Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"

Extensões da distribuição gama generalizada: propriedades e aplicações

Marcelino Alves Rosa de Pascoa

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Ciências. Área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica

Piracicaba
2012

Marcelino Alves Rosa de Pascoa
Licenciado em matemática

Extensões da distribuição gama generalizada: propriedades e aplicações

Orientador: Prof . Dr. **EDWIN MOISES MARCOS ORTEGA**

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Ciências. Área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica

Piracicaba
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
DIVISÃO DE BIBLIOTECA - ESALQ/USP

Pascoa, Marcelino Alves Rosa de
Extensões da distribuição gama generalizada: propriedades e aplicações / Marcelino Alves Rosa de Pascoa. - - Piracicaba, 2012.
143 p. : il.

Tese (Doutorado) - - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", 2012.

1. Análise de sobrevivência 2. Dados censurados 3. Distribuições (Probabilidade) 4. Modelos matemáticos 5. Regressão linear 6. Verossimilhança I. Título

CDD 519.532
P281e

"Permitida a cópia total ou parcial deste documento, desde que citada a fonte – O autor"

DEDICATÓRIA

Aos meus pais,

Sebastião Rosa da Páscoa e Lucieni Alves Rosa da Páscoa, *pelo exemplo de vida, por sempre acreditarem em mim, por todo apoio e confiança em mim depositados, pois sem a participação de vocês não teria chegado até aqui.*

A minha noiva,

Renata Dantas Medrado, *por toda a compreensão, companherismo e imensurável amor, com você meus dias se tornam mais felizes.*

Ao meu irmão,

Daniel Alves Rosa de Pascoa, *pela amizade, incentivo, apoio e por fazer parte da minha vida.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, fortaleza em nossas vidas.

Meus pais, Sebastião Rosa da Páscoa e Lucieni Alves Rosa da Páscoa, pela vida, incentivo, pela proteção, pelo amor incondicional, por todo apoio e confiança em mim depositados. Meus orgulhos, meus espelhos.

Meu irmão Daniel Alves Rosa de Pascoa e minha cunhada Danyelle Nunes Matias Alves por deixarem minha vida mais alegre.

A minha noiva Renata Dantas Medrado, por toda ajuda, incentivo, ensinamentos, conselhos, amor sempre constante e por me fazer tão feliz

À Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" - ESALQ/USP, pela excelência acadêmica.

Ao Prof. Dr. Edwin Moises Marcos Ortega pela orientação, pela confiança em mim depositada, pelos ensinamentos compartilhados que foram fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa e pela grande amizade.

Ao Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro, pela amizade, por toda a colaboração e principalmente pela oportunidade de poder trabalhar ao seu lado.

Aos amigos Patrícia Ferreia Paranaíba, Renato Nunes Pereira e Tiago Almeida de Oliveira pelos ótimos momentos e apoio mútuo.

Aos amigos Elizabeth Mie Hashimoto e Rodrigo Rossetto Pescim pela amizade, ajuda e ensinamento no desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos dos cursos de mestrado e doutorado do Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP, em especial a Ana Patrícia Bastos Peixoto, Braga Júnior, Eduardo Monteiro, Epaminondas de Vasconcellos Couto, Fabiane de Lima Silva, Fernada Rizzato, Gilvano Ebling Brondani, Gláucia Tatiana Ferrari, Juliana Betini Fachini, Keliny Martins de Melo, Kuang Hongyu, Mariana Urbano, Renata Alcarde, Ricardo Alves de Olinda, Simone Sartório, Tiago Viana Flor de Santana, Vanderson Rabelo de Paula, pelo auxílio em momentos de dúvidas, e principalmente pela sincera amizade.

Aos professores do programa de Pós-graduação em Estatística e Experimentação Agronômica, Dr. César Gonçalves de Lima, Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio, Dr. Décio Barbin, Dr. Gabriel Adrián Sarriés, Dra. Roseli Aparecida Leandro, Dr. Sílvio Zocchi, Dra. Sônia Maria de Stefano Piedade, Dra. Taciana Villela

Savian e Dr. Vitor Augusto Ozaki por todos os ensinamentos e amizade.

Aos professores do Departamento de Estatística da UFMT, pelo incentivo, amizade e confiança em mim depositados.

A todos os alunos do curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, com os quais tive o prazer de conviver.

Aos meus tios e tias por compartilharem com muita atenção e carinho minha jornada acadêmica.

Aos meus primos e primas pela motivação e amizade.

A minha afilhada Maria Júlia, por sua alegria e graciosidade.

Às secretárias Luciane Brajão e Solange Paes de Assis Sabadin, pelo apoio, amizade, ajuda e confiança depositada em mim, que me ajudou muito durante esses quatro anos de doutorado.

Aos funcionários do Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP, Eduardo Bonilha, Jorge Alexandre Wiendl e Rosni Honofre Aparecido Pinto pela amizade, ajuda e apoio técnico.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pela concessão de bolsa de estudos.

A todos os educadores que passaram por minha vida e também àqueles que direta ou indiretamente contribuíram para conclusão deste trabalho, deixo aqui a minha imensa gratidão e carinho.

"***A dúvida é o princípio da sabedoria.***"

Aristóteles

"***A nossa maior glória não reside no fato de nunca cairmos, mas sim em levantarmo-nos sempre depois de cada queda.***"

Confúcio

SUMÁRIO

RESUMO 13
ABSTRACT 15
LISTA DE FIGURAS 17
LISTA DE TABELAS 19
1 INTRODUÇÃO 21
2 DESENVOLVIMENTO 23
2.1 Conceitos básicos em análise de sobrevivência 23
2.1.1 Distribuição do tempo de sobrevivência 24
2.1.2 O estimador de Kaplan-Meier 25
2.1.3 A função de verossimilhança em análise de sobrevivência 26
2.2 Distribuição gama generalizada 26
2.3 Classes de distribuições generalizadas 28
2.3.1 Classe de distribuições Marshall e Olkin 28
2.3.2 Classe de distribuições exponenciadas 30
2.3.3 Classe de distribuições estendidas 32
2.3.4 Classe de distribuições betas 34
2.3.5 Classe de distribuições Kumaraswamy 36
2.4 Modelo de regressão 37
2.4.1 Modelo de regressão locação-escala 38
2.5 Inferência estatística 39
2.5.1 Método de máxima verossimilhança 39
2.5.2 Análise bayesiana 40
2.6 Estatísticas AIC, BIC e CAIC 45
3 DISTRIBUIÇÃO KUMARASWAMY GAMA GENERALIZADA 47
3.1 Distribuição Kumaraswamy gama generalizada 47
3.2 Propriedades gerais 53
3.2.1 Momentos 54
3.2.2 Função geradora de momentos 56
3.2.3 Desvios médios 59
3.2.4 Confiabilidade 60
3.2.5 Estatística de ordem 61

3.3 Estimação de máxima verossimilhança com dados censurados 64
3.4 Análise bayesiana 65
3.5 APLICAÇÕES 67
3.5.1 Análise dos dados de Aarset 67
3.5.2 Análise dos dados de Aids 71
4 DISTRIBUIÇÃO KUMARASWAMY GAMA GENERALIZADA ESTENDIDA 77
4.1 Distribuição Kumaraswamy gama generalizada estendida 77
4.2 Propriedades gerais 79
4.2.1 Momentos 80
4.2.2 Função geradora de momentos 81
4.2.3 Desvios médios 82
4.2.4 Confiabilidade 83
4.2.5 Estatística de ordem 84
4.3 Modelo log-Kumaraswamy gama generalizada estendida 86
4.3.1 Momentos 88
4.4 Modelo de regressão log-Kumaraswamy gama generalizada estendida 91
4.5 Estimação de máxima verossimilhança 93
4.6 Análise bayesiana 95
4.7 Aplicação: dados de dependência química 97
5 DISTRIBUIÇÃO GAMA GENERALIZADA GEOMÉTRICA 103
5.1 Distribuição gama generalizada geométrica 103
5.2 Propriedades gerais 105
5.2.1 Momentos 107
5.2.2 Função geradora de momentos 109
5.2.3 Desvios médios 110
5.2.4 Confiabilidade 111
5.2.5 Estatística de ordem 113
5.3 Estimação de máxima verossimilhança 115
5.4 Análise Bayesiana 117
5.5 Aplicação: dados de *Nursing Activities Score* (NAS) 118
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 123

6.1 Conclusões 123
6.2 Pesquisas futuras 124
REFERÊNCIAS 125
APÊNDICES 133

RESUMO

Extensões da distribuição gama generalizada: propriedades e aplicações

A distribuição gama generalizada (GG) possui, como casos particulares, distribuição Weibull, log-normal, gama, qui-quadrado, entre outras. Por essa razão, ela é considerada uma distribuição flexível no ajuste dos dados. A ideia de Cordeiro e Castro (2011) foi utilizada para o desenvolvimento de duas novas distribuições de probabilidade a partir da distribuição GG. Uma delas é denominada de Kumaraswamy gama generalizada (KumGG) e possui cinco parâmetros; a outra distribuição é uma modificação de um dos parâmetros de forma da distribuição KumGG e foi denominada de distribuição Kumaraswamy gama generalizada estendida (KumGGE). Desenvolveu-se o modelo de regressão log-Kumaraswamy gama generalizada estendida. Além disso, a idéia de Adamidis e Loukas (1998) para modificar distribuições foi utilizada para a distribuição GG; essa nova distribuição foi nomeada de gama generalizada geométrica (GGG). A vantagem desses novos modelos reside na capacidade de acomodar várias formas da função risco eles também se mostraram úteis na discriminação de modelos. Para cada um dos modelos foram calculados os momentos, função geradora de momentos, os desvios médios, a confiabilidade e a função densidade de probabilidade da estatística de ordem. Para a estimação dos parâmetros, foram utilizados os métodos de máxima verossimilhança e bayesiano e, finalmente, para ilustrar a aplicação das novas distribuições foram analisados alguns conjuntos de dados reais.

Palavras-chave: Dados censurados; Gama generalizada; Máxima verossimilhança; Modelo de regressão; função de sobrevivência

ABSTRACT

Extensions of the generalized gamma distribution: properties and applications

The generalized gamma (GG) distribution has as particular cases the Weibull, log-normal, gamma and Chi-square distributions, among others. For this reason, it is considered a flexible distribution for fitting data. In this paper, the idea of Cordeiro and Castro (2011) is used to develop two new probability distributions based on the GG distribution. The first is called the generalized gamma Kumaraswamy (KumGG) and has five parameters, while the other involves a modification of one of the shape parameters of the KumGG distribution and is called the extended generalized gamma Kumaraswamy (KumGGE). Based in these, we develop the extended generalized log-Kumaraswamy regression model. Besides this, we employ the idea regarding modifying distributions of Adamidis and Loukas (1998) for the GG distribution, calling this new distribution the geometric generalized gamma (GGG). The advantage of these new models rests in their capacity to accommodate various risk function forms. They are also useful in model discrimination. We calculate the moments, moments generating function, mean deviations, reliability and probability density function of the order statistics. To estimate the parameters we use the maximum likelihood and Bayesian methods. Finally, to illustrate the application of the new distributions, we analyze some real data sets.

Keywords: Censored data; Generalized gamma; Maximum likelihood; Regression model; Survival function

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Gráficos ilustrativos de algumas curvas TTT 25
Figura 2 - Gráfico da função densidade da distribuição KumGG para diferentes valores de parâmetros 49
Figura 3 - (a) Gráfico da função de sobrevivência da distribuição KumGG para diferentes valores de λ. (b) Gráfico da função de sobrevivência da distribuição KumGG para diferentes valores de φ 50
Figura 4 - Funções risco da distribuição KumGG. (a) Gráfico da função risco na forma de banheira. (b) Gráfico da função risco na forma unimodal. (c) Gráfico da função risco nas formas crescente, decrescente e constante . . 50
Figura 5 - Assimetria e curtose da distribuição KumGG como uma função do parâmetro λ para valores selecionados de φ 57
Figura 6 - Assimetria e curtose da distribuição KumGG como uma função do parâmetro φ para valores selecionados de λ 57
Figura 7 - Curva TTT para os dados de Aarset 68
Figura 8 - (a) Densidades estimadas dos modelos para os dados de Aarset. (b) Estimativas da função de sobrevivência segundo Kaplan-Meier e segundo os modelos KumGG, GGE, GG, Weibull e beta Weibull, para os dados de Aarset 70
Figura 9 - Densidades marginais *a posteriori* para os parâmetros do modelo KumGG para os dados de Aarset 71
Figura 10 - Curva TTT para os dados de Aids 72
Figura 11 - Função de sobrevivência para alguns modelos ajustados e a função de sobrevivência empírica estimada pelo método de Kaplan-Meier dos dados de Aids 74
Figura 12 - Densidades marginais *a posteriori* para os parâmetros do modelo KumGG para os dados de Aids 75
Figura 13 - Gráfico da função densidade da distribuição KumGGE: (a) Para alguns valores de $\tau > 0$. (b) Para alguns valores de $\tau < 0$. (c) Para alguns valores de $\tau > 0$ e $\tau < 0$ 78

Figura 14 - Gráfico da função densidade da distribuição LKumGGE: (a) Para alguns valores de $q > 0$. (b) Para alguns valores de $q < 0$. (c) Para alguns valores de $q = 0$ 88
Figura 15 - Assimetria e curtose da distribuição LKumGGE como função do parâmetro λ para alguns valores de φ com $\mu = 1,5$, $\sigma = 2$ e $q = 0,5$ . . 91
Figura 16 - Assimetria e curtose da distribuição LKumGGE como função do parâmetro φ para alguns valores de λ com $\mu = 1,5$, $\sigma = 2$ e $q = 0,5$ . . 92
Figura 17 - Densidades marginais *a posteriori* para os parâmetros do modelo LKumGGE para os dados de dependência química 101
Figura 18 - Gráficos da função densidade GGG para valores de parâmetros selecionados 106
Figura 19 - Gráficos da função risco para valores de parâmetros selecionados 106
Figura 20 - Assimetria e curtose da distribuição GGG como uma função do parâmetro τ para valores selecionados de p 109
Figura 21 - (a) Densidades estimadas dos modelos para os dados de NAS. (b) Estimativas da função de sobrevivência segundo Kaplan-Meier e segundo os modelos GGG, WG e Weibull para os dados de NAS 120
Figura 22 - Densidades marginais *a posteriori* para os parâmetros do modelo GGG para os dados de NAS 121

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - EMVs dos parâmetros dos modelos KumGG, GGE, GG, W e BW para os dados de Aarset, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores das estatísticas AIC, BIC e CAIC 69
Tabela 2 - TRV para os dados de Aarset 69
Tabela 3 - Sumário *a posteriori* dos parâmetros do modelo KumGG para os dados de Aarset 70
Tabela 4 - EMVs dos parâmetros dos modelos KumGG, GGE, GG, W e BW para os dados de Aids, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores das estatísticas AIC, BIC e CAIC 73
Tabela 5 - TRV para os dados de Aids 73
Tabela 6 - Sumário *a posteriori* dos parâmetros do modelo KumGG para os dados de Aids 75
Tabela 7 - Estimativas dos parâmetros, erros-padrão, valor p e intervalos de confiança de 95% para o modelo LKumGGE, ajustado aos dados de dependência química 99
Tabela 8 - Estatísticas AIC, CAIC e BIC para comparar os modelos de regressão LKGG, LGGE, LGGEC, LGG e log-Weibull 100
Tabela 9 - TRV para os dados de dependência química 100
Tabela 10 - Sumário *a posteriori* dos parâmetros do modelo LKumGGE para os dados de dependência química 101
Tabela 11 - Alguns sub-modelos da distribuição GGG. 105
Tabela 12 - EMVs dos parâmetros dos modelos GGG, WG e Weibull para os dados de NAS, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores das estatísticas AIC, BIC e CAIC 119
Tabela 13 - Sumário *a posteriori* dos parâmetros do modelo GGG para os dados de NAS 120

1 INTRODUÇÃO

A análise de sobrevivência é uma das áreas da estatística que mais cresceram nas últimas décadas. A razão desse crescimento é o desenvolvimento e aprimoramento de técnicas estatísticas combinados com computadores cada vez mais eficientes (COLOSIMO; GIOLO, 2006). Uma evidência quantitativa desse sucesso é o número de aplicações em diversos campos, como medicina, biologia, saúde pública, epidemiologia, engenharia, economia, estudos demográficos, entre outros.

Os dados em análise de sobrevivência referem-se ao tempo até a ocorrência de um evento de interesse. Esse tempo é denominado tempo de falha e apresenta algumas características especiais. A primeira é que a variável resposta geralmente apresenta distribuição assimétrica positiva, não sendo, portanto, adequado assumir que tenha distribuição normal. A segunda característica é a presença de dados censurados, isto é, para alguns elementos em estudo não se conhece o tempo de interesse exato, tem-se apenas uma informação parcial.

Usualmente, dados censurados acontecem porque nem sempre é possível que o evento de interesse ocorra para todas as observações em teste. Existem diversos tipos de censuras e neste trabalho considerou-se censura à direita, não informativa e com o mecanismo aleatório. Além disso, é comum que a variável resposta (tempo até a ocorrência do evento de interesse) esteja relacionada com covariáveis que explicam a sua variabilidade. Para estudar o efeito dessas covariáveis sobre a variável resposta deve-se utilizar um modelo de regressão apropriado para dados censurados (SILVA, 2009). Os modelos de regressão paramétricos assumem que os dados seguem uma distribuição de probabilidade. Na análise de sobrevivência, as distribuições clássicas associadas à variável resposta são as distribuições exponencial, Weibull, log-normal, log-logística e gama generalizada, dentre outras (LAWLESS, 2003).

Por outro lado, nos últimos anos tem crescido muito a generalização e/ou a modificação de algumas distribuições utilizadas em análise de sobrevivência. Existem diferentes formas de se modificar uma distribuição de probabilidade. Algumas dessas classes de generalizações são as famílias de distribuições exponenciadas apresentadas inicialmente por Mudholkar; Srivastava e Freimer (1995), as famílias de distribuições obtidas pelo método desenvolvido por Marshall e Olkin (1997), as distribuições beta que receberam maior atenção após o trabalho de Eugene; Lee e Famoye (2002) e as distribuições

estendidas discutidas por Barros (2008).

Recentemente, Cordeiro e Castro (2011) apresentaram uma classe de generalização baseada na distribuição Kumaraswamy. A classe modela as seguintes formas de risco, crescente, decrescente, unimodal e forma de U ou de banheira. Cordeiro e Castro (2011) apresentaram ainda duas formas de expandir a função densidade de probabilidade (fdp) de uma distribuição Kumaraswamy generalizada em termos da série de potência ponderada. Rodrigues et al. (2011), desenvolveram a distribuição Weibull-binomial negativa, seguindo a idéia de Adamidis e Loukas (1998) para um processo de mistura de distribuições.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho foi introduzir duas novas distribuições, a distribuição Kumaraswamy gama generalizada e a distribuição gama generalizada geométrica. Um segundo objetivo foi estender a distribuição Kumaraswamy gama generalizada seguindo a idéia de Stacy e Mihram (1965) e apresentar o modelo de regressão log-Kumaraswamy gama generalizada estendida. Assim, o trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2 é apresentada uma revisão sobre análise de sobrevivência e as propostas de generalizar distribuições encontradas na literatura. Os métodos inferênciais são descritos. No Capítulo 3 é apresentada a distribuição Kumaraswamy gama generalizada. Alguns de seus sub-modelos são apresentados, as propriedades matemáticas da nova distribuição são estudadas. A nova distribuição é aplicada a dois conjuntos de dados reais. No Capítulo 4 são discutidas uma extensão da distribuição Kumaraswamy gama generalizada, bem como as propriedades matemáticas da distribuição. É proposto também o modelo de regressão log-Kumaraswamy gama generalizada estendida. Ajustou-se o modelo de regressão a um conjunto de dados reais pelos métodos de máxima verossimilhança e bayesiano. No Capítulo 5 apresenta-se a distribuição gama generalizada geométrica, bem como suas propriedades matemáticas. A análise de um conjunto de dados reais é feita pelos métodos de máxima verossimilhança e bayesiano. Por fim, o Capítulo 6 relata as principais conclusões e descreve o direcionamento da continuidade deste trabalho.

2 DESENVOLVIMENTO

Neste capítulo é feita uma revisão sucinta sobre análise de sobrevivência e sobre classes de generalizações de distribuições, sobre os modelos de regressão, assim como dos métodos inferenciais para análise de dados de sobrevivência, formando o embasamento teórico necessário para o entendimento do trabalho relacionado aos objetivos da pesquisa.

2.1 Conceitos básicos em análise de sobrevivência

A análise de sobrevivência é caracterizada pelo fato de que a variável resposta é composta de dois fatores: o tempo até a ocorrência de um evento de interesse e as censuras (COLOSIMO; GIOLO, 2006). O evento em estudo é denominado falha e o tempo até a ocorrência da falha é chamado de tempo de falha, enquanto que a censura é o registro parcial do tempo de falha, devido à perda ou retirada de um elemento do estudo. Por exemplo, no experimento conduzido por Elliott et al. (2000), 50 gatos domésticos foram observados. Os tempos de falha foram considerados como o tempo (em dias) a partir do diagnóstico de insuficiência renal até a sua morte. Por outro lado, se os animais não morreram até o final do estudo ou se morreram por outras causas, os tempos são considerados tempos censurados.

A censura é dita ser do tipo I quando ocorre devido ao término do estudo após um período de tempo pré-determinado, do tipo II quando ocorre devido ao término do estudo após um número de falhas fixado previamente, ou pode ser aleatória, sendo a mais comum em situações práticas.

As censuras previamente citadas são conhecidas como censura à direita, pois a falha ocorre sempre à direita do tempo registrado. Existem ainda outros mecanismos de censura, como, por exemplo, as censuras à esquerda, em que o tempo registrado é maior que o tempo de falha e censura intervalar, na qual não se sabe o tempo exato de falha, sendo que a única informação disponível é que o tempo de falha ocorreu em um certo intervalo de tempo. Neste trabalho, entretanto, será adotado apenas o mecanismo de censura aleatória que será denominado simplesmente por censura.

Dessa forma, para uma definição de censura aleatória, considere T uma variável aleatória não negativa que representa o tempo de falha de um elemento e C uma variável aleatória, independente de T, que representa o tempo de censura associado a esse elemento. Assim, os dados observados são representados por $t = min(T, C)$ e δ o

indicador de censura, dado por:

$$\delta = \begin{cases} 1 & , \quad T \leq C \\ 0 & , \quad T > C \ , \end{cases}$$

em que $\delta = 0$ indica censura e $\delta = 1$ indica falha.

A distribuição de probabilidade da variável aleatória T pode ser especificada por meio da função densidade de probabilidade, função de sobrevivência ou função risco, sendo as três formas equivalentes.

2.1.1 Distribuição do tempo de sobrevivência

Seja T uma variável aleatória, não negativa, que representa o tempo de vida de um indivíduo proveniente de uma dada população homogênea. A distribuição de T pode ser caracterizada por meio da função densidade de probabilidade, função de sobrevivência ou função risco.

A função densidade de probabilidade, $f(t)$, é definida por:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\partial F(t)}{\partial t},$$

em que $F(t) = P[T \leq t]$ é a função de distribuição acumulada (fda) de T. No contexto da análise de sobrevivência, a função $f(t)$ pode ser interpretada como a probabilidade de um indivíduo sofrer o acontecimento de interesse no intervalo de tempo Δt e possui duas propriedades:

$$f(t) \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_0^\infty f(t)dt = 1.$$

A função de sobrevivência, $S(t)$, é definida com sendo a probabilidade de ocorrência do acontecimento de interesse após o instante t. A função de sobrevivência é definida da seguinte forma:

$$S(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(x)dx,$$

em que $\lim_{t \to 0} S(t) = 1$ e $\lim_{t \to \infty} S(t) = 0$.

A função risco, $h(t)$, representa o risco instantâneo no instante t condicional à sobrevivência até o tempo t e é definida por:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t \mid T \geq t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{S(t)}.$$

Uma forma empírica de determinar o comportamento da função risco se dá por meio da construção do gráfico do tempo total em teste (curva TTT), proposto por Aarset (1987). A curva TTT é obtida construindo um gráfico de

$$G\left(\frac{r}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{r} T_{i:n} + (n-r)T_{r:n}}{\sum_{i=1}^{n} T_{i:n}} \quad \text{por} \quad \frac{r}{n}$$

em que n é o tamanho da amostra, $r = 1, \ldots, n$ e $T_{i:n}, i = 1, \ldots, n$ são estatísticas de ordem da amostra (MUDHOLKAR; SRIVASTAVA; KOLLIA, 1996).

Este gráfico apresenta uma reta diagonal se o risco for constante (reta A), uma curva convexa se a função risco é decrescente (curva B) e côncava se o risco é crescente (curva C), uma curvatura primeiramente convexa e depois côncava (curva D) se o risco é em forma de "U", e no caso reverso (curva E) é unimodal. A Figura 1 ilustra as diversas formas que a curva TTT pode apresentar.

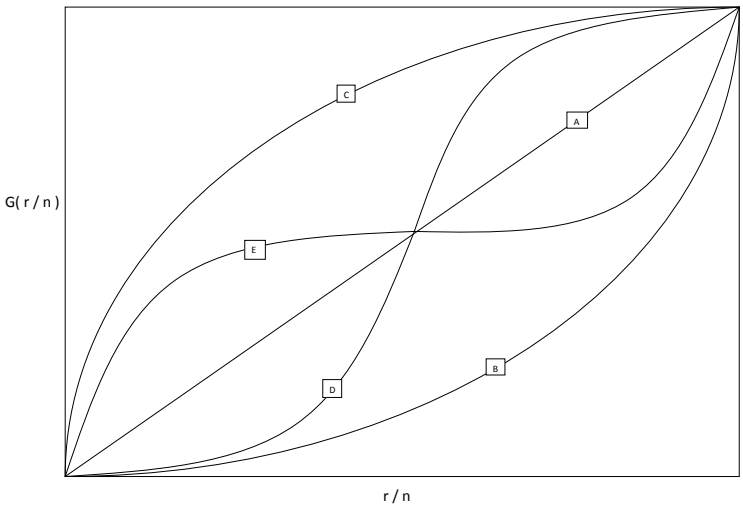

Figura 1 - Gráficos ilustrativos de algumas curvas TTT

2.1.2 O estimador de Kaplan-Meier

Kaplan e Meier (1958), propuseram um estimador não-paramétrico para a função de sobrevivência, quando se tem a presença de uma amostra censurada. Esse estimador é designado por estimador de Kaplan-Meier ou estimador produto-limite.

O estimador considera na sua construção um número de intervalos de tempo igual ao número de falhas distintas, sendo os limites dos intervalos definidos pelos tempos de falha da amostra.

Dessa forma, o estimador de Kaplan-Meier pode ser definido como:

$$\widehat{S}(t) = \prod_{j:t_{(j)} \leq t} \left(\frac{n_j - d_j}{n_j} \right) = \prod_{j:t_{(j)} \leq t} \left(1 - \frac{d_j}{n_j} \right),$$

em que $t_{(1)}, t_{(2)}, \ldots, t_{(k)}$ representam os k tempos de falha distintos e ordenados, d_j é o número de falhas em $t_{(j)}$, $j = 1, \ldots, k$, e n_j é o número de indivíduos sob risco em $t_{(j)}$, ou seja, os indivíduos que não falharam e não foram censurados até o instante imediatamente anterior a $t_{(j)}$.

2.1.3 A função de verossimilhança em análise de sobrevivência

Utilizando o método de máxima verossimilhança é possível incorporar as censuras, presentes em muitos dados de tempo de vida.

Considere uma amostra de variáveis aleatórias independentes $T_1, T_2, \ldots, T_n$ de tempos de sobrevivência. Supondo que os dados consistem de n pares observados $(t_1, \delta_1), (t_2, \delta_2), \ldots, (t_n, \delta_n)$ em que t_i é o tempo de sobrevivência ou censura, δ_i é o indicador de censura. Nesse caso, a função de verossimilhança considerando censura não informativa é dada por:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} \left[f(t_i, \boldsymbol{\theta}) \right]^{\delta_i} \left[S(t_i, \boldsymbol{\theta}) \right]^{1-\delta_i},$$

em que $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros desconhecidos, $f(t_i)$ e $S(t_i)$ são as funções densidade de probabilidade e de sobrevivência para cada variável aleatória T_i, respectivamente. Observa-se que a contribuição de cada observação não censurada é a sua função de densidade e que cada observação censurada contribui com a função de sobrevivência.

2.2 Distribuição gama generalizada

A distribuição gama generalizada (GG) foi introduzida por Stacy (1962) e despertou o interesse de diversos pesquisadores pelo fato de representar uma família paramétrica que possui como casos particulares a distribuição exponencial quando $\tau = k = 1$ na equação (1), se $\tau = 1$ obtém-se a distribuição gama. Para $k = 1$ tem-se a distribuição Weibull, para $\alpha = 1/\lambda$, $\tau = 2$ e $k = 1$ obtém-se a distribuição Rayleigh;

outros sub-modelos podem ser vistos por exemplo em Lawless (2003). Esta propriedade da distribuição GG faz com que a mesma seja útil, por exemplo, na discriminação de modelos probabilísticos.

Nos últimos anos diversos trabalhos envolvendo a distribuição GG foram propostos, entre os quais destacam-se, por exemplo, Nadarajah e Gupta (2007) que usaram a distribuição com aplicações em dados de seca. Ali; Woo e Nadarajah (2008) derivou a distribuição exata do produto X_1X_2 em que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes GG, provenientes dos resultados de dados de seca. Ortega; Paula e Bolfarine (2008) compararam três tipos de resíduos baseados no componente de *deviance* no modelo de regressão GG usando observações censuradas. Nadarajah (2008a) apresentou um estudo sobre o uso da distribuição GG em engenharia elétrica e eletrônica. Cox (2008) discutiu e comparou a família F-generalizada com o modelo GG. Malhotra; Sharma e Kaler (2009) modelaram o sinal *wireless* por meio da distribuição GG e analisaram o desempenho do sinal. Recentemente, Cordeiro; Ortega e Silva (2011) propuseram a distribuição gama generalizada exponenciada.

Dessa forma, a função densidade de probabilidade da distribuição GG proposta por Stacy (1962) é dada por:

$$g(t) = \frac{\tau}{\alpha\Gamma(k)}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau k-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right], \quad t > 0, \tag{1}$$

em que $\alpha > 0$ é o parâmetro de escala, $\tau > 0$ e $k > 0$ são os parâmetros de forma e $\Gamma(k)$ é a função gama, definida por:

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{k-1}\exp(-t)dt.$$

Se T é uma variável aleatória positiva com distribuição GG com parâmetros α, τ e k, então denota-se que $T \sim \mathrm{GG}(\alpha, \tau, k)$.

Vários trabalhos estudaram as propriedades da distribuição GG, dentre os quais destacam-se Stacy e Mihram (1965), Prentice (1974), Farewell e Prentice (1977) e Lawless (1980, 2003). A média e a variância da distribuição GG são dadas por:

$$E(T) = \frac{\alpha\Gamma\left(\frac{\tau k+1}{\tau}\right)}{\Gamma(k)} \quad \text{e} \quad V(T) = \frac{\alpha^2}{\Gamma(k)}\left\{\Gamma\left(\frac{\tau k+2}{\tau}\right) - \frac{\left[\Gamma\left(\frac{\tau k+1}{\tau}\right)\right]^2}{\Gamma(k)}\right\}.$$

A função de distribuição acumulada $G(t)$, função de sobrevivência $S(t)$ e função risco $h(t)$ são expressas, respectivamente, por:

$$G(t) = P[T \leq t] = \frac{\gamma(k, (t/\alpha)^{\tau})}{\Gamma(k)} = \frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}} w^{k-1}\exp(-w)dw = \gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right], \tag{2}$$

$$S(t) = 1 - G(t) = 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \quad \text{e}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{t^{\tau k - 1} \exp\left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau} \right]}{\int_0^{\infty} x^{\tau k - 1} \exp\left[- \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right] dx},$$

em que $\gamma(k, x) = \int_0^x w^{k-1} e^{-w} dw$ é a função gama incompleta e $\gamma_1(k, x)$ é a razão da função gama incompleta, definida por $\gamma_1(k, x) = \gamma(k, x)/\Gamma(k)$, que é facilmente implementada em vários pacotes estatísticos (R, SAS, Ox).

Algumas outras propriedades da distribuição GG podem ser encontradas em Lawless (2003).

2.3 Classes de distribuições generalizadas

Diversos autores como, por exemplo, Eugene; Lee e Famoye (2002), Cordeiro e Castro (2011) e Alexander et al. (2011) têm, nos últimos anos, concentrado seus esforços na generalização de família de distribuições de probabilidade obtendo, dessa forma, maior flexibilidade e, consequentemente, ganho na modelagem de dados e na capacidade de incorporar um grande número de sub-modelos nas distribuições generalizadas.

Neste trabalho será adotado o termo distribuição base, indicando a família de distribuições a ser generalizada, e será denotado por $G(t)$ a função de distribuição acumulada da distribuição base, e por $g(t)$ a função densidade de probabilidade da distribuição base.

Algumas das classes de generalizações mais estudadas nos últimos anos são as famílias de distribuições exponenciadas apresentadas inicialmente por Mudholkar; Srivastava e Freimer (1995); as famílias de distribuições obtidas pelo método desenvolvido por Marshall e Olkin (1997); as distribuições beta que receberam maior atenção após o trabalho de Eugene; Lee e Famoye, (2002); as distribuições estendidas discutidas por Barros (2008); e, recentemente, as distribuições Kumaraswamy desenvolvida por Cordeiro e Castro (2011). Nas seguintes sub-seções essas classes de distribuições serão discutidas e os principais trabalhos apresentados.

2.3.1 Classe de distribuições Marshall e Olkin

Marshall e Olkin (1997) apresentaram um método para obter generalizações de distribuições de probabilidade assumindo um novo parâmetro, $v > 0$, em uma família

de distribuições (distribuições bases), dada pela equação

$$S^*(t) = \frac{vS(t)}{1-(1-v)S(t)} = \frac{vS(t)}{G(t)+vS(t)}, \qquad v > 0, \tag{3}$$

em que $G(t)$ e $S(t)$ são a função de distribuição acumulada e a função de sobrevivência da distribuição base, respectivamente e $S^*(t)$ é a função de sobrevivência da nova família de distribuição, agora com o parâmetro adicional v, obtida da relação (3). Observa-se que se $v = 1$ então $S^*(t) = S(t)$.

Se a distribuição base tem função densidade de probabilidade $g(t)$ e função risco $h(t)$, então a nova função densidade de probabilidade, correspondente a $S^*(t)$, é obtida por:

$$f^*(t) = \frac{vg(t)}{[G(t)+vS(t)]^2} \tag{4}$$

e a função risco por:

$$h^*(t) = \frac{h(t)}{1-(1-v)S(t)} = \frac{h(t)}{G(t)+vS(t)}.$$

Marshall e Olkin (1997) modificaram a distribuição exponencial baseados na equação (4) atribuindo o nome de distribuição exponencial com dois parâmetros, que pode servir como concorrente de distribuições já conhecidas de dois parâmetros como as distribuições Weibull, gama e lognormal. A mesma modificação foi realizada com a distribuição Weibull, a qual é denominada de Weibull com três parâmetros. Marshall e Olkin também desenvolveram as versões bivariadas destas distribuições.

A distribuição Weibull com três parâmetros, obtida por Marshall e Olkin (1997) foi estudada por Zhang e Xie (2007), que destacam que uma das propriedades importantes dessa distribuição é que sua função risco modela forma crescente, decrescente ou inicialmente crescente, e então decrescente, e eventualmente crescente e tem como caso particular a distribuição Weibull para $v = 1$. A caracterização do modelo é estudada, baseando-se no gráfico de probabilidade Weibull (WPP). Os autores apresentaram um procedimento de estimação de parâmetros com base no WPP e adicionalmente desenvolveram o método de estimação por máxima verossimilhança.

Utilizando o método apresentado por Marshall e Olkin (1997), Thomas e Jose (2004) introduziram a distribuição Marshall-Olkin semi-pareto bivariada e Marshall-Olkin pareto bivariada e estudaram várias características dessas distribuições.

Recentemente, Ghitany; Al-Awadhi e Alkhalfan (2007) investigaram as propriedades da inclusão de um novo parâmetro pelo método de Marshall e Olkin (1997),

baseados no modelo lomax, também conhecido como distribuição Pareto de segundo tipo. Os autores mostraram que a distribuição proposta pode ser expressa como uma distribuição de mistura do modelo exponencial. Condições simples e suficientes para o comportamento de forma das funções densidade de probabilidade e risco são fornecidas. O método de máxima verossimilhança foi utilizado para estimar os parâmetros da distribuição.

E por fim, Rao; Ghitany e Kantam (2009) desenvolveram um plano de teste de confiabilidade para não-rejeição ou rejeição de muitos produtos submetidos a inspeção, em que o tempo de vida segue a distribuição exponencial com dois parâmetros de Marshall-Olkin.

2.3.2 Classe de distribuições exponenciadas

A classe de distribuições exponenciadas é obtida elevando-se ao expoente υ ($\upsilon > 0$) a função de distribuição acumulada de uma distribuição base, isto é,

$$F(t) = G(t)^{\upsilon} \ , \tag{5}$$

e, consequentemente, a função densidade de probabilidade é dada por $f(t) = \upsilon g(t) G(t)^{\upsilon - 1}$. As funções de sobrevivência e risco são dadas por:

$$S(t) = 1 - G(t)^{\upsilon} \quad \text{e} \quad h(t) = \frac{\upsilon g(t) G(t)^{\upsilon - 1}}{1 - G(t)^{\upsilon}} \ ,$$

respectivamente.

O ganho dessa classe de distribuições é que o novo parâmetro υ flexibiliza a distribuição base.

Dentro dessa classe de distribuições, cita-se a Weibull exponenciada, apresentada por Mudholkar; Srivastava e Freimer (1995), que é a generalização da distribuição Weibull com parâmetros $\alpha > 0$ e $\gamma > 0$. A distribuição Weibull exponenciada apresenta diferentes formas da função risco, como, por exemplo, formas crescente, decrescente, de banheira e unimodal, obtidas de quatro regiões do espaço paramétrico determinados pelas equações $\alpha = 1$ e $\upsilon\alpha = 1$. A distribuição Weibull exponenciada é indicada para modelar dados em que o risco é não-monótono e pode ser utilizada para testar a qualidade do ajuste da distribuição Weibull como sub-modelo. Cinco conjuntos de dados sobre falha de motor de ônibus e dados de experimento clínico de câncer de cabeça e pescoço são analisados pelos autores, ultilizando a distribuição Weibull exponenciada.

Gupta e Kundu (1999) propuseram a distribuição exponencial generalizada (que é a modificação da distribuição exponencial com parâmetros de escala $\lambda > 0$ e locação $-\infty < \mu < \infty$, cuja função de distribuição acumulada é dada por $G(t) = 1 - e^{-(t-\mu)/\lambda}$). Os autores também estudaram diferentes propriedades desta distribuição, que é um caso particular da distribuição Weibull exponenciada proposta por Mudholkar; Srivastava e Freimer (1995), quando o parâmetro de locação é igual a zero. Gupta e Kundu (1999) observam que esta família possui algumas características interessantes que são similares àquelas das distribuições gama e Weibull. Dessa forma, este modelo pode ser usado como alternativa aos modelos gama e Weibull em diversas situações. Um conjunto de dados de testes sobre a resistência de rolamentos de esfera, citado em Lawless (2003), foi analisado e, a partir dele, percebeu-se que o ajuste da distribuição exponencial generalizada foi melhor que o das ditribuições Weibull e gama com três parâmetros.

Algumas das propriedades da distribuição exponencial exponenciada, discutida por Gupta; Gupta e Gupta (1998), foram estudadas por Gupta e Kundu (2001). A distribuição exponencial exponenciada tem dois parâmetros (escala e forma) similares à distribuição Weibull e gama. Portanto, essa distribuição também pode ser usada como uma possível alternativa às distribuições Weibull e gama. Dois conjuntos de dados reais de tempo de falha são ajustados ao modelo proposto. O primeiro conjunto de dados refere-se à resistência de rolamentos de esfera, citado em Lawless (2003), e o segundo conjunto refere-se ao tempo de falha de sistema de condicionamento de ar de um avião, citado em Linhart e Zucchini (1986), e comparados ao ajuste do modelo com os modelos Weibull e gama. O modelo exponencial exponenciado teve melhor ajuste em um dos conjuntos de dados e o modelo Weibull ajustou-se melhor no outro conjunto de dados.

Por outro lado, Nadarajah e Kotz (2006) discutiram algumas distribuições exponenciadas e suas extensões, e introduziram a distribuição gama exponenciada, obtida a partir da expressão (5) e substituindo $G(t)$ pela função de distribuição acumulada da distribuição gama de um parâmetro.

Recentemente, Carrasco; Ortega e Cordeiro (2008) definiram e estudaram a distribuição Weibull modificada generalizada que modela formas da função risco monótonas e não monótonas, e tem como sub-modelos as distribuições Weibull, valor extremo, Weibull exponenciada, Rayleigh generalizada e Weibull modificada, entre outras. Os autores também apresentaram duas representações dos momentos em série infinita e a

função densidade de probabilidade das estatísticas de ordem foi obtida. A estimação dos parâmetros foi obtida pelo método de máxima verossimilhança e a matriz de informação observada foi apresentada.

Finalmente, Alkasasbeh e Raqab (2009) estudaram a distribuição logística generalizada, definida por Balakrishnan e Leng (1988) e consideraram a estimação de máxima verossimilhança dos parâmetros, assim como outros cinco procedimentos de estimação, e compararam a performance destes procedimentos por meio de extensiva simulação numérica.

2.3.3 Classe de distribuições estendidas

A classe de distribuições estendidas, apresentada por Barros (2008), é uma variação das distribuições exponenciadas em que se eleva ao expoente ω, $(\omega > 0)$ a função de sobrevivência $(1 - G(t))$, ao invés da função de distribuição acumulada, ou seja:

$$F(t) = 1 - [1 - G(t)]^{\omega}, \tag{6}$$

e portanto $f(t) = \omega g(t)[1 - G(t)]^{\omega-1}$. As funções de sobrevivência e risco são dadas respectivamente pelas equações:

$$S(t) = [1 - G(t)]^{\omega} \quad \text{e} \quad h(t) = \frac{\omega g(t)}{1 - G(t)}.$$

A característica principal dessa classe é a maior flexibilidade, devido ao parâmetro adicional ω, e por possuir forma fechada para a maioria das funções densidade de probabilidade. Porém, observa-se que o parâmetro ω atua apenas de forma multiplicativa na função risco, e, portanto, não modifica a forma básica da função risco da distribuição base.

Barros (2008) estudou a classe de distribuições estendidas e demonstrou a consistência dessa nova generalização. A função densidade de probabilidade, função de distribuição acumulada e os momentos de várias distribuições estendidas são descritas por Barros (2008), porém a mesma não desenvolveu nenhum tratamento mais detalhado das distribuições apresentadas e não fez nenhuma aplicação mostrando a eficiência dessas novas distribuições.

As distribuições discutidas por Barros (2008) foram as distribuições exponencial estendida, uniforme estendida, Weibull estendida, Pareto estendida, logística

padrão estendida, qui-quadrado estendida, gama estendida, Fréchet estendida e Gumbel estendida.

Entretanto, observa-se que algumas distribuições modificadas de acordo com a equação (6) não geram distribuições novas. É o caso da distribuição exponencial estendida, obtida pela substituição da função de distribuição acumulada da distribuição exponencial com parâmetro α na equação (6), e obtendo-se novamente a distribuição exponencial com parâmetro $\alpha\omega$, cuja função de distribuição acumulada passa a ser dada por $F(t) = 1 - e^{-(\alpha\omega)t}$, α, $\omega > 0$.

A distribuição uniforme estendida é a generalização da distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$, pela equação (6), e resulta na distribuição beta, com parâmetros $\alpha = 1$ e ω, em que sua função de distribuição acumulada é dada por $G(t) = 1 - (1 - t)^{\omega}$.

A distribuição Weibull, com parâmetros $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, gera a distribuição Weibull estendida que resume-se na distribuição Weibull, com parâmetros $\alpha\omega^{-1/\lambda}$ e λ, cuja função de distribuição acumulada é $F(t) = 1 - \exp[-\omega(t/\alpha)^{\lambda}]$.

A distribuição Pareto, com parâmetros $k > 0$ e $\alpha > 0$, gera a distribuição Pareto com parâmetros k e $\alpha\omega$ sobre a generalização das distribuições estendidas, cuja função de distribuição acumulada é $F(t) = 1 - (k/t)^{\alpha\omega}$. A distribuição logística padrão estendida é a generalização da distribuição logística, com parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, e resulta na distribuição logística generalizada tipo II de parâmetros ω e 1, com função de distribuição acumulada dada por $F(y) = 1 - [e^{-\omega y}/(1 + e^{-y})^{\omega}]$, $y \in \mathbb{R}$.

Diferentemente das distribuições descritas acima, as distribuições estendidas qui-quadrado, gama, Fréchet e Gumbel, discutidas por Barros (2008), geraram novas distribuições com o parâmetro adicional ω, sendo que as distribuições Fréchet estendida e Gumbel estendida foram apresentadas por Nadarajah e Kotz (2006) com o nome de distribuições Fréchet exponenciada e Gumbel exponenciada. Porém, essas distribuições apresentam a mesma estrutura das distribuições estendidas. A distribuição Fréchet exponenciada (Fréchet estendida) é a generalização da Fréchet padrão pela classe de distribuições estendidas. Nadarajah e Kotz (2006) apresentaram essa distribuição e discutiram a forma da função densidade de probabilidade e da função risco. Além disso, representaram a função densidade de probabilidade como forma de mistura, desenvolveram a expressão para os momentos e destacaram a importância dessa distribuição em aplicações abrangendo testes de vida acelerados tais como em dados de terremoto, inundação, cor-

ridas de cavalo, precipitação, fila em supermecardo, velocidade do vento, entre outros. A distribuição Gumbel exponenciada (Gumbel estendida) é a generalização da Gumbel padrão pela classe de distribuições estendidas. Nadarajah (2006) apresentou um tratamento detalhado das propriedades dessa distribuição, apresentando as formas analíticas da função densidade de probabilidade e função risco. O autor também calculou o n-ésimo momento e a distribuição assintótica das estatísticas de ordem e investigou a variação das medidas de assimetria e curtose. Por fim, discutiu a estimação pelo método de máxima verossimilhança e ilustrou sua aplicação com dados de precipitação pluvial em Orlando, Flórida, Estados Unidos.

Por último, Barros (2008) desenvolveu os momentos, a função geradora de momentos e a função característica para a distribuição qui-quadrada estendida. A distribuição gama estendida foi introduzida, e apresentada a expressão para a função densidade de probabilidade e função de distribuição acumulada na forma fechada e na forma de expansão em série. Os momentos também foram calculados, assim como outras propriedades.

2.3.4 Classe de distribuições betas

A classe de distribuições betas, que recebeu maior atenção após o trabalho de Eugene; Lee e Famoye (2002), é uma generalização baseada na distribuição beta, que considera $G(t)$ para definir a função de distribuição acumulada da distribuição beta generalizada, a qual é expressa como sendo:

$$F(t) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{G(t)} w^{a-1}(1-w)^{b-1} dw \ , \tag{7}$$

em que $a > 0$ e $b > 0$ são os dois parâmetros novos de forma e $B(a,b)$ é a função beta, definida por $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. A função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(t) = \frac{1}{B(a,b)} g(t) G(t)^{a-1}(1-G(t))^{b-1} \ , \ t > 0 \ .$$

Observe que a integral na equação (7) é a função beta incompleta,

$$B_{G(t)}(a,b) = \int_0^{G(t)} w^{a-1}(1-w)^{b-1} dw.$$

A desvantagem dessa classe é que essa integral muitas vezes não tem solução analítica, devido à função de distribuição acumulada $G(t)$, ou depende de funções espe-

ciais, como a função $B(a, b)$, necessitando portanto, de abordagens numéricas. Consequentemente, a função de sobrevivência também requer procedimentos numéricos para ser obtida.

Alguns autores trabalharam com essa classe de distribuição, entre eles pode-se citar Ojo e Olapade (2003), que consideraram a distribuição beta logística, denominada por eles de logística generalizada (distribuição esta desenvolvida inicialmente por George e Ojo (1980)) e provaram alguns teoremas que caracterizam essa distribuição, além de definir uma generalização da distribuição log-logística (beta log-logística), determinar seus momentos e estabelecer algumas relações entre a log-logística generalizada e outras distribuições.

Nadarajah e Kotz (2004) introduziram a distribuição beta Gumbel, apresentaram a forma analítica da função densidade de probabilidade e função risco, calcularam a expressão para o n-ésimo momento e a distribuição assintótica da estatística de ordem, investigaram a variação das medidas de assimetria e curtose e discutiram o método de estimação de máxima verossimilhança.

Da mesma forma, Nadarajah e Kotz (2005) generalizaram a distribuição exponencial, denominando-a distribuição beta exponencial. As propriedades matemáticas da distribuição beta exponencial foram discutidas e as expressões para a função geradora de momentos e função característica foram derivadas. Os primeiros momentos, a variância, a assimetria e curtose foram apresentados. Também desenvolveram as expressões para o desvio médio sobre a média e sobre a mediana, a entropia de Rényi e Shannon e a distribuição das estatísticas de ordem. A estimação pelo método de máxima verossimilhança e o problema de simulação foram discutidos e uma expressão para a matriz de informação esperada foi apresentada.

Recentemente, Barreto-Souza; Santos e Cordeiro (2010) propuseram a distribuição beta generalizada exponencial exponenciada, que é a generalização da distribuição exponencial generalizada exponenciada proposta por Gupta e Kundu (1999). Essa distribuição tem como casos particulares as distribuições beta exponencial e exponencial generalizada. A função densidade de probabilidade como mistura de densidades da distribuição exponencial generalizada foi expressa, a função geradora de momentos e os momentos foram derivados e a estimação de parâmetros pelo método de máxima verossimilhança foi discutida e a matriz de informação esperada obtida.

Na mesma abordagem, Pescim et al. (2010) propuseram a chamada distribuição beta semi-normal generalizada, que é a generalização da distribuição semi-normal generalizada apresentada por Cooray e Ananda (2008), que contém como casos especiais a semi-normal e a semi-normal generalizada. As expressões para a função densidade de probabilidade e para a função de distribuição acumulada foram derivadas e os momentos foram obtidos, assim como o método de estimação de máxima verossimilhança foi utilizado. A matriz de informação esperada foi calculada, bem como outras propriedades de interesse. A utilidade dessa nova distribuição foi ilustrada por meio de um conjunto de dados reais mostrando a maior flexibilidade na análise de dados positivos em relação às ditribuições semi-Normal generalizada, semi-Normal, Weibull e beta Weibull.

2.3.5 Classe de distribuições Kumaraswamy

A classe de distribuições Kumaraswamy, recentemente proposta por Cordeiro e Castro (2011), baseia-se na generalização da distribuição Kumaraswamy proposta por Kumaraswamy (1980) para variáveis limitadas inferiormente e superiormente. A função de distribuição acumulada da distribuição Kumaraswamy é dada por:

$$F(x) = 1 - (1 - x^{\lambda})^{\varphi}, \quad 0 < x < 1 \quad \text{e} \quad \lambda, \varphi > 0. \tag{8}$$

Substituindo a variável aleatória x por $G(t)$, na equação (8), obtém-se a classe de distribuições Kumaraswamy, cuja função de distribuuição acumulada é dada por:

$$F(t) = 1 - \left\{1 - G(t)^{\lambda}\right\}^{\varphi}, \quad 0 < G(t) < 1 \quad \text{e} \quad \lambda, \varphi > 0, \tag{9}$$

em que $\lambda > 0$ e $\varphi > 0$ são os novos parâmetros de forma.

A função densidade de probabilidade, função de sobrevivência e função risco são dadas por:

$$f(t) = \lambda\varphi g(t) G(t)^{\lambda-1}[1 - G(t)^{\lambda}]^{\varphi-1},$$

$$S(t) = [1 - G(t)^{\lambda}]^{\varphi} \quad \text{e} \quad h(t) = \frac{\lambda\varphi g(t) G(t)^{\lambda-1}}{1 - G(t)^{\lambda}},$$

respectivamente.

Os momentos podem ser obtidos pelo cálculo da integral

$$\mu'_k = \int_0^\infty \lambda\varphi[1 - G(t)^\lambda]^{\varphi-1} G(t)^{\lambda-1} g(t) t^k dt = \varphi \int_0^1 \{G^{-1}\left(u^{1/\lambda}\right)\}^k (1-u)^{\varphi-1} du$$

sendo que a transformação usada na integral descrita acima foi $u = G(t)^\lambda$, o que implica em $G^{-1}[(u)^{1/\lambda}] = t$.

A grande vantagem da classe de distribuições Kumaraswamy é que esta possui forma fechada, ou seja, pode ser escrita de forma analítica, diferentemente da classe de distribuições betas. Essa classe modela formas de risco constante, crescente, decrescente, unimodal e em forma de U. Outra propriedade da classe de distribuição Kumaraswamy é que esta possui como caso particular a classe de distribuições exponenciadas quando $\varphi = 1$, a classe de distribuições estendidas quando $\lambda = 1$ e as distribuições bases $G(t)$ quando $\lambda = 1$ e $\varphi = 1$.

Pode-se citar alguns importantes trabalhos nesta área, como, por exemplo, o trabalho de Cordeiro e Castro (2011), que propuseram as distribuições Kumaraswamy gama, Kumaraswamy gumbel, Kumaraswamy gaussiana inversa, Kumaraswamy normal e Kumaraswamy Weibull; e o trabalho de Santana (2010), que apresentou as distribuições Kumaraswamy-log-logística e Kumaraswamy-logística.

2.4 Modelo de regressão

Na prática, é comum a ocorrência de situações em que uma ou mais covariáveis estão relacionadas aos tempos de sobrevivência, isto é, os tempos de falha são influenciados por covariáveis. Na área das ciências biomédicas, por exemplo, podem ser a idade, a altura, um tipo de tumor cancerígeno, a quantidade de hemoglobina no sangue etc.

Considere T uma variável aleatória e seja $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)^T$ um vetor formado por p variáveis explanatórias. Um modo de estabelecer uma relação entre T e $\mathbf{x}$ é por meio da utilização de modelos de regressão. No contexto dos dados de sobrevivência, uma maneira de incluir as covariáveis na análise é realizada utilizando-se a classe de modelos de locação e escala, também conhecidos como modelo de tempo de vida acelerado ou modelo paramétrico. Existe uma vasta literatura sobre modelos de regressão locação-escala, por exemplo, Cox e Oakes (1984), Kalbfleisch e Prentice (2002) e Lawless (2003).

2.4.1 Modelo de regressão locação-escala

Assumindo censura à direita, o modelo de locação-escala é dado da seguinte forma:

$$Y = \mu + \sigma Z, \tag{10}$$

supondo que Y pertence à família de distribuições que se caracteriza pelo fato de ter um parâmetro de locação μ $(-\infty < \mu < \infty)$ e um parâmetro de escala σ $(0 < \sigma < \infty)$.

As distribuições que pertencem a essa família têm função densidade de probabilidade da forma:

$$f(y; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} g\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big), \quad -\infty < y < \infty$$

e função de sobrevivência $G(\frac{y-\mu}{\sigma})$.

Considerando a transformação $Y = \log(T)$, tem-se que o parâmetro de locação μ depende do vetor de covariáveis $\mathbf{x}$, denotado por $\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\boldsymbol{\beta}$, em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^T$ é o vetor de parâmetros desconhecidos. O modelo de regressão que relaciona Y e o vetor de variáveis explicativas $\mathbf{x}$ é o modelo de locação-escala, que pode ser escrito da seguinte forma:

$$Y = \mu(\mathbf{x}) + \sigma Z,$$

em que Z é um erro aleatório.

Observa-se que esse modelo é log-linear para T, logo, é um modelo de regressão linear para Y. Outra característica desse modelo é que o vetor de variáveis explicativas $\mathbf{x}$ tem efeito multiplicativo em T. Além disso, a função de sobrevivência para Y dado $\mathbf{x}$, tem a forma $G\left(\frac{y-\mu(\mathbf{x})}{\sigma}\right)$, em que $G(z)$ é a função de sobrevivência de Z. Lawless (2003) apresenta mais detalhes dessa classe de modelos, além de vários modelos usando distribuições de probabilidade para T, comumente usadas em análise de sobrevivência.

Na presença de censura intervalar, os dados observados consistem de um intervalo $(\log(u_i), \log(v_i))$ para cada indivíduo, no qual esses intervalos são conhecidos e inclui y_i com probabilidade um, ou seja, $P(\log(u_i) \leq y_i \leq \log(v_i)) = 1$, e se $\log(v_i) = \infty$, então o logaritmo do tempo é censurado à direita para y_i.

2.5 Inferência estatística

Assumindo um modelo paramétrico para a análise dos dados, deseja-se fazer inferências com base nesse modelo. Em geral, essa análise torna-se mais complicada quando precisamos incorporar dados censurados. O objetivo desta seção é apresentar o método de máxima verossimilhança e uma abordagem bayesiana para estimação e testes nos modelos propostos.

2.5.1 Método de máxima verossimilhança

Sejam $(y_1, \delta_1), (y_2, \delta_2), \ldots, (y_n, \delta_n)$, n observações independentes em que $y_i = \log(t_i)$, representa o logaritmo do tempo de falha ou censura, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Assim sendo, o logaritmo da função de verossimilhança, considerando uma amostra completa, é dado por:

$$l(\boldsymbol{\theta}) \;=\; \sum_{i \in F} \log\Big[f(y_i)\Big] + \sum_{i \in C} \log\Big[S(y_i)\Big], \tag{11}$$

em que $f(y)$ e $S(y)$ são as funções densidade de probabilidade e sobrevivência da variável aleatória Y, $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros e F e C denotam o conjunto de observações não censuradas e censuradas, respectivamente. Para obter os estimadores de máxima verossimilhança é preciso derivar $l(\boldsymbol{\theta})$ em relação ao vetor de parâmetros desconhecido $\boldsymbol{\theta}$. Portanto, esses estimadores são obtidos resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0.$$

Porém, para obter o estimador de máxima verossimilhança para os parâmetros, é necessária a utilização de métodos iterativos, pois geralmente esse sistema é não-linear. Por exemplo, um algoritmo de otimização Newton-Raphson ou quase-Newton.

As propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança são necessárias para construir intervalos de confiança e testar hipóteses sobre os parâmetros do modelo, utilizando-se do fato que $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ tem distribuição normal assintótica multivariada sob certas condições de regularidade com média $\boldsymbol{\theta}$ e matriz de variâncias e covariâncias dada pelo inverso da matriz de informação de Fisher $(I(\boldsymbol{\theta})^{-1})$, em que $I(\boldsymbol{\theta}) = E\Big[\ddot{L}(\boldsymbol{\theta})\Big]$, tal que, $\ddot{L}(\boldsymbol{\theta}) = -\Big\{\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T}\Big\}$.

Como não é trivial calcular a matriz de informação $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ devido às observações censuradas, pode-se usar a matriz Hessiana, $-\ddot{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta})$, avaliada em $\boldsymbol{\theta} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}$, que é

um estimador consistente para $I(\boldsymbol{\theta})$. Portanto, a distribuição assintótica para $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ é especificada por $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^T \sim N_{(d)}\{\boldsymbol{\theta}^T; \ddot{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\}$, em que $\ddot{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta})$ é matriz de informação observada e d é o número de parâmetros do modelo.

Quanto à interpretação dos coeficientes estimados do modelo de regressão, uma possível proposta é baseada na razão dos tempos medianos (HOSMER Jr; LEMESHOW, 1999). Dessa forma, quando a covariável é binária (1 ou 0) e considerando a razão dos tempos medianos com $x = 1$ no numerador, se $\widehat{\beta}$ é negativo (positivo) implica que indivíduos com $x = 1$ apresentam tempo mediano de sobrevivência reduzido (aumentado) em $e^{\widehat{\beta}} \times 100$ relativamente aos indivíduos no grupo com $x = 0$, fixando as demais covariáveis. Essa interpretação pode ser estendida para covariáveis contínuas ou categóricas.

Diversos autores utilizaram o método de máxima verossimilhança no contexto da análise de sobrevivência para estimar os parâmetros de distribuições, entre eles, Nadarajah e Kotz (2005) que trabalharam com as distribuições beta exponencial e Weibull exponenciada. Mais recentemente, Silva; Ortega e Cordeiro (2010), Pescim et al. (2010) utilizaram esse método para estimar os parâmetros das distribuições beta Weibull modificada e beta generalizada semi-normal, respectivamente.

2.5.2 Análise bayesiana

Considere que $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)^T$ seja um vetor de n observações e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d)^T$ o vetor de parâmetros. Um dos grandes objetivos da estatística é procurar conhecer os parâmetros populacionais com base nas n observações obtidas de amostragem ou experimentação. Uma metodologia muito utilizada para esse fim é a inferência bayesiana (SILVA, 2009).

Na inferência bayesiana, as n observações são associadas a funções densidade de probabilidade $f(\mathbf{t}|\boldsymbol{\theta})$, em que $\boldsymbol{\theta}$ indexa a família de distribuições das observações.

O verdadeiro valor de $\boldsymbol{\theta}$ é desconhecido e para a inferência bayesiana também é considerada uma variável aleatória. Nesse contexto, $\boldsymbol{\theta}$ possui uma distribuição associada. Na análise bayesiana a informação disponível a priori em relação a $\boldsymbol{\theta}$ é muito importante. Essa informação é traduzida em forma de uma distribuição de probabilidade, denotada por $\pi(\boldsymbol{\theta})$.

A distribuição *a priori* deve representar, probabilisticamente, o conheci-

mento que se tem sobre o parâmetro $\boldsymbol{\theta}$. Essa distribuição pode ser informativa ou não informativa. As *prioris* informativas são utilizadas quando se tem algum conhecimento prévio sobre o parâmetro, e as não informativas são usadas quando se tem pouca ou nenhuma informação sobre o parâmetro (PAULINO; TURKMAN; MURTEIRA, 2003).

A informação a priori combinada com a função dos dados, conhecida como função de verossimilhança $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t})$, resulta na distribuição a posteriori $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t})$, e esta é representada por meio do teorema de Bayes, dada por:

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t}) = \frac{L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t})\pi(\boldsymbol{\theta})}{\int_{\Theta} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t})\pi(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}},$$

em que Θ denota o espaço paramétrico de $\boldsymbol{\theta}$. O denominador funciona como uma constante normalizadora que não depende de $\boldsymbol{\theta}$.

Assim, o teorema pode ser reescrito como:

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t}) \propto L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t})\pi(\boldsymbol{\theta}).$$

Por meio do teorema de Bayes é possível atualizar a informação a respeito do parâmetro, e utilizá-lo para quantificar esse aumento de informação, sendo este um elemento essencial na análise bayesiana, pois toda a inferência é feita a partir da distribuição *a posteriori*.

Considerando o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, é necessário obter a distribuição marginal a posteriori para cada parâmetro $\boldsymbol{\theta}_i$, $i = 1, 2, \cdots, d$ obtidas por meio de integração da densidade conjunta *a posteriori*:

$$\pi(\theta_i|\mathbf{t}) = \int \cdots \int \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t})d\theta_i.$$

No entanto, a resolução analítica dessa integral é em geral impraticável. Uma das alternativas é a utilização de métodos númericos, dentre os quais se destacam os algoritmos dos métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), que têm como objetivo simular um passeio aleatório no espaço do parâmetro $\boldsymbol{\theta}$, o qual converge para uma distribuição estacionária, que é a distribuição marginal a posteriori de $\boldsymbol{\theta}$ (PAULINO; TURKMAN; MURTEIRA, 2003).

Os métodos MCMC utilizam a simulação estocástica considerando as distribuições condicionais completas *a posteriori* de cada parâmetro para gerar amostras que convergem para a densidade marginal, com o aumento dessa amostra.

A distribuição condicional completa *a posteriori* do parâmetro $\boldsymbol{\theta}$ é denotada por $\pi(\theta_i|\boldsymbol{\theta}_{-i}, \mathbf{t})$, e é obtida considerando que, na densidade *a posteriori* conjunta, os demais parâmetros $\boldsymbol{\theta}_{-i}$ são conhecidos e, assim, a expressão se torna menos complexa, já que as constantes podem ser desconsideradas.

Quando a expressão da condicional completa tem uma forma conhecida, é utilizado o método de simulação amostrador de Gibbs, e quando a condicional completa tem uma forma desconhecida, é utilizado o algoritmo Metropolis-Hasting (HASTINGS, 1970).

O amostrador de Gibbs é um esquema iterativo de amostragem de uma cadeia de Markov, cujo núcleo de transição é formado pelas condicionais completas. O algoritmo do amostrador de Gibbs é um processo iterativo da seguinte forma:

1 Atribua um valor inicial para $\boldsymbol{\theta}^0 = (\boldsymbol{\theta}_1^0, \boldsymbol{\theta}_2^0, \cdots, \boldsymbol{\theta}_d^0)$,

2 Obtém-se um valor para $\boldsymbol{\theta}_{(1)}$ da seguinte forma:

(i) amostre $\boldsymbol{\theta}_1^1$ de $\pi(\boldsymbol{\theta}_1^1|\boldsymbol{\theta}_2^0, \cdots, \boldsymbol{\theta}_d^0, \mathbf{t})$,

(ii) amostre $\boldsymbol{\theta}_2^1$ de $\pi(\boldsymbol{\theta}_2^1|\boldsymbol{\theta}_1^1, \boldsymbol{\theta}_3^0, \cdots, \boldsymbol{\theta}_d^0, \mathbf{t})$,

$\vdots$

(iii) amostre $\boldsymbol{\theta}_d^1$ de $\pi(\boldsymbol{\theta}_d^1|\boldsymbol{\theta}_1^1, \boldsymbol{\theta}_2^1, \cdots, \boldsymbol{\theta}_{d-1}^1, \mathbf{t})$,

Completa-se assim uma iteração do esquema de transição de $\boldsymbol{\theta}^0$ para $\boldsymbol{\theta}^1$,

3 Repete-se o passo 2 m vezes, até a convergência ser alcançada.

O algoritmo de Metropolis-Hasting usa a idéia de gerar um valor de uma distribuição auxiliar, o qual é aceito com uma dada probabilidade. Esse mecanismo de correção garante a convergência da cadeia para a distribuição de equilíbrio.

Para inicializar o algoritmo de Metropolis-Hasting um valor inicial para $\boldsymbol{\theta}$ é dado, $\boldsymbol{\theta}^0$. Agora, suponha-se que o algoritmo encontra-se na iteração m e que se deseja obter uma nova observação θ_i^m de $f(x) = \pi(x|\boldsymbol{\theta}_{-i}^m, \mathbf{t})$ em que x representa um valor de θ_j. Procede-se da seguinte maneira:

(i) amostre um ponto y de $q(z_m, y)$ em que z_m denota o valor atual de θ_j e $q(z_m, y)$ é uma distribuição proposta (função de transição apropriada),

(ii) amostre um ponto u da $U[0,1]$ caso $u \leq \alpha(z_m, y)$ faça $z_{m+1} = y$, caso contrário, faça $z_{m+1} = z_m$ em que $\alpha(z_m, y) = \min\left\{1, \frac{f(y)q(z_m|y)}{f(z_m)q(y|z_m)}\right\}$.

Repete-se esses passos até que a convergência da cadeia seja atingida. A distribuição proposta $q(z, y)$ deve ser de fácil simulação e garantir uma convergência rápida para a distribuição alvo $\pi(\boldsymbol{\theta}^m_{-i}|\boldsymbol{\theta}^m_{-i}, \mathbf{t})$ (CHIB; GREENBERG, 1995).

A idéia principal dos algoritmos MCMC é que, à medida que o número de iterações aumenta, a cadeia gerada se aproxima da distribuição de equilíbrio, ou seja, da densidade marginal desejada de cada parâmetro. Assim, é necessário monitorar a convergência das sequências geradas pela cadeia de Markov. Existem vários critérios propostos com esse intuito e uma possibilidade é utilizar o método proposto por Gelman e Rubin (1992).

Esses autores propuseram um método de simulação baseado em várias cadeias de Markov simuladas a partir de vários pontos iniciais. Assim, o método de Gelman e Rubin está baseado na construção de l cadeias independentes, cada uma partindo de valores iniciais distintos. Além disso, para cada parâmetro, devem-se descartar as primeiras iterações para eliminar o efeito do valor inicial, e, para evitar os problemas de correlação, deve-se considerar um espaçamento entre as iterações sucessivas. Desse modo, obtém-se uma amostra final $\boldsymbol{\theta}^{(v,s)} = (\boldsymbol{\theta}_1^{(v,s)}, \boldsymbol{\theta}_2^{(v,s)}, \cdots, \boldsymbol{\theta}_d^{(v,s)})'$, em que v denota a v-ésima cadeia e s denota a s-ésima réplica na v-ésima cadeia, $s = (1, \cdots, m)$ e $v = (1, \cdots, l)$.

Para verificar a convergência a partir do método de Gelman e Rubin, considere que U represente qualquer um dos componentes do vetor de parâmetro $\boldsymbol{\theta}$. Para cada parâmetro de interesse, calcula-se:

$$\overline{u}_{v.} = \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} u_{vs} \;\text{ e }\; s_v^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{s=1}^{m}(u_{vs} - \overline{u}_{v.})^2,$$

a média e a variância, respectivamente, de U para cada a cadeia $v = 1, \cdots, l$.

Agora, calcula-se a variância entre as cadeias e a variância dentro das cadeias, respectivamente, dadas por:

$$B = \frac{m}{l-1}\sum_{v=1}^{l}(\overline{u}_{v.} - \overline{u}_{..})^2 \;\text{ e }\; W = \sum_{v=1}^{l}\frac{s_v^2}{l},$$

em que $\overline{u}_{..} = \frac{1}{l}\sum_{v=1}^{l}\overline{u}_{v.}$.

A variância de U é estimada como a média ponderada de W e B

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{m-1}{m}W + \frac{1}{m}B.$$

Têm-se que U segue uma distribuição t de Student com parâmetro de locação $\widehat{\mu} = \overline{u}_{..}$, parâmetro de escala $\sqrt{\widehat{V}} = \sqrt{\widehat{\sigma^2} + B/lm}$ e graus de liberdade $gl = 2\widehat{V}^2/\widehat{var}(\widehat{V})$ em que:

$$\begin{aligned}\widehat{var}(\widehat{V}) &= \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 \frac{1}{l}\widehat{var}(s_v^2) + \left(\frac{l+1}{vs}\right)^2 \frac{2}{l-1}B^2 \\ &+2\frac{(l-1)(m-1)}{l^2 m}\left[\widehat{cov}(s_v^2, \overline{u}_{v.}^2) - 2\overline{u}_{..}\widehat{cov}(s_v^2, \overline{u}_{v.}^2)\right]\end{aligned}$$

e as variâncias e as covariâncias são estimadas a partir dos l valores amostrais de s_v^2, $\overline{u}_{v.}$ e $\overline{u}_{v.}^2$.

A convergência é monitorada calculando o fator de redução de escala que é definido como:

$$\sqrt{\widehat{R}} = \sqrt{\left(\frac{\widehat{V}}{W}\right)\frac{gl}{gl-2}},$$

em que $\widehat{R}$ mede o fator de redução que sofreria o parâmetro de escala da distribuição t de Student para U se a simulação continuasse.

À medida que n cresce, $\widehat{R}$ converge para 1. Na prática, assume-se convergência quando $\widehat{R}$ está próximo de 1 e as iterações selecionadas para compor a amostra final são independentes e identicamente distribuídas (GELMAN; RUBIN, 1992). Portanto, quando o fator de redução potencial de escala apresenta um valor elevado, haveria razão para acreditar que um maior número de simulações proporcionaria uma melhora na inferência sobre a distribuição desejada.

A distribuição marginal *a posteriori* de um parâmetro θ_i contém toda a informação probabilística a respeito deste parâmetro. No entanto, algumas vezes é necessário resumir a informação contida nesta distribuição por meio de alguns valores numéricos. Um caso simples é a estimação pontual de θ_i, em que se resume a distribuição marginal a posteriori por meio de um único número, $\widehat{\theta}_i$. É importante também associar alguma informação sobre o quão precisa é a especificação deste número. As medidas de incerteza mais usuais são: a variância e o coeficiente de variação para a média *a posteriori*, a medida de informação observada de Fisher para a moda *a posteriori* e a distância entre quartis para a mediana *a posteriori* (EHLERS, 2007).

A própria idéia de estimação de parâmetros por ponto, conduz, no cenário bayesiano, a tomar como estimativas os pontos críticos da distribuição *a posteriori*. Um resumo de $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t})$ mais informativo do que qualquer estimativa pontual é obtido de uma

região do espaço paramétrico, $\boldsymbol{\Theta}$, que contenha uma parte substancial da massa probabilística *a posteriori* (PAULINO; TURKMAN; MURTEIRA, 2003).

Ehlers (2007) define C como um intervalo de credibilidade de $100(1-\alpha)\%$ para $\boldsymbol{\theta}$ se $P(\boldsymbol{\theta} \in C) \geq 1-\alpha$. Assim, quanto menor for o tamanho do intervalo, mais concentrada é a distribuição do parâmetro, ou seja, o tamanho do intervalo informa sobre a dispersão de θ.

É possível construir uma infinidade de intervalos utilizando a definição acima, mas é de principal interesse aquele com menor comprimento possível. Os intervalos de comprimento mínimo são obtidos tomando-se os valores de $\boldsymbol{\theta}$ com maior densidade *a posteriori*, denominados intervalos de credibilidade de máxima densidade a posteriori, ou intervalos HPD.

Segundo Ehlers (2007), um intervalo de credibilidade C de $100(1-\alpha)\%$ para $\boldsymbol{\theta}$ é de máxima densidade *a posteriori* se $C = \{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} : \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t}) \geq k(\alpha)\}$, em que $k(\alpha)$ é a maior constante tal que $P(\boldsymbol{\theta} \in C) \geq 1-\alpha$.

Usando essa definição, todos os pontos dentro do intervalo de máxima densidade *a posteriori* (intervalo HPD) terão densidade maior do que qualquer ponto fora do intervalo.

Em análise de sobrevivência, existem vários trabalhos utilizando a abordagem bayesiana. Por exemplo Cancho; Bolfarine e Achcar (1999) apresentaram a análise bayesiana para a distribuição Weibull exponenciada. Além disso, Silva et al. (2008) aplicaram a metodologia bayesiana para o modelo de regressão log-Burr XII.

2.6 Estatísticas AIC, BIC e CAIC

Alguns critérios comuns na literatura podem ser utilizados para seleção de modelos. Esses critérios levam em consideração a complexidade do modelo no critério de seleção. São critérios que, essencialmente, penalizam a verossimilhança, utilizando o número de variáveis do modelo e, eventualmente, o tamanho da amostra. Essa penalização é feita subtraindo-se do valor da verossimilhança uma determinada quantidade do quão complexo é o modelo.

Akaike (1974) propôs utilizar a informação de Kullback-Leibler para a selação de modelos. Ele estabeleceu uma relação entre a máxima verossimilhança e a informação de Kullback-Leibler desenvolvendo então um critério para estimar a informação

de Kullback-Leibler, posteriormente chamado critério de informação de Akaike (AIC). Liang e Zou (2007) propuseram um AIC corrigido (CAIC).

O critério de informação bayesiano (BIC), também chamado de critério de Schwarz (1978), é um critério de avaliação de modelos definido em termos da probabilidade *a posteriori*, sendo assim chamado porque Schwarz forneceu um argumeto bayesiano para prová-lo. Segundo esses critérios, o melhor modelo será aquele que apresentar menor valor para AIC, BIC e CAIC.

Considerando uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ de tamanho n e o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, as estatísticas AIC, BIC e CAIC podem ser calculadas por:

$$AIC = -2l(\boldsymbol{\theta}) + 2d,$$

$$BIC = -2l(\boldsymbol{\theta}) + d\log(n),$$

$$CAIC = \text{AIC} + \frac{2(d+2)(d+3)}{n-d-3},$$

em que $l(\boldsymbol{\theta})$ é o logaritmo da função de verossimilhança e d representa o número de parâmetros estimados do modelo.

Silva; Ortega e Cordeiro (2010) e Cordeiro e Castro (2011) utilizaram a estatística AIC para comparar uma nova família de distribuições generalizadas e o modelo beta Weibull modificado com outros sub-modelos, respectivamente. Pescim et. al (2010) utilizaram as estatísticas AIC, BIC e CAIC para o mesmo propósito mas comparando com o modelo beta generalizada semi-normal.

3 DISTRIBUIÇÃO KUMARASWAMY GAMA GENERALIZADA

A distribuição gama generalizada (GG) introduzida por Stacy (1962) é um modelo muito popular para analisar dados assimétricos. Possui como sub-modelos distribuições amplamente utilizadas na análise de dados de tempo de vida, como as distribuições Weibull, gama, Rayleigh, entre outras. A distribuição GG acomoda diferentes tipos de risco, ou seja, forma crescente, decrescente, unimodal e forma de U. A distribuição GG tem sido usada estensivamente nas últimas décadas para a modelagem de dados de sobrevivência, engenharia de confiabilidade, análise de falhas, hidrologia, entre outras áreas.

Diversos autores nos últimos anos têm concentrado seus esforços na generalização de família de distribuições de probabilidade, obtendo, dessa forma, maior flexibilidade e, consequentemente, ganhado na modelagem de dados e na capacidade de incorporar um grande número de sub-modelos nas distribuições generalizadas. Nesse contexto, seguindo a ideia de Cordeiro e Castro (2011), que recentemente apresentaram a classe de distribuições Kumaraswamy, o objetivo deste capítulo foi propor uma nova distribuição, denominada distribuição Kumaraswamy gama generalizada, que é uma junção da distribuição Kumaraswamy com a distribuição gama generalizada.

Essa nova distribuição, devido à sua flexibilidade para acomodar muitas formas para a função risco, é uma importante distribuição de probabilidade, pois pode ser utilizada em uma grande variedade de problemas na análise de dados de sobrevivência. Além disso, a nova distribuição é também adequada para testar a qualidade do ajuste de seus sub-modelos especiais. O restante do capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 3.1, a distribuição Kumaraswamy gama generalizada foi descrita e alguns importantes sub-modelos apresentados. As propriedades matemáticas da nova distribuição são apresentadas na seção 3.2. Estimação pelos métodos de máxima verossimilhança e bayesiana estão presentes nas seções 3.3 e 3.4, respectivamente. Por fim, a análise de dois conjuntos de dados reais é dada na seção 3.5.

3.1 Distribuição Kumaraswamy gama generalizada

Seja $G(t;\alpha,\tau,k)$ a função de distribuição acumulada da distribuição GG (STACY, 1962) apresentada na equação (2). As propriedades básicas da distribuição GG são dadas por Stacy e Mihram (1965) e Lawless (1980, 2003). A nova distribuição, de-

notada por distribuição Kumaraswamy gama generalizada (KumGG), é uma composição baseada na classe de distribuições Kumaraswamy proposta por Cordeiro e Castro (2011), apresentada na seção 2.3.5 e na distribuição $G(t;\alpha,\tau,k)$, na qual, substituindo na equação (9), $G(t)$ pela função de distribuição acumulada da distribuição GG obtém-se, então, a distribuição KumGG com cinco parâmetros $\alpha > 0$, $\tau > 0$, $k > 0$, $\lambda > 0$ e $\varphi > 0$, cujas funções de distribuição acumulada e densidade de probabilidade (para $t > 0$) são definidas pelas equações (12) e (13), respectivamente.

$$F(t) = 1 - \Big(1 - \Big\{\gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi} \tag{12}$$

e

$$f(t) = \frac{\lambda\varphi\tau}{\alpha\Gamma(k)}\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau k-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\{\gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda-1}\Big(1 - \Big\{\gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi-1}, \tag{13}$$

em que $\gamma_1(\cdot,\cdot)$ é a razão da função gama incompleta definida na equação (2). Na função densidade de probabilidade (13), α é um parâmetro de escala e os outros parâmetros τ, k, λ e φ são parâmetros de forma. A Figura 2, (a), (b) e (c) mostra o gráfico da função densidade de probabilidade da distribuição KumGG para diferentes valores de parâmetros, em que se observa a maior flexibilidade da distribuição KumGG devido aos parâmetros λ e φ.

Se T é uma variável aleatória positiva com densidade dada pela equação (13), pode-se escrever, então, que $T \sim \text{KumGG}(\alpha,\tau,k,\lambda,\varphi)$.

A função de sobrevivência $S(t)$ e função risco $h(t)$, para a variável aleatória T, com distribuição de probabilidade $\text{KumGG}(\alpha,\tau,k,\lambda,\varphi)$ são dadas, respectivamente, por:

$$S(t) = 1 - F(t) = \Big(1 - \Big\{\gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi} = \Big\{1 - \Big[\frac{1}{\alpha^{\tau k}\Gamma(k)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\alpha^{-(\tau j)}t^{\tau(k+j)}}{(k+j)j!}\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}$$

e

$$h(t) = \frac{\lambda\varphi\tau}{\alpha\Gamma(k)}\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau k-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\{\gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda-1}\Big(1 - \Big\{\gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{-1}.$$

A característica da distribuição KumGG é que sua função risco acomoda as formas crescente, decrescente, unimodal e forma de banheira. O gráfico da função de sobrevivência e risco são dados, respectivamente, pelas Figuras 3 e 3.1. Na Figura 3, tem-se em (a) o gráfico da função de sobrevivência da distribuição KumGG para diferentes

(a) (b) (c)

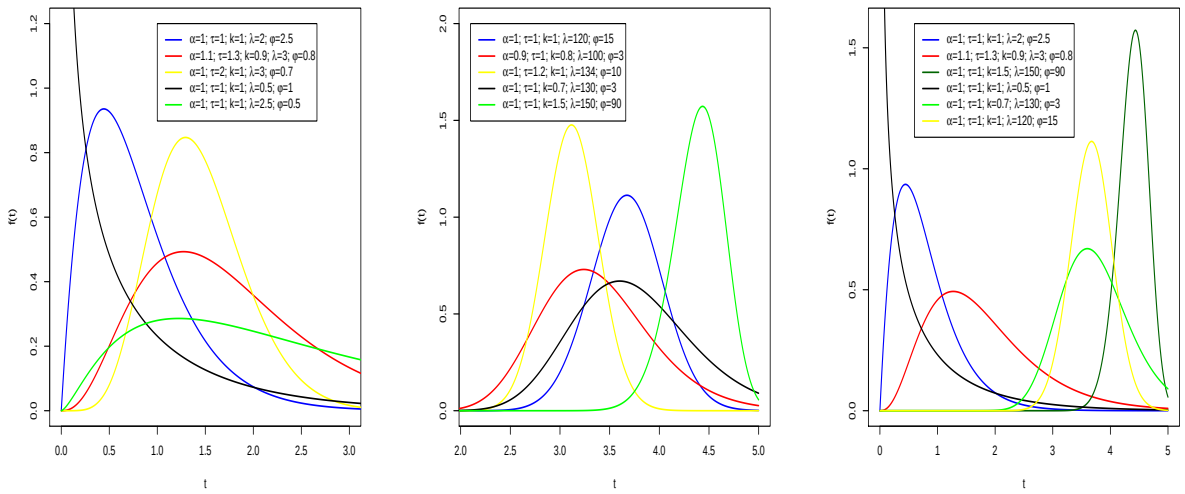

Figura 2 - Gráfico da função densidade da distribuição KumGG para diferentes valores de parâmetros

valores de λ e em (b) o gráfico da função de sobrevivência da distribuição KumGG para diferentes valores de φ. Na Figura 3.1, tem-se em (a) o gráfico da função risco na forma de banheira, (b) o gráfico da função risco na forma unimodal e em (c) o gráfico da função risco nas formas crescente, decrescente e constante.

Alguns sub-modelos da distribuição KumGG são descritos a seguir:

i) **Distribuição Gama Generalizada Exponenciada**

Se $\varphi = 1$, a distribuição KumGG se reduz a:

$$f(t) = \frac{\lambda\tau}{\alpha\Gamma(k)}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau k-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\left\{\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda-1}, \quad t > 0,$$

que é a distribuição gama generalizada exponenciada (GGE), cuja função densidade de probabilidade foi introduzida por Cordeiro, Ortega e Silva (2011). Se $\tau = \varphi = 1$ em adição com $k = 1$, corresponde à distribuição exponencial exponenciada (EE) proposta por Gupta e Kundu (1999, 2001). Se $\tau = 2$ em adição com $k = \varphi = 1$, obtém-se a distribuição Rayleigh generalizada (GR) (KUNDU; RAQAB, 2005).

ii) **Distribuição Kum-Weibull (CORDEIRO; CASTRO, 2011)**

(a) (b)

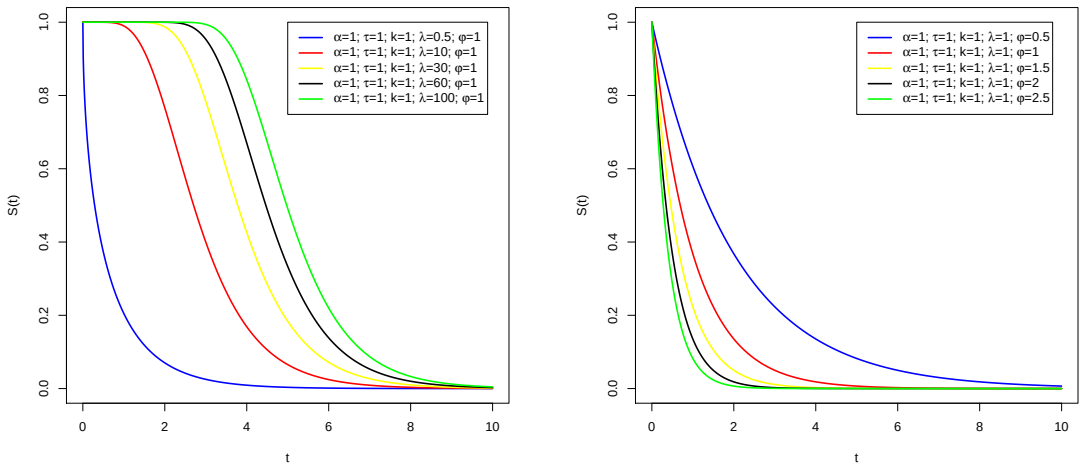

Figura 3 - (a) Gráfico da função de sobrevivência da distribuição KumGG para diferentes valores de λ. (b) Gráfico da função de sobrevivência da distribuição KumGG para diferentes valores de φ

(a) (b) (c)

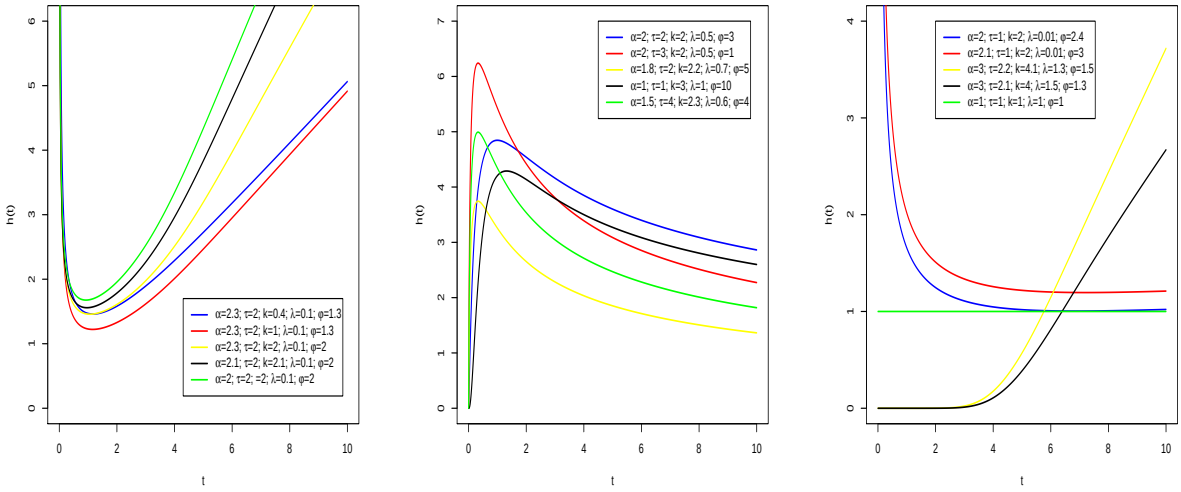

Figura 4 - Funções risco da distribuição KumGG. (a) Gráfico da função risco na forma de banheira. (b) Gráfico da função risco na forma unimodal. (c) Gráfico da função risco nas formas crescente, decrescente e constante

Para $k = 1$, a equação (13) se reduz a:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\tau\lambda\varphi}{\alpha}\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\{1-\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda-1} \\ &\quad\times\Big(1-\Big\{1-\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi-1}, \quad t>0, \end{aligned}$$

que é a distribuição Kum-Weibull (KumW). Se $\varphi = k = 1$, obtém-se a distribuição Weibull exponenciada (WE) (MUDHOLKAR; SRIVASTAVA; FREIMER, 1995). Se $\varphi = \lambda = k = 1$, a expressão (13) torna-se a distribuição Weibull. Se $\tau = 2$ e $k = 1$, obtém-se a distribuição Kum-Rayleigh (KumR). Se $k = \tau = 1$, tem-se a distribuição Kum-exponencial (KumE). Se $\varphi = \lambda = k = 1$, obtêm-se as distribuições exponencial ($\tau = 1$) e Rayleigh ($\tau = 2$).

iii)**Distribuição Kum-Gama (CORDEIRO; CASTRO, 2011)**

Para $\tau = 1$, a distribuição KumGG se reduz a:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\lambda\varphi}{\alpha\Gamma(k)}\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{k-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)\Big]\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)\Big]\Big\}^{\lambda-1} \\ &\quad\times\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi-1}, \quad t>0, \end{aligned}$$

que é a distribuição Kum-Gama (KumG_4) com quatro parâmetros. Se $\varphi = \tau = 1$, tem-se a distribuição gama exponenciada (GE_3) com três parâmetros. Se $\varphi = \tau = \alpha = 1$, corresponde à distribuição gama exponenciada (GE_2) com dois parâmetros. Mas, se $k = 1$, obtém-se a distribuição Kum-gama com um parâmetro. Se $\varphi = \lambda = \tau = 1$, corresponde à distribuição gama com dois parâmetros. Além disso, se $k = 1$, tem-se a distribuição gama com um parâmetro.

iv)**Distribuição Kum-Qui-Quadrado (nova)**

Se $\tau = 2$, $\alpha = 2$ e $k = \frac{p}{2}$, a função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(t) = \frac{\lambda\varphi}{2\Gamma(\frac{p}{2})}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{\frac{p}{2}-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big]\Big[\gamma_1\Big(\frac{p}{2},\frac{t}{2}\Big)\Big]^{\lambda-1}\Big\{1-\Big[\gamma_1\Big(\frac{p}{2},\frac{t}{2}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi-1}, \quad t>0,$$

que é a distribuição Kum-qui-quadrado (Kum-Qui). Se $\varphi = 1$, $\alpha = \tau = 2$ e $k = \frac{p}{2}$, obtém-se a distribuição qui-quadrado-exponenciada (Qui-E). Se $\varphi = \lambda = 1$, além de $\alpha = \tau = 2$ e $k = p/2$, obtém-se a distribuição qui-quadrado.

v)**Distribuição Kum-Qui-Quadrado Dimensionada (nova)**

Para $\tau = 1$, $\alpha = \sqrt{2}\sigma$ e $k = \frac{p}{2}$, a distribuição KumGG torna-se:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2\lambda\varphi}{\sqrt{2}\sigma\Gamma(\frac{p}{2})}\Big(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma}\Big)^{p-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t^2}{2\sigma^2}\Big)\Big]\Big\{\gamma_1\Big[\frac{p}{2},\Big(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma}\Big)^2\Big]\Big\}^{\lambda-1} \\ &\times\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[\frac{p}{2},\Big(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma}\Big)^2\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi-1}, \quad t>0, \end{aligned}$$

que é a distribuição Kum-qui-quadrado dimensionada (KumQuiD). Para $\varphi = \tau = 1$, $\alpha = \sqrt{2}\sigma$ e $k = \frac{p}{2}$, obtém-se a distribuição qui-quadrado exponenciada dimensionada (QuiED). Se $\varphi = \lambda = 1$, além de $\alpha = \sqrt{2}\sigma$, $\tau = 1$ e $k = p/2$, tem-se a distribuição qui-quadrado dimensionada (QuiD).

vi)**Distribuição Kum-Maxwell (nova)**

Para $\tau = 2$, $\alpha = \sqrt{\theta}$ e $k = \frac{3}{2}$, a distribuição KumGG se reduz a:

$$f(t) = \frac{4\lambda\varphi}{\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}t^2\exp\Big[-\Big(\frac{t^2}{\theta}\Big)\Big]\Big[\gamma_1\Big(\frac{3}{2},\frac{t^2}{\theta}\Big)\Big]^{\lambda-1}\Big\{1-\Big[\gamma_1\Big(\frac{3}{2},\frac{t^2}{\theta}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi-1}, \quad t>0,$$

que é a distribuição Kum-Maxwell (KumMa). Para $\varphi = 1$, $\tau = 2$, $\alpha = \sqrt{\theta}$ e $k = \frac{3}{2}$, obtém-se a distribuição Maxwell exponenciada (ME). Se $\varphi = \lambda = 1$ além de $\alpha = \sqrt{\theta}$, $\tau = 2$ e $k = 3/2$, reduz-se a distribuição Maxwell (Ma) (BEKKER; ROUX, 2005).

vii)**Distribuição Kum-Nakagami (nova)**

Para $\tau = 2$, $\alpha = \sqrt{w/\mu}$ e $k = \mu$, a distribuição KumGG torna-se:

$$f(t) = \frac{2\mu^{\mu}\lambda\varphi}{w^{\mu}\Gamma(\mu)}t^{2\mu-1}\exp\Big[-\Big(\frac{\mu t^2}{w}\Big)\Big]\Big[\gamma_1\Big(\mu,\frac{\mu t^2}{w}\Big)\Big]^{\lambda-1}\Big\{1-\Big[\gamma_1\Big(\mu,\frac{\mu t^2}{w}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi-1}, \quad t>0,$$

que é a distribuição Kum-Nakagami (KumNa). Para $\varphi = 1$, $\tau = 2$, $\alpha = \sqrt{w/\mu}$ e $k = \mu$, obtém-se a distribuição Nakagami exponenciada (NE). Se $\varphi = \lambda = 1$, além de $\alpha = \sqrt{w/\mu}$, $\tau = 2$ e $k = \mu$, corresponde a distribuição Nakagami (Na) (SHANKAR et al., 2001).

viii)**Distribuição Kum-Semi-Normal-Generalizada (nova)**

Se $\tau = 2\gamma$, $\alpha = 2^{\frac{1}{2\gamma}}\theta$ e $k = \frac{1}{2}$, a distribuição KumGG torna-se:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\lambda\varphi\gamma}{t}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big(\frac{t}{\theta}\Big)^{\gamma}\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{t}{\theta}\Big)^{2\gamma}\Big]\Big\{\gamma_1\Big[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big(\frac{t}{\theta}\Big)^{2\gamma}\Big]\Big\}^{\lambda-1} \\ &\times\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big(\frac{t}{\theta}\Big)^{2\gamma}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi-1}, \quad t>0, \end{aligned}$$

que se refere à distribuição Kum-Semi-Normal-Generalizada (KumSNG). Para $\varphi = 1$, $\tau = 2\gamma$, $\alpha = 2^{\frac{1}{2\gamma}}\theta$ e $k = 1/2$, obtém-se a distribuição semi-normal generalizada exponenciada (SNGE). Para $\alpha = 2^{\frac{1}{2}}\theta$, $\tau = k = 2$, tem-se a distribuição Kum-semi-normal (KumSN). Se $\varphi = 1$, $\alpha = 2^{\frac{1}{2}}\theta$, $\tau = 2$ e $k = 1/2$, o modelo se reduz a distribuição semi-normal exponenciada (SNE). SE $\varphi = \lambda = 1$, além de $\alpha = 2^{\frac{1}{2\gamma}}\theta$, $\tau = 2\gamma$, $k = 1/2$, obtém-se a distribuição semi-normal generalizada (SNG) introduzida por Cooray e Ananda (2008). Entretanto, se $\varphi = \lambda = 1$ além de $\alpha = 2^{\frac{1}{2}}\theta$, $\tau = 2$ e $k = 1/2$, tem-se a distribuição semi-normal (SN).

3.2 Propriedades gerais

Para encontrar algumas propriedades da distribuição KumGG, a função densidade de probabilidade (13) pode ser reescrita numa combinação linear da distribuição GG. Dessa forma, considere a seguinte expansão:

$$(1-z)^{b-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} z^j, \tag{14}$$

que serve para $|z| < 1$ e $b > 0$ um número real e não-inteiro. Assim, a quantidade $\left(1 - \left\{\gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda}\right)^{\varphi-1}$ da função (13) pode ser reescrita usando a expansão dada em (14). Logo, a função densidade de probabilidade da KumGG$(\alpha, \tau, k, \lambda, \varphi)$ em forma de expansão é:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\lambda\varphi\tau}{\alpha\Gamma(k)}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau k-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\left\{\gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\Gamma(\varphi)}{\Gamma(\varphi-j)j!} \\ &\times \left\{\gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda j}. \end{aligned} \tag{15}$$

Usando a expansão (105) dada no Apêndice A em (15), obtém-se

$$f(t) = \frac{\lambda\varphi\tau}{\alpha\Gamma(k)}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau k-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \sum_{m,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\Gamma(\varphi)s_m(\lambda)}{\Gamma(\varphi-j)j!}\left\{\gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda j+m}. \tag{16}$$

Por outro lado, se $\lambda m + j > 0$ é um valor real não-inteiro, o termo $\left\{\gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda j+m}$ da expressão em (16) é reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left\{\gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda j+m} &= \left(1 - \left\{1 - \gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{\lambda j+m+1-1} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \binom{\lambda j+m}{l}\left\{1 - \gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{l}. \end{aligned}$$

Mas utilizando a expansão binomial para a quantidade $\left\{1-\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^l$ da expressão acima, a função densidade de probabilidade fica como:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\lambda\varphi\tau}{\alpha\Gamma(k)}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau k-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\sum_{j,l,m=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{l}\frac{(-1)^{j+l+q}\Gamma(\varphi)s_m(\lambda)}{\Gamma(\varphi-j)j!} \\ &\times\binom{\lambda j+m}{l}\binom{l}{q}\left\{\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^q. \end{aligned}$$

Portanto, usando a expansão (110) dada no Apêndice A e intercalando $\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{l}$ por $\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{l=q}^{\infty}$, a função densidade de probabilidade $f(t)$ pode ser expressa como uma combinação linear da distribuição GG:

$$f(t)=\sum_{d,q=0}^{\infty} w_{d,q}\, g_{\alpha,\tau,k(1+q)+d}(t),\ \ t>0, \tag{17}$$

em que $g_{(\alpha,\tau,k(1+q)+d)}(t)$ tem distribuição $\mathrm{GG}(\alpha,\tau,k(1+q)+d)$ e os coeficientes de ponderação $w_{d,q}$ são dados por:

$$w_{d,q}=\lambda\,\varphi\,\Gamma(\varphi)\sum_{j,m=0}^{\infty}\sum_{l=q}^{\infty}\frac{(-1)^{j+l+q}\,\Gamma[k(1+q)+d]\,s_m(\lambda)\,c_{q,d}}{\Gamma(k)^{q+1}\,\Gamma(\varphi-j)\,j!}\binom{\lambda j+m}{l}\binom{l}{q}. \tag{18}$$

A quantidade $s_m(\lambda)$ é dada por (106) e os coeficientes $c_{q,d}$ são determinados a partir da relação de recorrência (109).

3.2.1 Momentos

Algumas das principais características de uma distribuição, como, por exemplo, tendência, dispersão, assimetria e curtose, podem ser estudadas por meio dos momentos. Assim, o r-ésimo momento ordinário da distribuição $\mathrm{GG}(\alpha,\tau,k)$ (STACY, 1962) é obtido da seguinte forma:

$$\mu'_{r,GG}=\frac{\alpha^r\,\Gamma(k+r/\tau)}{\Gamma(k)}.$$

Logo, considerando a função densidade de probabilidade (17); o r-ésimo momento ordinário da distribuição KumGG, obtidos a partir dos momentos da distribuição $\mathrm{GG}(\alpha,\tau,k(1+q)+d)$ é dado por:

$$\mu'_r=\alpha^r\,\lambda\,\varphi\,\Gamma(\varphi)\sum_{d,q,j,m=0}^{\infty}\sum_{l=q}^{\infty}\frac{(-1)^{j+l+q}\,\Gamma[k(1+q)+d+r/\tau]\,s_m(\lambda)\,c_{q,d}}{\Gamma(k)^{q+1}\,\Gamma(\varphi-j)\,j!}\binom{\lambda j+m}{l}\binom{l}{q}.$$

Uma outra representação para os momentos é obtida por meio de operações algébricas realizadas na seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\mu'_r &= \frac{\lambda\varphi\tau\alpha^{r-1}}{\Gamma(k)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau k+r-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\left\{\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda-1}\\ &\quad\times\left(1-\left\{\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda}\right)^{\varphi-1}dt. \qquad (19)\end{aligned}$$

O próximo passo é fazer uma mudança de variável, substituindo $x = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}$ em (19). Dessa forma, tem-se:

$$\mu'_r = \frac{\lambda\varphi\alpha^r}{\Gamma(k)}\int_0^{+\infty} x^{k+\frac{r}{\tau}-1}\exp(-x)\,\gamma_1(k,x)^{\lambda-1}\left[1-\gamma_1(k,x)^{\lambda}\right]^{\varphi-1}dx. \qquad (20)$$

Observe que, para $\varphi > 0$ um número real e não-inteiro, o termo $\left[1-\gamma_1(k,x)^{\lambda}\right]^{\varphi-1}$ da expressão (20) pode ser escrito como:

$$\left[1-\gamma_1(k,x)^{\lambda}\right]^{\varphi-1} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\varphi)}{\Gamma(\varphi-j)j!}\gamma_1(k,x)^{\lambda j}. \qquad (21)$$

Logo, substituindo (21) na equação (20) obtém-se:

$$\mu'_r = \frac{\lambda\varphi\alpha^r}{\Gamma(k)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\varphi)}{\Gamma(\varphi-j)j!}\int_0^{+\infty} x^{k+\frac{r}{\tau}-1}\exp(-x)\,\gamma_1(k,x)^{\lambda(1+j)-1}dx. \qquad (22)$$

Para $\lambda > 0$, utilizando a expansão (104) para $\gamma_1(k,x)^{\lambda(1+j)-1}$ dada no Apêndice A, tem-se:

$$\gamma_1(k,x)^{\lambda(1+j)-1} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}(-1)^{l+m}\binom{\lambda(1+j)-1}{l}\binom{l}{m}\gamma_1(k,x)^m. \qquad (23)$$

Então, substituindo o resultado(23) na expressão (22), tem-se, portanto, o r-ésimo momento da ditribuição KumGG dado por:

$$\mu'_r = \frac{\lambda\varphi\alpha^r}{\Gamma(k)}\sum_{j,l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} w_{j,l,m} I\left(k,\frac{r}{\tau},m\right), \qquad (24)$$

em que

$$w_{j,l,m} = \frac{(-1)^{j+l+m}\Gamma(\varphi)}{\Gamma(\varphi-j)j!}\binom{\lambda(1+j)-1}{l}\binom{l}{m} \qquad (25)$$

e

$$I\left(k,\frac{r}{\tau},m\right) = \int_0^{+\infty} x^{k+\frac{r}{\tau}-1}\exp(-x)\,\gamma_1(k,x)^m\,dx.$$

Nota-se que, para a integral definida em $I\Big(k, \frac{r}{\tau}, m\Big)$, a função gama incompleta denotada por $\gamma_1(k, x)$, pode ser reescrita por meio de uma expansão em série dada em (107) (Apêndice A). Assim, $I\Big(k, \frac{r}{\tau}, m\Big)$ é dada por:

$$I\Big(k, \frac{r}{\tau}, m\Big) = \int_0^\infty x^{k+\frac{r}{\tau}-1} \exp(-x) \Big[\frac{x^k}{\Gamma(k)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-x)^p}{(k+p)p!}\Big]^m dx.$$

Segundo Nadarajah (2008b), a integral acima é determinada de acordo com alguns resultados em termos da função de Lauricella do tipo A (EXTON, 1978; AARTS, 2000) definida por:

$$F_A^{(n)}(a; b_1, \ldots, b_n; c_1, \ldots, c_n; x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\cdots+m_n} (b_1)_{m_1} \cdots (b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1} \cdots (c_n)_{m_n}} \frac{x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}}{m_1! \cdots m_n!},$$

em que $(a)_i = a(a+1)\cdots(a+i-1)$ é um fatorial ascendente, supondo que $(a)_0 = 1$. Rotinas numéricas para o cálculo direto da função de Lauricella do tipo A estão disponíveis, veja Exton (1978) e Mathematica (TROTT, 2006). Portanto,

$$\begin{aligned} I\Big(k, \frac{r}{\tau}, m\Big) &= k^{-m}\Gamma\big(r/\tau + k(m+1)\big) \times \\ &\quad F_A^{(m)}\big(r/\tau + k(m+1); k, \ldots, k; k+1, \ldots, k+1; -1, \ldots, -1\big). \end{aligned} \tag{26}$$

As medidas de assimetria e curtose são calculadas utilizando-se as seguintes equações (NADARAJAH; KOTZ, 2004)

$$\text{Assimetria}(T) = \frac{E(T^3) - 3E(T)E(T^2) + 2E^3(T)}{Var^{3/2}(T)}.$$

$$\text{Curtose}(T) = \frac{E(T^4) - 4E(T)E(T^3) + 6E(T^2)E^2(T) - 3E^4(T)}{Var^2(T)}.$$

As representações gráficas dessas medidas quando $\alpha = 0,5$, $\tau = 0,08$ e $k = 3$, em função de λ para valores selecionados de φ, e em função de φ para valores selecionados de λ, são apresentadas nas Figuras 5 e 6, respectivamente.

3.2.2 Função geradora de momentos

Seja T uma variável aleatória com distribuição KumGG$(\alpha, \tau, k, \lambda, \varphi)$, com função densidade de probabilidade (17), então a função geradora de momentos (fgm)

(a) (b)

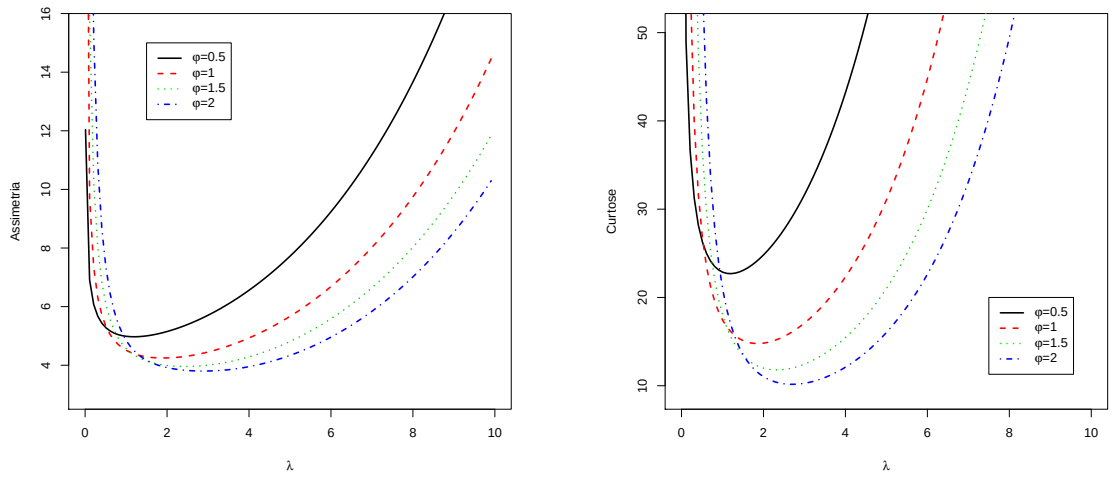

Figura 5 - Assimetria e curtose da distribuição KumGG como uma função do parâmetro λ para valores selecionados de φ

(a) (b)

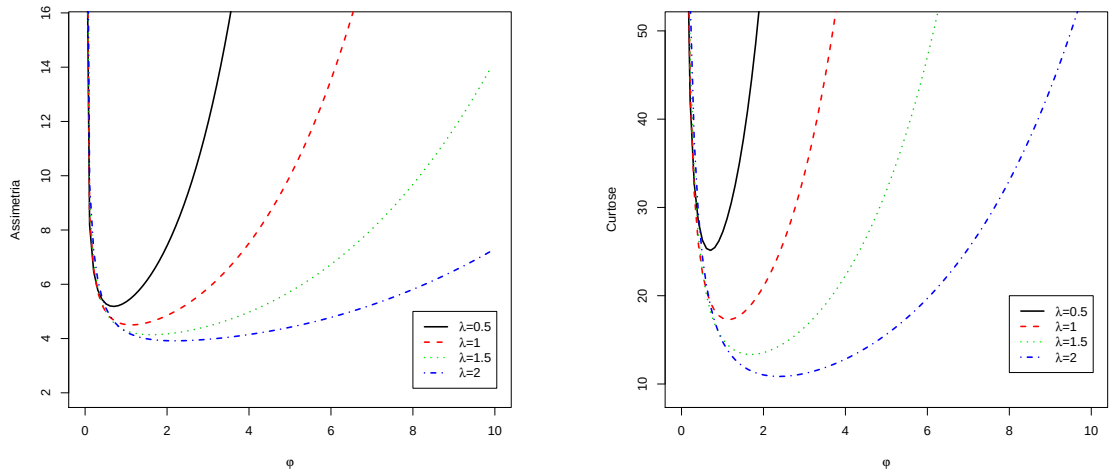

Figura 6 - Assimetria e curtose da distribuição KumGG como uma função do parâmetro φ para valores selecionados de λ

definida por $M(s) = E[\exp(sT)]$ é obtida em função da distribuição $\mathrm{GG}(\alpha, \tau, k)$. Assim, a fgm da distribuição GG é determinada da seguinte forma:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{\tau}{\alpha^{\tau k}\Gamma(k)} \int_0^\infty \exp(st)\, t^{\tau k-1} \exp\{-(t/\alpha)^\tau\} dt.$$

Então, substituindo $u = t/\alpha$, tem-se:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{\tau}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \exp(\alpha s u)\, u^{\tau k-1} \exp(-u^\tau) du. \tag{27}$$

Note que o termo $\exp(\alpha s u)$ pode ser expandido em série de Taylor. Assim, utilizando essa expansão a função (27) é escrita como:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{\tau}{\Gamma(k)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha s)^m}{m!} \int_0^\infty u^{\tau k+m-1} \exp(-u^\tau) du.$$

Por outro lado, a integral da fgm apresenta o seguinte resultado:

$$\int_0^\infty u^{\tau k+m-1} \exp(-u^\tau) du = \tau^{-1}\Gamma(k + m/\tau). \tag{28}$$

Portanto, para $\tau > 0$ e considerando o resultado da integral acima, a fgm da distribuição GG é dada por:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{1}{\Gamma(k)} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\Big(\frac{m}{\tau} + k\Big) \frac{(\alpha s)^m}{m!}. \tag{29}$$

No entanto, para $\tau > 1$, o somatório da fgm (29) pode ser escrito em termos da função Wright hipergeométrica generalizada (WRIGHT, 1935) definida por:

$${}_p\Psi_q \left[\begin{array}{c} (\alpha_1, A_1), \cdots, (\alpha_p, A_p) \\ (\beta_1, B_1), \cdots, (\beta_q, B_q) \end{array} ; x \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(\alpha_j + A_j\, m)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(\beta_j + B_j\, m)} \frac{x^m}{m!}. \tag{30}$$

A função definida em (30) existe se $1 + \sum_{j=1}^{q} B_j - \sum_{j=1}^{p} A_j > 0$. Dessa forma, utilizando o resultado em (30) para reescrever o somatório da fgm (29), a fgm da distribuição GG é dada por:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{1}{\Gamma(k)}\, {}_1\Psi_0 \left[\begin{array}{c} (k, 1/\tau) \\ - \end{array} ; \alpha s \right]. \tag{31}$$

Sabendo-se que a fgm da distribuição GG é dada pela equação (31), a fgm da distribuição KumGG é obtida da seguinte forma:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \sum_{d,q=0}^{\infty} w_{d,q} M_{\alpha,\tau,k(1+q)+d}(s).$$

Portanto, tem-se:

$$M(s) = \sum_{d,q=0}^{\infty} \frac{w_{d,q}}{\Gamma(k(1+q)+d)}\, {}_1\Psi_0 \left[\begin{array}{c} (k(1+q)+d, \tau^{-1}) \\ - \end{array} ; \alpha s \right]. \tag{32}$$

3.2.3 Desvios médios

A quantidade de dispersão em uma população pode ser medida pela totalidade dos valores absolutos dos desvios em relação à média (no caso de uma distribuição simétrica) ou em relação à mediana (no caso de uma distribuição assimétrica). Se T é uma variável aleatória com distribuição KumGG com média $\mu_1' = \mu = E(T)$ e mediana m, então o desvio médio em relação à média e o desvio médio em relação à mediana são definidos, respectivamente, por:

$$\delta_1 = \int_0^\infty |t - \mu_1'| \, f(t)dt \quad \text{e} \quad \delta_2 = \int_0^\infty |t - m| \, f(t)dt.$$

O desvio médio em relação à média e em relação à mediana podem ser simplificados como:

$$\delta_1 = 2\mu_1' F(\mu_1') - 2I(\mu_1') \text{ e } \delta_2 = \mu_1' - 2I(m), \tag{33}$$

em que $F(\mu_1')$ e $F(m)$ são obtidas por meio da expressão (12) e a função I(m) é definida por:

$$I(m) = \int_0^m t f(t)dt.$$

Assim, considerando f(t) como sendo a função densidade de probabilidade definida em (17) tem-se:

$$I(m) = \sum_{d,q=0}^{\infty} w_{d,q} \int_0^m t g_{(\alpha,\tau,[k(1+q)+d])}(t)dt = \sum_{d,q=0}^{\infty} w_{d,q} \, J(\alpha, \tau, [k(1+q)+d], m), \tag{34}$$

Por outro lado, a integral definida em (34) é escrita da seguinte forma considerando $x = t/\alpha$:

$$J(\alpha, \tau, [k(1+q)+d], m) = \frac{\tau\alpha}{\Gamma([k(1+q)+d])} \int_0^{m/\alpha} x^{\tau[k(1+q)+d]} \exp(-x^\tau)dx.$$

Dessa forma, utilizando a mudança de variável $w = x^\tau$, a integral em $J(\alpha, \tau, [k(1+q)+d], m)$ é determinada em termos da função gama incompleta, ou seja:

$$\begin{aligned} J(\alpha, \tau, [k(1+q)+d], m) &= \frac{\alpha}{\Gamma([k(1+q)+d])} \int_0^{(m/\alpha)^\tau} w^{[k(1+q)+d]+\tau^{-1}-1} \exp(-w)dw \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma([k(1+q)+d])} \gamma([k(1+q)+d] + \tau^{-1}, (m/\alpha)^\tau). \end{aligned} \tag{35}$$

Portanto, substituindo o resultado obtido em (35) na expressão (34), tem-se:

$$I(m) = \sum_{d,q=0}^{\infty} \frac{\alpha \, w_{d,q}}{\Gamma([k(1+q)+d])} \gamma(k(1+q)+d+\tau^{-1}, (m/\alpha)^\tau).$$

O resultado é análogo para $I(\mu_1')$.

3.2.4 Confiabilidade

Trabalhos que envolvem modelos de resistência-tensão possuem o interesse na estimação da confiabilidade denotada por $R = Pr(X_2 < X_1)$, em que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes que pertencem à mesma família univariada de distribuições. A forma algébrica para a confiabilidade tem sido elaborada para a maioria das distribuições padrões conhecidas. No entanto, existem ainda muitas outras distribuições (incluindo generalizações de distribuições conhecidas na literatura) para as quais a forma de R não foi proposta. Assim, a medida de confiabilidade da distribuição KumGG é determinada considerando a confiabilidade expressa por Silva; Ortega e Cordeiro (2010), ou seja,

$$R = \int_0^\infty f(t)F(t)dt,$$

em que $f(t)$ é a função densidade de probabilidade expandida (17) e $F(t)$ é a função de distribuição acumulada (12). Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned} R &= \int_0^\infty \sum_{d,q=0}^{\infty} w_{d,q} \frac{\tau}{\alpha\Gamma[k(1+q)+d]} \exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau[k(1+q)+d]-1} \\ &\times \Big[1-\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}^\lambda\Big)^\varphi\Big]dt. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} R &= \sum_{d,q=0}^{\infty} w_{d,q}\Big\{1-\int_0^\infty \frac{\tau}{\alpha\Gamma[k(1+q)+d]} \\ &\times \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau[k(1+q)+d]-1} \exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}^\lambda\Big)^\varphi dt\Big\}. \end{aligned} \tag{36}$$

Observa-se que, para $b > 0$ um número real e não-inteiro, a função de distribuição acumulada (12) pode ser escrita na forma de uma série de potência dada por:

$$[1-G(x)]^{b-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{b-1}{i}G(x)^i,$$

em que o coeficiente binomial é definido para qualquer real. Nesse caso, tem-se:

$$\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}^\lambda\Big)^\varphi = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{\varphi}{i}\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}^{\lambda i}. \tag{37}$$

Dessa forma, substituindo a função de distribuição acumulada em (36) pela

expressão obtida em (37), a confiabilidade é dada por:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{d,q=0}^{\infty} w_{d,q}\Big\{1 - \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \binom{\varphi}{i} \int_0^{\infty} \frac{\tau}{\alpha\Gamma[k(1+q)+d]} \\ &\times \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau[k(1+q)+d]-1} \exp\Big[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\Big]\Big\{\gamma_1\Big[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda i} dt\Big\}. \end{aligned}$$

Para escrever R em uma expressão conhecida, considere a mudança de variável, $x = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}$. Assim,

$$\begin{aligned} R &= \sum_{d,q=0}^{\infty} w_{d,q}\Big\{1 - \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \binom{\varphi}{i} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma[k(1+q)+d]} x^{k(1+q)+d-1} \\ &\times \exp(-x)\gamma_1(k,x)^{\lambda i} dx\Big\}. \end{aligned}$$

A partir da equação (104) no Apêndice A, obtém-se:

$$R = \sum_{d,q=0}^{\infty} w_{d,q}\{1 - \nu_{i,j_1,m_1} I(k(1+q), d, m_1)\}, \tag{38}$$

em que $w_{d,q}$ é definido em (18),

$$\nu_{i,j_1,m_1} = \sum_{i,j_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{j_1} \frac{(-1)^{i+j_1+m_1}}{\Gamma[k(1+q)+d]} \binom{\varphi}{i} \binom{\lambda i}{j_1} \binom{j_1}{m_1}$$

e

$$\begin{aligned} I\left[k(q+1), d, m_1\right] &= [k(q+1)]^{-m_1}\Gamma\big(d + k(q+m_1+1)\big) \times \\ &F_A^{(m_1)}\big(d + k(q+m_1+1); k(q+1), \ldots, k(q+1); \\ &k(q+1)+1, \ldots, k(q+1)+1; -1, \ldots, -1\big). \end{aligned} \tag{39}$$

3.2.5 Estatística de ordem

A função densidade de probabilidade $f_{i:n}(t)$ da i-ésima estatística de ordem, para $i = 1, \ldots, n$, das variáveis aleatórias $T_1, \ldots, T_n$, é dada por:

$$f_{i:n}(t) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(t) F(t)^{i-1} \{1 - F(t)\}^{n-i}, \tag{40}$$

em que $f(\cdot)$ é uma função densidade de probabilidade, $F(\cdot)$ é uma função de distribuição acumulada e $B(\cdot,\cdot)$ denota a função beta. Observe que a quantidade $[1 - F(t)]^{n-i}$ em (40) pode ser escrita na forma de uma expansão binomial da seguinte forma:

$$[1 - F(t)]^{n-i} = \sum_{j_1=0}^{n-i} \binom{n-i}{j_1} (-1)^{j_1} F(t)^{j_1}.$$

Assim,

$$f_{i:n}(t) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(t) \sum_{j_1=0}^{n-i} \binom{n-i}{j_1} (-1)^{j_1} F(t)^{i+j_1-1}. \tag{41}$$

Porém, se F(t) é a função de distribuição acumulada da classe de distribuições Kumaraswamy definida em (9), tem-se:

$$F(t)^{i+j_1-1} = \sum_{l_1=0}^{i+j_1-1} (-1)^{l_1} \binom{i+j_1-1}{l_1} \left[1 - G(t)^{\lambda}\right]^{l_1\varphi}.$$

Usando a expansão em série para $\left[1 - G(t)^{\lambda}\right]^{l_1\varphi}$,

$$\left[1 - G(t)^{\lambda}\right]^{l_1\varphi} = \sum_{m_1=0}^{\infty} (-1)^{m_1} \binom{l_1\varphi}{m_1} G(t)^{m_1\lambda},$$

logo,

$$F(t)^{i+j_1-1} = \sum_{l_1=0}^{i+j_1-1} (-1)^{l_1} \binom{i+j_1-1}{l_1} \sum_{m_1=0}^{\infty} (-1)^{m_1} \binom{l_1\varphi}{m_1} G(t)^{m_1\lambda}.$$

Para $m_1\lambda > 0$, um número real e não-inteiro, obtém-se:

$$G(t)^{m_1\lambda} = \{1 - [1 - G(t)]\}^{m_1\lambda+1-1} = \sum_{l_2=0}^{\infty} (-1)^{l_2} \binom{m_1\lambda}{l_2} [1 - G(t)]^{m_1\lambda},$$

logo,

$$G(t)^{m_1\lambda} = \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{l_2} (-1)^{l_2+r} \binom{m_1\lambda}{l_2} \binom{l_2}{r} G(t)^r.$$

Substituindo $\sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{l_2}$ por $\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l_2=r}^{\infty}$ obtém-se:

$$G(t)^{m_1\lambda} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l_2=r}^{\infty} (-1)^{l_2+r} \binom{m_1\lambda}{l_2} \binom{l_2}{r} G(t)^r,$$

em que,

$$G(t)^{m_1\lambda} = \sum_{r=0}^{\infty} s_r(m_1\lambda) G(t)^r,$$

e os coeficientes são:

$$s_r(m_1\lambda) = \sum_{l_2=r}^{\infty} (-1)^{l_2+r} \binom{m_1\lambda}{l_2} \binom{l_2}{r}.$$

Para $r, u = 0, 1, \ldots$ tem-se:

$$F(t)^{i+j_1-1} = \sum_{l_1=0}^{i+j_1-1} (-1)^{l_1} \binom{i+j_1-1}{l_1} \sum_{r=0}^{\infty} \upsilon_r(l_1, \lambda, \varphi) G(t)^r,$$

em que os coeficientes $v_r(l_1, \lambda, \varphi)$ são definidos por:

$$v_r(l_1, \lambda, \varphi) = \sum_{m_1=0}^{\infty} (-1)^{m_1} \binom{l_1\varphi}{m_1} s_r(m_1\lambda).$$

Intercalando as somas, obtém-se:

$$F(t)^{i+j_1-1} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{r,i+j_1-1}(\lambda, \varphi) G(t)^r,$$

em que os coeficientes $p_{r,u}(\lambda, \varphi)$ são calculados por:

$$p_{r,u}(\lambda, \varphi) = \sum_{l_1=0}^{u} (-1)^{l_1} \binom{u}{l_1} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=r}^{\infty} (-1)^{m_1+r+l_2} \binom{l_1\varphi}{m_1} \binom{m_1\lambda}{l_2} \binom{l_2}{r}.$$

Para $r, u = 0, 1, \ldots$ a função densidade de probabilidade da estatística de ordem da distribuição KumGG é dada por:

$$f_{i:n}(t) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(t) \sum_{j_1=0}^{n-i} (-1)^{j_1} \binom{n-i}{j_1} \sum_{r=0}^{\infty} p_{r,i+j_1-1}(\lambda, \varphi) G(t)^r.$$

Alternativamente, podemos escrever:

$$\begin{aligned} f_{i:n}(t) &= \frac{1}{B(i, n-i+1)} \sum_{d,q,r=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{n-i} (-1)^{j_1} \binom{n-i}{j_1} w_{d,q}\, p_{r,i+j_1-1}(\lambda, \varphi) \\ &\times \gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]^r g_{(\alpha,\tau,k(1+q)+d)}(t). \end{aligned} \tag{42}$$

A equação (42) pode ser reescrita como:

$$f_{i:n}(t) = \sum_{d,q,r=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{n-i} m(d, q, i, j_1, n)\, p_{r,i+j_1-1}(\lambda, \varphi)\, t^{\tau(kq+d)}\, \gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]^r g_{\alpha,\tau,k}(t),$$

em que,

$$\begin{aligned} m(d, q, i, j_1, n) &= \frac{\lambda\, \varphi\, \Gamma(\varphi)}{B(i, n-i+1)} \sum_{j,m=0}^{\infty} \sum_{l=q}^{\infty} \frac{(-1)^{j+j_1+l+q}\, s_m(\lambda)\, c_{q,d}}{\alpha^{\tau(kq+d)}\, \Gamma(k)^q\, \Gamma(\varphi - j)\, j!} \binom{n-i}{j_1} \binom{\lambda j + m}{l} \\ &\times \binom{l}{q}. \end{aligned} \tag{43}$$

Finalmente, $E\left(T_{i:n}^s\right)$ pode ser expresso como:

$$E\left(T_{i:n}^s\right) = \sum_{d,q,r=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{n-i} m(d, q, i, j_1, n)\, p_{r,i+j_1-1}(\lambda, \varphi)\, \delta_{s+\tau(kq+d),r},$$

em que

$$\delta_{s,r} = \int_0^{\infty} t^s\, \gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]^r g_{\alpha,\tau,k}(t) dt,$$

é o (s, r)-ésimo momento ponderado de Y, que pode ser calculado numericamente.

3.3 Estimação de máxima verossimilhança com dados censurados

Seja T uma variável aleatória com distribuição KumGG com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \tau, k, \lambda, \varphi)^T$. Supondo que os dados consistam de n observações independentes $t_i = \min(T_i, C_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, o logarítmo da função de verossimilhança, considerando a distribuição KumGG, é dado por:

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\theta}) &= r\log\left[\frac{\lambda\varphi\tau}{\alpha\Gamma(k)}\right] - \sum_{i\in F}\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\tau} + (\tau k - 1)\sum_{i\in F}\log\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) + (\lambda - 1)\sum_{i\in F}\log\left\{\gamma_1\left[k, \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\} \\ &\quad +(\varphi - 1)\sum_{i\in F}\log\left(1 - \left\{\gamma_1\left[k, \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda}\right) + \varphi\sum_{i\in C}\log\left(1 - \left\{\gamma_1\left[k, \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda}\right), \quad (44) \end{aligned}$$

em que r é o número de falhas e F e C denotam o conjunto de observações não censuradas e censuradas, respectivamente.

As derivadas de primeira ordem de (44) em relação aos parâmetros em $\boldsymbol{\theta}$ são dadas por:

$$U_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{r\tau k}{\alpha} + \frac{\tau}{\alpha}\sum_{i\in F}u_i - \frac{\tau}{\alpha}\sum_{i\in F}v_i s_i + \frac{\lambda\tau(\varphi - 1)}{\alpha\Gamma(k)}\sum_{i\in F}u_i p_i + \frac{\lambda\tau\varphi}{\alpha\Gamma(k)}\sum_{i\in C}u_i p_i,$$

$$\begin{aligned} U_\tau(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{r}{\tau} - \frac{1}{\tau}\sum_{i\in F}u_i\log(u_i) + \frac{k}{\tau}\sum_{i\in F}\log(u_i) + \frac{1}{\tau}\sum_{i\in F}v_i s_i\log(u_i) \\ &\quad -\frac{\lambda(\varphi - 1)}{\tau}\sum_{i\in F}v_i p_i\log(u_i) - \frac{\lambda\varphi}{\tau}\sum_{i\in C}v_i p_i\log(u_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_k(\boldsymbol{\theta}) &= -r\lambda\psi(k) + \sum_{i\in F}\log(u_i) + \sum_{i\in F}s_i q_i + (\varphi - 1)[r\lambda\psi(k)]\sum_{i\in F}p_i\gamma_1(k, u_i) \\ &\quad -\lambda(\varphi - 1)\sum_{i\in F}p_i q_i + \lambda\varphi\psi(k)(n - r - 1)\sum_{i\in C}p_i\gamma_1(k, u_i) - \lambda\varphi\sum_{i\in F}p_i q_i, \end{aligned}$$

$$U_\lambda(\boldsymbol{\theta}) = \frac{r}{\lambda} + \sum_{i\in F}\log[\gamma_1(k, u_i)] - (\varphi - 1)\sum_{i\in F}b_i[\gamma_1(k, u_i)]^{\lambda} - \varphi\sum_{i\in C}b_i[\gamma_1(k, u_i)]^{\lambda}$$

e

$$U_\varphi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{r}{\varphi} + \sum_{i=1}^{n}\log(\omega_i),$$

em que,

$$u_i = \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\tau}, \quad g_i = u_i^k\exp(-u_i), \quad \omega_i = 1 - \gamma_1(k, u_i)^{\lambda}, \quad v_i = \frac{g_i}{\Gamma(k)}, \quad s_i = \frac{(\lambda - 1)}{\gamma_1(k, u_i)},$$

$$[\dot{\gamma}(k,u_i)]_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} J(u_i, k+n-1, 1),$$

$$p_i = \frac{\gamma_1(k,u_i)^{\lambda-1}}{\omega_i}, \quad q_i = \frac{[\dot{\gamma}(k,u_i)]_k}{\Gamma(k)}, \quad b_i = \frac{\log[\gamma_1(k,u_i)]}{\omega_i},$$

$\psi(.)$ é a função digama e $J(u_i, k+n-1, 1)$ é definido no Apêndice B.

Consequentemente, o estimador de máxima verossimilhança (EMV) $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ é obtido numericamente a partir das equações não lineares,

$$U_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = U_\tau(\boldsymbol{\theta}) = U_k(\boldsymbol{\theta}) = U_\lambda(\boldsymbol{\theta}) = U_\varphi(\boldsymbol{\theta}) = 0.$$

Devido à presença de censura, a realização de testes de hipóteses e construção de intervalos de confiança são baseados na teoria assintótica dos EMV. Assim, sob certas condições de regularidade, a distribuição assintótica dos EMV é dada por $N_5(\widehat{\boldsymbol{\theta}}, J(\boldsymbol{\theta})^{-1}$, em que $J(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação observada obtida de:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} j_{\alpha,\alpha} & j_{\alpha,\tau} & j_{\alpha,k} & j_{\alpha,\lambda} & j_{\alpha,\varphi} \\ j_{\tau,\alpha} & j_{\tau,\tau} & j_{\tau,k} & j_{\tau,\lambda} & j_{\tau,\varphi} \\ j_{k,\alpha} & j_{k,\tau} & j_{k,k} & j_{k,\lambda} & j_{k,\varphi} \\ j_{\lambda,\alpha} & j_{\lambda,\tau} & j_{\lambda,k} & j_{\lambda,\lambda} & j_{\lambda,\varphi} \\ j_{\varphi,\alpha} & j_{\varphi,\tau} & j_{\varphi,k} & j_{\varphi,\lambda} & j_{\varphi,\varphi} \end{pmatrix},$$

cujos elementos são apresentados no Apêndice B.

O teste da razão de verossimilhança (TRV) é útil para comparar a distribuição KumGG com alguns de seus sub-modelos. Por exemplo, o teste de $H_0 : \varphi = 1$ *versus* $H_1 : H_0$ *não é verdade*, é equivalente a comparar a distribuição GGE com a distribuição KumGG para o qual a estatística w é dada por

$$w = 2\big[\ell(\widehat{\alpha}, \widehat{\tau}, \widehat{k}, \widehat{\lambda}, \widehat{\varphi}) - \ell(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\tau}, \widetilde{k}, \widetilde{\lambda}, 1)\big],$$

em que $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\tau}$, $\widehat{k}$, $\widehat{\lambda}$ e $\widehat{\varphi}$ são os estimadores de máxima verossimilhança sob H_1 e $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\tau}$, $\widetilde{k}$ e $\widetilde{\lambda}$ são os estimadores sob H_0.

3.4 Análise bayesiana

Considere a função densidade de probabilidade (13) da distribuição KumGG e a função de verossimilhança (44) para os parâmetros α, τ, k, λ e φ. Para uma análise

bayesiana, assume-se a seguinte densidade conjunta *a priori* dada por:

$$\pi(\alpha,\tau,k,\lambda,\varphi) \propto \pi(\alpha)\times\pi(\tau)\times\pi(k)\times\pi(\lambda)\times\pi(\varphi),$$

em que $\alpha \sim \Gamma(a_1,b_1)$, $\tau \sim \Gamma(a_2,b_2)$, $k \sim \Gamma(a_3,b_3)$, $\lambda \sim \Gamma(a_4,b_4)$ e $\varphi \sim \Gamma(a_5,b_5)$, sendo $\Gamma(a_i,b_i)$ a distribuição gama com média a_i/b_i, variância a_i/b_i^2 e função densidade de probabilidade dada por:

$$f(\upsilon;a_i,b_i) = \frac{b_i^{a_i}\upsilon^{a_i-1}\exp(-\upsilon b_i)}{\Gamma(a_i)},$$

em que $\upsilon > 0$, $a_i > 0$ e $b_i > 0$. Todos os hiperparâmetros são especificados. Assumindo independência entre os parâmetros α, τ, k, λ e φ, a distribuição conjunta *a posteriori* para α, τ, k, λ e φ é dada por:

$$\begin{aligned}\pi(\alpha,\tau,k,\lambda,\varphi|t) \;\propto\; & \Big(\frac{\lambda\varphi\tau}{\alpha^{\tau k}\Gamma(k)}\Big)^r \exp\Big[-\sum_{i\in F}\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\prod_{i\in F} t_i^{\tau k-1}\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}^{\lambda-1}\times \\ & \prod_{i\in F}\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}^\lambda\Big)^{\varphi-1}\prod_{i\in C}\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}^\lambda\Big)^{\varphi}\times \\ & \pi(\alpha,\tau,k,\lambda,\varphi). \end{aligned} \tag{45}$$

As densidades marginais *a posteriori* dos parâmetros α, τ, k, λ e φ não são facilmente obtidas; isso porque a integração da densidade *a posteriori* conjunta (45) é muito complexa. Uma alternativa para situações desse tipo é o uso do algoritmo Metropolis-Hasting, descrito na sub-seção 2.5.2.

O algoritmo Metropolis-Hasting permite simular observações de distribuições a partir das densidades condicionais *a posteriori*. Assim, para o uso de tal algoritmo consideram-se as seguintes condicionais *a posteriori* completas para os parâmetros α, τ, k, λ e φ:

$$\begin{aligned}\pi(\alpha|t,\tau,k,\lambda,\varphi) \;\propto\; & (\alpha^{\tau k})^{-r}\exp\Big[-\sum_{i\in F}\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\prod_{i\in F}\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}^{\lambda-1}\times \\ & \prod_{i\in F}\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}^\lambda\Big)^{\varphi-1}\prod_{i\in C}\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}^\lambda\Big)^{\varphi}\times\pi(\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi(\tau|t,\alpha,k,\lambda,\varphi) \;\propto\; & \Big(\frac{\tau}{\alpha^{\tau k}}\Big)^r\exp\Big[-\sum_{i\in F}\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\prod_{i\in F} t_i^{\tau k}\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}^{\lambda-1}\times \\ & \prod_{i\in F}\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}^\lambda\Big)^{\varphi-1}\prod_{i\in C}\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}^\lambda\Big)^{\varphi}\times\pi(\tau)\end{aligned}$$

$$\pi(k|t,\alpha,\tau,\lambda,\varphi) \propto [\alpha^{\tau k}\Gamma(k)]^{-r}\prod_{i\in F} t_i^{\tau k}\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda-1}\times$$
$$\prod_{i\in F}\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi-1}\prod_{i\in C}\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi}\times\pi(k)$$

$$\pi(\lambda|t,\alpha,\tau,k,\varphi) \propto (\lambda)^r\prod_{i\in F}\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi-1}\times$$
$$\prod_{i\in C}\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi}\times\pi(\lambda)$$

e

$$\pi(\varphi|t,\alpha,\tau,k,\lambda) \propto (\varphi)^r\prod_{i\in F}\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi}\prod_{i\in C}\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi}\times$$
$$\pi(\varphi)$$

Para as análises descritivas para os parâmetros do modelo KumGG foi utilizado o *software* estatístico R, pacote BOA (*Bayesian Output Analysis*).

3.5 APLICAÇÕES

Nesta seção do trabalho, são apresentados dois conjuntos de dados que estão relacionados com a ciências dos materiais e as ciências biomédicas, respectivamente, para ilustrar o uso da nova distribuição de probabilidade KumGG. Todos os resultados foram obtidos nos *software* R (*R Development Core Team*, 2011) e SAS versão 9.1 (SAS, 2004).

3.5.1 Análise dos dados de Aarset

Para ilustrar a aplicação da distribuição KumGG foi utilizado um conjunto analisado em Aarset (1987) e posteriormente por Mudholkar; Srivastava e Kollia (1996) e Wang (2000) . Os dados se referem a 50 dispositivos.

A Curva TTT, definida na sub-seção 2.1.1, para o conjunto de dados de Aarset, encontra-se na Figura 7 e indica uma função risco na forma de U. Assim, para analisar esse conjunto de dados, a distribuição KumGG pode ser utilizada.

Na Tabela 1, podem ser vistos as EMVs (e os correspondentes erros-padrão que estão entre parênteses) dos parâmetros e os valores das estatísticas de alguns modelos, gama generalizada exponeciada (GGE), gama generalizada (GG), Weibull (W) e Beta Weibull (BW). O modelo BW não é um sub-modelo da distribuição KumGG. A

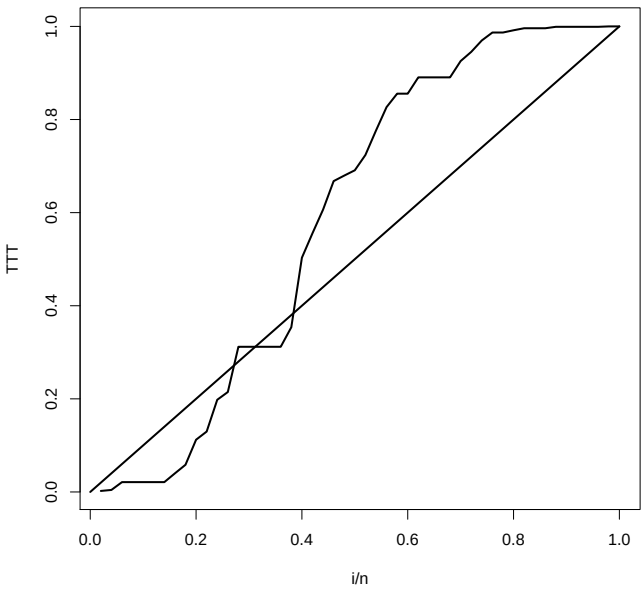

Figura 7 - Curva TTT para os dados de Aarset

distribuição BW foi introduzido por Famoye e Lee (2005) e sua função de distribuição acumulada é:

$$F(t) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{\{1-\exp[-(t/\alpha)^\gamma]\}} w^{a-1}(1-w)^{b-1} dw.$$

Os resultados da Tabela 1 indicam que o modelo KumGG tem os menores valores de AIC, BIC e CAIC entre os modelos ajustados, portanto, o modelo KumGG é o mais adequado para os dados de Aarset.

Por outro lado, para ilustrar a utilização da distribuição KumGG para discriminação de modelos, comparou-se a distribuiçao KumGG com alguns de seus submodelos por meio do TRV, como é apresentado na Tabela 2. Os resultados nessa tabela sugerem que o modelo KumGG produz um ajuste mais adequado a esses dados quando comparado com as outras três distribuições.

Além disso, as funções de sobrevivência e densidade de probabilidade estimadas para os diferentes modelos nos dados de Aarset são representadas graficamente na Figura 8. Dessa figura, observa-se que para as diferentes distribuições ajustadas aos dados de Arset a distribuição KumGG apresenta um ajuste mais adequado se comparado aos outros modelos probabilísticos.

Tabela 1 - EMVs dos parâmetros dos modelos KumGG, GGE, GG, W e BW para os dados de Aarset, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores das estatísticas AIC, BIC e CAIC

Modelo	α	τ	k	λ	φ	AIC	BIC	CAIC
KumGG	$84,5056$	$79,5358$	$0,0080$	$0,5393$	$0,3431$	$423,1$	$432,7$	$424,5$
	$(0,2099)$	$(2,0929)$	$(0,0021)$	$(0,2387)$	$(0,0565)$			
GGE	$86,7690$	$28,8487$	$1,0314$	$0,0272$	1	$455,7$	$463,4$	$456,6$
	$(0,5539)$	$(0,0308)$	$(0,0001)$	$(0,0039)$	$(-)$			
GG	$86,9241$	$259,01$	$0,0028$	1	1	$446,7$	$452,4$	$447,2$
	$(0,8946)$	$(0,0024)$	$(0,0004)$	$(-)$	$(-)$			
Weibull	$44,9126$	$0,9490$	1	1	1	$486,0$	$489,8$	$486,3$
	$(6,6451)$	$(0,1196)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$			
Beta Weibull	α	γ	a	b				
	$49,6326$	$5,9441$	$0,0783$	$0,0702$	$(-)$	$444,5$	$452,1$	$445,4$
	$(3,7606)$	$(0,1394)$	$(0,0166)$	$(0,0288)$	$(-)$			

Tabela 2 - TRV para os dados de Aarset

Modelo	Hipóteses	Estatística w	valor p
KumGG vs GGE	$H_0 : \varphi = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falso	35,4	$<$ 0,0001
KumGG vs GG	$H_0 : \varphi = \lambda = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falso	27,6	$<$ 0,0001
KumGG vs Weibull	$H_0 : \varphi = \lambda = k = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falso	68,9	$<$ 0,0001

Considerando agora uma análise bayesiana, foram adotadas as seguintes distribuições *a priori* pouco informativas: $\alpha \sim \Gamma(0,01; 0,01)$, $\tau \sim \Gamma(0,01; 0,01)$, $k \sim \Gamma(0,01; 0,01)$, $\lambda \sim \Gamma(0,01; 0,01)$ e $\varphi \sim \Gamma(0,01; 0,01)$.

Dessa forma, foram geradas duas cadeias paralelas e independentes com tamanho 200.000 para cada parâmetro usando o algoritmo de Metropolis-Hasting, desconsiderando as primeiras 20.000 iterações para eliminar o efeito dos valores iniciais. Além disso, considerou-se espaçamento de tamanho 10, para evitar problemas de correlação, obtendo-se uma amostra de tamanho 18.000. Para monitorar a convergência das amostras foi usado o fator de redução da escala $\hat{R}$, desenvolvido por Gelman e Rubin (1992). A Tabela 3 apresenta os sumários *a posteriori* para os parâmetros do modelo KumGG, além de mostrar os valores do fator de redução da escala.

Nota-se que, em todos os casos, os valores de $\hat{R}$ estão próximos de 1, in-

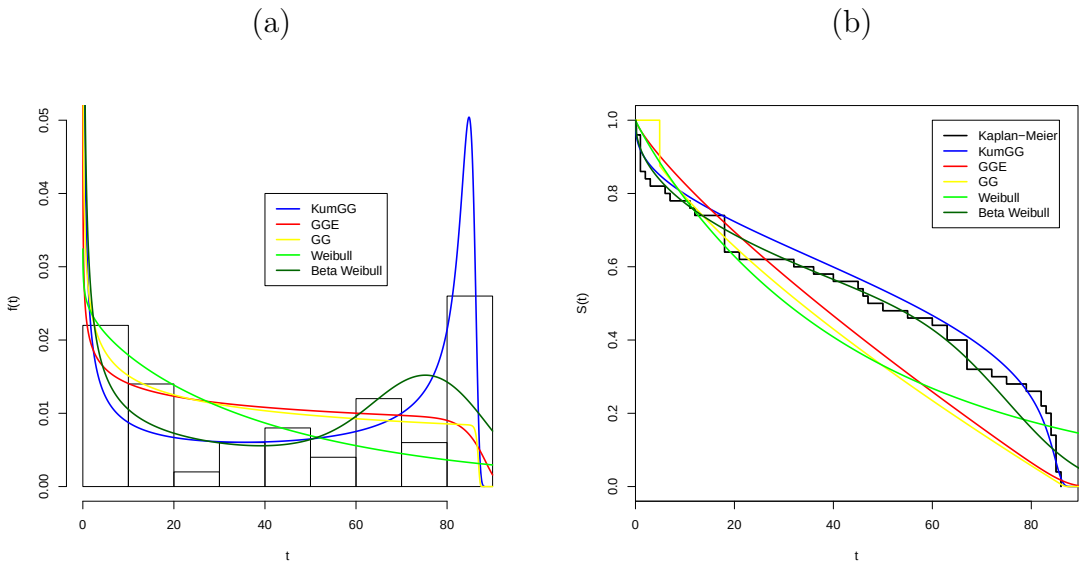

Figura 8 - (a) Densidades estimadas dos modelos para os dados de Aarset. (b) Estimativas da função de sobrevivência segundo Kaplan-Meier e segundo os modelos KumGG, GGE, GG, Weibull e beta Weibull, para os dados de Aarset

Tabela 3 - Sumário *a posteriori* dos parâmetros do modelo KumGG para os dados de Aarset

Parâmetro	Média	Desvio padrão	HPD (95%)	$\hat{R}$
α	$84,5551$	$0,5130$	$(83,5624; 85,5690)$	$1,0015$
τ	$79,5361$	$0,1007$	$(479,3344; 79,7280)$	$1,0002$
k	$0,0080$	$0,0010$	$(0,0061; 0,0099)$	$1,0003$
λ	$0,5397$	$0,0991$	$(0,3539; 0,7402)$	$0,9999$
φ	$0,3434$	$0,0999$	$(0,1550; 0,5452)$	$0,9999$

dicando a convergência das cadeias. Pode-se observar que o valores para a média a posteriori (Tabela 3) são similares aos valores obtidos para o modelo KumGG apresentados na Tabela 1. Além disso, a Figura 9 apresenta as densidades marginais *a posteriori* aproximadas pelo histograma, considerando as 18.000 observações amostrais geradas. As densidades marginais apresentadas por meio da Figura 9 sugerem que a distribuição *a posteriori* apresenta uma tendência à simetria para os parâmetros.

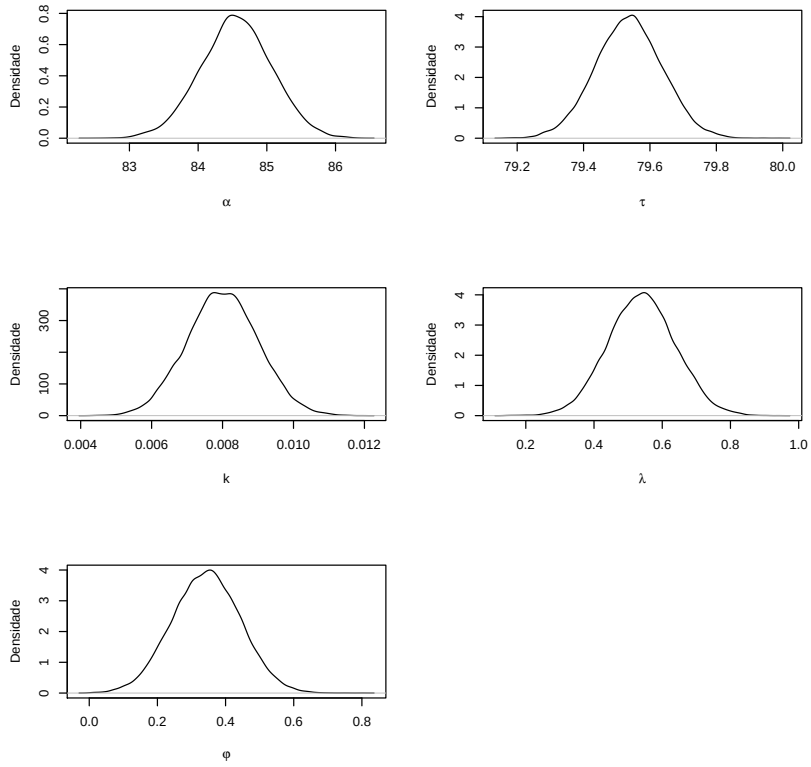

Figura 9 - Densidades marginais *a posteriori* para os parâmetros do modelo KumGG para os dados de Aarset

3.5.2 Análise dos dados de Aids

A Aids é uma patologia que mobiliza os portadores pelas implicações sócio-afetivas de relacionamento e reprodução. Avanços terapêuticos têm possibilitado à mulher soropositiva direito à reprodução. Nesse sentido, o ambulatório da Imuno Pediatria do Hospital das Clínicas e o Serviço Social de Ribeirão Preto atuam na linha do cuidado dos recém nascidos de mães soropositivas no controle e adesão à terapia antiretroviral de forma a potencializar acesso às informações e orientações, garantindo direitos em busca da emancipação. Nesse trabalho, considera-se o conjunto de dados referente ao tempo até a soro-reversão de 148 crianças expostas ao HIV por via vertical, dos quais 56% são censurados, nascidas no Hospital das Clínicas da Faculdade de Medicina de Ribieirão Preto entre 1986 e 2001, e cujas mães não foram tratadas (SILVA, 2004; PERDONÁ, 2006). A transmisão por via vertical do vírus HIV pode ocorrer durante a gestação em torno de 35% dos casos; durante o trabalho de parto e o parto propriamente dito, em que

mais ocorre, 65% dos casos; ou na amamentação, variando de 7% a 22%.

A soro-reversão ou reversão sorológica pode ocorrer em crianças nascidas de mães contaminadas com o vírus HIV. Ela é o processo de desaparecimento dos anticorpos anti-HIV do sangue em indivíduo que apresentava infecção pelo HIV. Com o passar dos meses, os anticorpos maternos vão sendo eliminados e a sorologia anti HIV deixa de ser positiva. Os recém-nascidos expostos foram monitorados até a definição da condição sorológica, fazendo uso da droga Zidovudina (AZT) nas primeiras 24h de vida, a qual foi administrada durante 6 semanas.

A Curva TTT, definida na seção 2.1.1, para o conjunto de dados de Aids encontra-se na Figura 10 e indica uma função risco crescente. Assim, para analisar esse conjunto de dados, foi considerada a distribuição KumGG e algumas distribuições conhecidas.

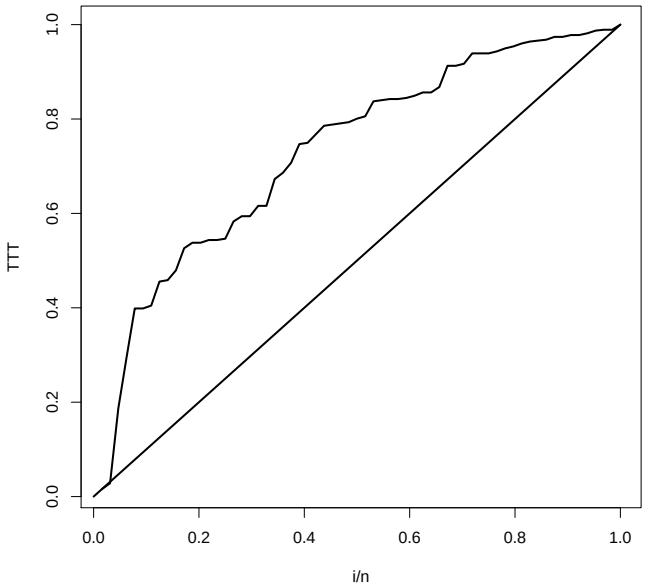

Figura 10 - Curva TTT para os dados de Aids

Na Tabela 4, podem ser vistos as EMVs (e os correspondentes erros-padrão que estão entre parênteses) dos parâmetros e os valores das estatísticas de alguns modelos, gama generalizada exponenciada (GGE), gama generalizada (GG), Weibul (W) e Beta Weibull (BW). Esses resultados indicam que o modelo KumGG tem o menores valores de AIC, BIC e CAIC entre os modelos ajustados. Pode-se, portanto, ser escolhido como o

modelo mais adequado.

Tabela 4 - EMVs dos parâmetros dos modelos KumGG, GGE, GG, W e BW para os dados de Aids, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores das estatísticas AIC, BIC e CAIC

Modelo	α	τ	k	λ	φ	AIC	BIC	CAIC
KumGG	$350,05$	$49,8303$	$0,2176$	$0,1282$	$0,3424$	$770,7$	$785,7$	$771,1$
	$(1,5707)$	$(5,8895)$	$(0,0073)$	$(0,0236)$	$(0,0522)$			
GGE	$350,45$	$22,2991$	$1,0741$	$0,1072$	1	$798,1$	$810,1$	$798,3$
	$(2,4187)$	$(0,0375)$	$(0,0004)$	$(0,0113)$	$(-)$			
GG	$379,40$	$24,5312$	$0,0974$	1	1	$783,7$	$792,7$	$783,9$
	$(8,8211)$	$(10,3258)$	$(0,0402)$	$(-)$	$(-)$			
Weibull	$307,62$	$3,1132$	1	1	1	$808,0$	$814,0$	$808,1$
	$(12,3523)$	$(0,3250)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$			
Beta Weibull	α	γ	a	b				
	$349,99$	$6,3895$	$0,3944$	$0,9273$	$(-)$	$797,9$	$809,9$	$798,2$
	$(23,0923)$	$(0,7657)$	$(0,0468)$	$(0,3361)$	$(-)$			

Para ilustrar a utilização da distribuição KumGG para discriminação de modelos, comparou-se a distribuição KumGG com alguns de seus sub-modelos por meio do TRV. As hipóteses testadas, bem como a estatística do teste são apresentados na Tabela 5. Os resultados nessa tabela sugerem que o modelo KumGG produz um ajuste mais adequado a esses dados quando comparado com as outras três distribuições.

Tabela 5 - TRV para os dados de Aids

Modelo	Hipóteses	Estatística w	valor p
KumGG vs GGE	$H_0 : \varphi = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falso	29,4	$<$ 0,0001
KumGG vs GG	$H_0 : \varphi = \lambda = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falso	17,0	0,0002
KumGG vs Weibull	$H_0 : \varphi = \lambda = k = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falso	43,3	$<$ 0,0001

Além disso, a função de sobrevivência para os diferentes modelos ajustados nos dados de Aids é representada graficamente na Figura 11. Nessa figura, pode-se observar que para as diferentes distribuições ajustadas aos dados de Aids, a distribuição KumGG apresenta um melhor ajuste se comparado aos outros modelos probabilísticos alternativos.

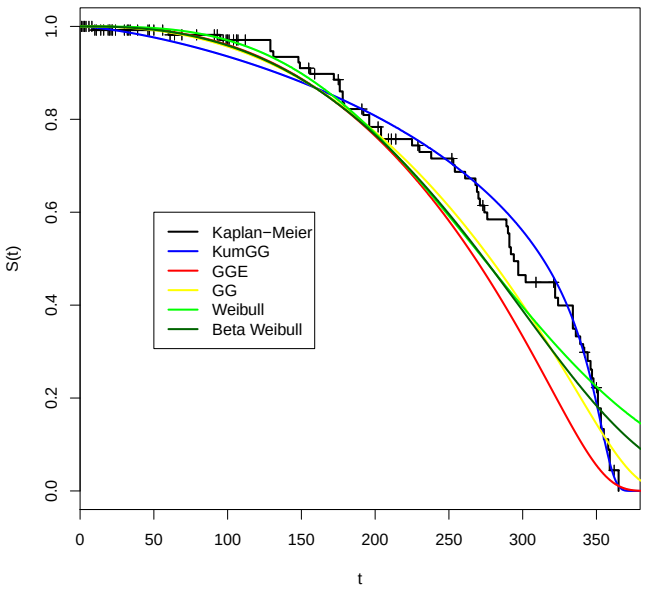

Figura 11 - Função de sobrevivência para alguns modelos ajustados e a função de sobrevivência empírica estimada pelo método de Kaplan-Meier dos dados de Aids

Considerando agora uma análise bayesiana, foram adotadas as seguintes distribuições *a priori* pouco informativas: $\alpha \sim \Gamma(0,01; 0,01)$, $\tau \sim \Gamma(0,01; 0,01)$, $k \sim \Gamma(0,01; 0,01)$, $\lambda \sim \Gamma(0,01; 0,01)$ e $\varphi \sim \Gamma(0,01; 0,01)$.

Dessa forma, foram geradas duas cadeias paralelas e independentes com tamanho 100.000 para cada parâmetro usando o algoritmo de Metropolis-Hasting, desconsiderando as primeiras 10.000 iterações para eliminar o efeito dos valores iniciais. Além disso, considerou-se espaçamento de tamanho 10, para evitar problemas de correlação, obtendo-se uma amostra de tamanho 9.000. Para monitorar a convergência das amostras foi usado o fator de redução da escala $\hat{R}$, desenvolvido por Gelman e Rubin (1992). A Tabela 6 apresenta os sumários *a posteriori* para os parâmetros do modelo KumGG, além de mostrar os valores do fator de redução da escala.

Nota-se, em todos os casos, que os valores de $\hat{R}$ estão próximos de 1, indicando a convergência das cadeias. Pode-se observar que o valores para a média a posteriori (Tabela 6) são similares aos valores obtidos para o modelo KumGG apresentados na Tabela 4. Além disso, a Figura 12 apresenta as densidades marginais *a posteriori* aproximadas pelo histograma, considerando as 9.000 observações amostrais geradas. As

Tabela 6 - Sumário *a posteriori* dos parâmetros do modelo KumGG para os dados de Aids

Parâmetro	Média	Desvio padrão	HPD (95%)	$\hat{R}$
α	$350,0872$	$1,0046$	$(348,0408; 351,9952)$	$1,0031$
τ	$49,8320$	$0,3021$	$(49,2220; 50,4063)$	$1,0027$
k	$0,2159$	$0,0519$	$(0,1166; 0,3173)$	$1,0018$
λ	$0,1283$	$0,0411$	$(0,0434; 0,2056)$	$1,0075$
φ	$0,3418$	$0,0501$	$(0,2422; 0,4373)$	$0,9998$

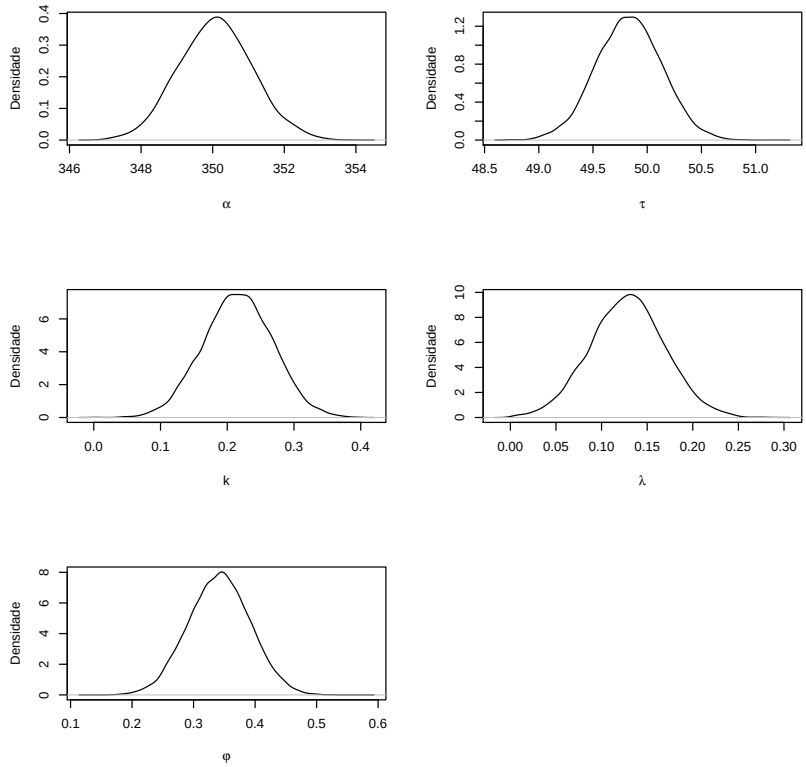

Figura 12 - Densidades marginais *a posteriori* para os parâmetros do modelo KumGG para os dados de Aids

densidades marginais apresentadas por meio da Figura 12 sugerem que a distribuição *a posteriori* apresenta uma tendência à simetria para os parâmetros.

4 DISTRIBUIÇÃO KUMARASWAMY GAMA GENERALIZADA ESTENDIDA

Em 1965, Stacy e Mihram propuseram uma reparametrização em um dos parâmetros de forma da distribuição gama generalizada (GG), de tal maneira que o espaço paramétrico do parâmetro seja todos os reais exceto o zero.

Com essa reparametrização na distribuição GG, a distribuição passa a ter como casos particulares algumas distribuições inversas, como, por exemplo, as distribuições Weibull inversa, gama inversa, Rayleigh inversa, entre outras.

Dessa forma, seguindo a ideia de Stacy e Mihram (1965), o objetivo deste capítulo é modificar um dos parâmetros da distribuição Kumaraswamy gama generalizada de modo que a distribuição passe a ter como casos particulares as distribuições inversas. Essa distribuição com o parâmetro extendido aos reais negativos foi denominada de distribuição Kumaraswamy gama generalizada (KumGGE). Além disso, em algumas situações práticas, a variável resposta é associada a covariáveis. Por essa razão, um modelo de locação e escala obtido a partir da distribuição KumGGE foi proposto para estudar o efeito das covariáveis sobre a variável resposta.

O restante do capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 4.1 a distribuição Kumaraswamy gama generalizada estendida é introduzida e alguns submodelos são apresentados. As propriedades matemáticas da nova distribuição são apresentadas na seção 4.2. Na seção 4.3, define-se a distribuição log-Kumaraswamy gama generalizada estendida e deriva-se uma expressão para seus momentos. Na seção 4.4, o modelo de regressão log-Kumaraswamy gama generalizada estendida é descrito. Estimação pelos métodos de máxima verossimilhança e bayesiana estão presentes nas seções 4.5 e 4.6, respectivamente. Por fim, a análise de um conjunto de dados reais é dada na seção 4.7.

4.1 Distribuição Kumaraswamy gama generalizada estendida

A proposta de estender um dos parâmetros da distribuição Kumaraswamy gama generalizada surgiu da ideia de Stacy e Mihram (1965), na qual apresentaram uma reparametrização de tal forma que o parâmetro τ pode assumir valores positivos e negativos. Assim, considerando que τ seja qualquer valor diferente de zero na função densidade de probabilidade (13), o novo modelo obtido é denominado de distribuição Kumaraswamy

gama generalizada estendida (KumGGE), em razão do espaço paramétrico de τ ser estendido para os valores negativos. A função densidade de probabilidade, nesse caso, é dada por (para $t > 0$):

$$f(t) = \frac{\lambda\,\varphi\,|\tau|}{\alpha\Gamma(k)}\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau k-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda-1}\Big(1-\Big\{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi-1}, \quad (46)$$

em que, $\gamma_1(\cdot,\cdot)$ é a razão da função gama incompleta definida na equação (2), $\tau \neq 0$, $\alpha > 0$, $k > 0$, $\lambda > 0$ e $\varphi > 0$. A Figura 4.1 mostra o gráfico da função densidade de probabilidade da distribuição KumGGE para diferentes valores de parâmetros, considerando $\tau > 0$ e $\tau < 0$. Observa-se a flexibilidade da função densidade de probabilidade para valores de τ.

(a) (b) (c)

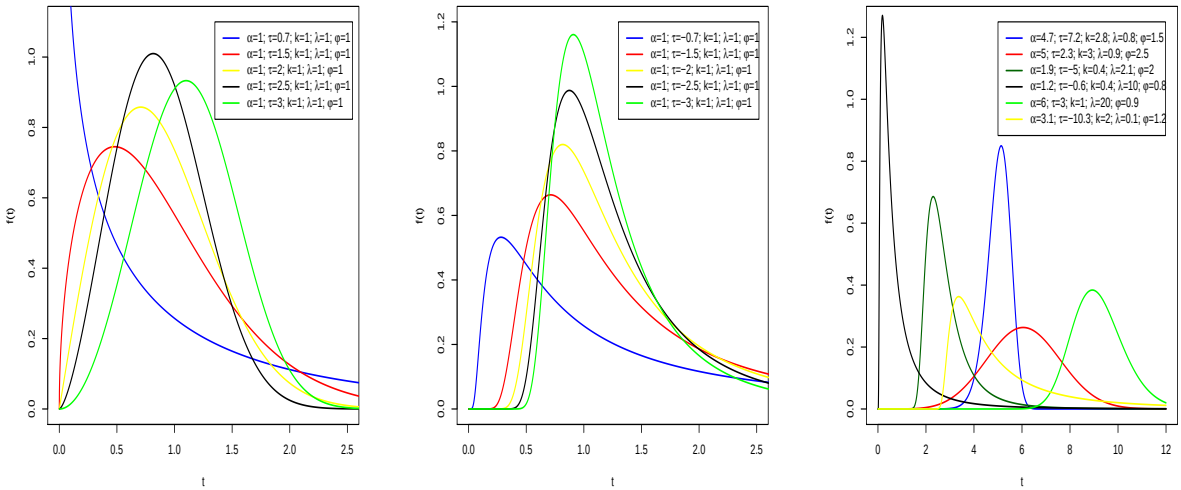

Figura 13 - Gráfico da função densidade da distribuição KumGGE: (a) Para alguns valores de $\tau > 0$. (b) Para alguns valores de $\tau < 0$. (c) Para alguns valores de $\tau > 0$ e $\tau < 0$

Assim, se T é uma variável aleatória positiva com função densidade de probabilidade (46), pode-se escrever, então, que $T \sim \text{KumGGE}(\alpha, \tau, k, \lambda, \varphi)$.

Note que se $\tau > 0$, obtém-se a função densidade de probabilidade (13) e, consequentemente, os modelos descritos na seção 3.1 são sub-modelos da distribuição KumGGE. Para $\tau < 0$ tem-se as distribuições inversas para os modelos descritos na seção 3.1, como para o caso $\lambda = \varphi = k = 1$ e $\tau < 0$, que corresponde à distribuição

Weibull inversa, para $\varphi = \lambda = 1$ e $\tau = -1$, obtém-se uma distribuição gama inversa, se $\varphi = \lambda = k = 1$ e $\tau = -1$ a distibuição KumGGE se reduz a uma distribuição exponencial inversa, para $\varphi = \lambda = k = 1$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2s^2}}$ e $\tau = -2$ tem-se uma distribuição Rayleigh inversa e para $\lambda = \varphi = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $k = \frac{v}{2}$ e $\tau = -1$ obtém-se a distribuição qui-quadrado inversa com v graus de liberdade.

A função de distribuição acumulada da distribuição KumGGE é definida por:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \Big(1 - \Big\{\gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi} & \text{se} \quad \tau > 0, \\ \\ \Big(1 - \Big\{\gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi} & \text{se} \quad \tau < 0. \end{cases} \tag{47}$$

Por outro lado, a função de sobrevivência correspondente a (47) é:

$$S(t) = \begin{cases} \Big(1 - \Big\{\gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi} & \text{se} \quad \tau > 0, \\ \\ 1 - \Big(1 - \Big\{\gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi} & \text{se} \quad \tau < 0. \end{cases}$$

4.2 Propriedades gerais

Da mesma forma que no Capítulo 3, algumas propriedades da distribuição KumGGE podem ser encontradas se a função densidade de probabilidade (46) for escrita como uma combinação linear da distribuição GG descrita por Stacy e Mihram (1965).

Então, o termo $\Big(1 - \Big\{\gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda}\Big)^{\varphi-1}$ da função (46) pode ser reescrito utilizando a expansão dada em (14). Assim, a função densidade de probabilidade da distribuição KumGGE em forma de expansão é:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\lambda\varphi|\tau|}{\alpha\Gamma(k)}\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau k-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\{\gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\varphi)}{\Gamma(\varphi-j)j!} \\ &\times \Big\{\gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda j}. \end{aligned} \tag{48}$$

Usando a expansão (105), dada no Apêndice A em (48), obtém-se:

$$f(t) = \frac{\lambda\varphi|\tau|}{\alpha\Gamma(k)}\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau k-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\sum_{m,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\varphi)s_m(\lambda)}{\Gamma(\varphi-j)j!}\Big\{\gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{\lambda j+m}. \tag{49}$$

Por outro lado, se $\lambda m + j > 0$ é um valor real e não-inteiro, a quantidade

$\left\{\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda j+m}$ da expressão (49) é reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\left\{\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda j+m} &= \left(1-\left\{1-\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{\lambda j+m+1-1}\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\binom{\lambda j+m}{l}\left\{1-\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^l.\end{aligned}$$

Mas utilizando a expansão binomial para a quantidade $\left\{1-\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^l$ da expressão acima, a função densidade de probabilidade fica como:

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{\lambda\varphi|\tau|}{\alpha\Gamma(k)}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau k-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\sum_{j,l,m=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{l}\frac{(-1)^{j+l+q}\Gamma(\varphi)s_m(\lambda)}{\Gamma(\varphi-j)j!}\\ &\times\binom{\lambda j+m}{l}\binom{l}{q}\left\{\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^q.\end{aligned}$$

Portanto, usando a expansão (110), dada no Apêndice A, e intercalando $\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{l}$ por $\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{l=q}^{\infty}$, a função densidade $f(t)$ pode ser expressa como uma combinação linear da distribuição GG dada por:

$$f(t)=\sum_{d,q=0}^{\infty}w_{d,q}\,g_{\alpha,\tau,k(1+q)+d}(t),\;\; t>0, \tag{50}$$

em que $g_{(\alpha,\tau,k(1+q)+d)}(t)$ tem distribuição GG de Stacy e Mihram (1965) e os coeficientes de ponderação $w_{d,q}$ são dados por:

$$w_{d,q}=\lambda\,\varphi\,\Gamma(\varphi)\sum_{j,m=0}^{\infty}\sum_{l=q}^{\infty}\frac{(-1)^{j+l+q}\,\Gamma[k(1+q)+d]\,s_m(\lambda)\,c_{q,d}}{\Gamma(k)^{q+1}\,\Gamma(\varphi-j)\,j!}\binom{\lambda j+m}{l}\binom{l}{q}.$$

A quantidade $s_m(\lambda)$ é dada por (106) e os coeficientes $c_{q,d}$ são determinados a partir da relação de recorrência (109).

4.2.1 Momentos

O r-ésimo momento ordinário da distribuição GG(α,τ,k) (STACY; MIHRAM, 1965) é obtido da seguinte forma:

$$\mu'_{r,GG}=\frac{\alpha^r\,\Gamma(k+r/\tau)}{\Gamma(k)},\qquad r/\tau>-k.$$

Logo, considerando a função densidade de probabilidade (50), o r-ésimo momento ordinário da distribuição KumGGE, obtidos a partir dos momentos da distribuição GG$(\alpha,\tau,k(1+q)+d)$ é dado por:

$$\mu'_r=\alpha^r\,\lambda\,\varphi\,\Gamma(\varphi)\sum_{d,q,j,m=0}^{\infty}\sum_{l=q}^{\infty}\frac{(-1)^{j+l+q}\,\Gamma[k(1+q)+d+r/\tau]\,s_m(\lambda)\,c_{q,d}}{\Gamma(k)^{q+1}\,\Gamma(\varphi-j)\,j!}\binom{\lambda j+m}{l}\binom{l}{q}.$$

Uma outra representação para os momentos é obtida por meio de operações algébricas realizadas na seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\mu'_r &= \frac{\lambda\varphi|\tau|\alpha^{r-1}}{\Gamma(k)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau k+r-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\left\{\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda-1}\\ &\quad\times\left(1-\left\{\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda}\right)^{\varphi-1}dt. \qquad (51)\end{aligned}$$

Agora, considera-se a mudança de variável $x = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}$ em (51). Assim,

$$\mu'_r = \frac{\lambda\varphi\alpha^r\text{sinal}(\tau)}{\Gamma(k)}\int_0^{+\infty} x^{k+\frac{r}{\tau}-1}\exp(-x)\,\gamma_1(k,x)^{\lambda-1}\left[1-\gamma_1(k,x)^{\lambda}\right]^{\varphi-1}dx. \qquad (52)$$

Note que, para $\varphi > 0$, um número real e não-inteiro, a quantidade $\left[1-\gamma_1(k,x)^{\lambda}\right]^{\varphi-1}$ da expressão em (52) pode ser escrita como a expansão definida em (21). Dessa forma, tem-se:

$$\mu'_r = \frac{\lambda\varphi\alpha^r\text{sinal}(\tau)}{\Gamma(k)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\varphi)}{\Gamma(\varphi-j)j!}\int_0^{+\infty} x^{k+\frac{r}{\tau}-1}\exp(-x)\,\gamma_1(k,x)^{\lambda(1+j)-1}dx. \qquad (53)$$

Portanto, utilizando o mesmo resultado encontrado em (23), o r-ésimo momento ordinário da distribuição KumGGE é dado por:

$$\mu'_r = \frac{\lambda\varphi\alpha^r\text{sinal}(\tau)}{\Gamma(k)}\sum_{j,l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} w_{j,l,m} I\left(k,\frac{r}{\tau},m\right),$$

em que $w_{j,l,m}$ e $I\left(k,\frac{r}{\tau},m\right)$ são definidos pelas equações (25) e (26), respectivamente.

4.2.2 Função geradora de momentos

Seja T uma variável aleatória KumGGE$(\alpha,\tau,k,\lambda,\varphi)$, com função densidade de probabilidade (46), então a função geradora de momentos (fgm), denotada por $M(s) = E[\exp(sT)]$, é obtida a partir da distribuição GG proposta por Stacy e Mihram (1965), pois a função densidade de probabilidade da distribuição KumGGE é escrita na forma de uma combinação linear da distribuição GG. Assim, o primeiro passo é encontrar a fgm da distribuição GG Stacy e Mihram (1965). Logo,

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{|\tau|}{\alpha^{\tau k}\Gamma(k)}\int_0^{\infty}\exp(st)\,t^{\tau k-1}\exp\{-(t/\alpha)^{\tau}\}dt.$$

Então, substituindo $u = t/\alpha$, tem-se:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{|\tau|}{\Gamma(k)}\int_0^{\infty}\exp(\alpha s u)\,u^{\tau k-1}\exp(-u^{\tau})du.$$

Da mesma forma que na sub-seção 3.2.2, expandindo o termo $\exp(\alpha s u)$ em série de Taylor, $M_{\alpha,\tau,k}(s)$ é dado por:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{|\tau|}{\Gamma(k)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha s)^m}{m!} \int_0^{\infty} u^{\tau k+m-1} \exp(-u^{\tau}) du.$$

Então, considerando o resultado da integral definida em (28), a fgm da distribuição GG (STACY; MIHRAM, 1965) é expressa por:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{\text{sinal}(\tau)}{\Gamma(k)} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{m}{\tau} + k\right) \frac{(\alpha s)^m}{m!}. \tag{54}$$

Esse resultado vale para $\tau \neq 0$. Assim, depois de ter determinado a fgm da distribuição GG definida por Stacy e Mihram (1965) dada pela equação (54), a fgm da distribuição KumGGE é determinada como:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \sum_{d,q=0}^{\infty} w_{d,q} M_{\alpha,\tau,k(1+q)+d}(s).$$

Portanto, tem-se:

$$M(s) = \frac{\text{sinal}(\tau)\, w_{d,q}}{\Gamma(k(1+q)+d)} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{m}{\tau} + k(1+q) + d\right) \frac{(\alpha s)^m}{m!}. \tag{55}$$

4.2.3 Desvios médios

Se T é uma variável aleatória com distribuição KumGGE com média $\mu_1' = \mu = E(T)$ e mediana m, então o desvio médio em relação à média e o desvio médio em relação à mediana são definidos, respectivamente, por:

$$\delta_1 = 2\mu_1' F(\mu_1') - 2I(\mu_1') \text{ e } \delta_2 = \mu_1' - 2I(m), \tag{56}$$

em que $F(\mu_1')$ e $F(m)$ são obtidas por meio da expressão (47) e a função I(m) é definida por:

$$I(m) = \int_0^m t f(t) dt.$$

Assim, considerando f(t), a função densidade de probabilidade dada em (46), tem-se:

$$I(m) = \sum_{d,q=0}^{\infty} w_{d,q} \int_0^m t g_{(\alpha,\tau,[k(1+q)+d])}(t) dt = \sum_{d,q=0}^{\infty} w_{d,q}\, J(\alpha, \tau, [k(1+q)+d], m). \tag{57}$$

Por outro lado, a integral definida em (35) é escrita da seguinte forma, considerando $x = t/\alpha$,

$$J(\alpha, \tau, [k(1+q)+d], m) = \frac{|\tau|\,\alpha}{\Gamma([k(1+q)+d])} \int_0^{m/\alpha} x^{\tau[k(1+q)+d]} \exp(-x^\tau) dx.$$

Dessa forma, utilizando a mudança de variável $w = x^\tau$, a integral em $J(\alpha, \tau, [k(1+q)+d], m)$ é determinada em termos da função gama incompleta, ou seja:

$$\begin{aligned} J(\alpha, \tau, [k(1+q)+d], m) &= \frac{\text{sinal}(\tau)\,\alpha}{\Gamma([k(1+q)+d])} \int_0^{(m/\alpha)^\tau} w^{[k(1+q)+d]+\tau^{-1}-1} \exp(-w) dw \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma([k(1+q)+d])} \gamma([k(1+q)+d]+\tau^{-1}, (m/\alpha)^\tau). \end{aligned} \quad (58)$$

Portanto, substituindo o resultado obtido em (58) na expressão (57), tem-se:

$$I(m) = \sum_{d,q=0}^{\infty} \frac{\alpha\,\text{sinal}(\tau)\,w_{d,q}}{\Gamma([k(1+q)+d])} \gamma(k(1+q)+d+\tau^{-1}, (m/\alpha)^\tau).$$

O resultado é análogo para $I(\mu_1')$.

4.2.4 Confiabilidade

A medida de confiabilidade da distribuição KumGGE é determinada considerando a expressão apresentada por Silva; Ortega e Cordeiro (2010), dada por:

$$R = \int_0^\infty f(t)F(t)dt,$$

em que $f(t)$ é a função densidade de probabilidade e $F(t)$ é a função de distribuição acumulada.

Para $\tau > 0$ a confiabilidade é expressa pela equação (38). Por outro lado, para $\tau < 0$, considera-se a função densidade de probabilidade (50) e a função de distribuição acumulada (47). Tem-se, assim:

$$\begin{aligned} R &= \int_0^\infty \sum_{d,q=0}^{\infty} \frac{|\tau|\,w_{d,q}}{\alpha\Gamma[k(1+q)+d]} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau[k(1+q)+d]-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\tau\right] \\ &\times \left(1 - \left\{\gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\tau\right]\right\}^\lambda\right)^\varphi dt. \end{aligned} \quad (59)$$

Utilizando uma expansão em série de potência, tem-se o seguinte resultado

$$\left(1 - \left\{\gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\tau\right]\right\}^\lambda\right)^\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\varphi}{i} \left\{\gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\tau\right]\right\}^{\lambda i} \quad (60)$$

Dessa forma, substituindo $\left(1-\left\{\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda}\right)^{\varphi}$ em (59) pela expressão obtida em (60), a confiabilidade é dada por:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{d,q=0}^{\infty} w_{d,q} \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \binom{\varphi}{i} \int_0^{\infty} \frac{|\tau|}{\alpha\Gamma[k(1+q)+d]} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau[k(1+q)+d]-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \\ &\times \left\{\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{\lambda i} dt. \end{aligned}$$

Por outro lado, considerando a mudança de variável, em que $x = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}$, obtém-se:

$$R = \sum_{d,q=0}^{\infty} w_{d,q} \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \binom{\varphi}{i} \frac{\text{sinal}(\tau)}{\Gamma[k(1+q)+d]} \int_0^{\infty} x^{k(1+q)+d-1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\, \gamma_1(\mathrm{k},\mathrm{x})^{\lambda \mathrm{i}} \mathrm{dx}.$$

Portanto, utilizando o resultado em (104) dado no Apêndice A, a confiabilidade da distribuição KumGGE é dada por:

$$R = \sum_{d,q=0}^{\infty} w_{d,q}\, w_{i,j_1,m_1}\, I[k(1+q),d,m_1],$$

em que,

$$w_{i,j_1,m_1} = \sum_{i,j_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{j_1} \frac{(-1)^{i+j_1+m_1}\text{sinal}(\tau)}{\Gamma[k(1+q)+d]} \binom{\varphi}{i} \binom{\lambda i}{j_1} \binom{j_1}{m_1},$$

$w_{d,q}$ e $I[k(q+1),d,m_1]$ são dados por (18) e (39), respectivamente.

4.2.5 Estatística de ordem

A função densidade de probabilidade $f_{i:n}(t)$ da i-ésima estatística de ordem, para $i = 1,\ldots,n$, das variáveis aleatórias $T_1,\ldots,T_n$, é dada por:

$$f_{i:n}(t) = \frac{1}{B(i,n-i+1)} f(t) F(t)^{i-1} \{1-F(t)\}^{n-i}, \tag{61}$$

em que $f(\cdot)$ é uma função densidade de probabilidade, $F(\cdot)$ é uma função de distribuição acumulada e $B(\cdot,\cdot)$ denota a função beta. Observa-se que a quantidade $[1-F(t)]^{n-i}$ em (61) pode ser escrita na forma de uma expansão binomial da seguinte forma:

$$[1-F(t)]^{n-i} = \sum_{j_1=0}^{n-i} \binom{n-i}{j_1} (-1)^{j_1} F(t)^{j_1}.$$

Assim,

$$f_{i:n}(t) = \frac{1}{B(i,n-i+1)} f(t) \sum_{j_1=0}^{n-i} \binom{n-i}{j_1} (-1)^{j_1} F(t)^{i+j_1-1}. \tag{62}$$

A equação (62) é uma expressão para a função densidade de probabilidade da estatística de ordem da distribução KumGGE. Para $\tau > 0$ a densidade da estatística de ordem da distribuição KumGGE é dada pela equação (42). Dessa forma, para $\tau < 0$, a partir da equação (47), obtém-se uma expansão para $F(t)^{i+j_1-1}$,

$$F(t)^{i+j_1-1} = \left[1 - G(t)^{\lambda}\right]^{\varphi(i+j_1-1)} = \sum_{m_1=0}^{\infty} (-1)^{m_1} \binom{\varphi(i+j_1-1)}{m_1} G(t)^{m_1\lambda},$$

logo,

$$F(t)^{i+j_1-1} = \sum_{m_1=0}^{\infty} (-1)^{m_1} \binom{\varphi(i+j_1-1)}{m_1} G(t)^{m_1\lambda}.$$

Para $m_1\lambda > 0$ um número real e não-inteiro, obtém-se:

$$G(t)^{m_1\lambda} = \{1 - [1 - G(t)]\}^{m_1\lambda+1-1} = \sum_{l_2=0}^{\infty} (-1)^{l_2} \binom{m_1\lambda}{l_2} [1 - G(t)]^{m_1\lambda},$$

e em seguida,

$$G(t)^{m_1\lambda} = \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{l_2} (-1)^{l_2+r} \binom{m_1\lambda}{l_2} \binom{l_2}{r} G(t)^r.$$

Logo, substituindo $\sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{l_2}$ por $\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l_2=r}^{\infty}$ tem-se:

$$G(t)^{m_1\lambda} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l_2=r}^{\infty} (-1)^{l_2+r} \binom{m_1\lambda}{l_2} \binom{l_2}{r} G(t)^r,$$

em que,

$$G(t)^{m_1\lambda} = \sum_{r=0}^{\infty} s_r(m_1\lambda) G(t)^r,$$

e os coeficientes são:

$$s_r(m_1\lambda) = \sum_{l_2=r}^{\infty} (-1)^{l_2+r} \binom{m_1\lambda}{l_2} \binom{l_2}{r}.$$

Para $r = 0, 1, \ldots$ tem-se:

$$F(t)^{i+j_1-1} = \sum_{r=0}^{\infty} q_r(i, j_1, \lambda, \varphi)\, G(t)^r,$$

em que,

$$q_r(i, j_1, \lambda, \varphi) = \sum_{m_1=0}^{\infty} (-1)^{m_1} \binom{\varphi(i+j_1-1)}{m_1} s_r(m_1\lambda).$$

A função densidade de probabilidade da estatística de ordem da distribuição KumGGE se torna:

$$f_{i:n}(t) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(t) \sum_{j_1=0}^{n-i} (-1)^{j_1} \binom{n-i}{j_1} \sum_{r=0}^{\infty} q_r(i, j_1, \lambda, \varphi)\, G(t)^r,$$

então,

$$\begin{aligned} f_{i:n}(t) &= \frac{1}{B(i, n-i+1)} \sum_{d,q,r=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{n-i} (-1)^{j_1} \binom{n-i}{j_1} w_{d,q}\, q_r(i, j_1, \lambda, \varphi)\, \gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]^r \\ &\times \; g_{\alpha,\tau,k(1+q)+d}(t). \end{aligned} \tag{63}$$

A equação (63) pode ser reescrita como:

$$f_{i:n}(t) = \sum_{d,q,r=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{n-i} m(d, q, i, j_1, n)\, t^{\tau(kq+d)}\, q_r(i, j_1, \lambda, \varphi)\, \gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]^r g_{\alpha,\tau,k}(t),$$

em que $m(d, q, i, j_1, n)$ é dado por (43). Finalmente, $E\left(T_{i:n}^s\right)$, para $\tau < 0$, pode ser expresso como:

$$E\left(T_{i:n}^s\right) = \sum_{d,q,r=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{n-i} m(d, q, i, j_1, n)\, q_r(i, j_1, \lambda, \varphi)\, \delta_{s+\tau(kq+d),r},$$

em que,

$$\delta_{s,r} = \int_0^{\infty} t^s\, \gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]^r g_{\alpha,\tau,k}(t) dt,$$

é o (s, r)-ésimo momento ponderado de Y, que pode ser calculado numericamente.

4.3 Modelo log-Kumaraswamy gama generalizada estendida

Seja T uma variável aleatória com distribuição KumGGE, com função densidade de probabilidade representada pela equação (46). Considere a transformação $Y = \log(T)$ e as reparametrizações $k = q^{-2}$, $\tau = (\sigma\sqrt{k})^{-1}$ e $\alpha = \exp\left\{\mu - \log(k)(\tau)^{-1}\right\}$. Nesse caso, por meio do método do jacobiano, a função densidade de probabilidade de Y pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{\lambda\, \varphi |q| (q^{-2})^{q^{-2}}}{\sigma \Gamma(q^{-2})} \exp\Big\{q^{-1}\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big) - q^{-2} \exp\Big[q\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big]\Big\} \\ &\times \; \Big\{\gamma_1\Big[q^{-2}, q^{-2}\exp\Big\{q\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big\}\Big]\Big\}^{\lambda-1} \Big\{1 - \Big[\gamma_1\Big(q^{-2}, q^{-2}\exp\Big\{q\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big\}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi-1}, \end{aligned}$$

em que $-\infty < y < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $\lambda > 0$, $\varphi > 0$ e q é diferente de zero. Considerando a extensão proposta por Lawless (2003), incluindo o caso $q = 0$, a função

densidade de probabilidade de Y pode ser escrita como:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\lambda\,\varphi|q|(q^{-2})^{q^{-2}}}{\sigma\Gamma(q^{-2})}\exp\Big\{q^{-1}\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big) - q^{-2}\exp\Big[q\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big]\Big\} \\ \times\Big\{\gamma_1\Big[q^{-2}, q^{-2}\exp\Big\{q\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big\}\Big]\Big\}^{\lambda-1} \\ \times\Big\{1 - \Big[\gamma_1\Big(q^{-2}, q^{-2}\exp\Big\{q\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big\}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi-1} & \text{se} \quad q \neq 0, \\ \\ \frac{\lambda\,\varphi}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big\}\Phi^{(\lambda-1)}\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big[1 - \Phi^{\lambda}\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big]^{\varphi-1} & \text{se} \quad q = 0, \end{cases} \tag{64}$$

em que $\Phi(.)$ é a função de distribuição acumulada da normal padrão. Para $q = 0$ e $\lambda\varphi = 1$ e $q = 1$, a função em (64) se reduz nas distribuições normal assimétrica e valor extremo, respectivamente. Para $\varphi = 1$ e $\lambda = \varphi = 1$, obtêm-se as distribuições log-gama generalizada exponenciada (ORTEGA et al., 2011) e log-gama generalizada, respectivamente. Para $\lambda = \varphi = 1$ e $q = -1$, tem-se a distribuição log-Weibull inversa. A variável transformada com função densidade de probabilidade (64) é denominada log-Kumaraswamy gama generalizada estendida (LKumGGE) e segue a notação, se $Y \sim \text{LKumGGE}(\mu, \sigma, q, \lambda, \varphi)$, em que $\mu \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de locação, $\sigma > 0$ é o parâmetro de escala e q, λ e φ são parâmetros de forma. Assim, se

$$T \sim \text{KumGGE}(\alpha, \tau, k, \lambda, \varphi) \quad \text{então} \quad Y = \log(T) \sim \text{LKumGGE}(\mu, \sigma, q, \lambda, \varphi).$$

Assumindo $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, os gráficos da função densidade de probabilidade (64), para valores selecionados de λ e φ, quando $q < 0$, $q > 0$ e $q = 0$, podem ser observados na Figura 14.

A função de sobrevivência para a distribuição LKumGGE é expressa considerando os seguintes casos:

Para $q > 0$,

$$\begin{aligned} S(y) &= 1 - F(y) = P(Y > y) = P(\mu + \sigma Z > y) = P(Z > z) \\ &= \frac{\lambda\varphi q(q^{-2})^{q^{-2}}}{\Gamma(q^{-2})}\int_z^{\infty} \frac{\exp\Big\{q^{-1}u - q^{-2}\exp(qu)\Big\}\left\{\gamma_1\left[q^{-2}, q^{-2}\exp(qu)\right]\right\}^{\lambda-1}du}{\left[1 - \left\{\gamma_1\left[q^{-2}, q^{-2}\exp(qu)\right]\right\}^{\lambda}\right]^{-(\varphi-1)}}. \end{aligned}$$

Para $q < 0$,

$$\begin{aligned} S(y) &= 1 - F(y) = P(Y > y) = P(\mu + \sigma Z > y) = P(Z > z) \\ &= \frac{-\lambda\varphi q(q^{-2})^{q^{-2}}}{\Gamma(q^{-2})}\int_z^{\infty} \frac{\exp\Big\{q^{-1}u - q^{-2}\exp(qu)\Big\}\left\{\gamma_1\left[q^{-2}, q^{-2}\exp(qu)\right]\right\}^{\lambda-1}du}{\left[1 - \left\{\gamma_1\left[q^{-2}, q^{-2}\exp(qu)\right]\right\}^{\lambda}\right]^{-(\varphi-1)}}. \end{aligned}$$

(a) (b) (c)

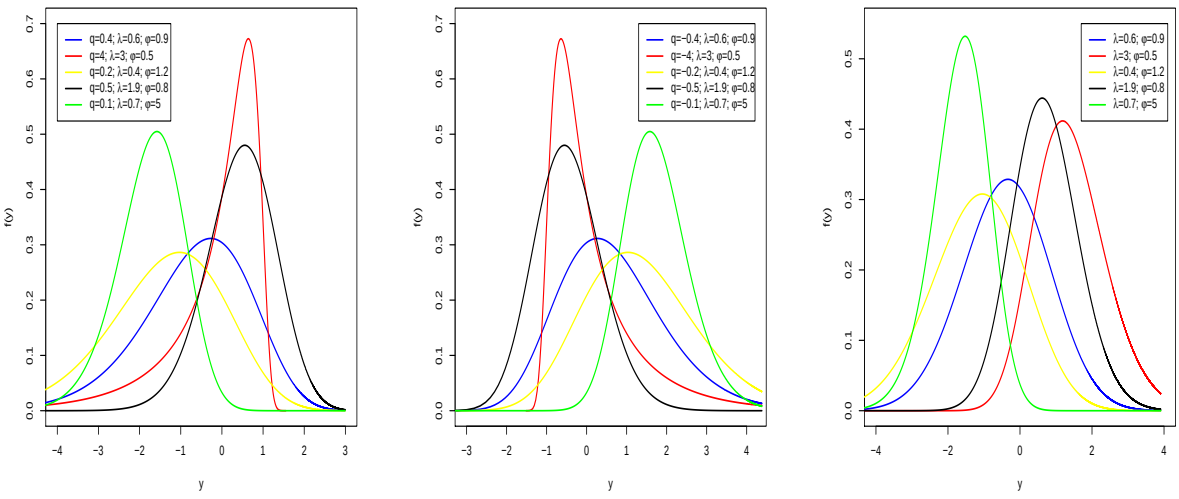

Figura 14 - Gráfico da função densidade da distribuição LKumGGE: (a) Para alguns valores de $q > 0$. (b) Para alguns valores de $q < 0$. (c) Para alguns valores de $q = 0$

Para $q = 0$,

$$\begin{aligned} S(y) &= 1 - F(y) = P(Y > y) = P(\mu + \sigma Z > y) = P(Z > z) \\ &= \frac{\lambda\,\varphi}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_z^{\infty} \exp\Big(-\frac{1}{2}u^2\Big)\Phi^{(\lambda-1)}(u)\big[1 - \Phi^{\lambda}(u)\big]^{\varphi-1} du. \end{aligned}$$

Portanto, sabendo que as integrais da função de sobrevivência são funções conhecidas, tem-se:

$$S(y) = \begin{cases} \Big\{1 - \Big[\gamma_1\Big(q^{-2}, q^{-2}\exp\Big[q\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big]\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi} & \text{se} \quad q > 0, \\ 1 - \Big\{1 - \Big[\gamma_1\Big(q^{-2}, q^{-2}\exp\Big[q\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big]\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi} & \text{se} \quad q < 0, \\ \Big[1 - \Phi^{\lambda}\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big]^{\varphi} & \text{se} \quad q = 0. \end{cases} \tag{65}$$

4.3.1 Momentos

Se $Y \sim \text{LKumGGE}(\mu, \sigma, q, \lambda, \varphi)$, o r-ésimo momento, denotado por $\mu'_r = E(Y^r)$, da distribuição LKumGGE é obtido considerando os seguintes casos:

Para $q \neq 0$,

$$\begin{aligned}\mu_r' &= E(Y^r) = \int_{-\infty}^{\infty} y^r \frac{\lambda\varphi|q|\,(q^{-2})^{q^{-2}}}{\sigma\Gamma(q^{-2})} \exp\Big(q^{-2}\Big\{q\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big) - \exp\Big[q\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big]\Big\}\Big) \\ &\times \Big(\gamma_1\Big\{q^{-2}, q^{-2}\exp\Big[q\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big]\Big\}\Big)^{\lambda-1}\Big[1-\Big(\gamma_1\Big\{q^{-2}, q^{-2}\exp\Big[q\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big]\Big\}\Big)^{\lambda}\Big]^{\varphi-1} dy.\end{aligned}$$

Considerando a mudança de variável $x = q^{-2}\exp\left[q\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]$ na equação anterior, resulta em,

$$\begin{aligned}\mu_r' &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda\varphi\,\mathrm{sinal}(q)}{\Gamma\left(q^{-2}\right)}\Big\{\frac{\sigma}{q}[\log(x) + 2\log(|q|)] + \mu\Big\}^r x^{q^{-2}-1}\exp\left(-x\right)\gamma_1\left(q^{-2}, x\right)^{\lambda-1} \\ &\times \Big\{1 - \left[\gamma_1\left(q^{-2}, x\right)\right]^{\lambda}\Big\}^{\varphi-1} dx.\end{aligned}$$

Por outro lado, escrevendo o termo $\Big\{1 - [\gamma_1\left(q^{-2}, x\right)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi-1}$, na forma da expansão definida em (14), obtém-se:

$$\begin{aligned}\mu_r' &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda\varphi\,\mathrm{sinal}(q)}{\Gamma\left(q^{-2}\right)}\Big\{\frac{\sigma}{q}[\log(x) + 2\log(|q|)] + \mu\Big\}^r x^{q^{-2}-1}\exp\left(-x\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\varphi)}{\Gamma(\varphi-1)j!} \\ &\times \left[\gamma_1\left(q^{-2}, x\right)\right]^{\lambda(j+1)-1} dx. \qquad (66)\end{aligned}$$

Usando a expansão (110) do Apêndice A, para $\gamma_1(q^{-2}, x)^{\lambda(j+1)-1}$, encontra-se:

$$\gamma_1(q^{-2}, x)^{\lambda(j+1)-1} = \sum_{m,i=0}^{\infty} \frac{s_m(\lambda)c_{m,i}}{\Gamma(q^{-2})^m} x^{q^{-1}m+i}.$$

Assim, substituindo a função gama incompleta em (66) por sua expansão definida acima e intercalando os termos, tem-se:

$$\begin{aligned}\mu_r' &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda\varphi\,\mathrm{sinal}(q)}{\Gamma\left(q^{-2}\right)}\Big\{\frac{\sigma}{q}[\log(x) + 2\log(|q|)] + \mu\Big\}^r x^{q^{-2}-1}\exp\left(-x\right) \\ &\times \sum_{m,i,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\Gamma(\varphi)s_m(\lambda)c_{m,i}}{\Gamma\left(q^{-2}\right)^m\Gamma(\varphi-1)} x^{q^{-2}m+i}.\end{aligned}$$

Por outro lado, usando o binômio de Newton em $\Big\{\frac{\sigma}{q}[\log(x) + 2\log(|q|)] + \mu\Big\}^r$ obtém-se:

$$\begin{aligned}\mu_r' &= \sum_{m,i,j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{r} \frac{\lambda\varphi(-1)^j\,\mathrm{sinal}(q)\Gamma(\varphi)s_m(\lambda)c_{m,i}}{\Gamma\left(q^{-2}\right)^{m+1}\Gamma(\varphi-1)j!}\binom{r}{l}\Big[\frac{2\sigma}{q}\log(|q|) + \mu\Big]^{r-l} \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{\sigma l}{q}\log(x)\exp(-x)x^{q^{-2}(m+1)+i-1}dx. \qquad (67)\end{aligned}$$

Observe que a integral da expressão em (67) é obtida em Prudnikov et al. (1986, vol 1, Seção 2.6.21, integral 1). Portanto, os momentos da distribuição LKumGGE podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}\mu_r' &= \sum_{m,i,j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{r}\frac{\lambda\varphi(-1)^j\,\mathrm{sinal}(q)\Gamma(\varphi)s_m(\lambda)c_{m,i}}{\Gamma\left(q^{-2}\right)^{m+1}\Gamma(\varphi-1)j!}\binom{r}{l}\Big[\frac{2\sigma}{q}\log(|q|)+\mu\Big]^{r-l}\\ &\times \Big[\dot{\Gamma}(q^{-2}(m+1)+i)\Big]^{\frac{\sigma l}{q}},\end{aligned}$$

em que $\dot{\Gamma}(p)=\frac{\partial\Gamma(p)}{\partial p}$.

Para $q=0$,

$$\mu_r'=E(Y^r)=\frac{\lambda\varphi}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}y^r\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big]\Phi^{(\lambda-1)}\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big[1-\Phi^{(\lambda)}\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big]^{\varphi-1}dy.$$

Nota-se que $\Big[1-\Phi^{(\lambda)}\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big]^{\varphi-1}$ pode ser escrita na forma da expressão dada em (14) e assim,

$$\mu_r'=\frac{\lambda\varphi}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}y^r\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big]\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\varphi)}{\Gamma(\varphi-m)m!}\Phi^{(\lambda(m+1)-1)}\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)dy.$$

Por outro lado, considerando a mudança de variável $y=\mu+\sigma z$ e usando o resultado em (105) para $\Phi^{(\lambda(m+1)-1)}(z)$, tem-se:

$$\mu_r'=\lambda\varphi\sum_{m,p=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r}\frac{(-1)^m\Gamma(\varphi)}{\Gamma(\varphi-m)m!}s_p(\lambda)\binom{r}{j}\sigma^j\mu^{r-j}\nu_{j,p}, \tag{68}$$

em que,

$$s_p(\lambda)=\sum_{i=p}^{\infty}(-1)^{i+p}\binom{\lambda(m+1)-1}{i}\binom{i}{p}.$$

Define-se a integral para j e p números inteiros e não-negativos, como:

$$\nu_{j,p}=\int_{-\infty}^{\infty}z^j\phi(z)\Phi^p(z)dz,$$

em que $\phi(z)$ é a densidade de probabilidade da distribuição normal padrão. A função de distribuição acumulada da distribuição normal padrão pode ser escrita como:

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}\Big\{1+\mathrm{erf}\Big(\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{2}}\Big)\Big\},\quad \mathrm{x}\in\mathbb{R},$$

em que $\mathrm{erf(x)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\mathrm{x}}\exp(-\mathrm{t})^2\mathrm{dt}$.

Usando expansão binomial e intercalando os termos, obtém-se

$$\nu_{j,p}=\frac{1}{2^j\sqrt{2\pi}}\sum_{l=0}^{p}\binom{p}{l}\int_{-\infty}^{\infty}x^j\exp(-x^2/2)\mathrm{erf}\Big(\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{2}}\Big)^{\mathrm{p-l}}\mathrm{dx}.$$

Usando expansão em série para a função erf(.), encontra-se:

$$\mathrm{erf}(\mathrm{x}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{m}} \mathrm{x}^{2\mathrm{m}+1}}{(2\mathrm{m}+1)\mathrm{m}!}.$$

Portanto, utilizando os resultados de Nadarajah (2008b), para $j+p-l$ par, tem-se:

$$\begin{aligned} \nu_{j,p} &= 2^{j/2}\pi^{-(p+1/2)} \sum_{l=0}^{p} \binom{p}{l} 2^{-l}\pi^{l}\Gamma\Big(\frac{j+p-l+1}{2}\Big) \times \\ & F_A^{(p-l)}\Big(\frac{j+p-l+1}{2}; \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \ldots, \frac{3}{2}; -1, \ldots, -1\Big). \end{aligned} \tag{69}$$

Representações gráficas da assimetria e curtose da distribuição LKumGGE como função do parâmetro λ para alguns valores de φ com $\mu = 1,5$, $\sigma = 2$ e $q = 0,5$ e como função do parâmetro φ para alguns valores de λ com $\mu = 1,5$, $\sigma = 2$ e $q = 0,5$, são dadas nas Figuras 15 e 16, respectivamente.

(a) (b)

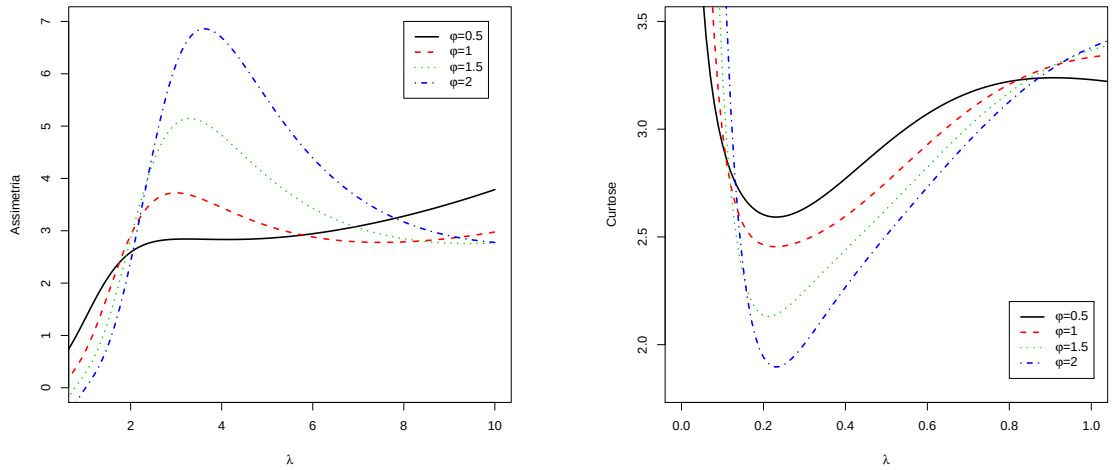

Figura 15 - Assimetria e curtose da distribuição LKumGGE como função do parâmetro λ para alguns valores de φ com $\mu = 1,5$, $\sigma = 2$ e $q = 0,5$

4.4 Modelo de regressão log-Kumaraswamy gama generalizada estendida

Em muitas situações práticas, o tempo de vida é afetado por variáveis explanatórias, como nível de colesterol, pressão arterial, peso, entre outras. Os modelos de regressão são amplamente utilizados para estimar a função de sobrevivência para dados

(a) (b)

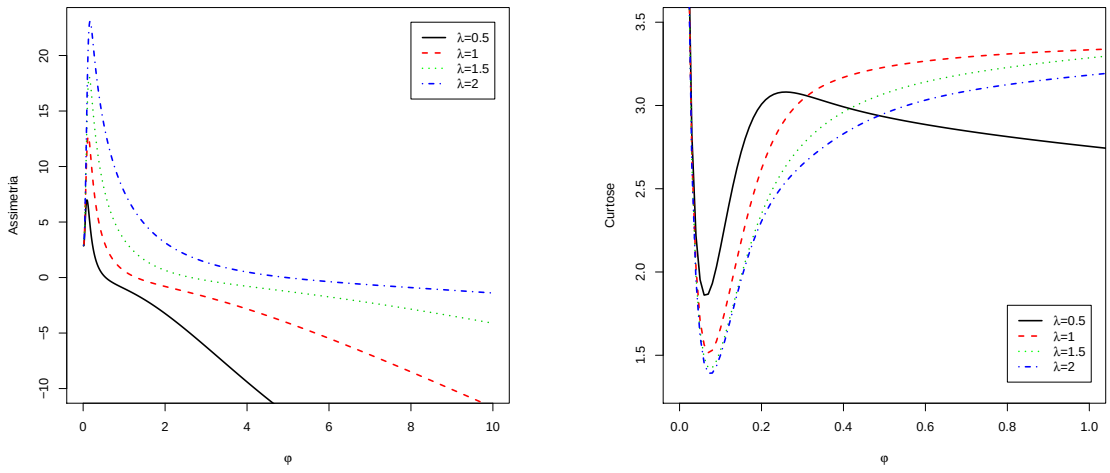

Figura 16 - Assimetria e curtose da distribuição LKumGGE como função do parâmetro φ para alguns valores de λ com $\mu = 1,5$, $\sigma = 2$ e $q = 0,5$

censurados. O modelo de regressão que fornece um bom ajuste para os dados de tempo de vida tende a produzir estimativas mais precisas para as quantidades de interesse. O modelo de locação e escala considerando Y dado x, tem distribuição LKumGGE com função densidade de probabilidade dada pela expressão (64), e pode ser representado por:

$$Y_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \sigma Z_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{70}$$

em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^T$ é um vetor de parâmetros desconhecidos associado a cada covariável, $\mathbf{x}_i^T = (x_{i1}, \ldots, x_{ip})$ é o vetor de covariáveis e Z_i é o erro aleatório.

A distribuição da variável aleatória Z pode ser obtida utilizando a transformação de variáveis, que nesse caso é dada por:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\lambda\varphi|q|}{\Gamma(q^{-2})}(q^{-2})^{q^{-2}}\exp\{q^{-1}z - q^{-2}\exp(qz)\} \\ \times\{\gamma_1[q^{-2}, q^{-2}\exp(qz)]\}^{\lambda-1}\{1 - (\gamma_1[q^{-2}, q^{-2}\exp(qz)])^{\lambda}\}^{\varphi-1} & \text{se} \quad q \neq 0, \\ \\ \frac{\lambda\varphi}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\Phi^{(\lambda-1)}(z)[1 - \Phi^{\lambda}(z)]^{\varphi-1} & \text{se} \quad q = 0, \end{cases} \tag{71}$$

em que $z = \frac{y - \mathbf{x}^T\boldsymbol{\beta}}{\sigma}$ e $\Phi(.)$ é a função de distribuição acumulada da normal padrão.

O modelo LKumGGE contém como casos particulares alguns modelos bem conhecidos de regressão. Por exemplo, para $\varphi = 1$, obtém-se o modelo de regressão

log-gama generalizada exponenciada LGGE (ORTEGA et al., 2011). O caso em que $\lambda = 1$ leva ao modelo de regressão log-gama generalizada exponenciada complementar (LGGEC), enquanto que para $\varphi = \lambda = 1$ obtém-se o modelo de regressão log-gama (LG). Para $\varphi = \lambda = q = 1$ refere-se ao modelo de regressão log-Weibull (LAWLESS, 2003). Se $\sigma = 1$ e $\sigma = 0,5$, além de $\varphi = \lambda = q = 1$, tem-se os modelos de regressão exponencial e Rayleigh, respectivamente. Para $\lambda = \varphi = q = 1$, obtém-se o modelo de regressão log-Weibul exponenciada (LWE) (MUDHOLKAR; SRIVASTAVA; FREIMER, 1995). Esse modelo é utilizado na análise de sobrevivência em diferentes contextos, como, por exemplo, Ortega; Cancho e Bolfarine (2006) que consideraram o modelo LWE para dados censurados, Cancho; Ortega e Bolfarine (2009) para dados com fração de cura e Hashimoto et al. (2010) para dados com censura intervalar. Se $\sigma = 1$, além de $q = 1$ o modelo LkumGGE se reduz ao modelo de regressão log-exponencial exponenciada. Para $\sigma = 0,5$ e $q = 1$, obtém-se o modelo de regressão log-Rayleigh generalizada. O caso em que $\lambda = 1$, leva ao modelo de regressão log-gama generalizada (LGG) (LAWLESS, 2003). Recentemente a distribuição LGG tem sido utilizada em diversas áreas de pesquisa (ORTEGA; CANCHO; PAULA, 2009). Se $q = -1$, obtém-se o modelo de regressão log-Weibull inversa generalizada. Para $\lambda = 1$ e $q = -1$, obtém-se o modelo de regressão log-Weibull inversa (GUSMÃO; ORTEGA; CORDEIRO, 2011). Se $q = 0$, tem-se o modelo de regressão log-normal exponenciada. Finalmente, para $\lambda = 2$, o modelo de regressão LKumGGE se reduz ao modelo de regressão normal assimétrica.

4.5 Estimação de máxima verossimilhança

Considere uma amostra $(y_1, \mathbf{x}_1), \ldots, (y_n, \mathbf{x}_n)$ de n observações independentes, em que a variável resposta é definida por $y_i = \min\{\log(t_i), \log(c_i)\}$, e seja F o conjunto do logaritmo dos tempos de vida e C o conjunto do logaritmo dos tempos de censura. Assim, o logaritmo da função de verossimilhança para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (q, \lambda, \varphi, \sigma, \boldsymbol{\beta}^T)^T$ para o modelo (70) tem a forma $l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i \in F} l_i(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{i \in C} l_i^{(c)}(\boldsymbol{\theta})$, em que $l_i(\boldsymbol{\theta}) = \log[f(y_i)]$, $l_i^{(c)}(\boldsymbol{\theta}) = \log[S(y_i)]$, $f(y_i)$ é a função densidade de probabilidade (64) e $S(y_i)$ é a função de sobrevivência (65). Dessa forma, o logaritmo da função de verossimilhança para $\boldsymbol{\theta}$ é:

$$
l(\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases}
v\log\left[\frac{\lambda\,\varphi\,q\,(q^{-2})^{q^{-2}}}{\sigma\Gamma(q^{-2})}\right] + q^{-1}\sum\limits_{i\in F} z_i - q^{-2}\sum\limits_{i\in F}\exp(qz_i) + \\
(\lambda-1)\sum\limits_{i\in F}\log\{\gamma_1[q^{-2}, q^{-2}\exp(qz_i)]\} + \\
(\varphi-1)\sum\limits_{i\in F}\log\left\{1-\{\gamma_1[q^{-2}, q^{-2}\exp(qz_i)]\}^{\lambda}\right\} + \\
\varphi\sum\limits_{i\in C}\log\left\{1-\{\gamma_1[q^{-2}, q^{-2}\exp(qz_i)]\}^{\lambda}\right\}, & \text{se} \quad q>0, \\
v\log\left[\frac{\lambda\,\varphi\,(-q)\,(q^{-2})^{q^{-2}}}{\sigma\Gamma(q^{-2})}\right] + q^{-1}\sum\limits_{i\in F} z_i - q^{-2}\sum\limits_{i\in F}\exp(qz_i) + \\
(\lambda-1)\sum\limits_{i\in F}\log\{\gamma_1[q^{-2}, q^{-2}\exp(qz_i)]\} + \\
(\varphi-1)\sum\limits_{i\in F}\log\left\{1-\{\gamma_1[q^{-2}, q^{-2}\exp(qz_i)]\}^{\lambda}\right\} + \\
\sum\limits_{i\in C}\log\left\{1-\left[1-\{\gamma_1[q^{-2}, q^{-2}\exp(qz_i)]\}^{\lambda}\right]^{\varphi}\right\}, & \text{se} \quad q<0, \\
v\log\left[\frac{\lambda\varphi}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right] - \frac{1}{2}\sum\limits_{i\in F} z_i^2 + (\lambda-1)\sum\limits_{i\in F}\log[\Phi(z_i)] \\
+(\varphi-1)\sum\limits_{i\in F}\log[1-\Phi^{\lambda}(z_i)] + \varphi\sum\limits_{i\in C}\log[1-\Phi^{\lambda}(z_i)] & \text{se} \quad q=0,
\end{cases} \tag{72}
$$

em que v é o número de observações não censuradas e $z_i = (y_i - \mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta})/\sigma$. As estimativas de máxima verossimilhança (EMV) $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ podem ser obtidas pela maximização do logarítmo da função de verossimilhança (72). Valores iniciais para $\boldsymbol{\beta}$ e σ são obtidos por meio do ajuste do modelo de regressão Weibull com $\lambda = 1$, $\varphi = 1$ e $q = 1$. Se $\hat{z}_i = (y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}})/\hat{\sigma}$, o ajuste do modelo LKumGGE é obtido por meio da função de sobrevivência estimada para y_i

$$
\hat{S}(y_i; \hat{\lambda}, \hat{\varphi}, \hat{\sigma}, \hat{q}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^T) = \begin{cases}
\left\{1-\{\gamma_1[\hat{q}^{-2}, \hat{q}^{-2}\exp(\hat{q}\hat{z}_i)]\}^{\hat{\lambda}}\right\}^{\hat{\varphi}} & \text{se} \quad q>0, \\[2ex]
1-\left\{1-\{\gamma_1[\hat{q}^{-2}, \hat{q}^{-2}\exp(\hat{q}\hat{z}_i)]\}^{\hat{\lambda}}\right\}^{\hat{\varphi}} & \text{se} \quad q<0, \\[2ex]
\left[1-\Phi^{\hat{\lambda}}(\hat{z}_i)\right]^{\hat{\varphi}} & \text{se} \quad q=0.
\end{cases}
$$

Os intervalos de confiança e testes de hipótese sobre os parâmetros do modelo são realizados segundo como é descrito na sub-seção 2.5.1. Sobre certas condições de regularidade, a distribuição assintótica de $(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$ é a normal multivariada $N_{p+4}(0, \ddot{L}(\boldsymbol{\theta})^{-1})$, em que $\ddot{L}(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação observada. Os elementos da matriz de informação observada $-\ddot{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta})$,composta por $-\mathbf{L}_{\lambda\lambda}$, $-\mathbf{L}_{\lambda\varphi}$, $-\mathbf{L}_{\lambda\sigma}$, $-\mathbf{L}_{\lambda\beta_j}$, $-\mathbf{L}_{\varphi\varphi}$, $-\mathbf{L}_{\varphi\sigma}$, $-\mathbf{L}_{\varphi\beta_j}$, $-\mathbf{L}_{\sigma\sigma}$, $-\mathbf{L}_{\sigma\beta_j}$ e $-\mathbf{L}_{\beta_j\beta_s}$ para $j, s = 1, \ldots, p$, são dados no Apêndice C.

O teste da razão de verossimilhança (TRV) é útil para comparar a distribuição LKumGGE com alguns de seus sub-modelos. Considera-se a partição $\boldsymbol{\theta} =$

$(\boldsymbol{\theta}_1^T, \boldsymbol{\theta}_2^T)^T$, em que $\boldsymbol{\theta}_1$ é um subconjunto de parâmetros de interesse e $\boldsymbol{\theta}_2$ é um subconjunto de parâmetros restantes. A estatística w para testar a hipótese nula $H_0 : \boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_1^{(0)}$ *versus* a hipótese alternativa $H_1 : \boldsymbol{\theta}_1 \neq \boldsymbol{\theta}_1^{(0)}$ é dada por $w = 2\{\ell(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) - \ell(\widetilde{\boldsymbol{\theta}})\}$, em que $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$ e $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ são as estimativas sob as hipóteses nula e alternativa, respectivamente. A estatística w é assintoticamente distribuida (para $n \to \infty$) como χ^2_k, em que k é a dimensão do subconjunto de parâmetros $\boldsymbol{\theta}_1$ de interesse.

4.6 Análise bayesiana

Considere a distribuição LKumGGE (71) e a função de verossimilhança (72) para os parâmetros λ, φ, σ, q e $\boldsymbol{\beta}$. Para uma análise bayesiana, assume-se a seguinte densidade conjunta *a priori*, dada por:

$$\pi(\lambda, \varphi, \sigma, q, \boldsymbol{\beta}) \propto \pi(\lambda) \times \pi(\varphi) \times \pi(\sigma) \times \pi(q) \times \pi(\boldsymbol{\beta}),$$

em que $\lambda \sim \Gamma(a_1, b_1)$, $\varphi \sim \Gamma(a_2, b_2)$, $\sigma \sim \Gamma(a_3, b_3)$, $q \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $\boldsymbol{\beta}_s \sim N(\mu_s, \sigma_s^2)$, sendo $\Gamma(a_i, b_i)$ a distribuição gama com média a_i/b_i, variância a_i/b_i^2 e função densidade de probabilidade dada por:

$$f(\upsilon; a_i, b_i) = \frac{b_i^{a_i} \upsilon^{a_i - 1} \exp(-\upsilon b_i)}{\Gamma(a_i)},$$

em que $\upsilon > 0$, $a_i > 0$ e $b_i > 0$, $N(\mu_s, \sigma_s^2)$ denota a distribuição normal com média μ_s, variância σ_s^2 e função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x; \mu_s, \sigma_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s^2}} \exp\Big[- \frac{(x - \mu_s)^2}{2\sigma_s^2} \Big],$$

em que $x, \mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$. Todos os hiperparâmetros são especificados. Assumindo independência entre os parâmetros λ, φ, σ, q e $\boldsymbol{\beta}$, a distribuição conjunta a posteriori para λ, φ, σ, q e $\boldsymbol{\beta}$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
\pi(\lambda,\varphi,\sigma,q,\boldsymbol{\beta}|y) \;\propto\;& \Big[\frac{\lambda\varphi(-q)(q^{-2})^{q^{-2}}}{\sigma\Gamma(q^{-2})}\Big]^{\upsilon}\exp\Big[q^{-1}\sum_{i\in F}\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\\
\times\;& \exp\Big(-q^{-2}\sum_{i\in F}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\\
\times\;& \prod_{i\in F}\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda-1}\\
\times\;& \prod_{i\in F}\Big\{1-\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi-1}\\
\times\;& \prod_{i\in C}1-\Big\{1-\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\\
\times\;& \pi(\lambda,\varphi,\sigma,q,\boldsymbol{\beta}). \qquad (73)
\end{aligned}
$$

As densidades marginais *a posteriori* dos parâmetros λ, φ, σ, q e $\boldsymbol{\beta}$ não são facilmente obtidas. Isso porque a integração da densidade *a posteriori* conjunta (73) é muito complexa. Uma alternativa para situações desse tipo é o uso do algoritmo Metropolis-Hasting, descrito na sub-seção 2.5.2.

O algoritmo Metropolis-Hasting permite simular observações de distribuições a partir das densidades condicionais *a posteriori*. Assim, para o uso de tal algoritmo consideram-se as seguintes condicionais *a posteriori* completas para os parâmetros λ, φ, σ, q e $\boldsymbol{\beta}$:

$$
\begin{aligned}
\pi(\lambda|y,\varphi,\sigma,q,\boldsymbol{\beta}) \;\propto\;& (\lambda)^{\upsilon}\prod_{i\in F}\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda}\\
\times\;& \prod_{i\in F}\Big\{1-\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi-1}\\
\times\;& \prod_{i\in C}1-\Big\{1-\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\times\pi(\lambda),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi(\varphi|y,\lambda,\sigma,q,\boldsymbol{\beta}) \;\propto\;& (\varphi)^{\upsilon}\prod_{i\in F}\Big\{1-\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\\
\times\;& \prod_{i\in C}1-\Big\{1-\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\times\pi(\varphi),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi(\sigma|y,\lambda,\varphi,q,\boldsymbol{\beta}) \;\propto\;& \Big(\frac{1}{\sigma}\Big)^{\upsilon}\exp\Big[q^{-1}\sum_{i\in F}\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\exp\Big(-q^{-2}\sum_{i\in F}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\\
\times\;& \prod_{i\in F}\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda-1}\\
\times\;& \prod_{i\in F}\Big\{1-\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi-1}\\
\times\;& \prod_{i\in C}1-\Big\{1-\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\times\pi(\sigma),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi(q|y,\lambda,\varphi,\sigma,\boldsymbol{\beta}) \;\propto\;& \Big[\frac{(-q)(q^{-2})^{q^{-2}}}{\Gamma(q^{-2})}\Big]^{\upsilon}\exp\Big[q^{-1}\sum_{i\in F}\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\\
\times\;& \exp\Big(-q^{-2}\sum_{i\in F}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\\
\times\;& \prod_{i\in F}\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda-1}\\
\times\;& \prod_{i\in F}\Big\{1-\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi-1}\\
\times\;& \prod_{i\in C}1-\Big\{1-\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\times\pi(q)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\pi(\boldsymbol{\beta}|y,\lambda,\varphi,\sigma,q) \;\propto\;& \exp\Big[q^{-1}\sum_{i\in F}\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\exp\Big(-q^{-2}\sum_{i\in F}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\\
\times\;& \prod_{i\in F}\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda-1}\\
\times\;& \prod_{i\in F}\Big\{1-\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi-1}\\
\times\;& \prod_{i\in C}1-\Big\{1-\Big[\gamma_1\Big(q^{-2},q^{-2}\exp\Big\{q\Big[\frac{(y_i-x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\Big]\Big\}\Big)\Big]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\times\pi(\boldsymbol{\beta}).
\end{aligned}
$$

Para as análises descritivas para os parâmetros do modelo LKumGGE foi utilizado o *software* estatístico R, pacote BOA (*Bayesian Output Analysis*).

4.7 Aplicação: dados de dependência química

Para ilustrar a aplicação do modelo de regressão LKumGGE foi utilizado um conjunto de dados fornecido pela Associação Mãe Admirável, situada na cidade de Caratinga-MG e estudados por Pascoa (2008). Foram avaliados 141 residentes, depen-

dentes químicos, no período de 2000 a 2005. A variável resposta foi o tempo de permanência na comunidade até a desistência do tratamento, considerando que cada residente permanece na comunidade por um período máximo de 270 dias, sem qualquer contato com as drogas. Quem alcançou essa meta foi considerado, neste trabalho, como um dado censurado.

Dependência química é uma doença crônica do cérebro (KALIVAS; VOLKOW, 2005). Uma de suas principais características é o fenômeno da recaída, em que o indivíduo retorna ao consumo da substância problema, seguida por uma nova tentativa de parar ou reduzir este consumo (BRANDON; VIDRINE; LITVIN, 2007, KOOB; LE MOAL, 1997). Recaída não significa falha do tratamento, pelo contrário: ela é uma parte do processo de reabilitação (MARLATT, 2001). O paciente entra em recaída quando ele ou ela apresenta a totalidade ou parte dos padrões de comportamento disfuncional que estavam presentes antes do tratamento. Assim, a recaída começa antes do consumo renovado real. Mudanças de comportamento e exposição a situações de alto risco geralmente precedem a retomada do consumo da substância (MILLER et al., 1996). Mesmo os pacientes mais motivados podem apresentar episódios de recidiva (BAKER et al., 2004). No entanto, a recaída é previsível e evitável (BRANDON; VIDRINE; LITVIN, 2007).

Estudos dos fatores de risco associados com recidiva em dependência química são muito importantes, porque seus resultados podem aumentar a probabilidade de início de intervenções clínicas adequadas. Além disso, estudos de risco permitem a identificação de fatores de proteção para reduzir a resistência e vulnerabilidade favoráveis à tentação de recaída. As variáveis envolvidas no estudo são:

i) t_i : tempo de permanência na comunidade até a desistência do tratamento (dias);

ii) $cens_i$: o indicador de censura ($0 =$ censura, $1 =$ falha);

iii) x_{i1} : estado civil ($1 =$ casado ou separado, $0 =$ solteiro);

iv) x_{i2} : escolaridade ($0 =$ nenhuma ou ensino fundamental incompleto, $1 =$ ensino fundamental completo ou ensino superior completo ou não);

v) x_{i3}: idade ($1 = \geq 30$ anos, $0 = < 30$ anos).

Ajustou-se o modelo de regressão LKumGGE dado por:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \sigma z_i,$$

em que os erros $z_1, \ldots, z_{141}$ são variáveis aleatórias independentes com função densidade de probabilidade (71).

Na Tabela 7, podem ser vistas as EMVs para os parâmetros do modelo de regressão LKumGGE, ajustado aos dados de dependência química usando o procedimento NLMixed do SAS. Esse modelo envolve um parâmetro extra (φ) que lhe dá mais flexibilidade para se ajustar a esses dados. Valores iniciais para $\boldsymbol{\beta}$, q e σ são tomados a partir do ajuste do modelo de regressão LGG, com $\lambda = 1$ e $\varphi = 1$. As variáveis explicativas x_1, x_2 e x_3 são marginalmente significativas para o modelo de regressão LKumGGE ao nível de significância de 5%.

Tabela 7 - Estimativas dos parâmetros, erros-padrão, valor p e intervalos de confiança de 95% para o modelo LKumGGE, ajustado aos dados de dependência química

Parâmetro	Estimativa	Erro-padrão	Valor p	IC 95%
q	-0,2996	0,000015	-	(-0,2996; -0,2995)
λ	7,4794	2,2531	-	(3,0251; 11,9336)
φ	0,1298	0,01362	-	(0,1029; 0,1568)
σ	1,0574	0,000111	-	(1,0572; 1,0576)
β_0	6,2476	0,000166	<0,001	(6,2473; 6,2480)
β_1	0,0434	0,000052	<0,001	(0,0433; 0,0435)
β_2	0,0947	0,002287	<0,001	(0,0902; 0,0992)
β_3	0,6256	0,000588	<0,001	(0,6244; 0,6267)

De acordo com o modelo final, a interpretação é que o tempo de permanência na comunidade até a desistência do tratamento de pacientes com alta escolaridade fica aumentado em $9,93\%$ ($[\exp\{0,0947\}] \times 100\%$), se comparado com o tempo de pacientes com baixa escolaridade. Em relação ao estado civil, pacientes casados têm o tempo mediano aumentado em $4,49\%$ ($[\exp\{0,0434\}] \times 100\%$), quando comparado com o tempo de pacientes solteiros. O tempo de permanência na comunidade de pacientes com idade igual ou superior a 30 anos é $86,93\%$ ($[\exp\{0,6256\}] \times 100\%$) maior do que o tempo de pacientes com idade inferior a 30 anos.

Um resumo das estatísticas AIC, CAIC e BIC para comparar os modelos de regressão LKumGGE, LGGE, LGGEC, LGG e log-Weibull é dado na Tabela 8. Esses resultados indicam que o modelo de regressão LKumGGE tem o menor AIC, CAIC e BIC, dentre os modelos ajustados, e, portanto, poderia ser escolhido como o melhor modelo.

Tabela 8 - Estatísticas AIC, CAIC e BIC para comparar os modelos de regressão LKGG, LGGE, LGGEC, LGG e log-Weibull

Modelo	AIC	CAIC	BIC
LKumGGE	348,7	349,8	372,3
LGGE	460,7	461,6	481,4
LGGEC	351,2	352,1	371,9
LGG	458,8	459,4	476,5
Log-Weibull	471,8	472,2	486,5

A comparação entre o modelo proposto com alguns dos seus sub-modelos por meio do TRV é feita na Tabela 9. Os resultados nesta tabela sugerem que o modelo LKumGGE produz um ajuste mais adequado a esses dados quando comparado com os outros modelos.

Tabela 9 - TRV para os dados de dependência química

Modelo	Hipóteses	Estatística w	valor p
LKumGGE vs LGGE	$H_0 : \varphi = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falso	114,0	$<$ 0,0001
LKumGGE vs LGGEC	$H_0 : \lambda = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falso	4,50	0,03389
LKumGGE vs LGG	$H_0 : \lambda = \varphi = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falso	114,1	$<$ 0,0001
LKumGGE vs Log-Weibull	$H_0 : \lambda = \varphi = q = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falso	129,1	$<$ 0,0001

Considerando agora uma análise bayesiana, foram adotadas as seguintes distribuições *a priori* pouco informativas: $\lambda \sim \Gamma(0,01; 0,01)$, $\varphi \sim \Gamma(0,01; 0,01)$, $\sigma \sim \Gamma(0,01; 0,01)$, $q \sim N(0; 100)$ e $\boldsymbol{\beta}_s \sim N(0; 100)$.

Dessa forma, foram geradas duas cadeias paralelas e independentes com tamanho 100.000 para cada parâmetro usando o algoritmo de Metropolis-Hasting, desconsiderando as primeiras 10.000 iterações para eliminar o efeito dos valores iniciais. Além disso, considerou-se espaçamento de tamanho 10, para evitar problemas de correlação, obtendo-se uma amostra de tamanho 9.000. Para monitorar a convergência das amostras foi usado o fator de redução da escala $\hat{R}$, desenvolvido por Gelman e Rubin (1992). A Tabela 10 apresenta os sumários *a posteriori* para os parâmetros do modelo LKumGGE, além de mostrar os valores do fator de redução da escala.

Nota-se que os valores de $\hat{R}$ estão próximos de 1, indicando a convergência

Tabela 10 - Sumário *a posteriori* dos parâmetros do modelo LKumGGE para os dados de dependência química

Parametro	Média	Desvio padrão	HPD (95%)	$\widehat{R}$
q	-0,2992	0,0498	(-0,3963; -0,2043)	1,0000
λ	7,4796	0,0500	(7,3834; 7,5789)	1,0006
φ	0,1295	0,0100	(0,1096; 0,1487)	0,9999
σ	1,0571	0,0501	(0,9585; 1,1547)	1,0014
β_0	6,2467	0,2215	(5,8243; 6,6896)	1,0006
β_1	0,0432	0,0099	(0,0242; 0,0630)	0,9998
β_2	0,0943	0,0316	(0,0344; 0,1588)	1,0015
β_3	0,6264	0,2211	(0,1975; 1,0651)	1,0017

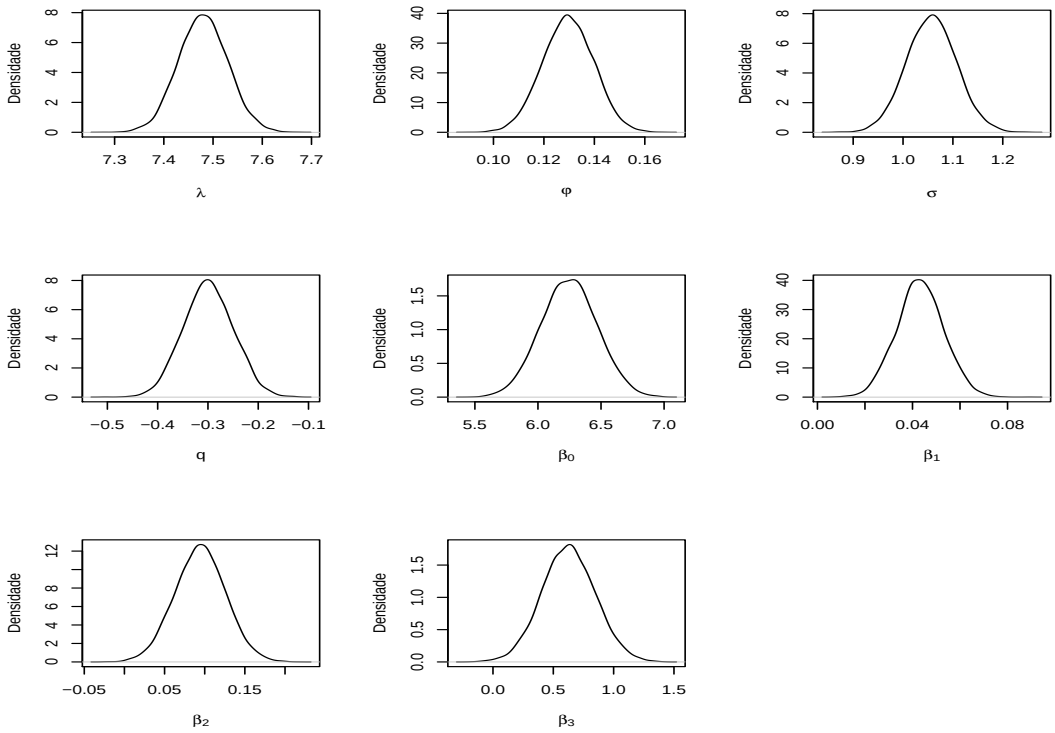

Figura 17 - Densidades marginais *a posteriori* para os parâmetros do modelo LKumGGE para os dados de dependência química

das cadeias. Pode-se observar que o valores para a média *a posteriori* (Tabela 10) são similares aos valores obtidos para o modelo LKumGGE apresentados na Tabela 7. Além

disso, a Figura 17 apresenta as densidades marginais *a posteriori* aproximadas pelo histograma, considerando as 9.000 observações amostrais geradas. As densidades marginais apresentadas por meio da Figura 17 sugerem que a distribuição *a posteriori* apresenta uma tendência à simetria para os parâmetros.

5 DISTRIBUIÇÃO GAMA GENERALIZADA GEOMÉTRICA

A distribuição gama generalizada (GG) foi introduzida por Stacy (1962) é um modelo muito popular para analisar dados assimétricos. Possui como sub-modelos distribuições amplamente utilizadas na análise de dados de tempo de vida, como as distribuições Weibull, gama, Rayleight, entre outras. Diversos autores nos últimos anos têm concentrado seus esforços na generalização de família de distribuições de probabilidade, obtendo, dessa forma, maior flexibilidade e, consequentemente, ganhado na modelagem de dados e na capacidade de incorporar um grande número de sub-modelos nas distribuições generalizadas.

Seguindo a ideia de Adamidis e Loukas (1998) para um processo de mistura de distribuições, o objetivo deste capítulo é introduzir a distribuição gama generalizada geométrica. Essa nova distribuição, devido à sua flexibilidade para acomodar muitas formas para a função risco, pode ser utilizada em uma grande variedade de problemas na análise de dados de sobrevivência. O restante do capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 5.1, a distribuição gama generalizada geométrica e alguns de seus sub-modelos são apresentados. As propriedades matemáticas da nova distribuição são apresentadas na seção 5.2. Estimação pelos métodos de máxima verossimilhança e bayesiana estão presentes nas seções 5.3 e 5.4. Por fim, a análise de um conjunto de dados reais é dada na seção 5.5.

5.1 Distribuição gama generalizada geométrica

Suponha que $\{Y_i\}_{i=1}^{Z}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) que possuem função de distribuição acumulada gama generalizada (GG) definida na equação (2).

Seja Z uma variável aleatória geométrica com função de probabilidade dada por $P(z;p) = (1-p)p^{z-1}$ para $Z \in N$ e $p \in (0,1)$. Seja $T = \min(\{Y_i\}_{i=1}^{Z})$, então, fazendo-se uso da distribuição do mínimo, encontra-se a função de distribuição acumulada de T:

$$F_T(t) = 1 - [1 - F_T(t)]^z = 1 - \left\{1 - \gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]\right\}^z \tag{74}$$

Derivando a expressão (74) com relação à t encontra-se a função densidade

de probabilidade de t condicionada à $Z = z$. Assim,

$$f(t|z;\alpha,\tau,k) = \frac{z\tau}{\alpha\Gamma(k)}\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau k-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\{1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{z-1}.$$

Como t e z são independentes, então tem-se que a função densidade de probabilidade conjunta de t e z é dada por:

$$\begin{aligned} f(t,z;\alpha,\tau,k,p) &= f(t|z;\alpha,\tau,k)P(z;p) \\ &= \frac{z\tau}{\alpha\Gamma(k)}\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau k-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\{1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{z-1}(1-p)p^{z-1}. \end{aligned}$$

Portanto, a função densidade de probabilidade marginal de t, $f(t;\boldsymbol{\theta})$ em que $\boldsymbol{\theta}^T = (\alpha,\tau,k,p)$ é:

$$\begin{aligned} f(t;\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{z=1}^{\infty} f(t;z,\alpha,\tau,k,p) \\ &= \frac{(1-p)\tau}{\alpha\Gamma(k)}\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau k-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\sum_{z=1}^{\infty}p^{z-1}z\Big\{1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{z-1}, \end{aligned}$$

em que:

$$\sum_{z=1}^{\infty}p^{z-1}z\Big\{1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}^{z-1} = \Big\{1-p\Big(1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big)\Big\}^{-2}.$$

Então, a função de densidade da distribuição gama generalizada geométrica (GGG) com quatro parâmetros é dada por ($t > 0$):

$$f(t;\alpha,\tau,k,p) = \frac{\tau(1-p)}{\alpha\Gamma(k)}\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau k-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\{1-p\Big(1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big)\Big\}^{-2}. \quad (75)$$

A função de distribuição acumulada correspondente a (75) é:

$$F(t;\alpha,\tau,k,p) = \frac{\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]}{1-p\Big\{1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}}. \quad (76)$$

A variável aleatória T com função de densidade (75) é denotada por $T \sim \mathrm{GGG}(\alpha,\tau,k,p)$.

A distribuição Weibull geométrica (WG)(BARRETO-SOUZA; MORAIS; CORDEIRO, 2011) é obtida de (75) para $k = 1$. Para $\tau = 1$, obtém-se a distribuição gama geométrica com três parâmetros (α,k,p). A distribuição GG é a distribuição limite (o limite é definido em termos da convergência na distribuição) da distribuição GGG quando $p \to 0^+$. Por outro lado, se $p \to 1^-$, tem-se a distribuição de uma variável aleatória Y

tal que $P(Y = 0) = 1$. Assim, o parâmetro p pode ser interpretado como um parâmetro de degeneração. Para $\tau = k = 1$ em (75), tem-se a distribuição exponencial geométrica (EG). Quando p se aproxima de zero (e $k = 1$), obtém-se a distribuição Weibull. Alguns sub-modelos da distribuição GGG são listados na Tabela 11.

Tabela 11 - Alguns sub-modelos da distribuição GGG.

Distribuição	τ	α	k	p
Gama geométrica	1	α	k	p
Qui-quadrado geométrica	1	2	$\frac{n}{2}$	p
Exponencial geométrica	1	α	1	p
Weibull geométrica	c	α	1	p
Rayleigh geométrica	2	α	1	p
Maxwell geométrica	2	α	$\frac{3}{2}$	p
Semi-normal geométrica	2	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	p

As funções de sobrevivência e risco correspondentes a (75) são:

$$S(t;\alpha,\tau,k,p) = 1 - \left\{\gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\left(1 - p\left\{1 - \gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-1}\right\}$$

e

$$h(t;\alpha,\tau,k,p) = \frac{\frac{\tau(1-p)}{\alpha\Gamma(k)}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau k-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\left(1 - p\left\{1 - \gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-2}}{1 - \left\{\gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\left(1 - p\left\{1 - \gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-1}\right\}},$$

respectivamente. Os gráficos da função densidade de probabilidade GGG e função risco para alguns valores de parâmetros são apresentados nas Figuras 5.1 e 19, respectivamente.

5.2 Propriedades gerais

Para determinar algumas propriedades da distribuição GGG, a função densidade de probabilidade (75) pode ser reescrita na forma de combinação linear da distribuição GG. Assim, seja $g(t)$ a função densidade de probabilidade proposta por Stacy (1962) da distribuição GG(α, τ, k), definida na equação (1). Para $|z| < 1$ e $\rho > 0$ um número real e não-inteiro, considere a seguinte expansão:

$$(1 - z)^{-\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\rho + j)}{\Gamma(\rho)\, j!}\, z^j. \tag{77}$$

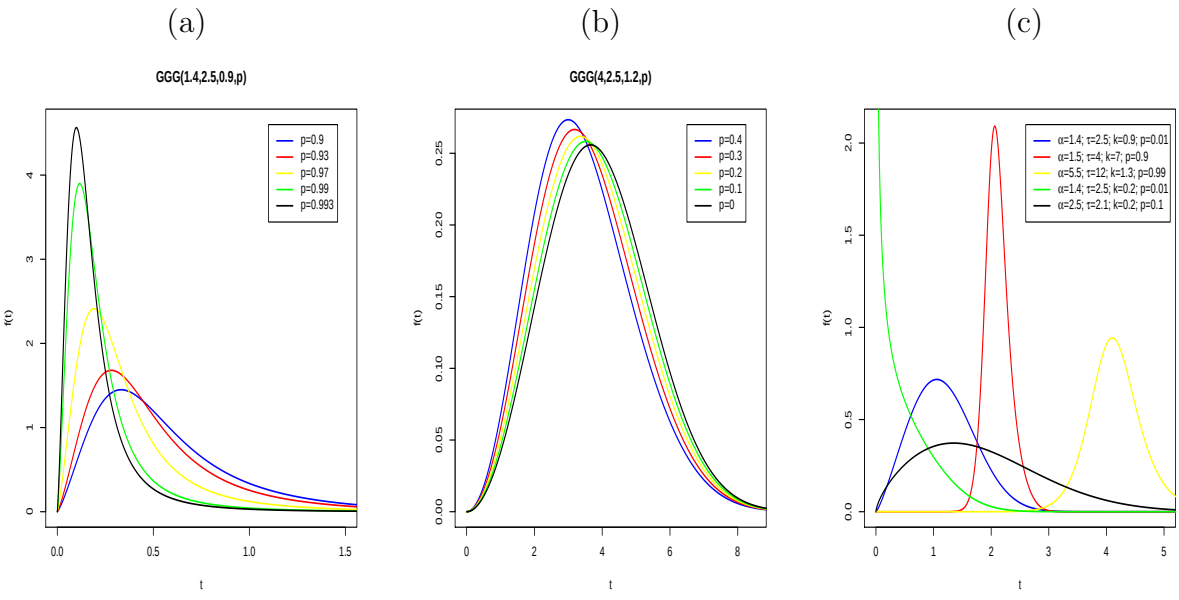

Figura 18 - Gráficos da função densidade GGG para valores de parâmetros selecionados

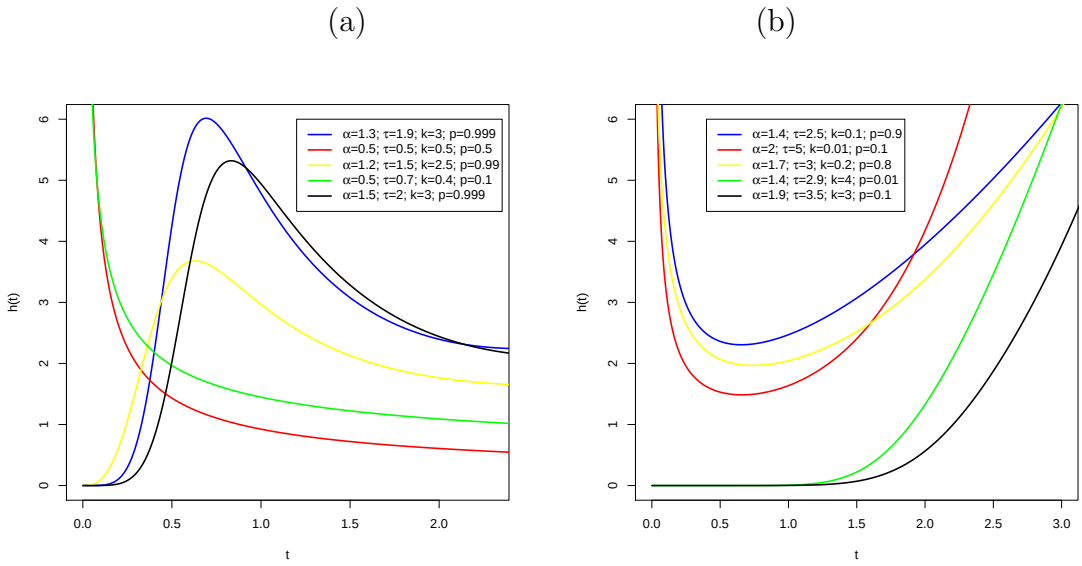

Figura 19 - Gráficos da função risco para valores de parâmetros selecionados

Dessa forma, escrevendo a quantidade $\left\{1-p\left(1-\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right)\right\}^{-2}$ na forma de uma expansão dada em (77), a função densidade de probabilidade da distribuição GGG(α,τ,k,p) é expressa por:

$$f(t)=\frac{\tau(1-p)}{\alpha\Gamma(k)}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau k-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)p^j\left\{1-\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^j.$$

Usando a expansão binomial na expressão acima e substituindo $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{j}$ por $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty}$, obtém-se:

$$f(t) = \frac{\tau(1-p)}{\alpha\Gamma(k)}\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau k-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\sum_{m=0}^{\infty}s_m(p)\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]^m, \tag{78}$$

em que a quantidade $s_m(p)$ é expressa por:

$$s_m(p) = \frac{(-1)^m\,(m+1)\,p^m}{(1-p)^{m+2}}. \tag{79}$$

Portanto, utilizando o resultado em (110) no Apêndice A na expressão (78), a função densidade de probabilidade da distribuição GGG é dada por:

$$f(t) = \sum_{m,q=0}^{\infty} w(k,p,m,q)\, g_{\alpha,\tau,k(m+1)+q}(t), \quad t>0, \tag{80}$$

em que $g_{\alpha,\tau,k(m+1)+q}(t)$ tem distribuição $\mathrm{GG}(\alpha,\tau,k(m+1)+q)$ e os coeficientes de ponderação $w(k,p,m,q)$ são dados por:

$$w(k,p,m,q) = \frac{(1-p)\,\Gamma[k(m+1)+q]\,s_m(p)\,c_{m,q}}{\Gamma(k)^{m+1}}. \tag{81}$$

Os coeficientes $c_{m,q}$ são determinados a partir da relação de recorrência em (109)(Apêndice A). A equação (80) mostra que a densidade GGG pode ser escrita em termos de uma combinação linear de densidades GG.

5.2.1 Momentos

Algumas das principais características de uma distribuição, como, por exemplo, tendência, dispersão, assimetria e curtose, podem ser estudadas por meio dos momentos. Assim, o r-ésimo momento ordinário da distribuição $\mathrm{GG}(\alpha,\tau,k)$ (STACY, 1962) é obtido da seguinte forma:

$$\mu'_{r,GG} = \frac{\alpha^r\,\Gamma(k+r/\tau)}{\Gamma(k)}.$$

Logo, considerando a função densidade de probabilidade (80) o r-ésimo momento ordinário da distribuição GGG, obtido a partir dos momentos da distribuição $\mathrm{GG}(\alpha,\tau,k(1+q)+d)$ é dado por:

$$\mu'_r = \alpha^r\sum_{m,q=0}^{\infty}\frac{(1-p)\,\Gamma[k(m+1)+q+r/\tau]\,s_m(p)\,c_{m,q}}{\Gamma(k)^{m+1}}.$$

Uma outra representação para o r-ésimo momento da distribuição GGG com função densidade de probabilidade (75) é obtida desenvovendo-se a seguinte expressão:

$$\mu_r' = \frac{(1-p)\alpha^{r-1}}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau k+r-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\tau\right] \left(1 - p\left\{1 - \gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\tau\right]\right\}\right)^{-2} dt. \quad (82)$$

Assim, fazendo a mudança de variável $w = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\tau$ em (82), tem-se:

$$\mu_r' = \frac{\alpha^r(1-p)}{\Gamma(k)} \int_0^\infty w^{k+\frac{r}{\tau}-1} \exp(-w) \left(1 - p\left[1 - \gamma_1(k,w)\right]\right)^{-2} dw.$$

Dessa forma, escrevendo a quantidade $(1 - p\left[1 - \gamma_1(k,w)\right])^{-2}$ na expressão acima, na forma de uma expansão dada em (77), tem-se:

$$\mu_r' = \frac{\alpha^r(1-p)}{\Gamma(k)} \sum_{j=0}^\infty (j+1)p^j \int_0^\infty w^{k+\frac{r}{\tau}-1} \exp(-w) \left[1 - \gamma_1\big(k,w\big)\right]^j dw. \quad (83)$$

Usando a expansão binomial no termo $\left[1-\gamma_1\big(k,w\big)\right]^j$ a expressão (83) pode ser reescrita como:

$$\mu_r' = \frac{\alpha^r(1-p)}{\Gamma(k)} \sum_{j=0}^\infty \sum_{l=0}^j p^j (-1)^l (j+1) \binom{j}{l} \int_0^\infty w^{k+\frac{r}{\tau}-1} \exp(-w)\, \gamma_1(k,w)^l dw.$$

Poranto, intercalando $\sum_{j=0}^\infty \sum_{l=0}^j$ por $\sum_{l=0}^\infty \sum_{j=l}^\infty$ e usando o resultado $(-1)^l \sum_{j=l}^\infty (j+1)\binom{j}{l} p^j = s_l(p)$, em que $s_l(p)$ é dado por (79), o r-ésimo momento ordinário da distribuição GGG é dado por:

$$\mu_r' = \frac{\alpha^r(1-p)}{\Gamma(k)} \sum_{l=0}^\infty s_l(p)\, I\left(k, \frac{r}{\tau}, l\right), \quad (84)$$

em que,

$$I\left(k, \frac{r}{\tau}, l\right) = \int_0^\infty w^{k+\frac{r}{\tau}-1} \exp(-w)\, \gamma_1(k,w)^l dw.$$

Segundo Nadarajah (2008b), a integral definida em $I\left(k, \frac{r}{\tau}, l\right)$ é determinada de acordo com alguns resultados em termos da função de Lauricella do tipo A (EXTON, 1978; AARTS, 2000), definida na sub-seção 3.2.1. Portanto,

$$\begin{aligned} I\left(k, \frac{r}{\tau}, l\right) &= k^{-l}\Gamma\big(r/\tau + k(l+1)\big) \times \\ &\quad F_A^{(l)}\big(r/\tau + k(l+1); k, \ldots, k; k+1, \ldots, k+1; -1, \ldots, -1\big). \end{aligned} \quad (85)$$

As representações gráficas da assimetria e curtose como funções de τ para valores selecionados de p quando $\alpha = 0,5$ e $k = 10$, são apresentados na Figura 20.

(a) (b)

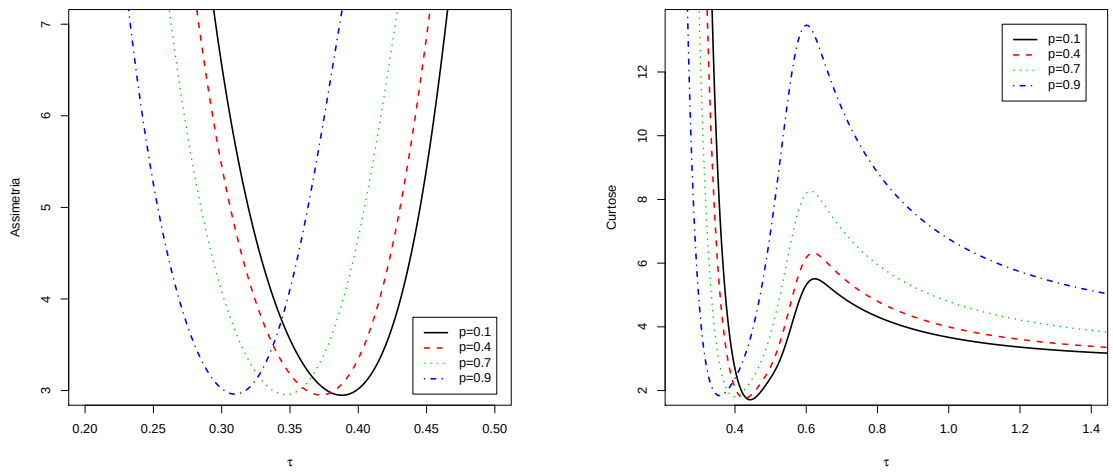

Figura 20 - Assimetria e curtose da distribuição GGG como uma função do parâmetro τ para valores selecionados de p

5.2.2 Função geradora de momentos

Seja T uma variável aleatória GGG(α, τ, k, p), com função densidade (80). Então a função geradora de momento (fgm) definida por $M(s) = E[\exp(sT)]$ é obtida da função de distribuição GG(α, τ, k). Assim, a fgm da distribuição GG é determinada da seguinte forma:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{\tau}{\alpha^{\tau k}\Gamma(k)} \int_0^\infty \exp(st)\, t^{\tau k-1} \exp\{-(t/\alpha)^\tau\} dt.$$

Então, substituindo $u = t/\alpha$, tem-se

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{\tau}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \exp(\alpha s u)\, u^{\tau k-1} \exp(-u^\tau) du. \tag{86}$$

Note que o termo $\exp(\alpha s u)$ pode ser expandido em série de Taylor. Assim, utilizando essa expansão a função (86) é escrita como:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{\tau}{\Gamma(k)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha s)^m}{m!} \int_0^\infty u^{\tau k+m-1} \exp(-u^\tau) du.$$

Por outro lado, a integral da fgm apresenta o seguinte resultado

$$\int_0^\infty u^{\tau k+m-1} \exp(-u^\tau) du = \tau^{-1}\Gamma(k + m/\tau). \tag{87}$$

Portanto, para $\tau > 0$ e considerando o resultado da integral acima, a fgm da distribuição GG é dada por:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{1}{\Gamma(k)} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\Big(\frac{m}{\tau} + k\Big) \frac{(\alpha s)^m}{m!}. \tag{88}$$

No entanto, para $\tau > 1$, o somatório da fgm (88) pode ser escrito em termos da função Wright hipergeométrica generalizada (WRIGHT, 1935) definida na sub-seção 3.2.2. Dessa forma, utilizando o resultado em (30) para reescrever o somatório da fgm (88), a fgm da distribuição GG é dada por:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{1}{\Gamma(k)} {}_1\Psi_0 \left[\begin{array}{c} (k, 1/\tau) \\ - \end{array} ; \alpha s \right]. \tag{89}$$

Sabendo-se que a fgm da distribuição GG é dada pela equação (89), a fgm da distribuição GGG é obtida da seguinte forma:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \sum_{m,q=0}^{\infty} w(k,p,m,q) M_{\alpha,\tau,k(m+1)+q}(s).$$

Portanto, tem-se:

$$M(s) = \sum_{m,q=0}^{\infty} \frac{w(k,p,m,q)}{\Gamma(k(m+1)+q)} {}_1\Psi_0 \left[\begin{array}{c} (k(m+1)+q, \tau^{-1}) \\ - \end{array} ; \alpha s \right]. \tag{90}$$

5.2.3 Desvios médios

Se T é uma variável aleatória com distribuição GGG com média $\mu_1' = \mu = E(T)$ e mediana m_1, então o desvio médio em relação à média e o desvio médio em relação à mediana são definidos, respectivamente, por:

$$\delta_1 = 2\mu_1' F(\mu_1') - 2I(\mu_1') \text{ e } \delta_2 = \mu_1' - 2I(m_1), \tag{91}$$

em que $F(\mu_1')$ e $F(m_1)$ são obtidas por meio da expressão (76) e a função $I(m_1)$ é definida por:

$$I(m_1) = \int_0^{m_1} t f(t) dt.$$

Assim, considerando f(t) como sendo a função densidade de probabilidade definida em (80) tem-se:

$$\begin{aligned} I(m_1) &= \sum_{m,q=0}^{\infty} w(k,p,m,q) \int_0^{m_1} t g_{(\alpha,\tau,k(m+1)+q)}(t) dt \\ &= \sum_{m,q=0}^{\infty} w(k,p,m,q)\, J(\alpha,\tau,[k(m+1)+q], m_1), \end{aligned} \tag{92}$$

Por outro lado, a integral definida em (92) é escrita da seguinte forma, considerando $x = t/\alpha$,

$$J(\alpha, \tau, [k(m+1)+q], m_1) = \frac{\tau\alpha}{\Gamma([k(m+1)+q])} \int_0^{m_1/\alpha} x^{\tau[k(m+1)+q]} \exp(-x^\tau) dx.$$

Dessa forma, utilizando a mudança de variável $w = x^\tau$, a integral em $J(\alpha, \tau, [k(m+1)+q], m_1)$ é determinada em termos da função gama incompleta, ou seja:

$$\begin{aligned} J(\alpha, \tau, [k(m+1)+q], m_1) &= \frac{\alpha}{\Gamma([k(m+1)+q])} \int_0^{(m_1/\alpha)^\tau} w^{[k(m+1)+q]+\tau^{-1}-1} \exp(-w) dw \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma([k(m+1)+q])} \gamma([k(m+1)+q]+\tau^{-1}, (m_1/\alpha)^\tau). \quad (93) \end{aligned}$$

Portanto, substituindo o resultado obtido em (93) na expressão (92), tem-se:

$$I(m_1) = \sum_{m,q=0}^{\infty} \frac{\alpha\, w(k,p,m,q)}{\Gamma([k(m+1)+q)} \gamma(k(m+1)+q+\tau^{-1}, (m_1/\alpha)^\tau).$$

O resultado é análogo para $I(\mu_1')$.

5.2.4 Confiabilidade

A medida de confiabilidade da distribuição GGG é determinada considerando a expressão apresentada por Silva; Ortega e Cordeiro (2010), dada por:

$$R = \int_0^\infty f(t)F(t)dt,$$

em que $f(t)$ é a função densidade de probabilidade e $F(t)$ é a função de distribuição acumulada. Considere a função densidade de probabilidade (80) e a função de distribuição acumulada (76). Então, tem-se:

$$\begin{aligned} R &= \int_0^\infty \sum_{m,q=0}^{\infty} w(k,p,m,q) \frac{\tau}{\alpha\Gamma[k(m+1)+q]} \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau[k(m+1)+q]-1} \exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big] \gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big] \\ &\times \Big(1 - p\Big\{1 - \gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}\Big)^{-1} dt. \end{aligned}$$

Utilizando a expansão (77) na quantidade $\Big(1 - p\Big\{1 - \gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}\Big)^{-1}$, a confiabilidade é dada por:

$$\begin{aligned} R &= \int_0^\infty \sum_{m,q=0}^{\infty} w(k,p,m,q) \frac{\tau}{\alpha\Gamma[k(m+1)+q]} \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau[k(m+1)+q]-1} \exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big] \gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big] \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) p^j \Big\{1 - \gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}^j dt. \quad (94) \end{aligned}$$

Portanto, considerando a expansão binomial no termo $\{1-\gamma_1[k,(\frac{t}{\alpha})^\tau]\}^j$, a expressão (94) é dada por:

$$\begin{aligned} R &= \int_0^\infty \sum_{m,q=0}^{\infty} w(k,p,m,q)\frac{\tau}{\alpha\Gamma[k(m+1)+q]}\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau[k(m+1)+q]-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big] \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j} p^j(-1)^i(j+1)\binom{j}{i}\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]^{i+1}dt. \end{aligned}$$

Por outro lado, substituindo $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}$ por $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}$ tem-se:

$$\begin{aligned} R &= \int_0^\infty \sum_{m,q=0}^{\infty} w(k,p,m,q)\frac{\tau}{\alpha\Gamma[k(m+1)+q]}\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau[k(m+1)+q]-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\sum_{i=0}^{\infty}s_i(p) \\ &\times \gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]^{i+1}dt, \end{aligned} \tag{95}$$

em que a quantidade $s_i(p)$ é definida pela expressão (79). Assim,

$$\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]^{i+1} = \sum_{l=0}^{i+1}(-1)^l\binom{i+1}{l}\Big\{1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\Big\}^l.$$

Usando a expansão binomial na equação acima, obtém-se:

$$\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]^{i+1} = \sum_{l=0}^{i+1}\sum_{r=0}^{l}(-1)^{l+r}\binom{i+1}{l}\binom{l}{r}\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]^r.$$

Portanto, (95) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{m,q,i=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{i+1}\sum_{r=0}^{l} w(k,p,m,q)\frac{\tau(-1)^{l+r}s_i(p)}{\alpha\Gamma[k(m+1)+q]}\binom{i+1}{l}\binom{l}{r}\int_0^\infty\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^{\tau[k(m+1)+q]-1} \\ &\times \exp\Big[-\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau\Big]^r. \end{aligned} \tag{96}$$

Dessa forma, subtituindo $w=\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)^\tau$ em (96) tem-se:

$$R = \sum_{m,q,i=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{i+1}\sum_{r=0}^{l} v(k,p,m,q,i,l,r)I[k(m+1),q,r],$$

em que,

$$v(k,p,m,q,i,l,r) = \frac{(1-p)(-1)^{l+r}s_m(p)s_i(p)c_{m,q}}{\Gamma(k)^{m+1}}\binom{i+1}{l}\binom{l}{r},$$

e

$$I[k(m+1),q,r] = \int_0^\infty w^{k(m+1)+q-1}\exp(-w)\gamma_1(k,w)^r dw.$$

Usando a função Lauricella do tipo A (definida na sub-seção 3.2.1), a última integral pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} I\left[k(m+1),q,r\right] &= [k(m+1)]^{-r}\Gamma[q+k(m+r+1)]\times \\ &\quad F_A^{(l)}\big(q+k(m+r+1);k(m+1),\ldots,k(m+1);k(m+1)+1,\ldots, \\ &\quad k(m+1)+1;-1,\ldots,-1\big). \end{aligned} \tag{97}$$

5.2.5 Estatística de ordem

A função densidade de probabilidade $f_{i:n}(t)$ da i-ésima estatística de ordem, para $i=1,\ldots,n$, das variáveis aleatórias $T_1,\ldots,T_n$, é dada por:

$$f_{i:n}(t)=\frac{1}{B(i,n-i+1)}f(t)F(t)^{i-1}\{1-F(t)\}^{n-i}, \tag{98}$$

em que $f(\cdot)$ é uma função densidade de probabilidade, $F(\cdot)$ é uma função de distribuição acumulada e $B(\cdot,\cdot)$ denota a função beta. Observa-se que a quantidade $[1-F(t)]^{n-i}$ em (98) pode ser escrita na forma de uma expansão binomial da seguinte forma:

$$[1-F(t)]^{n-i}=\sum_{j_1=0}^{n-i}\binom{n-i}{j_1}(-1)^{j_1}F(t)^{j_1}.$$

Assim,

$$f_{i:n}(t)=\frac{1}{B(i,n-i+1)}f(t)\sum_{j_1=0}^{n-i}\binom{n-i}{j_1}(-1)^{j_1}F(t)^{i+j_1-1}.$$

Porém, se F(t) é a função de distribuição acumulada da GGG definida em (76), tem-se:

$$F(x)^{i+j-1}=\Big\{1-\Big[1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big(1-p\Big\{1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}\Big)^{-1}\Big]\Big\}^{i+j-1}. \tag{99}$$

Portanto, usando a expansão binomial na expressão (99), obtém-se:

$$F(x)^{i+j-1}=\sum_{l=0}^{i+j-1}(-1)^l\binom{i+j-1}{l}\Big\{1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big(1-p\Big\{1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}\Big)^{-1}\Big\}^{l}.$$

Novamente usando a expansão binomial no termo $\Big\{1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big(1-p\Big\{1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}\Big)^{-1}\Big\}^{l}$, tem-se:

$$\begin{aligned} F(x)^{i+j-1} &= \sum_{l=0}^{i+j-1}\sum_{s=0}^{l}(-1)^{l+s}\binom{i+j-1}{l}\binom{l}{s}\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]^{s} \\ &\times \Big(1-p\Big\{1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big\}\Big)^{-s}. \end{aligned} \tag{100}$$

Aplicando a expansão (77) na quantidade $\left(1-p\left\{1-\gamma_1\left[k,\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-s}$ da equação (100), tem-se:

$$\begin{aligned} F(x)^{i+j-1} &= \sum_{l=0}^{i+j-1}\sum_{s=0}^{l}\sum_{j_1=0}^{\infty}\frac{p^{j_1}(-1)^{l+s}\Gamma(s+j_1)}{\Gamma(s)j_1!}\binom{i+j-1}{l}\binom{l}{s}\gamma_1\left[k,\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{s} \\ &\times \left\{1-\gamma_1\left[k,\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{j_1}. \end{aligned}$$

Expandino o termo $\left\{1-\gamma_1\left[k,\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{j_1}$ da expressão acima obtém-se:

$$\begin{aligned} F(x)^{i+j-1} &= \sum_{l=0}^{i+j-1}\sum_{s=0}^{l}\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{l_1=0}^{j_1}\frac{p^{j_1}(-1)^{l+s+l_1}\Gamma(s+j_1)}{\Gamma(s)j_1!}\binom{i+j-1}{l}\binom{l}{s}\binom{j_1}{l_1} \\ &\times \gamma_1\left[k,\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{l_1+s}. \end{aligned}$$

Usando alguns cálculos algébricos tem-se:

$$\gamma_1\left[k,\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{l_1+s} = \sum_{m_1=0}^{l_1+s}\sum_{r=0}^{m_1}(-1)^{m_1+r}\binom{l_1+s}{m_1}\binom{m_1}{r}\gamma_1\left[k,\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{r}.$$

Logo,

$$F(x)^{i+j-1} = \sum_{l=0}^{i+j-1}\sum_{s=0}^{l}\sum_{r=0}^{m_1}(-1)^{l+s}\binom{i+j-1}{l}\binom{l}{s}\omega_r(p,j_1,l_1,m_1,s)\gamma_1\left[k,\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{r},$$

em que,

$$\omega_r(p,j_1,l_1,m_1,s) = \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{l_1=0}^{j_1}\sum_{m_1=0}^{l_1+s}\frac{p^{j_1}(-1)^{l_1+m_1+r}\Gamma(s+j_1)}{\Gamma(s)j_1!}\binom{j_1}{l_1}\binom{l_1+s}{m_1}\binom{m_1}{r}.$$

Para $r=0,1,\ldots$, tem-se:

$$F(x)^{i+j-1} = \sum_{l=0}^{i+j-1}\sum_{r=0}^{m_1}(-1)^{l}\binom{i+j-1}{l}\nu_r(l,s,p,j_1,l_1,m_1,s)\,\gamma_1\left[k,\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{r},$$

em que os coeficientes $\nu_r(l,s,p,j_1,l_1,m_1,s)$ são definidos por:

$$\nu_r(l,s,p,j_1,l_1,m_1,s) = \sum_{s=0}^{l}(-1)^{s}\binom{l}{s}\omega_r(p,j_1,l_1,m_1,s)$$

Intercalando as somas, obtém-se:

$$F(t)^{i+j-1} = \sum_{r=0}^{m_1}\rho_{r,i+j-1}(p)\gamma_1\left[k,\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{r},$$

em que os coeficientes $p_{r,u}(p)$ são calculados por:

$$\begin{aligned}\rho_{r,u}(p) &= \sum_{l=0}^{u}(-1)^l\binom{u}{l}\sum_{s=0}^{l}\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{l_1=0}^{j_1}\sum_{m_1=0}^{l_1+s}\frac{p^{j_1}(-1)^{l_1+m_1+r+s}\Gamma(s+j_1)}{\Gamma(s)j_1!}\binom{l}{s}\binom{j_1}{l_1}\\ &\times \binom{l_1+s}{m_1}\binom{m_1}{r}. \qquad (101)\end{aligned}$$

Para $r, u = 0, 1, \ldots$, a densidade de probabilidade da estatística de ordem da distribuição GGG é dada por:

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(x)\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j\binom{n-i}{j}\sum_{r=0}^{m_1}\rho_{r,i+j-1}(p)\gamma_1\left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^r.$$

Usando a densidade (80), $f_{i:n}(x)$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}f_{i:n}(x) &= \frac{1}{B(i, n-i+1)}\sum_{m,q=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{r=0}^{m_1}(-1)^j\binom{n-i}{j}w(k,p,m,q)\,\rho_{r,i+j-1}(p)\\ &\times \gamma_1\left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^r g_{\alpha,\tau,k(m+1)+q}(x).\end{aligned}$$

Através da aplicação de expansão (110) na expressão acima, a densidade $f_{i:n}(x)$ é expressa por:

$$\begin{aligned}f_{i:n}(x) &= \frac{1}{B(i, n-i+1)}\sum_{m,q,v=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{r=0}^{m_1}\frac{(-1)^j\binom{n-i}{j}}{\Gamma(k)^r\alpha^{\tau(kr+v)}}\,c_{r,v}\,w(k,p,m,q)\,\rho_{r,i+j-1}(p)\\ &\times x^{\tau(kr+v)}\,g_{\alpha,\tau,k(m+1)+q}(x),\end{aligned}$$

em que as quantidades $w(k,p,m,q)$ e $\rho_{r,i+j-1}(p)$ são definidas em (81) e (101), $c_{r,v}$ é calculado recursivamente por (109). Dessa forma, o s-ésimo momento de $T_{i:n}$ é obtido a partir do $s+\tau(kr+v)$-ésimo momento fracionário da distribuição GG$(\alpha, \tau, k(m+1)+q)$. Logo,

$$\begin{aligned}E(X_{i:n}^s) &= \frac{1}{B(i, n-i+1)}\sum_{m,q,v=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{r=0}^{m_1}\frac{(-1)^j\binom{n-i}{j}}{\Gamma(k)^r\alpha^{\tau(kr+v)}}\,c_{r,v}\,w(k,p,m,q)\,\rho_{r,i+j-1}(p)\\ &\times \frac{\alpha^{s+\tau(kr+v)}\Gamma(k(m+1)+q+[s+\tau(kr+v)]/\tau)}{\Gamma(k(m+1)+q)}.\end{aligned}$$

5.3 Estimação de máxima verossimilhança

Os parâmetros da distribuição GGG são estimados por meio do método de máxima verossimilhança a partir de uma amostra. Seja $t_1, \ldots, t_n$ uma amostra aleatória de tamanho n com distribuição GGG(α, τ, k, p). O logaritmo da função de verossimilhança

para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \tau, k, p)^T$, com função densidade de probabilidade (75) é dado por:

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\theta}) &= n\log[\tau(1-p)] - n\log[\alpha\,\Gamma(k)] + (\tau k - 1)\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\tau} \\ &\quad -2\sum_{i=1}^{n}\log\left\{1 - p\Big[1 - \gamma_1\Big(k, \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\tau}\Big)\Big]\right\}. \end{aligned} \tag{102}$$

As derivadas de primeira ordem de (102) em relação aos parâmetros em $\boldsymbol{\theta}$ são dadas por:

$$\begin{aligned} U_\alpha(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{n\tau k}{\alpha} + \frac{\tau}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} u_i + \frac{2\tau p}{\alpha\Gamma(k)}\sum_{i=1}^{n} u_i^k g_i \exp(-u_i), \\ U_\tau(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{n}{\tau} + \frac{k}{\tau}\sum_{i=1}^{n}\log(u_i) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n} u_i\log(u_i) - \frac{2p}{\tau\Gamma(k)}\sum_{i=1}^{n} u_i^k\log(u_i)\exp(-u_i), \\ U_k(\boldsymbol{\theta}) &= -n\psi(k) + \sum_{i=1}^{n}\log(u_i) + 2p\sum_{i=1}^{n} g_i\left[\psi(k)\gamma_1(k,u_i) - \omega_i\right], \\ U_p(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{n}{(1-p)} - 2\sum_{i=1}^{n} g_i q_i, \end{aligned}$$

em que,

$$u_i = \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\tau}, \quad q_i = [-1 + \gamma_1(k,u_i)], \quad g_i = \frac{1}{\{1 - p[1 - \gamma_1(k,u_i)]\}}, \quad \omega_i = \frac{[\dot{\gamma}(k,u_i)]_k}{\Gamma(k)},$$

$$[\dot{\gamma}(k,u_i)]_k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}J(u_i, k+n-1, 1),$$

$\psi(.)$ é a função digama e $J(u_i, k+n-1, 1)$ é definido no Apêndice D.

Consequentemente, o estimador de máxima verossimilhança (EMV) $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ é obtido numericamente a partir das equações não lineares,

$$U_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = U_\tau(\boldsymbol{\theta}) = U_k(\boldsymbol{\theta}) = U_p(\boldsymbol{\theta}) = 0.$$

Assim, sob certas condições de regularidade, a distribuição assintótica dos EMV é dada por $(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$ é $N_4(0, \ddot{L}(\boldsymbol{\theta})^{-1})$, em que $\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação observada, obtida de:

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{\alpha\alpha} & \mathbf{L}_{\alpha\tau} & \mathbf{L}_{\alpha k} & \mathbf{L}_{\alpha p} \\ . & \mathbf{L}_{\tau\tau} & \mathbf{L}_{\tau k} & \mathbf{L}_{\tau p} \\ . & . & \mathbf{L}_{kk} & \mathbf{L}_{kp} \\ . & . & . & \mathbf{L}_{pp} \end{pmatrix},$$

cujos elementos são apresentados no Apêndice D.

O teste da razão de verossimilhança (TRV) é útil para comparar a distribuição GGG com alguns de seus sub-modelos. Por exemplo, o teste de $H_0 : k = 1$ versus $H_1 : H_0$ *não é verdade*, é equivalente a comparar a distribuição GGG com a distribuição Weibull geométrica para o qual a estatística w é dada por:

$$w = 2\big[\ell(\widehat{\alpha}, \widehat{\tau}, \widehat{k}, \widehat{p}) - \ell(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\tau}, 1, \widetilde{p})\big],$$

em que $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\tau}$, $\widehat{k}$ e $\widehat{p}$ são os estimadores de máxima verossimilhança sob H_1 e $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\tau}$ e $\widetilde{p}$ são os estimadores sobre H_0.

5.4 Análise Bayesiana

Considere a distribuição GGG (75) e a função de verossimilhança (102) para os parâmetros α, τ, k e p. Para uma análise bayesiana, assume-se a seguinte densidade conjunta *a priori*, dada por:

$$\pi(\alpha, \tau, k, p) \propto \pi(\alpha) \times \pi(\tau) \times \pi(k) \times \pi(p),$$

em que $\alpha \sim \Gamma(a_1, b_1)$, $\tau \sim \Gamma(a_2, b_2)$, $k \sim \Gamma(a_3, b_3)$ e $p \sim \mathrm{Be}(a, b)$, sendo $\Gamma(a_i, b_i)$ a distribuição gama com média a_i/b_i, variância a_i/b_i^2 e função densidade de probabilidade dada por:

$$f(\upsilon; a_i, b_i) = \frac{b_i^{a_i} \upsilon^{a_i - 1} \exp(-\upsilon b_i)}{\Gamma(a_i)},$$

em que $\upsilon > 0$, $a_i > 0$ e $b_i > 0$. $\mathrm{Be}(a, b)$ denota a distribuição beta com média $\frac{a}{a+b}$, variância $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$ e função densidade de probabilidade dada por:

$$f(\upsilon; a, b) = \frac{1}{\mathrm{B}(a, b)} \upsilon^{a-1} (1 - \upsilon)^{b-1},$$

em que $\upsilon \in (0, 1)$, $a > 0$ e $b > 0$. Todos os hiperparâmetros são especificados. Assumindo independência entre os parâmetros α, τ, k e p, a distribuição conjunta *a posteriori* para α, τ, k e p é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \tau, k, p|t) \;\; &\propto \;\; \Big[\frac{\tau(1-p)}{\alpha\,\Gamma(k)}\Big]^n \exp\Big[-\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big] \prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau k-1}\Big\{1 - p\Big(1 - \gamma_1\Big[k, \Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big)\Big\}^{-2} \\ &\times \;\; \pi(\alpha, \tau, k, p). \end{aligned} \tag{103}$$

As densidades marginais *a posteriori* dos parâmetros α, τ, k e p não são facilmente obtidas. Isso porque a integração da densidade *a posteriori* conjunta (103) é muito

complexa. Uma alternativa para situações desse tipo é o uso do algoritmo Metropolis-Hasting, descrito na sub-seção 2.5.2.

O algoritmo Metropolis-Hasting permite simular observações de distribuições a partir das densidades condicionais *a posteriori*. Assim, para o uso de tal algoritmo consideram-se as seguintes condicionais *a posteriori* completas para os parâmetros α, τ, k e p:

$$\pi(\alpha|t,\tau,k,p) \;\propto\; \alpha^{-n\tau k}\exp\Big[-\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\prod_{i=1}^{n}\Big\{1-p\Big(1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big)\Big\}^{-2}\times\pi(\alpha)$$

$$\pi(\tau|t,\alpha,k,p) \;\propto\; \tau^{n}\exp\Big[-\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau k}\Big\{1-p\Big(1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big)\Big\}^{-2}\times\pi(\tau)$$

$$\pi(k|t,\alpha,\tau,p) \;\propto\; \Gamma(k)^{n}\prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau k}\Big\{1-p\Big(1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big)\Big\}^{-2}\times\pi(k)$$

e

$$\pi(p|t,\alpha,\tau,k) \;\propto\; (1-p)^{n}\prod_{i=1}^{n}\Big\{1-p\Big(1-\gamma_1\Big[k,\Big(\frac{t_i}{\alpha}\Big)^{\tau}\Big]\Big)\Big\}^{-2}\times\pi(p).$$

Para as análises descritivas para os parâmetros do modelo GGG foi utilizado o *software* estatístico R, pacote BOA (*Bayesian Output Analysis*).

5.5 Aplicação: dados de *Nursing Activities Score* (NAS)

Para ilustrar uma aplicação da distribuição GGG, foi considerado um estudo prospectivo, com o objetivo de identificar o tempo médio de assistência de enfermagem necessário para assistir ao paciente adulto, classificado como alta dependência de enfermagem (ADE). Participaram da pesquisa todos os pacientes classificados como ADE, internados na Unidade de Clínica Médica do Hospital Universitário da USP por no mínimo 24 horas, durante o período de coleta de dados. Para a identificação dos pacientes de ADE foi utilizado o Instrumento de Classificação de Pacientes (ICP) de Fugulin, Gaidzinski e Kurcgant (2008). O tempo médio de cuidado necessário para assistir o paciente de ADE foi calculado por meio da aplicação de uma equação matemática disponível na literatura, a partir da identificação do valor médio do *Nursing Activities Score* (NAS); para maiores detalhes, veja-se por exemplo, Tsukamoto (2010). Os dados foram coletados das evoluções e prescrições de enfermagem e das condições de cada paciente, registradas nos impressos

que compõem seu prontuário. Foram identificados $n = 97$ pacientes classificados como ADE, no período de 06 de maio a 21 de julho e 15 a 31 de agosto de 2009. Nesse caso, a variável em estudo é denominado de NAS.

Na Tabela 12, podem ser vistas as EMVs (e os correspondentes erros-padrão que estão entre parênteses) dos parâmetros e os valores das estatísticas de alguns modelos, Weibull geométrica (WG) e Weibull. Os resultados da Tabela 12 indicam que o modelo GGG tem os menores valores de AIC, BIC e CAIC entre os modelos ajustados. Pode, portanto, ser escolhido como o modelo mais adequado.

Tabela 12 - EMVs dos parâmetros dos modelos GGG, WG e Weibull para os dados de NAS, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores das estatísticas AIC, BIC e CAIC

Modelo	α	τ	k	p	AIC	CAIC	BIC
GGG	10,2657	1,7458	22,8115	0,9354	621,7	622,1	632,0
	(2,6030)	(0,4926)	(8,2342)	(0,1894)			
WG	76,7127	15,2970	1	0,9984	625,1	625,3	632,8
	(16,0186)	(1,3081)	(-)	(0,0053)			
Weibull	53,9774	7,5264	1	-	658,1	658,2	663,3
	(0,7748)	(0,5172)	(-)	-			

O TRV para testar a hipótese H_0: $k = 1$ *versus* H_1: H_0 é falso, isto é, para comparar os modelos GGG e WG, é dado por $w = 2\{-306,85 - (-309,55)\} = 5,4$ (valor p=0,0201), o que indica que o modelo GGG é mais adequado do que o modelo WG.

Além disso, as funções de sobrevivência e densidade de probabilidade estimadas para os diferentes modelos aos dados de NAS são representadas graficamente na Figura 21. Dessa figura, observa-se que para as diferentes distribuições ajustadas aos dados de NAS a distribuição GGG apresenta um ajuste mais adequado se comparado aos outros modelos probabilísticos.

Considerando agora uma análise bayesiana, foram adotadas as seguintes distribuições *a priori* pouco informativas: $\alpha \sim \Gamma(0,01; 0,01)$, $\tau \sim \Gamma(0,01; 0,01)$, $k \sim \Gamma(0,01; 0,01)$ e $p \sim \text{Be}(0,5; 0,5)$.

Dessa forma, foram geradas duas cadeias paralelas e independentes com tamanho 40.000 para cada parâmetro usando o algoritmo de Metropolis-Hasting, descon-

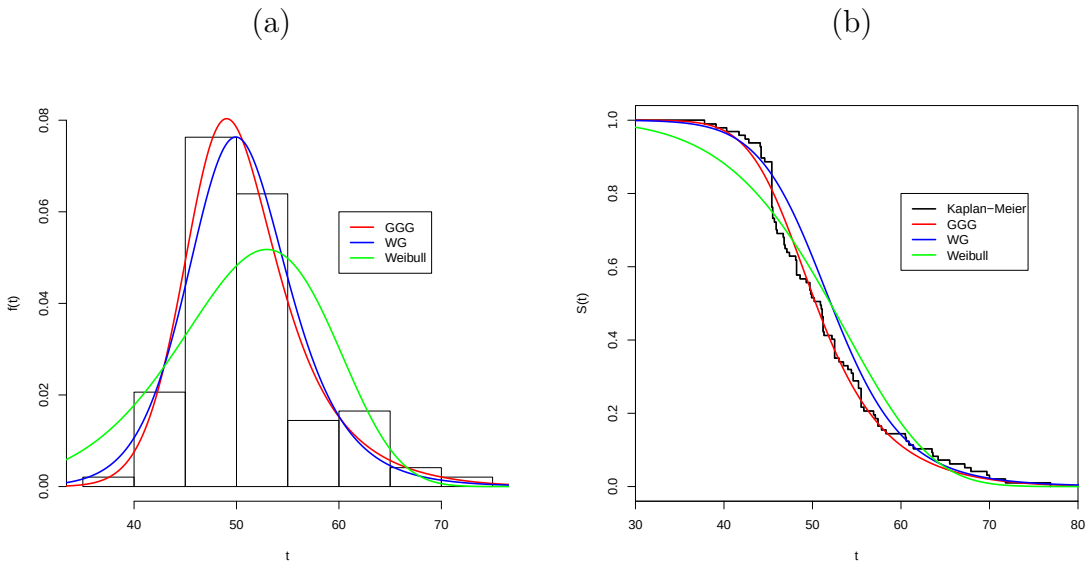

Figura 21 - (a) Densidades estimadas dos modelos para os dados de NAS. (b) Estimativas da função de sobrevivência segundo Kaplan-Meier e segundo os modelos GGG, WG e Weibull para os dados de NAS

siderando as primeiras 4.000 iterações para eliminar o efeito dos valores iniciais. Além disso, considerou-se espaçamento de tamanho 10, para evitar problemas de correlação, obtendo-se uma amostra de tamanho 3.600. Para monitorar a convergência das amostras foi usado o fator de redução da escala $\hat{R}$, desenvolvido por Gelman e Rubin (1992). A Tabela 13 apresenta os sumários *a posteriori* para os parâmetros do modelo GGG, além de mostrar os valores do fator de redução da escala.

Tabela 13 - Sumário *a posteriori* dos parâmetros do modelo GGG para os dados de NAS

Parâmetro	Moda	Desvio padrão	HPD (95%)	$\hat{R}$
α	$10,2673$	$0,3364$	$(9,6551; 10,8970)$	$1,0075$
τ	$1,7447$	$0,2700$	$(1,2270; 2,2753)$	$0,9996$
k	$22,7799$	$0,3284$	$(22,1717; 23,4679)$	$1,0008$
p	$0,9388$	$0,0651$	$(0,7738; 1,9975)$	$1,0019$

Nota-se, que os valores de $\hat{R}$ estão próximos de 1, indicando a convergência das cadeias. Pode-se observar que o valores para a moda *a posteriori* (Tabela 13) são similares aos valores obtidos para o modelo GGG apresentados na Tabela 12. Além

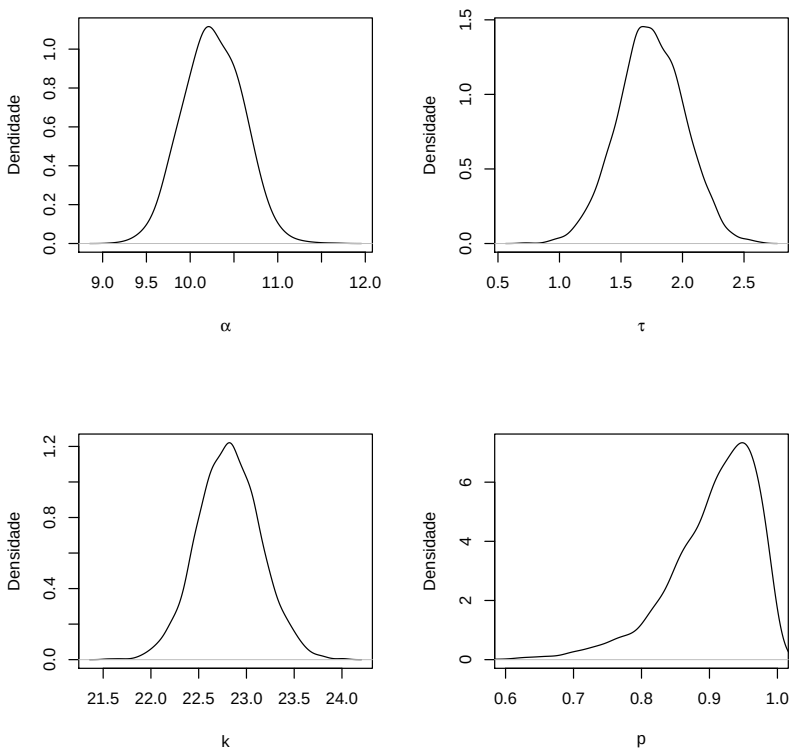

Figura 22 - Densidades marginais *a posteriori* para os parâmetros do modelo GGG para os dados de NAS

disso, a Figura 22 apresenta as densidades marginais *a posteriori* aproximadas pelo histograma, considerando as 3.600 observações amostrais geradas. As densidades marginais apresentadas por meio da Figura 22 sugerem que a distribuição *a posteriori* apresenta uma tendência à simetria para boa parte dos parâmetros.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 Conclusões

Seguindo as ideias de Cordeiro e Castro (2011) e de Adamidis e Loukas (1998), foram propostas duas novas distribuições de probabilidade, as distribuições Kumaraswamy gama generalizada (KumGG) e gama generalizada geométrica (GGG), respectivamente. As novas distribuições são modelos importantes para a análise de dados de sobrevivência por causa da ampla utilização da distribuição gama generalizada (GG) e pelo fato de que a generalização em vigor unifica algumas distribuições conhecidas, dando maior flexibilidade ao ajuste, envolvendo situações mais complexas com dados reais. As distribuições propostas são versáteis para modelar a função risco nas formas crescente, decrescente, unimodal e forma de U. As funções densidade de probabilidade da distribuição KumGG e GGG foram expressas como uma combinação linear de funções densidade de probabilidade da distribuição GG. Calcularam-se os momentos, a função geradora de momentos, os desvios médios, a confiabilidade e a função densidade de probabilidade da estatística de ordem para as distribuições propostas. As estimativas dos parâmetros são abordadas por dois métodos diferentes: o de máxima verossimilhança e o bayesiano. Obteve-se a matriz de informação observada para ambas as distribuições. A utilidade das novas distribuições são ilustradas na análise de conjuntos de dados reais, usando as estatísticas AIC, BIC, CAIC e o teste da razão de verossimilhança, mostrando assim que essas distribuições proporcionam um ajuste mais adequado do que outros sub-modelos.

Além disso, foi proposta uma forma estendida para a distribuição Kumaraswamy gama generalizada, baseada na distribuição gama generalizada proposta por Stacy e Mihram (1965). A nova distribuição Kumaraswamy gama generalizada (KumGGE), acomoda os quatro tipos da função risco, ou seja, forma crescente, decrescente, unimodal e forma de U. A nova distribuição é um modelo importante para a análise de dados de sobrevivência pelo fato de possuir como sub-modelos as distribuições usuais em análise de sobrevivência e as disttribuições inversas, como, por exemplo, a distribuição Weibull inversa, gama inversa, Rayligh inversa, entre outras. A função densidade de probabilidade KumGGE foi expressa como uma combinação linear de funções densidade de probabilidade GG (STACY; MIHRAM, 1965). Calcularam-se os momentos, a função geradora de momentos, os desvios médios, a confiabilidade e a densidade

da estatística de ordem para a distribuição proposta. Foi introduzida a distribuição log-Kumaraswamy gama generalizada estendida (LKumGGE). Calcularam-se os momentos da nova distribuição. Foi desenvolvido o modelo de regressão LKumGGE, que é muito útil para a análise de dados censurados. A estimativa dos parâmetros é abordada por dois métodos diferentes: o de máxima verossimilhança e o bayesiano. A utilidade do modelo de regressão foi ilustrada na análise de um conjunto de dados reais, usando as estatísticas AIC, BIC, CAIC e o teste da razão de verossimilhança, mostrando assim que o modelo de regressão LKumGGE proporciona um ajuste mais adequado quando comparado com seus sub-modelos.

6.2 Pesquisas futuras

Dando continuidade a esta pesquisa, pretende-se desenvolver uma análise de diagnóstico (influência local e análise de resíduo) para o modelo de regressão log-Kumaraswamy gama generalizada estendida.

Outra pesquisa consistirá na proposição de um método de estimação para os parâmetros da distribuição gama generalizada geométrica, para dados com observações censuradas, além de apresentar um modelo de regressão para a distribuição gama generalizada geométrica. Também pode ser introduzida uma análise de diagnóstico (influência local e resíduos) para esse novo modelo de regressão.

REFERÊNCIAS

AARSET, M.V. How to identify bathtub hazard rate. **Transactions on Reliability**, New York, v.36, p.106-108, 1987.

AARTS, R.M. **Lauricella functions**, www.mathworld.wolfram.com/LauricellaFunctions.html. From MathWorld - A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. Acesso em: dez. 2011.

ADAMIDIS, K.; LOUKAS, S. A life time distribution with decreasing failure rate. **Statistics and Probabilidade Letters**, Amsterdam, v.39, p.35-42, 1998.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Boston, v.6, p.716-723, 1974.

ALEXANDER, C.; CORDEIRO, G.M.; ORTEGA, E.M.M.; SARAIBA, J.M. Generalized beta-generated distributions. **ICMA Centre Discussion Papers in Finance**, 2011.

ALI, M.M.; WOO, J.; NADARAJAH, S. Generalized gamma variables with drought application. **Journal of the Korean Statistical Society**, Seul, v.37, p.37-45, 2008.

ALKASASBEH, M.R.; RAQAB, M.Z. Estimation of the generalized logistic distribution parameters: Comparative study. **Statistical Methodology**, Oxford, v.6, p.262-279, 2009.

BAKER, T.B.; PIPER, M.E.; McCARTHY, D.E.; MAJESKIE, M.R.; FIORE, M.C. Addiction motivation reformulated: An effective processing model of negative reinforcement. **Psychological Bulletin**, Washington, v.111, p.33-51, 2004.

BALAKRISHNAN, N.; LENG, M.Y. Order statistics from the type I generalized logistic distribution. **Communications in Statistical - Simulation and Computation**, London, v.17, p.25-50, 1988.

BARRETO-SOUZA, W.; MORAIS, A.L.; CORDEIRO, G.M. The Weibull geometric distribution. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, v.81, p.645-657, 2011.

BARRETO-SOUZA, W.; SANTOS, A.H.S.; CORDEIRO, G.M. The beta generalized exponential distribution. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, v.80, p.159-172, 2010.

BARROS, A.A.A. **Distribuições exponencializadas e estendidas**. 2008. 75p. Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Pernambuco, 2008.

BEKKER, A.; ROUX, J.J. Reliability characteristics of the Maxwell distribution: a Bayes estimation study. **Communications in Statistics, Theory and Methods**, London, v.34, p.2169-2178, 2005.

BRANDON, T.H.; VIDRINE, J.I.; LITVIN, E.B. Relapse and Relapse Prevention. **Annual Review of Psychology**, York, v.3, p.257-84, 2007.

CANCHO, V.G.; BOLFARINE, H.; ACHCAR, J.A. A Bayesian analysis for the exponentiated Weibull distribution. **Journal of Applied Statistical Science**, New York, v.8, p.227-242, 1999.

CANCHO, V.G.; ORTEGA, E.M.M.; BOLFARINE, H. The Exponentiated-Weibull Regression Models with Cure Rate. **Journal of Applied Probability and Statistics**. New York, v.4, p.125-156, 2009.

CARRASCO, J.M.F.; ORTEGA, E.M.M.; CORDEIRO, G.M. A genralized modified Weibull distribution for lifetime modeling. **Computacional Statistics and Data Analysis**, New York, v.53, p.450-462, 2008.

CHIB, S.; GREENBERG, E. Understanding the Metropolis-Hasting algorithm. **The American Statistician**, Washington, v.49, p.326-335, 1995.

COLOSIMO, E.A.; GIOLO, S.R. **Análise de sobrevivência aplicada.** São Paulo: Edgard Blucher, 2006. 370p.

COORAY, K.; ANANDA, M.M.A. A generalization of the half-normal distribution wit applications to lifetime data. **Communication in Statistical - Theory and Methods**, New York, v.37, p.1323-1337, 2008.

CORDEIRO, G.M.; CASTRO, M. A new family of generalized distributions. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, v.81, p.883-898, 2011.

CORDEIRO, G.M.; ORTEGA, E.M.M. SILVA, G. O. The exponentiated generalized gamma distribution with application to lifetime data. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, v.81, p.827-842, 2011.

COX, C. The generalized F distribution: an umbrella for parametric survival analysis. **Statistics in Medicine**, New York, v.27, p.4301-4312, 2008.

COX, D.R.; OAKES, D. **Analysis of survival data**. New York: Chapman and Hall, 1984. 201p.

EHLERS, R.S. **Introdução à inferência bayesiana**, 2007. 68p. Disponível em: <http://leg.ufpr.br/ ehlers/bayes>. Acesso em: dez. 2010.

ELLIOTT, J.; RAWLINGS, J.M.; MARKWELL, P.J.; BARBER, P.J. Survival of cats with naturally occuring chronic renal failure: effect of dietary management. **Journal of Small Animal Practice**, New York, v.41, p.235-242, 2000.

EUGENE, N.; LEE, C.; FAMOYE, F. Beta-Normal distribution and its applications. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, New York, v.31, p.497-512, 2002.

EXTON, H. **Handbook of hypergeometric integrals: theory, applications, tables, computer programs**. New York: Halsted Press. 1978. 500p.

FAMOYE, F.; LEE, C.; OLUMOLADE, O. The beta-Weibull distribution. **Journal of Statistical Theory and Applications**, New York, v.4, p.121-136, 2005.

FAREWELL, V.T.; PRENTICE, R.L. A study of distributional shape in life testing. **Technometrics**, Wisconsin, v.19, p.69-75, 1977.

FUGULIN, F.M.T., GAIDZINSKI, R.R.; KURCGANT, P. Sistema de classificação de pacientes: identificação do perfil assistencial dos pacientes das unidades de internação do HU-USP. **Revista Latino-Americana de Enfermagem**, Ribeirão Preto, V.13, p.72-78, 2005.

GELMAN, A.; RUBIN, D.B. Inference from iterative simulation using multiple sequences. **Statistical Science**, Hayward, v.7, p.457-472, 1992.

GEORGE, E.O.; OJO, M.O. On a generalization of the logistic distribution. **Annals of Statistical Mathematics**, Hayward, v.32, p.161-169, 1980.

GHITANY, M.E.; AL-AWADHI, F.A.; ALKHALFAN, L.A. Marshall-Olkim Extended Lomax Distribution and Its Application to Censored Data. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, New York, v.36, p.1855-1866, 2007.

GUPTA, R.D.; KUNDU, D. Generalized Exponential Distributions. **Australian and New Zealand Journal of Statistics**, Oxford, v.41, p.173-188, 1999.

_____. Exponentiated Exponencial Family: An Anternative to Gamma and Weibull Distributions. **Biometrical Journal**, Berlin, v.43, p.117-130, 2001.

GUPTA, R.C.; GUPTA, P.L.; GUPTA, R.D. Modeling failure time data by Lehman alternatives. **Communications in Statistics - Theory an Methods**, New York, v.27, p.887-904, 1998.

GUSMÃO, F.R.S.; ORTEGA, E.M.M.; CORDEIRO, G. M. The generalized inverse Weibull distribution. **Statistical Papers**, New York, v.52, p.591-619, 2011.

HASHIMOTO, E.M.; ORTEGA, E.M.M.; CANCHO, V.G.; CORDEIRO, G.M. The log-exponentiated Weibull regression model for interval-censored data. **Computational Statistics and Data Analysis**, London, v.54, p.1017-1035, 2010.

HASTINGS, W.K. Monte carlo sampling methods using Markov Chains and theirs applications. **Biometrika**, London, v.57, p.97-109, 1970.

HOSMER Jr., D.W.; LEMESHOW, S. **Applied survival analysis: regression modeling of time to event data**. New York: John Wiley, 1999. 386p.

KALBFLEISH, J.D.; PRENTICE, R.L. **The statistical analysis of failure time data**. New York: John Wiley, 2002. 439p.

KALIVAS, P.W.; VOLKOW, N.D. The neural basis of addiction: a pathology of motivation and choice. **American Journal Psychiatric**, New York, v.162, p.1403-1413, 2005.

KAPLAN, E.L.; MEIER, P. Nonparametric estimation from incomplete observations. **Journal of the American Statistical Association**, Washington, v.53, p.557-481, 1958.

KOOB, G.F.; LE MOAL, M. Drug abuse: hedonic homeostatic dysregulation. **Science**, New York, v.278, p.52-58, 1997.

KUMARASWAMY, P. A generalized probability density function for double-bounded random processes. **Journal of Hydrology**, New York, v.46, p.79-88, 1980.

KUNDU, D.; RAQAB, M.Z. Generalized Rayleigh distribution: different methods of estimation. **Computational Statistics and Data Analysis**, Amsterdam, v.49, p.187-200, 2005.

LAWLESS, J.F. Inference in the generalized gamma and log-gamma distributions. **Technometrics**, Wisconsin, v.22, p.409-419, 1980.

_____. **Statistical models and methods for lifetime data**. 2nd ed. New York: John Wiley, 2003. 630p.

LIANG, H.; ZOU, G. Improved AIC selection strategy for survival analysis. **Computational Statistics and Data Analysis**, New York, v.52, p.2538-2548, 2007.

LINHART, H.; ZUCCHINI, W. **Model selection**. New York: John Wiley, 1986. 300p.

MALHOTRA, J.; SHARMA, A.K.; KALER, R.S. On the performance analysis of wireless receiver using generalized-gamma fading model. **Annals of Telecommunications**, Paris, v.64, p.147-153, 2009.

MARLATT, G.A. Integrating contingency management with relapse prevention skills: comment on Silverman et al. 2001. **Experimental and Clinical Psychopharmacology**, Washington, v.9, p.33-34, 2001.

MARSHALL, A.W.; OLKIN, I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with aplication to the esponential and Weibull families. **Biometrika**, London, v.3, p.641-652, 1997.

MILLER, W.R.; WESTERBERG, V.S.; HARRIS, R.J.; TONIGAN, J.S. What predicts relapse? Prospective testing of antecedent models. **Addiction**, New York, v.91, p.155-72, 1996.

MUDHOLKAR, G.S.; SRIVASTAVA, D.K.; FREIMER, M. The exponentiated Weibull family: a reanalysis of the bus-motor-failure data. **Technometrics**, Washington, v.37, p.436-445, 1995.

MUDHOLKAR, G.S.; SRIVASTAVA, D.K.; KOLLIA, G.D. A generalization of the Weibull distribution with application to the analysis of survival data. **Journal of American Statistical Association**, New York, v.91, p.1575-1583, 1996.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The beta Gumbel distribution. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v.10, p.323-332, 2004.

_____. The beta exponential distribution. **Reliability Engineering and System Safety**, Barking, v.91, p.689-697, 2005.

NADARAJAH, S. The exponential Gumbel distribution with climate application. **Environmetrics**, New York, v.17, p.13-23, 2006.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The exponencial type distributions. **Acta Applicandae Mathematicae: An International Survey Journal on Applying Mathematics and Mathematical Applications**, Amsterdam, v.92, p.97-111, 2006.

NADARAJAH, S.; GUPTA, A.K. A generalized gamma distribution with application to drought data. **Mathematics and Computers in Simulation**, Amsterdam, v.74, p.1-7, 2007.

NADARAJAH, S. On the use of the generalized gamma distribution. **International Journal of Electronic**, New York, v.95, p.1029-1032, 2008a.

_____. Explicit expressions for moments of order statistics. **Statistics and Probability Letters**, Amsterdam, v.78, p.196-205, 2008b.

OJO, M.O.; OLAPADE, A.K. On the generalized logistic and log-logistic distributions. **Kragujevac Journal Mathematics**, Ile-Ife, v.25, p.65-73, 2003.

ORTEGA, E.M.M.; CANCHO, V.G.; BOLFARINE, H. Influence diagnostics in exponentiated-Weibull regression models with censored data. **Statistics and Operations Research Transactions**, Catalunya, v.30, p.172-192, 2006.

ORTEGA, E.M.M.; PAULA, G.A.; BOLFARINE, H. Deviance residuals in generalized log-gamma regression models with censored observations. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, v.78, p.747-764, 2008.

ORTEGA, E.M.M.; CANCHO, V.G.; PAULA, G. A. Generalized log-gamma regression models with cure fraction. **Lifetime Data Analysis**, New York, v.15, p.79-106, 2009.

ORTEGA, E.M.M.; CORDEIRO, G.M.; PASCOA, M.A.R.; COUTO, E.V. The log-exponentiated generalized gamma regression model for censored data. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, v.81, p.827-842, 2011.

PASCOA, M.A.R. **Intervalos de credibilidade para a razão de riscos do modelo de Cox, considerando estimativas pontuais bootstrap**. 2008. 71p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2008.

PAULINO, C.D.; TURKMAN, A.A.; MURTEIRA, B. **Estatística bayesiana**, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003. 446p.

PERDONÁ, G.S.C. **Modelos de riscos aplicados à análise de sobrevivência**, 2006. 148p. Tese (Doutorado em Ciências - Ciências de Computação e Matemática Computacional) - Instituto de Ciências Matemática e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

PESCIM, R.R.; DEMÉTRIO, C.G.B.; CORDEIRO, G.M.; ORTEGA, E.M.M.; URBANO, M. R. The beta generalized half-normal distribuiton. **Computacional Statistics and Data Analysis**, New York, v.54, p.945-957, 2010.

PRENTICE, R.L. A log-gamma model and its maximum likelihood estimation. **Biometrica**, London, v.61, p.539-544, 1974.

PRUDNIKOV, A.P.; BRYCHKOV, Y.A.; MARICHEV, O.I. **Integrals and series**. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1986. p.527.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R**: a language and environment for statistical computing. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. Disponível em: <http://www.R-project.org>. Acesso em: 20 jan. 2011.

RAO, G.S.; GHITANY, M.E.; KANTAM, R.R.L. Reliability test plans for Marshall-Olkim extended exponential distribution. **Applied Mathematical Sciences**, New York, v.3, p.2745-2755, 2009.

RODRIGUES, C.; CORDEIRO, G.M.; DEMÉTRIO, C.G.B; ORTEGA, E.M.M. The Weibull negative binomial distribution. **Advances and Applications in Statistics**, Allahabad, v.22, p.25-55, 2011.

SANTANA, T.V.F. **As distribuições Kumaraswamy-log-logística e Kumaraswamy-logística**. 2010. 103p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agronômica) - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2010.

SAS Institute inc. **SAS 9.1**. Cary, 2004.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **Annals of Statistics**, Philadelphia, v.6, p.461-464, 1978.

SHANKAR, P.M.; DUMANE, V.A.; REID, J.M.; GENIS, V.; FORSBERG, F.; PICCOLI, C.W.; GOLDBERG, B.B. Classification of ultrasonic b-mode images of breast masses using Nakagami distribution. **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control**, Philadelphia, v.48, p.569-580, 2001.

SILVA, A.N.F. **Estudo evolutivo das crianças expostas ao HIV e notificadas pelo núcleo de vigilância epidemiológica do HCFMRP-USP**. 2004. 65p. Dissertação (Mestrado em Saúde na Comunidade) - Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2004.

SILVA, G.O. **Modelos de regressão quando a função de taxa de falha não é monótona e o modelo probabilístico beta Weibull modificada**. 2009. 207p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica) - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2009.

SILVA, G.O.; ORTEGA, E.M.M.; CORDEIRO, G.M. The beta modified Weibull distribution. **Lifetime Data Analysis**, New York, v.16, p.409-430, 2010.

SILVA, G.O.; ORTEGA, E.M.M.; CANCHO, V.G.; BARRETO, M.L. Log-Burr XII regression models with censored Data. **Computational Statistics and Data Analysis**, New York, v.52, p.3820-3842, 2008.

STACY, E.W. A generalization of the gamma distribution. **Annals of Mathematical Statistics**, Michigan, v.33, p.1187-1192, 1962.

STACY, E.W.; MIHRAM, G. A. Parameter estimation for a generalized gamma distribution. **Technometrics**, New York, v.7, p.349-358, 1965.

THOMAS, A.; JOSE, K.K. Bivariate semi-Pareto minification processes. **Metrika**, London, v.59, p.305-313, 2004.

TROTT, M. **The mathematica guidebook for symbolics**. New York: Springer, 2006. 1 DVD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).

TSUKAMOTO, R. **Tempo médio de cuidado ao paciente de alta dependência de enfermagem segundo o nursing activities score (NAS)**. 2010. 107p. Dissertação (Gerenciamento em enfermagem) - Escola de enfermagem da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

WANG, F.K. A new model with bathtub-shaped failure rate using an additive Burr XII distribution. **Reliability Engineering and System Safety**, Barking, v.70, p.305-312, 2000.

WRIGHT, E.M. The asymptotic expansion of the generalized Bessel function. **Proccedings of the London Mathematical Society**, London, v.38, p.257-270, 1935.

ZHANG, T.; XIE, M. Failure data analysis with extended Weibull distribution. **Communications in Statistical - Simulation and Computation**, London, v.36, p.579-592, 2007.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Uma expansão para $\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{\lambda-1}$ para todo $\lambda > 0$, um número real e não-inteiro, pode ser escrita como:

$$\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{\lambda-1} = \left(1-\left\{1-\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{\lambda-1} = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\lambda-1}{j}(-1)^j\left\{1-\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^j,$$

que sempre converge para $0 < \gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right] < 1$. Por isso,

$$\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{\lambda-1} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{j}(-1)^{j+m}\binom{\lambda-1}{j}\binom{j}{m}\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^m. \tag{104}$$

Substituindo $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{j}$ por $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty}$ obtém-se:

$$\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{\lambda-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty}(-1)^{j+m}\binom{\lambda-1}{j}\binom{j}{m}\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^m.$$

Então,

$$\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{\lambda-1} = \sum_{m=0}^{\infty}s_m(\lambda)\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^m, \tag{105}$$

em que,

$$s_m(\lambda) = \sum_{j=m}^{\infty}(-1)^{j+m}\binom{\lambda-1}{j}\binom{j}{m}. \tag{106}$$

Usando agora uma expansão em série para a relação da função gama incompleta dada por:

$$\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right] = \frac{1}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau k}\sum_{q=0}^{\infty}\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^q\frac{1}{(k+q)q!}. \tag{107}$$

Pela aplicação de uma equação na seção 0.314 de Gradshteyn e Ryzhik (2000) para séries de potências elevadas a potências, obtém-se para qualquer inteiro positivo m,

$$\left[\sum_{q=0}^{\infty}a_q\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau q}\right]^m = \sum_{q=0}^{\infty}c_{m,q}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau q}, \tag{108}$$

em que os coeficientes $c_{m,q}$ (para $q = 1, 2, \cdots$) satisfazem a relação de recorrência

$$c_{m,q} = (qa_0)^{-1}\sum_{r=1}^{q}(mr-q+r)\,a_r\,c_{m,q-r}, \tag{109}$$

em que $c_{m,0} = a_0^m$ e $a_q = (-1)^q\left[(k+q)q!\right]^{-1}$. O coeficiente $c_{m,q}$ pode ser calculado a partir de $c_{q,0},\ldots,c_{q,d-1}$, também pode ser escrito explicitamente em função das quantidades $a_0,\ldots,a_q$ usando *software* algébricos como Maple e Mathematica. Aqui, $c_{m,0} = k^{-m}$, $c_{m,1} = -m[(k+1)k^{m-1}]^{-1}$, $c_{m,2} = m[2(k+2)k^{m-1}]^{-1} + m(m-1)[2(k+1)^2k^{m-2}]^{-1}$, etc. Além disso, usando a equação (108), tem-se:

$$\gamma_1\left[k,\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^m = \frac{1}{\Gamma(k)^m}\sum_{q=0}^{\infty}c_{m,q}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau(km+q)}, \tag{110}$$

em que os coeficientes $c_{m,q}$ são obtidos pela equação (109).

APÊNDICE B

Após a diferenciação de (44), os elementos da matriz de informação observada $J(\boldsymbol{\theta})$ para os parâmetros $(\alpha, \tau, k, \lambda, \varphi)$ são:

$$
\begin{aligned}
J_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{r\tau k}{\alpha^2} - \frac{\tau(1-\tau)}{\alpha^2}\sum_{i\in F} u_i - \frac{\tau}{\alpha^2}\sum_{i\in F} v_i s_i \left(-1 + \frac{\tau}{\gamma_1(k,u_i)}\{\gamma_1(k,u_i)[-k+u_i] + v_i\}\right) \\
&+ \frac{\lambda\tau(\varphi-1)}{\alpha^2}\sum_{i\in F} v_i p_i \left(-1 + \frac{\tau}{\omega_i}\{\omega_i(-k+u_i-v_i s_i) - \lambda v_i[\gamma_1(k,u_i)]^2\}\right) \\
&+ \frac{\lambda\tau\varphi}{\alpha^2}\sum_{i\in F} v_i p_i \left(-1 + \frac{\tau}{\omega_i}\{\omega_i(-k+u_i-v_i s_i) - \lambda v_i[\gamma_1(k,u_i)]^2\}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{\alpha\tau}(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{rk}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\sum_{i\in F} u_i\,[1+\log(u_i)] - \frac{1}{\alpha}\sum_{i\in F} v_i s_i \left(1 + \frac{\log(u_i)}{\gamma_1(k,u_i)}\{\gamma_1(k,u_i)[k-u_i] - v_i\}\right) \\
&+ \frac{\lambda(\varphi-1)}{\alpha}\sum_{i\in F} v_i p_i \left(1 + \frac{\log(u_i)}{\omega_i}\left\{\omega_i(k-u_i+v_i p_i) + \lambda v_i[\gamma_1(k,u_i)]^2\right\}\right) \\
&+ \frac{\lambda}{\alpha}\sum_{i\in C} v_i p_i \left(1 + \frac{\log(u_i)}{\omega_i}\left\{\omega_i(k-u_i+v_i p_i) + \lambda v_i[\gamma_1(k,u_i)]^2\right\}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{\alpha k}(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{r\tau}{\alpha} - \frac{\tau}{\alpha}\sum_{i\in F} v_i s_i \left[\log(u_i) - \frac{q_i}{\gamma_1(k,u_i)}\right] + \frac{\lambda\tau(\varphi-1)}{\alpha}\sum_{i\in F} v_i p_i \\
&\left(-\psi(k) + \frac{1}{\omega_i}\left(\omega_i\{\log(u_i) + s_i[-\psi(k)\gamma_1(k,u_i) + q_i]\}\right) + \{\lambda\omega_i p_i[-\psi(k)\gamma_1(k,u_i) + q_i]\}\right) \\
&+ \frac{\lambda\tau\varphi}{\alpha}\sum_{i\in C} v_i p_i \Bigg(-\psi(k) + \frac{1}{\omega_i}\left(\omega_i\{\log(u_i) + s_i[-\psi(k)\gamma_1(k,u_i) + q_i]\}\right) \\
&+ \{\lambda\omega_i p_i[-\psi(k)\gamma_1(k,u_i) + q_i]\}\Bigg),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{\alpha\lambda}(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{\tau}{\alpha}\sum_{i\in F}\frac{v_i}{\gamma_1(k,u_i)} + \frac{\tau(\varphi-1)}{\alpha}\sum_{i\in F} v_i p_i \left(1 + \lambda b_i\left\{\omega_i + [\gamma_1(k,u_i)]^\lambda\right\}\right) \\
&+ \frac{\tau\varphi}{\alpha}\sum_{i\in C} v_i p_i \left(1 + \lambda b_i\left\{\omega_i + [\gamma_1(k,u_i)]^\lambda\right\}\right),
\end{aligned}
$$

$$
J_{\alpha\varphi}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\lambda\tau}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} v_i p_i, \quad J_{\tau\varphi}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\lambda}{\tau}\sum_{i=1}^{n} v_i p_i \log(u_i),
$$

$$
\begin{aligned}
J_{\tau\tau}(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{r}{\tau^2} - \frac{1}{\tau^2}\sum_{i\in F} u_i[\log(u_i)]^2 + \frac{1}{\tau^2}\sum_{i\in F}\frac{v_i s_i[\log(u_i)]^2}{\gamma_1(k,u_i)}[\gamma_1(k,u_i)(k-u_i) - v_i] \\
&- \frac{\lambda(\varphi-1)}{\tau^2}\sum_{i\in F}\frac{v_i p_i[\log(u_i)]^2}{\omega_i}\{\omega_i[(k-u_i) + v_i s_i] + \lambda v_i[\gamma_1(k,u_i)]^2\} \\
&- \frac{\lambda\varphi}{\tau^2}\sum_{i\in C}\frac{v_i p_i[\log(u_i)]^2}{\omega_i}\{\omega_i[(k-u_i) + v_i s_i] + \lambda v_i[\gamma_1(k,u_i)]^2\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{\tau k}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{\tau}\sum_{i\in F}\log(u_i)+\frac{1}{\tau}\sum_{i\in F}v_i s_i\log(u_i)\left[\log(u_i)-\frac{q_i}{\gamma_1(k,u_i)}\right]-\frac{\lambda(\varphi-1)}{\tau}\\
&\sum_{i\in F}v_i p_i\log(u_i)\left\{-\psi(k)+\log(u_i)+\left[-\psi(k)+\frac{q_i}{\gamma_1(k,u_i)}\right][\lambda-1+\lambda p_i\gamma_1(k,u_i)]\right\}\\
&-\frac{\lambda\varphi}{\tau}\sum_{i\in C}v_i p_i\log(u_i)\left\{-\psi(k)+\log(u_i)+\left[-\psi(k)+\frac{q_i}{\gamma_1(k,u_i)}\right][\lambda-1+\lambda p_i\gamma_1(k,u_i)]\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{\tau\lambda}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{\tau}\sum_{i\in F}\frac{v_i\log(u_i)}{\gamma_1(k,u_i)}-\frac{(\varphi-1)}{\tau}\sum_{i\in F}v_i p_i\log(u_i)\{1+\lambda b_i\omega_i[1+p_i\gamma_1(k,u_i)]\}\\
&-\frac{\varphi}{\tau}\sum_{i\in C}v_i p_i\log(u_i)\{1+\lambda b_i\omega_i[1+p_i\gamma_1(k,u_i)]\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{kk}(\boldsymbol{\theta}) &= -r\lambda\psi'(k)+\frac{1}{\Gamma(k)}\sum_{i\in F}s_i\left\{[\ddot{\gamma}(k,u_i)]_{kk}-\frac{([\dot{\gamma}(k,u_i)]_k)^2}{\gamma_1(k,u_i)}\right\}\\
&+r\lambda(\varphi-1)\sum_{i\in F}p_i\gamma_1(k,u_i)\left\{\psi'(k)+\frac{\lambda\psi(k)}{\gamma_1(k,u_i)}\left[-\frac{\psi(k)\gamma_1(k,u_i)}{\omega_i}+\frac{q_i}{\omega_i}\right]\right\}-\frac{\lambda(\varphi-1)}{\Gamma(k)}\\
&\sum_{i\in F}p_i\left(-\psi(k)\,[\dot{\gamma}(k,u_i)]_k+\left\{q_i(\lambda-1)\left[-\psi(k)\gamma_1(k,u_i)+\frac{q_i}{\gamma_1(k,u_i)}\right]+\frac{[\ddot{\gamma}(k,u_i)]_{kk}}{\omega_i}\right\}\right)\\
&+\lambda\varphi(n-r-1)\sum_{i\in C}p_i\gamma_1(k,u_i)\left\{\psi'(k)+\frac{\lambda\psi(k)}{\gamma_1(k,u_i)}\left[-\frac{\psi(k)\gamma_1(k,u_i)}{\omega_i}+\frac{q_i}{\omega_i}\right]\right\}-\frac{\lambda\varphi}{\Gamma(k)}\\
&\sum_{i\in C}p_i\left(-\psi(k)\,[\dot{\gamma}(k,u_i)]_k+\left\{q_i(\lambda-1)\left[-\psi(k)\gamma_1(k,u_i)+\frac{q_i}{\gamma_1(k,u_i)}\right]+\frac{[\ddot{\gamma}(k,u_i)]_{kk}}{\omega_i}\right\}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{k\lambda}(\boldsymbol{\theta}) &= -r\psi(k)+\sum_{i\in F}\frac{q_i}{\gamma_1(k,u_i)}+r\psi(k)(\varphi-1)\sum_{i\in F}p_i\gamma_1(k,u_i)(1+\lambda b_i)-(\varphi-1)\\
&\sum_{i\in F}p_i q_i(1+\lambda b_i)+\varphi\psi(k)(n-r-1)\sum_{i\in C}p_i\gamma_1(k,u_i)(1+\lambda b_i)-\varphi\sum_{i\in C}p_i q_i(1+\lambda b_i),
\end{aligned}
$$

$$
J_{k\varphi}(\boldsymbol{\theta}) = r\lambda\psi(k)\sum_{i\in F}p_i\gamma_1(k,u_i)+\lambda\psi(k)(n-r-1)\sum_{i\in C}p_i\gamma_1(k,u_i)-\lambda\sum_{i=1}^{n}p_i q_i,
$$

$$
J_{\lambda\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{r}{\lambda^2}-(\varphi-1)\sum_{i\in F}b_i[\gamma_1(k,u_i)]^{\lambda}\log[\gamma_1(k,u_i)]-\varphi\sum_{i\in C}b_i[\gamma_1(k,u_i)]^{\lambda}\log[\gamma_1(k,u_i)],
$$

$$
J_{\lambda\varphi}(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{i=1}^{n}b_i[\gamma_1(k,u_i)]^{\lambda},\quad J_{\varphi\varphi}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{r}{\varphi^2},
$$

em que,

$$
[\dot{\gamma}(k,u_i)]_k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}J(u_i,k+n-1,1),\quad [\ddot{\gamma}(k,u_i)]_{kk} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}J(u_i,k+n-1,2),
$$

$\psi'(.)$ é a derivada da função digama, u_i, g_i, ω_i, v_i, s_i, p_i, q_i e b_i são definidos na seção 3.3. A função $J(.,.,.)$ pode ser calculada a partir da integral dada por Prudnikov et al. (1986, vol 1, seção 2.6.3, integral 1)

$$J(a,p,1) = \int_0^a x^p \log(x)dx = \frac{a^{p+1}}{(p+1)^2}[(p+1)\log(a) - 1].$$

e

$$J(a,p,2) = \int_0^a x^p \log^2(x)dx = \frac{a^{p+1}}{(p+1)^3}\{2 - (p+1)\log(a)[2 - (p+1)\log(a)]\}.$$

APÊNDICE C

Após a diferenciação de (72), os elementos da matriz de informação observada $\ddot{L}(\boldsymbol{\theta})$ para os parâmetros do modelo são:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\sigma,\sigma} \;=\; & \frac{\upsilon}{\sigma^2} - \frac{q^{-1}}{\sigma^2}\sum_{i\in F} z_i\{-2[1-\exp(qz_i)] + qz_i\exp(qz_i)\} - \frac{q^{-1}}{\sigma\Gamma(q^{-2})}\sum_{i\in F} w_i^{q^{-2}-1} z_i \exp(qz_i - w_i) \\
& [\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{-1}\Bigg\{\Bigg(-\frac{2}{\sigma} + z_i\exp(qz_i)\Bigg\{-\frac{q^{-1}(q^{-2}-1)}{\sigma}w_i^{-1} - \frac{z_i}{\sigma} + \frac{q^{-1}}{\Gamma(q^{-1})}w_i^{q^{-2}-1}z_i \\
& \exp(-w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{-1}\Bigg\}\Bigg)\Bigg(\lambda - 1 + \lambda(1-\varphi)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{-1} \\
& + w_i^{q^{-2}-1} z_i \exp(qz_i - w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{-1}\Bigg)\Bigg\} - \frac{q^{-1}}{\sigma^2\Gamma(q^{-2})}\sum_{i\in C} w_i^{q^{-2}-1} z_i \exp(qz_i - w_i) \\
& [\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda-1}\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\left(1-\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\right)^{-1}\Bigg\{-2-q^{-1} \\
& (q^{-2}-1)z_i\exp(qz_i)\Bigg\{q^{-2}-1+z_i+\frac{w_i^{q^{-2}-1}}{\Gamma(q^{-2})}\exp(-w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{-1}\Bigg[\lambda-1-\lambda \\
& [\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{-2}\Bigg(\varphi-1+\varphi\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi} \\
& \left(1-\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\right)^{-1}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\sigma,\lambda} \;=\; & -\frac{q^{-1}}{\sigma\Gamma(q^{-2})}\sum_{i\in F} w_i^{q^{-2}-1} z_i \exp(qz_i - w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{-1}\Bigg\{1+(1-\varphi)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda-1} \\
& \left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{-1}\Bigg[1+\lambda\log[\gamma_1(q^{-2},w_i)]\Bigg(1+[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{-1}\Bigg) \\
& \Bigg]\Bigg\} - \frac{\varphi q^{-1}}{\sigma\Gamma(q^{-2})}\sum_{i\in C} w_i^{q^{-2}-1} z_i \exp(qz_i - w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda-1}\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi-1} \\
& \left(1-\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\right)^{-1}\Bigg\{1+\lambda\log[\gamma_1(q^{-2},w_i)]\Bigg(1+(1-\varphi)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda} \\
& \left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{-1}\Bigg) - \lambda\varphi[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{-1} \\
& \left(1-\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\right)^{-1}\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\sigma,\varphi} \;=\; & \frac{\lambda q^{-1}}{\sigma\Gamma(q^{-2})}\sum_{i\in F} w_i^{q^{-2}-1} z_i \exp(qz_i - w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda-1}\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{-1} - \frac{\lambda q^{-1}}{\sigma\Gamma(q^{-2})} \\
& \sum_{i\in C} w_i^{q^{-2}-1} z_i \exp(qz_i - w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda-1}\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi-1} \\
& \left(1-\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\right)^{-1}\Bigg\{1+\varphi\Bigg(log\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\} + \left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi} \\
& \left(1-\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\right)^{-1}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\sigma,\beta_j} &= -\frac{q}{\sigma^2}\sum_{i\in F} x_{ij}[(1+qz_i)\exp(qz_i)-1] - \frac{q^{-1}}{\sigma^2\Gamma(q^{-2})}\sum_{i\in F} x_{ij}w_i^{q^{-2}-1}z_i\exp(qz_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{-1} \\
&\Big\{\Big[-1+\lambda\Big(1+(1-\varphi)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{-1}\Big)\Big]\Big[-1-q^{-1}(q^{-2}-1)w_i^{-1} \\
&z_i\exp(qz_i)-qz_i\Big(\exp(-w_i)+q^{-2}(q^{-2}-1)w_i^{q^{-2}-1}\exp(qz_i)\Big)+\frac{q^{-1}}{\Gamma(q^{-2})}w_i^{q^{-2}-1}z_i \\
&\exp(qz_i-2w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{-1}\Big] - \frac{q^{-1}}{\Gamma(q^{-2})}w_i^{q^{-2}-1}z_i\exp(qz_i-w_i)\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{-1} \\
&\Big(1+\lambda[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{2\lambda-1}\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{-1}\Big)\Big\} - \frac{\lambda^2\varphi(-q^{-2})}{\sigma^2[\Gamma(q^{-2})]^2}\sum_{i\in C} x_{ij}w_i^{q^{-2}-1} \\
&\exp(qz_i-w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda-1}\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi-2}\Big(1-\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\Big)^{-1} \\
&\Big\{-1+\varphi\Big(1+\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\Big(1-\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\Big)^{-1}\Big)\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\lambda,\lambda} &= -\frac{\upsilon}{\lambda^2} + (1-\varphi)\sum_{i\in F}\Big\{\log[\gamma_1(q^{-2},w_i)]\Big\}^2[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{-1} \\
&\Big\{1+[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{-1}\Big\} + \varphi\sum_{i\in C}\Big\{\log[\gamma_1(q^{-2},w_i)]\Big\}^2[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda} \\
&\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi-1}\Big(1-\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\Big)^{-1}\Big\{1+[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda} \\
&\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{-1}\Big[1-\varphi\Big(1+\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi} \\
&\Big(1-\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\Big)^{-1}\Big)\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\lambda,\varphi} &= -\sum_{i\in F}\log[\gamma_1(q^{-2},w_i)][\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{-1} + \sum_{i\in C}\log[\gamma_1(q^{-2},w_i)] \\
&[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\{1+\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi-1}\Big(1-\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\Big)^{-1}\Big[-1-\varphi \\
&\log\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]\Big\}\Big(1+\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\Big(1-\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\Big)^{-1}\Big)\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\lambda,\beta_j} &= -\frac{q^{-1}}{\sigma\Gamma(q^{-2})}\sum_{i\in F} x_{ij}w_i^{q^{-2}-1}\exp(qz_i-w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{-1}\Big\{1+(1-\varphi)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda} \\
&\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{-1}\Big(1+\log[\gamma_1(q^{-2},w_i)]\Big)\Big\} - \frac{q^{-1}}{\sigma\Gamma(q^{-2})}\sum_{i\in C} x_{ij}w_i^{q^{-2}-1}\exp(qz_i-w_i) \\
&[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda-1}\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi-1}\Big(1-\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\Big)^{-1}\Big\{1+ \\
&\log[\gamma_1(q^{-2},w_i)]\Big[1+\lambda[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{-1}\Big(1-\varphi\Big\{1+ \\
&\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\Big(1-\Big\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\Big\}^{\varphi}\Big)^{-1}\Big\}\Big)\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_{\varphi,\varphi} = -\frac{\upsilon}{\varphi^2} - \sum_{i\in C}\left(\log\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}\right)^2\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\left(1-\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\right)^{-1}$$
$$\left\{1+\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\left(1-\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\right)^{-1}\right\},$$

$$\mathbf{L}_{\beta_j,\beta_s} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i\in F}x_{ij}x_{is}\exp(qz_i) - \frac{q^{-1}}{\sigma^2\Gamma(q^{-2})}\sum_{i\in F}x_{ij}x_{is}w_i^{q^{-2}-1}\exp(qz_i-w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{-1}$$
$$\left\{\left(-q+q^{-1}\exp(qz_i)\left\{-(q^{-2}-1)w_i^{-1}+\frac{w_i^{q^{-2}-1}}{\Gamma(q^{-2})}\exp(-w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{-1}+1\right\}\right)\right.$$
$$\left(-1+\lambda\left\{1+(1-\varphi)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{-1}\right\}\right) - \frac{\lambda q^{-1}}{\Gamma(q^{-2})}w_i^{q^{-2}-1}$$
$$\exp(qz_i-w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda-1}\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{-1}\left(1+[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right.$$
$$\left.\left.\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{-1}\right)\right\} - \frac{\lambda\varphi q^{-1}}{\sigma^2\Gamma(q^{-2})}\sum_{i\in C}x_{ij}x_{is}w_i^{q^{-2}-1}\exp(qz_i-w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda-1}$$
$$\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi-1}\left(1-\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\right)^{-1}\left\{-q+q^{-1}\exp(qz_i)\right.$$
$$\left[-(q^{-2}-1)w_i^{-1}+1+\frac{w_i^{q^{-2}-1}}{\Gamma(q^{-2})}\exp(-w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{-1}\left(1-\lambda\left\{1+[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right.\right.\right.$$
$$\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{-1}\left[1-\varphi\left(1+\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.\left.\left(1-\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\right)^{-1}\right)\right]\right\}\right)\right]\right\},$$

$$\mathbf{L}_{\varphi,\beta_j} = \frac{\lambda q^{-1}}{\sigma\Gamma(q^{-2})}\sum_{i\in F}x_{ij}w_i^{q^{-2}-1}\exp(qz_i-w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda-1}\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{-1}$$
$$-\frac{\lambda q^{-1}}{\sigma\Gamma(q^{-2})}\sum_{i\in C}x_{ij}w_i^{q^{-2}-1}\exp(qz_i-w_i)[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda-1}\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi-1}$$
$$\left(1-\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\right)^{-1}\left\{1+\log\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}\right.$$
$$\left.\left[\varphi\left(1+\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\left(1-\left\{1-[\gamma_1(q^{-2},w_i)]^{\lambda}\right\}^{\varphi}\right)^{-1}\right)\right]\right\},$$

em que, $z_i = (y_i - \mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta})/\sigma$ e $w_i = q^{-2}\exp(qz_i)$.

APÊNDICE D

Após a diferenciação de (102), os elementos da matriz de informação observada $J(\boldsymbol{\theta})$ para os parâmetros (α, τ, k, p) são

$$
\begin{aligned}
J_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{n\tau k}{\alpha^2} - \frac{\tau(1-\tau)}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n} u_i + \frac{2\tau p}{\alpha^2\Gamma(k)}\sum_{i=1}^{n} u_i^k \exp(-u_i) g_i \Big[-(1+\tau k) + \tau u_i \\
&\quad + \frac{\tau}{\Gamma(k)} u_i \exp(-u_i) g_i\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{\alpha\tau}(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{nk}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} u_i[1+\log(u_i)] + \frac{2p}{\alpha\Gamma(k)}\sum_{i=1}^{n} u_i \exp(-u_i) g_i \Big\{1 + \log(u_i)\Big[1 - u_i \\
&\quad - \frac{p u_i^k}{\Gamma(k)} \exp(-u_i) g_i\Big]\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
J_{\alpha k}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n\tau}{\alpha} + \frac{2\tau p}{\alpha\Gamma(k)}\sum_{i=1}^{n} u_i^k \exp(-u_i) g_i(-\psi(k) + \log(u_i) - p g_i[-\psi(k)\gamma_1(k,u_i) + \omega_i]),
$$

$$
J_{\alpha p}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2\tau}{\alpha\Gamma(k)}\sum_{i=1}^{n} u_i^k \exp(-u_i) g_i(1 + p g_i q_i),
$$

$$
J_{\tau\tau}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{\tau^2} - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n} u_i[\log(u_i]^2 - \frac{2p}{\tau\Gamma(k)}\sum_{i=1}^{n} u_i^k[\log(u_i)]^2 \exp(-u_i) g_i\Big[k - u_i - \frac{p u_i^k}{\Gamma(k)}\exp(u_i) g_i\Big],
$$

$$
J_{\tau k}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n}\log(u_i) - \frac{2p}{\tau\Gamma(k)}\sum_{i=1}^{n} u_i^k \log(u_i) g_i\{-\psi(k) + \log(u_i) - p g_i[-\psi(k)\gamma_1(k,u_i) + \omega_i]\},
$$

$$
J_{\tau p}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2}{\tau\Gamma(k)}\sum_{i=1}^{n} u_i^k \log(u_i) \exp(-u_i) g_i(1 + p g_i q_i),
$$

$$
\begin{aligned}
J_{kk}(\boldsymbol{\theta}) &= -n\psi'(k) + 2p\Big\{\sum_{i=1}^{n} g_i(\psi'(k)\gamma_1(k,u_i) + \psi(k) g_i\{[-\psi(k)\gamma_1(k,u_i) + \omega_i][1 + p q_i \\
&\quad - p\gamma_1(k,u_i)]\}) - \sum_{i=1}^{n}\frac{g_i}{\Gamma(k)}\Big(-\psi(k)[\dot{\gamma}(k,u_i)]_k + g_i\{[\ddot{\gamma}(k,u_i)]_{kk}(1+p q_i) - p\Gamma(k)\omega_i \\
&\quad [-\psi(k)\gamma_1(k,u_i) + \omega_i]\}\Big)\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
J_{kp}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n}(g_i - p g_i q_i)[2\psi(k)\gamma_1(k,u_i) - 2\omega_i],
$$

$$
J_{pp}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{(1-p)^2} - 2\sum_{i=1}^{n} -g_i q_i^2,
$$

em que

$$[\dot{\gamma}(k,u_i)]_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} J(u_i, k+n-1, 1), \quad [\ddot{\gamma}(k,u_i)]_{kk} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} J(u_i, k+n-1, 2),$$

$\psi'(.)$ é a derivada da função digama, u_i, g_i, ω_i e q_i seção 5.3. A função $J(.,.,.)$ pode ser calculada a partir da integral dada por Prudnikov et al. (1986, vol 1, seção 2.6.3, integral 1)

$$J(a,p,1) = \int_0^a x^p \log(x) dx = \frac{a^{p+1}}{(p+1)^2}[(p+1)\log(a) - 1].$$

e

$$J(a,p,2) = \int_0^a x^p \log^2(x) dx = \frac{a^{p+1}}{(p+1)^3}\{2 - (p+1)\log(a)[2 - (p+1)\log(a)]\}.$$