ \vdots \\ BA_{1K} \\ \vdots \\ BA_{J1} \\ \vdots \\ BA_{JK} \end{bmatrix} ,$$

que indicam, respectivamente, o total geral, os totais dos tratamentos, de blocos, de anos, de tratamentos x blocos, de tratamentos x anos, de blocos x anos.

Temos também que:

$$B_1 = JK \; I_{IxI} \quad \Rightarrow \quad B_1^{-1} = \frac{1}{JK} \; I_{IxI}$$

$$C_1 = IK \; I_{JxJ} \quad \Rightarrow \quad C_1^{-1} = \frac{1}{IK} \; I_{JxJ}$$

$$D_1 = IJ\, I_{K\times K} \Rightarrow D_1^{-1} = \frac{1}{IJ} I_{K\times K}$$

$$E_1 = K\, I_{IJ\times IJ} \Rightarrow E_1^{-1} = \frac{1}{K} I_{IJ\times IJ}$$

$$F_1 = J\, I_{IK\times IK} \Rightarrow F_1^{-1} = \frac{1}{J} I_{IK\times IK}$$

$$G_1 = I\, I_{JK\times JK} \Rightarrow G_1^{-1} = \frac{1}{I} I_{JK\times JK}$$

De $X'X\hat{\beta} = X'Y$, obtemos:

$$\begin{cases} A_1\,\hat{m} + A_2\,\hat{\tau} + A_3\,\hat{b} + A_4\,\hat{a} + A_5\,\hat{tb} + A_6\,\hat{ta} + A_7\,\hat{ba} = G \\ A_2'\,\hat{m} + B_1\,\hat{\tau} + B_2\,\hat{b} + B_3\,\hat{a} + B_4\,\hat{tb} + B_5\,\hat{ta} + B_6\,\hat{ba} = T \\ A_3'\,\hat{m} + B_2'\,\hat{\tau} + C_1\,\hat{b} + C_2\,\hat{a} + C_3\,\hat{tb} + C_4\,\hat{ta} + C_5\,\hat{ba} = B \\ A_4'\,\hat{m} + B_3'\,\hat{\tau} + C_2'\,\hat{b} + D_1\,\hat{a} + D_2\,\hat{tb} + D_3\,\hat{ta} + D_4\,\hat{ba} = A \\ A_5'\,\hat{m} + B_4'\,\hat{\tau} + C_3'\,\hat{b} + D_2'\,\hat{a} + E_1\,\hat{tb} + E_2\,\hat{ta} + E_3\,\hat{ba} = TB \\ A_6'\,\hat{m} + B_5'\,\hat{\tau} + C_4'\,\hat{b} + D_3'\,\hat{a} + E_2'\,\hat{tb} + F_1\,\hat{ta} + F_2\,\hat{ba} = TA \\ A_7'\,\hat{m} + B_6'\,\hat{\tau} + C_5'\,\hat{b} + D_4'\,\hat{a} + E_3'\,\hat{tb} + F_2'\,\hat{ta} + G_1\,\hat{ba} = BA \end{cases} \quad (6.a)$$

Para se determinarem as estimativas dos efeitos de tratamentos, blocos e anos, considerar-se-á a partição $X = [X_2 : X_3 : X_4]$, donde se obtém

$$X'X = \begin{bmatrix} X_2'X_2 & X_2'X_3 & X_2'X_4 \\ X_3'X_2 & X_3'X_3 & X_3'X_4 \\ X_4'X_2 & X_4'X_3 & X_4'X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ B_2' & C_1 & C_2 \\ B_3' & C_2' & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & N & H \\ N' & V & F \\ H' & F' & G \end{bmatrix}$$

## 4.1 - Determinação das Estimativas dos Efeitos de Tratamentos: $\hat{\tau}$

Sejam as matrizes

$$W_T = [I, -NV^{-1}, \phi] \quad \text{ou} \quad W_T = [I, \phi, -HG^{-1}]$$

e consideremos a primeira.

Pré-multiplicando $X'X\hat{\beta} = X'Y$ por $W_T$, temos:

$$W_T X'X\hat{\beta} = W_T X'Y \quad .$$

Mas $W_T X'X = W_T S = [R - NV^{-1} N', \phi, \phi]$ e $W_T X'Y = T - NV^{-1} B$. Então:

$$[R - NV^{-1} N', \phi, \phi] = \begin{bmatrix} \hat{\tau} \\ \hat{\beta} \\ \hat{m} \end{bmatrix} = T - NV^{-1} B$$

ou

$$(R - NV^{-1} N')\,\hat{\tau} = T - NV^{-1} B$$

Fazendo-se $C_T = R - NV^{-1} N'$ e $Q_T = T - NV^{-1} B \implies C_T\hat{\tau} = Q_T$, onde a matriz $C_T$ é singular e de característica $(I-1)$.

Admitindo-se a restrição $A_T\hat{\tau} = \phi$, temos: $\begin{cases} C_T\hat{\tau} = Q_T \\ A_T\hat{\tau} = \phi \end{cases}$

e $(C_T - A_T)\,\hat{\tau} = Q_T$.

Fazendo-se $M_T = C_T - A_T \implies M_T\hat{\tau} = Q_T \implies \hat{\tau} = M_T^{-1} Q_T$.

Se tivéssemos utilizado a matriz $W_T = [I, \phi, HG^{-1}]$, teríamos obtido os mesmos resultados, já que $N K^{-1} N' = H G^{-1} H'$ e $N V^{-1} B = H G^{-1} A$.

Como,

$$C_T = R - NV^{-1}N' = \begin{bmatrix} JK - \frac{JK}{I} & -\frac{JK}{I} & \cdots & -\frac{JK}{I} \\ -\frac{JK}{I} & JK - \frac{JK}{I} & \cdots & -\frac{JK}{I} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{JK}{I} & -\frac{JK}{I} & \cdots & JK - \frac{JK}{I} \end{bmatrix}_{I\times I}$$

e carac $(C_T)$= I-1, podemos tomar $A_T = \frac{JK}{I} E_{I\times I}$ , onde $E_{I\times I}$ é matriz constituída por elementos iguais à unidade. Então:

$$M_T = C_T - A_T = \begin{bmatrix} JK & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & JK & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & JK \end{bmatrix}_{I\times I}$$

ou $M_T^{-1} = \frac{1}{JK} I_{I\times I} \Rightarrow M_T^{-1} = R^{-1}$ , portanto,

$$\hat{\tau} = R^{-1} Q_T \Rightarrow \hat{\tau} = \frac{1}{JK} Q_T \quad .$$

## 4.2 - Determinação da Matriz de Dispersão para Tratamentos: $\Omega_T$

Ainda $Q_T = W_T X'Y = W_T X'(X\beta + \varepsilon) = W_T S\beta + W_T X'\varepsilon$.

Como $W_T S = [C_T \ , \ \phi, \ \phi]$, temos:

$$Q_T = C_T \ \tau + W_T X' \ \varepsilon \ .$$

Então $\hat{\tau} = R^{-1}(C_T\tau + W_TX'\varepsilon) = R^{-1}C_T\tau + R^{-1}W_TX'\varepsilon$ ,

e $E(\hat{\tau}) = R^{-1}C_T\tau$ ,

$$\therefore \quad \hat{\tau} - E(\hat{\tau}) = R^{-1}W_TX'\varepsilon \quad .$$

Chamando-se $\Omega_T$ = matriz de dispersão para tratamentos, temos:

$$\Omega_T = E\{[\hat{\tau} - E(\hat{\tau})][\hat{\tau} - E(\hat{\tau})]'\} = E[R^{-1}W_TX'\varepsilon\,\varepsilon'XW_T'R'^{-1}]$$

$$= R^{-1}W_TX'E(\varepsilon\varepsilon')XW_T'R'^{-1}$$

$$\Omega_T = \frac{1}{(JK)^2}W_TX'E(\varepsilon\varepsilon')XW_T' \quad .$$

A demonstração de $E(\varepsilon\varepsilon')$ será vista adiante.

## 4.3 - Determinação das Estimativas dos Efeitos de Blocos: $\hat{b}$

Sejam as matrizes

$$W_B = [-N'R^{-1}, I, \phi] \qquad \text{ou} \qquad W_B = [\phi, I, -FG^{-1}]$$

Pré-multipliquemos $X'X\hat{\beta} = X'Y$ por $W_B = [-N'R^{-}, I, \phi]$.

Então:

$$[\phi, V - N'R^{-1}N, \phi]\begin{bmatrix}\hat{\tau}\\ \hat{b}\\ \hat{a}\end{bmatrix} = [B - N'R^{-1}T] \Rightarrow (V - N'R^{-1}N)\hat{b} = $$
$$= B - N'R^{-1}T$$

Façamos $C_B = V - N'R^{-1}N$ e $Q_B = B - N'R^{-1}T \Rightarrow C_B\hat{b} = Q_B$.

Como $C_B$ é não singular e de característica (J-1), ad mitindo-se a restrição $A_B\,\beta = \phi$, temos: $\begin{cases} C_B\,\beta = Q_B \\ A_B\,\beta = \phi \end{cases} \Longrightarrow (C_B - A_B)\,\beta = Q_B.$

Chamando-se $M_B = C_B - A_B \Longrightarrow M_B\,\beta = Q_B \Longrightarrow \beta = M_B^{-1} Q_B.$

Utilizando-se a outra matriz W, chegaríamos ao mesmo resultado. Como

$$C_B = \begin{bmatrix} IK - \frac{IK}{J} & -\frac{IK}{J} & & -\frac{IK}{J} \\ -\frac{IK}{J} & IK - \frac{JK}{J} & \cdots & -\frac{IK}{J} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{IK}{J} & -\frac{IK}{J} & \cdots & IK - \frac{IK}{J} \end{bmatrix}_{JxJ}$$

e carac $(C_B) = (J-1)$, podemos tomar $A_B = -\frac{IK}{J} E_{JxJ}$, e então:

$$M_B = C_B - A_B = \begin{bmatrix} IK & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & IK & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & IK \end{bmatrix}_{JxJ}$$

$$\therefore \quad M_B = IK \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{JxJ} \Longrightarrow M_B^{-1} = \frac{1}{IK} I_{IxI}$$

$$\therefore \quad M_B^{-1} = V^{-1} \quad \Rightarrow \quad \hat{\beta} = \frac{1}{IK} Q_B \quad .$$

Deixamos de apresentar a matriz de dispersão para blocos, por não haver, neste caso, interesse na comparação de médias.

## 4.4 - Determinação das Estimativas dos Efeitos de Anos: $\hat{a}$

Pré-multipliquemos $X'X\hat{\beta} = X'Y$, por $W_P = \left[\phi, \; - F'V^{-1}, \; I\right]$. Como $W_PS = \left[\phi, \; \phi, \; G - F'\,V^{-1}\,F\right] \Rightarrow W_PS\hat{\beta} = W_PX'Y$ , ou

$$\left[\phi, \; \phi, \; G - F'V^{-} \; F\right] \begin{bmatrix} \hat{\tau} \\ \hat{\beta} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = A - F'V^{-1}\,B$$

ou, $(G - F'V^{-1}F)\,\hat{a} = A - F'V^{-1}\,B$. Chamando-se $C_P = G - F'V^{-1}\,F$ e $Q_P = A - F'V^{-1}\,B$, temos que

$$C_P\hat{a} = Q_P \quad .$$

Como

$$C_P = \begin{bmatrix} IJ - \frac{IJ}{K} & -\frac{IJ}{K} & \cdots & -\frac{IJ}{K} \\ -\frac{IJ}{K} & IJ - \frac{IJ}{K} & \cdots & -\frac{IJ}{K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{IJ}{K} & -\frac{IJ}{K} & \cdots & IJ - \frac{IJ}{K} \end{bmatrix}_{K\times K}$$

e carac $(C_P) = (K-1)$, podemos introduzir uma restrição $A_P\,\hat{a} = \phi$, onde:

$$A_P = \begin{bmatrix} -\frac{IJ}{K} & -\frac{IJ}{K} & \cdots & -\frac{IJ}{K} \\ -\frac{IJ}{K} & -\frac{IJ}{K} & \cdots & -\frac{IJ}{K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{IJ}{K} & -\frac{IJ}{K} & \cdots & -\frac{IJ}{K} \end{bmatrix}_{K\times K}$$

e obter $(C_P - A_P)\,\hat{a} = Q_P$. Chamando-se $M_P = C_P - A_P \Longrightarrow M_P\,\hat{a} = Q_P \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \hat{a} = M_P^{-1}\,Q_P \quad .$$

Mas,

$$M_P = \begin{bmatrix} IJ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & IJ & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & IJ \end{bmatrix}_{K\times K} \Longrightarrow M_P = G \Longrightarrow M_P^{-1} = G^{-1} = \frac{1}{IJ}\,I_{K\times K}$$

Então:

$$\hat{a} = \frac{1}{IJ}\,Q_P \quad .$$

## 4.5 - Determinação da Matriz de Dispersão para Anos: $\Omega_P$

Temos que $Q_P = W_P X'Y = W_P X'(X\beta + \varepsilon) = W_P S\beta + W_P X'\varepsilon$ .

Como $W_P S = [\phi,\ \phi,\ C_P] \Longrightarrow Q_P = C_P\,\hat{a} + W_P X'\varepsilon$.

Mas $\hat{a} = G^{-1}\,Q_P = G^{-1}\,C_P\,a + G^{-1}\,W_P X'\varepsilon \Longrightarrow E(\hat{a}) = G^{-1}C_P\,a$.

Então:

$$\hat{a} - E(\hat{a}) = G^{-1}\ W_p X'\varepsilon \quad ,$$

logo,

$$\Omega_p = E\{[\hat{a} - E(\hat{a})]\ [\hat{a} - E(\hat{a})]'\} = G^{-1}\ W_p X' E(\varepsilon\varepsilon')\ X W_p'\ G'^{-1} \quad ,$$

ou,

$$\Omega_p = \frac{1}{(IJ)^2}\ W_p X'\ E(\varepsilon\varepsilon')\ X W_p' \quad .$$

## 4.6 - Determinação das Estimativas da Interação Tratamentos x Blocos: $\hat{tb}$

Resolvendo-se o sistema (6.a), obtemos:

$$(E_1 - E_2\ F_1^{-1}\ E_2')\ \hat{tb} = TB - E_2\ F_1^{-1}\ TA - (C_3'\ C_1^{-1} - E_2\ F_1^{-1}\ C_4'\ C_1^{-1})\ B.$$

Como

$$E_1 - E_2\ F_1^{-1} E_2' = \frac{K}{J} \begin{bmatrix} (J-1) & -1 & \dots & -1 & & & & \\ -1 & (J-1) & \dots & -1 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ -1 & -1 & \dots & (J-1) & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & & & (J-1) & -1 & \dots & -1 \\ & & & & -1 & (J-1) & \dots & -1 \\ & & & & -1 & -1 & \dots & (J-1) \end{bmatrix}_{IJ\times IJ} = C_{tb}$$

admitimos

$$
-\Lambda_8 = \begin{bmatrix}
\begin{matrix} \frac{K}{J} & \frac{K}{J} & \cdots & \frac{K}{J} \\ \frac{K}{J} & \frac{K}{J} & \cdots & \frac{K}{J} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{K}{J} & \frac{K}{J} & \cdots & \frac{K}{J} \end{matrix} & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
& \begin{matrix} \frac{K}{J} & \frac{K}{J} & \cdots & \frac{K}{J} \\ \frac{K}{J} & \frac{K}{J} & \cdots & \frac{K}{J} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{K}{J} & \frac{K}{J} & \cdots & \frac{K}{J} \end{matrix}
\end{bmatrix}_{IJ\times IJ}
$$

donde obtemos:

$$
M = C_{tb} - \Lambda_8 = \begin{bmatrix} K & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & K \end{bmatrix}_{IJ\times IJ} \Longrightarrow \quad M^{-1} = \frac{1}{K} I_{IJ\times IJ}
$$

$$
\text{De} \quad \begin{cases} C_{tb}\, t\tilde{b} = Q_{tb} \\ A_8\, t\tilde{b} = \phi \end{cases} \Longrightarrow \quad (C_{tb} - \Lambda_8)\, t\tilde{b} = Q_{tb} \quad \Longrightarrow
$$

$$
\Longrightarrow \quad M\, t\tilde{b} = Q_{tb} \quad \Longrightarrow \quad t\tilde{b} = M^{-1}\, Q_{tb} \quad .
$$

Então:

$$\hat{tb} = \frac{1}{K}\, TB - \frac{1}{JK}\begin{bmatrix} TA_{1.} \\ \vdots \\ TA_{1.} \\ \vdots \\ TA_{I.} \\ \vdots \\ TA_{I.} \end{bmatrix}_{IJx1} - \frac{1}{IJK}\begin{bmatrix} JB_1 - G \\ \vdots \\ JB_J - G \\ \vdots \\ JB_1 - G \\ \vdots \\ JB_J - G \end{bmatrix}_{IJx1}$$

Logo:

$$\hat{tb}_{ij} = \frac{1}{K}\, TB_{ij} - \frac{1}{JK}\, TA_{i.} + \frac{1}{IJK}\, JB_J + \frac{G}{IJK}$$

ou,

$$\hat{tb}_{ij} = \frac{P_{ij}}{K} - \frac{T_i}{JK} - \frac{B_j}{IK} + \frac{G}{IJK} \quad .$$

## 4.7 - Determinação das Estimativas da Interação Tratamentos x Anos: $\hat{ta}$

Resolvendo-se o sistema (6.a), obtemos:

$$(F_1 - B_5' B_1^{-1} B_5)\, \hat{ta} = TA - B_5' B_1^{-1} T - (D_3' D_1^{-1} - B_5' B_1^{-1} B_3 D_1^{-1})\, A$$

Como:

$$F_1 - B_5' B_1^{-1} B_5 = \frac{J}{K}\begin{bmatrix} \begin{matrix} (K-1) & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (K-1) & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & (K-1) \end{matrix} & \\ \dots\dots\dots & \\ & \begin{matrix} (K-1) & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (K-1) & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & (K-1) \end{matrix} \end{bmatrix}_{IKxIK} = C_{ta}$$

admitimos:

$$- A_9 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \frac{J}{K} & \frac{J}{K} & \dots & \frac{J}{K} \\ \frac{J}{K} & \frac{J}{K} & \dots & \frac{J}{K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{J}{K} & \frac{J}{K} & \dots & \frac{J}{K} \end{matrix} & \\ \dots\dots\dots & \\ & \begin{matrix} \frac{J}{K} & \frac{J}{K} & \dots & \frac{J}{K} \\ \frac{J}{K} & \frac{J}{K} & \dots & \frac{J}{K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{J}{K} & \frac{J}{K} & \dots & \frac{J}{K} \end{matrix} \end{bmatrix}_{IKxIK}$$

$$\text{De} \begin{cases} C_{ta}\, \hat{ta} = Q_{ta} \\ A_9\, \hat{ta} = \phi \end{cases} \Rightarrow (C_{ta} - A_9)\hat{ta} = Q_{ta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1 \hat{ta} = Q_{ta} \Rightarrow \hat{ta} = M_1^{-1} Q_{ta} \quad ,$$

onde, $M_1 = C_{ta}^{-} A_9 = J\ I_{IKxIK} \Rightarrow M_1^{-1} = \frac{1}{J} I_{IKxIK}$ .

Então,

$$\hat{ta} = \frac{1}{J} TA - \frac{1}{JK} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{IKxI} T - \frac{1}{IJK} \begin{bmatrix} (K-1) & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (K-1) & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & (K-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (K-1) & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (K-1) & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & (K-1) \end{bmatrix}_{IKxK} A$$

$$\hat{ta} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} TA_{11} \\ \vdots \\ TA_{1K} \\ \vdots \\ TA_{I1} \\ \vdots \\ TA_{IK} \end{bmatrix}_{IKx1} - \frac{1}{JK} \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_1 \\ \vdots \\ T_I \\ \vdots \\ T_I \end{bmatrix}_{IKx1} - \frac{1}{IJK} \begin{bmatrix} KA_1 - G \\ \dots\dots \\ KA_K - G \\ \dots\dots \\ KA_1 - G \\ \dots\dots \\ KA_K - G \end{bmatrix}_{IKx1}$$

$$\therefore \quad \hat{ta}_{ik} = \frac{TA_{ik}}{J} - \frac{T_i}{JK} - \frac{A_k}{IJ} + \frac{G}{IJK} \quad .$$

## 4.8 - Determinação das Estimativas da Interação Blocos x Anos: $\hat{ba}$

Resolvendo-se o sistema (6.a), obtemos:

$$(G_1 - E_3' E_1^{-1} E_3)\,\hat{ba} = BA - E_3' E_1^{-1} TB - (D_4 D_1^{-1} - E_3' E_1^{-1} D_2' D_1^{-1})A$$

ou $C_{ba}\,\hat{ba} = Q_{ba}$ .

Como

$$G_1 - E_3' E_1^{-1} E_3 = \frac{1}{K}\begin{bmatrix} (K-1) & -1 & \cdots & -1 & & & & \\ -1 & (K-1) & \cdots & -1 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ -1 & -1 & \cdots & (K-1) & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ & & & & (K-1) & -1 & \cdots & -1 \\ & & & & -1 & (K-1) & \cdots & -1 \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & -1 & -1 & \cdots & (K-1) \end{bmatrix}_{JKxJK}$$

Admitindo-se:

$$-A_{10} = \begin{bmatrix} \frac{I}{K} & \frac{I}{K} & \cdots & \frac{I}{K} & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ \frac{I}{K} & \frac{I}{K} & \cdots & \frac{I}{K} & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ & & & & \frac{I}{K} & \frac{I}{K} & \cdots & \frac{I}{K} \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & \frac{I}{K} & \frac{I}{K} & \cdots & \frac{I}{K} \end{bmatrix}_{JKxJK}$$

temos que: $\begin{cases} C_{ba}\,\widehat{ba} = Q_{ba} \\ A_{10}\,\widehat{ba} = \phi \end{cases} \Rightarrow (C_{ba} - A_{10})\widehat{ba} = Q_{ba} \Rightarrow M_{ba}\,\widehat{ba} = Q_{ba} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \widehat{ba} = M_{ba}^{-1}\, Q_{ba} \quad ,$$

onde, $M_{ba} = C_{ba} - A_{10} \Rightarrow M_{ba}^{-1} = \frac{1}{I}\, I_{JKxJK}$ .

Então:

$$\widehat{ba} = \frac{1}{I}\, BA - \frac{1}{JK} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{JKxIJ} \begin{bmatrix} TB_{11} \\ \vdots \\ TB_{1J} \\ \vdots \\ TB_{I1} \\ \vdots \\ TB_{IJ} \end{bmatrix}_{IJx1} -$$

$$- \frac{1}{IJK} \begin{bmatrix} (K-1) & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (K-1) & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & (K-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (K-1) & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (K-1) & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & (K-1) \end{bmatrix}_{JKxK} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_K \end{bmatrix}_{Kx1}$$

$$\hat{ba} = \frac{1}{I}\underset{JK\times 1}{\begin{bmatrix} BA_{11} \\ \vdots \\ BA_{1K} \\ \vdots \\ BA_{J1} \\ \vdots \\ BA_{JK} \end{bmatrix}} - \frac{1}{JK}\underset{JK\times 1}{\begin{bmatrix} TB_{.1} \\ \vdots \\ TB_{.1} \\ \vdots \\ TB_{.J} \\ \vdots \\ TB_{.J} \end{bmatrix}} - \frac{1}{IJK}\underset{JK\times 1}{\begin{bmatrix} KA_1 - G \\ \vdots \\ KA_K - G \\ \vdots \\ KA_1 - G \\ \vdots \\ KA_K - G \end{bmatrix}}$$

$$\therefore \hat{ba}_{jk} = \frac{B_{j(k)}}{I} - \frac{B_j}{IK} - \frac{A_k}{IJ} + \frac{G}{IJK} .$$

## 4.9 - Determinação de $E(\varepsilon\varepsilon')$

### 4.9.1 - 1º Caso:

$$COV(y_{ijk} , y_{i'j'k'}) = \begin{cases} \sigma^2 , & \text{se } i=i' , j=j' \text{ e } k=k' \\ \rho\sigma^2, & \text{se } i=i' , j=j' \text{ e } k\neq k' \\ 0 , & \text{para outros casos} \end{cases}$$

Temos então que:

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix}
\begin{matrix}\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \cdots & \rho\sigma^2\\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \cdots & \rho\sigma^2 \\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots \\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \cdots & \sigma^2\end{matrix} & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
& \begin{matrix}\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \cdots & \rho\sigma^2\\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \cdots & \rho\sigma^2 \\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots \\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \cdots & \sigma^2\end{matrix} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & \begin{matrix}\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \cdots & \rho\sigma^2\\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \cdots & \rho\sigma^2 \\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots \\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \cdots & \sigma^2\end{matrix} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & \begin{matrix}\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \cdots & \rho\sigma^2\\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \cdots & \rho\sigma^2 \\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots \\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \cdots & \sigma^2\end{matrix}
\end{bmatrix}_{N\times N}$$

onde $N = I\times J\times K$.

### 4.9.2 - 2º Caso:

Consideremos:

$$COV(y_{ijk}\,,\,y_{i'j'k'}) = \begin{cases} \sigma^2 & ,\ \text{se } i=i'\ ,\ j=j'\ ,\ k=k' \\ \rho_{k'k}\,\sigma^2, & \text{se } i=i'\ ,\ j=j'\ ,\ k\neq k' \\ 0 & ,\ \text{para outros casos} \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \sigma^2 & \rho_{12}\sigma^2 & \cdots & \rho_{1K}\sigma^2 \\ \rho_{12}\sigma^2 & \sigma^2 & \cdots & \rho_{2K}\sigma^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{1K}\sigma^2 & \rho_{2K}\sigma^2 & \cdots & \sigma^2 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} \sigma^2 & \rho_{12}\sigma^2 & \cdots & \rho_{1K}\sigma^2 \\ \rho_{12}\sigma^2 & \sigma^2 & \cdots & \rho_{2K}\sigma^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{1K}\sigma^2 & \rho_{2K}\sigma^2 & \cdots & \sigma^2 \end{matrix} & & \\ & & \begin{matrix} \sigma^2 & \rho_{12}\sigma^2 & \cdots & \rho_{1K}\sigma^2 \\ \rho_{12}\sigma^2 & \sigma^2 & \cdots & \rho_{2K}\sigma^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{1K}\sigma^2 & \rho_{2K}\sigma^2 & \cdots & \sigma^2 \end{matrix} & \\ & & & \begin{matrix} \sigma^2 & \rho_{12}\sigma^2 & \cdots & \rho_{1K}\sigma^2 \\ \rho_{12}\sigma^2 & \sigma^2 & \cdots & \rho_{2K}\sigma^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{1K}\sigma^2 & \rho_{2K}\sigma^2 & \cdots & \sigma^2 \end{matrix} \end{bmatrix}_{N\times N}$$

## 4.10 - Determinação das Matrizes W e WX'

### 4.10.1 - Para tratamentos:

$$W_T = [I, -NV^{-1}, \phi]$$

$$W_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{I} & -\frac{1}{I} & \cdots & -\frac{1}{I} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{1}{I} & -\frac{1}{I} & \cdots & -\frac{1}{I} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{I} & -\frac{1}{I} & \cdots & -\frac{1}{I} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{I\times(I+J+K)}$$

$$W_T X' = \begin{bmatrix} (1-\frac{1}{I}) & (1-\frac{1}{I}) & \dots & (1-\frac{1}{I}) & -\frac{1}{I} & -\frac{1}{I} & \dots & -\frac{1}{I} & \dots & -\frac{1}{I} & -\frac{1}{I} & \dots & -\frac{1}{I} \\ -\frac{1}{I} & -\frac{1}{I} & \dots & -\frac{1}{I} & (1-\frac{1}{I}) & (1-\frac{1}{I}) & \dots & (1-\frac{1}{I}) & \dots & -\frac{1}{I} & -\frac{1}{I} & \dots & -\frac{1}{I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{I} & -\frac{1}{I} & \dots & -\frac{1}{I} & -\frac{1}{I} & -\frac{1}{I} & \dots & -\frac{1}{I} & \dots & (1-\frac{1}{I}) & (1-\frac{1}{I}) & \dots & (1-\frac{1}{I}) \end{bmatrix}_{I \times N}$$

## 4.10.2 - Para anos:

$$W_p = [\phi, \ - F'V^{-1}, \ I]$$

$$W_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{K} & -\frac{1}{K} & \dots & -\frac{1}{K} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{K} & -\frac{1}{K} & \dots & -\frac{1}{K} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{K} & -\frac{1}{K} & \dots & -\frac{1}{K} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{K \times (I \times J \times K)}$$

$$W_p X' = \begin{bmatrix} (1-\frac{1}{K}) & -\frac{1}{K} & \dots & -\frac{1}{K} & \dots & (1-\frac{1}{K}) & -\frac{1}{K} & \dots & -\frac{1}{K} & \dots & (1-\frac{1}{K}) & -\frac{1}{K} & \dots & -\frac{1}{K} & \dots & (1-\frac{1}{K}) & -\frac{1}{K} & \dots & -\frac{1}{K} \\ -\frac{1}{K} & (1-\frac{1}{K}) & \dots & -\frac{1}{K} & \dots & -\frac{1}{K} & (1-\frac{1}{K}) & \dots & -\frac{1}{K} & \dots & -\frac{1}{K} & (1-\frac{1}{K}) & \dots & -\frac{1}{K} & \dots & -\frac{1}{K} & (1-\frac{1}{K}) & \dots & -\frac{1}{K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{K} & -\frac{1}{K} & \dots & (1-\frac{1}{K}) & \dots & -\frac{1}{K} & -\frac{1}{K} & \dots & (1-\frac{1}{K}) & \dots & -\frac{1}{K} & -\frac{1}{K} & \dots & (1-\frac{1}{K}) & \dots & -\frac{1}{K} & -\frac{1}{K} & & (1-\frac{1}{K}) \end{bmatrix}_{K \times N}$$

## 4.11 - Matrizes de Dispersão e Variâncias de Contrastes de Média

### 4.11.1 - Para tratamentos, considerando 4.9.1

$$\Omega_{T_1} = \frac{1}{(JK)^2} W_T X'E(\varepsilon\varepsilon')XW_T'$$

$$\Omega_{T_1} = \frac{\sigma^2\left[1 + \rho(K-1)\right]}{IJK} \begin{bmatrix} (I-1) & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & (I-1) & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & (I-1) \end{bmatrix}_{I\times I}$$

Portanto, a variância de um contraste entre duas médias de tratamentos é dada por

$$V(\bar{T}_i - \bar{T}_{i'}) = \frac{2\sigma^2}{JK}\left[1 + (K-1)\rho\right] \quad .$$

### 4.11.2 - Para anos, considerando 4.9.1

$$\Omega_{P_1} = \frac{1}{(IJ)^2} W_P X'E(\varepsilon\varepsilon')XW_P'$$

$$\Omega_{P_1} = \frac{\sigma^2(1-\rho)}{IJK} \begin{bmatrix} (K-1) & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & (K-1) & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & (K-1) \end{bmatrix}_{K\times K}$$

A variância de um contraste entre duas médias de anos é, portanto:

$$V(\bar{P}_k - \bar{P}_{k'}) = \frac{2\sigma^2(1-\rho)}{IJ} \quad .$$

4.11.3 - Para tratamentos, considerando 4.9.2

$$\Omega_{T_2} = \frac{1}{(JK)^2} W_T X' E(\varepsilon\varepsilon') X W_T'$$

$$\Omega_{T_2} \quad \frac{\sigma^2 \left[K + 2\Sigma\rho_{pq}\right]}{IJK^2} \begin{bmatrix} (I-1) & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (I-1) & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & (I-1) \end{bmatrix}_{I\times I}$$

Então, a variância de um contraste entre duas médias de tratamentos é

$$V(\bar{T}_i - \bar{T}_{i'}) = \frac{2\sigma^2}{JK} \left[\frac{K + 2\Sigma\rho_{pq}}{K}\right] ,$$

com p = 1, 2, ..., (I-1), e q = p+1, ..., I.

4.11.4 - Para anos, considerando 4.9.2

$$\Omega_{P_2} = \frac{1}{(IJ)^2} \quad W_P X' E(\varepsilon\varepsilon') X W_P'$$

$$\Omega_{\rho_2} = \frac{IJ\sigma^2}{(IJK)^2} \begin{bmatrix} \left[K^2 - 2K(1+\Sigma\rho_{1K'}) + (K+2\,\Sigma\rho_{pq})\right] & \left[K^2\rho_{12} - K(1+\Sigma\rho_{1K'}) - K(1+\Sigma\rho_{2K'}) + (K+2\,\Sigma\rho_{pq})\right] & \cdots & \left[K^2\rho_{12} - K(1+\Sigma\rho_{1K'}) - K(1+\Sigma\rho_{KK'}) + (K+2\Sigma\rho_{pq})\right] \\ & \left[K^2 - 2K(1+\Sigma\rho_{2K'}) + (K+2\Sigma\rho_{pq})\right] & \cdots & \left[K^2\rho_{2K} - K(1+\Sigma\rho_{2K'}) - K(1+\Sigma\rho_{KK'}) + (K+2\Sigma\rho_{pq})\right] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \left[K^2 - 2K(1+\Sigma\rho_{KK'}) + (K+2\Sigma\rho_{pq})\right] \end{bmatrix}_{K\times K}$$

A variância de um contraste entre duas médias de anos é, portanto:

$$V(\bar{P}_k - \bar{P}_{k'}) = \frac{2\sigma^2}{IJ}(1 - \rho_{kk'}) \quad .$$

4.11.5 - Quadro de análise da variância para dados do 1º caso (4.9.1) e E(Q.M.)

| Causas da Variação | G.L. | E(Q.M.) |
|---|---|---|
| Blocos (B) | J-1 | $\sigma^2[1+(K-1)\rho] + \frac{IK}{J-1}\sum_j b_j^2$ |
| Tratamentos (T) | I-1 | $\sigma^2[1+(K-1)\rho] + \frac{JK}{I-1}\sum_i t_i^2$ |
| Resíduo (a) | (I-1)(J-1) | $\sigma^2[1+(K-1)\rho]$ |
| Anos (A) | K-1 | $\sigma^2(1-\rho) + \frac{IJ}{K-1}\sum_k a_k^2$ |
| Interação AxT | (I-1)(K-1) | $\sigma^2(1-\rho) + \frac{J}{(I-1)(K-1)}\sum_{i,k}(ta)_{ik}^2$ |
| Interação BxA | (J-1)(K-1) | $\sigma^2(1-\rho) + \frac{I}{(J-1)(K-1)}\sum_{j,k}(ba)_{jk}^2$ |
| Resíduo (b) | (I-1)(J-1)(K-1) | $\sigma^2(1-\rho)$ |
| Total | IJK-1 | |

## 4.12 - Procedimento Para as Análises da Variância

Em primeiro lugar, fez-se o teste para a verificação da igualdade das matrizes de covariâncias por tratamentos, aplicando-se o procedimento dado por BOX (1950) e indicado por DANFORD *et alii* (1960).

Calcula-se

$$1)\ A_{kk'} = [(M-1)(N-1)]^{-1} \sum_i \sum_j (y_{ijk} - y_{i.k} - y_{.jk} + y_{..k}) \times$$

$$\times (y_{ijk'} - y_{i.k'} - y_{.jk'} + y_{..k'}) ,$$

onde, $i = 1, 2, \ldots, M$;

$j = 1, 2, \ldots, N$;

$n_i$ = número de parcelas do tratamento i;

$y_{i.k}$ = média do bloco j, no ano k;

$y_{.jk}$ = média do tratamento i, no ano k;

$y_{..k}$ = média geral do experimento, no ano k;

k e $k' = 1, 2, \ldots, K$, indicam o número de anos.

$$2)\ S_{kk'_i} = (N-1)^{-1} \sum_j (y_{ijk} - y_{i.k} - y_{.jk} + y_{..k}) \times$$

$$\times (y_{ijk'} - y_{i.k'} \cdot y_{.jk'} + y_{..k'}) .$$

$$3)\ M2 = [(M-1)(N-1)]^{-1} \cdot \ell n|A_{kk'}| - \sum_i [(N-1)\ \ell n|S_{kk'i}|] ,$$

onde | |, indica o determinante da matriz.

4) $A2 = \frac{2K^2 + 3K - 1}{6(K+1)(M-1)} \left[ \sum_i \frac{1}{N-1} - \frac{1}{(M-1)(N-1)} \right]$ .

5) $(1-A2)\ M2$ .

6) $F2 = \frac{(M-1)\ K(K+1)}{2}$ .

Como $(1-A2)\ M2 \sim \chi^2_{F2}$ , se $(1-A2)\ M2 < \chi^2_{F2}$ , aceita-se a hipótese da igualdade das matrizes de covariâncias para tratamentos.

Em seguida, faz-se o teste para se constatar se a matriz $A_{kk'}$ é do tipo "uniforme", calculando-se:

1) $\Lambda = \frac{|A_{kk'}|}{|\bar{A}|}$ ,

onde $|\ |$ indica o determinante da matriz e $\bar{A}$ é uma matriz onde os elementos da diagonal são iguais e igual à média aritmética dos elementos da diagonal de $A_{kk'}$. Os elementos de $\bar{A}$ fora da diagonal são também iguais e são obtidos calculando-se a média aritmética dos elementos de $A_{kk'}$ que estão fora da diagonal.

2) $M1 = -\ (M-1)(N-1)\ \ell n\ \Lambda$ .

3) $(1-A1)\ M1$ , onde $A1 = \frac{K(K+1)^2\ (2K-3)}{6(M-1)(N-1)(K-1)(K^2+K-4)}$

4) $F1 = \frac{K^2+K-4}{2}$ .

Como (1-A1) M1 $\sim \chi^2_{F1}$ , se (1-A1) M1 < $\chi^2_{F1}$ , aceita-se a hipótese de que a matriz de covariâncias $A_{kk'}$ é do tipo "uniforme".

Se as duas condições forem satisfeitas, faz-se a análise de variância em parcelas subdivididas e aplica-se o teste F usual. Para se testar a diferença entre médias, aplica-se o teste de Bonferroni, conforme sugerido por CRUZ (1980)*, utilizando-se as variâncias estimadas como em 4.11.1 e 4.11.2.

Considerando-se que somente a primeira condição seja satisfeita, faz-se o teste de homogeneidade das variâncias da matriz $A_{kk'}$ , aplicando-se o teste de Cochran.

Constatando-se a homogeneidade das variâncias, teremos uma matriz de covariâncias da forma:

$$A_{kk'} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1k} \\ & 1 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

Foram aplicados então a análise de variância em parcelas subdivididas e o teste F usual e conservador, conforme GEISSER e GREENHOUSE (1958) e GREENHOUSE e GEISSER (1959). Para se detectar diferenças entre médias, aplicou-se o teste de Bonferroni, com variâncias estimadas, próprias para cada caso, como em 4.11.1, 4.11.2, 4.11.3 e 4.11.4.

(*) CRUZ, V.F., 1980. Comunicação verbal. Notas de aulas assistidas pelo Prof. Vivaldo Francisco da Cruz, do Depto.de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, na Universidade de Iowa, EUA.

# 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Consideraram-se os dados de produção da laranjeira Valência, grupados de duas formas diferentes, visando exemplificar os vários casos:

## 5.1 - 1º Caso:

Considerando-se os dados da Tabela 1, onde foram tomadas as produções dos anos pares: 1970, 1972, 1974, 1976, 1978, fizeram-se dois testes:

### 5.1.1 - Teste da Igualdade das Matrizes $S_{kk'i}$

As fórmulas utilizadas são as indicadas em ..12. Os resultados obtidos foram:

$$(1-A2)\ M2 = 15{,}0961$$

$$F2 = 120 \quad .$$

Como $(1-A2)\ M2 < \chi^2_{120} \approx 145$, considerando-se $\alpha = 5\%$, podemos admitir a igualdade das matrizes de covariâncias, para tratamentos.

### 5.1.2 - Teste da Uniformidade da Matriz $A_{kk'}$

As fórmulas utilizadas são as indicadas em 4.12 e obtiveram-se os seguintes resultados:

$$(1-A1)\ M1 = 12{,}3483$$

$$F1 = 13$$

Como $(1-A1)\ M1 < \chi^2_{13} = 22{,}36$, considerando-se $\alpha = 5\%$, podemos admitir que a matriz de covariâncias é do tipo "uniforme".

### 5.1.3 - Análise da variância

Estando satisfeitas as condições 5.1.1 e 5.1.2, podemos analisar tais dados como em parcelas subdivididas. Aplica-se o teste F usual e fazem-se as comparações de diferenças de médias pelo teste de Bonferroni, com as variâncias indicadas em 4.11.1 e 4.11.2, devido ao fato das observações sucessivas na mesma parcela estarem correlacionadas.

O resultado da análise da variância é:

| Causas de Variação | G.L. | S.Q. | Q.M. | F |
|---|---|---|---|---|
| Blocos (B) | 2 | 6062,0312 | 3031,0156 | |
| Tratamentos (T) | 8 | 257556,0938 | 32194,5117 | 7,08** |
| Resíduo (a) | 16 | 72688,9609 | 4543,0600 | |
| Parcela | 26 | 336307,0861 | | |
| Anos (A) | 4 | 1199081,0087 | 299770,2521 | 268,12** |
| Interação AxT | 32 | 138455,0079 | 4326,7189 | 3,87** |
| Interação AxB | 8 | 22433,1953 | 2804,1494 | 2,50* |
| Resíduo (b) | 64 | 71552,2969 | 1118,0046 | |
| Total | 134 | 1767828,5952 | | |

C.V. para parcelas = 26,10%;
C.V. para subparcelas = 12,95%.

### 5.1.4 - Teste de comparação de médias

O teste para se detectar a existência de diferença significativa entre médias de tratamentos será feito da seguinte maneira:

Rejeitaremos a hipótese de nulidade, se:

$$|\bar{Y}_{j.} - \bar{Y}_{j'.}| > t_{v_i}^{\alpha_i/2} \, s_i \quad ,$$

onde, $v_i$ = nº de graus de liberdade;

$$\alpha_i = \frac{\alpha}{\text{nº de testes}} = \frac{\alpha}{\binom{k}{2}} \; ;$$

$k$ = nº de médias;

$\alpha$ = nível de significância;

$S_i^2 = S^2 \left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_{j'}}\right)$, com $\left(\sum_{j=1}^{k} n_j - k\right)$ graus de liberdade;

$t_{\nu_i}^{\alpha_i/2}$ é dado por BAILEY (1977).

A matriz $A_{kk'}$ é:

$$A_{kk'} = \begin{bmatrix} 1988,5023 & 950,9741 & -164,0776 & 1106,2564 & 371,9796 \\ 950,9741 & 1910,6971 & 365,4081 & 1173,6592 & 656,3269 \\ -164,0776 & 365,4081 & 1000,2575 & 655,5977 & 648,7202 \\ 1106,2564 & 1173,6592 & 655,5977 & 2244,1442 & 1085,2956 \\ 371,9796 & 656,3269 & 648,7202 & 1085,2956 & 1871,4821 \end{bmatrix}.$$

### 5.1.4.1 - Tratamentos

Aplicou-se o teste de Bonferroni, ao nível de 5% de probabilidade. As médias de tratamentos são:

M1 = 321,8799 kg

M8 = 288,1933 kg

M9 = 284,2266 kg

M4 = 276,8133 kg

M5 = 267,4999 kg

M3 = 261,8599 kg

M7 = 247,9533 kg

M6 = 210,9933 kg

M2 = 164,6133 kg

Ainda:

$$S_i^2 = S^2\left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_{j'}}\right) = \frac{2S^2}{n} = \frac{2 \times 4543,0600}{15} = 605,7413 \implies$$

$$\implies S_i = 24,6118 \ .$$

$$\text{Admitindo-se } \alpha = 0,05 \implies \alpha_i = \frac{0,05}{\binom{9}{2}} = 0,0014 \implies$$

$$\implies \frac{\alpha_i}{2} = 0,0007 \ .$$

$$v_i = 16 \text{ g.l.}$$

$$\therefore \ T_{v_i}^{\alpha_i/2} \ . \ S_i = 3,8589 \ . \ 24,6118 = 94,9744 \ .$$

Pelo teste de Tukey, a diferença mínima significativa é: $\Delta = 87,5379$, ao nível de 5% de probabilidade.

O valor de $t_{v_i}^{\alpha_i/2}$ é dado por BAILEY (1977).

Constatam-se, pois, pelo teste de Bonferroni, diferenças significativas entre os tratamentos:

(1) e (6)

(1) e (2)

(8) e (2)

(9) e (2)

(4) e (2)

(5) e (2)

(3) e (2)

No entanto, ao se aplicar o teste de Tukey, ao nível de 5% de probabilidade, constatam-se as mesmas diferenças significativas, ou seja, entre os tratamentos:

(1) e (6)

(1) e (2)

(8) e (2)

(9) e (2)

(4) e (2)

(5) e (2)

(3) e (2)

Considerando-se

$$S_i^2 = \frac{2S^2\left[1 + (K-1)\ \hat{\rho}\right]}{JK} \quad ,$$

onde $S^2 = 1803,0166$ e $\hat{\rho}\ S^2 = 685,0140$ são as médias dos elementos da diagonal de $A_{kk'}$ e dos elementos fora dela, respectivamente, temos que $S_i^2 = 605,7413 \implies S_i = 24,6118$ . Então

$$t_{v_i}^{\alpha_i/2} \cdot S_i = 3,8589 \cdot 24,6118 = 94,9744 \quad .$$

Os tratamentos que diferem entre si, dois a dois, são exatamente os mesmos, quando se utilizam $S_i^2 = \frac{2S^2}{n}$ , onde $S^2 =$ QM Res(a) e pelo teste de Tukey.

5.1.4.2 - Anos

Aplicou-se o teste de Bonferroni, ao nível de 5% de probabilidade. As médias de anos são:

M5 = 408,5703 kg

M4 = 292,7296 kg

M3 = 264,2481 kg

M2 = 197,1740 kg

M1 = 128,4074 kg .

$$S_i^2 = S^2 \left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_{j'}}\right) = \frac{2S^2}{n} = \frac{2 \times 1118,0046}{27} = 82,8151 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S_i = 9,1002 \quad .$$

Admitindo-se $\alpha = 0,05 \Rightarrow \dfrac{\alpha_i}{2} = \dfrac{\alpha}{2\binom{k}{2}} = \dfrac{0,05}{2\binom{5}{2}} = \dfrac{0,05}{20} =$

$$= 0,0025$$

$$v_i = \sum_{j=1}^{k} n_j - k = 64 \text{ g.l.}$$

$$\therefore \quad t_{v_i}^{\alpha_i/2} \cdot S_i = 2,906 \cdot 9,1002 = 26,4451 \; .$$

Temos então, que:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | - | - | - | - |
| 2 | * | - | - | - | - |
| 3 | * | * | - | - | - |
| 4 | * | * | * | - | - |
| 5 | * | * | * | * | - |

Considerando-se $S_i^2 = \dfrac{2S^2(1-\hat{\rho})}{IJ}$, onde $S^2 = 1803,0166$ e $\hat{\rho}\, S^2 = 665,0140$ são as médias dos elementos da diagonal de $A_{kk}$, e dos elementos fora dela, respectivamente, temos que: $S_i^2 = 82,8150 \Rightarrow$ $\Rightarrow S_i = 9,1002$. Então

$$t_{v_i}^{\alpha_i/2} \,.\, S_i = 2,906 \,.\, 9,1002 = 26,4451 \,.$$

Mesmos resultados são encontrados utilizando-se este valor.

A diferença mínima significativa para o teste de Tukey, ao nível de 5% de probabilidade, é 25,5850, obtendo-se resultados análogos.

#### 5.1.4.3 - Desdobramento da análise da variância

Caso haja interesse prático, pode-se fazer o desdobramento da análise da variância para se estudar o efeito de anos dentro de cada tratamento.

Mesmo que a interação AxT seja significativa, deve-

-se aplicar o procedimento indicado por GEISSER e GREENHOUSE (1958), que consiste em se aplicar o teste F conservador para a interação AxT e, posteriormente, caso haja necessidade, faz-se também o teste aproximado para ela.

## 5.2 - 2º Caso

Considerando-se os dados da Tabela 1, de onde foram tomadas as observações referentes às produções de 1970 a 1976, fizeram-se dois testes:

### 5.2.1 - Teste da Igualdade das Matrizes $S_{kk'i}$

As fórmulas utilizadas são as indicadas em 4.12 e os resultados obtidos foram

$$(1-A2)\ M2 = -0{,}0006763$$

$$F2 = 224$$

Como $(1-A2)\ M2 < \chi^2_{224}$ , considerando-se $\alpha = 5\%$, podemos admitir a igualdade das matrizes de covariâncias, para tratamentos.

### 5.2.2 - Teste da Uniformidade da Matriz $A_{kk'}$

As fórmulas utilizadas são as indicadas em 4.12 e obtiveram-se os resultados:

$$(1-A1)\ M1 = 42{,}0622$$

$$F1 = 26$$

Como (1-A1) M1 > $\chi^2_{26}$ = 38,885, considerando-se $\alpha$ = 5%, não podemos admitir que a matriz de covariâncias seja do tipo "uniforme".

Ela é do tipo:

$$A_{kk'} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1k}\sigma_1\sigma_k \\ & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2k}\sigma_2\sigma_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \sigma_k^2 \end{bmatrix} .$$

Aplicando-se o teste de Cochran para homogeneidade de variâncias, temos:

$$C = \frac{S_{max}}{\sum_{k=1}^{k} S_k^2} = \frac{2244,1442}{10924,5759} = 0,2054 .$$

Com 7 e 16 graus de liberdade, o valor tabelado de C é $C_{tab}$= 0,2756, considerando-se $\alpha$ = 5%. Como $C < C_{tab}$ , podemos admitir a homogeneidade das variâncias, e a matriz $A_{kk'}$ passa a ser:

$$A_{kk'} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1k} \\ & 1 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Os resultados obtidos para essa matriz foram:

$$A_{kk'} = \begin{bmatrix} 1988,5023 & 542,4126 & 950,9741 & -217,9152 & -164,0776 & 117,9221 & 1106,2564 \\ 542,4126 & 1218,6681 & 1001,2300 & 197,0460 & 486,8606 & 376,7594 & 1103,4635 \\ 950,9741 & 1001,2300 & 1910,6971 & -27,1977 & 365,4081 & 11,4589 & 1173,6593 \\ -217,9152 & 197,0460 & -27,1977 & 380,6011 & 192,3809 & 87,7282 & -67,8991 \\ -164,0776 & 486,8606 & 365,4081 & 192,3809 & 1000,2575 & -144,3628 & 655,5977 \\ 117,9221 & 376,7594 & 11,4589 & 87,7282 & -144,3628 & 2181,7056 & 815,6812 \\ 1106,2564 & 1103,4635 & 1173,6592 & -67,8991 & 655,5977 & 815,6812 & 2244,1442 \end{bmatrix}$$

### 5.2.3 - Análise da variância

A análise da variância, segundo o modelo em parcelas subdivididas, forneceu os seguintes resultados:

| Causas de Variação | G.L. | S.Q. | Q.M. | F |
|---|---|---|---|---|
| Blocos (B) | 2 | 933,3007 | 466,6503 | |
| Tratamentos (T) | 8 | 157068,2969 | 19633,5371 | 4,89** |
| Resíduo (a) | 16 | 64117,1914 | 4007,3244 | |
| Parcela | 26 | 222118,7892 | | |
| Anos (A) | 6 | 738400,7856 | 123066,7976 | 106,74** |
| Interação AxT | 48 | 144550,7540 | 3011,4740 | 2,61** |
| Interação AxB | 12 | 20503,8203 | 1708,6516 | 1,48 |
| Resíduo (b) | 96 | 110675,9844 | 1152,8748 | |
| Total | 188 | 1236250,1342 | | |

C.V. para parcelas = 31,78%.
C.V. para subparcelas = 17,04%.

Devido ao fato das observações da mesma parcela estarem correlacionadas, aplicou-se o teste de Bonferroni para se compararem as médias.

### 5.2.4 - Teste de comparação de médias

#### 5.2.4.1 - Entre tratamentos

Aplicou-se o teste de Bonferroni, ao nível de 5% de probabilidade. As médias de tratamentos são:

M1 = 245,1333 kg

M8 = 233,4476 kg

M9 = 215,8095 kg

M5 = 201,6571 kg

M4 = 200,4571 kg

M3 = 193,5095 kg

M7 = 190,5952 kg

M6 = 161,2809 kg

M2 = 150,5285 kg

Pelo teste de Bonferroni, $t_{v_i}^{\alpha_i/2} \cdot S_i$, onde:

$$S_i^2 = \frac{2S^2}{n} = \frac{2 \times 4007,3244}{21} = 381,6499 \Longrightarrow S_i = 19,5358$$

$v_i = 16$ g.l.

$$\frac{\alpha_i}{2} = \frac{\alpha}{2\binom{k}{2}} = \frac{0,05}{2\binom{9}{2}} = \frac{0,05}{2 \times 36} = 0,0007$$

$$t_{v_i}^{\alpha_i/2} = 3,8589 \Longrightarrow t_{v_i}^{\alpha_i/2} \, . \, S_i = 3,8589 \times 19,5358$$

$$= 75,3866$$

Podemos, então, formar o quadro:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | * | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 3 | n.s. | n.s. | - | - | - | - | - | - | - |
| 4 | n.s. | n.s. | n.s. | - | - | - | - | - | - |
| 5 | n.s. | n.s. | n.s. | n.s. | - | - | - | - | - |
| 6 | * | n.s. | n.s. | n.s. | n.s. | - | - | - | - |
| 7 | n.s. | n.s. | n.s. | n.s. | n.s. | n.s. | - | - | - |
| 8 | n.s. | * | n.s. | n.s. | n.s. | n.s. | n.s. | - | - |
| 9 | n.s. | n.s. | n.s. | n.s. | n.s. | n.s. | n.s. | n.s. | - |

Admitindo-se

$$S_i^2 = \frac{2}{JK}\left[\frac{k\hat{\sigma}^2 + 2\Sigma\hat{\sigma}^2\hat{\rho}_{pq}}{K}\right] = \frac{2}{21} \times \frac{7 \times 1560,6537 + 17126,7730}{7}$$

$$S_i^2 = \frac{2}{21} \times 4007,3355 \Longrightarrow S_i^2 = 381,6510 \Longrightarrow S_i = 19,5358$$

Então

$$t_{v_i}^{\alpha_i/2} \, . \, S_i = 3,8589 \times 19,5358 = 75,3866 \; ,$$

e os mesmos resultados são obtidos.

A diferença mínima significativa pelo teste de Tukey, ao nível de 5% de probabilidade, é $\Delta = 69,4841$ e verifica-se que, além das diferenças significativas entre médias, encontradas pelo teste de Bonferroni, encontrou-se diferença significativa entre as médias dos tratamentos (8) e (6).

5.2.4.2 - Entre anos

Aplicou-se o teste de Bonferroni, ao nível de 5% de probabilidade. As médias de anos são:

M7 = 292,7296 kg

M5 = 264,2481 kg

M6 = 238,0851 kg

M3 = 197,1740 kg

M4 = 140,9888 kg

M2 = 132,4703 kg

M1 = 128,4074 kg

O teste de Bonferroni nos dá: $t_{v_i}^{\alpha_i/2} \cdot S_i = 28,8497$, onde:

$$S_i^2 = \frac{2S^2}{n} = \frac{2 \times 1152,8748}{27} = 85,3981 \Rightarrow S_i = 9,2411$$

$v_i = 96$ g.l.

$t_{v_i}^{\alpha_i/2} = 3,1219$

$S^2 = $ Q.M. Res(b) .

O quadro das diferenças para médias de anos é o seguinte.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | n.s. | - | - | - | - | - | - |
| 3 | * | * | - | - | - | - | - |
| 4 | n.s. | n.s. | * | - | - | - | - |
| 5 | * | * | * | * | - | - | - |
| 6 | * | * | * | * | n.s. | - | - |
| 7 | * | * | * | * | n.s. | * | - |

Considerando-se $S_i^2 = \frac{2}{IJ}\left[\hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2\,\hat{\rho}_{kk'}\right]$, onde $\hat{\sigma}^2 = 1560{,}6537$ é a média dos elementos da diagonal de $A_{kk'}$ e $\hat{\sigma}^2\,\hat{\rho}_{kk'}$ é a covariância correspondente aos anos testados, temos que:

$$S_{12}^2 = \frac{2}{27}\,(1560{,}6537 - 542{,}4126) \implies S_{12} = 8{,}6857$$

$$\therefore \quad t_{v_i}^{\alpha_i/2} \,.\, S_i = 27{,}1127 \,.$$

Os demais valores são calculados de maneira análoga.

O quadro de valores de $t_{v_i}^{\alpha_i/2} \cdot S_i$, para se testar diferença entre médias de dois anos, considerando-se $S_i^2 = \frac{2}{IJ}\left[\hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2\hat{\rho}_{kk'}\right]$ e $\alpha$ = 5% é o seguinte.

| $t_{v_i}^{\alpha_i/2}\ S_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | 27,1127$^{ns}$ | 20,9797* | 35,8331$^{ns}$ | 35,2868* | 32,2732* | 18,1120* |
| 2 | - | - | 20,0962* | 31,3757$^{ns}$ | 27,8426* | 29,2353* | 18,1675* |
| 3 | - | - | - | 33,8576* | 29,3748* | 33,4427* | 16,7146* |
| 4 | - | - | - | - | 31,4294* | 32,6091* | 34,2887* |
| 5 | - | - | - | - | - | 35,0845$^{ns}$ | 25,5614* |
| 6 | - | - | - | - | - | - | 23,1910* |
| 7 | - | - | - | - | - | - | - |

Vê-se, pois, que quando se utiliza $S_i^2 = \frac{2}{IJ}\left[\hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2\hat{\rho}_{kk'}\right]$ o teste apresenta maior número de diferenças significativas.

Para o teste de Tukey, a d.m.s. é $\Delta$ = 27,8890, ao nível de 5% de probabilidade. Então:

(5) e (6)

(2) e (4)

(1) e (4)

(1) e (2)

não diferem entre si, o que concorda com os resultados do quadro acima.

Como a interação AxT é significativa, pode-se fazer o desdobramento da análise da variância, como indicado em 5.1.4.3.

# 6. CONCLUSÕES

Com relação à análise, onde se consideraram os anos pares, verificou-se o seguinte:

1) O modelo de parcelas subdivididas é adequado para este tipo de dados;

2) O teste de Bonferroni, ao nível de 5% de probabilidade, para comparação de médias de tratamentos, apresentou os mesmos resultados e a mesma diferença mínima significativa, quer se utilize o QM Res(a), quer se utilize $S^2 \left[1 + (K-1)\ \hat{\rho}\right]$;

3) O teste de Tukey, ao nível de 5% de probabilidade, para comparação de médias de tratamentos, apresentou os mesmos resultados do teste de Bonferroni, também a 5% de probabilidade, embora sua d.m.s. tenha sido um pouco menor que a do teste de Bonferroni, aproximadamente 10%;

4) Os testes de Tukey e o de Bonferroni, ambos a 5% de probabilidade, para comparação de médias de anos, apresentaram os mesmos resultados, embora a d.m.s. para Tukey tenha sido um pouco menor que a de Bonferroni;

5) O espaçamento e o número de observações parecem influir na estrutura da matriz de variâncias e covariâncias e, consequentemente, no teste de diferença de médias de anos.

Com relação à análise onde se consideraram os anos de 1970 a 1976, constatou-se o seguinte:

1) Somente parte das exigências do modelo em parcelas subdivididas foram satisfeitas, ou seja, as matrizes $S_{kk'i}$ para tratamentos são iguais e somente as variâncias de $A_{kk'}$ são homogêneas;

2) O teste de Bonferroni, ao nível de 5% de probabilidade, para comparação de médias de tratamentos, apresentou os mesmos resultados, quer se utilize QM Res (a), quer se utilize $S^2 + \frac{2}{K} \Sigma S^2 \bar{\rho}_{pq}$ ;

3) O teste de Tukey, ao nível de 5% de probabilidade, para comparação de médias de tratamentos, apresentou, além dos contrastes significativos pelo teste de Bonferroni, com o mesmo nível de significância, um contraste a mais significativo. Também aqui a d.m.s. pelo teste de Tukey é menor que a de Bonferroni, aproximadamente 10%;

4) Com relação à análise de variância, a parte referente às parcelas independe da correlação entre subparcelas;

5) Devido ao fato da não uniformidade da matriz $A_{kk'}$ , verifica-se que cada contraste entre anos deverá ser testado com seu resíduo específico, ou seja, cada contraste terá uma d.m.s. e, como consequência, apareceram mais diferenças significativas do que quando se usou o QM Res(b);

6) O teste de Tukey, ao nível de 5%, apresentou os mesmos resultados do teste de Bonferroni, ao mesmo nível, quando se utilizou, para cada contraste, entre médias de anos, seu resíduo específico;

7) A parte da análise da variância referente às subparcelas não poderá ser feita da maneira usual.

# 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, R.L. e T.A. BANCROFT, 1952. Statistical Theory in Research. McGraw-Hill Book Co., Inc., Nova York. 399 pp.

BAILEY, B.J.R., 1977. Tables of the Bonferroni *t* Statistic. J. Am. Statistical Associations, Washington, 72: 469-478.

BARTLETT, M.S., 1937. Properties of Sufficiency and Statistical Tests. Proceedings of the Royal Society, Londres, Series A, 160: 268-282.

BARTLETT, M.S., 1938. Further Aspects of the Theory of Multiple Regression. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 34: 33-40.

BJÖRNSSON, H., 1974. Analysis of Perennial Crop Experiments with Autocorrelated Errors. Universidade Cornell, Ithaca, Nova York. (Tese de Ph.D).

BJÖRNSSON, H., 1978. Analysis of a Series of Long-Term Grassland Experiments with Autocorrelated Errors. Biometrics, Carolina do Norte, 34: 645-651.

BOX, G.E.P., 1949. A General Distribution Theory for a Class of Likelihood Criteria. Biometrika, Londres, 36: 317-346.

BOX, G.E.P., 1950. Problems in the Analysis of Growth and Wear Curves. Biometrics, Carolina do Norte, 6: 362-389.

BOX, G.E.P., 1954a. Some Theorems on Quadratic Forms Applied in the Study of Analysis of Variance Problems: I - Effect of Inequality of Variance in the One-Way Classification. The Annals of the Mathematical Statistics, Baltimore, 25: 290-302.

BOX, G.E.P., 1954b. Some Theorems on Quadratic Forms Applied in the Study of Analysis of Variance and of Correlation Between Errors in the Two-Way Classification. The Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 25: 484-498.

COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1957. Experimental Designs. 2ª edição, John Wiley & Sons, Inc., Nova York. 611 pp.

COLE, J.W.L. e J.E. GRIZZLE, 1966. Applications of Multivariate Analysis of Variance to Repeated Measurements Experiments. Biometrics, Carolina do Norte, 22: 810-828.

CORREA DA SILVA, J.G., 1979. Análise de Realizações Simultâneas de Séries de Tempo Dispostas Segundo um Delineamento Experimental. Pelotas, Universidade Federal de Pelotas (Tese para provimento de cargo de Professor Titular).

DANFORD, M.B.; H.M. HUGHES e R.C. McNEE, 1960. On the Analysis of Repeated Measurements Experiments. Biometrics, Carolina do Norte, 16: 547-565.

DINIZ, U.D., 1978. Análise de Variância e Estudo das Correlações das Produções da Laranjeira Valência (*Citrus sinensis*, L. Osbeck), de um Ensaio de Competição de Porta-Enxerto. Piracicaba, SP. Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", USP. (Dissertação de Mestrado).

EATON, M.L., 1969. Some Remarks on Scheffe's Solution to the Behrens-Fisher Problem. J. Am. Statistical Associations, Washington, 64: 1318-1322.

EVANS, J.C. e E.A. ROBERTS, 1979. Analysis of Sequencial Observations with Applications to Experiments on Grazing Animals and Perennial Plants. Biometrics, Carolina do Norte, 35: 687-693.

GEISSER, S. e S.W. GREENHOUSE, 1958. An Extension of Box's Results on the Use of the F-Distribution in Multivariate Analysis. The Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 29: 885-891.

GEISSER, S., 1963. Multivariate Analysis of Variance for a Special Covariance Case. Journal of the American Statistical Association, Washington, 58: 660-669.

GILL, J.L. e H.O. HAFS, 1971. Analysis of Repeated Measurements of Animals. Journal of Animal Science, Albany, 33: 331-336.

GREENHOUSE, S.W. e S. GEISSER, 1959. On the Methods in the Analysis of Profile Data. Psychometrika, 24: 95-112.

GRIZZLE, J.E. e D.M. ALLEN, 1969. Analysis of Growth and Dose Response Curves. Biometrics, Carolina do Norte, 25: 357-381.

HALL, W.B., 1975. Repeated Measurements Experiments. In: BOFINGER, V.J. e J.L. WHEELER. Developments in Field Experiment Design and Analysis. Farnham Royal Slough, Commonwealth Agricultural Bureaux, Armidale, Austrália, p. 33-42.

HOTELLING, H., 1931. The Generalization of Student's Ratio. Annals of Math. Statistical, Baltimore, 2: 360.

HOTELLING, H., 1951. A Generalized T Test and Measure of Multivariate Dispersion. In: Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley, The University of California Press. p. 23-41.

HUGHES, H.M. e M.B. DANFORD, 1958. Repeated Measurement Designs, Assuming Equal Variances and Covariances. Texas, School of Aviation Medicine, USAF (Report 59-40).

HUYNH, H. e L.S. FELDT, 1970. Conditions Under Which Mean Square Ratios in Repeated Measurements Designs Have Exact F-Distributions. Journal of the American Statistical Association, Washington, 65: 1582-1589.

MONROE, R.J. e D.D. MASON, 1955. Problems of Experimental Inference with Special Reference to Multiple Location Experiments and Experiments with Perennial Crops. Proceedings of the American Society for Agricultural Science, Ithaca, 66: 410-414.

MORRISON, D.F., 1967. Multivariate Statistical Methods. 2ª edição. McGraw-Hill Book Company, Nova York. 415 pp.

MORRISON, O.F., 1970. The Optimal Spacing of Repeated Measurements. Biometrics, Carolina do Norte, 26: 281-290.

PARKER, E.R. e L.D. BATCHELOR, 1932. Variation in the Yields of Fruit Trees in Relation to the Planning of Future Experiments. Hilgardia, Berkeley, 7: 81-161.

PARKER, E.R., 1942. Adjustment of Yields in an Experiment with Orange Trees. Proc. Amer. Soc. Hort. Sci., Maryland, 42: 23-33.

PATTERSON, H.O. e B.I. LOWE, 1970. The Errors of Long-Term Experiments. J. Agric. Sci., Cambridge, 74: 53-60.

PEARCE, 1953. Field Experimentation with Fruit Trees and Other Perennial Plants. Technical Communication nº 23 of the Commonwealth Bureau of Horticulture and Plantation Crops. East Malling, Maidstone, Kent, England. Commonwealth Agricultural Bureau.

POTTHOFF, R. e S.N. ROY, 1964. A Generalized Multivariate Analysis of Variance Model Useful Especially for Growth Curve Problems. Biometrika, Londres, 51: 313-326.

RAO, C.R., 1965. The Theory of Least Squares When Parameters are Stochastic and Its Application to the Analysis of Growth Curves. Biometrika, Londres, 52: 447-458.

RAO, C.R., 1966. Covariance Adjustment and Related Problems in Multivariate Analysis. In: Multivariate Analysis. Academic Press, Nova York, p. 87.103.

ROWELL, J.G. e O.E. WALTERS, 1976. Analysing Data With Repeated Observations on Each Experimental Unit. J. Agric. Sci., Cambridge, 87: 423-432.

ROY, S.N., 1953. On a Heuristic Method of Test Construction and Its Use in Multivariate Analysis. The Annals of Math. Statistics, Baltimore, 24: 220-238.

SCHWERTMAN, N.C., 1978. A Note on the Geisser-Greenhouse Correction for Incomplete Data Split-Plot Analysis. Journal of the American Statistical Association, Washington, 73: 393-396.

SMITH, H.; R. GNANADESIKAN e J.B. HUGHES, 1962. Multivariate Analysis of Variance (Manova). Biometrics, Carolina do Norte, 18: 22-41.

SNEDECOR, G.W. e E.S. HABER, 1946. Statistical Methods for an Incomplete Experiment on a Perennial Crop. Biometrics, Carolina do Norte, 2: 61-67.

SNEDECOR, G.W., 1956. Statistical Methods. 5ª edição. The Iowa State College Press, Ames, Iowa. 534 pp.

SNEDECOR, G.W. e W.G. COCHRAN, 1967. Statistical Methods. 6ª edição. The Iowa State University Press, Ames, Iowa. 593 pp.

STEEL, R.G.D., 1955. An Analysis of Perennial Crop Data. Biometrics, Carolina do Norte, 11: 201-212.

STEEL, R.G.D. e J.H. TORRIE, 1960. Principles and Procedures of Statistics. McGraw-Hill Book, Nova York, Toronto e Londres, 481 pp.

STEVENS, W.L., 1949. Análise Estatística do Ensaio de Variedades de Café. Bragantia, Campinas, 9: 103-123.

TEÓFILO SOBRINHO, J., 1972. Comportamento da Laranjeira Valência (*Citrus sinensis* L. Osbeck) Sobre Diferentes Porta-Enxertos. Piracicaba, Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", USP. (Tese de Doutoramento).

WILKS, S.S., 1932. Certain Generalizations in the Analysis of Variance. Biometrika, Londres, 24: 471-494.

WISHART, J., 1938. Growth-Rate Determinations in Nutrition Studies with the Bacon Pig, and Their Analysis. Biometrika, Londres, 30: 16-28.

# 8. APÊNDICE: Programa para Testar a Igualdade das Matrizes de Covariâncias, por Tratamento, e para Testar a Uniformidade da Matriz de Covariâncias do Experimento.

```
// JOB

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL   PHY DRIVE
  0000        0002        0002         0000


// FOR
*IOCS(CARD,1132PRINTER,DISK)
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
C       PROGRAMA PARA TESTAR A IGUALDADE DAS MATRIZES
C       DE COVARIANCIAS, POR TRATAMENTO, E PARA TESTAR
C       A UNIFORMIDADE DA MATRIZ DE COVARIANCIAS DO
C        EXPERIMENTO
C       PROGRAMADOR-UBIRAJARA DORIVAL DINIZ
        DIMENSION X(10,9,9),ST(10,9),Y(10,9,9),A(100),
       1B(10,10),PM(10,10),R1(10,9,9),DR(10),RLOG(10),
       1LA(10),MA(10),SB(9,9),SG(9)
   20 READ(2,100)M,N,L
  100 FORMAT(3I2)
        DO 1 I=1,M
        DO 1 K=1,L
    1 READ(2,101)(X(I,J,K),J=1,N)
  101 FORMAT(10F8.0)
        DO 15 K=1,L
        DO 15 J=1,N
        SB(J,K)=0
        DO 15 I=1,M
   15 SB(J,K)=SB(J,K)+X(I,J,K)
        DO 17 K=1,L
        DO 17 J=1,N
   17 SB(J,K)=SB(J,K)/M
        DO 16 K=1,L
        SG(K)=0
        DO 16 J=1,N
        DO 16 I=1,M
   16 SG(K)=SG(K)+X(I,J,K)
        DO 18 K=1,L
   18 SG(K)=SG(K)/(M*N)
```

```
      DO 5 K=1,L
      DO 5 I=1,M
      ST(I,K)=0
      DO 6 J=1,N
    6 ST(I,K)=ST(I,K)+X(I,J,K)
    5 ST(I,K)=ST(I,K)/N
      DO 7 K=1,L
      DO 7 I=1,M
      DO 7 J=1,N
    7 Y(I,J,K)=X(I,J,K)-ST(I,K)-SB(J,K)+SG(K)
C     MATRIZES DE COVARIANCIAS POR TRATAMENTO
      DO 106 I=1,M
      DO 107 K3=1,L
      DO 107 K4=1,L
      R1(I,K3,K4)=0
      DO 107 J=1,N
  107 R1(I,K3,K4)=R1(I,K3,K4)+Y(I,J,K3)*Y(I,J,K4)
      DO 180 K3=1,L
      DO 180 K4=1,L
  180 R1(I,K3,K4)=R1(I,K3,K4)/(N-1)
      DO 109 I1=1,L
      DO 109 J1=1,L
      K=(I1-1)*L+J1
  109 A(K)=R1(I,I1,J1)
      CALL MINV(A,L,D,LA,MA)
      DR(I)=D
      RLOG(I)=(N-1)*ALOG(DR(I))
  106 CONTINUE
      PLOG=0
      DO 110 I=1,M
  110 PLOG=PLOG+RLOG(I)
      F2=(M-1)*L*(L+1)/2.
      FL=L
      FM=M
      FN=N
      A21=(2.*FL**2.+3*FL-1)/(6.*(FL+1)*(FM-1))
      A31=(FM**2-FM-1)/((FM-1)*(FN-1))
      A2=A21*A31
      MATRIZ DE COVARIANCIAS DO EXPERIMENTO
      DO 89 K1=1,L
      DO 89 K2=1,L
      R(K1,K2)=0
      DO 90 I=1,M
      DO 90 J=1,N
   90 R(K1,K2)=R(K1,K2)+Y(I,J,K1)*Y(I,J,K2)
   89 R(K1,K2)=R(K1,K2)/((M-1)*(N-1))
```

```
      DO 91 I=1,L
      DO 91 J=1,L
      K=(I-1)*L+J
   91 A(K)=R(I,J)
      CALL MINV(A,L,D,LA,MA)
      DET=D
      TLOG=(M-1)*(N-1)*ALOG(DET)
      TEST=TLOG-PLOG
      QUI1=(1-A2)*TEST
C     MATRIZ DE COVARIANCIAS MEDIAS
      VAMED=0
      DO 92 K5=1,L
   92 VAMED=VAMED+R (K5,K5)
      VAMED=VAMED/L
      COVM=0
      L1=L-1
      DO 93 K5=1,L1
      L2=K5+1
      DO 93 K6=L2,L
   93 COVM=COVM+2*R (K5,K6)/(L*L1)
      DO 94 K5=1,L1
      L2=K5+1
      DO 94 K6=L2,L
      RM(K5,K6)=COVM
   94 RM(K6,K5)=RM(K5,K6)
      DO 95 K5=1,L
   95 RM(K5,K5)=VAMED
      DO 97 I=1,L
      DO 97 J=1,L
      K=(I-1)*L+J
   97 A(K)=RM(I,J)
      CALL MINV (A,L,D,LA,MA)
      DRM=D
      Q=DET/DRM
      Q1=ALOG(Q)
      Q2=-(M-1)*(N-1)*Q1
      A15=L*(L+1)**2.*(2.*L-3)
      A51=6.*(M-1)*(N-1)*(L-1)*(L**2+L-4)
      A1=A15/A51
      F1=(L**2+L-4)*1./2
      QUI=(1-A1)*Q2
      WRITE(3,270)
  270 FORMAT('0')
      DO 104 I=1,L
```

```
  104 WRITE (3,250)(R(I,J),J=1,L)
  250 FORMAT (5X,9F10.4)
      WRITE(3,270)
      DO 105 I=1,L
  105 WRITE(3,250)(RM(I,J),J=1,L)
      WRITE(3,270)
      WRITE(3,280)DET
      WRITE(3,270)
      WRITE(3,280)DRM
      WRITE(3,270)
      WRITE(3,280) Q
      WRITE(3,270)
      WRITE(3,280) TEST
      WRITE(3,270)
      WRITE(3,250) Q1,Q2,A1,F1,QUI
      WRITE(3,270)
      WRITE(3,280) TLOG,QUI1,PLOG
  280 FORMAT(3F20.8)
      WRITE(3,270)
      DO 115 I=1,M
      DO 115 K3=1,L
  115 WRITE(3,250)(R1(I,K3,K4),K4=1,L)
      WRITE(3,270)
      DO 149 I=1,M
  149 WRITE(3,280)DR(I)
      WRITE(3,270)
      DO 150 I=1,M
  150 WRITE(3,280) RLOG(I)
      WRITE(3,270)
      WRITE(3,280) F2
      WRITE(3,270)
      WRITE(3,280) A2
      WRITE(3,270)
      GO TO 20
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON        0  VARIABLES    8914   PROGRAM    1844

END OF COMPILATION
```