Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”

A distribuição beta generalizada semi-normal

Rodrigo Rossetto Pescim

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Ciências. Área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica

Piracicaba
2009

Rodrigo Rossetto Pescim
Licenciado em Matemática

A distribuição beta generalizada semi-normal

Orientadora:
Prof ª. Drª. **Clarice Garcia Borges Demétrio**

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Ciências. Área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica

Piracicaba
2009

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
DIVISÃO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - ESALQ/USP

Pescim, Rodrigo Rossetto
A distribuição beta generalizada semi-normal / Rodrigo Rossetto Pescim. - - Piracicaba, 2009.
124 p. : il.

Dissertação (Mestrado) - - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", 2009.
Bibliografia.

1. Análise de regressão e de correlação 2. Análise de sobrevivência 3. Análise estatística de dados 4. Distribuição - Probabilidade 5. Verossimilhança I. Título

CDD 519.282
P473d

Dedicatória

Aos meus pais,

José Gilberto Pescim e Luzia Aparecida Rossetto Pescim, *que se doaram por inteiro e muitas vezes renunciaram aos próprios sonhos para que eu pudesse realizar o meu.*

“ O futuro pertence àqueles que acreditam na beleza de seus sonhos.”

Anna E. Roosevelt

AGRADECIMENTOS

Desejo manifestar os meus agradecimentos aos meus pais José Gilberto Pescim e Luzia Aparecida Rossetto Pescim o incentivo, a valorização de minhas decisões pessoais e profissionais, a ajuda em todos os momentos e a alegria de tê-los ao meu lado sempre.

Aos meu avós, João Pescim e Alice Moniz Pescim, o incentivo, o amor incondicional e o apoio em todas as horas.

Aos meus tios, Antonio Edson Pescim, José Gilmar Wolf, Luis Edilberto Pescim e Roberto Rossetto, às minhas tias Neuza Maria Favoreto Pescim, Marlene Aparecida Pescim Wolf e Sueli Penatti Pescim, toda alegria, o incentivo e o carinho durante os anos da minha vida.

Aos meus primos, Guilherme Favoreto Pescim, Patrícia Penatti Pescim, Isabela Pescim Wolf, Daniel Prates Ferreira Rossetto e Carolina Prates Ferreira Rossetto, o divertimento, a alegria e tudo que passamos juntos durante nossas vidas.

À Prof^a. Dr^a. Clarice Garcia Borges Demétrio, a compreensão, a paciência, a exigência, e, principalmente, a orientação na elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro, a idéia do trabalho, toda colaboração, as valiosas sugestões, e, principalmente, a oportunidade de poder trabalhar ao seu lado.

Ao Prof. Dr. Edwin Moisés Marcos Ortega, a amizade, a colaboração dispensada ao trabalho e a convivência enriquecedora neste último ano.

Ao conselho do programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica.

Aos professores do Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP, Prof. Dr. Carlos Tadeu dos Santos Dias, Prof. Dr. Décio Barbin, Profª Drª Roseli Aparecida Leandro, Prof. Dr. Silvio Sandoval Zocchi e Prof^a. Dr^a. Sônia Maria Stefano Piedade.

Aos funcionários do Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP, as secretárias Solange de Assis Paes Sabadin e Luciane Brajão e aos técnicos em informática Jorge Alexandre Wiendl e Eduardo Bonilha, os auxílios permanentes.

À Mariana Ragassi Urbano, sua alegria contagiante, sempre estar disposta a me ajudar, todos os momentos de felicidade, e, principalmente, me fazer acreditar que a vida pode

ser um pouco mais alegre e agradável.

Ao Raphael Antonio Prado Dias, a convivência nos últimos seis anos, a amizade e as discussões enriquecedoras dos mais diferentes assuntos.

Ao Epaminondas, à Ludmila e à Keliny, a amizade, a alegria e a diversão nesses dois últimos anos.

Aos colegas de estudo do mestrado e do doutorado, a amizade, o companheirismo e a paciência, principalmente, dos amigos Cássio, Adriana, Ana Patrícia, Braga Junior, Diógenes, Eduardo, Elizabeth, Elton, Fernanda, Glaúcia, Guilherme, Juliana, Marcelino, Marcelo, Michelle, Paula Fontes, Pedro, Priscila, Renata, Ricardo, Simone, Tiago Flor e Tiago de Oliveira.

Aos amigos da UNESP - Rio Claro, Marcelo Gasparoto, Raphael Dias, Luis Felipe Estevam, Ivan Forte, Éverton Hanser, Júlio Ferri, Éder dos Anjos, Paula Junqueira, Loreane Aldrigui, Flávia Regina, Tatiane Batista, Ana Paula de Carvalho e Viviane Sanches, toda nossa história durante os anos de graduação em matemática pela UNESP de Rio Claro.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), o auxílio financeiro prestado.

A todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

RESUMO

A Distribuição Beta Generalizada Semi-Normal

Uma nova família de distribuições denominada distribuição beta generalizada semi-normal, que inclui algumas distribuições importantes como casos especiais, tais como as distribuições semi-normal e generalizada semi-normal (Cooray e Ananda, 2008), é proposta neste trabalho. Para essa nova família de distribuições, foi realizado o estudo da função densidade probabilidade, função de distribuição acumulada e da função de taxa de falha (ou risco), que não dependeram de funções matemáticas complicadas. Obteve-se uma expressão formal para os momentos, função geradora de momentos, função densidade da distribuição de estatística de ordem, desvios médios, entropia, confiabilidade e para as curvas de Bonferroni e Lorenz. Examinaram-se os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros e deduziu-se a matriz de informação esperada. Neste trabalho é proposto, também, um modelo de regressão utilizando a distribuição beta generalizada semi-normal. A utilidade dessa nova distribuição é ilustrada através de dois conjuntos de dados, mostrando que ela é mais flexível na análise de dados de tempo de vida do que outras distribuições existentes na literatura.

Palavras-chaves: Distribuição generalizada semi-normal; Distribuição semi-normal; Estimação de máxima verossimilhança; Função de sobrevivência; Função de taxa de falha; Modelo de regressão

ABSTRACT

The Beta Generalized Half-Normal Distribution

A new family of distributions so-called beta generalized half-normal distribution, which includes some important distributions as special cases, such as the half-normal and generalized half-normal (Cooray and Ananda, 2008) distributions, is proposed in this work. For this new family of distributions, we studied the probability density function, cumulative distribution function and failure rate function (or hazard function), which did not depend on complicated mathematical functions. We obtained a formal expression for the moments, moment generating function, density function of order statistics distribution, mean deviation, entropy, reliability and Bonferroni and Lorenz curves. We examined maximum likelihood estimation of parameters and provided the information matrix. This work also proposed a regression model using the beta generalized half-normal distribution. The usefulness of the new distribution is illustrated through two data sets by showing that it is quite flexible in analyzing lifetime data instead other distributions in the literature.

keywords: Failure rate function; Generalized half-normal distribution; Half-normal distribution; Maximum likelihood estimation; Regression model; Survival function

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1 INTRODUÇÃO

Distribuições generalizadas têm sido amplamente estudadas ao longo dos anos. Amoroso (1925) foi o precursor em generalizar as distribuições contínuas, discutindo a distribuição gama generalizada para dados de taxa de ocorrência. Desde então, outros autores têm desenvolvido várias classes de distribuições generalizadas incluindo Good (1953) e Wise (1975) que generalizaram a distribuição normal inversa, Ljubo (1965) e Hosking e Wallis (1987) que generalizaram a distribuição de Pareto. Mais recentemente, novas classes de distribuições foram propostas com base em modificações da distribuição Weibull, principalmente, para trabalhar com funções de taxa de falha não-monótonas. Pham e Lai (2007) proporcionaram uma revisão de alguns desses modelos. Eles apresentaram a distribuição Weibull exponenciada (Mudholkar et al., 1995, 1996), a distribuição Weibull aditiva (Xie e Lai, 1995), a distribuição Weibull estendida (Xie et al., 2002), a distribuição Weibull modificada (Lai et al., 2003) e a distribuição Weibull estendida flexível (Bebbington et al., 2007). Uma outra generalização da distribuição Weibull, para estudar formas não-monótonas da função de risco , foi proposta por Carrasco et al. (2008) a qual denominaram de distribuição Weibull modificada generalizada.

O método para generalizar distribuições foi utilizado por Eugene et al. (2002) que introduziram a classe beta generalizada (Beta-G) de distribuições utilizando a distribuição beta-normal, baseada na composição da distribuição beta e na distribuição normal. Essa classe de distribuições tem como objetivo principal a generalização de uma distribuição padrão, adicionando dois parâmetros de forma. Com isso, a forma generalizada proporciona maior flexibilidade para a análise dos dados observados. Neste sentido, a distribuição beta-normal generaliza a distribuição normal e tem formas mais flexíveis, fornecendo a ela maior aplicabilidade. Uma vantagem da distribuição beta-normal com relação à distribuição normal, é que ela pode assumir a forma unimodal e bimodal. A forma bimodal para a distribuição beta-normal foi estudada por Famoye et al. (2003) e algumas expressões para os momentos foram deduzidas por Gupta e Nadarajah (2004).

Cooray e Ananda (2008) apresentaram a distribuição generalizada semi-normal como uma alternativa para a distribuição semi-normal e um caso particular da distribuição gama generalizada, indroduzida por Stacy (1962). Essa distribuição é muito utilizada em estudos relacionados ao tempo de falha de materiais mêcanicos.

Nesse contexto, o objetivo do presente trabalho, foi propor uma nova família de distribuições, pertencente à classe de distribuições beta generalizada, denominada distribuição beta generalizada semi-normal formulada a partir da composição da distribuição beta e da distribuição generalizada semi-normal. Essa nova distribuição devido à sua flexibilidade em acomodar muitas formas para a função de risco é uma importante distribuição de probabilidade, pois pode ser utilizada em uma variedade grande de problemas na análise de dados de sobrevivência. Uma importante vantagem dessa nova distribuição, é acomodar não apenas funções de risco mónotonas, isto é, funções crescentes, decrescentes ou constantes, mas também as funções de risco não-monótonas, como por exemplo, a forma de banheira ou U e a forma unimodal. Além disso, a nova distribuição é também adequada para testar a qualidade do ajuste de seus sub-modelos especiais.

Como ilustração, foram feitas análises para dois conjuntos de dados, e, em seguida, um estudo de simulação foi proposto para comprovar a consistência da nova distribuição de probabilidade.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Revisão de Literatura

2.1.1 Análise de Sobrevivência

A análise de sobrevivência, é uma das áreas da estatística que mais cresceu nas últimas décadas. A principal razão desse crescimento foi o desenvolvimento e o aprimoramento de técnicas estatísticas combinadas com a evolução tecnológica dos computadores cada vez mais velozes (Colosimo e Giolo, 2006). Uma evidência disso é o número de aplicações em análise de sobrevivência, que em geral, estão relacionados a dados biomédicos, biológicos, agronômicos, dentre outros.

O termo análise de sobrevivência é utilizado para designar a análise estatística de dados quando a variável resposta em estudo representa o tempo desde um instante inicial bem definido até à ocorrência de determinado evento de interesse. Assim sendo, essa variável é não negativa e pode representar o tempo de falha do evento em questão. Entende-se por falha, a ocorrência de um evento pré-estabelecido, e tempo de falha o período de tempo decorrido para o evento acontecer, como por exemplo, a duração do funcionamento de um equipamento elétrico até a sua queima, o tempo de vida de um paciente desde o momento em que foi diagnosticado com a doença até a sua morte, ou cura.

A principal característica dos dados de sobrevivência é a presença de censura, que consiste em uma observação parcial da resposta, ou seja, para alguns indivíduos pode não ser possível observar o evento de interesse durante o período em que estiveram em observação. As censuras podem ocorrer devido a diversas causas, dentre elas, a perda de acompanhamento do paciente no decorrer do estudo e a não ocorrência do evento de interesse até o término do experimento (Colosimo e Giolo, 2006). Elas podem ser classificadas como censura à direita, à esquerda e intervalar. As censuras à direita podem ainda ser caracterizadas como censura do tipo I, censura do tipo II e censura aleatória.

Censura do tipo I é aquela em que o estudo será terminado após um período pré-estabelecido de tempo. Censura do tipo II é aquela em que o estudo será terminado após ter ocorrido o evento de interesse em um número pré-estabelecido de indivíduos. O tipo de censura que mais ocorre na prática é a censura aleatória. Ela acontece quando um indivíduo é

retirado do estudo sem ter ocorrido a falha, ou também, se o indivíduo morrer por uma razão diferente da estudada.

Uma representação do mecanismo de censura aleatória pode ser elaborada da seguinte maneira. Sejam T e C duas variáveis aleatórias independentes, a primeira representando o tempo de falha de um indivíduo e a segunda a censura associada a esse indivíduo, respectivamente. Observa-se que o tempo da i-ésima observação é dado por $t_i = min(T, C)$ e o indicador de censura é caracterizado por

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se } T \leq C, \\ 0 & \text{se } T > C. \end{cases}$$

A censura à esquerda ocorre quando o tempo registrado é maior do que o tempo de falha, isto é, o evento de interesse já aconteceu quando o indivíduo foi observado.

A censura intervalar é um tipo mais geral de censura que acontece, por exemplo, em estudos em que os pacientes são acompanhados em visitas periódicas e é conhecido somente que o evento de interesse ocorreu em um certo intervalo de tempo.

Assim sendo, os dados de sobrevivência caracterizam-se pelos tempos de falhas e pelas censuras, isto é, o i-ésimo indivíduo em estudo pode ser representado, em geral, pelo par (t_i, δ_i) sendo t_i o tempo de falha ou de censura e δ_i a variável indicadora de falha ou censura

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se } t_i \text{ é um tempo de falha,} \\ 0 & \text{se } t_i \text{ é um tempo censurado.} \end{cases}$$

Embora alguns dados dentro do estudo de análise de sobrevivência sejam censurados, eles não podem ser descartados, pois mesmo sendo parciais fornecem informações sobre o tempo de vida. A não utilização desses dados pode ocasionar conclusões viciadas. Sem a presença de censura, as técnicas estatísticas clássicas, como análise de regressão e planejamento de experimentos, poderiam ser utilizadas na análise dos dados de sobrevivência. Por outro lado, na presença de censura, faz-se necessário o uso dos métodos de análise de sobrevivência que possuem como objetivo a incorporação da informação contida nos dados censurados na análise estatística.

2.1.1.1 Função de Sobrevivência

No estudo dos dados de sobrevivência, tem-se o interesse em estimar a probabilidade de um indivíduo sobreviver até o tempo t, a qual é chamada de função de sobrevivência, que pode ser representada pela seguinte expressão

$$S(t) = P[T \geq t] = 1 - F(t) = \int_t^{\infty} f(t)dt,$$

em que T é uma variável aleatória contínua não negativa e $f(t)$ é a sua respectiva função densidade probabilidade.

2.1.1.2 Função Taxa de Falha ou de Risco

A taxa de falha num intervalo $[t, t+\Delta t]$ é definida como a probabilidade de que a falha ocorra nesse intervalo, dado que não ocorreu antes do tempo t, dividida pelo comprimento do intervalo de tempo.

Assumindo um intervalo de tempo pequeno, $\Delta t \mapsto 0$, $h(t)$ representa a razão instantânea de falha ou morte no tempo t de um indivíduo, dado que ele sobreviveu até o tempo t, ou seja, $h(t)$ é denominada função de taxa de falha ou de risco,

$$h(t) = \lim_{\Delta t \mapsto 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t \mid T \geq t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{S(t)},$$

em que $f(t)$ e $S(t)$ são as funções densidade probabilidade e de sobrevivência, respectivamente.

A função de taxa de falha, $h(t)$, é muito útil para descrever a distribuição do tempo de vida de indivíduos em estudo, pois ela determina a forma com que a taxa instantânea de falha se altera ao longo do tempo.

Em muitas aplicações, existem informações qualitativas sobre as formas da função de taxa de falha (ou de risco). Por meio dessas informações, pode-se fazer uma análise gráfica, para ajudar na seleção de um modelo particular para algum fenômeno em estudo. Nesse contexto, uma forma empírica para estudar o comportamento da função de risco é por meio da construção do gráfico "Total Time On Test"(Aarset, 1987), também conhecido como curva TTT.

A curva TTT representa o gráfico de

$$G\left(\frac{r}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{r} T_{i:n} + (n-r)\, T_{r:n}}{\sum_{i=1}^{n} T_{i:n}} \qquad \text{versus} \qquad A = \frac{r}{n},$$

em que $r = 1, \ldots, n$ e $T_{i:n}, i = 1, \ldots, n$, são estatísticas de ordem da amostra. (Mudholkar et al., 1996).

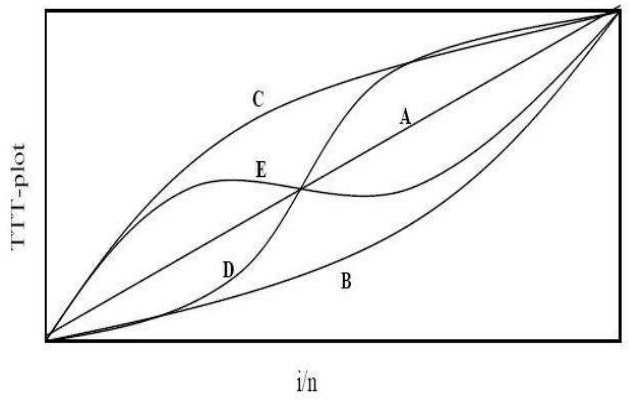

Figura 1 - Gráficos ilustrativo da curva TTT

A Figura 1 ilustra as várias formas que a curva TTT pode assumir. Se uma reta é observada (A), a função de risco é constante. Se possuir a forma de uma curva convexa (B) ou côncava (C), a função de risco é monotonicamente decrescente ou crescente. No caso em que iniciar como uma curva convexa e depois tornar-se côncava (D), a função de risco assume a forma de "U", e no caso reverso (E) é unimodal.

2.1.1.3 O Estimador de Kaplan-Meier

O primeiro passo de uma análise estátistica consiste em uma descrição dos dados em estudo. A presença de observações censuradas, para dados de sobrevivência, geralmente torna-se um problema para as técnicas convencionais de análise descritiva que envolvem, como por exemplo, a média, desvio-padrão, técnicas gráficas (histogramas e "box-plot"), entre outros.

Como nem sempre é válido utilizar esse tipo de método para os dados de sobrevivência na presença de censuras, o principal objetivo da análise descritiva envolvendo dados de tempo de vida é a estimação da função de sobrevivência, e a partir dela, estimar as estatísticas de interesse que, usualmente, são o tempo médio ou certas frações de falhas em tempos fixos.

Para a estimação da função de sobrevivência podem-se utilizar os estimadores não-paramétricos, dentre eles, o conhecido estimador proposto por Kaplan e Meier (1958).

Segundo Colosimo e Giolo (2006) o estimador não-paramétrico de Kaplan-Meier envolve uma adaptação da função de sobrevivência empírica que é definida por

$$\widehat{S(t)} = \frac{n}{N},$$

em que n é o número de observações que não falharam até o tempo t e N é o número total de observações em estudo.

O estimador de Kaplan-Meier considera o número de intervalos iguais ao número de falhas distintas e os limites dos intervalos são os próprios tempos de falhas da amostra.

Dessa forma, o estimador de Kaplan-Meier, para $t_1, \ldots, t_k$, pode ser definido como

$$\widehat{S(t)} = \prod_{j:t_j<t} \left(\frac{n_j - d_j}{n_j} \right) = \prod_{j:t_j<t} \left(1 - \frac{d_j}{n_j} \right),$$

em que $t_1, \ldots, t_k$ representam os k tempos distintos e ordenados de falha, d_j é o número de falhas em t_j, $j = 1, \ldots, k$, e n_j é o número de indivíduos sob risco em t_j, ou seja, os indivíduos que não falharam e não foram censurados até o instante imediatamente anterior a t_j.

A consistência e a normalidade assintótica de $\widehat{S(t)}$ podem ser provadas sob certas condições de regularidade. Uma das principais propriedades desse estimador, é o fato de ser estimador de máxima verossimilhança de $S(t)$.

2.1.1.4 A Função de Verossimilhança em Análise de Sobrevivencia

A idéia do método da máxima verossimilhança pode ser considerada como um processo de obtenção de informação sobre um vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda}$, ou seja, consiste em obter estimadores para os parâmetros de interesse.

Considera-se a situação em que se possui uma amostra aleatória $T_1, \ldots, T_n$, para $i = 1, \ldots, n$, de tempos de sobrevivência. Supondo que os dados consistem de n pares observados $(\delta_1, t_1), \ldots, (\delta_n, t_n)$, em que t_i é o tempo de falha ou censura e δ_i é o indicador de falha ou censura.

Nesse caso, a função de verossimilhança considerando censura não informativa envolvendo um vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda}$ é dada por

$$L(\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{i=1}^{n} [f(t_i)]^{\delta_i} [S(t_i)]^{1-\delta_i} = \prod_{i=1}^{n} [h(t_i)]^{\delta_i} S(t_i),$$

em que $f(t_i)$, $S(t_i)$ e $h(t_i)$ são as funções densidade probabilidade, de sobrevivência e de risco para cada variável aleatória T_i, respectivamente.

2.1.2 Distribuição Generalizada Semi-Normal (GSN)

Dentre as diversas causas de falhas de componentes mecânicos, a mais comum é devida à fadiga do material. A fadiga pode ser entendida como uma redução gradual da capacidade de carga do componente mecânico, pela ruptura lenta ou falha do material, consequência do pequeno avanço das fissuras que se formam no seu interior, ou seja, é um dano estrutural que ocorre quando um material é exposto ao estresse e às flutuações (oscilações) de tensão.

Por meio das investigações experimentais, o aumento da ruptura por fadiga aparece como um processo de propriedades aleatórias que variam no tempo. Essas propriedades alteram-se durante o crescimento da ruptura, variando de material para material. Alguns modelos estatísticos permitem estudar a variação aleatória do tempo de falha associados aos materiais expostos à fadiga, como resultado de diferentes padrões cíclicos. Os modelos mais utilizados para descrever o processo do tempo de vida sobre a fadiga dos materiais são as distribuições semi-normal (SN) e Birnbaum-Saunders (BS).

Ao modelar as taxas de risco monótonas (crescentes e decrescentes), as distribuições SN ou BS podem ser, num primeiro momento, uma boa escolha por causa das formas de suas funções densidades que são positivamente e negativamente inclinadas. No entanto, essas distribuições não fornecem um ajuste razoável para a modelagem de fenômenos com os índices de falha não-monótonas (formas de banheira e unimodal) que são muito comuns nos estudos de análise de sobrevivência, confiabilidade e nas ciências biológicas em geral. Nesse sentido, foi proposta a distribuição generalizada semi-normal (GSN) a qual acomoda funções de risco não-monótonas como, por exemplo, a forma de banheira ou U, e torna-se um importante modelo para a compreensão do comportamento aleatório de algumas características básicas do processo de fadiga dos materiais.

Cooray e Ananda (2008) propuseram uma generalização da distribuição semi-normal (SN), que denominaram de distribuição generalizada semi-normal (GSN) em que $\alpha > 0$ e $\theta > 0$ são os parâmetros de forma e escala, respectivamente. A função densidade de

probabilidade (f.d.p.) pode ser escrita como

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\alpha}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}, x \geq 0, \tag{1}$$

e a função de distribuição acumulada (f.d.a.) é denotada por

$$G(x) = 2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right] - 1 = \text{erf}\left[\frac{\left(\frac{\text{x}}{\theta}\right)^{\alpha}}{\sqrt{2}}\right], \tag{2}$$

em que $\text{erf(x)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\text{x}} \exp(-\text{t}^2)\text{dt}$ e $\Phi(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$.

Para as equações (1) e (2), a função de risco da distribuição GSN pode ser expressa por

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\alpha}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}}{1 - \left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right] - 1\right\}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\alpha}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}}{2\left\{1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\alpha}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}}{1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]}. \end{aligned} \tag{3}$$

As Figuras 2 e 3 ilustram algumas das possíveis formas da função densidade (1) e as Figuras 4 e 5 ilustram a função de taxa de falha (3), para determinados valores dos parâmetros, incluindo a distribuição semi-normal (SN) que é um caso especial para $\alpha = 1$. Uma característica da distribuição GSN é que sua função de taxa de falha pode ser monotonicamente crescente ou decrescente, em forma de U, dependendo basicamente dos valores dos parâmetros.

2.1.2.1 Propriedades da Distribuição Generalizada Semi-Normal

2.1.2.1.1 Moda

Em muitos casos, tem-se o interesse em estudar a moda, isto é, o valor ou valores mais frequentes. A moda da distribuição GSN pode ser obtida por meio da maximização da função densidade (1), isto é,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\alpha}{\theta^{\alpha}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[(\alpha - 1)\, x^{\alpha-2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} - x^{\alpha-1}\, \frac{\alpha x^{2\alpha-1}}{\theta^{2\alpha}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}\right] \\ &= \frac{\alpha}{\theta^{\alpha}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} \left[(\alpha - 1)\, x^{\alpha-2} - \frac{x^{3\alpha-2}}{\theta^{2\alpha}}\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

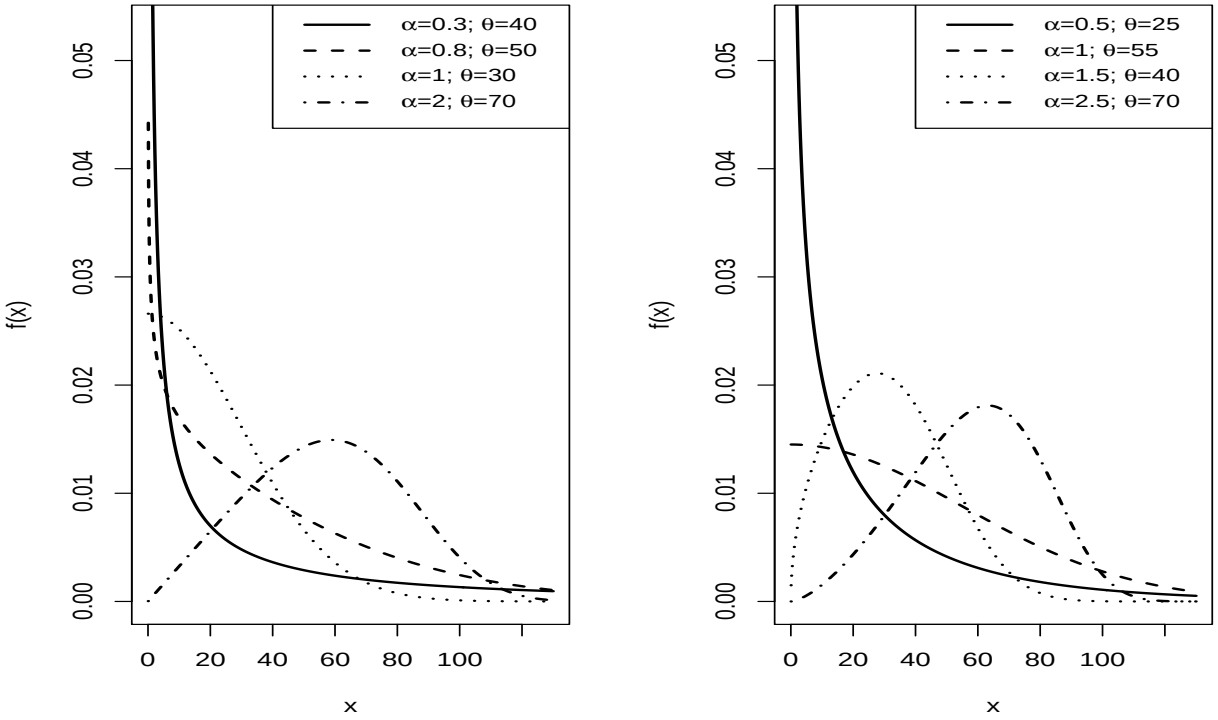

Figura 2 - Gráficos da função densidade (1) para alguns valores dos parâmetros

Igualando a equação (4) a zero, pode-se encontrar o maior valor ou os valores mais frequentes da variável aleatória. Portanto, a moda da distribuição GSN pode ser expressa como

$$x = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\alpha}} \theta.$$

2.1.2.1.2 Mediana

Uma medida de tendência central que caracteriza as observações de uma determinada variável aleatória de tal forma que um conjunto de dados ordenados separe a metade inferior da amostra, população ou distribuição de probabilidade da metade superior é denominada de mediana.

Matematicamente a mediana, m, de uma distribuição de probabilidade pode ser expressa como

$$P(x \leq m) = P(x \geq m) = \int_{-\infty}^{m} f(x)dx = \frac{1}{2},$$

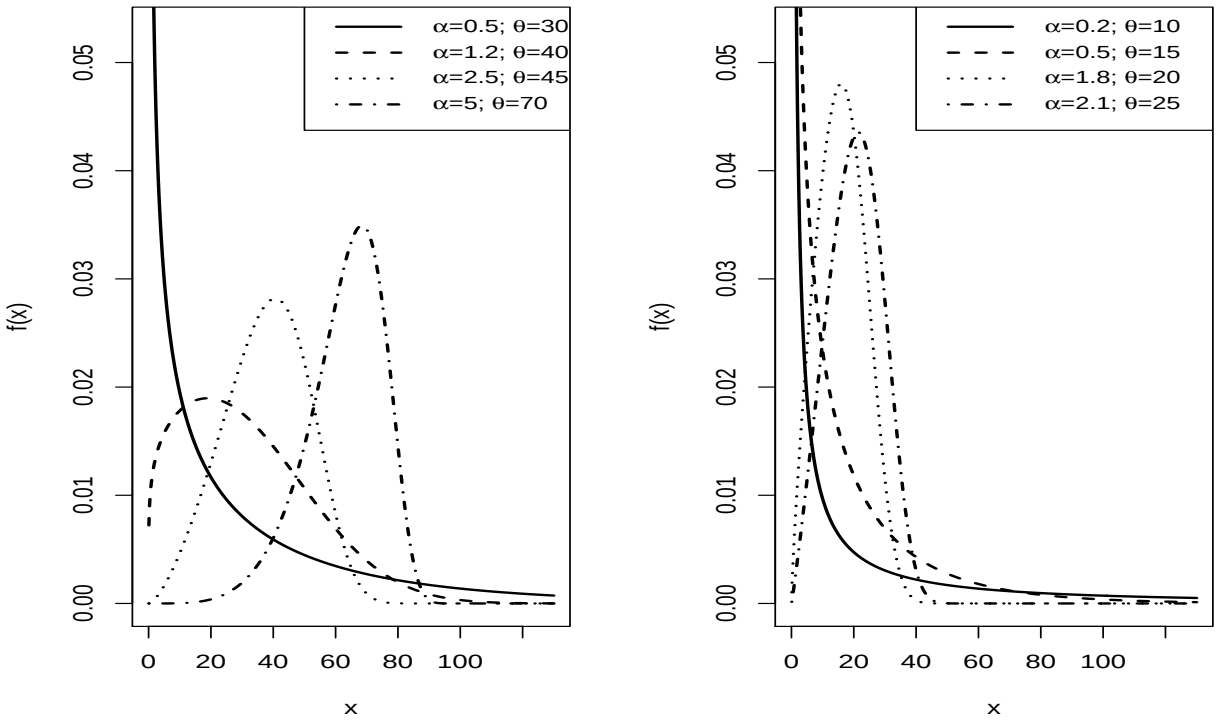

Figura 3 - Gráficos da função densidade (1) para alguns valores dos parâmetros

em que $f(x)$ é a função densidade probabilidade de uma variável aleatória contínua. No caso da distribuição GSN, tem-se

$$\int_0^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\alpha}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} dx = \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Utilizando a mudança de variável $u = \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}$ na expressão (5), tem-se

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\left(\frac{m}{\theta}\right)^{\alpha}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \frac{1}{2},$$

em que

$$\Phi\left[\left(\frac{m}{\theta}\right)^{\alpha}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\left(\frac{m}{\theta}\right)^{\alpha}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

Então a mediana da distribuição GSN pode ser expressa por

$$m = \left[\Phi^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}} \theta.$$

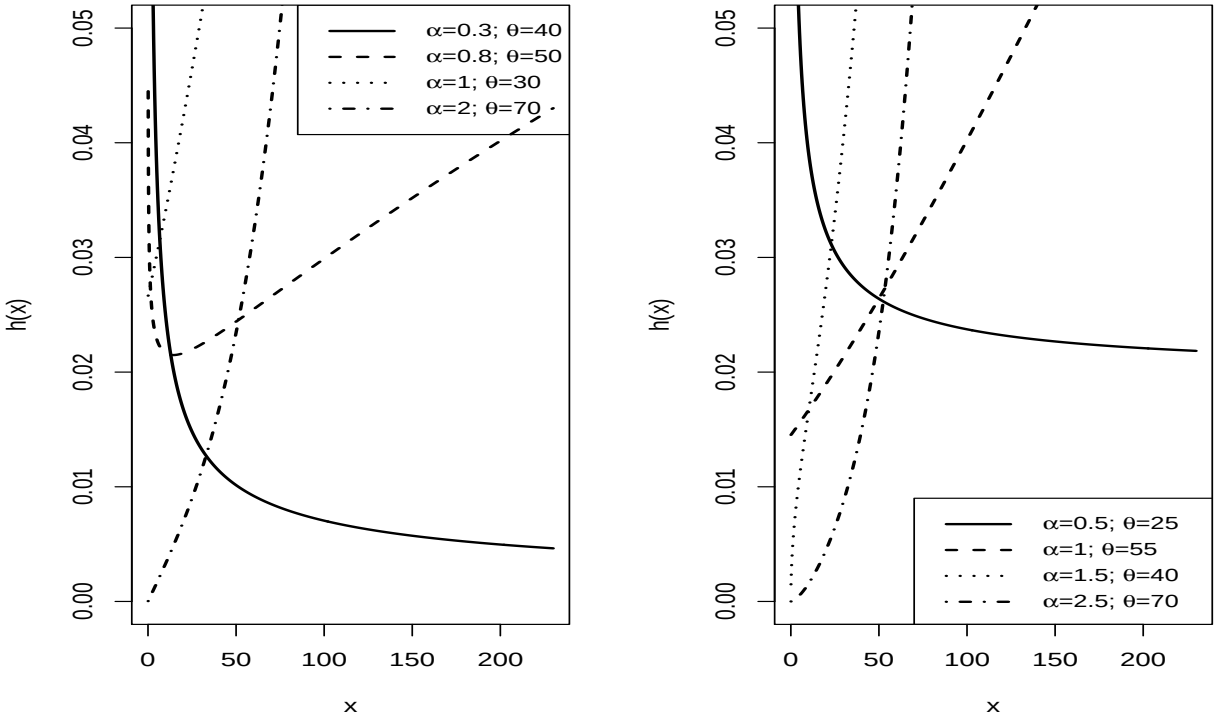

Figura 4 - Gráficos da função de risco (3) para alguns valores dos parâmetros

2.1.2.1.3 Momentos

Algumas das principais características de uma distribuição, como por exemplo variância, assimetria e curtose, podem ser estudadas por meio dos momentos. O s-ésimo momento ordinário da distribuição GSN pode ser obtido pela expressão $\mu'_s = E[X^s] = \int_0^\infty x^s g(x)dx$, em que $g(x)$ é a função densidade da distribuição GSN, representada pela equação (1).

Então,

$$\begin{aligned} \mu'_s &= \int_0^\infty x^s \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\alpha}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} dx \\ &= \alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x^{s-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} dx. \end{aligned} \tag{6}$$

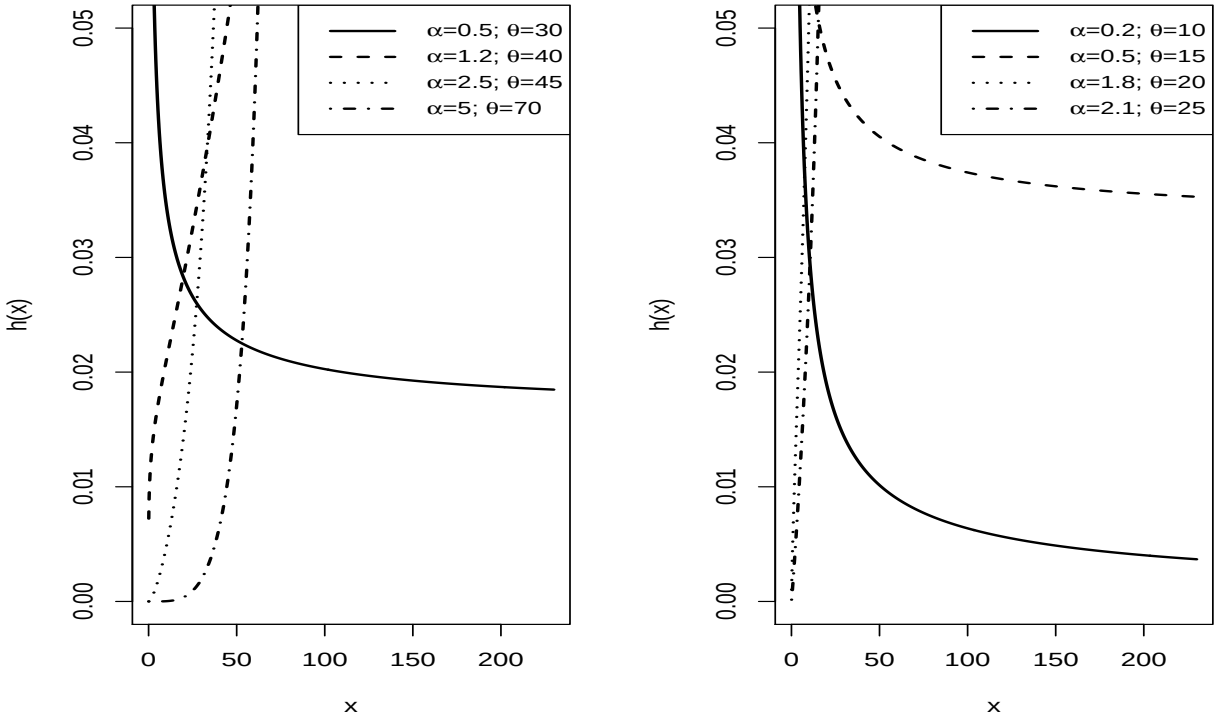

Figura 5 - Gráficos da função de risco (3) para alguns valores dos parâmetros

Utilizando a mudança de variável $u = \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}$ na expressão (6), μ'_s, reduz para

$$\mu'_s = \theta^s \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} u^{\frac{s}{\alpha}} \; e^{-\frac{u^2}{2}} du. \tag{7}$$

Utilizando uma nova mudança de variável $v = \frac{u^2}{2}$ na equação (7), tem-se

$$\mu'_s = \theta^s \sqrt{\frac{2^{\frac{s}{\alpha}}}{\pi}} \int_0^{\infty} v^{\frac{s+\alpha}{2\alpha}-1} \; e^{-v} dv,$$

em que

$$\int_0^{\infty} v^{\frac{s+\alpha}{2\alpha}-1} \; e^{-v} dv = \Gamma\left(\frac{s+\alpha}{2\alpha}\right).$$

Portanto, o s-ésimo momento da distribuição GSN é denotado por

$$\mu'_s = \sqrt{\frac{2^{\frac{s}{\alpha}}}{\pi}} \; \Gamma\left(\frac{s+\alpha}{2\alpha}\right) \theta^s.$$

2.1.2.1.4 Variância

A variância de uma variável aleatória é uma medida de dispersão que indica o quão distante, os seus valores se encontram do valor esperado. Essa medida pode ser expressa em termos dos dois primeiros momentos ordinários, isto é,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2.$$

Para a distribuição generalizada semi-normal, a variância pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sqrt{\frac{2^{\frac{2}{\alpha}}}{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right)\theta^2 - \left[\sqrt{\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\theta\right]^2 \\
&= \frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right)\theta^2 - \frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}\,\Gamma^2\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\theta^2 \\
&= \frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}\left[\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\right]\theta^2.
\end{aligned}$$

2.1.2.1.5 Assimetria

As medidas de assimetria possibilitam analisar uma distribuição de probabilidade de acordo com as relações entre suas medidas de tendência central, isto é, moda, média e mediana. Matematicamente, a assimetria pode ser obtida por meio dos momentos ordinários, ou seja,

$$\mathrm{Assimetria}(X) = \frac{\mathrm{E}(X^3) - 3\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X^2) + 2\mathrm{E}^3(X)}{\mathrm{Var}^{3/2}(X)}. \tag{8}$$

A assimetria da distribuição GSN pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\mathrm{Assimetria}(X) &= \frac{\sqrt{\frac{2^{\frac{3}{\alpha}}}{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{2\alpha}\right)\theta^3 - 3\sqrt{\frac{2^{\frac{3}{\alpha}}}{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right)\theta^3 + 2\left[\sqrt{\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\theta\right]^3}{\left\{\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}\left[\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\right]\theta^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\frac{2^{\frac{3}{2\alpha}}}{\pi}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{2\alpha}\right)\theta^3 - 3\frac{2^{\frac{3}{2\alpha}}}{\pi}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right)\theta^3 + \frac{2^{\frac{3}{2\alpha}}}{\pi^2}2\sqrt{\pi}\Gamma^3\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\theta^3}{\left\{\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}\left[\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\right]\theta^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\frac{2^{\frac{3}{2\alpha}}}{\pi}\theta^3\left[\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{2\alpha}\right) - 3\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right) + 2\sqrt{\pi}\,\Gamma^3\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\right]}{\frac{2^{\frac{3}{2\alpha}}}{\pi^2}\sqrt{\pi}\,\theta^3\left[\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{2\alpha}\right) - 3\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right) + 2\sqrt{\pi}\,\Gamma^3\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\left[\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

2.1.2.1.6 Curtose

A medida que mostra o grau de achatamento de uma distribuição de probabilidade é denominada curtose. Essa medida, que depende dos quatro primeiros momentos, pode ser escrita como

$$\text{Curtose}(X) = \frac{\mathrm{E}(X^4) - 4\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X^3) + 6\mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}^2(X) - 3\mathrm{E}^4(X)}{\mathrm{Var}^2(X)}. \tag{9}$$

A curtose para distribuição GSN é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\text{Curtose}(X) &= \frac{\sqrt{\frac{2^{\frac{4}{\alpha}}}{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{4+\alpha}{2\alpha}\right)\theta^4 - 4\sqrt{\frac{2^{\frac{4}{\alpha}}}{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{2\alpha}\right)\theta^4 + 6\sqrt{\frac{2^{\frac{2}{\alpha}}}{\pi}}\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right)\left[\sqrt{\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\theta\right]^2}{\left\{\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}\left[\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\right]\theta^2\right\}^2} \\
&\quad \frac{-3\left[\sqrt{\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\theta\right]^4}{\left\{\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}\left[\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\right]\theta^2\right\}^2} \\
&= \frac{\frac{2^{\frac{2}{\alpha}}}{\pi}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{4+\alpha}{2\alpha}\right)\theta^4 - 4\frac{2^{\frac{2}{\alpha}}}{\pi}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{2\alpha}\right)\theta^4 + 6\frac{2^{\frac{2}{\alpha}}}{\pi^2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right)\Gamma^2\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\theta^4}{\left\{\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}\left[\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\right]\theta^2\right\}^2} \\
&\quad \frac{-3\frac{2^{\frac{2}{\alpha}}}{\pi^2}\,\Gamma^4\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\theta^4}{\left\{\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}\left[\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\right]\theta^2\right\}^2} \\
&= \frac{\frac{2^{\frac{2}{\alpha}}}{\pi}\theta^4\left[\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{4+\alpha}{2\alpha}\right) - 4\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{2\alpha}\right) + \frac{6\sqrt{\pi}}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right)\Gamma^2\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right) - \frac{3}{\pi}\,\Gamma^4\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\right]}{\frac{2^{\frac{2}{\alpha}}}{\pi^2}\,\theta^4\left[\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\right]^2} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{4+\alpha}{2\alpha}\right) - 4\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{2\alpha}\right) + \frac{6\sqrt{\pi}}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right)\Gamma^2\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right) - \frac{3}{\pi}\,\Gamma^4\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right) - \frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right)\Gamma^2\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right) + \frac{1}{\pi}\,\Gamma^4\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)}.
\end{aligned}$$

2.1.2.2 Estimação e Inferência

A estimação dos parâmetros da distribuição GSN é feita utilizando-se o método da máxima verossimilhança. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n, em que cada X_i, $i = 1, \ldots, n$, possui distribuição GSN com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda} = (\alpha, \theta)^T$.

A função de verossimilhança do modelo paramétrico para a i-ésima observação

da amostra aleatória é expressa por

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\lambda}) &= \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\alpha}{x_i}\right) \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{2\alpha}} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha}{\theta^{\alpha}}\, x_i^{\alpha-1}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{2\alpha}} \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{\alpha^n}{\theta^{n\alpha}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{2\alpha}}. \end{aligned}$$

Cujo o logaritmo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\lambda}) &= \frac{n}{2}\log\left(\frac{2}{\pi}\right) + n\log\alpha - n\alpha\log\theta \\ &\quad +(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Os componentes do vetor escore $\mathbf{U} = \left(\frac{\partial\ell}{\partial\alpha}, \frac{\partial l}{\partial\theta}\right)^T$ são obtidos por diferenciação, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\ell}{\partial\alpha} &= \frac{n}{\alpha} - n\log\theta + \sum_{i=1}^{n}\log x_i - \frac{1}{\theta^{2\alpha}}\sum_{i=1}^{n} x_i^{2\alpha}\left(\log x_i - \log\theta\right), \\ &= \frac{n}{\alpha} - n\log\theta + \sum_{i=1}^{n}\log x_i + \frac{1}{\theta^{2\alpha}}\left(\log\theta\sum_{i=1}^{n} x_i^{2\alpha} - \sum_{i=1}^{n} x_i^{2\alpha}\log x_i\right), \\ &= \frac{n}{\alpha} - n\log\theta + \sum_{i=1}^{n}\log x_i + \frac{\log\theta}{\theta^{2\alpha}}\sum_{i=1}^{n} x_i^{2\alpha} - \frac{1}{\theta^{2\alpha}}\sum_{i=1}^{n} x_i^{2\alpha}\log x_i. \end{aligned} \tag{10}$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\theta} = -\frac{n\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta^{2\alpha+1}}\sum_{i=1}^{n} x_i^{2\alpha}. \tag{11}$$

Portanto, o estimador de máxima verossimilhança, $\widehat{\theta}$, de θ, pode ser escrito como

$$\widehat{\theta} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{2\widehat{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2\widehat{\alpha}}} \tag{12}$$

em que $\widehat{\alpha}$ é o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro α. A partir de (10) fazendo-se $\frac{\partial\ell}{\partial\alpha} = 0$ e substituindo-se θ por $\widehat{\theta}$ obtém-se a equação de estimação de α

$$\frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\log x_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{2\alpha}\log x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{2\alpha}\right)^{-1} = 0. \tag{13}$$

O estimador de máxima verossimilhança de α, $\widehat{\alpha}$, é a solução da equação (13) não linear.

Para a estimação por intervalo pode-se obter a matriz de informação esperada de Fisher

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} 2n\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2 & -\frac{n}{\theta}(2-\log 2-\gamma) \\ -\frac{n}{\theta}(2-\log 2-\gamma) & \frac{n}{2\alpha^2}\{\frac{\pi^2}{2}-2+(2-\log 2-\gamma)^2\} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

em que γ é chamada de constante de Euler (Abramowitz e Stegun, 1972).

Os intervalos de confiança para os parâmetros podem ser obtidos por meio da teoria assintótica, utilizando a matriz de informação esperada em (14).

Um intervalo de confiança de aproximadamente $100(1-\alpha)\%$ para α e θ são, respectivamente dados por

$$\widehat{\theta} = \pm\, z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{\pi^2}{2}-2+(2-\log 2-\gamma)^2}{n(\pi^2-4)}}\,\frac{\widehat{\theta}}{\widehat{\alpha}}$$

e

$$\widehat{\alpha} = \pm\, z_{\alpha/2}\frac{2\widehat{\alpha}}{\sqrt{n(\pi^2-4)}}.$$

2.1.3 Classe de Distribuições Beta Generalizada (Beta-G)

Um dos maiores benefícios da classe de distribuições beta generalizada é seu uso para a análise de dados assimétricos que não possam ser propriamente analisados pelas distribuições existentes. Considerando a função de distribuição acumulada $G(x)$ de uma variável aleatória contínua, Eugene et al. (2002) introduziram uma nova classe de distribuições generalizadas com f.d.a expressa por

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)}\int_0^{G(x)} \omega^{a-1}(1-\omega)^{b-1}d\omega, \tag{15}$$

em que $a > 0$ e $b > 0$ são dois parâmetros de forma e $B(a,b)$ é a função beta. A f.d.a. $G(x)$ pode ser uma função arbitrária e F é denominada como a f.d.a. da distribuição beta G. A aplicação de $X = G^{-1}(V)$ para $V \sim B(a,b)$ produz X seguindo a função de distribuição acumulada (15).

Essa classe de distribuições generaliza a distribuição G, também denominada de distribuição primitiva, de uma variável aleatória contínua com função densidade $g(x)$. De fato, a f.d.a. da distribuição beta G coincide com a f.d.a. $G(x)$ quando $a = b = 1$. O papel dos parâmetros adicionais é introduzir assimetria e variar o peso das caudas. Com isso, eles proporcionam maior flexibilidade à forma da distribuição e, consequentemente, à análise dos dados observados.

A f.d.a. da distribuição beta-G pode ser reescrita como

$$F(x) = I_{G(x)} = \frac{B_{G(x)}(a,b)}{B(a,b)}, \tag{16}$$

em que $B_{G(x)}(a,b)$ é denominada função beta incompleta que pode ser expressa por

$$B_{G(x)}(a,b) = \int_0^{G(x)} u^{a-1}(1-u)^{b-1}du,$$

em que $I_{G(x)}$ é denominada como razão da função beta incompleta.

Eugene et al. (2002) introduziram a distribuição Beta Normal (BN) tomando a função $G(x)$ como a f.d.a. da distribuição normal e obtiveram alguns de seus primeiros momentos. Nadarajah e Kotz (2004) definiram a distribuição Beta Gumbel (BG) tendo como $G(x)$ a f.d.a. da distribuição Gumbel, obtendo expressões em forma fechada para o cálculo dos momentos, e a distribuição assintótica da estatística de ordem extrema. Discutiram o processo de estimação dos parâmetros pelo método de máxima verossimilhança. Nadarajah e Gupta (2004) apresentaram a distribuição Beta Fréchet (BF) e obtiveram a forma analítica da função densidade de probabilidade (f.d.p.) e a função da razão de risco. Deduziram, também, a distribuição assintótica da estatística de ordem extrema. Além disso, Nadarajah e Kotz (2005) trabalharam com a distribuição Beta Exponencial (BE) e obtiveram a função geradora de momentos, os primeiros quatro cumulantes, a distribuição assintótica da estatística de ordem extrema e discursaram sobre a estimação de máxima verossimilhança. Alguns dos resultados de Nadarajah e Kotz (2005) foram generalizados por Cordeiro et al. (2009) usando a distribuição Beta Weibull. Deduziram a função geradora de momentos, os momentos e a matriz de informação e, também, fizeram a estimação pelo método da máxima verossimilhança.

Para a e b gerais, pode-se expressar (15) em termos da função hipergeométrica

definida por

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_i (\beta)_i}{(\gamma)_i i!} x^i, $$

em que $(\alpha)_i = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+i-1)$ denota o fatorial ascendente. Obtém-se

$$ F(x) = \frac{G(x)}{a\,B(a,b)}\, {}_2F_1(a, 1-b, a+1; G(x)). $$

As propriedades de $F(x)$ ou qualquer outra distribuição beta G definidas a partir de uma família de f.d.a. $G(x)$ em (15), poderiam, em princípio, seguir as propriedades da função hipergeométrica, as quais são bem estabelecidas na literatura, como por exemplo, Seção 9.1 de Gradshteyn e Ryzhik (2000).

2.1.3.1 Função Densidade de Probabilidade

A função densidade de probabilidade da classe de distribuições beta generalizada correspondente à equação (15) pode ser escrita como

$$ f(x) = \frac{g(x)}{B(a,b)} G(x)^{a-1} [1 - G(x)]^{b-1}, \tag{17} $$

em que $g(x)$ é a função densidade da distribuição primitiva. A f.d.p. $f(x)$ será melhor empregada quando a f.d.a. $G(x)$ e a f.d.p. $g(x)$ apresentarem uma expressão analítica simples. Exceto para alguns casos especiais, a escolha de $G(x)$ em (15) implicaria que a f.d.p. seria díficil de ser aplicada. Se $g(x)$ é uma distribuição simétrica em torno de zero, então $f(x)$ será uma distribuição simétrica quando $a = b$.

2.1.3.2 Função de Risco e de Sobrevivência

As funções de risco e de sobrevivência são, geralmente, utilizadas para estudos de confiabilidade e análise de sobrevivência. Nesses casos, o suporte da variável aleatória de interesse é o $\mathbf{R}_+$, como foi discutido nas Seções (2.1.1.1) e (2.1.1.2). Uma propriedade importante da função beta incompleta é

$$ B_x(a,b) = B(a,b) - B_{1-x}(a,b). $$

Com essa propriedade, a função de sobrevivência definida em (1) de uma distribuição pertencente à classe de distribuições beta generalizada é dada por

$$S(x) = 1 - F(x) = 1 - \frac{B_{G(x)}(a,b)}{B(a,b)} = \frac{B_{1-G(x)}(a,b)}{B(a,b)} = \frac{B_{S^*(x)}(b,a)}{B(a,b)}.$$

em que $S^*(x) = 1 - G(x)$ é a função de sobrevivência da distribuição primitiva.

A função de risco ou de taxa de falha, definida em (1) pode ser expressa para alguma distribuição da classe beta G como

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{g(x)\ G(x)^{a-1}[1-G(x)]^{b-1}}{B_{S^*(x)}(b,a)}.$$

2.1.3.3 Expansões para as Funções de Densidade e de Distribuição Acumulada

Algumas expansões para a f.d.a. da distribuição beta G podem ser realizadas dependendo se o parâmetro b (ou a) é um número real não-inteiro ou um número inteiro. A função densidade dessa distribuição, dada em (17), pode ser expressa como uma combinação linear ponderada infinita (ou finita) da função densidade da distribuição primitiva. Essa nova forma da função densidade tem grande importância para obter algumas propriedades matemáticas da distribuição beta G por meio das propriedades da distribuição primitiva.

Cordeiro e Nadarajah (2008) propuseram uma importante expansão da função densidade da classe Beta-G para obter algumas propriedades gerais. Seja $b > 0$ um número real não-inteiro e $|z| < 1$. A expansão da expressão $(1-z)^{b-1}$, (Nadarajah e Kotz, 2004), é dada por

$$(1-z)^{b-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} z^j. \tag{18}$$

Usando a expansão (18) na equação (15), a função de distribuição acumulada da distribuição beta G pode ser escrita como

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{G(x)} \omega^{a-1}(1-\omega)^{b-1} d\omega \\ &= \frac{\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^{G(x)} \omega^{a+j-1} d\omega \\ &= \frac{\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!(a+j)} G(x)^{a+j}. \end{aligned} \tag{19}$$

A equação (19) mostra que as propriedades da f.d.a. da distribuição beta G podem ser escritas como uma combinação linear ponderada infinita da f.d.a. da distribuição primitiva.

Utilizando a expansão binomial na equação (15), quando $b > 0$ é um número inteiro, obtém-se $F(x)$ por meio de uma soma finita,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{G(x)} \omega^{a-1}(1-\omega)^{b-1} d\omega \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} (-1)^j \binom{b-1}{j} \int_0^{G(x)} \omega^{a+j-1} d\omega \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \binom{b-1}{j} \frac{(-1)^j}{a+j} G(x)^{a+j}. \end{aligned} \tag{20}$$

Pode ser visto no site Wolfram Functions[1] que para a inteiro, a função beta incompleta pode ser escrita como

$$I_y(a,b) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^y \omega^{a-1}(1-\omega)^{b-1} d\omega = 1 - \frac{(1-y)^b}{\Gamma(b)} \sum_{j=0}^{a-1} \frac{\Gamma(b+j)}{j!} y^j, \tag{21}$$

e para b inteiro

$$I_y(a,b) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^y \omega^{a-1}(1-\omega)^{b-1} d\omega = \frac{y^a}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{b-1} \frac{\Gamma(a+j)}{j!} (1-y)^j. \tag{22}$$

Consequentemente, para $a > 0$ inteiro fazendo-se $y = G(x)$ em (21), obtém-se

$$F(x) = 1 - \frac{[1-G(x)]^b}{\Gamma(b)} \sum_{j=0}^{a-1} \frac{\Gamma(b+j)}{j!} G(x)^j,$$

e considerando $b > 0$ inteiro para $y = G(x)$ em (22), tem-se uma forma alternativa para (20) dada por

$$F(x) = \frac{G(x)^a}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{b-1} \frac{\Gamma(a+j)}{j!} [1-G(x)]^j.$$

Como alternativa à equação (17), para $a > 0$ e $b > 0$ reais não-inteiros, e por meio da diferenciação de (19), a f.d.p. da distribuição beta G pode ser escrita como

$$f(x) = \frac{g(x)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b)(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} G(x)^{a+j-1}. \tag{23}$$

[1] http://functions.wolfram.com/

Aplicando a expansão (18) em $G(x)^{a+j-1}$ tem-se que

$$\begin{aligned} G(x)^{a+j-1} &= \{1-[1-G(x)]\}^{a+j-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+j)(-1)^k}{\Gamma(a+j-k)k!}[1-G(x)]^k. \end{aligned} \tag{24}$$

Como k é inteiro, pode-se utilizar a expansão binomial

$$[1-G(x)]^k = \sum_{r=0}^{k}(-1)^r \binom{k}{r} G(x)^r,$$

em (24), resultando

$$G(x)^{a+j-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^{k+r}\Gamma(a+j)\binom{k}{r}}{\Gamma(a+j-k)k!} G(x)^r. \tag{25}$$

Substituindo (25) na equação (23), pode-se obter uma nova expressão para a f.d.p. da distribuição beta G dada por

$$f(x) = g(x)\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)G(x)^r, \tag{26}$$

em que

$$w_{j,k,r}(a,b) = \frac{(-1)^{j+k+r}\Gamma(b)\Gamma(a+j)\binom{k}{r}}{\Gamma(b-j)\Gamma(a+j-k)B(a,b)j!k!}. \tag{27}$$

As equações (19) e (26) para as funções de distribuição acumulada e densidade são fundamentais para se obterem algumas propriedades matemáticas da classe de distribuições beta generalizada, como por exemplo os momentos. A equação (26) produz a função densidade $f(x)$ da distribuição beta G em termos da função densidade $g(x)$ da distribuição primitiva.

2.1.3.4 Fórmula Geral para os Momentos

Cordeiro e Nadarajah (2008) deduziram uma expressão geral para os momentos da distribuição beta G, utilizando a equação (26). O s-ésimo momento da distribuição beta G pode ser obtido por meio da equação $\mu'_s = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)dx$. Para $b > 0$ real não-inteiro, a

expressão geral para os momentos é dada por

$$\begin{aligned}
\mu'_s &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^s g(x) \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b) G(x)^r dx \\
&= \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b) \int_{-\infty}^{+\infty} x^s \; G(x)^r g(x) dx \\
&= \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b) \; \tau_{s,r}. \qquad (28)
\end{aligned}$$

em que $w(.)$ é dado pela expressão (27) e $\tau_{s,r} = E[X^s G(X)^r]$ é o (s,r)-ésimo momento ponderado da distribuição primitiva. Por meio da equação (28) podem-se calcular os momentos da distribuição beta G em termos de uma combinação linear infinita dos momentos ponderados da distribuição primitiva.

2.1.4 Modelo de Regressão

Na prática, é comum, a ocorrência de situações em que uma ou mais covariáveis estão relacionadas aos tempos de sobrevivência, isto é, os tempos de falha são influenciados por covariáveis que, por exemplo, na área das ciências biomédicas podem ser a idade, a altura, um tipo de tumor cancerígeno, a quantidade de hemoglobina no sangue, etc.

Considere T uma variável aleatória e seja $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)^T$ um vetor formado por p variáveis explanatórias ou covariáveis (quantitativas ou qualitativas). Um modo de estabelecer a relação entre T e $\mathbf{x}$ é por meio da utilização de modelos de regressão. No contexto dos dados de sobrevivência, uma maneira de incluir as covariáveis na análise é realizada usando-se a classe de modelos de locação e escala.

2.1.4.1 Modelos de Locação-Escala

A classe de modelos de locação e escala consiste em utilizar a transformação logarítmica nos tempos de falha, Y = log(T), de tal forma que para um vetor de covariáveis, o logaritmo do tempo de falha possui uma distribuição com um parâmetro de locação μ, que depende das variáveis regressoras, e um parâmetro de escala σ.

Pode-se, então, escrever o modelo log-linear da seguinte forma

$$\mathbf{Y} = \mu + \sigma \mathbf{Z}, \qquad (29)$$

em que Y é uma distribuição de probabilidade que pertence à família de distribuições que se caracteriza pelo fato de possuir um parâmetro de locação μ $(-\infty < \mu < \infty)$, um parâmetro de escala $\sigma > 0$, e Z é o erro aleatório.

Uma importante característica do modelo de regressão da forma de locação e escala é que as variáveis regressoras possuem efeito multiplicativo sobre T, isto é, $\mathrm{T} = \exp(\mu)\exp(\sigma\mathbf{Z})$. Logo, esse modelo possui efeito linear em Y. Além disso, a função de sobrevivência de Y dado $\mathbf{x}$ é da forma $S(\frac{y-\mu}{\sigma})$ em que $S(.)$ é a função de sobrevivência de Z.

Observa-se que $\mu(\mathbf{x})$ pode assumir várias formas dependendo do conjunto de dados em estudo. Em geral, o parâmetro de locação é escrito como $\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\boldsymbol{\beta}$, em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^T$ é o vetor de parâmetros desconhecidos. Com essa suposição, obtém-se

$$\mathbf{Y} = \mathbf{x}^T\boldsymbol{\beta} + \sigma\mathbf{Z},$$

tornando-se um modelo log-linear para T com resíduo Z.

2.1.4.2 Estimação dos Parâmetros

Após assumir um modelo de regressão como adequado para a análise dos dados, o próximo passo é encontrar um método para estimar seus parâmetros e realizar o processo de inferência. Em geral, no caso dos dados de sobrevivência, essa análise torna-se mais complicada quando se faz necessário incorporar observações censuradas, mesmo quando o mecanismo de censura é simples. Para a estimação dos parâmetros do modelo de regressão, várias abordagens podem ser utilizadas, tais como o método da máxima verossimilhança, o método Jackknife, a análise bayesiana, entre outros. Nesse trabalho, será considerado o processo de estimação dos parâmetros pelo método da máxima verossimilhança.

2.1.4.2.1 Método da Máxima Verossimilhança

Considere $(y_1, x_{i1}, \delta_1), \ldots, (y_n, x_{in}, \delta_n)$, n observações independentes em que $y_i = \log(t_i)$, representa o logaritmo do tempo de falha ou censura, $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ip})^T$ é o vetor de covariáveis e δ_i é o indicador de censura, para $i = 1, \ldots, n$. Assim, o logaritmo da função de verossimilhança para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^T$ é dado por

$$\ell(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i \in F} \log\left[f(y_i)\right] + \sum_{i \in C} \log\left[S(y_i)\right],$$

em que $f(y)$ e $S(y)$ são as funções densidade e de sobrevivência da variável aleatória Y, F é o conjunto de observações não censuradas e C denota o conjunto de observações censuradas.

No caso de grandes amostras e sob certas condições de regularidade para a função de verossimilhança, os intervalos de confiança e testes de hipóteses podem ser obtidos utilizando o fato de que os estimadores de máxima verossimilhança possuem distribuição assintótica normal com média $\boldsymbol{\lambda}$ e matriz de covariância expressa pelo inverso da matriz de informação de Fisher. Portanto, a matriz de covariância assintótica é dada por $I^{-1}(\boldsymbol{\lambda})$ com $I(\boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{E}\left[\ddot{L}(\boldsymbol{\lambda})\right] = -\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial \boldsymbol{\lambda}^T}\right]$.

Como o cálculo de $I(\boldsymbol{\lambda})$ (matriz de informação de Fisher) é complicado devido à presença de observações censuradas, pode-se utilizar, alternativamente, a matriz $-\ddot{L}(\boldsymbol{\lambda})$ avaliada em $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}$, que é um estimador consistente para a matriz de covariância assintótica (Mudholkar et al., 1996). Assim, a distribuição assintótica para $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ é dada por $\hat{\boldsymbol{\lambda}}^T \sim \mathrm{N}_q\left(\boldsymbol{\lambda}^T; \ddot{L}(\boldsymbol{\lambda})^{-1}\right)$, em que $\ddot{L}(\boldsymbol{\lambda})$ é a matriz de informação observada.

2.2 Metodologia

2.2.1 Distribuição Beta Generalizada Semi-Normal (BGSN)

A nova família de distribuições, denominada distribuição beta generalizada semi-normal (BGSN) com quatro parâmetros α, θ, a e b, denominada $BGSN(\alpha, \theta, a, b)$, é uma composição baseada na distribuição beta e na distribuição generalizada semi-normal (GSN) introduzida por Cooray e Ananda (2008). Substituindo-se (1) e (2) na equação (17) a função densidade de probabilidade dessa distribuição fica expressa por

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\alpha}{x}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}}{B(a,b)} 2^{b-1}\left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right\}^{a-1}\left\{1-\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{b-1}. \tag{30}$$

As funções densidades das distribuições GSN e SN representam casos particulares de (30) quando $a = b = 1$ e $a = b = \alpha = 1$, respectivamente. Além disso, quando $\alpha = 1$ tem-se a distribuição beta semi-normal (BSN) e quando $b = 1$, encontra-se a distribuição generalizada semi-normal exponenciada (GSNE) que são outros dois importantes casos particulares da distribuição BGSN.

Das equações (16) e (30), a função de risco ou de taxa de falha da nova dis-

tribuição pode ser expressa como

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \frac{\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\alpha}{x}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}}{B(a,b)} 2^{b-1}\left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right\}^{a-1}\left\{1-\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{b-1}}{1-I_{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1}(a,b)} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\alpha}{x}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} 2^{b-1}\left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right\}^{a-1}\left\{1-\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{b-1}}{B(a,b)\left\{1-I_{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1}(a,b)\right\}}. \qquad (31)
\end{aligned}
$$

Os gráficos da função densidade, Figuras 6 e 7, e da função taxa de falha, Figuras 8 e 9, da distribuição BGSN são apresentados para alguns valores selecionados dos parâmetros, incluindo as distribuições GSN e SN.

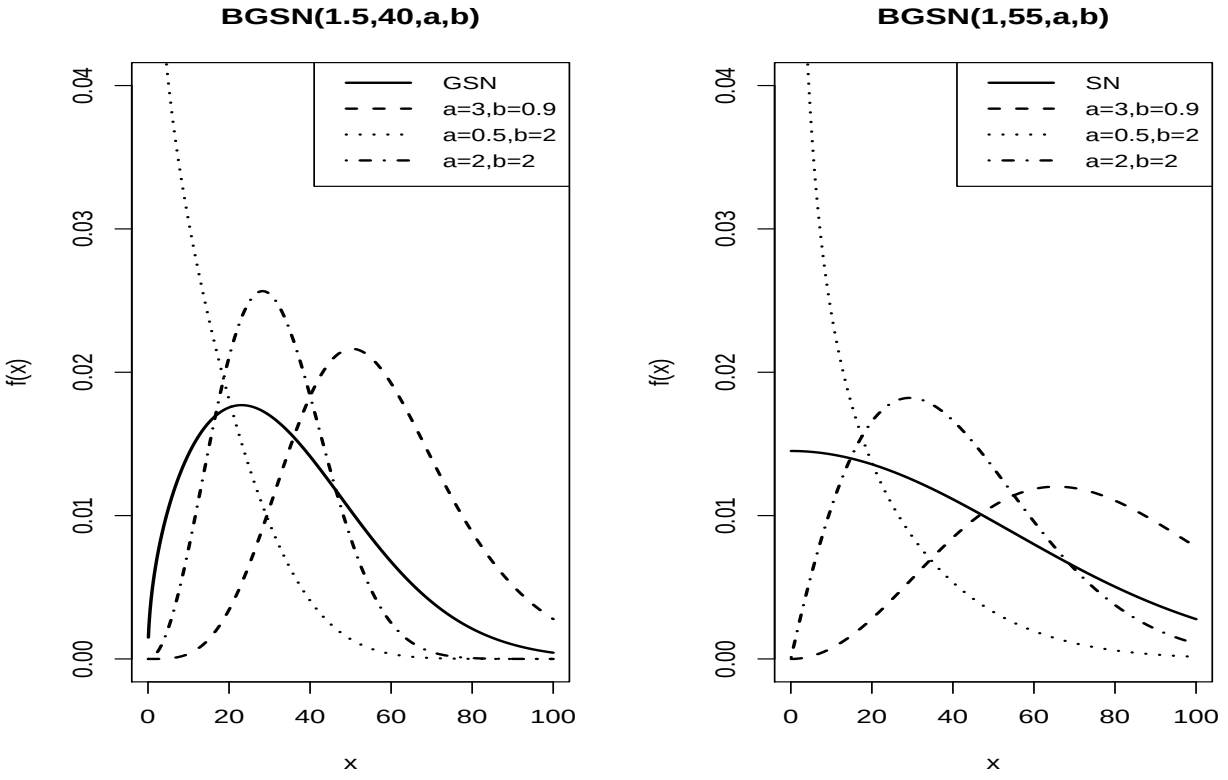

Figura 6 - Gráficos da função densidade (30) para alguns valores dos parâmetros

Substituindo-se a equação (2) nas equações (19) e (20), tem-se a função de distribuição acumulada da distribuição BGSN para $b > 0$ real não-inteiro e real inteiro, respecti-

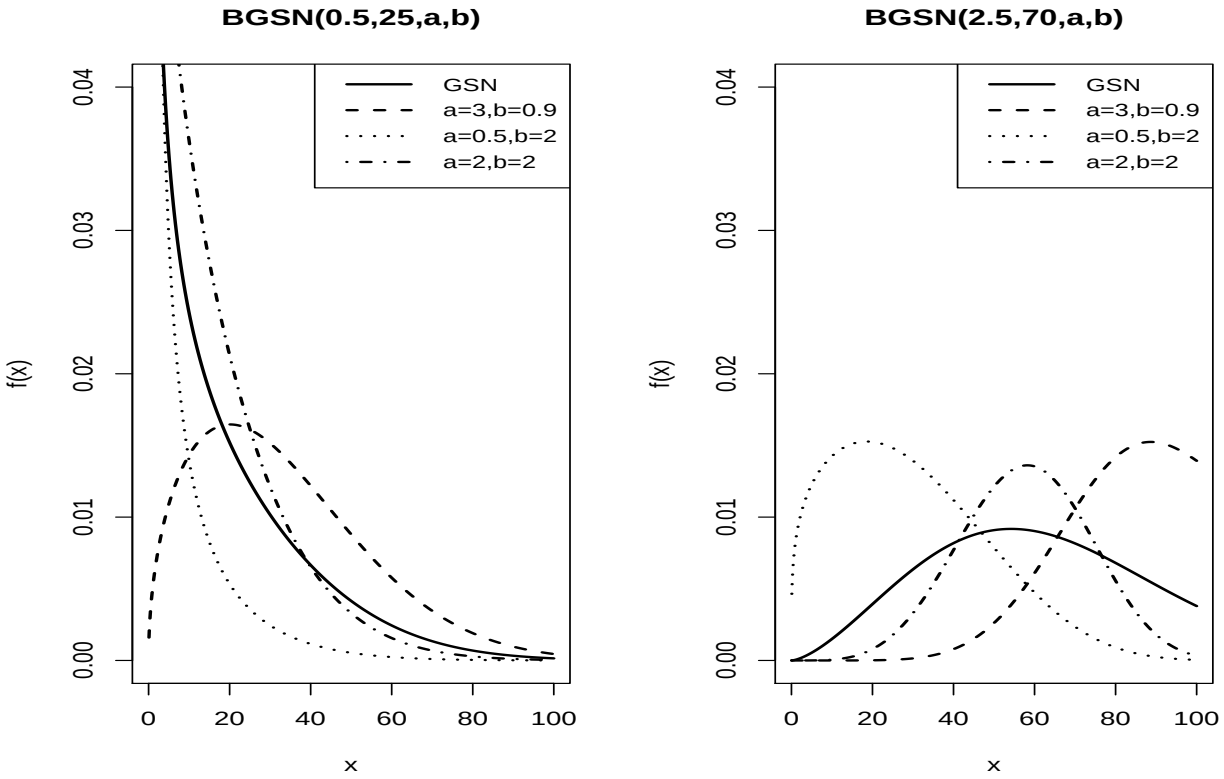

Figura 7 - Gráficos da função densidade (30) para alguns valores dos parâmetros

vamente, dadas por

$$F(x) = \frac{\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right] - 1\}^{a+j}}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}. \tag{32}$$

e

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \binom{b-1}{j} \frac{(-1)^j}{a+j} \left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right] - 1\right\}^{a+j}. \tag{33}$$

As equações (32) e (33) mostram que as propriedades da f.d.a. da distribuição BGSN podem ser discutidas como uma soma ponderada infinita (ou finita) da f.d.a. da distribuição GSN.

Em alternativa à equação (30), substituindo (1) e (2) em (26), tem-se uma nova

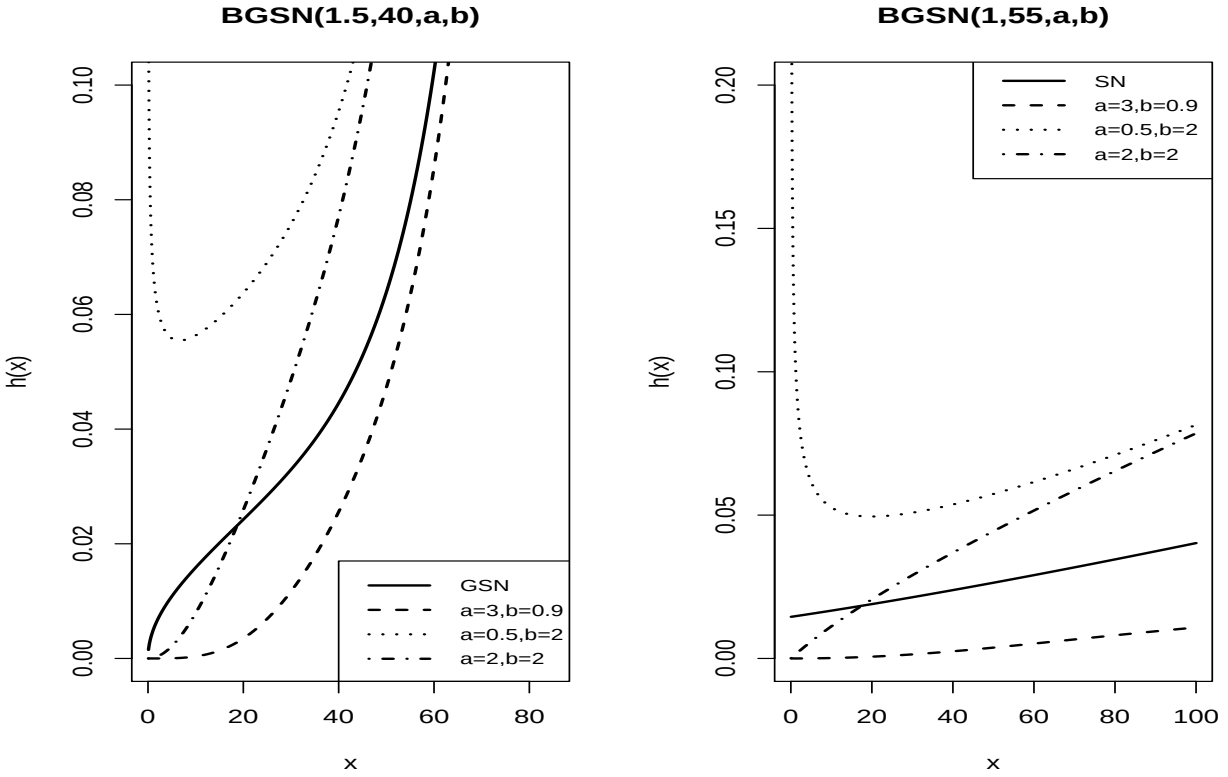

Figura 8 - Gráficos da função de risco (31) para alguns valores dos parâmetros

expressão para a função densidade da distribuição BGSN em termos da função de erro,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\alpha}{x}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} \sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right\}^{r} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\alpha}{x}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} \sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\left\{\operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{\sqrt{2}}\right]\right\}^{r}, \end{aligned} \tag{34}$$

em que a expressão $w(.)$ está definida em (27).

2.2.1.1 Momentos

O s-ésimo momento da distribuição BGSN pode ser obtido pela equação (28), ou seja, em termos do (s,r)-ésimo momento ponderado da distribuição GSN. Nesse caso,

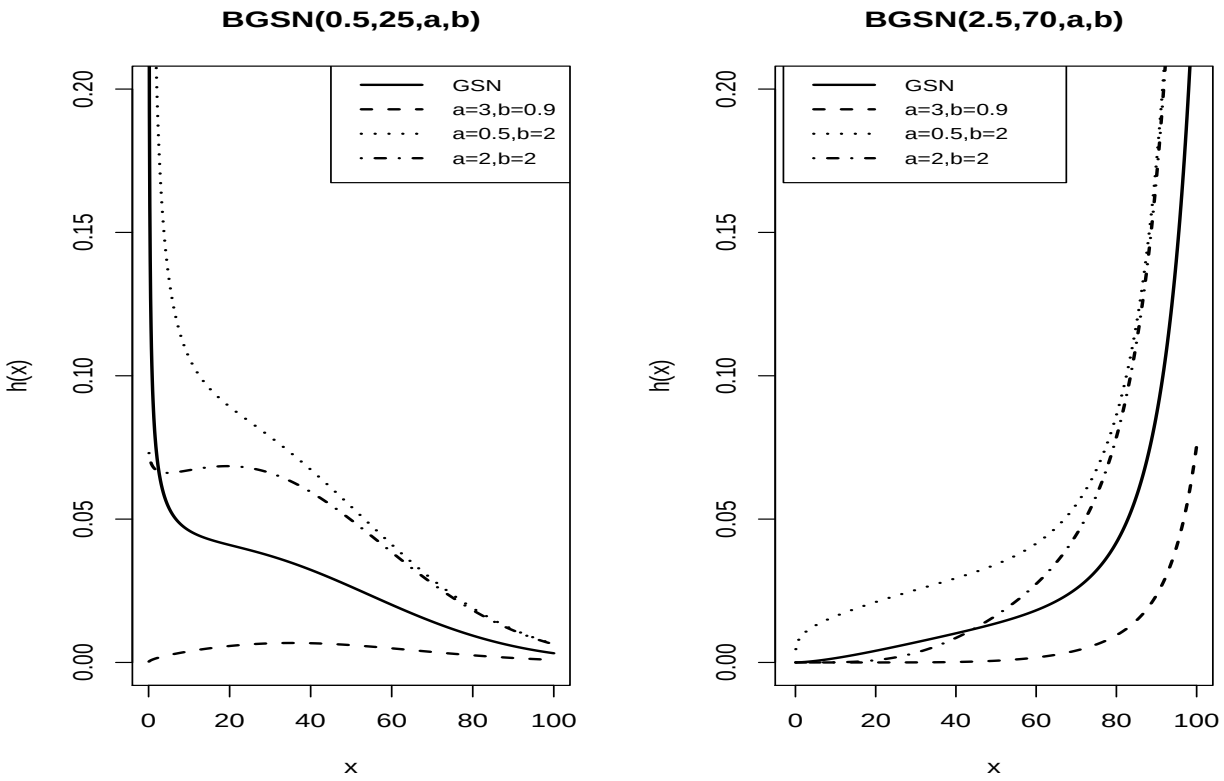

Figura 9 - Gráficos da função de risco (31) para alguns valores dos parâmetros

considerando $b > 0$ um número real não-inteiro, encontra-se

$$\begin{aligned}
\tau_{s,r} &= E[X^s G(X)^r] = \int_0^\infty x^s \; G(x)^r g(x) dx \\
&= \int_0^\infty x^s \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\alpha}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} \left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha\right] - 1\right\}^r dx \\
&= \int_0^\infty x^s \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\alpha}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} \left\{\operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha}{\sqrt{2}}\right]\right\}^r dx \\
&= \alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x^{s-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} \left\{\operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha}{\sqrt{2}}\right]\right\}^r dx,
\end{aligned}$$

e fazendo-se $u = \left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha$, $\tau_{s,r}$ reduz-se a

$$\tau_{s,r} = \theta^s \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u^{\frac{s}{\alpha}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]^r du. \tag{35}$$

Introduzindo-se a expansão em série da função de erro (Nadarajah, 2008)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)m!},$$

a integral da expressão (35) pode ser escrita como

$$I\left(\frac{s}{\alpha}; r\right) = \int_0^{\infty} u^{\frac{s}{\alpha}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m u^{2m+1}}{2^{m+\frac{1}{2}}(2m+1)m!}\right]^r du$$

e, então, por Nadarajah (2008)

$$\begin{aligned} I\left(\frac{s}{\alpha}; r\right) &= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^r \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r}}{2^{m_1+\cdots+m_r+\frac{r}{2}}(2m_1+1)\cdots(2m_r+1)m_1!\cdots m_r!} \\ &\quad \times \int_0^{\infty} u^{2(m_1+\cdots+m_r)+r+\frac{s}{\alpha}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du. \end{aligned} \tag{36}$$

A integral em (36) pode ser calculada utilizando-se softwares matemáticos como, por exemplo, Maple ou Mathematica. Então,

$$\int_0^{\infty} u^{2(m_1+\cdots+m_r)+r+\frac{s}{\alpha}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 2^{m_1+\cdots+m_r+\frac{r+\frac{s}{\alpha}-1}{2}}\ \Gamma\left(m_1+\cdots+m_r+\frac{r+\frac{s}{\alpha}+1}{2}\right).$$

Logo, a equação (36) torna-se

$$\begin{aligned} I\left(\frac{s}{\alpha}; r\right) &= \pi^{-\frac{r}{2}} 2^{\frac{3r}{2}+\frac{s}{2\alpha}-\frac{1}{2}} \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r}}{(m_1+1/2)\cdots(m_r+1/2)m_1!\cdots m_r!} \\ &\quad \times \Gamma\left(m_1+\cdots+m_r+\frac{r+\frac{s}{\alpha}+1}{2}\right). \end{aligned} \tag{37}$$

Substituindo-se a expressão (37) na expressão (35), o (s,r)-ésimo momento ponderado da distribuição GSN é dado por

$$\begin{aligned} \tau_{s,r} &= \theta^s \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \pi^{-\frac{r}{2}} 2^{\frac{3r}{2}+\frac{s}{2\alpha}-\frac{1}{2}} \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r}}{(m_1+1/2)\cdots(m_p+1/2)m_1!\cdots m_r!} \\ &\quad \times \Gamma\left(m_1+\cdots+m_r+\frac{r+\frac{s}{\alpha}+1}{2}\right). \end{aligned} \tag{38}$$

Portanto, substituindo-se a equação (38) em (28), obtém-se a expressão do s-ésimo momento da distribuição BGSN, ou seja,

$$\begin{aligned} \mu'_s &= \theta^s \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\ \pi^{-\frac{r}{2}} 2^{\frac{3r}{2}+\frac{s}{2\alpha}-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r}}{(m_1+1/2)\cdots(m_r+1/2)m_1!\cdots m_r!} \\ &\quad \times \Gamma\left(m_1+\cdots+m_r+\frac{r+\frac{s}{\alpha}+1}{2}\right). \end{aligned} \tag{39}$$

Observa-se que quando $r+\frac{s}{\alpha}$ for um número par, a equação (37) pode ser escrita em termos da função de Lauricella do tipo A (Exton, 1978; Aarts, 2000) definida por

$$F_A^{(n)}(a;b_1,\ldots,b_n;c_1,\ldots,c_n;x_1,\ldots,x_n)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_1+\cdots+m_n}(b_1)_{m_1}\ldots(b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1}\ldots(c_n)_{m_n}}\frac{x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}}{m_1!\ldots m_{n!}},$$

em que $(a)_k=a(a-1)\ldots(a-k+1)$ é o fatorial ascendente (com a convenção que $(a)_0=1$). Rotinas numéricas para o cálculo direto da função de Lauricella do tipo A estão disponíveis em Exton (1978) e Mathematica (Trott, 2006). Então,

$$I\left(\frac{s}{\alpha};r\right)=\pi^{-\frac{r}{2}}2^{\frac{3r}{2}+\frac{s}{2\alpha}-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{r+\frac{s}{\alpha}+1}{2}\right)F_A^{(r)}\left(\frac{r+\frac{s}{\alpha}+1}{2};\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2};\frac{3}{2},\ldots,\frac{3}{2};-1,\ldots,-1\right).$$

Portanto, o (s,r)-ésimo momento ponderado da distribuição GSN pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\tau_{s,r} &= \theta^s\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\pi^{-\frac{r}{2}}2^{\frac{3r}{2}+\frac{s}{2\alpha}-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{r+\frac{s}{\alpha}+1}{2}\right)\\ &\quad\times F_A^{(r)}\left(\frac{r+\frac{s}{\alpha}+1}{2};\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2};\frac{3}{2},\ldots,\frac{3}{2};-1,\ldots,-1\right).\end{aligned}\tag{40}$$

Consequentemente, μ_s' da distribuição BGSN pode ser escrito em termos da função de Lauricella do tipo A

$$\begin{aligned}\mu_s' &= \theta^s\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}w_{j,k,r}(a,b)\,\pi^{-\frac{r}{2}}2^{\frac{3r}{2}+\frac{s}{2\alpha}-\frac{1}{2}}\\ &\quad\times F_A^{(r)}\left(\frac{r+\frac{s}{\alpha}+1}{2};\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2};\frac{3}{2},\ldots,\frac{3}{2};-1,\ldots,-1\right).\end{aligned}\tag{41}$$

As medidas de assimetria e curtose podem ser calculadas utilizando as equações (8) e (9). As representações gráficas dessas medidas quando $\theta=55$ e $\alpha=1$, como função do parâmetro a para alguns valores escolhidos do parâmetro b e como uma função do parâmetro b para alguns valores escolhidos do parâmetro a, são dadas nas Figuras 10 e 11, respectivamente. Essas Figuras revelam imediatamente que a assimetria e a curtose aumentam à medida que b aumenta para o parâmetro a fixo e diminuem à medida que a aumenta para o parâmetro b fixo.

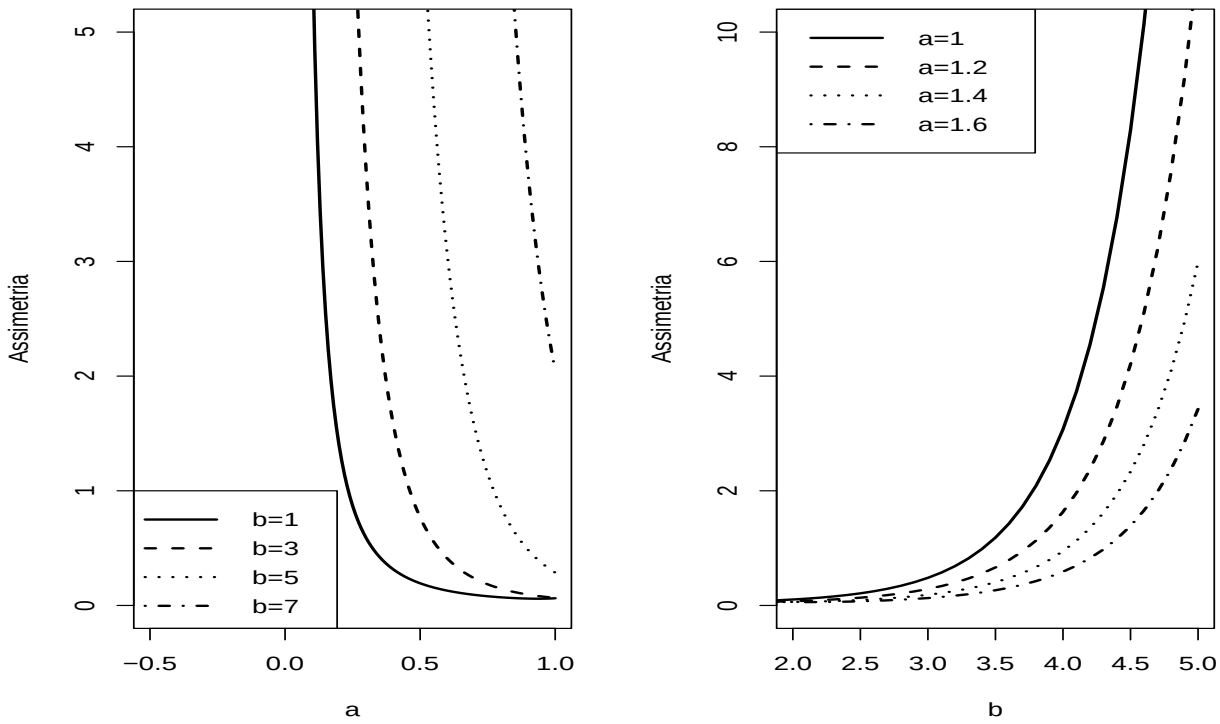

Figura 10 - Gráficos dos valores dos coeficientes de assimetria da distribuição BGSN como função de a para alguns valores de b e como função de b para alguns valores de a

2.2.1.2 Função Geradora de Momentos

Usando-se a função densidade $f(x)$ expressa pela equação (34), obtém-se a função geradora de momentos (fgm) da distribuição BGSN, ou seja,

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_0^\infty e^{tx}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\alpha}{x}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} \sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\left\{\text{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha}{\sqrt{2}}\right]\right\}^r dx \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\int_0^\infty e^{tx}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\alpha}{x}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left\{\text{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha}{\sqrt{2}}\right]\right\}^r dx. \qquad (42) \end{aligned}$$

Utilizando-se a expansão em série de Maclaurin da função exponencial, isto é,

$$e^x = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^p}{p!},$$

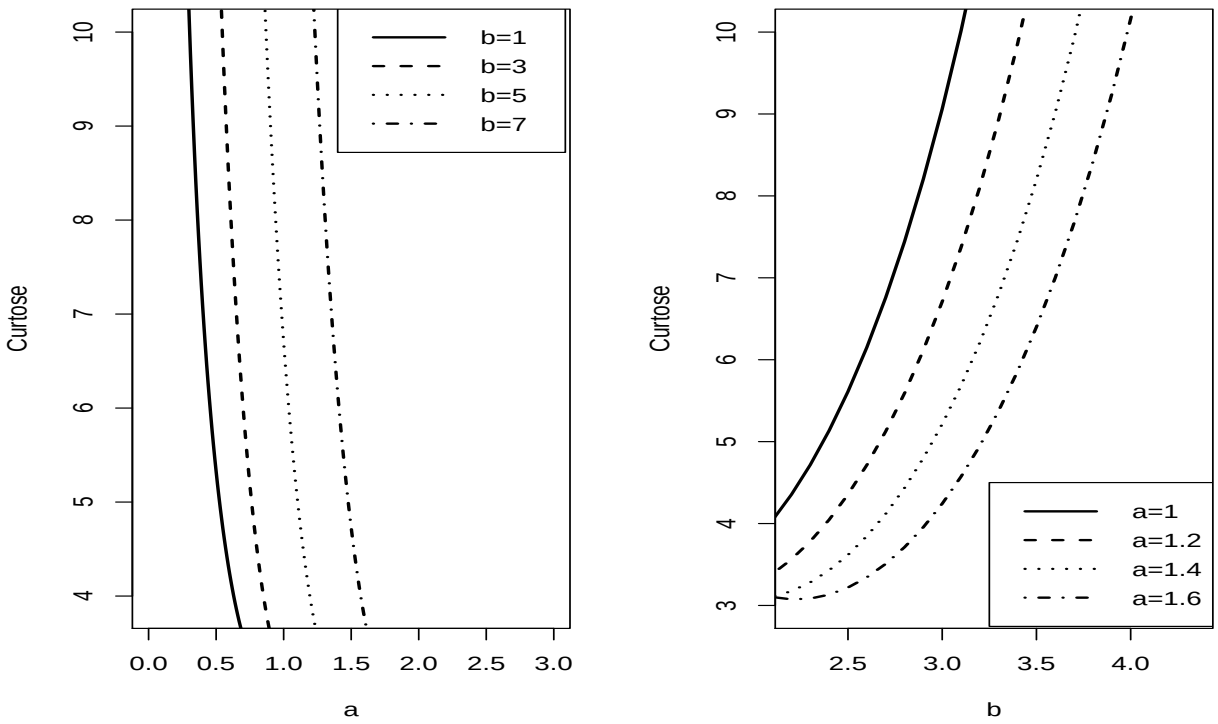

Figura 11 - Gráficos dos valores dos coeficientes de curtose da distribuição BGSN como função de a para alguns valores de b e como função de b para alguns valores de a

a equação (42) pode ser escrita como

$$M(t) = \alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \int_0^{\infty} x^{p-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} \left\{ \text{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{\sqrt{2}}\right]\right\}^r dx,$$

e substituindo $u = \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}$, encontra-se

$$M(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\theta^p t^p}{p!} \int_0^{\infty} u^{\frac{p}{\alpha}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \left[\text{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]^r du. \tag{43}$$

A integral da expressão (43) pode ser escrita como (Nadarajah, 2008)

$$I\left(\frac{p}{\alpha}; r\right) = \int_0^{\infty} u^{\frac{p}{\alpha}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m u^{2m+1}}{2^{m+\frac{1}{2}}(2m+1)m!}\right]^r du$$

e, então,

$$
\begin{aligned}
I\left(\frac{p}{\alpha};r\right) &= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^r \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\ldots+m_r}}{2^{m_1+\ldots+m_r+\frac{r}{2}}(2m_1+1)\ldots(2m_r+1)m_1!\ldots m_r!} \\
&\quad \times \int_0^{\infty} u^{2(m_1+\ldots+m_r)+r+\frac{p}{\alpha}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du. \qquad (44)
\end{aligned}
$$

A integral em (44) torna-se

$$
\int_0^{\infty} u^{2(m_1+\cdots+m_r)+r+\frac{p}{\alpha}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 2^{m_1+\cdots+m_r+\frac{r+\frac{p}{\alpha}-1}{2}}\ \Gamma\left(m_1+\cdots+m_r+\frac{r+\frac{p}{\alpha}+1}{2}\right).
$$

Portanto, a equação (44) reduz-se a

$$
\begin{aligned}
I\left(\frac{p}{\alpha};r\right) &= \pi^{-\frac{r}{2}} 2^{r+\frac{p}{2\alpha}-\frac{3}{2}} \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r}}{(m_1+1/2)\cdots(m_r+1/2)m_1!\cdots m_r!} \\
&\quad \times\Gamma\left(m_1+\cdots+m_r+\frac{r+\frac{p}{\alpha}+1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Consequentemente, a função geradora de momentos da distribuição BGSN assume a forma

$$
\begin{aligned}
M(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\ \pi^{-\frac{r}{2}} 2^{r+\frac{p}{2\alpha}-\frac{3}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\theta^p t^p}{p!} \\
&\quad \times \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r}}{(m_1+1/2)\cdots(m_r+1/2)m_1!\cdots m_r!} \\
&\quad \times\Gamma\left(m_1+\cdots+m_r+\frac{r+\frac{p}{\alpha}+1}{2}\right). \qquad (45)
\end{aligned}
$$

2.2.1.3 Expansões para os Momentos de Estatística de Ordem

Momentos de estatísticas de ordem desempenham um importante papel no teste de controle de qualidade e confiabilidade, em que o pesquisador precisa predizer a falha futura baseada no tempo de início das falhas.

Considere uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição BGSN. A expressão da i-ésima estatística de ordem $X_{i:n}$ pode ser escrita como

$$
f_{i:n}(x) = \frac{f(x)}{B(i,n-i+1)} F(x)^{i-1} \left\{1-F(x)\right\}^{n-i},
$$

para $i = 1,\ldots,n$. Usando-se (16) e (17), a função densidade $f_{i:n}(x)$ pode ser escrita em termos da razão da função beta incompleta, isto é,

$$
f_{i:n}(x) = \frac{n!g(x)}{(i-1)!(n-i)!B(a,b)} G(x)^{a-1}[1-G(x)]^{b-1} \left[I_{G(x)}(a,b)\right]^{i-1} \left[1-I_{G(x)}(a,b)\right]^{n-i}. \quad (46)
$$

A f.d.a. da i-ésima estatística de ordem $X_{i:n}$, $F_{i:n}(x)$, é dada por

$$F_{i:n}(x) = \sum_{r=i}^{n} \binom{n}{r} I_{G_{(x)}(a,b)}{}^{r} I_{[1-G_{(x)}]}(b,a)^{n-r}.$$

Substituindo-se (30) e (32) na equação (46), a função densidade $f_{i:n}(x)$ para $b > 0$ real não-inteiro torna-se

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\alpha}{x}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} 2^{b-1}\left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right\}^{a-1}\left\{1-\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{b-1}}{B(a,b)B(i,n-1+i)} \\ &\times\left[\frac{\Gamma(b)}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\}^{a+j}}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}\right]^{i-1} \\ &\times\left[1-\frac{\Gamma(b)}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\}^{a+j}}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}\right]^{n-i} \end{aligned} \tag{47}$$

Utilizando-se a expansão binomial na expressão (47), encontra-se

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\alpha}{x}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} 2^{b-1}\left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right\}^{a(i+k)-1}\left\{1-\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{b-1}\Gamma(b)^{i-1}}{B(a,b)^{i}B(i,n-1+i)} \\ &\times\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\}^{j}}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}\right]^{i-1} \\ &\times\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{n-i}{k}\frac{\Gamma(b)^k}{B(a,b)^k}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\}^{j}}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}\right]^{k} \end{aligned}$$

e, então, pode-se reescrever a última equação como

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \sum_{k=0}^{n-i}\frac{(-1)^k\binom{n-i}{k}\Gamma(b)^{i+k-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\alpha}{x}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} 2^{b-1}\left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right\}^{a(i+k)-1}}{B(a,b)^{i+k}B(i,n-1+i)\left\{1-\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{-(b-1)}} \\ &\times\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\}^{j}}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}\right]^{i+k-1}. \end{aligned} \tag{48}$$

Seja a expressão

$$A = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\}^{j}}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}, \tag{49}$$

e seja $u = \left(\dfrac{x}{\theta}\right)^{\alpha}$. Pela substituição da equação (2) em (49), obtém-se

$$A = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\left[\operatorname{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]^{j}}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}. \tag{50}$$

Utilizando-se a expansão em série da função de erro (Nadarajah, 2008) na equação (50) encontra-se

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^j \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m u^{2m+1}}{2^{m+\frac{1}{2}}(2m+1)m!} \right]^j}{\Gamma(b-j)j!(a+j)} \right\}. \tag{51}$$

Consequentemente, fazendo-se a expansão da série de potência em (51) obtém-se

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^j \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^j \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_j} \; u^{2(m_1+\cdots+m_j)}}{2^{m_1+\cdots+m_j+\frac{j}{2}}(2m_1+1)\cdots(2m_j+1)m_1!\cdots m_j!} \right]}{\Gamma(b-j)j!(a+j)} u^j \right\}. \tag{52}$$

Utilizando-se a identidade $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,n} x^k$ (Gradshteyn e Ryzhik, 2000), em que o termo a_k pode ser obtido por meio da equação (52) com a quantidade correspondente, que é elevada à potência $i+k-1$ na equação (48), obtém-se, então,

$$a_k = \frac{(-1)^k \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^k \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_k} \; u^{2(m_1+\cdots+m_k)}}{2^{m_1+\cdots+m_k+\frac{k}{2}}(2m_1+1)\cdots(2m_k+1)m_1!\cdots m_k!} \right]}{\Gamma(b-k)k!(a+k)},$$

$$c_{0,n} = a_0^n \qquad \text{e} \qquad c_{k,n} = (ka_0)^{-1} \sum_{l=1}^{k} (nl-k+l) a_l c_{k-l,n}$$

para $k = 1, 2, \ldots$.

Utilizando-se a identidade $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,n} x^k$ na equação (48), no caso em que as potências envolvidas dependem da f.d.a. da distribuição GSN, pode-se encontrar

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) \;=\; & \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(-1)^k \binom{n-i}{k} \Gamma(b)^{i+k-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\alpha}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} 2^{b-1} \left\{ 2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right] - 1 \right\}^{a(i+k)-1}}{B(a,b)^{i+k} B(i, n-1+i) \left\{ 1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right] \right\}^{-(b-1)}} \\ & \times \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,i+k-1} \left\{ 2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right] - 1 \right\}^j, \end{aligned}$$

em que $c_{j,i+k-1} = \dfrac{a\Gamma(b)}{j}\displaystyle\sum_{l=1}^{j}\dfrac{(-1)^l[l(i+k)-j]}{\Gamma(b-l)l!(a+l)}c_{j-l,i+k-1}$. Portanto,

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \sum_{k=0}^{n-i}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\binom{n-i}{k}\Gamma(b)^{i+k-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\alpha}{x}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}2^{b-1}\left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right\}^{a(i+k)+j-1}}{B(a,b)^{i+k}B(i,n-1+i)\left\{1-\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{-(b-1)}} \\ &\quad\times\frac{a\Gamma(b)}{j}\sum_{l=1}^{j}\frac{(-1)^l[l(i+k)-j]}{\Gamma(b-l)l!(a+l)}c_{j-l,i+k-1}. \end{aligned}$$

Pode-se reescrever a função densidade da i-ésima estatística de ordem da distribuição BGSN como

$$f_{i:n}(x) = \sum_{k=0}^{n-i}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\binom{n-i}{k}\Gamma(b)^{i+k-1}B[a(i+k)+j,b]d_{i,j,k}}{B(a,b)^{i+k}B(i,n-1+i)}f_{i,j,k}(x), \tag{53}$$

em que

$$f_{i,j,k}(x) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\alpha}{x}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}2^{b-1}}{B[a(i+k)+j,b]}\left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right\}^{a(i+k)+j-1}\left\{1-\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{b-1}$$

representa a função densidade da distribuição BGSN$(\alpha,\theta,a(i+k)+j,b)$ e as constantes $d_{i,j,k}$ são obtidas por

$$d_{i,0,k} = \left\{\frac{1}{a\Gamma(b)}\right\}^{i+k-1} \quad \text{e} \quad d_{i,j,k} = \frac{a\Gamma(b)}{j}\sum_{l=1}^{j}\frac{(-1)^l\{l(i+k)-j\}}{\Gamma(b-l)l!(a+l)}c_{j-l,i+k-1},\ \ j\geq 1.$$

A função densidade da i-ésima estatística de ordem da distribuição BGSN pode ser escrita como uma mistura infinita de densidades da distribuição BGSN. Dessa maneira, os momentos centrais e ordinários de estatística de ordem seguem, diretamente, as quantidades correspondentes da distribuição BGSN na Seção (2.2.1.1). Para $b>0$ inteiro, a expressão (53) é válida, mas a soma em j para $i+k-1$ é interrompida em $(b-1)$.

Uma expansão alternativa para a função densidade da estatística de ordem segue a identidade $\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}a_i\right)^k = \displaystyle\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_k=0}^{\infty}a_{m_1}\ldots a_{m_k}$ para k inteiro positivo. Usando essa identi-

dade na equação (48), para $b > 0$ real não-inteiro, obtém-se

$$
\begin{aligned}
f_{i:n}(x) &= \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(-1)^k \binom{n-i}{k} \Gamma(b)^{i+k-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\alpha}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} 2^{b-1} \left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right\}^{a(i+k)-1}}{B(a,b)^{i+k} B(i,n-1+i) \left\{1-\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{-(b-1)}} \\
&\quad \times \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_{i+k-1}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1} \{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\}^{m_1}}{\Gamma(b-m_1) m_1! (a+m_1)} \cdots \frac{(-1)^{m_{i+k-1}} \{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\}^{m_{i+k-1}}}{\Gamma(b-m_{i+k-1}) m_{i+k-1}! (a+m_{i+k-1})} \\
&= \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(-1)^k \binom{n-i}{k} \Gamma(b)^{i+k-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\alpha}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} 2^{b-1} \left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right\}^{a(i+k)-1}}{B(a,b)^{i+k} B(i,n-1+i) \left\{1-\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{-(b-1)}} \\
&\quad \times \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_{i+k-1}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\sum_{j=1}^{i+k-1} m_j} \{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\}^{\sum_{j=1}^{i+k-1} m_j}}{\prod_{j=1}^{i+k-1} \Gamma(b-m_j) m_j! (a+m_j)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_{i+k-1}=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\alpha}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} 2^{b-1} \left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right\}^{\left[a(i+k)+\sum_{j=1}^{i+k-1} m_j\right]-1}}{B(a,b)^{i+k} B(i,n-i+1) \left\{1-\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{-(b-1)}} \\
&\quad \times \frac{(-1)^{k+\sum_{j=1}^{i+k-1} m_j} \binom{n-i}{k} \Gamma(b)^{i+k-1}}{\prod_{j=1}^{i+k-1} \Gamma(b-m_j) m_j! (a+m_j)}.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
f_{i:n}(x) = \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_{i+k-1}=0}^{\infty} \xi_{i,k} f_{i,k}(x), \tag{54}
$$

em que

$$
f_{i,k}(x) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\alpha}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} 2^{b-1}}{B[a(i+k)+\sum_{j=1}^{i+k-1} m_j, b]} \left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right\}^{\left[a(i+k)+\sum_{j=1}^{i+k-1} m_j\right]-1} \left\{1-\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{b-1}
$$

representa a função densidade da distribuição BGSN$(\alpha, \theta, a(i+k)+\sum_{j=1}^{i+k-1} m_j, b)$ e

$$
\xi_{i,k} = \frac{(-1)^{k+\sum_{j=1}^{i+k-1} m_j} \binom{n-i}{k} B(a(i+k)+\sum_{j=1}^{i+k-1} m_j, b) \Gamma(b)^{i+k-1}}{B(a,b)^{i+k} B(i,n-i+1) \prod_{j=1}^{i+k-1} \Gamma(b-m_j) m_j! (a+m_j)}.
$$

As constantes $\xi_{i,k}$ são obtidas por meio de i, n, k e da sequência de índices $m_1, \ldots, m_{i+k-1}$. As somas em (54) estendem-se por todas as $(i+k)$-uplas $(k, m_1, \ldots, m_{i+k-1})$ de inteiros não-negativos e podem ser implementadas por meio dos software matemáticos como, por exemplo, Maple e o Mathematica. Se $b > 0$ é um inteiro, a equação (54) é válida mas os índices $m_1, \ldots, m_{i+k-1}$ variam de zero até $b-1$.

O s-ésimo momento de estatística de ordem da distribuição BGSN para $b > 0$ real não-inteiro pode ser escrito por meio da equação (53), ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{i:n}^s) &= \int_0^\infty x^s f_{i:n}(x)dx \\
&= \int_0^\infty x^s \sum_{k=0}^{n-i}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\binom{n-i}{k}\Gamma(b)^{i+k-1}B(a(i+k)+j,b)d_{i,j,k}}{B(a,b)^{i+k}B(i,n-i+1)} f_{i,j,k}(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-i}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\binom{n-i}{k}\Gamma(b)^{i+k-1}B(a(i+k)+j,b)d_{i,j,k}}{B(a,b)^{i+k}B(i,n-i+1)} \int_0^\infty x^s f_{i,j,k}(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-i}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\binom{n-i}{k}\Gamma(b)^{i+k-1}B(a(i+k)+j,b)d_{i,j,k}}{B(a,b)^{i+k}B(i,n-i+1)} \mathrm{E}(X_{i,j,k}^s), \qquad (55)
\end{aligned}$$

em que $X_{i,j,k} \sim$ BGSN $(\alpha, \theta, a(i+k)+j, b)$ e $\mathrm{E}(X_{i,j,k}^s)$ é o s-ésimo momento da distribuição BGSN. Se $b > 0$ é um inteiro, a soma em j varia de zero até $b-1$.

Por meio da equação (54), obtém-se uma expressão alternativa para os momentos de estatística de ordem válida para $b > 0$ real não-inteiro,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{i:n}^s) &= \int_0^\infty x^s f_{i:n}(x)dx \\
&= \int_0^\infty x^s \sum_{k=0}^{n-i}\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_{i+k-1}=0}^{\infty} \xi_{i,k} f_{i,k}(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-i}\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_{i+k-1}=0}^{\infty} \xi_{i,k} \int_0^\infty x^s f_{i,k}(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-i}\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_{i+k-1}=0}^{\infty} \xi_{i,k}\ \mathrm{E}(X_{i,k}^s), \qquad (56)
\end{aligned}$$

em que $X_{i,k} \sim BGSN(\alpha, \theta, a(i+k) + \sum_{j=1}^{i+k-1} m_j, b)$. Para $b > 0$ inteiro, os índices $m_1, \ldots, m_{i+k-1}$ variam de zero até $b-1$.

Através das equações (55) e (56) podem-se obter os momentos de estatística de ordem da distribuição beta generalizada semi-normal.

2.2.1.4 L-Momentos

Os L-momentos são análogos aos momentos ordinários, mas podem ser estimados pela combinação linear das estatísticas de ordem. Eles são definidos por Hosking (1990) como

funções lineares do valor esperado das estatísticas de ordem, isto é,

$$\lambda_{r+1} = r(r+1)^{-1} \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^k}{k} \mathrm{E}(X_{r+1-k:r+1}),\ r = 0, 1, \ldots$$

Os quatro primeiros L-momentos são: $\lambda_1 = \mathrm{E}(X_{1:1})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\mathrm{E}(X_{2:2} - X_{1:2})$, $\lambda_3 = \frac{1}{3}\mathrm{E}(X_{3:3} - 2X_{2:3} + X_{1:3})$ e $\lambda_4 = \frac{1}{4}\mathrm{E}(X_{4:4} - 3X_{3:4} + 3X_{2:4} - X_{1:4})$. Os L-momentos possuem a vantagem de existirem sempre que a média da distribuição exista, e são, relativamente, robustos para os efeitos de "outliers".

Para as expansões dos momentos de estatística de ordem dadas anteriormente, podem-se obter expansões para os L-momentos da distribuição BGSN como uma combinação linear ponderada (infinita e finita) das esperanças da distribuição BGSN.

2.2.1.5 Desvios Médios

A quantidade de dispersão em uma população pode ser medida pela totalidade dos valores absolutos dos desvios em relação à média (no caso de uma distribuição simétrica) ou em relação à mediana (no caso de uma distribuição assimétrica). Se X é uma variável aleatória com distribuição BGSN com média $\mu = \mathrm{E}[X]$ e mediana M, então o desvio médio em relação à média e o desvio médio em relação à mediana são definidos, respectivamente, por

$$\delta_1 = \int_0^\infty |x - \mu|\ f(x)\ dx \quad \text{e} \quad \delta_2 = \int_0^\infty |x - M|\ f(x)\ dx.$$

O desvio médio em relação à média pode ser simplificado como

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \int_0^\infty |x - \mu|\ f(x)\ dx \\
&= \int_0^\mu (\mu - x)\ f(x)\ dx + \int_\mu^\infty (x - \mu)\ f(x)\ dx \\
&= \int_0^\mu (\mu - x)\ f(x)\ dx + \int_0^\infty (x - \mu)\ f(x)\ dx - \int_0^\mu (x - \mu)\ f(x)\ dx \\
&= 2 \int_0^\mu (\mu - x)\ f(x)\ dx \\
&= 2\mu F(\mu) - 2 \int_0^\mu x\ f(x)\ dx. \qquad (57)
\end{aligned}$$

Similarmente, o desvio médio em relação à mediana pode ser simplificado como

$$\begin{aligned}
\delta_2 &= \int_0^{\infty} |x-M|\ f(x)\ dx \\
&= \int_0^{M} (M-x)\ f(x)\ dx + \int_M^{\infty} (x-M)\ f(x)\ dx \\
&= \int_0^{M} (M-x)\ f(x)\ dx + \int_0^{\infty} (x-M)\ f(x)\ dx - \int_0^{M} (x-M)\ f(x)\ dx \\
&= 2\int_0^{M} (M-x)\ f(x)\ dx + \int_0^{\infty} x\ f(x)\ dx - M\int_0^{\infty} f(x)\ dx \\
&= \mathrm{E}[X] + 2MF(M) - M - 2\int_0^{M} x\ f(x)\ dx. \qquad (58)
\end{aligned}$$

Calculando a integral na equação (57) pode-se obter o desvio médio em relação à média para a distribuição BGSN, em que a função densidade é dada pela equação (30). Então,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\mu} x\ f(x)\ dx &= \int_0^{\mu} \alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}} \sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\left\{\mathrm{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{\sqrt{2}}\right]\right\}^{r} dx \\
&= \alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\int_0^{\mu}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left\{\mathrm{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{\sqrt{2}}\right]\right\}^{r} dx.
\end{aligned}$$

Utilizando a mudança de variável $u = \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}$, encontra-se

$$\int_0^{\mu} x\ f(x)\ dx = \theta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\int_0^{\left(\frac{\mu}{\theta}\right)^{\alpha}} u^{\frac{1}{\alpha}}\ e^{-\frac{u^2}{2}}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]^{r} du.$$

Considerando a expansão da função de erro (Nadarajah, 2008) obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_0^{\mu} x\ f(x)\ dx &= \theta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\int_0^{\left(\frac{\mu}{\theta}\right)^{\alpha}} u^{\frac{1}{\alpha}}\ e^{-\frac{u^2}{2}}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)m!}\right]^{r} du \\
&= \theta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{r} \\
&\quad\times\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r}}{2^{m_1+\cdots+m_r+\frac{r}{2}}(2m_1+1)\cdots(2m_r+1)m_1!\cdots m_r!} \\
&\quad\times\int_0^{\left(\frac{\mu}{\theta}\right)^{\alpha}} u^{2(m_1+\cdots+m_r)+r+\frac{1}{\alpha}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right). \qquad (59)
\end{aligned}$$

Utilizando a mudança de variável $v = \dfrac{u^2}{2}$ na integral em (59) encontra-se

$$\begin{aligned}
\int_0^{\mu} x\ f(x)\ dx &= \theta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^r \\
&\times \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r}}{2^{m_1+\cdots+m_r+\frac{r}{2}}(2m_1+1)\cdots(2m_r+1)m_1!\cdots m_r!} \\
&\times 2^{\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\theta}\right)^{2\alpha}} v^{m_1+\cdots+m_r+\frac{r}{2}+\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2}-1}\exp(-v)dv. \qquad (60)
\end{aligned}$$

Observa-se que a integral em (60) pode ser escrita em termos da função gama incompleta, ou seja,

$$\gamma\left[\left(m_1+\cdots+m_r+\frac{r}{2}+\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2}-1\right);\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\theta}\right)^{2\alpha}\right] = \int_0^{\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\theta}\right)^{2\alpha}} v^{m_1+\cdots+m_r+\frac{r}{2}+\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2}-1}\exp(-v)\ dv.$$

Portanto, o desvio médio em relação à média, δ_1, da distribuição BGSN é dado por

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= 2\mu F(\mu) - \left\{\frac{4\theta}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\ \pi^{-\frac{r}{2}}\ 2^{r+\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2}}\right. \\
&\times \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r}}{2^{m_1+\cdots+m_r+\frac{r}{2}}(2m_1+1)\cdots(2m_r+1)m_1!\cdots m_r!} \\
&\times \left.\gamma\left[\left(m_1+\cdots+m_r+\frac{r}{2}+\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2}-1\right);\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\theta}\right)^{2\alpha}\right]\right\}. \qquad (61)
\end{aligned}$$

De forma similar, o desvio médio em relação à mediana para a distribuição BGSN pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\delta_2 &= \mathrm{E}[X] + 2MF(M) - M - \left\{\frac{4\theta}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\ \pi^{-\frac{r}{2}}\ 2^{r+\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2}}\right. \\
&\times \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r}}{2^{m_1+\cdots+m_r+\frac{r}{2}}(2m_1+1)\cdots(2m_r+1)m_1!\cdots m_r!} \\
&\times \left.\gamma\left[\left(m_1+\cdots+m_r+\frac{r}{2}+\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2}-1\right);\frac{1}{2}\left(\frac{M}{\theta}\right)^{2\alpha}\right]\right\}. \qquad (62)
\end{aligned}$$

2.2.1.6 Entropia

A entropia de uma variável aleatória X, com função densidade $f(x)$, é uma medida da variação da incerteza. Essa medida tem sido utilizada em várias situações nas

ciências e nas engenharias, e por muitas vezes a entropia foi estudada e comparada na literatura. Uma medida de entropia é a chamada entropia de Rényi denotada por

$$\jmath_R(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma} \log \left[\int f^{\gamma}(x)\ dx \right],\ \gamma > 0\ e\ \gamma \neq 1. \tag{63}$$

Considerando a função densidade da distribuição BGSN dada pela equação (30) e para qualquer γ tal que $\gamma > 0\ e\ \gamma \neq 1$, $f^{\gamma}(x)$ pode ser ecrita como

$$f^{\gamma}(x) = \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{\gamma} \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\gamma} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha\gamma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha\gamma}} 2^{\gamma(b-1)}}{[B(a,b)]^{\gamma}} \left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right] - 1\right\}^{\gamma(a-1)} \left\{1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{\gamma(b-1)}. \tag{64}$$

Utilizando a expansão em série dada pela equação (18) na expressão (64), obtém-se

$$\begin{aligned} \left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right] - 1\right\}^{\gamma(a-1)} &= \left\{1 - 2\left[1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]\right\}^{\gamma(a-1)+1-1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\ \Gamma[\gamma(a-1)+1]\ 2^j}{\Gamma[\gamma(a-1)-j+1]\ j!} \left\{1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{j}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f^{\gamma}(x) &= \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{\gamma} \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\gamma} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha\gamma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha\gamma}} 2^{\gamma(b-1)}}{[B(a,b)]^{\gamma}} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\ \Gamma[\gamma(a-1)+1]\ 2^j}{\Gamma[\gamma(a-1)-j+1]\ j!} \left\{1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{\gamma(b-1)+j}. \end{aligned} \tag{65}$$

Utilizando, novamente, a expansão (18) na equação (65), encontra-se

$$\left\{1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{\gamma(b-1)+j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\ \Gamma[\gamma(b-1)+k+1]}{\Gamma[\gamma(b-1)+j-k+1]k!} \left\{\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{k}.$$

Observa-se que $\Phi(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$, então

$$\left\{\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{k} = \left\{\frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{\sqrt{2}}\right]\right]\right\}^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left\{\left[1 + \operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{\sqrt{2}}\right]\right]\right\}^{k}.$$

Como k é um número inteiro, então, utiliza-se a expansão binomial e obtém-se

$$\left\{1 + \operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{\sqrt{2}}\right]\right\}^{k} = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} \left\{\operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{\sqrt{2}}\right]\right\}^{p}.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
f^{\gamma}(x) &= \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{\gamma}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\gamma}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha\gamma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha\gamma}}}{[B(a,b)]^{\gamma}} \\
&\quad \times \sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{k} t_{j,k,p}(a,b)\left\{\operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{\sqrt{2}}\right]\right\}^{p}, \qquad (66)
\end{aligned}
$$

em que

$$
t_{j,k,p}(a,b) = \frac{(-1)^{j+k+p}\, 2^{\gamma(b-1)+j-k}\, \Gamma[\gamma(a-1)+1]\, \Gamma[\gamma(b-1)+k+1]\, \binom{k}{p}}{[B(a,b)]^{\gamma}\, \Gamma[\gamma(a-1)-j+1]\, \Gamma[\gamma(b-1)+j-k+1] j!k!}.
$$

Então,

$$
\int_0^{\infty} f^{\gamma}(x)\, dx = \alpha^{\gamma}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{\gamma}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{k} t_{j,k,p}(a,b)\int_0^{\infty} x^{-\gamma}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha\gamma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha\gamma}}\left\{\operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{\sqrt{2}}\right]\right\}^{p} dx.
$$

Utilizando a mudança de variável $u = \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha\gamma}$, encontra-se

$$
\int_0^{\infty} f^{\gamma}(x)\, dx = \frac{1}{\gamma}\, \alpha^{\gamma-1}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{\gamma}\theta^{1-\gamma}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{k} t_{j,k,p}(a,b)\int_0^{\infty} u^{\frac{1-\gamma}{\alpha\gamma}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\left\{\operatorname{erf}\left[\frac{u^{\frac{1}{\gamma}}}{\sqrt{2}}\right]\right\}^{p} du. \qquad (67)
$$

Utilizando a expansão em série da função de erro (Nadarajah, 2008) em (67), obtém-se

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f^{\gamma}(x)\, dx &= \frac{1}{\gamma}\, \alpha^{\gamma-1}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{\gamma}\theta^{1-\gamma}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{k} t_{j,k,p}(a,b) \\
&\quad \times \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{p}\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_p}}{2^{m_1+\cdots+m_p+\frac{p}{2}}(2m_1+1)\cdots(2m_p+1)m_1!\cdots m_p!} \\
&\quad \times \int_0^{\infty} u^{\frac{2}{\gamma}(m_1+\cdots+m_p)+\frac{p}{\gamma}+\frac{1-\gamma}{\alpha\gamma}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du. \qquad (68)
\end{aligned}
$$

A integral em (68) torna-se

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} u^{\frac{2}{\gamma}(m_1+\cdots+m_p)+\frac{p}{\gamma}+\frac{1-\gamma}{\alpha\gamma}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du &= 2^{\frac{1}{\gamma}(m_1+\cdots+m_p)+\frac{p}{2\gamma}+\frac{1-\gamma}{2\alpha\gamma}+\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \Gamma\left[\frac{1}{\gamma}(m_1+\cdots+m_p)+\frac{p}{2\gamma}+\frac{1-\gamma}{2\alpha\gamma}+\frac{1}{2}\right].
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f^\gamma(x)\,dx &= \frac{1}{\gamma}\,\alpha^{\gamma-1}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^\gamma \theta^{1-\gamma}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{k} t_{j,k,p}(a,b)\\ &\times\pi^{-\frac{p}{2}}\,2^{\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)(m_1+\cdots+m_p)+\frac{p(1-\alpha)}{2\alpha}+\frac{1-\gamma}{2\alpha\gamma}-\frac{1}{2}}\\ &\times\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_p}}{2^{m_1+\cdots+m_p+\frac{p}{2}}(2m_1+1)\cdots(2m_p+1)m_1!\cdots m_p!}\\ &\times\Gamma\left[\frac{1}{\gamma}(m_1+\cdots+m_p)+\frac{p}{2\gamma}+\frac{1-\gamma}{2\alpha\gamma}+\frac{1}{2}\right]. \qquad (69)\end{aligned}$$

Substituindo a expressão (69) na equação (63), a entropia de Rényi para a distribuição BGSN pode ser dada como

$$\begin{aligned}\jmath_R(\gamma) &= (1-\gamma)^{-1}\{(\gamma-1)\log\alpha+(1-\gamma)\log\theta-\log\gamma\\ &+\log\left\{\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{k} t_{j,k,p}(a,b)\right\}+\left(\frac{\gamma-p}{2}\right)\log\pi\\ &+\left[\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)(m_1+\cdots+m_p)+\frac{p(1-\alpha)}{2\alpha}+\frac{1-\gamma}{2\alpha\gamma}+\frac{\gamma-1}{2}\right]\log 2\\ &+\log\left\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_p}}{2^{m_1+\cdots+m_p+\frac{p}{2}}(2m_1+1)\cdots(2m_p+1)m_1!\cdots m_p!}\right\}\\ &+\log\left\{\Gamma\left[\frac{1}{\gamma}(m_1+\cdots+m_p)+\frac{p}{2\gamma}+\frac{1-\gamma}{2\alpha\gamma}+\frac{1}{2}\right]\right\}\Bigg\}. \qquad (70)\end{aligned}$$

2.2.1.7 Confiabilidade

Muitos trabalhos que envolvem modelos de resistência-tensão possuem o interesse na estimação da confiabilidade $R = Pr(X_2 < X_1)$ quando X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes que pertencem à mesma família univariada de distribuições. A forma algébrica para a confiabilidade tem sido elaborada para a maioria das distribuições padrões conhecidas. No entanto, existem ainda muitas outras distribuições (incluindo generalizações de distribuições conhecidas na literatura) para os quais a forma de R não foi proposta. Quando X_1 e X_2 são variáveis independentes e possuem a mesma distribuição de probabilidade, sabe-se que a expressão da confiabilidade (R) pode ser representada por

$$R = \int_0^\infty f(x)F(x)\,dx. \qquad (71)$$

Substituindo a equação (32) em (71), obtém-se

$$\begin{aligned} R &= \int_0^\infty f(x)\frac{\Gamma(b)}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha\right]-1\}^{a+j}}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}\,dx \\ &= \frac{\Gamma(b)}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}\int_0^\infty f(x)\left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha\right]-1\right\}^{a+j}dx. \end{aligned} \tag{72}$$

Substituindo a equação (34) em (72), e considerando a função acumulada da distribuição GSN escrita em termos da função de erro (ver equação 2), encontra-se

$$\begin{aligned} R &= \alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\frac{\Gamma(b)(-1)^j\ w_{j,k,r}(a,b)}{B(a,b)\Gamma(b-1)j!(a+j)} \\ &\quad\times\int_0^\infty x^{-1}\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left\{\operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha}{\sqrt{2}}\right]\right\}^{a+j+r}dx, \end{aligned} \tag{73}$$

em que $w(.)$ está definido em (27). Utilizando a expansão (18) na equação (73), encontra-se

$$\left\{1-\left[1-\operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha}{\sqrt{2}}\right]\right]\right\}^{a+j+r} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\Gamma(a+j+r+1)}{\Gamma(a+j+r+1-l)l!}\left\{1-\operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha}{\sqrt{2}}\right]\right\}^{l}.$$

Como l é um número inteiro, utiliza-se a expansão binomial e obtém-se

$$\left\{1-\operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha}{\sqrt{2}}\right]\right\}^{l} = \sum_{q=0}^{l}\ (-1)^q\binom{l}{q}\left\{\operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha}{\sqrt{2}}\right]\right\}^{q}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} R &= \alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{l}\frac{(-1)^{j+l+q}\ \Gamma(b)\ \Gamma(a+j+r+1)\binom{l}{q}w_{j,k,r(a,b)}}{B(a,b)\Gamma(b-j)\Gamma(a+j+r+1-l)(a+j)j!l!} \\ &\quad\times\int_0^\infty x^{-1}\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left\{\operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha}{\sqrt{2}}\right]\right\}^{q}dx, \end{aligned} \tag{74}$$

Utilizando a mudança de variável $u=\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha$ na equação (74), tem-se

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{l}\frac{(-1)^{j+l+q}\ \Gamma(b)\ \Gamma(a+j+r+1)\binom{l}{q}w_{j,k,r(a,b)}}{B(a,b)\Gamma(b-j)\Gamma(a+j+r+1-l)(a+j)j!l!} \\ &\quad\times\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]^{q}du. \end{aligned} \tag{75}$$

Utilizando a mudança de variável $z = \text{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)$ na equação (75), encontra-se a expressão da confiabilidade para a distribuição BGSN

$$R = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{l}\frac{(-1)^{j+l+q}\ \Gamma(b)\ \Gamma(a+j+r+1)\binom{l}{q}w_{j,k,r(a,b)}}{B(a,b)\Gamma(b-j)\Gamma(a+j+r+1-l)(a+j)(q+1)j!l!}. \tag{76}$$

Observa-se que a confiabilidade expressa pela equação (76) depende unicamente dos parâmetros a e b.

2.2.1.8 Curvas de Bonferroni e Lorenz

As curvas de Bonferroni e Lorenz são amplamente aplicadas não só em economia para o estudo da renda e da pobreza, mas também em outros campos como em confiabilidade, demografia, seguros e medicina. Para uma variável aleatória X com função inversa da função acumulada dada por $F^{-1}(.)$, as curvas de Bonferroni e Lorenz são definidas por

$$B(p) = \frac{1}{p\mu}\int_0^p F^{-1}(x)dx \quad \text{e} \quad L(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^p F^{-1}(x)dx,$$

respectivamente, em que $\mu = \text{E}[X]$.

Para o caso da distribuição BGSN, necessita-se determinar a inversa da razão da função beta incompleta. Pode ser encontrado no site Wolfram [2] que a inversa da razão da função beta incompleta, $I_z^{-1}(a,b)$, pode ser dada por

$$\begin{aligned} I_z^{-1}(a,b) &= w + \frac{b-1}{a+1}\ w^2 + \frac{(b-1)(a^2+3ba-a+5b-4)}{2(a+1)^2(a+2)}\ w^3 \\ &+ \left\{\frac{(b-1)\left[a^4+(6b-1)a^3+(b+2)(8b-5)a^2\right.}{3(a+1)^3(a+2)(a+3)}\right. \\ &\left.\frac{(33b^2-30b+4)a+b(31b-47)+18]}{3(a+1)^3(a+2)(a+3)}\right\} w^4 + O(z^{\frac{5}{a}}), \end{aligned}$$

em que $w = [az\ B(a,b)]^{\frac{1}{a}}$ para $a > 0$.

[2] http://functions.wolfram.com/06.23.06.0004.01

Pode-se reescrever $I_z^{-1}(a,b)$ como

$$\begin{aligned}
I_z^{-1}(a,b) &= [az\ B(a,b)]^{\frac{1}{a}} + \left(\frac{b-1}{a+1}\right)[az\ B(a,b)]^{\frac{2}{a}} \\
&\quad + \left[\frac{(b-1)(a^2+3ba-a+5b-4)}{2(a+1)^2(a+2)}\right][az\ B(a,b)]^{\frac{3}{a}} + \ \ldots \\
&= z^{\frac{1}{a}}[a\ B(a,b)]^{\frac{1}{a}} + z^{\frac{2}{a}}[a\ B(a,b)]^{\frac{2}{a}}\ z^{\frac{3}{a}}[a\ B(a,b)]^{\frac{3}{a}} + \ \ldots \\
&= d_1\ z^{\frac{1}{a}} + d_2\ z^{\frac{2}{a}} + d_3\ z^{\frac{3}{a}} + \ \ldots \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} d_j\ z^{\frac{j}{a}},
\end{aligned}$$

em que $d_j = c_j\,[a\ B(a,b)]^{\frac{j}{a}}$, j=1,... e $c_1 = 1$, $c_2 = \dfrac{b-1}{a+1}$, $c_3 = \dfrac{(b-1)(a^2+3ba-a+5b-4)}{2(a+1)^2(a+2)}$ e assim por diante.

Então, para o caso da distribuição BGSN, a função inversa da função acumulada é dada por

$$\begin{aligned}
F^{-1}(x) &= I^{-1}_{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1}(a,b) = \sum_{j=1}^{\infty} d_j \left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right\}^{\frac{j}{a}} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} d_j \left\{1-2\left[1-\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]\right\}^{\frac{j}{a}+1-1}. \qquad (77)
\end{aligned}$$

Utilizando a expansão (18) em (77) obtém-se

$$\left\{1-2\left[1-\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]\right\}^{\frac{j}{a}+1-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\ \Gamma(\frac{j}{a}+1)\ 2^k}{\Gamma(\frac{j}{a}+1)k!}\left\{1-\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^k.$$

Como k é um número inteiro, utiliza-se a expansão binomial

$$\left\{1-\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^k = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r}\left\{\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^r.$$

Considerando a relação $\Phi(x) = \dfrac{1}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$ e empregando a expansão binomial, encontra-se

$$\left\{\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^r = \left(\frac{1}{2}\right)^r\left\{1+\operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{\sqrt{2}}\right]\right\}^r = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s}\left\{\operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{\sqrt{2}}\right]\right\}^s.$$

Portanto,

$$F^{-1}(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r} t_{j,k,r,s}(a,b)\left\{\operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{\sqrt{2}}\right]\right\}^s, \qquad (78)$$

em que

$$t_{j,k,r,s}(a,b) = \frac{(-1)^{k+r+s}\ 2^k\ \Gamma(\frac{j}{a}+1)\binom{k}{r}\binom{r}{s}d_j}{\Gamma(\frac{j}{a}+1-k)k!}.$$

A curva de Bonferroni para a distribuição BGSN pode ser expressa como

$$\begin{aligned} B(p) &= \frac{1}{p\mu}\int_0^p \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r} t_{j,k,r,s}(a,b)\left\{\text{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{\sqrt{2}}\right]\right\}^s dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r} t_{j,k,r,s}(a,b)\int_0^p \left\{\text{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{\sqrt{2}}\right]\right\}^s dx. \end{aligned} \tag{79}$$

Aplicando a mudança de variável $u = \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}$ na expressão (79), tem-se

$$B(p) = \frac{1}{p\mu}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r} t_{j,k,r,s}(a,b)\ \frac{\theta}{\alpha}\int_0^{\left(\frac{p}{\theta}\right)^{\alpha}} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\left[\text{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]^s du. \tag{80}$$

Considerando a expansão da função de erro (Nadarajah, 2008) na equação (80) têm-se

$$\begin{aligned} B(p) &= \frac{\theta}{\alpha p\mu}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r} t_{j,k,r,s}(a,b) \\ &\times \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^s \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_s}}{2^{m_1+\cdots+m_s+\frac{s}{2}}(2m_1+1)\cdots(2m_s+1)m_1!\cdots m_s!} \\ &\times \int_0^{\left(\frac{p}{\theta}\right)^{\alpha}} u^{2(m_1+\cdots+m_s)+s+\frac{1}{\alpha}-1}du. \end{aligned} \tag{81}$$

Resolvendo a integral na equação (81), obtém-se a expressão da curva de Bonferroni para a distribuição BGSN, que é dada por

$$\begin{aligned} B(p) &= \frac{\theta^{1-\alpha}}{\alpha p\mu}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r} t_{j,k,r,s}(a,b) \\ &\times \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_s}}{2^{m_1+\cdots+m_s+\frac{s}{2}}(2m_1+1)\cdots(2m_s+1)m_1!\cdots m_s!} \\ &\times \pi^{-\frac{s}{2}}\ 2^s\ \frac{p^{2\alpha(m_1+\cdots+m_s)+s+1}}{2(m_1+\cdots+m_s)+s+\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \tag{82}$$

De forma similar, a curva de Lorenz para a distribuição BGSN pode ser representada por

$$\begin{aligned} L(p) &= \frac{\theta^{1-\alpha}}{\alpha\mu}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r} t_{j,k,r,s}(a,b) \\ &\times \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_s}}{2^{m_1+\cdots+m_s+\frac{s}{2}}(2m_1+1)\cdots(2m_s+1)m_1!\cdots m_s!} \\ &\times \pi^{-\frac{s}{2}}\ 2^s\ \frac{p^{2\alpha(m_1+\cdots+m_s)+s+1}}{2(m_1+\cdots+m_s)+s+\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \tag{83}$$

2.2.1.9 Estimação e Inferência

Nesta seção, considera-se a estimação dos parâmetros da nova distribuição pelo método da máxima verossimilhança. Se Y possui distribuição beta generalizada semi-normal (BGSN) com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda} = (\alpha, \theta, a, b)^T$, o logaritmo da função de verossimilhança do modelo paramétrico para uma única observação y de Y é representado por

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\lambda}) &= \log\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \log\alpha - \log x + \alpha\log\left(\frac{x}{\theta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha} - \log\{B(a,b)\} \\ &\quad +(b-1)\log(2) + (a-1)\log\left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right] - 1\right\} + (b-1)\log\left\{1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\},\ x > 0.\end{aligned}$$

Os componentes do vetor escore unitário $\mathbf{U} = \left(\frac{\partial\ell}{\partial\alpha}, \frac{\partial l}{\partial\theta}, \frac{\partial\ell}{\partial a}, \frac{\partial\ell}{\partial b}\right)^T$ são obtidos por diferenciação, isto é,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ell}{\partial\alpha} &= \frac{1}{\alpha} + \log\left(\frac{x}{\theta}\right) - \log\left(\frac{x}{\theta}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha} + \frac{2(a-1)}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\log\left(\frac{x}{\theta}\right)}{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right] - 1}\right] \\ &\quad + \frac{(1-b)}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\log\left(\frac{x}{\theta}\right)}{1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]}\right],\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\theta} = \frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha} - \left(\frac{\alpha}{\theta}\right) + \frac{2(1-a)}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right] - 1}\right] + \frac{(1-b)}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}{1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]}\right],$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial a} = \log\left\{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right] - 1\right\} - \psi(a) + \psi(a+b),$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial b} = \log 2 + \log\left\{1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right\} - \psi(b) + \psi(a+b),$$

em que $\psi(.)$ é a função digama.

Para uma amostra aleatória $X = (X_1, \ldots, X_n)$ de tamanho n, o logaritmo da função de verossimilhança total é $\ell_n = \ell_n(\alpha, \theta, a, b) = \sum_{i=1}^{n} l^{(i)}$, em que $\ell^{(i)}$ é o logaritmo da função de verossimilhança para a i-ésima observação ($i = 1, \ldots, n$). A função escore total é $\mathbf{U}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{U}^{(i)}$, em que $\mathbf{U}^{(i)}$ tem a forma anterior para $i = 1, \ldots, n$. O estimador de máxima verossimilhança (EMV) $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ de $\boldsymbol{\lambda}$ é a solução do sistema de equações não-lineares $\mathbf{U}_n = \mathbf{0}$.

Para a estimação por intervalo e testes de hipóteses sobre os parâmetros em $\boldsymbol{\lambda}$, obtém-se a matriz de informação esperada

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \kappa_{\alpha,\alpha} & \kappa_{\alpha,\theta} & \kappa_{\alpha,a} & \kappa_{\alpha,b} \\ \kappa_{\theta,\alpha} & \kappa_{\theta,\theta} & \kappa_{\theta,a} & \kappa_{\theta,b} \\ \kappa_{a,\alpha} & \kappa_{a,\theta} & \kappa_{a,a} & \kappa_{a,b} \\ \kappa_{b,\alpha} & \kappa_{b,\theta} & \kappa_{b,a} & \kappa_{b,b} \end{bmatrix},$$

em que os elementos correspondentes são dados no Anexo A.

Sob certas condições que são satisfeitas para os parâmetros no interior do espaço paramétrico, mas não sobre a fronteira, a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda})$ é $\mathrm{N}_4(0, \mathbf{K}(\boldsymbol{\lambda})^{-1})$. A estimativa do vetor de parâmetros da distribuição assintótica normal multivariada $\mathrm{N}_4(0, n^{-1}\mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{\lambda}})^{-1}), \hat{\boldsymbol{\lambda}}$, pode ser usada para construir intervalos de confiança aproximados para os parâmetros e para as funções de taxa de falha e de sobrevivência. A normalidade assintótica também é útil para testar a qualidade do ajuste da distribuição BGSN e comparar esta distribuição com alguns de seus sub-modelos especiais utilizando um dos três testes estatísticos assintoticamente equivalentes, isto é, estatística da razão de verossimilhança (RV), estatística escore (E) e a estatística de Wald (W).

Um intervalo de confiança assintótico, com coeficiente de confiança $1-\gamma$, para cada parâmetro λ_i é dado por

$$\mathrm{ICA}(\lambda_i, (1-\gamma)) = (\hat{\lambda}_i - z_{\gamma/2}\sqrt{\hat{\kappa}^{\lambda_i,\lambda_i}}, \hat{\lambda}_i + z_{\gamma/2}\sqrt{\hat{\kappa}^{\lambda_i,\lambda_i}}),$$

em que $\hat{\kappa}^{\lambda_i,\lambda_i}$ é o i-ésimo elemento da diagonal da matriz $n^{-1}\mathbf{K}(\boldsymbol{\lambda})^{-1}$ estimado em $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ para $i = 1, \cdots, 4$ e $z_{\gamma/2}$ é o quantil $1-\gamma/2$ da distribuição normal padrão.

Além disso, podem-se calcular os valores máximos do logaritmo da função de verossimilhança restrita e não-restrita para construir a estatística RV para testar alguns sub-modelos da distribuição BGSN. Por exemplo, pode-se usar a estatística de RV para analisar se o ajuste usando a distribuição BGSN é estatisticamente "superior"para um ajuste utilizando a distribuição SN para um determinado conjunto de dados. Em qualquer caso, considerando a partição $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_1^T, \boldsymbol{\lambda}_2^T)^T$, os testes de hipóteses do tipo $H_0 : \boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\lambda}_1^{(0)}$ contra $H_A : \boldsymbol{\lambda}_1 \neq \boldsymbol{\lambda}_1^{(0)}$ podem ser realizados através da estatística de RV que é dada por $w = 2\{\ell(\hat{\boldsymbol{\lambda}}) - \ell(\tilde{\boldsymbol{\lambda}})\}$, em que $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ e $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ são os EMVs de $\boldsymbol{\lambda}$ sob H_A e H_0, respectivamente. Sob a hipótese nula, H_0, $w \xrightarrow{d} \chi^2_q$, em

que q é a dimensão do vetor $\boldsymbol{\lambda}_1$ de interesse. O teste da RV rejeita H_0 se $w > \xi_\gamma$, em que ξ_γ denota o valor máximo $100\gamma\%$ da distribuição χ^2_q.

Quando existe a necessidade de comparação entre dois modelos, como por exemplo, o modelo BGSN e seu sub-modelo GSN, é interessante estudar os principais critérios de seleção de modelos utilizados na literatura.

Dentre os principais critérios de seleção de modelos utilizados em programas computacionais estão o critério de informação de Akaike - AIC (Akaike, 1974) e o critério de informação de Schwarz - BIC (Schwarz, 1978), que são baseados no valor do logaritmo da função de verossimilhança do modelo e dependem do número de observações e do número de parâmetros.

O critério de informação de Akaike - AIC, pode ser caculado como

$$\text{AIC} = -2l(\boldsymbol{\lambda}) + 2(p+2),$$

em que p representa o número de parâmetros estimados do modelo. Observa-se que dentre todos os possíveis modelos considerados, aquele que possuir o menor valor de AIC será considerado o melhor modelo.

O critério de informação de Schwarz - BIC, pode ser expresso por

$$\text{BIC} = -2l(\boldsymbol{\lambda}) + (p+2)log(n).$$

Uma característica do critério BIC é penalizar os modelos com um maior número de parâmetros, caracterizando a seleção de modelos com um número menor de parâmetros.

Liang e Zou (2007) propuseram um AIC melhorado (CAIC) que é dado por

$$\text{CAIC} = AIC + \frac{2(p+2)(p+3)}{n-p-3}.$$

Observa-se que menores valores de AIC, BIC e CAIC indicam modelos mais apropriados.

2.2.2 Estudo de Simulação

Para simular dados da distribuição beta generalizada semi-normal com f.d.p. dada pela equação (30) seguem-se os passos:

a) Seja V uma variável aleatória que possui distribuição beta com parâmetros a e b, isto é, $V \sim \text{beta}(a, b)$.

b) Fazendo a aplicação X = G^{-1}(V), observa-se que a solução da equação não linear $\left(\dfrac{X}{\theta}\right)^{\alpha} = \Phi^{-1}\left(\dfrac{V+1}{2}\right)$ tem distribuição BGSN, ou seja, $X \sim \mathrm{BGSN}(\alpha, \theta, a, b)$.

Para isso foi desenvolvido um programa no software estatístico R (R Development Core Team, 2008).

2.2.3 Modelo de Regressão Log-Beta Generalizado Semi-Normal

Seja T uma variável aleatória com distribuição BGSN, com função densidade representada pela equação (30). Considere a transformação Y = log(T) e as reparametrizações $\mu = \log(\theta)$ e $\sigma = \dfrac{\sqrt{2}}{2\alpha}$. Nesse caso, por meio do método do jacobiano, a função densidade de Y pode ser escrita como

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\exp\left[\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\sqrt{2}\right] + \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}2^{b-1}}{\sigma\sqrt{\pi}B(a,b)}\left\{2\Phi\left[\exp\left\{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right]-1\right\}^{a-1} \\ &\times\left\{1-\Phi\left[\exp\left\{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right]\right\}^{b-1}, \quad -\infty < y < \infty, \end{aligned} \tag{84}$$

em que $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $a > 0$ e $b > 0$. A Figura 12 mostra os gráficos da função densidade da variável Y, que é denominada de distribuição log-beta generalizada semi-normal (LBGSN), isto é, $\mathrm{Y} \sim \mathrm{LBGSN}(\mu, \sigma, a, b)$.

Observa-se que a função de distribuição acumulada da distribuição LBGSN pode ser escrita por meio da equação (19) em que $G(y) = 2\Phi\left[\exp\left\{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right] - 1$, é a função de distribuição acumulada da distribuição log-generalizada semi-normal (LGSN), que é um caso particula quando $a = b = 1$. Então,

$$\mathrm{F}(y) = \frac{1}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}\left\{2\Phi\left[\exp\left\{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right]-1\right\}^{a+j}. \tag{85}$$

A função de sobrevivência, correspondente à distribuição LBGSN, pode ser escrita como

$$\mathrm{S}(y) = 1 - \frac{1}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}\left\{2\Phi\left[\exp\left\{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right]-1\right\}^{a+j}. \tag{86}$$

(a) (b)

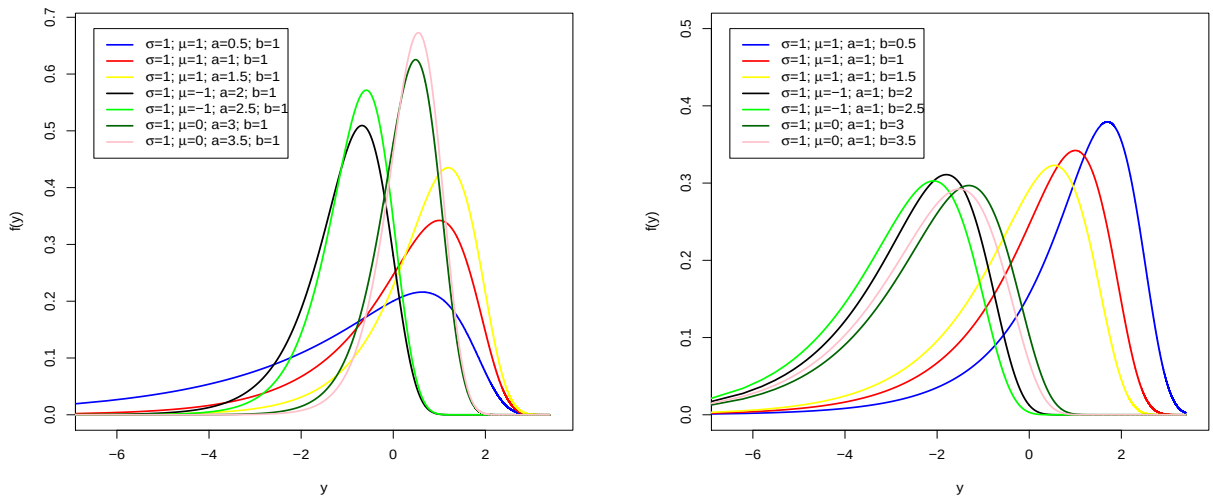

Figura 12 - Gráficos da função densidade LBGSN: (a) Para alguns valores de a com $\mu = -1, 0, 1$, $\sigma = 1$ e $b = 1$ (b) Para alguns valores de b com $\mu = -1, 0, 1$, $\sigma = 1$ e $a = 1$

Derivando a equação (85), em relação à variável Y, obtém-se uma expressão alternativa para a função densidade (84), isto é,

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\exp\left[\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\sqrt{2}\right]+\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}}{\sigma\sqrt{\pi}B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} \\ &\times\left\{2\Phi\left[\exp\left\{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right]-1\right\}^{a+j-1}. \end{aligned} \tag{87}$$

Utilizando a expansão (18), a expansão binomial e aplicando a equação (2), encontra-se uma aproximação para a função densidade da distribuição LBGSN, em termos da

função de erro. Logo,

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\exp\left[\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\sqrt{2}\right] + \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \\ &\quad \times \sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\left\{2\Phi\left[\exp\left\{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right]-1\right\}^r \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\exp\left[\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\sqrt{2}\right] + \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \\ &\quad \times \sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\left\{\mathrm{erf}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left\{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right]\right\}^r \end{aligned} \tag{88}$$

em que $w(.)$ está definido em (27).

A média, a variância e os coeficientes de assimetria e curtose dessa nova distribuição podem ser obtidos por meio dos momentos. O s-ésimo momento da distribuição LBGSN é dado pela expressão $\mu'_s = \int_{-\infty}^{\infty} y^s f(y)dy$, em que $f(y)$ é dada pela equação (88). Então,

$$\begin{aligned} \mu'_s &= \int_{-\infty}^{\infty} y^s \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\exp\left[\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\sqrt{2}\right] + \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \\ &\quad \times \sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b)\left\{\mathrm{erf}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left\{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right]\right\}^r dy. \end{aligned} \tag{89}$$

Fazendo-se a mudança de variável, $u = \exp\left[\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, na expressão (89), encontra-se

$$\mu'_s = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} w_{j,k,r}(a,b) \int_0^{\infty} \left[\mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{2}}\log(u)\right]^s \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\left[\mathrm{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]^r du. \tag{90}$$

Observa-se que $\left[\mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{2}}\log(u)\right]^s = \sum_{l=0}^{s}\binom{s}{l}\mu^{s-l}\left(\frac{2\sigma}{\sqrt{2}}\right)^s [\log(u)]^s$, e utilizando a expansão da função de erro, Nadarajah (2008), na equação (90), obtém-se

$$\begin{aligned} \mu'_s &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} \binom{s}{l}\left(\frac{2\sigma}{\sqrt{2}}\right)^s \mu^{s-l} w_{j,k,r}(a,b) \\ &\quad \times \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{2^{-(m_1+\ldots+m_r+\frac{r}{2})}(-1)^{m_1+\ldots+m_r}}{(2m_1+1)\ldots(2m_r+1)m_1!\ldots m_r!} \\ &\quad \times \int_0^{\infty} u^{2(m_1+\ldots+m_r)+r+1-1}[\log(u)]^s \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du. \end{aligned} \tag{91}$$

Observa-se que a integral da equação (91), I(s), pode ser calculada por meio da integral dada em Prudnikov et al. (1986, Vol 1, Seção 2.6.21, integral 1), isto é,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(s) &= \int_0^\infty u^{2(m_1+\ldots+m_r)+r+1-1}\left[\log(u)\right]^s \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial(2(m_1+\ldots+m_r)+r+1)}\right]^s \left[2^{m_1+\ldots+m_r+\frac{r+1}{2}}\ \Gamma\left(m_1+\ldots+m_r+\frac{r+1}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Portanto, o s-ésimo momento da distribuição LBGSN pode ser dado por

$$\begin{aligned}
\mu'_s &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\binom{s}{l}\left(\frac{2\sigma}{\sqrt{2}}\right)^s \mu^{s-l} w_{j,k,r}(a,b) \\
&\times \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}\frac{2^{-(m_1+\ldots+m_r+\frac{r}{2})}(-1)^{m_1+\ldots+m_r}}{(2m_1+1)\ldots(2m_r+1)m_1!\ldots m_r!} \\
&\times \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial(2(m_1+\ldots+m_r)+r+1)}\right]^s \left[2^{m_1+\ldots+m_r+\frac{r+1}{2}}\ \Gamma\left(m_1+\ldots+m_r+\frac{r+1}{2}\right)\right] \qquad (92)
\end{aligned}$$

Os coeficientes de assimetria e curtose podem ser calculados utilizando-se as expressões (8) e (9). As representações gráficas dessas medidas como função do parâmetro a para alguns valores escolhidos do parâmetro b e como função do parâmetro b para alguns valores escolhidos do parâmetro a, são dadas nas Figuras 13 e 14, respectivamente.

O modelo de locação e escala dado na equação (29), considerando Y, dado x, tem distribuição log-beta generalizada semi-normal, função densidade de probabilidade dada pela expressão (84), e pode ser representado por

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + \sigma\mathbf{Z}_i,\ i = 1,\ldots,n,$$

em que $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_p)^T$, é um vetor de parâmetros desconhecidos associado a cada covariável, $\mathbf{x}_i^T = (x_{i1},\ldots,x_{ip})$ é o vetor de covariáveis e $\mathbf{Z}_i$ é o erro aleatório, cuja função densidade é dada por

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\exp\left(\frac{z\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{z\sqrt{2}}{2}\right\}2^{b-1}}{\sigma\sqrt{\pi}B(a,b)}\left\{2\Phi\left[\exp\left(\frac{z\sqrt{2}}{2}\right)\right]-1\right\}^{a-1} \\
&\times\left\{1-\Phi\left[\exp\left(\frac{z\sqrt{2}}{2}\right)\right]\right\}^{b-1}, \quad -\infty < z < \infty. \qquad (93)
\end{aligned}$$

Nesse caso, do modelo de regressão, a função de sobrevivência Y|x é dada por

$$S(\mathrm{y}|\mathrm{x}) = 1-\frac{1}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}\left\{2\Phi\left[\exp\left\{\left(\frac{y-\mathrm{x}^T\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right]-1\right\}^{a+j}.$$

(a) (b)

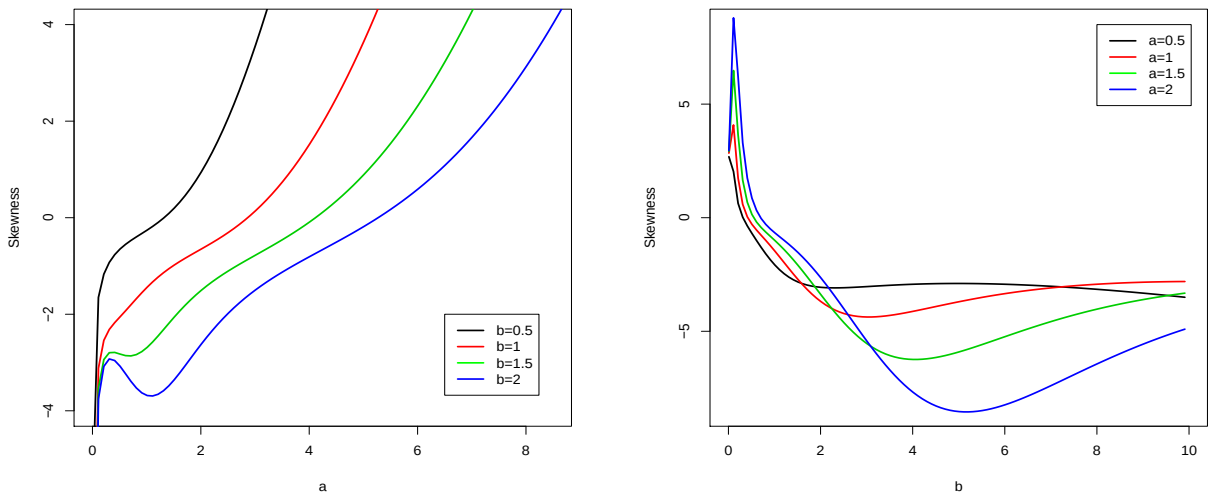

Figura 13 - Gráficos dos valores dos coeficientes de assimetria da distribuição LBGSN como função de a para alguns valores de b e como função de b para alguns valores de a

(a) (b)

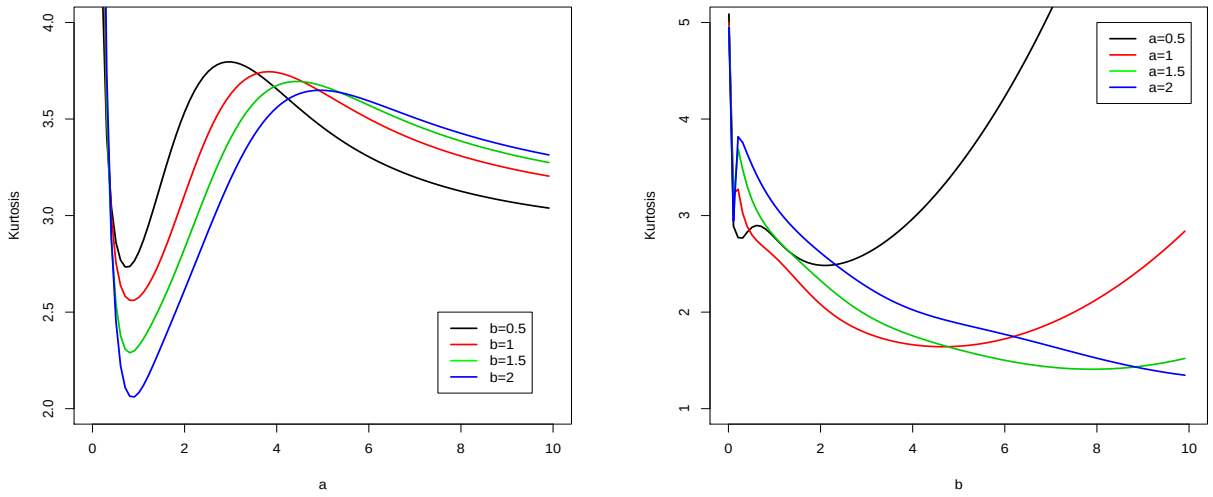

Figura 14 - Gráficos dos valores dos coeficientes de curtose da distribuição LBGSN como função de a para alguns valores de b e como função de b para alguns valores de a

Além disso, para os valores da amostra $(y_1, \delta_1, \mathbf{x}_1), \ldots, (y_n, \delta_n, \mathbf{x}_n)$, em que $y_i = \min\{\log(t_i), \log(C_i)\}$, δ_i é o indicador de censura e $\mathbf{x}_i$ é o vetor de covariáveis associado ao i-ésimo indivíduo, o logaritmo da função de verossimilhança de $\boldsymbol{\lambda} = (a, b, \sigma, \beta^T)^T$, considerando censura não informativa, é dado por

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\lambda}) &= r \log\left[\frac{2^{b-1}}{\sigma\sqrt{\pi}B(a,b)}\right] - \frac{1}{2}\sum_{i\in F}\exp\left(z_i\sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{i\in F} z_i \\ &\quad +(a-1)\sum_{i\in F}\log\left\{2\Phi\left[\exp\left(\frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right)\right]-1\right\} \\ &\quad +(b-1)\sum_{i\in F}\log\left\{1-\Phi\left[\exp\left(\frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right)\right]\right\} + \sum_{i\in C}\log\left[1 - I_{G(y_i|\mathbf{x}_i)}(a,b)\right], \end{aligned} \tag{94}$$

em que r é o número de observações não censuradas, F é o conjunto de observações não censuradas, C denota o conjunto de observações censuradas, $I(.)$ é a razão da função beta incompleta, $G(y_i|\mathbf{x}_i) = 2\Phi\left[\exp\left(\frac{z_{i\sqrt{2}}}{2}\right)\right] - 1$ e $z_i = \dfrac{y_i - \mathbf{x}_i^T}{\sigma}$.

As funções escores para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda} = (a, b, \sigma, \beta^T)^T$, são dadas respectivamente por

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = r\left[\psi(a) - \psi(a+b)\right] + \sum_{i\in F}\log\left\{2\Phi\left[\exp\left(\frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right)\right]-1\right\} - \sum_{i\in C}\frac{\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_a}{1 - I_{G(y_i)}(a,b)},$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial b} = r\log(2) + r\left[\psi(b) - \psi(a+b)\right] + \sum_{i\in F}\log\left\{1-\Phi\left[\exp\left(\frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right)\right]\right\} - \sum_{i\in C}\frac{\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_b}{1 - I_{G(y_i)}(a,b)},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \sigma} &= -\frac{r}{\sigma} - \frac{\sqrt{2}}{2\sigma}\sum_{i\in F} z_i + \frac{\sqrt{2}}{2\sigma}\sum_{i\in F} z_i\exp(z_i) + \frac{(1-a)}{\sigma\sqrt{\pi}}\sum_{i\in F}\frac{z_i\exp\left[-\frac{1}{2}\exp(z_i\sqrt{2}) + \frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right]}{2\Phi\left[\exp\left(\frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right)\right]-1} \\ &\quad + \frac{(b-1)}{\sigma\sqrt{\pi}}\sum_{i\in F}\frac{z_i\exp\left[-\frac{1}{2}\exp(z_i\sqrt{2}) + \frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right]}{1-\Phi\left[\exp\left(\frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right)\right]} \\ &\quad - \frac{2^{b-1}}{\sigma\sqrt{\pi}B(a,b)}\sum_{i\in C}\frac{z_i\exp\left[-\frac{1}{2}\exp(z_i\sqrt{2}) + \frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right]\left\{2\Phi\left[\exp\left(\frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right)\right]-1\right\}^{a-1}}{\left[1 - I_{G_{y_i}}(a,b)\right]\left\{1-\Phi\left[\exp\left(\frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right)\right]\right\}^{-(b-1)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell}{\partial \beta_j} &= -\frac{\sqrt{2}}{2\sigma}\sum_{i\in F} x_{ij} + \frac{\sqrt{2}}{2\sigma}\sum_{i\in F} x_{ij}\exp(z_i\sqrt{2}) + \frac{(1-a)}{\sigma\sqrt{\pi}}\sum_{i\in F}\frac{x_{ij}\exp\left[-\frac{1}{2}\exp(z_i\sqrt{2})+\frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right]}{2\Phi\left[\exp\left(\frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right)\right]-1}\\ &+\frac{(b-1)}{\sigma\sqrt{\pi}}\sum_{i\in F}\frac{x_{ij}\exp\left[-\frac{1}{2}\exp(z_i\sqrt{2})+\frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right]}{1-\Phi\left[\exp\left(\frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right)\right]}\\ &+\frac{2^{b-1}}{\sigma\sqrt{\pi}B(a,b)}\sum_{i\in C}\frac{x_{ij}\exp\left[-\frac{1}{2}\exp(z_i\sqrt{2})+\frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right]\left\{2\Phi\left[\exp\left(\frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right)\right]-1\right\}^{a-1}}{\left[1-I_{G_{y_i}}(a,b)\right]\left\{1-\Phi\left[\exp\left(\frac{z_i\sqrt{2}}{2}\right)\right]\right\}^{-(b-1)}},\end{aligned}$$

em que $\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_a = \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{1}{B(a,b)}\int_0^{G(y_i)} w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw\right]$ e $\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_b = \frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{1}{B(a,b)}\int_0^{G(y_i)} w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw\right]$.

Os estimadores de máxima verossimilhança são as soluções das equações não-lineares $\dfrac{\partial \ell}{\partial a}=0$, $\dfrac{\partial \ell}{\partial b}=0$, $\dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma}=0$ e $\dfrac{\partial \ell}{\partial \beta_j}=0$. Observa-se que para obter os EMVs é necessário a utilização de métodos iterativos.

As propriedades assintóticas dos estimadores de verossimilhança apresentadas na seção 2.1.4.2.1 são necessárias para construir intervalos de confiança e testar hipóteses sobre os parâmetros do modelo. Logo, a distribuição assintótica normal para $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ pode ser expressa por $\hat{\boldsymbol{\lambda}}^T \sim \mathrm{N}_{p+3}\left(\boldsymbol{\lambda}^T; \ddot{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\lambda})^{-1}\right)$, em que $\mathbf{L}(\ddot{\boldsymbol{\lambda}})$ é a matriz de informação observada com dimensão $(p+3)(p+3)$, obtida de

$$\ddot{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\lambda}) = -\begin{pmatrix} \mathbf{L}_{a,a} & \mathbf{L}_{a,b} & \mathbf{L}_{a,\sigma} & \mathbf{L}_{a,\beta_j} \\ . & \mathbf{L}_{b,b} & \mathbf{L}_{b,\sigma} & \mathbf{L}_{b,\beta_j} \\ . & . & \mathbf{L}_{\sigma,\sigma} & \mathbf{L}_{\sigma,\beta_j} \\ . & . & . & \mathbf{L}_{\beta_j,\beta_k} \end{pmatrix},$$

em que os elementos correspondentes são dados no Anexo B.

2.2.4 Aplicações

Nesta seção do trabalho, são apresentados dois conjuntos de dados que estão relacionados a ciências biomédicas e a ciências dos materiais, respectivamente, para ilustrar o uso da nova distribuição de probabilidade beta generalizada semi-normal.

2.2.4.1 Dados de Leucemia Mielóide

O conjunto de dados apresentado em Feigl e Zelen (1965) refere-se a dois grupos de pacientes que morreram de leucemia mielóide aguda. A leucemia mielogênica aguda, é um câncer da linha mielóide dos glóbulos brancos que se caracteriza pela rápida proliferação de células anormais que se acumulam na medula óssea, interferindo na produção normal de células sanguíneas.

Os pacientes estavam classificados dentro de dois grupos de acordo com a presença (ou ausência) de uma característica morfológica das células brancas. Os pacientes denominados como AG positivo foram identificados pela presença de "Auer rods", que são grânulos citoplásmaticos existentes nas células leucêmicas da medula óssea constatada durante o diagnóstico. Para os pacientes AG negativo esses fatores estão ausentes.

Consideram-se, somente, os pacientes denominados AG positivo ($n = 17$). O tempo de sobrevivência t_i, para $i = 1, \ldots, 17$, são dados em semanas a partir da data do diagnóstico (Tabela 1).

2.2.4.2 Dados de Pressão

A resistência dos materiais é um ramo da mecânica que estuda as relações entre cargas externas aplicadas a um corpo deformável e a intensidade das forças internas que atuam dentro de um corpo. Pode-se afirmar, que essa ciência é fundamental para a definição do nível de segurança do componente mecânico de um determinado material. A resistência deve ser compatível com o tempo de falha quando o material irá romper. Isso implica no estudo de certas características da resistência mecânica quando o material estiver sujeito a uma pressão exercida, a uma tensão nominal, ou até mesmo se for exposto ao estresse.

O conjunto de dados da Tabela 2 refere-se a um experimento realizado para avaliar a pressão necessária, em kh/cm^3, para romper 20 cubos de 1 dm de um determinado material (Abaurrea e Cebrián, 2002).

Tabela 1 - Números de glóbulos brancos e correspondentes tempos de sobrevivência observado

Números de glóbulos brancos	Tempos de Sobrevivência (Semanas)
2300	65
750	156
4300	100
2600	134
6000	16
10500	108
10000	121
17000	4
5400	39
7000	143
9400	56
32000	26
35000	22
100000	1
100000	1
52000	5
100000	65

Tabela 2 - Tempos de falha para 20 cubos que estão submetidos a uma certa pressão

Observações	Tempos de Falha
1	94,9
2	106,9
3	229,7
4	275,7
5	144,5
6	112,8
7	159,3
8	153,1
9	270,6
10	322,0
11	216,4
12	544,6
13	266,2
14	263,6
15	138,5
16	79,0
17	114,6
18	66,1
19	131,2
20	167,4

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir, são apresentados e discutidos os resultados obtidos para o estudo de simulação e para cada conjunto de dados. Todos os resultados, foram obtidos nos softwares R (R Development Core Team, 2008) e SAS (SAS,2004), cujo comandos encontram-se no Apêndice A.

3.1 Estudo de Simulação

Nota-se, por meio do estudo de simulação, que os valores simulados são consistentes com a distribuição BGSN.

A Figura 15 ilustra os gráficos da função densidade exata da distribuição BGSN comparando com os histogramas do conjunto de dados simulado para alguns valores dos parâmetros.

3.2 Dados de Leucemia Mielóide

A Figura 16a mostra que a curva TTT, definida na Seção (2.1.1.2), para o conjunto de dados de leucemia mielóide possui uma forma convexa e depois assume uma forma côncava, indicando uma função de taxa de falha na forma de banheira ou U. Consequentemente, a distribuição BGSN pode ser, em princípio, um modelo apropriado para se ajustar a esse conjunto de dados.

Na Tabela 3, podem ser vistos as EMVs (e os correspondentes erros-padrão que estão entre parênteses) dos parâmetros e os valores das estatísticas de alguns modelos: AIC, BIC e CAIC. Esses resultados indicam que o modelo BGSN tem o menor valor de AIC, BIC e CAIC entre os modelos ajustados e, portanto, poderia ser escolhido como o melhor modelo. Os cálculos foram realizados utilizando a subrotina NLMixed do SAS versão 9 (SAS, 2004).

Os gráficos da Figura 16b mostram a função de sobrevivência empírica obtida a partir do estimador não-paramétrico de Kaplan-Meier e as funções de sobrevivência estimada das distribuições BGSN e GSN. Conclui-se que a distribuição BGSN proporciona um bom ajuste para o conjunto de dados em análise.

Tabela 3 - EMVs dos parâmetros dos modelos BGSN e GSN para dados de leucemia mielóide, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores dos AIC, BIC e CAIC

Modelo	α	θ	a	b	AIC	BIC	CAIC
BGSN	6.5851	130.31	0.08118	0.3243	166.9	170.2	169.0
	(0.2180)	(15.5911)	(0.02364)	(0.3091)			
GSN	0.7557	73.6234	1	1	168.9	170.6	169.8
	(0.1651)	(17.8232)					

3.3 Dados de Pressão

A Figura 17a mostra que a curva TTT para o conjunto de dados de pressão possui primeiro uma forma côncava e depois uma forma convexa, o que sugere que a função taxa de falha (ou risco) possui forma unimodal. Consequentemente, um modelo apropriado para o ajuste a esses dados pode ser a distribuição BGSN.

Na Tabela 4, podem ser vistos as EMVs (e os correspondentes erros-padrão que estão entre parênteses) dos parâmetros e os valores das estatísticas de alguns modelos: AIC, BIC e CAIC. Os cálculos foram realizados utilizando a subrotina NLMixed do SAS versão 9 (SAS, 2004).

Tabela 4 - EMVs dos parâmetros dos modelos BGSN e GSN para dados de pressão, correspondentes erros-padrão (dados parênteses) e valores dos AIC, BIC e CAIC

Model	α	θ	a	b	AIC	BIC	CAIC
BGSN	0.1455	404.85	105.97	65.1087	234.5	238.5	237.1
	(0.1976)	(6107.9)	(295.06)	(368.41)			
GSN	1.3387	240.86	1	1	237.0	239.0	237.7
	(0.2237)	(31.8980)					

Os gráficos da Figura 17b mostram a função de sobrevivência empírica obtida a partir do estimador não-paramétrico de Kaplan-Meier e as funções de sobrevivência estimada das distribuições GSN e BGSN. Nota-se que a distribuição BGSN proporciona um ajuste

satisfatório.

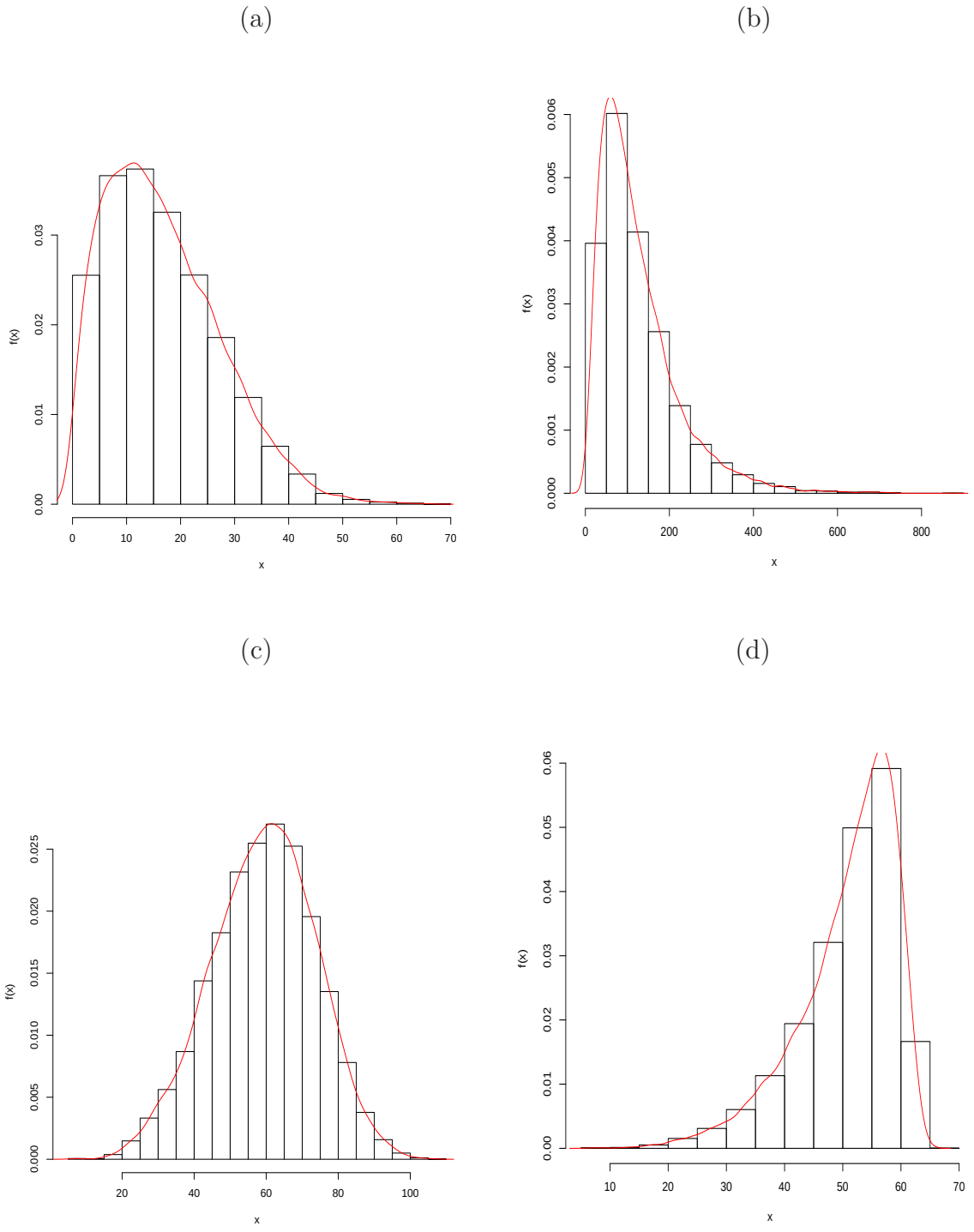

Figura 15 - Gráficos da função densidade exata da distribuição BGSN com histogramas para dados simulados com: (a) a=0,9; b=3; α=1,5; θ=40, (b) a=5; b=0,5; α=0,5; θ=25, (c) a=2; b=2; α=2,5; θ=70 e (d) a=0,5; b=0,5; α=10; θ=55

(a) (b)

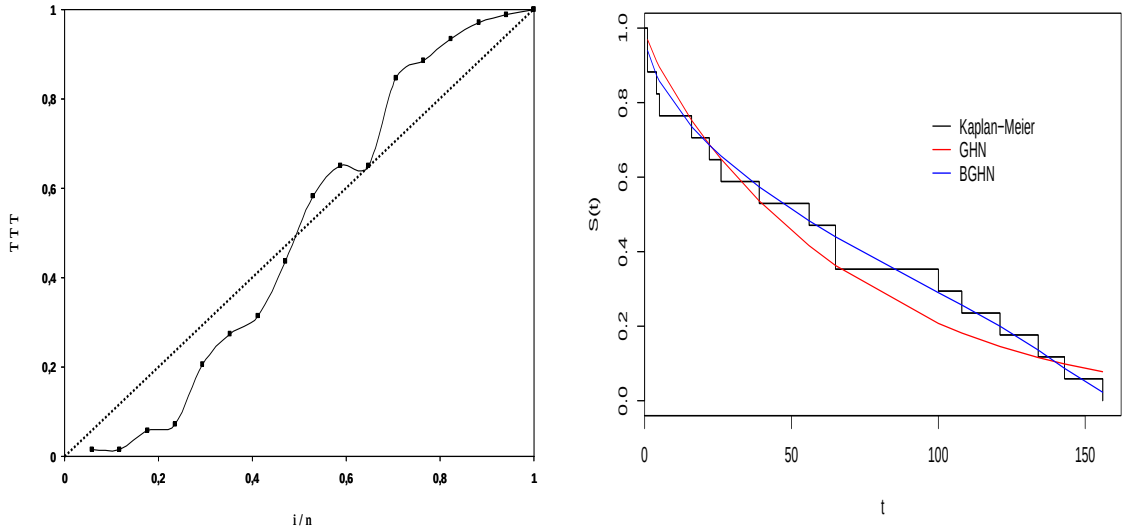

Figura 16 - (a) Curva TTT para os dados de leucemia mielóide. (b) Funções de sobrevivência estimadas para os ajustes das distribuições BGSN e GSN com sobrevivência empírica para dados de leucemia mielóide

(a) (b)

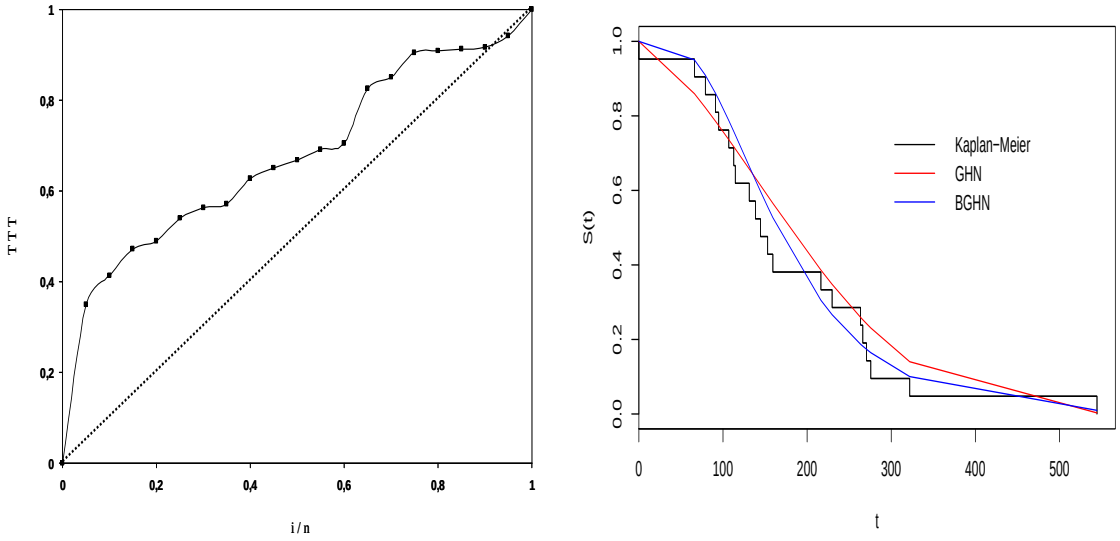

Figura 17 - (a) Curva TTT para os dados de pressão. (b)Funções de sobrevivência estimadas para os ajustes das distribuições GSN e BGSN com sobrevivência empírica para dados de pressão

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

4.1 Conclusão

Utilizando a idéia de Eugene et al. (2002) foi proposta a distribuição beta generalizada semi-normal (BGSN) que é uma extensão da distribuição semi-normal (SN) e da distribuição generalizada semi-normal (GSN) introduzida por Cooray e Ananda (2008).

Neste trabalho, fez-se um tratamento matemático para a nova distribuição que incluiu a função densidade probabilidade, a função de distribuição acumulada, a função densidade da estatística de ordem, a função geradora de momentos, as somas infinitas dadas para os momentos, os desvios médios, a confiabilidade, a entropia e as curvas de Bonferroni e Lorenz. Examinou-se o processo de estimação dos parâmetros por meio do método da máxima verossimilhança e obteve-se a matriz de informação esperada.

Considerou-se, também, o teste da razão de verossimilhança (RV) que pode ser muito útil para comparar o modelo BGSN com seus sub-modelos. Duas aplicações da distribuição BGSN foram realizadas para mostrar que essa distribuição pode ser usada mais efetivamente para proporcionar um melhor ajuste do que outros sub-modelos.

Como extensão desse trabalho, foi desenvolvido o modelo de regressão da distribuição beta generalizada semi-normal para dados com observações censuradas. Posteriormente, será realizado aplicações e estudos de simulações para esse modelo.

4.2 Pesquisas Futuras

Pretende-se propor um método de estimação para os parâmetros da distribuição beta generalizada semi-normal e para o modelo de regressão log-beta generalizado semi-normal para dados com observações censuradas. Pode, também, ser introduzida, nesse contexto, uma análise de diagnóstico (influência local e análise de resíduos) para o novo modelo de regressão.

REFERÊNCIAS

AARSET, M.V. How to identify bathtub hazard rate.**IEEE Transactions Reliability**, New York, v.36, p.106-108, 1987.

AARTS, R.M. Lauricella functions www.mathworld.com/LauricellaFunction.html. From MathWorld Web Resouce, created by Eric. W. Weissetein, 2000.

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.A. **Handbook of Mathematical Functions**, New York: Dover Publications, 1972. p.1059

ABAURREA, J.; CEBRIÁN, A. C. Fiabilidad y análisis de supervivencia métodos estadísticos. Zaragoza: Universidad de Zaragoza. Disponível em: www.metodosestadisticos.unizar.es/asignaturas/16627/Fiaapuntes.pdf. Acesso em: 20 de Abril de 2007.

AMOROSO, L. Ricerche intono alla curva dei redditi. **Annali Mathemática**, Firenze, v.2, p.123-159, 1925.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Boston, v.6, p.716-723, 1974.

BEBBINGTON, M.; LAI, C.D.; ZITIKIS, R. A flexible Weibull extension. **Reliability Engineering and System Safety**, Barking, v.92, p.719-726, 2007.

CARRASCO, J.M.F.; ORTEGA, E.M.M.; CORDEIRO, G.M. A generalized modified Weibull distribution for lifetime modeling. **Computational Statistics and Data Analysis**, New York, v.53, p.450-462, 2008.

COLOSIMO, E.A.; GIOLO, S.R. **Análise de Sobreviência Aplicada**. São Paulo: Edgar Blücher, 2006. 392 p.

COORAY, K.; ANANDA, M.M.A. A Generalization of the Half-Normal Distribution with Applications to Lifetime Data. **Communication in Statistics - Theory and Methods**, New York, v.37, p.1323-1337, 2008.

CORDEIRO, G.M.; NADARAJAH, S. Closed Form Expressions for Moments of Beta Generalized Distributions. **Brazilian Journal of Probability and Statistics**, São Paulo, 2008.

CORDEIRO, G. M.; SIMAS, A. B.; STOSIC, B. The beta Weibull distribution. **Submitted**, 2009.

EUGENE, N.; LEE, C.; FAMOYE, F. Beta-normal distribution and its applications. **Communication in Statistics - Theory and Methods**, New York, v.31, p.497-512, 2002.

EXTON, H. Handbook of Hypergeometric Integrals: Theory, Applications, Tables, Computer Programs. New York: Halsted Press, 1978. 500 p.

FAMOYE, F.; LEE, C.; EUGENE, N. Beta-normal distribution: Bimodality properties and application. **Journal of Modern Applied Statistical Methods**, Wayne, v.2, p.314-326, 2003.

FEIGL, P.; ZELEN, M. Estimation of exponential survival probabilities with concomitant information. **Biometrics**, Washington, v.21, p.826-837, 1965.

GOOD, I.J. The population frequencies of the species and the estimation of population parameteres. **Biometrika**, London, v.40, p.237-260, 1953.

GRADSHTEYN, I.S.; RYZHIK, I.M. **Table of integrals, series, and products**. San Diego: Academic Press , 2000. 634 p.

GUPTA, A.K.; NADARAJAH, S. On the moments of the beta normal distribution. **Communication in Statistics Theory and Methods**, New York, v.31, p.1-13, 2004.

HOSKING, J.R.M. L-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. **Journal of the Royal Statistical Society, Series B**, Oxford, v.52, 105-124, 1990.

HOSKING, J.R.M.; WALLIS, J.R. Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution.**Technometrics**, Alexandria, v.29, p.339-349, 1987.

KAPLAN, E.L.; MEIER, P. Nonparametric estimation from incomplete observations. **Journal of the American Statistical Association**, Boston, v.53, p.457-481, 1958.

LAI, C.D.; XIE, M.; MURTHY, D.N.P. A modified Weibull Distribution. **IEEE Transactions Reliability**, New York, v.52, p.33-37, 2003.

LIANG, H.; ZOU, G. Improved AIC selection strategy for survival analysis. **Computational Statistics and Data Analysis**, New York, v.52, p.2538-2548, 2007.

LJUBO, M. Curves and concentration indices for certain generalized Pareto distribution. **Statistical Review**, London, v.15, p.257-260, 1965.

MUDHOLKAR, G.S, SRIVASTAVA, D.K.; FRIEMER, M. The exponential Weibull family: A reanalysis of the bus-motor failure data. **Technometrics**, Alexandria, v.37, p.436-445, 1995.

MUDHOLKAR, G.S.; SRIVASTAVA, D.K.; FRIEMER, M. A generalization of the Weibull distribution with application to the analysis of survival data. **Journal of the American Statistical Association**, Boston, v.91, p.1575-1583, 1996.

NADARAJAH, S. Explicit Expressions for Moments of Order Statistics. **Statistics and Probability Letters**, Amsterdam, v.78, p.196-205, 2008.

NADARAJAH, S.; GUPTA, A.K. The beta Fréchet distribution. **Far East Journal of Theorical Statistics**, Allahabad, v.15, p.15-24, 2004.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The beta Gumbel distribution. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v.10, p.323-332, 2004.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The beta exponential distribution. **Reliability Engineering and System Safety**, Barking, v.91, p.689-697, 2005.

PHAM, H.; LAI, C.D. On recent generalizations of the Weibull distribution. **IEEE Transactions on Reliability**, New York, v.56, p.454-458, 2007.

PRUDNIKOV, A.P.; BRYCHKOV, Y.A.; MARICHEV, O.I. **Integrals and Series**. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1986. p.527. v.1.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL Disponível em: http://www.R-project.org. Acesso em: 15 de Agosto de 2008.

SAS INSTITUTE. **SAS/STAT User's Guide: Version 9**. cary: SAS Institute. 2004. 5121 p.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **Annals of Statistics**, Philadelphia, v.6, p.461-464, 1978.

STACY, E.W. A generalization of the gamma distribution. **The Annals of Mathematical Statistics**, New York, v.33, p.409-419, 1962.

TROTT, M. **The Mathematica Guidebook for Symbolics**. New York: Springer, 2006. 1 DVD-ROOM (Windows, Macintosh and UNIX).

WISE, M.E. Skew distributions in biomedicine, incluing some negative powers of time. **Statistical Distribution in Scientific Work**, New York, v.2, p.241-262, 1975.

XIE, M.; LAI, C.D. Reliability analysis using an additive Weibull model with bathtub-shaped failure rate function. **Reliability Engineering and System Safety**, Barking, v.52 p.87-93, 1995.

XIE, M.; TANG, Y.; GOH, T.N. A modified Weibull extension with bathtub failure rate function. **Reliability Engineering and System Safety**, Barking, v.76, p.279-285, 2002.

ANEXOS

Anexo A

A.1 Derivadas parciais de segunda ordem em relação aos parâmetros da distribuição beta generalizada semi-normal

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} &= -\frac{1}{\alpha^2} - 2\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\left[\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\right]^2 \\
&+\frac{2(a-1)}{\sqrt{2\pi}}\left\{-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{3\alpha}\left[\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\right]^2\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1}\right. \\
&+ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\left[\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\right]^2\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1} \\
&\left.-2e^{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\left[\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\right]^2\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-2}\right\} \\
&+\frac{(1-b)}{\sqrt{2\pi}}\left\{-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{3\alpha}\left[\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\right]^2\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1}\right. \\
&e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\left[\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\right]^2\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1} \\
&\left.+ e^{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\left[\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\right]^2\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-2}\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \theta} &= \frac{1}{\theta}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha} + \frac{2\alpha}{\theta}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right) - \frac{1}{\theta} \\
&+\frac{2(1-a)}{\sqrt{2\pi}}\left\{-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\left(\frac{y}{\theta}\right)^{3\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1}\right. \\
&+ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{1}{\theta}\right)\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1} \\
&+ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1} \\
&\left.-2e^{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-2}\right\} \\
&+\frac{(1-b)}{\sqrt{2\pi}}\left\{-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\left(\frac{y}{\theta}\right)^{3\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1}\right. \\
&+ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{1}{\theta}\right)\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1} \\
&+ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1} \\
&\left.+ e^{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-2}\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial a} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1},
$$

$$
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial b} = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1},
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} &= -\frac{\alpha}{\theta^2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha} - 2\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha} + \frac{\alpha}{\theta^2} \\
&+ \frac{2(1-a)}{\sqrt{2\pi}}\left\{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2\left(\frac{y}{\theta}\right)^{3\alpha}\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1}\right. \\
&- e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\theta^2}\right)\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1} \\
&- e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1} \\
&\left.+ 2e^{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-2}\right\} \\
&+ \frac{(1-b)}{\sqrt{2\pi}}\left\{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2\left(\frac{y}{\theta}\right)^{3\alpha}\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1}\right. \\
&- e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\theta^2}\right)\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1} \\
&- e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1} \\
&\left.+ 2e^{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-2}\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial a} = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1},
$$

$$
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial b} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1},
$$

$$
\frac{\partial^2 \ell}{\partial a^2} = -\psi^{'}(a) + \psi^{'}(a+b),
$$

$$
\frac{\partial^2 \ell}{\partial a \partial b} = \psi^{'}(a+b),
$$

$$
\frac{\partial^2 \ell}{\partial b^2} = -\psi^{'}(b) + \psi^{'}(a+b).
$$

A.2 Elementos da matriz de informação esperada $K(\boldsymbol{\lambda})$ para os parâmetros (α, θ, a, b) da distribuição beta generalizada semi-normal

$$
\begin{aligned}
\kappa_{\alpha,\alpha} &= \frac{1}{\alpha^2} + 2\mathrm{E}\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\left[\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\right]^2\right] \\
&-\frac{2(a-1)}{\sqrt{2\pi}}\left\{-\mathrm{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{3\alpha}\left[\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\right]^2\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1}\right]\right. \\
&+\mathrm{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\left[\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\right]^2\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1}\right] \\
&\left.-2\mathrm{E}\left[e^{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\left[\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\right]^2\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-2}\right]\right\} \\
&-\frac{(1-b)}{\sqrt{2\pi}}\left\{-\mathrm{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{3\alpha}\left[\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\right]^2\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1}\right]\right. \\
&+\mathrm{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\left[\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\right]^2\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1}\right] \\
&\left.+\mathrm{E}\left[e^{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\left[\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\right]^2\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-2}\right]\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_{\alpha,\theta} &= -\frac{1}{\theta}\,\mathrm{E}\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\right] - \frac{2\alpha}{\theta}\,\mathrm{E}\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\right] + \frac{1}{\theta} \\
&-\frac{2(1-a)}{\sqrt{2\pi}}\left\{-\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\mathrm{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{3\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1}\right]\right. \\
&+\frac{1}{\theta}\,\mathrm{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1}\right] \\
&+\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\mathrm{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1}\right] \\
&\left.-\frac{2\alpha}{\theta}\,\mathrm{E}\left[e^{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-2}\right]\right\} \\
&-\frac{(1-b)}{\sqrt{2\pi}}\left\{-\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\mathrm{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{3\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1}\right]\right. \\
&+\frac{1}{\theta}\,\mathrm{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1}\right] \\
&+\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\mathrm{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1}\right] \\
&\left.-\frac{\alpha}{\theta}\,\mathrm{E}\left[e^{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-2}\right]\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\kappa_{\alpha,a} = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1}\right],
$$

$$
\kappa_{\alpha,b} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\log\left(\frac{y}{\theta}\right)\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1}\right],
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_{\theta,\theta} &= \frac{\alpha}{\theta^2}\left\{(1+2\alpha)\ \mathrm{E}\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\right]\right\} - \frac{\alpha}{\theta^2} \\
&\quad -\frac{2(1-a)}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2 \mathrm{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{3\alpha}\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1}\right]\right. \\
&\quad -\frac{\alpha(1+\alpha)}{\theta^2}\ \mathrm{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1}\right] \\
&\quad \left.+\ 2\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2\ \mathrm{E}\left[e^{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-2}\right]\right\} \\
&\quad -\frac{(1-b)}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2 \mathrm{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{3\alpha}\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1}\right]\right. \\
&\quad -\frac{\alpha(1+\alpha)}{\theta^2}\ \mathrm{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1}\right] \\
&\quad \left.-\ \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2\ \mathrm{E}\left[e^{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-2}\right]\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\kappa_{\theta,a} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\ \mathrm{E}\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left[2\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]-1\right]^{-1}\right],
$$

$$
\kappa_{\theta,b} = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\ \mathrm{E}\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{2\alpha}}\left[1-\Phi\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{-1}\right],
$$

$$
\kappa_{a,a} = \psi^{'}(a) - \psi^{'}(a+b),
$$

$$
\kappa_{a,b} = -\psi^{'}(a+b),
$$

$$
\kappa_{b,b} = \psi^{'}(b) - \psi^{'}(a+b).
$$

Anexo B

B.1 Derivadas parciais de segunda ordem em relação aos parâmetros do modelo de regressão log-beta generalizado semi-normal

$$\mathbf{L}_{aa} = r\left[\psi^{'}(a) - \psi^{'}(a+b)\right] - \sum_{i\in C} \frac{\ddot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_a}{1 - I_{G(y_i)}(a,b)} - \sum_{i\in C}\left[\frac{\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_a}{1 - I_{G(y_i)}(a,b)}\right]^2,$$

$$\mathbf{L}_{ab} = -r\ \psi^{'}(a+b)\sum_{i\in C}\frac{\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_{ab}}{1 - I_{G(y_i)}(a,b)} - \sum_{i\in C}\frac{\left[\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_a\right]\left[\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_b\right]}{\left[1 - I_{G(y_i)}(a,b)\right]^2},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{a\sigma} &= -\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\sum_{i\in F}\frac{z_i d_i}{G(y_i)} - \sum_{i\in C}\frac{\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_{a\sigma}}{1 - I_{G(y_i)}(a,b)} \\ &+ \frac{\sigma}{B(a,b)}\sum_{i\in C}\left\{\frac{z_i d_i \dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_a}{\left[1 - I_{G(y_i)}(a,b)\right]^2}\ [G(y_i)]^{a-1}[1 - G(y_i)]^{b-1}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{a\beta_j} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\sum_{i\in F}\frac{x_{ij}\ d_i}{G(y_i)} - \sum_{i\in C}\frac{\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_{a\beta_j}}{1 - I_{G(y_i)}(a,b)} \\ &+ \frac{1}{B(a,b)}\sum_{i\in C}\left\{\frac{x_{ij} d_i \dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_a}{\left[1 - I_{G(y_i)}(a,b)\right]^2}\ [G(y_i)]^{a-1}[1 - G(y_i)]^{b-1}\right\},\end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_{bb} = r\left[\psi^{'}(b) - \psi^{'}(a+b)\right] - \sum_{i\in C}\frac{\ddot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_b}{1 - I_{G(y_i)}(a,b)} - \sum_{i\in C}\left[\frac{\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_b}{1 - I_{G(y_i)}(a,b)}\right]^2,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{b\sigma} &= \frac{2}{\sigma\sqrt{\pi}}\sum_{i\in F}\frac{z_i\ d_i}{1 - G(y_i)} - \sum_{i\in C}\frac{\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_{b\sigma}}{1 - I_{G(y_i)}(a,b)} \\ &+ \frac{\sigma}{B(a,b)}\sum_{i\in C}\left\{\frac{z_i\ d_i\ \dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_b}{\left[1 - I_{G(y_i)}(a,b)\right]^2}\ [G(y_i)]^{a-1}[1 - G(y_i)]^{b-1}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{b\beta_j} &= \frac{2}{\sigma\sqrt{\pi}}\sum_{i\in F}\frac{x_{ij}\ d_i}{1 - G(y_i)} - \sum_{i\in C}\frac{\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_{b\beta_j}}{1 - I_{G(y_i)}(a,b)} \\ &+ \frac{1}{B(a,b)}\sum_{i\in C}\left\{\frac{x_{ij}\ d_i\ \dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_b}{\left[1 - I_{G(y_i)}(a,b)\right]^2}\ [G(y_i)]^{a-1}[1 - G(y_i)]^{b-1}\right\},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\sigma\sigma} \;=\;& \frac{r}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{2}}{\sigma^2}\sum_{i\in F} z_i \exp(z_i) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma^2}\sum_{i\in F} z_i^2 \exp(z_i) - \frac{2(1-a)}{\sigma^2\sqrt{\pi}}\sum_{i\in F}\frac{z_i d_i}{G(y_i)} \\
&+\frac{(1-a)}{\sigma^2\sqrt{\pi}}\sum_{i\in F}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}z_i^2 d_i \exp(z_i\sqrt{2}) - \frac{\sigma\sqrt{2}}{2}z_i^2 d_i G(y_i) + \frac{2\sqrt{2}z_i^2 d_i}{[G(y_i)]^2}\right\} \\
&-\frac{4(b-1)}{\sigma^2\sqrt{\pi}}\sum_{i\in F}\frac{z_i\ d_i}{1-G(y_i)} + \frac{2[B(a,b)]^{-1}}{\sigma^2\sqrt{\pi}}\sum_{i\in C}\frac{z_i d_i [G(y_i)]^{a-1}[1-G(y_i)]^{b-1}}{1-I_{G(y_i)}(a,b)} \\
&+\frac{(b-1)}{\sigma^2\sqrt{\pi}}\sum_{i\in F}\left\{\frac{z_i^2 d_i\sqrt{2}\exp(z_i\sqrt{2})}{1-G(y_i)} - \frac{\sigma z_i^3 d_i\sqrt{2}}{1-G(y_i)} - \frac{4z_i^2 d_i\sqrt{2}}{[1-G(y_i)]^2}\right\} \\
&-\frac{[B(a,b)]^{-1}}{\sigma^2\sqrt{2}}\left\{\sum_{i\in C} 2^{b-2}\sigma\sqrt{2}d_i z_i \exp(z_i\sqrt{2})[G(y_i)]^{a-1} - 2^{b-2}\sqrt{2}z_i d_i [G(y_i)]^{a-1}\right. \\
&+\ d_i \log\{(1/2)\,[1-G(y_i)]\}[G(y_i)]^{a-1}[1-G(y_i)]^{b-1} \\
&\left.+\ d_i \log\{G(y_i)\}[G(y_i)]^{a-1}[1-G(y_i)]^{b-1}\right\}[1-I_{G(y_i)}(a,b)]^{-1} \\
&-\sum_{i\in C}\left\{2^{-2(b-1)}\sigma z_i d_i [G(y_i)]^{2(a-1)}[1-G(y_i)]^{2(b-1)}[1-I_{G(y_i)}(a,b)]^{-1}\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\sigma\beta_j} \;=\;& \frac{\sqrt{2}}{\sigma^3}\sum_{i\in F} x_{ij} - \frac{\sqrt{2}}{\sigma^3}\sum_{i\in F} x_{ij}\exp(z_i\sqrt{2}) - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i\in F} x_{ij} z_i \exp(z_i\sqrt{2}) - \frac{(1-a)}{\sigma^2\sqrt{\pi}}\sum_{i\in F}\frac{x_{ij}d_i}{G(y_i)} \\
&+\frac{(1-a)\sqrt{2}}{\sigma^3\sqrt{\pi}}\sum_{i\in F}\left\{x_{ij}^2 d_i\left[\frac{\exp(z_i\sqrt{2})}{2} - \frac{1}{2}\frac{x_{ij}}{G(y_i)} + \frac{2x_{ij}^2 d_i}{[G(y_i)]^2}\right]\right\} - \frac{2(b-1)}{\sigma^2\sqrt{\pi}}\sum_{i\in F}\frac{x_{ij}d_i}{1-G(y_i)} \\
&\frac{(b-1)\sqrt{2}}{\sigma^3\sqrt{\pi}}\left\{\sum_{i\in F}\frac{2x_{ij}d_i}{1-G(y_i)}\left[\frac{\exp(z_i\sqrt{2})}{2} - \frac{x_{ij}}{2}\right] - \frac{4x_{ij}^2 d_i}{[1-G(y_i)]^2}\right\} \\
&+\frac{[B(a,b)]^{-1}}{\sigma\sqrt{2}}\left\{\sum_{i\in C}\left\{\frac{\sqrt{2}d_i}{2\sigma^2}[x_{ij}\exp(z_i\sqrt{2}) - x_{ij}][G(y_i)]^{a-1} + d_i[G(y_i)]^{a-1}\log[G(y_i)]\right\}\right. \\
&\times[1-G(y_i)]^{b-1} + \left.\left\{d_i[G(y_i)]^{a-1}[1-G(y_i)]^{b-1}\log\{(1/2)[1-G(y_i)]\}\right\}\right\}[1-I_G(y_i)(a,b)]^{-1} \\
&-\frac{[B(a,b)]^{-1}}{\sigma^2\sqrt{2}}\sum_{i\in F}\frac{x_{ij}[G(y_i)]^{a-1}[1-G(y_i)]}{1-I_{G(y_i)}(a,b)} - 2^{-2(b-1)}\sum_{i\in C}\frac{d_i[G(y_i)]^{2(a-1)}[1-G(y_i)]^{2(b-1)}}{[1-I_{G(y_i)}(a,b)]^3}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\beta_j\beta_k} \;=\;& -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i\in F} x_{ij}x_{ik}\exp(z_i\sqrt{2}) + \frac{(1-a)\sqrt{2}}{2\sigma^2\sqrt{\pi}}\left\{\sum_{i\in F}\frac{x_{ij}x_{ik}d_i[\exp(z_i\sqrt{2})-1]}{G(y_i)} + \sum_{i\in F}\frac{x_{ij}x_{ik}d_i}{[G(y_i)]^2}\right\} \\
&+\frac{[B(a,b)]^{-1}}{\sigma\sqrt{\pi}}\left\{\sum_{i\in C} x_{ij}[-(\sqrt{2}/2\sigma)x_{ik}d_i[\exp(z_i\sqrt{2})+1][G(y_i)]^{a-1}][1-G(y_i)]^{b-1}\right. \\
&\left.+\ d_i\ [G(y_i)]^{a-1}[1-G(y_i)]^{b-1}\log\{(1/2)[1-G(y_i)]\}\right\}[1-I_G(y_i)(a,b)]^{-1} \\
&-2^{-2(b-1)}\sum_{i\in C} x_{ik}d_i^2[G(y_i)]^{2(a-1)}[1-G(y_i)]^{2(b-1)}[1-I_G(y_i)(a,b)]^{-2},
\end{aligned}
$$

em que

$z_i = (y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})/\sigma,$
$d_i = \exp[-(1/2)\exp(z_i\sqrt{2}) + z_i\sqrt{2}/2],$
$G(y_i) = 2\Phi[\exp(z_i\sqrt{2}/2)] - 1,$
$\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_a = \frac{\partial}{\partial a}[1/B(a,b)\int_0^{G(y_i)} w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw],$
$\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_b = \frac{\partial}{\partial b}[1/B(a,b)\int_0^{G(y_i)} w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw],$
$\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_{ab} = \frac{\partial}{\partial b}\{\frac{\partial}{\partial a}[1/B(a,b)\int_0^{G(y_i)} w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw]\},$
$\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_{a\sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\{\frac{\partial}{\partial a}[1/B(a,b)\int_0^{G(y_i)} w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw]\},$
$\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_{a\beta_j} = \frac{\partial}{\partial \beta_j}\{\frac{\partial}{\partial a}[1/B(a,b)\int_0^{G(y_i)} w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw]\},$
$\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_{b\sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\{\frac{\partial}{\partial b}[1/B(a,b)\int_0^{G(y_i)} w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw]\},$
$\dot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_{b\beta_j} = \frac{\partial}{\partial \beta_j}\{\frac{\partial}{\partial b}[1/B(a,b)\int_0^{G(y_i)} w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw]\},$
$\ddot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_a = \frac{\partial^2}{\partial a^2}[1/B(a,b)\int_0^{G(y_i)} w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw],$
$\ddot{I}_{G(y_i)}(a,b)|_b = \frac{\partial^2}{\partial b^2}[1/B(a,b)\int_0^{G(y_i)} w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw].$

APÊNDICE

APÊNDICE A

A.1 Programa no software R para os gráficos da função densidade probabilidade da distribuição generalizada semi-normal

```
rm(list=ls(all=TRUE))
x = seq(0,130,.1)
par(mfrow=c(1,2))
plot(c(0,130), c(0,.053), type="n", xlab="x", ylab="f(x)")
alpha1 = 0.5
theta1 = 30
y1 = sqrt(2/pi) * (alpha1/x)y2 < -((x/theta1)^alpha1)
y3 = exp((-1/2) * (x/theta1)^(2 * alpha1))
y = y1 * y2 * y3
alpha2 = 1.2
theta2 = 40
h1 = sqrt(2/pi) * (alpha2/x)h2 < -((x/theta2)^alpha2)
h3 = exp((-1/2) * (x/theta2)^(2 * alpha2))
h = h1 * h2 * h3
alpha3 = 2.5
theta3 = 45
k1 = sqrt(2/pi) * (alpha3/x)k2 < -((x/theta3)^alpha3)
k3 = exp((-1/2) * (x/theta3)^(2 * alpha3))
k = k1 * k2 * k3
alpha4 = 5
theta4 = 70
t1 = sqrt(2/pi) * (alpha4/x)t2 < -((x/theta4)^alpha4)
t3 = exp((-1/2) * (x/theta4)^(2 * alpha4))
t = t1 * t2 * t3
lines(x,y, lty=1,lwd=2)
lines(x,h, lty=2,lwd=2)
lines(x,k, lty=3,lwd=2)
lines(x,t, lty=4,lwd=2)
legend(50,.0557, expression(paste(alpha,"=0.5; ",theta,"=30"), paste(alpha,"=1.2; ",theta,"=40"),
paste(alpha,"=2.5; ",theta,"=45"), paste(alpha,"=5; ",theta,"=70")),lty=c(1,2,3,4),
lwd=c(2,2,2,2),bty="o", ncol = 1,cex=.9)

x=seq(0,130,.1)
plot(c(0,130), c(0,.053), type="n", xlab="x", ylab="f(x)")
alpha1=0.2
theta1=10
y1 = sqrt(2/pi) * (alpha1/x)y2 < -((x/theta1)^alpha1)
y3 = exp((-1/2) * (x/theta1)^(2 * alpha1))
y = y1 * y2 * y3
alpha2=0.5
theta2=15
h1 = sqrt(2/pi) * (alpha2/x)h2 < -((x/theta2)^alpha2)
h3 = exp((-1/2) * (x/theta2)^(2 * alpha2))
h = h1 * h2 * h3
```

```
alpha3=1.8
theta3=20
k1 = sqrt(2/pi) * (alpha3/x)k2 < -((x/theta3)^alpha3)
k3 = exp((-1/2) * (x/theta3)^(2 * alpha3))
k = k1 * k2 * k3
alpha4=2.1
theta4=25
t1 = sqrt(2/pi) * (alpha4/x)t2 < -((x/theta4)^alpha4)
t3 = exp((-1/2) * (x/theta4)^(2 * alpha4))
t = t1 * t2 * t3
lines(x,y, lty=1,lwd=2)
lines(x,h, lty=2,lwd=2)
lines(x,k, lty=3,lwd=2)
lines(x,t, lty=4,lwd=2)
legend(40,.0557, expression(paste(alpha,"=0.2; ",theta,"=10"), paste(alpha,"=0.5; ",theta,"=15"),
paste(alpha,"=1.8; ",theta,"=20"), paste(alpha,"=2.1; ",theta,"=25")), lty=c(1,2,3,4),
lwd=c(2,2,2,2),bty="o", ncol = 1,cex=.9)
```

****

```
rm(list=ls(all=TRUE))
x=seq(0,130,.1)
alpha1=0.3
theta1=40
y1 < -sqrt(2/pi) * (alpha1/x)y2 < -((x/theta1)^alpha1)
y3 < -exp((-1/2) * (x/theta1)^(2 * alpha1))
y < -y1 * y2 * y3
alpha2=0.8
theta2=50
h1 < -sqrt(2/pi) * (alpha2/x)h2 < -((x/theta2)^alpha2)
h3 < -exp((-1/2) * (x/theta2)^(2 * alpha2))
h < -h1 * h2 * h3
alpha3=1
theta3=30
k1 < -sqrt(2/pi) * (alpha3/x)k2 < -((x/theta3)^alpha3)
k3 < -exp((-1/2) * (x/theta3)^(2 * alpha3))
k < -k1 * k2 * k3
alpha4=2
theta4=70
t1 < -sqrt(2/pi) * (alpha4/x)t2 < -((x/theta4)^alpha4)
t3 < -exp((-1/2) * (x/theta4)^(2 * alpha4))
t < -t1 * t2 * t3
par(mfrow=c(1,2))
plot(c(0,130), c(0,.053), type="n", xlab="x", ylab="f(x)")
lines(x,y, lty=1,lwd=2)
lines(x,h, lty=2,lwd=2)
lines(x,k, lty=3,lwd=2)
lines(x,t, lty=4,lwd=2)
```

```
legend(40,.0557, expression(paste(alpha,"=0.3; ",theta,"=40"), paste(alpha,"=0.8; ",theta,"=50"),
paste(alpha,"=1; ",theta,"=30"), paste(alpha,"=2; ",theta,"=70")), lty=c(1,2,3,4),
lwd=c(2,2,2,2),bty="o", ncol = 1,cex=.9)

x=seq(0,130,.1)
plot(c(0,130), c(0,.053), type="n", xlab="x", ylab="f(x)")
alpha1=0.5
theta1=25
y1 < -sqrt(2/pi) * (alpha1/x)y2 < -((x/theta1)^alpha1)
y3 < -exp((-1/2) * (x/theta1)^(2 * alpha1))
y < -y1 * y2 * y3
alpha2=1
theta2=55
h1 < -sqrt(2/pi) * (alpha2/x)h2 < -((x/theta2)^alpha2)
h3 < -exp((-1/2) * (x/theta2)^(2 * alpha2))
h < -h1 * h2 * h3
alpha3=1.5
theta3=40
k1 < -sqrt(2/pi) * (alpha3/x)k2 < -((x/theta3)^alpha3)
k3 < -exp((-1/2) * (x/theta3)^(2 * alpha3))
k < -k1 * k2 * k3
alpha4=2.5
theta4=70
t1 < -sqrt(2/pi) * (alpha4/x)t2 < -((x/theta4)^alpha4)
t3 < -exp((-1/2) * (x/theta4)^(2 * alpha4))
t < -t1 * t2 * t3
lines(x,y, lty=1,lwd=2)
lines(x,h, lty=2,lwd=2)
lines(x,k, lty=3,lwd=2)
lines(x,t, lty=4,lwd=2)
legend(40,.0557, expression(paste(alpha,"=0.5; ",theta,"=25"), paste(alpha,"=1; ",theta,"=55"),
paste(alpha,"=1.5; ",theta,"=40"), paste(alpha,"=2.5; ",theta,"=70")), lty=c(1,2,3,4),
lwd=c(2,2,2,2),bty="o", ncol = 1,cex=.9)
```

A.2 Programa no software R para os gráficos da função de risco da distribuição generalizada semi-normal

```
rm(list=ls(all=TRUE))
x=seq(0,230,.1)
alpha1=0.5
theta1=30
y1 < -sqrt(2/pi) * (alpha1/x)y2 < -((x/theta1)^alpha1)
y3 < -exp((-1/2) * (x/theta1)^(2 * alpha1))
y4 < -(2 - (2 * pnorm((x/theta1)^alpha1)))
y < -(y1 * y2 * y3)/y4
alpha2=1.2
theta2=40
k1 < -sqrt(2/pi) * (alpha2/x)k2 < -((x/theta2)^alpha2)
k3 < -exp((-1/2) * (x/theta2)^(2 * alpha2))
```

```
k4 < -(2 - (2 * pnorm((x/theta2)^alpha2)))
k < -(k1 * k2 * k3)/k4
alpha3=2.5
theta3=45
t1 < -sqrt(2/pi) * (alpha3/x)t2 < -((x/theta3)^alpha3)
t3 < -exp((-1/2) * (x/theta3)^(2 * alpha3))
t4 < -(2 - (2 * pnorm((x/theta3)^alpha3)))
t < -(t1 * t2 * t3)/t4
alpha4=5
theta4=70
g1 < -sqrt(2/pi) * (alpha4/x)g2 < -((x/theta4)^alpha4)
g3 < -exp((-1/2) * (x/theta4)^(2 * alpha4))
g4 < -(2 - (2 * pnorm((x/theta4)^alpha4)))
g < -(g1 * g2 * g3)/g4
par(mfrow=c(1,2))
plot(c(0,230), c(0,.05), type="n", xlab="x", ylab="h(x)")
lines(x,y, lty=1,lwd=2)
lines(x,k, lty=2,lwd=2)
lines(x,t, lty=3,lwd=2)
lines(x,g, lty=4,lwd=2)
legend(85,.052, expression(paste(alpha,"=0.5; ",theta,"=30"), paste(alpha,"=1.2; ",theta,"=40"),
paste(alpha,"=2.5; ",theta,"=45"), paste(alpha,"=5; ",theta,"=70")), lty=c(1,2,3,4),
lwd=c(2,2,2,2),bty="0", ncol = 1,cex=.9)

x=seq(0,230,.1)
alpha1=0.2
theta1=10
y1 < -sqrt(2/pi) * (alpha1/x)y2 < -((x/theta1)^alpha1)
y3 < -exp((-1/2) * (x/theta1)^(2 * alpha1))
y4 < -(2 - (2 * pnorm((x/theta1)^alpha1)))
y < -(y1 * y2 * y3)/y4
alpha2=0.5
theta2=15
k1 < -sqrt(2/pi) * (alpha2/x)k2 < -((x/theta2)^alpha2)
k3 < -exp((-1/2) * (x/theta2)^(2 * alpha2))
k4 < -(2 - (2 * pnorm((x/theta2)^alpha2)))
k < -(k1 * k2 * k3)/k4
alpha3=1.8
theta3=20
t1 < -sqrt(2/pi) * (alpha3/x)t2 < -((x/theta3)^alpha3)
t3 < -exp((-1/2) * (x/theta3)^(2 * alpha3))
t4 < -(2 - (2 * pnorm((x/theta3)^alpha3)))
t < -(t1 * t2 * t3)/t4
alpha4=2.1
theta4=25
g1 < -sqrt(2/pi) * (alpha4/x)g2 < -((x/theta4)^alpha4)
g3 < -exp((-1/2) * (x/theta4)^(2 * alpha4))
g4 < -(2 - (2 * pnorm((x/theta4)^alpha4)))
```

```
g < -(g1 * g2 * g3)/g4
plot(c(0,230), c(0,.05), type="n", xlab="x", ylab="h(x)")
lines(x,y, lty=1,lwd=2)
lines(x,k, lty=2,lwd=2)
lines(x,t, lty=3,lwd=2)
lines(x,g, lty=4,lwd=2)
legend(85,.052, expression(paste(alpha,"=0.2; ",theta,"=10"), paste(alpha,"=0.5; ",theta,"=15"),
paste(alpha,"=1.8; ",theta,"=20"), paste(alpha,"=2.1; ",theta,"=25")), lty=c(1,2,3,4),
lwd=c(2,2,2,2),bty="0", ncol = 1,cex=.9)
```

****

```
rm(list=ls(all=TRUE))
x=seq(0,230,.1)
alpha1=0.3
theta1=40
y1 < -sqrt(2/pi) * (alpha1/x)y2 < -((x/theta1)^alpha1)
y3 < -exp((-1/2) * (x/theta1)^(2 * alpha1))
y4 < -(2 - (2 * pnorm((x/theta1)^alpha1)))
y < -(y1 * y2 * y3)/y4
alpha2=0.8
theta2=50
k1 < -sqrt(2/pi) * (alpha2/x)k2 < -((x/theta2)^alpha2)
k3 < -exp((-1/2) * (x/theta2)^(2 * alpha2))
k4 < -(2 - (2 * pnorm((x/theta2)^alpha2)))
k < -(k1 * k2 * k3)/k4
alpha3=1
theta3=30
t1 < -sqrt(2/pi) * (alpha3/x)t2 < -((x/theta3)^alpha3)
t3 < -exp((-1/2) * (x/theta3)^(2 * alpha3))
t4 < -(2 - (2 * pnorm((x/theta3)^alpha3)))
t < -(t1 * t2 * t3)/t4
alpha4=2
theta4=70
g1 < -sqrt(2/pi) * (alpha4/x)g2 < -((x/theta4)^alpha4)
g3 < -exp((-1/2) * (x/theta4)^(2 * alpha4))
g4 < -(2 - (2 * pnorm((x/theta4)^alpha4)))
g < -(g1 * g2 * g3)/g4
par(mfrow=c(1,2))
plot(c(0,230), c(0,.05), type="n", xlab="x", ylab="h(x)")
lines(x,y, lty=1,lwd=2)
lines(x,k, lty=2,lwd=2)
lines(x,t, lty=3,lwd=2)
lines(x,g, lty=4,lwd=2)
legend(85,.052, expression(paste(alpha,"=0.3; ",theta,"=40"), paste(alpha,"=0.8; ",theta,"=50"),
paste(alpha,"=1; ",theta,"=30"), paste(alpha,"=2; ",theta,"=70")), lty=c(1,2,3,4),
lwd=c(2,2,2,2),bty="0", ncol = 1,cex=.9)

x=seq(0,230,.1)
```

```
alpha1=0.5
theta1=25
y1 < -sqrt(2/pi) * (alpha1/x)y2 < -((x/theta1)^alpha1)
y3 < -exp((-1/2) * (x/theta1)^(2 * alpha1))
y4 < -(2 - (2 * pnorm((x/theta1)^alpha1)))
y < -(y1 * y2 * y3)/y4
alpha2=1
theta2=55
k1 < -sqrt(2/pi) * (alpha2/x)k2 < -((x/theta2)^alpha2)
k3 < -exp((-1/2) * (x/theta2)^(2 * alpha2))
k4 < -(2 - (2 * pnorm((x/theta2)^alpha2)))
k < -(k1 * k2 * k3)/k4
alpha3=1.5
theta3=40
t1 < -sqrt(2/pi) * (alpha3/x)t2 < -((x/theta3)^alpha3)
t3 < -exp((-1/2) * (x/theta3)^(2 * alpha3))
t4 < -(2 - (2 * pnorm((x/theta3)^alpha3)))
t < -(t1 * t2 * t3)/t4
alpha4=2.5
theta4=70
g1 < -sqrt(2/pi) * (alpha4/x)g2 < -((x/theta4)^alpha4)
g3 < -exp((-1/2) * (x/theta4)^(2 * alpha4))
g4 < -(2 - (2 * pnorm((x/theta4)^alpha4)))
g < -(g1 * g2 * g3)/g4
plot(c(0,230), c(0,.05), type="n", xlab="x", ylab="h(x)")
lines(x,y, lty=1,lwd=2)
lines(x,k, lty=2,lwd=2)
lines(x,t, lty=3,lwd=2)
lines(x,g, lty=4,lwd=2)
legend(70,.009, expression(paste(alpha,"=0.5; ",theta,"=25"), paste(alpha,"=1; ",theta,"=55"),
paste(alpha,"=1.5; ",theta,"=40"), paste(alpha,"=2.5; ",theta,"=70")), lty=c(1,2,3,4),
lwd=c(2,2,2,2),bty="0", ncol = 1,cex=.9)
```

A.3 Programa no software R para os gráficos da função densidade probabilidade da distribuição beta generalizada semi-normal

```
rm(list=ls(all=TRUE))
x=seq(0,100,.1)
a1=1
b1=1
alpha=1.5
theta=40
z < -(x/theta)^alpha
p1 < -(sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha)))/(beta(a1, b1))
p2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a1 - 1)p3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b1 - 1)
p < -p1 * p2 * p3
a3=3
b3=0.9
k1 < -(sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha)))/(beta(a3, b3))
```

$k2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a3 - 1)k3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b3 - 1)$
$k < -k1 * k2 * k3$
a4=0.5
b4=2
$h1 < -(sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha)))/(beta(a4, b4))$
$h2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a4 - 1)h3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b4 - 1)$
$h < -h1 * h2 * h3$
a5=2
b5=2
$l1 < -(sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha)))/(beta(a5, b5))$
$l2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a5 - 1)l3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b5 - 1)$
$l < -l1 * l2 * l3$
par(mfrow=c(1,2))
plot(c(0,100), c(0,0.04), type="n", xlab="x", ylab="f(x)",main="BGSN(1.5,40,a,b)")
lines(x,p, lty=1,lwd=2)
lines(x,k, lty=2,lwd=2)
lines(x,h, lty=3,lwd=2)
lines(x,l, lty=4,lwd=2)
legend(41,0.042,c("GSN","a=3,b=0.9","a=0.5,b=2","a=2,b=2"),
lty=c(1,2,3,4),lwd=c(2,2,2,2),cex=.9)

x=seq(0,100,.1)
a1=1
b1=1
alpha=1
theta=55
$z < -(x/theta)^alpha$
$p1 < -(sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha)))/(beta(a1, b1))$
$p2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a1 - 1)p3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b1 - 1)$
$r < -p1 * p2 * p3$
a2=3
b2=0.9
$y1 < -(sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha)))/(beta(a2, b2))$
$y2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a2 - 1)y3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b2 - 1)$
$y < -y1 * y2 * y3$
a4=0.5
b4=2
$h1 < -(sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha)))/(beta(a4, b4))$
$h2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a4 - 1)h3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b4 - 1)$
$f < -h1 * h2 * h3$
a5=2
b5=2
$l1 < -(sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha)))/(beta(a5, b5))$
$l2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a5 - 1)l3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b5 - 1)$
$d < -l1 * l2 * l3$
plot(c(0,100), c(0,.04), type="n", xlab="x", ylab="f(x)",main="BGSN(1,55,a,b)") x¡-seq(0,100,.1)
lines(x,r, lty=1,lwd=2)
lines(x,y, lty=2,lwd=2)

```
lines(x,f, lty=3,lwd=2)
lines(x,d, lty=4,lwd=2)
legend(41,0.042,c("SN","a=3,b=0.9","a=0.5,b=2","a=2,b=2"),
lty=c(1,2,3,4),lwd=c(2,2,2,2),cex=.9 )
```

****

```
rm(list=ls(all=TRUE))
x=seq(0,100,.1)
a1=1
b1=1
alpha=0.5
theta=25
z < -(x/theta)^alpha
p1 < -(sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha)))/(beta(a1, b1))
p2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a1 - 1)p3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b1 - 1)
p < -p1 * p2 * p3
a3=3
b3=0.9
k1 < -(sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha)))/(beta(a3, b3))
k2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a3 - 1)k3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b3 - 1)
k < -k1 * k2 * k3
a4=0.5
b4=2
h1 < -(sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha)))/(beta(a4, b4))
h2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a4 - 1)h3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b4 - 1)
h < -h1 * h2 * h3
a5=2
b5=2
l1 < -(sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha)))/(beta(a5, b5))
l2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a5 - 1)l3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b5 - 1)
l < -l1 * l2 * l3
par(mfrow=c(1,2)) plot(c(0,100), c(0,0.04), type="n", xlab="x",
ylab="f(x)",main="BGSN(0.5,25,a,b)") x¡-seq(0,100,.1)
lines(x,p, lty=1,lwd=2)
lines(x,k, lty=2,lwd=2)
lines(x,h, lty=3,lwd=2)
lines(x,l, lty=4,lwd=2)
legend(41,0.042,c("GSN","a=3,b=0.9","a=0.5,b=2","a=2,b=2"),
lty=c(1,2,3,4),lwd=c(2,2,2,2),cex=.9 )

x¡-seq(0,100,.1)
a1=1
b1=1
alpha=2.5
theta=70
z < -(x/theta)^alpha
p1 < -(sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha)))/(beta(a1, b1))
p2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a1 - 1)p3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b1 - 1)
```

$p < -p1 * p2 * p3$
a3=3
b3=0.9
$k1 < -(sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^a lpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha)))/(beta(a3, b3))$
$k2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a3 - 1)k3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b3 - 1)$
$k < -k1 * k2 * k3$
a4=0.5
b4=2
$h1 < -(sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^a lpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha)))/(beta(a4, b4))$
$h2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a4 - 1)h3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b4 - 1)$
$h < -h1 * h2 * h3$
a5=2
b5=2
$l1 < -(sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^a lpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha)))/(beta(a5, b5))$
$l2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a5 - 1)l3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b5 - 1)$
$l < -l1 * l2 * l3$
plot(c(0,100), c(0,0.04), type="n", xlab="x", ylab="f(x)",main="BGSN(2.5,70,a,b)")
x¡-seq(0,100,.1)
lines(x,p, lty=1,lwd=2)
lines(x,k, lty=2,lwd=2)
lines(x,h, lty=3,lwd=2)
lines(x,l, lty=4,lwd=2)
legend(41,0.042,c("GSN","a=3,b=0.9","a=0.5,b=2","a=2,b=2"),
lty=c(1,2,3,4),lwd=c(2,2,2,2),cex=.9)

A.4 Programa no software R para os gráficos da função de risco da distribuição beta generalizada semi-normal

rm(list=ls(all=TRUE))
x=seq(0,100,.1)
a1=1
b1=1
alpha=0.5
theta=25
$z < -(x/theta)^a lpha$
$p1 < -sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^a lpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha))$
$p2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a1 - 1)p3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b1 - 1)$
$p4 < -beta(a1, b1) * (1 - pbeta((2 * pnorm(z) - 1), a1, b1))$
$r < -(p1 * p2 * p3)/p4$
a2=3
b2=0.3
$h1 < -sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^a lpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha))$
$h2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a2 - 1)h3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b2 - 1)$
$h4 < -beta(a2, b2) * (1 - pbeta((2 * pnorm(z) - 1), a2, b2))$
$h < -(h1 * h2 * h3)/h4$
a4=0.5
b4=2
$l1 < -sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^a lpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha))$
$l2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a4 - 1)l3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b4 - 1)$

```
l4 < −beta(a4, b4) ∗ (1 − pbeta((2 ∗ pnorm(z) − 1), a4, b4))
w < −(l1 ∗ l2 ∗ l3)/l4
a5=2
b5=2
g1 < −sqrt(2/pi) ∗ (alpha/x) ∗ ((x/theta)^alpha) ∗ exp((−1/2) ∗ ((x/theta)^2 ∗ alpha))
g2 < −(2 ∗ pnorm(z) − 1)^(a5 − 1)g3 < −(2 − (2 ∗ pnorm(z)))^(b5 − 1)
g4 < −beta(a5, b5) ∗ (1 − pbeta((2 ∗ pnorm(z) − 1), a5, b5))
v < −(g1 ∗ g2 ∗ g3)/g4
par(mfrow=c(1,2))
plot(c(0,100), c(0,.2), type="n", xlab="x", ylab="h(x)",main="BGSN(0.5,25,a,b)")
lines(x,r,lty=1,lwd=2)
lines(x,h,lty=2,lwd=2)
lines(x,w,lty=3,lwd=2)
lines(x,v,lty=4,lwd=2)
legend(45,0.21,c("GSN","a=3,b=0.9","a=0.5,b=2","a=2,b=2"),
lty=c(1,2,3,4),lwd=c(2,2,2,2),cex=.85)

x=seq(0,100,.1)
a1=1
b1=1
alpha=2.5
theta=70
z < −(x/theta)^alpha
p1 < −sqrt(2/pi) ∗ (alpha/x) ∗ ((x/theta)^alpha) ∗ exp((−1/2) ∗ ((x/theta)^2 ∗ alpha))
p2 < −(2 ∗ pnorm(z) − 1)^(a1 − 1)p3 < −(2 − (2 ∗ pnorm(z)))^(b1 − 1)
p4 < −beta(a1, b1) ∗ (1 − pbeta((2 ∗ pnorm(z) − 1), a1, b1))
r < −(p1 ∗ p2 ∗ p3)/p4
a2=3
b2=0.3
h1 < −sqrt(2/pi) ∗ (alpha/x) ∗ ((x/theta)^alpha) ∗ exp((−1/2) ∗ ((x/theta)^2 ∗ alpha))
h2 < −(2 ∗ pnorm(z) − 1)^(a2 − 1)h3 < −(2 − (2 ∗ pnorm(z)))^(b2 − 1)
h4 < −beta(a2, b2) ∗ (1 − pbeta((2 ∗ pnorm(z) − 1), a2, b2))
h < −(h1 ∗ h2 ∗ h3)/h4
a4=0.5
b4=2
l1 < −sqrt(2/pi) ∗ (alpha/x) ∗ ((x/theta)^alpha) ∗ exp((−1/2) ∗ ((x/theta)^2 ∗ alpha))
l2 < −(2 ∗ pnorm(z) − 1)^(a4 − 1)l3 < −(2 − (2 ∗ pnorm(z)))^(b4 − 1)
l4 < −beta(a4, b4) ∗ (1 − pbeta((2 ∗ pnorm(z) − 1), a4, b4))
w < −(l1 ∗ l2 ∗ l3)/l4
a5=2
b5=2
g1 < −sqrt(2/pi) ∗ (alpha/x) ∗ ((x/theta)^alpha) ∗ exp((−1/2) ∗ ((x/theta)^2 ∗ alpha))
g2 < −(2 ∗ pnorm(z) − 1)^(a5 − 1)g3 < −(2 − (2 ∗ pnorm(z)))^(b5 − 1)
g4 < −beta(a5, b5) ∗ (1 − pbeta((2 ∗ pnorm(z) − 1), a5, b5))
v < −(g1 ∗ g2 ∗ g3)/g4
plot(c(-1,100), c(0,.2), type="n", xlab="x", ylab="h(x)",main="BGSN(2.5,70,a,b)")
lines(x,r,lty=1,lwd=2)
lines(x,h,lty=2,lwd=2)
```

```
lines(x,w,lty=3,lwd=2)
lines(x,v,lty=4,lwd=2)
legend(-3,0.21,c("GSN","a=3,b=0.9","a=0.5,b=2","a=2,b=2"),
lty=c(1,2,3,4),lwd=c(2,2,2,2),cex=.85)
```

****

```
rm(list=ls(all=TRUE))
x=seq(0,130,.1)
a1=1
b1=1
alpha=1.5
theta=40
z < -(x/theta)^alpha
p1 < -sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha))
p2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a1 - 1)p3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b1 - 1)
p4 < -beta(a1, b1) * (1 - pbeta((2 * pnorm(z) - 1), a1, b1))
p < -(p1 * p2 * p3)/p4
a3=3
b3=0.9
k1 < -sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha))
k2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a3 - 1)k3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b3 - 1)
k4 < -beta(a3, b3) * (1 - pbeta((2 * pnorm(z) - 1), a3, b3))
k < -(k1 * k2 * k3)/k4
a4=0.5
b4=2
l1 < -sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha))
l2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a4 - 1)l3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b4 - 1)
l4 < -beta(a4, b4) * (1 - pbeta((2 * pnorm(z) - 1), a4, b4))
l < -(l1 * l2 * l3)/l4
a5=2
b5=2
g1 < -sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha))
g2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a5 - 1)g3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b5 - 1)
g4 < -beta(a5, b5) * (1 - pbeta((2 * pnorm(z) - 1), a5, b5))
g < -(g1 * g2 * g3)/g4
par(mfrow=c(1,2)) plot(c(0,85), c(0,.1), type="n", xlab="x",
ylab="h(x)",main="BGSN(1.5,40,a,b)")
lines(x,p,lty=1,lwd=2)
lines(x,k,lty=2,lwd=2)
lines(x,l,lty=3,lwd=2)
lines(x,g,lty=4,lwd=2)
legend(40,0.017,c("GSN","a=3,b=0.9","a=0.5,b=2","a=2,b=2"),
lty=c(1,2,3,4),lwd=c(2,2,2,2),cex=.85)

x=seq(0,100,.1)
a1=1
b1=1
alpha=1
```

```
theta=55
z < -(x/theta)^alpha
p1 < -sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha))
p2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a1 - 1)p3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b1 - 1)
p4 < -beta(a1, b1) * (1 - pbeta((2 * pnorm(z) - 1), a1, b1))
r < -(p1 * p2 * p3)/p4
a2=3
b2=0.3
h1 < -sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha))
h2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a2 - 1)h3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b2 - 1)
h4 < -beta(a2, b2) * (1 - pbeta((2 * pnorm(z) - 1), a2, b2))
h < -(h1 * h2 * h3)/h4
a4=0.5
b4=2
l1 < -sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha))
l2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a4 - 1)l3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b4 - 1)
l4 < -beta(a4, b4) * (1 - pbeta((2 * pnorm(z) - 1), a4, b4))
w < -(l1 * l2 * l3)/l4
a5=2
b5=2
g1 < -sqrt(2/pi) * (alpha/x) * ((x/theta)^alpha) * exp((-1/2) * ((x/theta)^2 * alpha))
g2 < -(2 * pnorm(z) - 1)^(a5 - 1)g3 < -(2 - (2 * pnorm(z)))^(b5 - 1)
g4 < -beta(a5, b5) * (1 - pbeta((2 * pnorm(z) - 1), a5, b5))
v < -(g1 * g2 * g3)/g4
plot(c(0,100), c(0,.2), type="n", xlab="x", ylab="h(x)",main="BGSN(1,55,a,b)")
lines(x,r,lty=1,lwd=2)
lines(x,h,lty=2,lwd=2)
lines(x,w,lty=3,lwd=2)
lines(x,v,lty=4,lwd=2)
legend(45,0.21,c("SN","a=3,b=0.9","a=0.5,b=2","a=2,b=2"),
lty=c(1,2,3,4),lwd=c(2,2,2,2),cex=.85)
```

A.5 Programa no software R para os gráficos da assimetria, em função dos parâmetros (a e b), da distribuição beta generalizada semi-normal

Assimetria em função do parâmetro a

```
rm(list=ls(all=TRUE))
teta¡-55
alfa¡-1
x¡-seq(0,100,.5)
up < -(max(x)/teta)^alfa
t < -function(t)exp((-1/2) * (t^2))
i1 < -integrate(t, lower = 0, upper = up)
1.253314¡-1.253314
a¡-seq(0.1,1,0.01)
b¡-1
n¡-1
```

$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v1 < -3.885669 * s$
n¡-2
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v2 < -22.74726 * s$
n¡-3
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v3 < -161.9029 * sn < -4$
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v4 < -1326.924 * s$
$v < -v2 - (v1^2)ass < -(v3 - (3 * v1 * v2) + (2 * (v1^3)))/(v^3/2)$
$ct < -((v4 - (4 * v1 * v3)) + (6 * (v2) * (v1^2)) - 3 * (v1^4))/(v^2)$
par(mfrow=c(1,2)) plot(c(-.5,1),c(0,5), type="n", xlab="a", ylab="Assimetria",main=)
lines(a,ass,lty=1,lwd=2)
teta¡-55
alfa¡-1
x¡-seq(0,100,.5)
$up < -(max(x)/teta)^a lfa$
$t < -function(t)exp((-1/2) * (t^2))$
$i1 < -integrate(t, lower = 0, upper = up)$
1.253314¡-1.253314
a¡-seq(0.1,1,0.01)
b¡-3
n¡-1
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v1 < -3.885669 * s$
n¡-2
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v2 < -22.74726 * s$
n¡-3
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v3 < -161.9029 * s$
n¡-4
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$

$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2*1.253314)-1)^(a-1)) * ((1-1.253314)^(b-1))))/beta(a,b)$
$v4 < -1326.924 * s$
$v < -v2 - (v1^2)$
$ass < -(v3 - (3*v1*v2) + (2*(v1^3)))/(v^3/2)$
$ct < -((v4 - (4*v1*v3)) + (6*(v2)*(v1^2)) - 3*(v1^4))/(v^2)$
lines(a,ass,lty=2,lwd=2)
teta¡-55
alfa¡-1
x¡-seq(0,100,.5)
$up < -(max(x)/teta)^alfa$
$t < -function(t)exp((-1/2)*(t^2))$
$i1 < -integrate(t, lower = 0, upper = up)$
1.253314¡-1.253314
a¡-seq(0.1,1,0.01)
b¡-5
n¡-1
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2*1.253314)-1)^(a-1)) * ((1-1.253314)^(b-1))))/beta(a,b)$
$v1 < -3.885669 * s$
n¡-2
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2*1.253314)-1)^(a-1)) * ((1-1.253314)^(b-1))))/beta(a,b)$
$v2 < -22.74726 * s$
n¡-3
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2*1.253314)-1)^(a-1)) * ((1-1.253314)^(b-1))))/beta(a,b)$
$v3 < -161.9029 * s$
n¡-4
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2*1.253314)-1)^(a-1)) * ((1-1.253314)^(b-1))))/beta(a,b)$
$v4 < -1326.924 * s$
$v < -v2 - (v1^2)$
$ass < -(v3 - (3*v1*v2) + (2*(v1^3)))/(v^3/2)$
$ct < -((v4 - (4*v1*v3)) + (6*(v2)*(v1^2)) - 3*(v1^4))/(v^2)$
lines(a,ass,lty=3,lwd=2)
teta¡-55
alfa¡-1
x¡-seq(0,100,.5)
$up < -(max(x)/teta)^alfa$
$t < -function(t)exp((-1/2)*(t^2))$
$i1 < -integrate(t, lower = 0, upper = up)$
1.253314¡-1.253314
a¡-seq(0.1,1,0.01)

b¡-7
n¡-1
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v1 < -3.885669 * s$
n¡-2
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v2 < -22.74726 * s$
n¡-3
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v3 < -161.9029 * s$
n¡-4
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v4 < -1326.924 * s$
$v < -v2 - (v1^2)$
$ass < -(v3 - (3 * v1 * v2) + (2 * (v1^3)))/(v^3/2)$
$ct < -((v4 - (4 * v1 * v3)) + (6 * (v2) * (v1^2)) - 3 * (v1^4))/(v^2)$
lines(a,ass,lty=4,lwd=2)
legend(-.65,1,c("b=1","b=3","b=5","b=7"), lty=c(1,2,3,4),lwd=c(2,2,2,2))

Assimetria em função do parâmetro b

teta¡-55
alfa¡-1
x¡-seq(0,100,.5)
$up < -(max(x)/teta)^alfa$
$t < -function(t)exp((-1/2) * (t^2))$
$i1 < -integrate(t, lower = 0, upper = up)i1$
valor¡-0.8556244
a¡-1
b¡-seq(0,5,.1)
n¡-1
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v1 < -3.885669 * s$
n¡-2
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$

$v2 < -22.74726 * s$
n¡-3
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v3 < -161.9029 * s$
n¡-4
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v4 < -1326.924 * s$
$v < -v2 - (v1^2)$
$ass < -(v3 - (3 * v1 * v2) + (2 * (v1^3)))/(v^3/2)$
$ct < -((v4 - (4 * v1 * v3)) + (6 * (v2) * (v1^2)) - 3 * (v1^4))/(v^2)vassct$
plot(c(2,5),c(0,10), type="n", xlab="b", ylab="Assimetria",main=) lines(b,ass,lty=1,lwd=2)
teta¡-55
alfa¡-1
x¡-seq(0,100,.5)
$up < -(max(x)/teta)^alfa$
$t < -function(t)exp((-1/2) * (t^2))$
$i1 < -integrate(t, lower = 0, upper = up)$
a¡-1.2
b¡-seq(0,5,.1)
n¡-1
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v1 < -3.885669 * s$
n¡-2
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v2 < -22.74726 * s$
n¡-3
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v3 < -161.9029 * s$
n¡-4
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v4 < -1326.924 * s$
$v < -v2 - (v1^2)$
$ass < -(v3 - (3 * v1 * v2) + (2 * (v1^3)))/(v^3/2)$
$ct < -((v4 - (4 * v1 * v3)) + (6 * (v2) * (v1^2)) - 3 * (v1^4))/(v^2)$
lines(b,ass,lty=2,lwd=2)
teta¡-55

alfa¡-1
x¡-seq(0,100,.5)
$up < -(max(x)/teta)^alfa$
$t < -function(t)exp((-1/2) * (t^2))$
$i1 < -integrate(t, lower = 0, upper = up)$
a¡-1.4
b¡-seq(0,5,.1)
n¡-1
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v1 < -3.885669 * s$
n¡-2
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v2 < -22.74726 * s$
n¡-3
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v3 < -161.9029 * s$
n¡-4
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v4 < -1326.924 * s$
$v < -v2 - (v1^2)$
$ass < -(v3 - (3 * v1 * v2) + (2 * (v1^3)))/(v^3/2)$
$ct < -((v4 - (4 * v1 * v3)) + (6 * (v2) * (v1^2)) - 3 * (v1^4))/(v^2)$
lines(b,ass,lty=3,lwd=2)
teta¡-55
alfa¡-1
x¡-seq(0,100,.5)
$up < -(max(x)/teta)^alfa$
$t < -function(t)exp((-1/2) * (t^2))$
$i1 < -integrate(t, lower = 0, upper = up)$
a¡-1.6
b¡-seq(0,5,.1)
n¡-1
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v1 < -3.885669 * s$
n¡-2
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$

$v2 < -22.74726 * s$
n¡-3
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v3 < -161.9029 * s$
n¡-4
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v4 < -1326.924 * s$
$v < -v2 - (v1^2)$
$ass < -(v3 - (3 * v1 * v2) + (2 * (v1^3)))/(v^3/2)$
$ct < -((v4 - (4 * v1 * v3)) + (6 * (v2) * (v1^2)) - 3 * (v1^4))/(v^2)$
lines(b,ass,lty=4,lwd=2)
legend(1.87,10.4,c("a=1","a=1.2","a=1.4","a=1.6"), lty=c(1,2,3,4),lwd=c(2,2,2,2))

A.6 Programa no software R para os gráficos da curtose, em função dos parâmetros (a e b), da distribuição beta generalizada semi-normal

Curtose em função do parâmetro a

rm(list=ls(all=TRUE))
teta¡-55
alfa¡-1
x¡-seq(0,100,.5)
$up < -(max(x)/teta)^a lfa$
$t < -function(t)exp((-1/2) * (t^2))$
$i1 < -integrate(t, lower = 0, upper = up)$
1.253314¡-1.253314
a¡-seq(0.1,1,0.01)
b¡-1
n¡-1
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v1 < -3.885669 * s$
n¡-2
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v2 < -22.74726 * s$
n¡-3
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v3 < -161.9029 * sn < -4$
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$

$s < -((2^(b-1)) * ((((2*1.253314)-1)^(a-1)) * ((1-1.253314)^(b-1))))/beta(a,b)$
$v4 < -1326.924 * s$
$v < -v2 - (v1^2) ass < -(v3 - (3*v1*v2) + (2*(v1^3)))/(v^3/2)$
$ct < -((v4 - (4*v1*v3)) + (6*(v2)*(v1^2)) - 3*(v1^4))/(v^2)$
par(mfrow=c(1,2)) plot(c(-.5,1),c(0,5), type="n", xlab="a", ylab="Curtose",main=)
lines(a,ass,lty=1,lwd=2)
teta¡-55
alfa¡-1
x¡-seq(0,100,.5)
$up < -(max(x)/teta)^alfa$
$t < -function(t)exp((-1/2)*(t^2))$
$i1 < -integrate(t, lower = 0, upper = up)$
1.253314¡-1.253314
a¡-seq(0.1,1,0.01)
b¡-3
n¡-1
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2*1.253314)-1)^(a-1)) * ((1-1.253314)^(b-1))))/beta(a,b)$
$v1 < -3.885669 * s$
n¡-2
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2*1.253314)-1)^(a-1)) * ((1-1.253314)^(b-1))))/beta(a,b)$
$v2 < -22.74726 * s$
n¡-3
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2*1.253314)-1)^(a-1)) * ((1-1.253314)^(b-1))))/beta(a,b)$
$v3 < -161.9029 * s$
n¡-4
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2*1.253314)-1)^(a-1)) * ((1-1.253314)^(b-1))))/beta(a,b)$
$v4 < -1326.924 * s$
$v < -v2 - (v1^2)$
$ass < -(v3 - (3*v1*v2) + (2*(v1^3)))/(v^3/2)$
$ct < -((v4 - (4*v1*v3)) + (6*(v2)*(v1^2)) - 3*(v1^4))/(v^2)$
lines(a,ct,lty=2,lwd=2)
teta¡-55
alfa¡-1
x¡-seq(0,100,.5)
$up < -(max(x)/teta)^alfa$
$t < -function(t)exp((-1/2)*(t^2))$
$i1 < -integrate(t, lower = 0, upper = up)$
1.253314¡-1.253314
a¡-seq(0.1,1,0.01)
b¡-5

n¡-1
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v1 < -3.885669 * s$
n¡-2
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v2 < -22.74726 * s$
n¡-3
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v3 < -161.9029 * s$
n¡-4
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v4 < -1326.924 * s$
$v < -v2 - (v1^2)$
$ass < -(v3 - (3 * v1 * v2) + (2 * (v1^3)))/(v^3/2)$
$ct < -((v4 - (4 * v1 * v3)) + (6 * (v2) * (v1^2)) - 3 * (v1^4))/(v^2)$
lines(a,ct,lty=3,lwd=2)
teta¡-55
alfa¡-1
x¡-seq(0,100,.5)
$up < -(max(x)/teta)^a lfa$
$t < -function(t)exp((-1/2) * (t^2))$
$i1 < -integrate(t, lower = 0, upper = up)$
1.253314¡-1.253314
a¡-seq(0.1,1,0.01)
b¡-7
n¡-1
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v1 < -3.885669 * s$
n¡-2
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v2 < -22.74726 * s$
n¡-3
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v3 < -161.9029 * s$

n¡-4
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * 1.253314) - 1)^(a-1)) * ((1 - 1.253314)^(b-1))))/beta(a,b)$
$v4 < -1326.924 * s$
$v < -v2 - (v1^2)$
$ass < -(v3 - (3 * v1 * v2) + (2 * (v1^3)))/(v^3/2)$
$ct < -((v4 - (4 * v1 * v3)) + (6 * (v2) * (v1^2)) - 3 * (v1^4))/(v^2)$
lines(a,ct,lty=4,lwd=2)
legend(1.4,10.25,c("b=1","b=3","b=5","b=7"), lty=c(1,2,3,4),lwd=c(2,2,2,2))

Curtose em função do parâmetro b

teta¡-55
alfa¡-1
x¡-seq(0,100,.5)
$up < -(max(x)/teta)^a lfa$
$t < -function(t)exp((-1/2) * (t^2))$
$i1 < -integrate(t, lower = 0, upper = up)i1$
valor¡-0.8556244
a¡-1
b¡-seq(0,5,.1)
n¡-1
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a,b)$
$v1 < -3.885669 * s$
n¡-2
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a,b)$
$v2 < -22.74726 * s$
n¡-3
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a,b)$
$v3 < -161.9029 * s$
n¡-4
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^a lfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a,b)$
$v4 < -1326.924 * s$
$v < -v2 - (v1^2)$
$ass < -(v3 - (3 * v1 * v2) + (2 * (v1^3)))/(v^3/2)$
$ct < -((v4 - (4 * v1 * v3)) + (6 * (v2) * (v1^2)) - 3 * (v1^4))/(v^2)vassct$
plot(c(2,5),c(0,10), type="n", xlab="b", ylab="Curtose",main=) lines(b,ass,lty=1,lwd=2)
teta¡-55
alfa¡-1

x¡-seq(0,100,.5)
$up < -(max(x)/teta)^alfa$
$t < -function(t)exp((-1/2) * (t^2))$
$i1 < -integrate(t, lower = 0, upper = up)$
a¡-1.2
b¡-seq(0,5,.1)
n¡-1
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v1 < -3.885669 * s$
n¡-2
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v2 < -22.74726 * s$
n¡-3
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v3 < -161.9029 * s$
n¡-4
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v4 < -1326.924 * s$
$v < -v2 - (v1^2)$
$ass < -(v3 - (3 * v1 * v2) + (2 * (v1^3)))/(v^3/2)$
$ct < -((v4 - (4 * v1 * v3)) + (6 * (v2) * (v1^2)) - 3 * (v1^4))/(v^2)$
lines(b,ct,lty=2,lwd=2)
teta¡-55
alfa¡-1
x¡-seq(0,100,.5)
$up < -(max(x)/teta)^alfa$
$t < -function(t)exp((-1/2) * (t^2))$
$i1 < -integrate(t, lower = 0, upper = up)$
a¡-1.4
b¡-seq(0,5,.1)
n¡-1
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v1 < -3.885669 * s$
n¡-2
$y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))$
$i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)$
$s < -((2^(b-1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a-1)) * ((1 - valor)^(b-1))))/beta(a, b)$
$v2 < -22.74726 * s$

```
n¡-3
y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))
i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)
s < -((2^(b - 1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a - 1)) * ((1 - valor)^(b - 1))))/beta(a, b)
v3 < -161.9029 * s
n¡-4
y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))
i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)
s < -((2^(b - 1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a - 1)) * ((1 - valor)^(b - 1))))/beta(a, b)
v4 < -1326.924 * s
v < -v2 - (v1^2)
ass < -(v3 - (3 * v1 * v2) + (2 * (v1^3)))/(v^3/2)
ct < -((v4 - (4 * v1 * v3)) + (6 * (v2) * (v1^2)) - 3 * (v1^4))/(v^2)
lines(b,ct,lty=3,lwd=2)
teta¡-55
alfa¡-1
x¡-seq(0,100,.5)
up < -(max(x)/teta)^alfa
t < -function(t)exp((-1/2) * (t^2))
i1 < -integrate(t, lower = 0, upper = up)
a¡-1.6
b¡-seq(0,5,.1)
n¡-1
y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))
i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)
s < -((2^(b - 1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a - 1)) * ((1 - valor)^(b - 1))))/beta(a, b)
v1 < -3.885669 * s
n¡-2
y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))
i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)
s < -((2^(b - 1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a - 1)) * ((1 - valor)^(b - 1))))/beta(a, b)
v2 < -22.74726 * s
n¡-3
y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))
i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)
s < -((2^(b - 1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a - 1)) * ((1 - valor)^(b - 1))))/beta(a, b)
v3 < -161.9029 * s
n¡-4
y < -function(y)((y^n) * (sqrt(2/pi) * (alfa/y) * ((y/teta)^alfa) * (exp(-1/2 * ((y/teta)^2 * alfa)))))
i2 < -integrate(y, lower = 0, upper = Inf)
s < -((2^(b - 1)) * ((((2 * valor) - 1)^(a - 1)) * ((1 - valor)^(b - 1))))/beta(a, b)
v4 < -1326.924 * s
v < -v2 - (v1^2)
ass < -(v3 - (3 * v1 * v2) + (2 * (v1^3)))/(v^3/2)
ct < -((v4 - (4 * v1 * v3)) + (6 * (v2) * (v1^2)) - 3 * (v1^4))/(v^2)
lines(b,ct,lty=4,lwd=2)
legend(3.25,4.5,c("a=1","a=1.2","a=1.4","a=1.6"), lty=c(1,2,3,4),lwd=c(2,2,2,2))
```

A.7 Programa no software R para simular dados da distribuição beta generalizada semi-normal

Simulação 1

```
rm(list=ls(all=TRUE)) set.seed(45)
a=0.9
b=3
theta=40
alpha=1.5
v < -rbeta(10000, a, b)
x < -theta * (qnorm((v + 1)/2))^(1/alpha)
f < -density(x)
hist(x, freq=FALSE, main=, ylab="f(x)", xlab="x")
lines(f, col="red")
```

Simulação 2

```
rm(list=ls(all=TRUE))
set.seed(0)
a=5
b=0.5
theta=25
alpha=0.5
v < -rbeta(10000, a, b)
y < -theta * (qnorm((v + 1)/2))^(1/alpha)
f < -density(y)
hist(y, freq=FALSE, main=, ylab="f(x)", xlab="x")
lines(f, col="red")
```

Simulação 3

```
rm(list=ls(all=TRUE))
set.seed(45)
a=2
b=2
theta=70
alpha=2.5
v < -rbeta(10000, a, b)
z < -theta * (qnorm((v + 1)/2))^(1/alpha)
f < -density(z)
hist(z, freq=FALSE, main=, ylab="f(x)", xlab="x")
lines(f, col="red")
```

Simulação 4

```
rm(list=ls(all=TRUE))
set.seed(45)
a=0.5
b=0.5
theta=55
alpha=10
```

$v < -rbeta(10000, a, b)$

$w < -theta * (qnorm((v + 1)/2))^(1/alpha)$

$f < -density(w)$

```
hist(w, freq=FALSE, main=, ylab="f(x)", xlab="x")
lines(f, col="red")
```