

Precificação do Risco de Crédito da Contraparte

Herbert Kimura

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística
Orientador: Prof. Dr. Vladimir Belitsky

São Paulo, 01 março de 2015

Precificação do Risco de Crédito da Contraparte

Esta é a versão original da tese elaborada pelo candidato Herbert Kimura, tal como submetida à Comissão Julgadora.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Vladimir Belitsky (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Anatoli Iambartsev - IME-USP
- Prof. Dr. Jose Afonso Mazzon - FEA-USP
- Prof. Dr. Fernando Pigeard de Almeida Prado - FFCLRP - USP
- Prof. Dr. Leonardo Fernando Cruz Basso - CCSA - MACKENZIE

Resumo

KIMURA, H. **Precificação do Risco de Crédito da Contraparte**. 2015. 90 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

A crise financeira de 2007-2008 que se iniciou com problemas no mercado de empréstimos imobiliários *sub-prime* e se disseminou para mercados de derivativos, evidenciou a necessidade de um melhor entendimento sobre modelagem de gestão de riscos. Em especial, segundo dados do Comitê da Basileia para Supervisão Bancária, exposições ao risco de crédito da contraparte em operações com derivativos foram responsáveis por perdas marcadas a mercado que superaram até mesmo as perdas efetivas em função de inadimplência de tomadores [BCBS \(2009\)](#). Considerando esse contexto, este trabalho tem por objetivo investigar modelos de precificação do risco de crédito da contraparte, mais particularmente, o *CVA* (*Credit Valuation Adjustment*), tipicamente modelado a partir de independência entre componentes de risco de crédito. No entanto, a extensão da crise do mercado de hipotecas *sub-prime* sugere a necessidade de se incorporar mecanismos de dependência dos componentes de risco para que o comportamento de perdas em função do risco de crédito da contraparte possa ser melhor estudado. Nesse trabalho, a dependência é investigada utilizando-se uma abordagem baseada em cópulas. Seguindo o modelo desenvolvido por [Cherubini \(2013\)](#), inicialmente, são analisadas posições comprada e vendida em *swaps* tradicionais de taxas de juros, utilizando cópulas para estudar a dependência entre a exposição e o *default* de uma contraparte. Avançando o estudo de [Cherubini \(2013\)](#), são investigados como diferentes modelos de difusão da taxa de juros impactam o preço de ajuste de operações de *swaps* em função do risco de crédito da contraparte. Para a análise, a partir de dados de mercado de 2005 a 2015 são calibrados parâmetros de níveis de taxas de juros e de volatilidade de taxas de juros, utilizando-se os modelos de não-arbitragem de [Black et al. \(1990\)](#), [Hull e White \(1990\)](#), [Black e Karasinski \(1991\)](#), [Heath et al. \(1992\)](#). Os resultados sugerem que o *CVA* tem um valor relevante para a precificação de derivativos. Mais ainda, não contemplar o *wrong-way risk* pode induzir uma avaliação inadequada da exposição ao risco de crédito da contraparte. Os resultados também sugerem uma sensibilidade do *CVA* à definição da dinâmica de difusão da taxa de juros e dos mecanismos de calibração a partir de dados de mercado. Assim, tanto órgãos reguladores, para definição de capital regulatório, quanto instituições financeiras, para adequado gerenciamento de riscos de crédito, devem estar alertas sobre os diversos desafios de se modelar o *CVA*. Adicionalmente, o trabalho apresenta o cálculo de *CVA* por meio do mecanismo de *PPC* (*Pair Construction Copulas*) ou *vine* cópulas. Tendo em vista que o *CVA* pode ser determinado por três componentes do risco de crédito, *PD* (*Probability of Default*), *LGD* (*Loss Given Default*) e *EAD* (*Exposure at Default*), por meio do uso de cópulas aninhadas, foi possível desenvolver um modelo de avaliação. Esse modelo tem aplicações tanto

para precificação, possibilitando estimativas de ajustes de valor de carteiras em função do risco de crédito da contraparte, quanto para gestão de riscos, permitindo a estimativa de métricas de perda potencial. Usando dados empíricos de *PD-LGD* e argumentos teóricos para *PD-EAD* e *LGD-EAD*, foram construídas *vine* cópulas para a descrição do comportamento bivariado dos componentes do risco de crédito. Aplicou-se o algoritmo descrito em [Aas et al. \(2009\)](#) para a geração de valores para o cálculo de *CVA*, identificando-se variações relevantes, que têm relação com os modelos de cópulas escolhidos e os dados empíricos de entrada para estimação de parâmetros. O estudo mostra que a subestimação do risco pode ser substancial na existência de *wrong-way risk*.

Palavras-chave: Risco de crédito, Risco de crédito da contraparte, *Credit Value Adjustment*, Dependência de componentes de risco de crédito, Precificação de *swaps*.

Abstract

KIMURA, H. **Pricing Counterparty Credit Risk**. 2015. 90 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

The financial crisis of 2007-2008 that began with problems in the sub-prime home loans market and spread to the derivatives markets highlighted the need for a better understanding of risk management modeling. In particular, according to the Basel Committee on Banking Supervision, exposure to counterparty credit risk on derivatives accounted for marked to market losses that surpassed even the actual losses due to borrowers default [BCBS \(2009\)](#). In this context, this study aims to investigate pricing models of counterparty credit risk, more specifically, the *CVA* (Credit Valuation Adjustment), which is typically modeled based on independence among credit risk components. However, the extent of sub-prime crisis suggests the need to incorporate dependency mechanisms of risk components, in order to better study losses due to the behavior of the counterparty credit risk. In this work, the dependence is investigated using an approach based on copulas. Following the model developed by [Cherubini \(2013\)](#), we initially analyze long and short positions in plain vanilla interest rates swaps, using copula to study the link between the exposure at default and the instant of default of a counterparty. Advancing the study of [Cherubini \(2013\)](#), we investigate how different interest rate diffusion models impact the adjusted price of swaps due to the counterparty credit risk. For this analysis, we use market data from 2005 to 2015 to calibrate parameters related to interest rates term structure and to volatility of interest rates, taking into consideration no-arbitrage models of [Black *et al.* \(1990\)](#), [Hull e White \(1990\)](#), [Black e Karasinski \(1991\)](#), [Heath *et al.* \(1992\)](#). Results suggest that the *CVA* has an important value for the pricing of derivatives. Moreover, not considering wrong-way risk can induce an inadequate assessment of exposure to counterparty credit. The results also suggest a sensitivity of *CVA* to the definition of the dynamics of interest rates and of the calibration mechanisms from market data. Therefore, both regulators, regarding the definition of regulatory capital, as financial institutions, regarding a proper management of credit risk, should be aware of the various challenges of modeling *CVA*. In addition, the study also describes the *CVA* calculation through mechanism of *PPC* (*Pair Construction Copulas*) or *vine* copulas. Considering that the *CVA* can be determined by three components of credit risk, *PD* (*Probability of Default*), *LGD* (*Loss Given Default*) and *EAD* (*Exposure at Default*), through the use of nested copulas, it was possible to develop an evaluation model. This model has applications both in pricing, enabling estimates of portfolio value adjustments due to counterparty credit risk, and for risk management, allowing the estimation of potential loss metrics. Using empirical data on *PD-LGD* and theoretical arguments to *PD-EAD* and *LGD-EAD*, we build vine copulas to the description the bivariate behavior of the components of credit risk. We applied algorithm

described by [Aas et al. \(2009\)](#) to generate values for the calculation of *CVA*, identifying relevant variations, which are related to the chosen copula models and the input empirical data. Compared to the traditional mechanism of independence between the components of credit risk, the study shows that the underestimation of risk can be substantial in the presence of *wrong-way risk*.

Keywords: Credit risk, Counterparty Credit Risk, Credit Value Adjustment, Dependency of credit risk components, Pricing swaps.

Sumário

Lista de Abreviaturas	vii
Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Fundamentos de risco de crédito da contraparte	5
2.1 Definição de risco de crédito de empréstimos e risco de crédito da contraparte	5
2.2 Definição de <i>wrong-way risk</i> e <i>right-way risk</i>	9
3 Componentes e métricas associadas ao <i>CCR</i>	13
3.1 Considerações iniciais	13
3.2 Métricas de exposição e de ajustes	14
3.2.1 Métricas de valor mercado-a-mercado	14
3.2.2 Métricas de exposição ao risco de crédito da contraparte	16
4 Conceito de <i>Credit Value Adjustment</i>	25
4.1 Considerações Iniciais	25
4.2 Modelo simplificado de <i>CVA</i>	26
4.2.1 <i>CVA</i> unilateral	26
4.2.2 <i>CVA</i> bilateral ou <i>BCVA</i>	28
4.3 Análise através de <i>CVA</i> e <i>DVA</i>	29
4.4 Pontos adicionais sobre o uso de <i>CVA</i> bilateral	31

5	Modelagens alternativas de <i>CVA</i>	35
5.1	Considerações iniciais	35
5.2	Modelo geral de <i>CVA</i>	35
5.2.1	<i>CVA</i> unilateral	35
5.2.2	<i>CVA</i> bilateral	39
6	<i>CVA</i> de <i>swaps</i> usando cópulas	43
6.1	Introdução	43
6.2	Modelagem matemática do <i>CVA</i>	45
6.3	Precificação de <i>swaps</i> sujeitos a <i>CCR</i>	49
6.3.1	Análise do <i>swap</i>	50
6.3.2	Estudo da dependência	53
6.3.3	Análise de simulação	57
6.4	Aplicação do modelo de Cherubini	61
6.4.1	Dinâmica da difusão de taxa de juros	61
6.4.2	Análise de resultados	62
6.5	Considerações finais	66
7	<i>CVA</i> usando cópulas para os componentes do risco de crédito	69
7.1	Introdução	69
7.2	Construção de dependência multivariada	70
7.3	Análise de simulação	72
7.4	Comentários finais	79
	Referências Bibliográficas	85

Lista de Abreviaturas

<i>BCSB</i>	<i>Basel Committee on Banking Supervision.</i>
<i>CCR</i>	<i>Counterparty Credit Risk.</i>
<i>CE</i>	<i>Credit Exposure.</i>
<i>CVA</i>	<i>Credit Value Adjustment.</i>
<i>CVaR</i>	<i>Conditional Value at Risk.</i>
<i>DVA</i>	<i>Debt Value Adjustment.</i>
<i>EAD</i>	<i>Exposure at Default.</i>
<i>EE</i>	<i>Expected Exposure.</i>
<i>EL</i>	<i>Expect Losses.</i>
<i>EPE</i>	<i>Expected Positive Exposure.</i>
<i>ES</i>	<i>Expected Shortfall.</i>
<i>EV</i>	<i>Expected Mark-to-Market Value.</i>
<i>FVA</i>	<i>Funding Value Adjustment.</i>
<i>IMM</i>	<i>Internal Model Method.</i>
<i>LGD</i>	<i>Loss Given Default.</i>
<i>LIBOR</i>	<i>London Interbank Offered Rates.</i>
<i>LR</i>	<i>Lending Risk.</i>
<i>M</i>	<i>Effective Maturity.</i>
<i>NPV</i>	<i>Net Present Value.</i>
<i>PD</i>	<i>Probability of Default.</i>
<i>PFE</i>	<i>Potential Future Exposure.</i>
<i>RR</i>	<i>Recovery Rate.</i>
<i>UL</i>	<i>Unexpected Losses.</i>
<i>V</i>	<i>Mark-to-Mark Value.</i>
<i>VaR</i>	<i>Value-at-Risk.</i>
<i>CDBs</i>	<i>Certificados de Depósitos Bancários.</i>
<i>TJLP</i>	<i>Taxa de Juros de Longo Prazo.</i>
<i>TR</i>	<i>Taxa Referencial.</i>

Lista de Figuras

2.1	Fluxos de caixa em uma operação de empréstimo para o banco.	5
2.2	Estrutura de ativos e passivos em uma operação de empréstimo para o banco.	6
2.3	Fluxos de caixa do <i>swap</i> para o agente.	7
2.4	Possíveis evoluções do valor de um derivativo.	8
2.5	Estrutura de ativos e passivos do swap para o agente A.	8
2.6	Fluxos de caixa da compra de put para o agente A.	10
2.7	Estrutura de ativos e passivos da compra de put para o agente A.	11
3.1	Evolução do valor do derivativo e exposição a risco de crédito da contraparte.	15
3.2	Possíveis evoluções e distribuição de probabilidades do valor do derivativo $V(t)$ em um dado instante t	16
3.3	Evolução do valor marcado-a-mercado esperado.	17
3.4	Evolução do valor marcado-a-mercado $V(t)$ e da exposição a crédito $CE(t)$, para uma dada realização do mercado.	18
3.5	Exposição ao risco de crédito.	18
3.6	Possíveis evoluções e distribuição de probabilidades da exposição ao crédito $CE(t)$ em um dado instante t	19
3.7	Evolução do exposição esperada $EE(t)$	19
3.8	Comparativo entre a exposição esperada EE e exposição futura potencial PFE em um dado instante t	20
3.9	Comparativo entre evolução da exposição futura potencial $PFE(t)$ e exposição esperada $EE(t)$	20

3.10	Comparativo entre a evolução da exposição esperada $EE(t)$ e da exposição esperada efetiva $EffectiveEE(t)$	21
3.11	Distribuição de valores e métricas de risco.	21
3.12	Exposição positiva esperada.	22
3.13	Exposição efetiva esperada efetiva.	22
3.14	Exposição futura potencial máxima.	23
4.1	Valor do derivativo, cosniderando CVA	29
4.2	Valor do derivativo considerando CVA e DVA	30
6.1	Exposição esperada - Posição comprada	60
6.2	Exposição esperada - Posição vendida	60
6.3	CVA para o período de 2005-2013 - Posição comprada, independência, modelo de Hull-White	63
6.4	Superfície de volatilidade, em maio de 2005	64
6.5	CVA para o período de 2005-2015 - Modelo de Black-Derman-Toy	64
6.6	CVA para o período de 2005-2015 - Modelo de Black-Karasinski	65
6.7	CVA para o período de 2005-2015 - Modelo de Hull-White	65
6.8	CVA para o período de 2005-2015 - Modelo de Heath-Jarrow-Morton	66
6.9	Diferença de CVA entre posições comprada e vendida, com dependência entre componentes	66
7.1	Configurações de C -vines e D -vines para $d = 3$ dimnesões.	72
7.2	Relacionamento entre PD e LGD . O grupo (a) representa dados da <i>Moody's</i> e o grupo (b) dados de Altman e <i>StandardPoor's</i>	75
7.3	Dados simulados. $PD-LGD$: Frank, $LGD-EAD$: Independência, $PD-EAD$: Frank	76
7.4	Dados simulados. $PD-LGD$: Frank, $LGD-EAD$: Gaussiana, $PD-EAD$: Frank	77
7.5	Dados simulados. $PD-LGD$: Gumbel, $LGD-EAD$: Independência, $PD-EAD$: Frank	77
7.6	Dados simulados. $PD-LGD$: Gumbel, $LGD-EAD$: Gaussiana, $PD-EAD$: Frank	78

Capítulo 1

Introdução

Um dos problemas fundamentais em Finanças envolve a identificação de como o mercado recompensa investidores por assumirem risco de crédito (Liu *et al.*, 2006). No entanto, a despeito da relevância da precificação do risco de crédito, particularmente no caso de carteiras de derivativos, durante vários anos, a prática tradicional no segmento financeiro envolvia a marcação a mercado sem levar em consideração a qualidade de crédito da contraparte (Pykhtin e Rosen, 2010). Entretanto, na avaliação do CRMPG (2005), o risco de crédito da contraparte é provavelmente a variável mais importante na determinação da possibilidade e da velocidade de distúrbios financeiros se tornarem choques relevantes com potencial de quebras sistêmicas.

Deve-se ressaltar que justamente o risco de crédito em contratos de derivativos, associado ao risco de crédito da contraparte (*CCR: Counterparty Credit Risk*), protagonizou momentos cruciais da crise financeira de 2007-2008 bem como de outras crises (Canabarro, 2009). Para Cherubini (2013), o risco de crédito, juntamente com o risco de liquidez, foi responsável pela crise bancária. A falência do *Lehman Brothers*, *AIG*, *Bear Stearns* (Chander e Costa, 2010) e a consequente desordem nos mercados financeiros evidenciou que a magnitude da exposição ao *CCR* constitui uma fonte relevante de risco sistêmico (Hollings *et al.*, 2009), no qual problemas de solvência em uma instituição podem se difundir e causar um colapso no mercado como um todo. Conforme Kjaer (2011), a importância da precificação e *hedging* de risco de crédito da contraparte em contratos de derivativos de balcão ficou evidente nos eventos turbulentos da crise recente.

Assim, embora as instituições financeiras, as agências de *rating* e os órgãos reguladores já viessem desenvolvendo ferramentas e regras para aprimoramento da gestão do *CCR*, a extensão da crise de 2007-2008 sugere a necessidade de desenvolvimento de novos modelos e do estabelecimento de novas diretrizes para garantir a solidez do mercado. Na opinião de Turnbull (2009), as agências de *rating* tiveram um desempenho sofrível na avaliação da qualidade de crédito de inovações financeiras recentes como, por exemplo, os derivativos.

Esse trabalho investiga o *CVA*, explorando inicialmente modelos simplificados, para posteriormente derivar modelos mais sofisticados incorporando especificidades dos contratos de derivativos e relaxando algumas premissas. Em particular, são utilizadas modelagens sugeridas por Gregory (2012) para as principais métricas de exposição do risco de crédito de contraparte. Aplicações dos modelos em contratos derivativos básicos são discutidas com o objetivo de identificar dificuldades e desafios na implementação prática do *CVA*. Além da modelagem teórica, serão implementados mecanismos práticos de avaliação do *CVA*, buscando suplantiar desafios computacionais que surgem na simulação do comportamento do valor de carteiras de derivativos.

Como justificativa para o estudo do *CVA*, devem ser enfatizados a atualidade e a complexidade desse conceito. Do ponto de vista de regulamentação bancária, o *CVA* foi introduzido no

Acordo da Basileia de 2006, chamado pelo mercado de Basileia II (Basel II), com indicações qualitativas de como a análise de *CCR* deveria ser realizada visando definição de capital regulatório. A crise de 2007-2008 motivou o estabelecimento, através de documentos publicados em dezembro de 2010 e em junho de 2011, de um novo conjunto de diretrizes estabelecidas como Basileia III (Basel III) no qual o Comitê da Basileia para Supervisão Bancária ou simplesmente Comitê da Basileia (*BCSB: Basel Committee on Banking Supervision*) estabeleceu de maneira mais quantitativa requisitos de capital para posições sujeitas a *CCR*. Mais especificamente, o comitê definiu fórmulas para cálculo de requisito de patrimônio líquido a ser mantido pelas instituições financeiras em função do risco associado ao *CVA*. No entanto, conforme discutido em Pengelly (2010), Pengelly (2011), Sawyer *et al.* (2011), muita controvérsia tem sido gerada entre instituições financeiras e órgãos reguladores sobre a adequação e potenciais impactos negativos destas regras.

Em paralelo, dentro de uma perspectiva prática, mesas de *CVA* estão sendo criadas para gerenciar o *CCR*, atribuindo valor ou preços de transferências dentro da instituição financeira e estabelecendo estratégias de *hedging*. Do ponto de vista teórico, modelos de *CVA* estão sendo desenvolvidos para melhor contemplarem comportamentos de mercado. A crise de 2007-2008 sugere que a gestão do *CCR* e, em particular, a análise de *CVA* ainda possuem um grande espaço para aprimoramentos. De acordo com estimativas do BCBS (2009), na crise de 2007-2008, das perdas devido ao *CCR*, cerca de dois terços foram devidos a perdas de *CVA* e apenas um terço devido efetivamente a *defaults*. Estruturas atuais de análise de *CCR* tendem a contemplar o risco de inadimplência e o risco de migração da qualidade de crédito, porém não avaliam totalmente a perda, em valores de mercado, em função do risco de *default* (BCBS, 2009).

Tendo em vista o impacto do risco de crédito da contraparte na precificação, as próprias instituições financeiras têm direcionado esforços para o estabelecimento de regras de negócio que levem em consideração o *CVA*. Em particular, diversas instituições financeiras já controlam e operam carteiras de derivativos com uma abordagem que contempla o risco de crédito da contraparte. Além disso, o *wrong-way risk* que decorre de um comportamento adverso entre os parâmetros de risco implica preocupação adicional a ser considerada pelos gestores de risco. A possibilidade de aumento da probabilidade de *default* ou da perda dado o *default* juntamente com o aumento da exposição ao risco de crédito exacerba potenciais perdas com *CCR*. Nesse contexto, a análise da dependência entre parâmetros de risco de crédito da contraparte deve também ser enfatizada.

Finalmente, tendo em vista a competitividade do mercado financeiro, o *CVA* bilateral torna-se relevante, uma vez que preços de derivativos dependem também de o próprio *dealer* incorrer em risco de falência. A crise de 2007-2008 evidenciou que bancos de investimentos, mesmo com *rating* AAA, são vulneráveis a crises sistêmicas e terem sua sobrevivência colocada em risco. Assim, o *BCVA* constitui um ajuste relevante em modelos de mensuração de risco de crédito da contraparte.

Neste contexto, este trabalho tem por objetivo discutir modelos de avaliação do risco de crédito da contraparte, em operações com derivativos, principalmente, em operações de balcão. Apesar de conceitos de *CCR* ainda estarem sendo discutidos e propostos, avanços têm sido empreendidos, constituindo aprimoramentos na modelagem do preço justo a ser cobrado em função do risco de crédito da contraparte de um contrato derivativo. Em especial, o ajuste de valor em função contraparte (*CVA: Credit Value Adjustment* ou *Credit Valuation Adjustment*) tem se disseminado no mercado financeiro como principal mecanismo de precificação do *CCR*. Não somente os principais *dealers* de derivativos estão desenvolvendo modelos como também os órgãos reguladores do mercado financeiro estão estabelecendo diretrizes de gestão de riscos de crédito a partir do conceito de *CVA*.

Dentro do escopo desse trabalho, o capítulo 2 apresenta a diferenciação entre risco de crédito tradicional, presente em operações de empréstimos e financiamentos, e risco de crédito da contraparte, mais voltado a operações com derivativos. É também apresentado o conceito de *wrong-way risk*, que constitui o principal motivo para a necessidade de se incorporar elementos de dependência entre os componentes de risco de crédito.

No capítulo 3, são apresentadas as principais métricas associadas a valores de mercado e a exposições a risco de crédito da contraparte. Elementos como perda efetiva esperada, exposição esperada, exposição potencial positiva, etc, subsidiam o conceito de exposição no instante do *default*, um importante componente do risco de crédito da contraparte. No capítulo 4 são discutidos os ajustes de preço de carteiras em função do risco de crédito da contraparte. Em particular, são apresentadas as definições de *CVA* unilateral e bilateral. Apesar de o capítulo apresentar uma modelagem simplista, possibilita um entendimento dos principais componentes do risco de crédito, notadamente, probabilidade de *default* (*PD: probability of default*), perda dado o *default* (*LGD: loss given default*) e exposição no instante do *default* (*EAD: exposure at default*). Diversos aspectos práticos, incluindo aspectos positivos e negativos do uso do *CVA* são analisados.

O capítulo 5 usa uma modelagem mais técnica do *CVA* unilateral e bilateral, propiciando uma perspectiva mais voltada à modelagem a partir de probabilidade. Em particular, são discutidos os vários cenários em que a exposição é relevante, impactando o valor de uma carteira com derivativos com uma determinada contraparte. Essa modelagem serve como base para a discussão apresentada no capítulo 6, que analisa especificamente o caso de precificação de operações de *swaps* sujeitas a risco de crédito da contraparte. Nesse capítulo, segue-se a discussão de Brigo *et al.* (2013) para modelar o *CVA* unilateral e o modelo de Cherubini (2013) que usa cópulas para contemplar possíveis relacionamentos entre, particularmente, a exposição no *default* e o instante do *default*, que é atrelado à probabilidade de *default*. Nesse contexto, é possível estudar o impacto do *wrong-way risk* no preço de um contrato de *swap* de taxa de juros.

Além disso, no capítulo ainda são apresentados resultados de análise de sensibilidade do *CVA* a alguns parâmetros. Utilizando dados de mercado entre 2005 e 2015, são também calibrados modelos de difusão de taxas de juros, visando a obtenção dos valores de *CVA*, evidenciando-se que o período de crise implicou a necessidade de ajustes de crédito relativamente superiores. Para a análise, são utilizados diferentes modelos de taxa de juros fundamentados em não-arbitragem: Black-Derman-Toy (Black *et al.*, 1990), Black-Karasinski (Black e Karasinski, 1991), Hull-White (Hull e White, 1990, 1994b) e Heath-Jarrow-Morton (Heath *et al.*, 1992). Os resultados sugerem que a escolha do processo de difusão tem impacto relevante na precificação do risco de crédito da contraparte.

No capítulo 7, é apresentada uma abordagem para cálculo do *CVA* a partir de modelagem de *vine* cópulas ou *Pair Construction Copulas (PCC)*. Este mecanismo de avaliação do *CVA*, que no levantamento bibliográfico não foi encontrado, possibilita que, a partir dos componentes do risco de crédito, possam ser trabalhadas diferentes formas de distribuição univariada e formatos de dependência bivariadas. Os resultados indicam que a escolha das cópulas, bem como as características das carteiras expostas a risco de crédito da contraparte, têm impacto relevante nas estimativas de *CVA*. Enfatiza-se que essa abordagem estabelece não somente, dentro de uma perspectiva de precificação, a análise de ajustes de valor em função do risco de crédito da contraparte, como também a avaliação de perdas potenciais, considerando uma perspectiva de gestão do *CCR*.

Capítulo 2

Fundamentos de risco de crédito da contraparte

2.1 Definição de risco de crédito de empréstimos e risco de crédito da contraparte

Neste trabalho, será dada ênfase ao *CCR* de operações em derivativos e, portanto, é importante fazer uma distinção entre risco de crédito tradicional, denominado por Gregory (2010) como risco de empréstimo (*LR: Lending Risk*), e risco de crédito da contraparte (*CCR: Counterparty Credit Risk*).

O risco de crédito de empréstimo existe quando um agente tem uma dívida junto ao credor, podendo deixar de pagar uma parte ou a totalidade do valor devido e possui as seguintes características: (i) o valor nominal ou o montante em risco é comumente conhecido a qualquer momento durante a vigência da operação e (ii) apenas o credor está exposto ao risco de não-pagamento (Gregory, 2010).

A Figura 2.1 exemplifica o risco de empréstimo, através dos fluxos de caixa. No instante inicial $t = 0$, um banco empresta um volume de recursos, denominado de principal, V_0 , ao cliente com a promessa de receber, no vencimento da operação em $t = T$, um valor V_T que incorpora o principal e os juros.

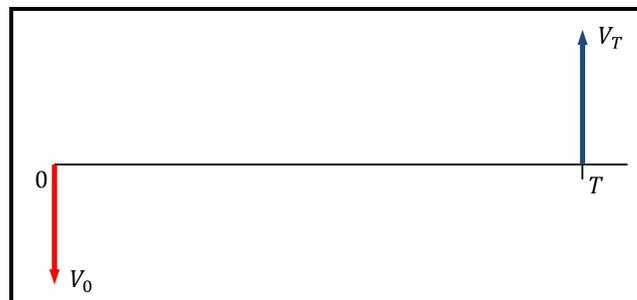


Figura 2.1: Fluxos de caixa em uma operação de empréstimo para o banco.

Considerando uma taxa de juros prefixada r e uma capitalização discreta, o valor $V_T = V_0(1 + r)$ que deve ser recebido pelo banco no vencimento é constante e, portanto, conhecido a qualquer momento durante a vigência da operação. Além disso, somente o credor incorre em risco de inadimplência, pois no vencimento da operação o tomador pode deixar de honrar o pagamento do valor devido. Como o credor não tem pagamentos a realizar ao tomador, este não corre risco de

crédito.

Assim, a operação mostrada na Figura 2.1 apresenta risco de empréstimo, pois apenas uma das partes, o banco, está exposta e o valor da exposição ao risco de crédito é, de certa maneira, conhecida. A Figura 2.2 mostra a estrutura de ativos e passivos desta operação do ponto de vista do banco, isto é, do prestador de recursos. Apesar de o foco deste trabalho não envolver o tratamento contábil, a estruturação de operações financeiras através de suas posições ativas e passivas facilita a identificação de riscos.

A Figura 2.1 denota que, imediatamente após o empréstimo, o banco tem uma ponta ativa, correspondente a um V_T a ser recebido na data de vencimento T . Note que a estrutura do balanço mostra bens e direitos confrontados com obrigações. Ou seja, o banco possui um direito de receber V_T no vencimento da operação. Note que existe a chance de o cliente do banco não pagar a dívida e, assim, o banco incorre em risco de empréstimo. Em contraste, o banco não possui nenhuma ponta passiva nessa operação. Portanto, sua contraparte, o cliente não corre risco de crédito, dado que o banco não possui obrigação que possa deixar de cumprir.

Ativo	Passivo
$V_T = V_0(1 + r)$	

Figura 2.2: Estrutura de ativos e passivos em uma operação de empréstimo para o banco.

De forma diferente do risco de crédito de empréstimos tradicionais, o risco de crédito da contraparte é definido como o risco de que a contraparte entre em *default* ou inadimplência antes do vencimento de uma operação (Gregory, 2010) ou antes da liquidação dos fluxos de caixa da transação (Pykhtin e Rosen, 2010). Nestas situações, um agente incorrerá em perda econômica se a transação ou carteira de transações com a contraparte possuir valor econômico positivo no instante do *default* (BCBS, 2006). Assim, o *CCR* está associado ao risco de que a contraparte de um contrato financeiro se torne inadimplente antes do vencimento do contrato, não honrando todos os pagamentos exigidos (Pykhtin e Zhu, 2007).

A despeito de esta definição ser genérica e contemplar operações tradicionais de empréstimo, Pykhtin e Zhu (2007) evidenciam que o *CCR* é particularmente mais apropriado para a análise de contratos derivativos em mercados de balcão e de transações de financiamento de títulos.

Assim, o risco de crédito da contraparte (*CCR*) em uma operação com derivativos, apesar de também advir do fato de um tomador não poder ou não estar disposto a cumprir obrigações contratuais, envolve dois aspectos que o diferenciam do outro tipo de risco de crédito, o risco de empréstimo: (i) o valor do contrato em uma data futura é incerto e, portanto, o montante em risco geralmente não é conhecido e (ii) usualmente ambas as contrapartes estão expostas ao *CCR*, uma vez que um derivativo pode acarretar ganhos ou perdas dependendo do comportamento do mercado (Gregory, 2010).

Portanto, de forma contrária ao risco de empréstimo, na qual a exposição é unilateral, isto é, somente o prestador de recursos está sujeito a perdas devido à inadimplência da contraparte, no *CCR* envolve um risco bilateral de potencial perdas devido ao crédito, uma vez que o valor de mercado de uma transação com derivativo tem comportamento estocástico e pode ser positivo ou negativo para qualquer uma das contrapartes (BCBS, 2006).

A Figura 2.3 ilustra o risco de crédito da contraparte que surge em uma operação com derivativo, sob o ponto de vista de um agente como, por exemplo, um banco ou um *dealer* de

derivativo. Neste exemplo, vamos analisar um *swap* simples, com uma única data futura T de troca de fluxos. Nessa operação, no momento inicial $t = 0$, não existe fluxo de caixa entre as contrapartes: as partes simplesmente concordam em liquidar a transação em um data futura $t = T$ corrigindo um valor de referência, também chamado de nocional $V_0 > 0$, por indexadores diferentes durante o prazo de vigência da operação.



Figura 2.3: Fluxos de caixa do swap para o agente.

Nesse contrato de *swap*, o agente assume o compromisso de pagar o valor nocional corrigido por um indexador 1 no vencimento e, em troca, obtém o compromisso de que sua contraparte lhe pague o valor nocional corrigido por um indexador 2. Considerando que a variação do indexador 1 seja r_1 e a variação do indexador 2 seja r_2 , (i) o valor que o agente deve pagar à sua contraparte ao final do contrato é $V_0(1 + r_1)$, denotado pela seta vermelha na Figura 2.3 e (ii) o valor que o agente A deve receber de sua contraparte é $V_0(1 + r_2)$, denotado pela seta azul na Figura 2.3. O valor do contrato, do ponto de vista do agente, no vencimento é dado pela diferença entre o fluxo a receber e o fluxo a pagar, isto é:

$$V_T = V_0(1 + r_1) - V_0(1 + r_2) = V_0(r_1 - r_2) \quad (2.1)$$

Vamos nos concentrar no valor do contrato. Diferentemente de uma operação de empréstimo tradicional discutida anteriormente, nessa operação, o valor V_T não é conhecido antes do vencimento e pode ser positivo ou negativo, dependendo do comportamento de variáveis de mercado r_1 e r_2 . Somente após se apurarem as variações dos indexadores até o vencimento é que se terá ideia do valor de liquidação no vencimento.

Assim, o principal aspecto a ser levado em consideração é que o valor final V_T a ser liquidado no vencimento não é conhecido *a priori*. Dependendo de como variáveis de mercado flutuarem, ao final do contrato, (i) V_T pode ser positivo e o agente A poderá receber um valor da contraparte, porém (ii) V_T pode ser negativo e o agente A deverá pagar um valor à contraparte do contrato. A Figura 2.4 apresenta duas evoluções, dentre as inúmeras possíveis realizações, do valor do derivativo até o vencimento.

A curva em azul mostra uma realização dos indexadores ao longo do período do contrato que conduz a um valor positivo do derivativo para o agente no vencimento, isto é, $r_2 > r_1$. No vencimento, supondo *a posteriori* esse comportamento de variáveis de mercado, o agente A tem um valor V_{T_1} a receber de sua contraparte no derivativo. Este ganho devido ao comportamento do mercado, no entanto, pode não se materializar em termos de fluxos de caixa, pois nessa situação, o agente incorre em uma exposição a risco de crédito: eventualmente, a contraparte pode não ter recursos para honrar o pagamento do valor V_{T_1} .

No entanto, o risco desta operação distingue-se do risco de empréstimo, pois a contraparte do agente A também está exposta a um risco de crédito. Considerando a curva em vermelho na Figura 2.4, se $r_2 < r_1$, o mercado terá um comportamento que conduz a um valor negativo do contrato no vencimento, por exemplo, o valor V_{T_2} . Neste caso, o agente A incorreu em uma perda e deve pagar à sua contraparte. No entanto, o agente pode não dispor de recursos ou de mecanismos

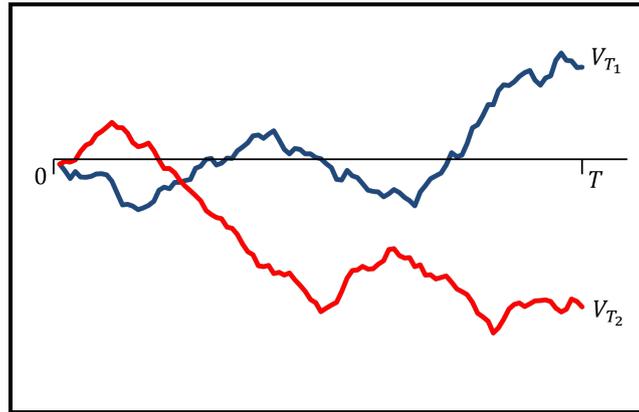


Figura 2.4: Possíveis evoluções do valor de um derivativo.

para obter liquidez e pagar seu compromisso.

Existe, nesse caso, a possibilidade de a contraparte, neste caso, não ser paga, ou seja, o agente B está exposto ao risco de inadimplência do agente A. Portanto, no momento inicial da operação, como o valor final V_T não é conhecido, tanto o agente A quanto o agente B estão expostos ao risco de inadimplência. Estes elementos de incerteza no valor de V_T e de assunção de risco pelas duas partes da operação caracterizam o risco de crédito da contraparte (Gregory, 2010).

A análise acima pode ser explicitada através de uma visão baseada em demonstrativos financeiros. A Figura 2.5 mostra as pontas ativa e passiva dessa operação de *swap*. Conforme já discutido, em diversas situações, a visão a partir de uma estrutura de balanço possibilita uma melhor compreensão dos riscos.

	Ativo	Passivo
8yohgu	$V_0(1 + r_2)$	$V_0(1 + r_1)$

Figura 2.5: Estrutura de ativos e passivos do *swap* para o agente A.

Conforme já mencionado, os valores das variações r_1 e r_2 desses indexadores não são conhecidos no instante 0. Na data de vencimento da operação, apuram-se o valor nominal V_0 corrigido pelos indexadores. Dependendo dos valores de r_1 e r_2 o agente A pode ter um resultado positivo ou negativo. Em termos líquidos, o valor do contrato V_T no vencimento é a diferença entre as pontas ativa e passiva.

O caso em que $r_2 > r_1$ pode ser ilustrado pelo valor V_{T_1} na Figura 2.4. O agente A obtém um ganho devido a flutuação favorável dos indexadores. Porém, incorre em um risco de crédito de que sua contraparte não pague o valor V_{T_1} . De modo similar, o caso em que $r_2 < r_1$ pode ser representado pelo valor V_{T_2} na Figura 2.4. O agente A obtém uma perda devido a flutuação adversa dos indexadores e, dada a possibilidade de que não tenha recursos para fazer frente a essa perda, impõe um risco de crédito à sua contraparte, agente B. Na Figura 2.5, a diferença entre as pontas ativa e passiva sugere ganhos ou perdas na carteira, devido a flutuação dos indexadores, bem como as exposições ao risco de crédito no caso o valor líquido do *swap*, isto é, diferença entre o ativo e o passivo, ser positivo.

Assim, é importante ressaltar que o comportamento dos indexadores está ligado ao risco de mercado. Ou seja, em um derivativo financeiro tradicional, o valor ao longo do tempo V_t é função de

variações nos valores de parâmetros de mercado que, por sua vez, podem conduzir a um ganho ou uma perda a um agente. A perda devido a flutuação adversa do valor do derivativo está associado ao risco de mercado. O risco de crédito surge quando as flutuações de parâmetros de mercado induzem a um ganho no valor do derivativo. Neste caso, o agente possui um valor a receber de sua contraparte que pode não honrar esse compromisso.

Reiterando, do ponto de vista prático, a interação entre risco de mercado e risco de crédito é particularmente sutil na gestão do *CCR*, uma vez que justamente quando um agente possui uma posição vencedora no derivativo, torna-se exposto ao risco de crédito. Neste caso, a contraparte pode não honrar a obrigação. Em contraste, se um agente detém uma posição em derivativos com valor negativo, denotando perda devido a risco de mercado, não incorre em risco de crédito. Nesse caso, sua contraparte é que se encontra exposta ao risco de crédito, pois o agente pode não ter como cumprir sua obrigação.

O relacionamento entre risco de crédito e risco de mercado, no entanto, é ainda mais complexo, como será visto mais adiante, na discussão de *wrong-way* e *right-way risk*. Ressalta-se que a natureza de dependência entre exposição a risco de mercado e exposição a risco de crédito pode ser complexa e de difícil estimação a partir de dados de mercado. A crise de 2007-2008 evidenciou que o *wrong-way risk*, em particular, foi negligenciado ou bastante subestimado pelos modelos de gestão de riscos.

2.2 Definição de *wrong-way risk* e *right-way risk*

Tendo em vista que o ganho de um contrato derivativo pode advir de movimentações favoráveis de variáveis de mercado e, neste contexto, ocasionar exposição à inadimplência, por possuir um valor positivo a receber de sua contraparte, é importante que a interação entre risco de crédito e risco de mercado seja contemplada nos modelos de gestão. Em alguns casos, essa interação pode exacerbar perdas financeiras, principalmente quando envolve o *wrong-way risk*.

De acordo com Canabarro (2009), o *wrong-way risk* pode ser definido como a correlação adversa entre a exposição à contraparte e a qualidade de crédito da contraparte. De forma mais genérica, relaxando a premissa de relacionamento linear implícita na correlação, Gregory (2010) associa *wrong-way risk* a uma dependência desfavorável entre exposição e qualidade de crédito da contraparte: a exposição ao risco de crédito eleva-se quando a qualidade de crédito da contraparte se deteriora.

O *wrong-way risk* ficou evidente na crise asiática de 1997-1998 quando diversas empresas da região emprestaram recursos atrelados a moedas do G7 como, por exemplo, dólar americano e iene japonês e fizeram *hedge* da exposição a taxa de câmbio com bancos ocidentais (Rowe *et al.*, 2009). No entanto, a despeito de ser já conhecido, o *wrong-way risk* também esteve presente de maneira relevante na crise de 2007-2008. Pode-se ressaltar, portanto, que o *wrong-way risk* não é sempre fácil de ser identificado, pois não é trivial, uma vez que exige um bom conhecimento das características da contraparte (Gregory, 2010; Hull e White, 2012).

O *wrong-way risk* pode ser compreendido através de um exemplo simples, no qual uma empresa lança opções de venda, isto é, *put options*, sobre suas próprias ações. Para entender o risco, podemos avaliar a operação do ponto de vista do comprador da *put*, denominado de agente A, que incorre em um risco de crédito da contraparte. A *put* é vendida pela empresa, denominada de agente B. A opção é lançada tendo como ativo-objeto ação da própria empresa, isto é, do agente B.

A Figura 2.6 mostra os fluxos de caixa. Através desta operação, o agente A, isto é, o comprador da *put* paga no instante inicial $t = 0$, um valor ou prêmio denotado por p para ter o direito,

mas não a obrigação de, na data de vencimento do derivativo, $t = T$, vender a ação da empresa B por um preço pré-estabelecido K . Uma característica fundamental de um contrato de opção como é o caso da *put* é que seu resultado é contingencial ao exercício ou não exercício do direito. O titular da opção pode exercer seu direito somente quando lhe é conveniente.

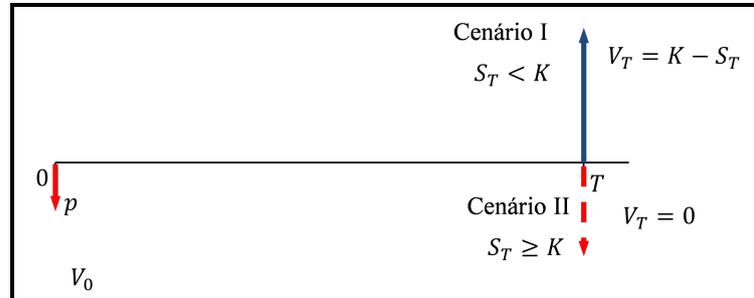


Figura 2.6: Fluxos de caixa da compra de *put* para o agente A.

Assim, a *put* confere ao agente A o direito, mas não a obrigação de vender a ação da empresa B no vencimento. Caso o agente A deseje exercer seu direito de vender a ação pelo preço predefinido K , então sua contraparte do contrato derivativo, a própria empresa B, tem a obrigação de comprar a ação pelo preço K . De modo simplificado, considerando somente os aspectos de preço, a decisão de exercício depende do possível valor da ação da empresa B no vencimento da *put*.

Na Figura 2.6, os Cenários I e II ilustram o fato de o fluxo de caixa ser contingencial ao preço da ação S_T no vencimento da *put*. No caso em que o preço da ação no vencimento é $S_T > K$, o agente A simplesmente não exerce seu direito de vender por K uma ação que possui um valor S_T maior, pois estaria vendendo o ativo por um preço mais baixo que o do mercado. Nessa situação, não há fluxo de caixa no vencimento e o valor do derivativo é nulo, isto é, $V_T = 0$, conforme ilustrado no Cenário II da Figura 2.6, pois o agente A não exerce seu direito de venda. A linha tracejada vermelha indica que o fluxo de caixa não existe, uma vez que não seria racional, do ponto de vista financeiro, ao agente A exercer seu direito para incorrer em uma perda.

Em contrapartida, é racional o agente A exercer seu direito de vender a ação por K quando esta estiver valendo menos que K no vencimento, conforme Cenário I. Desta forma, o agente A estaria vendendo a ação por um preço mais caro do que o transacionado no mercado. Assim, se o preço da ação no vencimento for $S_T < K$, então o agente A exerce seu direito de vender por K um ativo que custa menos. Neste caso, na *put*, o agente A teria um derivativo de valor V_T que estaria lhe proporcionando um resultado líquido de $K - S_T > 0$ mostrado na linha azul na Figura 2.6. Em contraste, o agente B, a própria empresa, teria uma perda equivalente a $S_T - K < 0$, pois seria obrigado a pagar $K > S_T$ para comprar uma ação que vale somente S_T .

O problema para o agente A nessa situação é que, embora a variável de mercado relevante, no caso preço da ação, tenha implicado um ganho na posição, existe um risco de crédito. A Figura 2.7 mostra a estrutura dessa operação em termos contábeis. Note que o agente A não possui ponta passiva, pois não tem uma obrigação correspondente. Ou seja, o agente A não é obrigado a vender a ação da empresa B por K . Ele só exerce seu direito de venda quando lhe é conveniente. Este direito, obviamente, deve ser representado na ponta ativa.

Tendo em vista o caráter contingencial da opção, dois cenários são relevantes. Em se ocorrendo o Cenário II, não há risco de crédito para o agente A, pois simplesmente não exerce seu direito de vender por K a ação que, nesta situação custa $S_T > K$. Todavia, em se ocorrendo o Cenário I no vencimento do derivativo, ao exercer seu direito de vender por K , o agente A obriga a empresa B a comprar essa ação por K , obtendo um ganho de $K - S_T$.

Quanto menor o valor S_T da ação da empresa B, maior o ganho do agente A. A exposição ao

Ativo		Passivo
Cenário I $S_T < K$ $K - S_T$	Cenário II $S_T \geq K$ 0	

Figura 2.7: Estrutura de ativos e passivos da compra de put para o agente A.

risco de crédito aumenta, portanto, quando o preço da ação S_T cai. Porém, a contraparte do agente A é a própria empresa B, cuja ação é ativo-objeto do derivativo. Assim, a queda de S_T poderia sinalizar piora das condições da empresa B e, conseqüentemente, maior chance de ela não honrar seus compromissos financeiros, inclusive o contrato derivativo. Na operação realizada, justamente quando a empresa B se encontra mais fragilizada em função da queda do preço de suas ações, ela é obrigada a liquidar o derivativo em uma posição desfavorável.

Ou seja, quanto menor o valor de S_T , maior o ganho $V_T = K - S_T$ do agente A e maior sua exposição ao risco de crédito da empresa B. Esta maior exposição ao risco de crédito é, portanto, acompanhada de maior probabilidade de *default* de sua contraparte, uma vez que a queda de S_T pode estar associada a maiores dificuldades financeiras da empresa B. Assim, a associação positiva entre exposição ao risco de crédito e a probabilidade de inadimplência da contraparte configura o *wrong-way risk*. A adequada avaliação do *wrong-way risk*, apesar de difícil, representa aspecto relevante para a gestão do *CCR*.

Assim como pode existir um relacionamento positivo entre exposição a crédito e probabilidade de inadimplência da contraparte, a associação negativa também pode ocorrer, configurando-se o *right-way risk* que seria o oposto do *wrong-way risk* (Canabarro, 2009). Conforme Gregory (2010), no *right-way risk* existe uma relação benéfica entre exposição e probabilidade de *default* que reduz o risco de crédito da contraparte.

Capítulo 3

Componentes e métricas associadas ao *CCR*

3.1 Considerações iniciais

Neste estudo, vamos apresentar alguns elementos relacionados com o risco de crédito, que foram evidenciados tanto em função dos avanços da prática de mercado quanto das exigências dos órgãos reguladores. Em particular, são destacados os componentes do risco de crédito estabelecidos na Basileia II para mensuração do risco de crédito em geral e as métricas de exposição ao risco de crédito da contraparte voltadas mais especificamente para carteiras de derivativos.

A Basileia II, divulgada pelo Comitê da Basileia para Supervisão Bancária (*BCBS: Basel Committee on Banking Supervision*), estabeleceu quatro componentes para mensuração do risco de crédito (BCBS, 2006):

1. a probabilidade de *default* (*PD: Probability of Default*);
2. a perda dado o *default* (*LGD: Loss Given Default*);
3. a exposição no momento do *default* (*EAD: Exposure at Default*); e
4. a maturidade efetiva (*M: Effective Maturity*).

A despeito de esses componentes já serem foco de preocupações de gestores de riscos, com a publicação da Basileia II, foram, de certa forma, popularizados no âmbito geral das instituições financeiras. Esses componentes decorrem naturalmente do processo de análise de risco que será discutido no próximo capítulo.

Estes componentes do risco de crédito evidenciados pela Basileia constituem variáveis a serem avaliadas nas carteiras de crédito de instituições financeiras, servindo para a definição de requisitos mínimos de capital. Tendo em vista que um dos objetivos do *BCBS* é promover uma maior solidez do mercado financeiro global, suas principais diretrizes envolvem a definição de exigência de capital próprio para fazer frente a possíveis riscos. Assim, órgãos reguladores de cada país podem seguir as diretrizes do *BCBS* e estabelecer que os acionistas das instituições financeiras mantenham patrimônio líquido compatível com o nível de risco assumido.

Ressalta-se que, de certa maneira, a exigência de capital dificulta a alavancagem de bancos, isto é, o uso de poucos recursos próprios para fazer frente aos negócios. Na prática, tendo em vista

que uma de suas funções envolve tomar recursos de agentes superavitários para emprestar a agentes deficitários, os bancos poderiam trabalhar com pouco capital próprio, pois simplesmente serviriam de intermediários entre os agentes que precisam de recursos e os que têm superávit de recursos.

No entanto, devido a diversos riscos, inclusive o de crédito, órgãos reguladores do mercado financeiro impõem valores mínimos de patrimônio do acionistas. Esta exigência de capital é compatível com o fato de que perdas devem ser assimiladas pelos acionistas, ou seja, pelos sócios do banco. Apesar de a lógica de que o proprietário assume a perda ser razoável para todos os empreendimentos, o caso de instituições financeiras é particularmente especial em função do alto nível de alavancagem dos bancos e do elevado grau de interligação entre os agentes financeiros que induz a um risco sistêmico elevado.

3.2 Métricas de exposição e de ajustes

A indústria bancária tem gerado diversas métricas associadas ao risco de crédito, sem uma preocupação em estabelecer nomes intuitivos ou em padronizar nomenclaturas: eventualmente o mesmo termo pode ser usado para conceitos diferentes, dependendo do estudo (Gregory, 2010, 2012). Assim, optamos por seguir, na medida do possível, as nomenclaturas de Gregory (2010) que, por sua vez, se baseou no documento da Basileia III.

É importante ressaltar que as definições a seguir são gerais e podem ser aplicadas tanto para transações individuais quanto para carteiras de derivativos. Tendo em vista a quantidade de métricas de exposição e a semelhança entre elas, sugere-se buscar compreender as definições pensando em derivativos individuais, pois o significado fica mais evidente. Quando se considera carteiras de derivativos, o entendimento do conceito da métrica de exposição pode ser dificultado, pois a definição pode prescindir de ajustes dependendo dos mecanismos de *netting* permitidos para as exposições e das formas de ponderação da relevância de cada derivativo no portfólio. Para fins didáticos, são destacados dois conjuntos de métricas: (i) métricas de valor de mercado ou de valor mercado-a-mercado, (ii) métricas de exposição ao risco de crédito da contraparte.

3.2.1 Métricas de valor mercado-a-mercado

Inicialmente, vamos apresentar duas métricas de valor de um derivativo. A primeira representa a variável aleatória associada com o valor do derivativo em cada instante t . A segunda estabelece o valor médio ou valor esperado do derivativo a cada instante. Em particular, a primeira métrica constitui um elemento fundamental para o estudo de CCR, pois está associado aos possíveis valores do derivativo em um dado instante.

a. Valor mercado-a-mercado (V : *Mark-to-Market Value*):

A primeira métrica relevante envolve o conceito de valor mercado-a-mercado V ou simplesmente o valor de mercado do derivativo ou da carteira. O valor do derivativo pode se alterar com o tempo e, portanto, para um dado instante t , tem-se $V(t)$. É importante salientar que, dado o risco de mercado, ou seja, de que variáveis que influenciem o preço de mercado do derivativo possam variar, comumente não se sabe com certeza o valor de $V(t)$. Note que, nesta notação, o derivativo ou a carteira de derivativos tem um vencimento em $T > t$.

Destaca-se que a notação matemática apresentada é simples, uma vez que este capítulo foca na definição dos conceitos. Dependendo da modelagem, a notação pode ser alterada. Por exemplo, considerando que um derivativo depende dos valores dos fatores de risco associados a variáveis de mercado em cada instante, então o valor do contrato ou da carteira poderia ser definido por

$V(t, s(t))$, onde s representaria um vetor com variáveis de mercado que influenciam no preço do derivativo. Note que as variáveis de mercado podem ser correlacionadas entre si ou terem alguma outra forma de dependência mais complexa.

Além disso, nesta introdução aos conceitos, para fins didáticos, não nos preocuparemos em definir detalhes mais técnicos como, por exemplo, o espaço de probabilidade associado às variáveis aleatórias. Posteriormente, no estudo de modelos de *CCR* mais sofisticados, explicitaremos em mais detalhes os aspectos probabilísticos.

A Figura 3.1 permite uma visualização do aspecto aleatório do valor de um derivativo. Na mesma figura, são mostrados 2 possíveis evoluções do valor do derivativo, do ponto de vista de um agente A, deste o instante inicial $t = 0$ até o vencimento $t = T$. De fato, justamente esta aleatoriedade do valor do derivativo impõe a necessidade de gestão de riscos. A possibilidade de ocorrência de situações que causam perda relevante implica que mecanismos de mensuração e gestão de riscos sejam implementados.

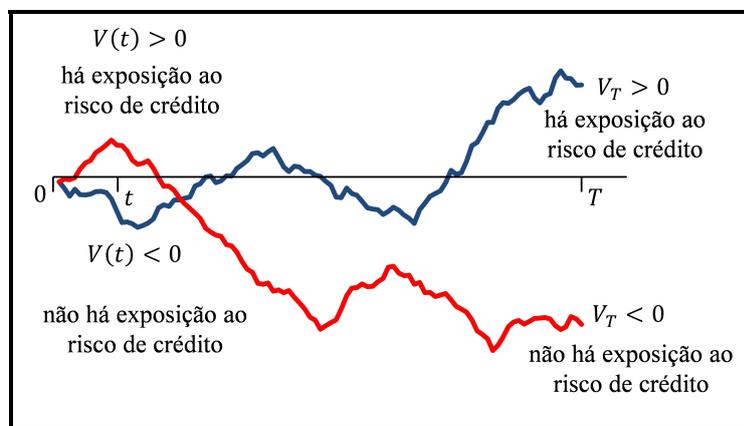


Figura 3.1: Evolução do valor do derivativo e exposição a risco de crédito da contraparte.

Na Figura 3.1, a linha azul representa uma possível evolução que termina em T com um ganho $V(T) = V_T > 0$ para o agente A, enquanto a linha vermelha, uma possível evolução que causa uma perda financeira, isto é, $V_T < 0$. No entanto, nos dois casos, ao longo do tempo até o vencimento o valor do derivativo apresenta forte flutuação, havendo períodos em que $V(t) > 0$ e outros períodos em que $V(t) < 0$.

Sob a perspectiva financeira, contemplando risco de mercado, em uma transação com derivativo, quando um agente possui uma posição $V(t)$ positiva, está obtendo um ganho no contrato. Este valor, apesar de não se refletir em um fluxo de caixa imediato, pois o contrato somente vence em uma data futura $T > t$, constitui um ganho potencial. Teoricamente, considerando premissas de liquidez para negociação de contratos e de abundância de participantes em cada perfil de risco de crédito, bastaria ao agente se desfazer dessa posição no mercado, conseguindo um valor $V(t) > 0$ e transformando o ganho potencial em fluxo de caixa efetivo.

Em contraste, nessa situação, sua contraparte está incorrendo em uma perda, pois possui um derivativo com valor negativo. Portanto, a análise de *CCR* envolve não somente o valor de um derivativo no vencimento como também seus possíveis valores até a data de vencimento. Afinal, por exemplo, uma contraparte pode se tornar inadimplente a qualquer momento t impondo uma perda de crédito de valor $V(t)$ ao agente. Embora o derivativo só vença no instante T , a contraparte pode mostrar que entrou em *default* ao deixar de honrar outras obrigações com outros credores, por exemplo.

b. Valor mercado-a-mercado esperado (*EV: Expected Mark-to-Market Value*):

Outra métrica de valor comumente usado é o valor mercado-a-mercado esperado (*EV*) que simplesmente representa o valor esperado de V em uma data t . Ou seja, esta métrica está associado ao valor esperado da transação em alguma data no futuro (Gregory, 2010), representado um valor médio de todos os valores possíveis de V em uma data t , ponderados pela probabilidade de ocorrência. Assim, em uma notação simples, pode-se definir o valor mercado-a-mercado esperado como:

$$EV(t) = \mathbb{E}[V(t)] \quad (3.1)$$

A Figura 3.2, apresentando 5 possíveis evoluções do valor do derivativo, ilustra uma possível distribuição dos valores marcados-a-mercado do derivativo em um determinado instante t . Para um caso bem comportado, a função densidade de probabilidade f associada aos possíveis valores v do derivativo é mostrada na curva em azul. Note que essa distribuição reflete a dinâmica das variáveis que afetam o valor do derivativo e não necessariamente é normal. A média de $V(t)$ é evidenciada na Figura 3.2 e representa o valor mercado-a-mercado esperado $EV(t)$ no instante t .

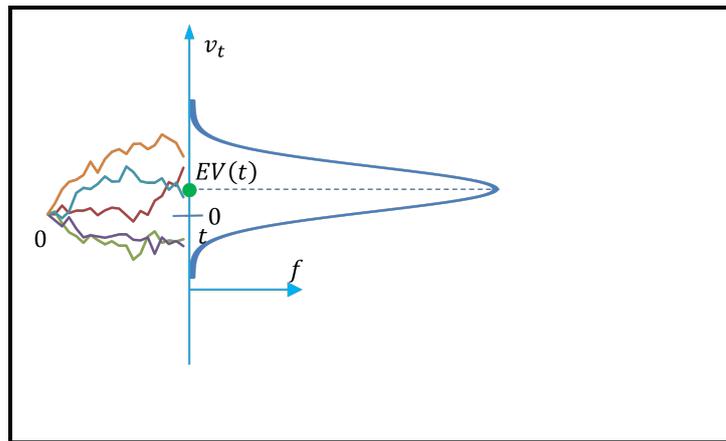


Figura 3.2: Possíveis evoluções e distribuição de probabilidades do valor do derivativo $V(t)$ em um dado instante t .

Finalmente, é importante identificar que o valor mercado-a-mercado esperado pode ser obtido para todos os instantes até a data de vencimento. A linha verde da Figura 3.3 mostra o comportamento de $EV(t)$, indicando que a cada instante t , o valor mercado-a-mercado esperado é uma média de todos os possíveis valores do derivativo nesta data.

3.2.2 Métricas de exposição ao risco de crédito da contraparte

Uma vez apresentadas as métricas de valor, podemos definir algumas métricas associadas a exposição do risco de crédito da contraparte. Em termos de gestão do risco de crédito, torna-se fundamental estabelecer qual a exposição que o agente incorre em função do risco da contraparte. Deve-se enfatizar que, em se tratando de exposição a CCR, a preocupação envolve situações em que o valor do derivativo é positivo. Nestes casos, o agente corre um risco de crédito pois a contraparte pode não honrar o compromisso de pagar sua obrigação financeira. Assim, as realizações de mercado nos quais o valor do derivativo é negativo, apesar de implicar uma perda em função de exposição a risco de mercado, não expõem o agente a CCR.

a. Exposição ao crédito (*CE: Credit Exposure*):

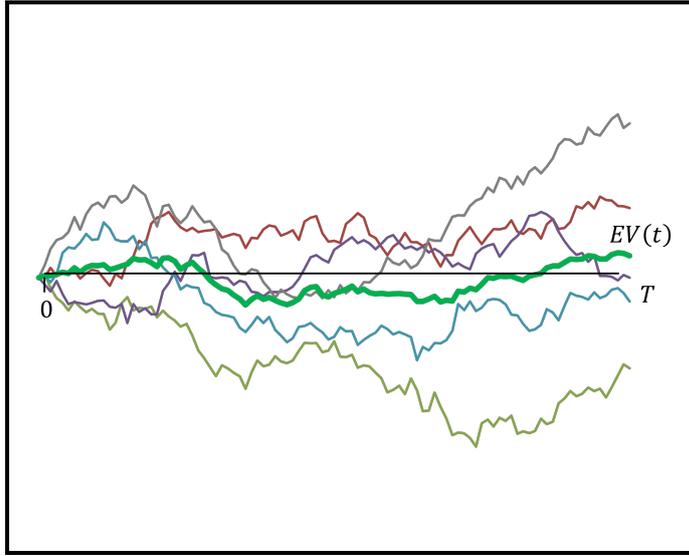


Figura 3.3: Evolução do valor mercado-a-mercado esperado.

A exposição ao crédito (CE), também denominada de exposição corrente (*current exposure*) ou custo de reposição (*replacement cost*), é definida como o maior valor entre zero e valor de mercado de uma transação ou carteira de transações que poderia ser perdido devido ao *default* da contraparte (BCBS, 2006). Ou seja, essa métrica se preocupa em identificar as situações em que o contrato tem um valor positivo para o agente, quando existe uma exposição ao crédito CE equivalente ao valor do derivativo V . Quando o contrato possui um valor negativo, não existe exposição e $CE = 0$.

Assim, conforme já discutido, devido ao caráter assimétrico do CCR , um agente só incorre em risco de crédito, quando o valor do derivativo é positivo (Gregory, 2010), justificando portanto a relevância de uma métrica representativa de situações em que o agente está exposto ao CCR . Seguindo Pykhtin e Zhu (2007), para um contrato derivativo pode-se definir a exposição ao crédito como:

$$CE(t) = \max(V(t), 0) \quad (3.2)$$

A Figura 3.4 mostra comparativamente, a evolução do valor mercado-a-mercado, na linha azul e da exposição a crédito na linha verde, considerando uma realização de mercado específica. Nos instantes em que o valor do derivativo ou da carteira de derivativos é positivo, o agente tem uma posição ganhadora que pode não ser honrada pela contraparte. Nestas condições, sua exposição a crédito $CE(t)$ equivale ao valor do derivativo $V(t)$. Nos instantes em que o valor $V(t)$ do derivativo é negativo, o agente não corre risco de crédito. Esse caráter assimétrico da exposição ao crédito CE está ilustrado na Figura 3.4.

b. Exposição esperada (EE : *Expected Exposure*):

A partir da métrica anterior, uma informação intuitiva para gestão do CCR é o valor médio da exposição ao crédito. Tendo em vista que CE constitui o valor da perda caso a contraparte entre em *default*, torna-se natural identificar o valor médio dessa exposição, isto é, a exposição esperada (Gregory, 2010), uma vez que a exposição pode flutuar em função do comportamento das variáveis de mercado. Assim, exposição esperada EE é o valor médio da distribuição de exposições de crédito CE em qualquer data futura (BCBS, 2006):

$$EE(t) = E[CE(t)] \quad (3.3)$$

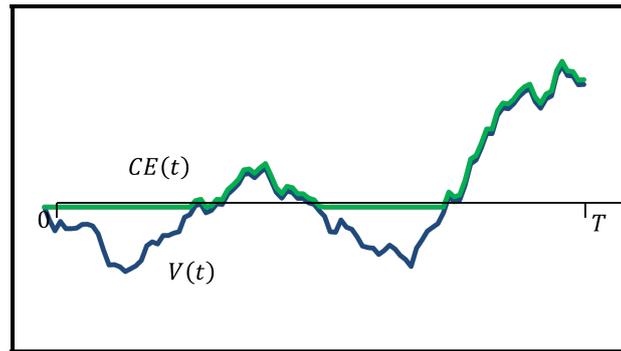


Figura 3.4: Evolução do valor marcado-a-mercado $V(t)$ e da exposição a crédito $CE(t)$, para uma dada realização do mercado.

De maneira similar à construção da distribuição de probabilidades do valor marcado-a-mercado do derivativo $V(t)$ na Figura 3.2, pode-se construir a distribuição de probabilidades da exposição ao crédito $CE(t)$, conforme mostrado na Figura 3.5.

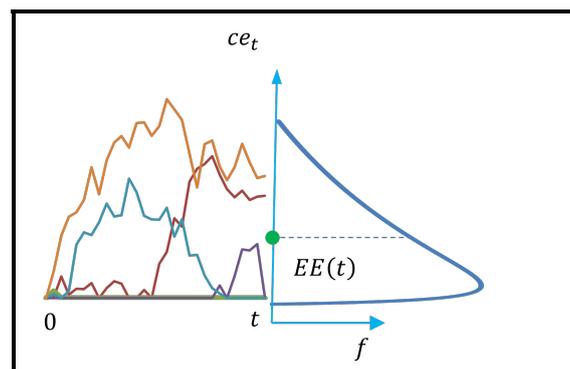


Figura 3.5: Exposição ao risco de crédito.

A Figura 3.6 mostra 4 possíveis realizações da exposição a crédito $CE(t)$ ao longo do tempo que, por sua vez, depende do valor do derivativo $V(t)$ conforme exemplificado na Figura 3.4. A linha em vermelho representa a exposição esperada EE que é um valor médio de todas as possíveis realizações de CE ao longo do tempo.

c. Exposição futura potencial (*PFE: Potential Future Exposure*):

A exposição futura potencial (*PFE*), denominada na Basileia II como pico de exposição (*peak exposure*), representa um valor associado a um determinado percentil α geralmente 95% ou 99%, da distribuição de exposições ao crédito CE em alguma data futura antes do vencimento (BCBS, 2006). Esta definição possui um conceito similar ao do valor em risco (*VaR: Value-at-Risk*), métrica amplamente utilizada na gestão de riscos de mercado. Ou seja, o *PFE* estimado para um dado instante futuro t representa um valor de exposição máxima potencial com determinado grau de confiança.

Por exemplo, se o *PFE* para a data t e para um percentil de 95% é estimado em \$2 milhões, então com 95% de probabilidade, a exposição a crédito a CE em t não ultrapassará \$2 milhões. Existe só 5% de chances de a exposição ao crédito ser superior a \$2 milhões na data t . Seguindo a interpretação de Gregory (2010), a *PFE* ajuda a responder qual seria a pior exposição a *CCR*, dentro de um grau de confiança, que a posição poderia ter em uma data futura. Uma possível

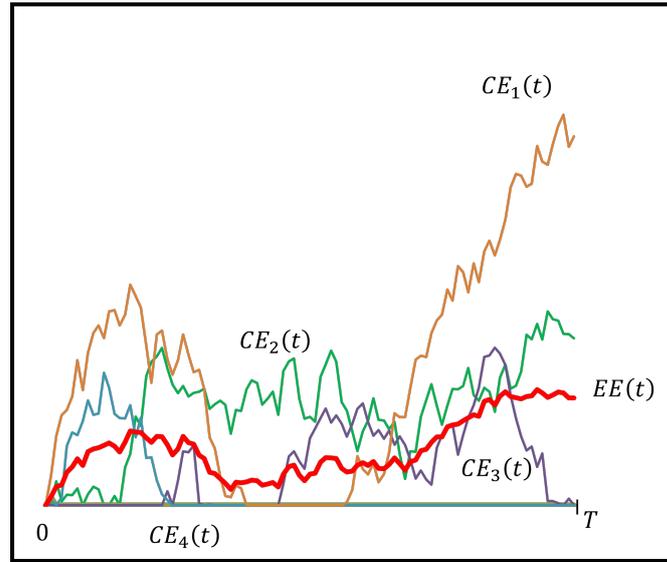


Figura 3.6: Possíveis evoluções e distribuição de probabilidades da exposição ao crédito $CE(t)$ em um dado instante t .

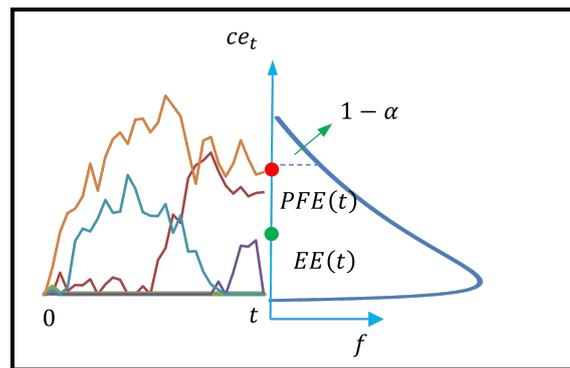


Figura 3.7: Evolução da exposição esperada $EE(t)$.

definição de PFE , para um dado percentil α , é apresentada a seguir.

$$PFE(t) = \inf x : P(CE(t) \leq x) \leq \alpha \quad (3.4)$$

Usando a distribuição de $CE(t)$ da Figura 3.5, pode-se incluir o valor de $PFE(t)$, associado ao percentil α . Assim, existe uma probabilidade de somente $1 - \alpha$ de que a exposição a crédito no instante t ultrapasse o valor da exposição potencial futura PFE . A Figura 3.8 ilustra o valor de $PFE(t)$ em um exemplo.

A Figura 3.8 mostra o valor de PFE em um dado instante. O comportamento desta métrica pode ser acompanhado ao longo do tempo, conforme mostra a Figura 3.10. Identifica-se que com um percentil α alto, PFE como métrica de exposição ao crédito severa se encontra em um patamar maior que EE , que representa uma métrica de valor médio de exposição ao crédito.

d. Exposição esperada efetiva (*Effective EE: Effective Expected Exposure*):

A exposição esperada efetiva em uma data é definida como (i) o maior valor da exposição esperada EE identificado até a data ou, equivalentemente, (ii) como o máximo entre a exposição esperada da data e a exposição esperada efetiva da data anterior (BCBS, 2006). A primeira definição é mais genérica, envolvendo um modelo de tempo contínuo, enquanto a segunda definição está

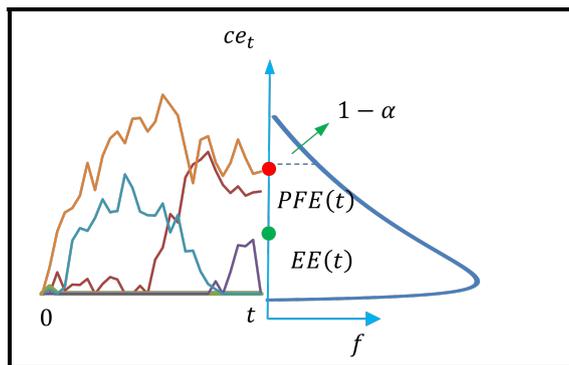


Figura 3.8: Comparativo entre a exposição esperada EE e exposição futura potencial PFE em um dado instante t .

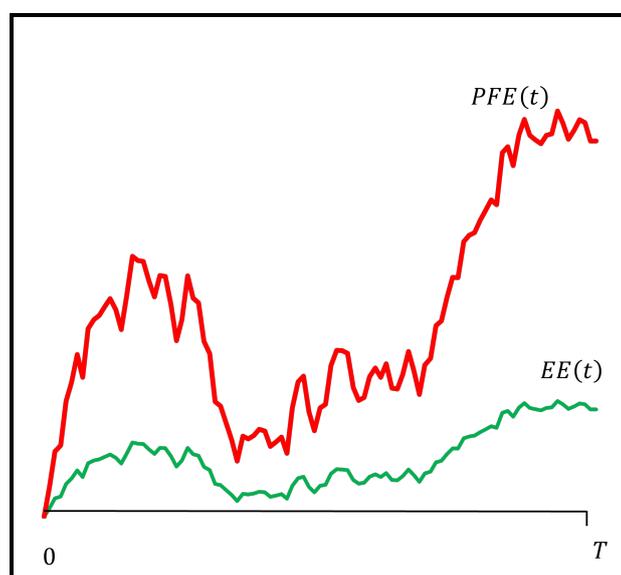


Figura 3.9: Comparativo entre evolução da exposição futura potencial $PFE(t)$ e exposição esperada $EE(t)$.

associada a um modelo de tempo discreto. Em termos gerais, o *EffectiveEE* representa uma exposição esperada EE que é não-decrescente ao longo do tempo (BCBS, 2006; Gregory, 2010), denotando um valor máximo de EE identificado até um dado instante. Assim, para o modelo contínuo, pode-se definir *EffectiveEE* como:

$$EffectiveEE(t) = \sup (EE(\tau)_{0 \leq \tau \leq t}) \quad (3.5)$$

A Figura 3.10 ilustra comparativamente a evolução da exposição esperada $EE(t)$ e da exposição esperada efetiva $EffectiveEE(t)$. Observe, portanto, que $EffectiveEE$ em um dado instante t é, portanto, o maior valor de EE até esse instante.

Até agora, discutimos métricas obtidas para cada instante t . É importante destacar que até o vencimento, os valores dessas variáveis podem se alterar ao longo do tempo. A Figura 3.12 mostra o possível comportamento do valor do derivativo em três instantes diferentes t_1 , t_2 e $t_3 = T$. Para cada instante, há uma distribuição dos possíveis valores V do derivativo, bem como métricas de CE , EE , PFE e $EffectiveEE$.

Outras métricas em gestão do *CCR* visam representar comportamentos da exposição em um determinado intervalo de tempo, comumente para caracterizar um comportamento médio no tempo, considerando os possíveis valores das métricas durante o instante atual até o vencimento do

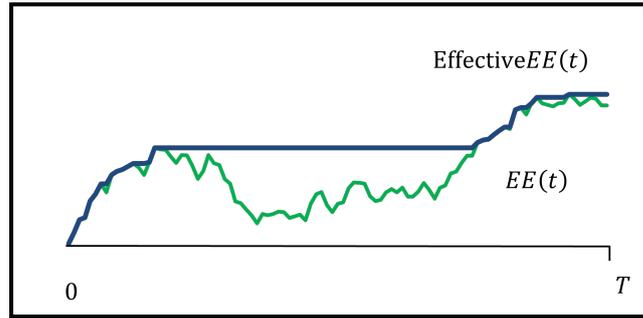


Figura 3.10: Comparativo entre a evolução da exposição esperada $EE(t)$ e da exposição esperada efetiva $EffectiveEE(t)$.

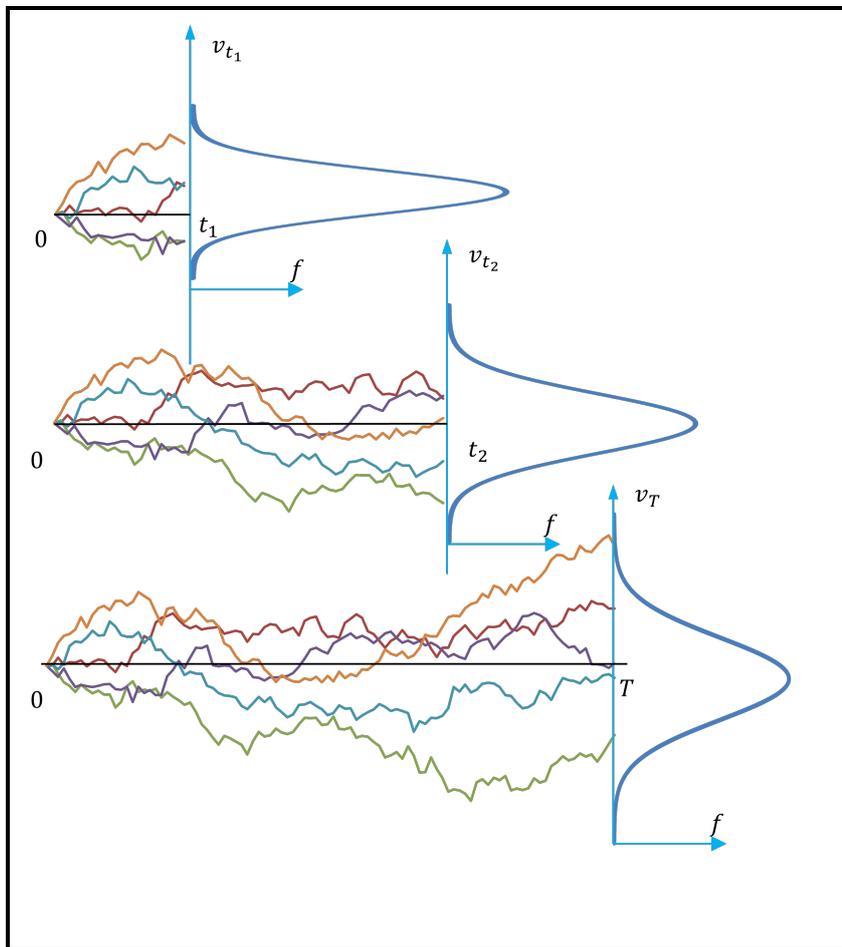


Figura 3.11: Distribuição de valores e métricas de risco.

derivativo ou da carteira de derivativos. Estas métricas são discutidas a seguir.

e. Exposição positiva esperada (EPE : *Expected Positive Exposure*):

A exposição positiva esperada (EPE) é a média no tempo das exposições esperadas EE . No caso de carteiras de derivativos, a média no tempo é ponderada pela proporção que uma exposição individual representa em todo intervalo de tempo (BCBS, 2006). Em um modelo simplificado, considerando uma única operação de derivativo, pode se definir a EPE , considerando um intervalo

de tempo entre a contratação e o vencimento do derivativo, como:

$$EPE = \frac{1}{T} \int_0^T EE(t) dt \quad (3.6)$$

Ou seja, a EPE representa uma média das EE em um dado intervalo de tempo. De acordo com Gregory (2010), essa métrica constitui uma representação numérica resumida da exposição e possui uma forte fundamentação teórica para precificação de avaliação de risco da contraparte.

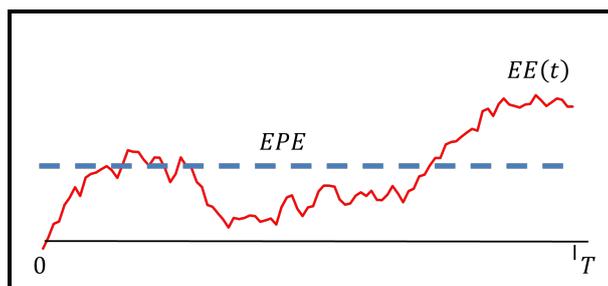


Figura 3.12: Exposição positiva esperada.

f. Exposição positiva esperada efetiva (*EffectiveEPE: Effective Expected Positive Exposure*):

Segundo a definição do Comitê da Basileia (BCBS, 2006), a exposição positiva esperada efetiva (*EffectiveEPE*) é a média, ao longo do tempo, da exposição esperada efetiva durante o primeiro ano. A definição apresentada por Gregory (2010) é menos restritiva, relaxando o aspecto do prazo e estabelecendo que o *EffectiveEPE* representa a média do *EffectiveEE*. Os pesos são representados pela proporção que cada exposição esperada individual representa em todo o intervalo de tempo. Seguindo a definição de Gregory (2012), portanto, pode-se estabelecer a *EffectiveEPE* como apresentado na equação 3.7:

$$EffectiveEPE = \frac{1}{T} \int_0^T EffectiveEE(t) dt \quad (3.7)$$

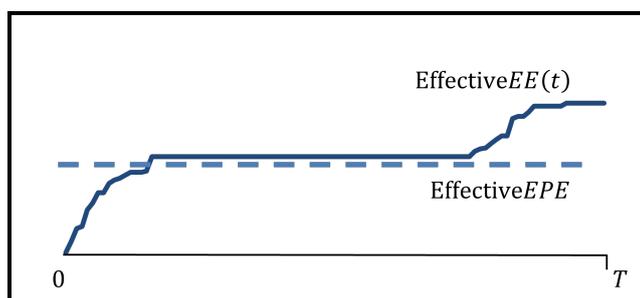


Figura 3.13: Exposição efetiva esperada efetiva.

g. Exposição futura potencial máxima (*MaximumPFE: Maximum Potential Future Exposure*):

A exposição futura potencial máxima é o maior valor da exposição futura potencial PFE em um dado intervalo de tempo (Gregory, 2010). Obviamente, conforme Gregory (2010) destaca, o estabelecimento de uma variável representativa de valor máximo em um dado intervalo de tempo poderia ser realizado para praticamente qualquer métrica de exposição como, por exemplo, no caso da *EffectiveEE*, no entanto, do ponto de vista de gestão de riscos, existe um interesse particular em se identificar um valor máximo de uma exposição potencial futura. Cenários de *stress* podem levar em consideração uma análise da pior perda dentro das piores perdas estimadas com um determinado

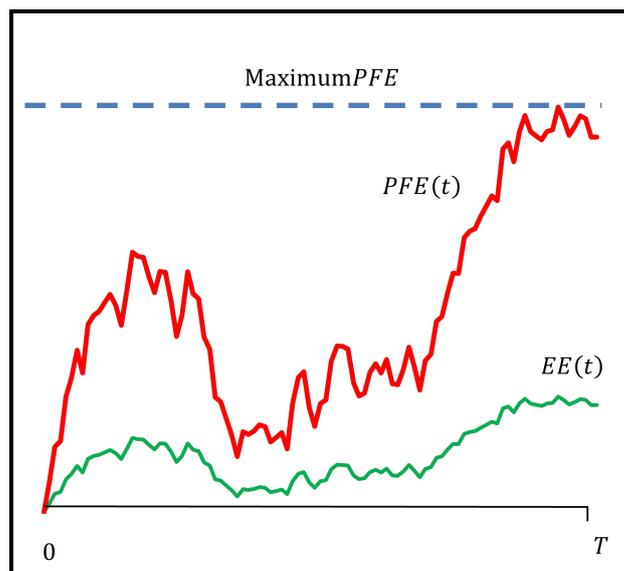


Figura 3.14: *Exposição futura potencial máxima.*

grau de confiança, métrica associada ao PFE .

Capítulo 4

Conceito de *Credit Value Adjustment*

4.1 Considerações Iniciais

O *CVA* (*Credit Value Adjustment* ou *Credit Valuation Adjustment*) é a diferença entre o valor de uma carteira *risk-free* e o valor real da carteira, levando-se em consideração a possibilidade de *default* da contraparte (Brigo *et al.*, 2013). O objetivo de uma análise de *CVA* é atribuir um valor que represente o preço do risco de crédito das contrapartes envolvidas. Destaca-se que a nomenclatura *risk-free* dentro do contexto de *CVA* de carteiras de derivativos é comumente usada nos mercados e na literatura como, por exemplo, em Gregory (2010) e Canabarro (2009), porém deve ser vista com ressalvas.

Na prática, a carteira, mesmo que não tenha risco de crédito da contraparte, pode estar exposta a outros riscos e, portanto, não ser exatamente *risk-free*, isto é, livre de riscos. Por exemplo, se a carteira possui contratos a termo, *swaps* ou opções tradicionais, pode incorrer em risco de mercado em função de flutuações de variáveis como, por exemplo, preços de ações, preços de commodities, taxas de juros ou taxas de câmbio. Assim, variações adversas de parâmetros de mercado podem fazer com que a carteira de derivativos sofra perdas, indicando claramente que a ausência de risco em carteiras denominadas de *risk-free* no *CVA* envolve apenas o *CCR*. É importante destacar que, embora a literatura sobre *CVA* seja recente, a lógica do risco de crédito da contraparte em operações de derivativos já havia sido abordada, por exemplo, em Sorensen e Bollier (1994) e Duffie e Huang (1996).

Enfatiza-se, que a carteira *risk-free*, apesar de não estar exposta especificamente ao risco de crédito da contraparte, pode ainda estar exposta a risco de crédito em geral. Por exemplo, se a carteira *risk-free* contém derivativos de crédito, por exemplo, *CDS* (*Credit Default Swaps*), embora não esteja sujeita a *CCR*, está exposta ao risco de crédito ligado ao ativo-objeto do derivativo. Pelo fato de um derivativo de crédito ter um valor associado a um crédito, a flutuação da qualidade deste crédito representa um fator de risco para o derivativo. Desta forma, a denominação de *risk-free*, no caso da análise de *CVA*, envolve a suposição de que não existe exposição especificamente ao *CCR*, embora obviamente, existam outros riscos como, por exemplo, de mercado ou de crédito, aos quais a carteira pode estar exposta.

Neste estudo, vamos discutir alguns modelos de *CVA* que, embora simplistas, são usados no mercado e permitem analisar características sutis do *CCR* sem as complicações inerentes de uma abordagem com notação mais sofisticada. Assim, inicialmente, apresentaremos uma adaptação do modelo descrito por Canabarro (2009), no qual os diversos componentes do risco de crédito são considerados independentes e, mais ainda, tomados a partir de valores médios, implicando uma modelagem simplificada e útil para análises gerais. Posteriormente, destacamos uma modelagem

mais genérica seguindo, com pequenas adaptações, a formulação de Gregory (2010). Neste modelo, é incluído um instante de *default* que serve como referência para o estabelecimento de valor da carteira de derivativos que, por sua vez, pode impor *CCR*.

4.2 Modelo simplificado de *CVA*

A despeito das diversas abordagens para apresentar o conceito de *CVA*, nessa seção, vamos seguir uma formulação baseada em Canabarro (2009) para evidenciar alguns aspectos relevantes da gestão do risco de crédito da contraparte. Destaca-se, no entanto, que Canabarro (2009) apresenta um modelo bilateral e considera um *CVA* negativo associado ao *CCR*. Em nossa formulação, o *CVA* é positivo, denotando um valor absoluto de ajuste em função do *CCR*. Além disso, discute-se inicialmente um mecanismo unilateral, que serve para justificar a prática de mercado associada à adoção do modelo bilateral. Será também discutida a controvérsia do modelo bilateral (Gregory, 2010), apresentando argumentos para seu uso e os cuidados na gestão do *CVA* quando se considera os riscos de crédito que cada uma das contrapartes impõe à outra.

4.2.1 *CVA* unilateral

Através desse modelo simples, a notação CVA_C^B está associada ao ajuste, para o agente B, no valor *risk-free* de uma carteira de derivativos em função do risco de a contraparte C entrar em *default*. Embora as contrapartes B e C possam ser quaisquer, para fins ilustrativos, vamos considerar a contraparte B como o banco ou *dealer* que comumente oferece o producto à contraparte C, denominada de cliente. A nomenclatura de subscrito relacionado à contraparte que impõe risco de crédito e de superescrito associado à contraparte que tem o valor ajustado é relevante, uma vez que eventualmente, no caso mais genérico, ou seja, no *CVA* bilateral, ambas as partes podem impor risco de crédito. Assim, fazendo-se uma adaptação do modelo de Canabarro (2009), o CVA_C^B pode ser definido como:

$$CVA_C^B = EAD_C \cdot s_C \quad (4.1)$$

Onde:

EAD_C é a exposição esperada, a valor presente, do agente B em relação ao risco de crédito do agente C; e

s_C é a taxa de perda imposta ao agente B no caso de inadimplência do agente C.

Neste modelo simples, a taxa de perda s_C incorpora a probabilidade de *default* PD_C da contraparte C e a taxa efetiva de perda no evento de *default* LGD_C . De forma simplista, vamos adotar que $s_C = PD_C \cdot LGD_C$. A partir dessa formulação, o *CVA* pode ser escrito de forma semelhante a uma das abordagens de requisito de capital da Basileia para risco de crédito em geral, não somente risco de crédito da contraparte:

$$CVA_C^B = EAD_C \cdot PD_C \cdot LGD_C \quad (4.2)$$

Diversas suposições são realizadas neste modelo como, por exemplo, a independência entre a exposição ao *default*, a probabilidade de *default* e a perda dado o *default*. Considera-se, para fins

de análise desse modelo, que EAD_C e s_C assumem valores específicos, sem nos preocuparmos em compreender esses componentes como variáveis aleatórias. Assim, por exemplo, pode-se considerar que os componentes para o cálculo do CVA são dados por valores médios. Em particular, aspectos relacionados com *wrong-way risk* poderiam ser representados, por exemplo, através de relacionamentos positivos entre exposição EAD_C ao CCR e probabilidade de *default* PD_C . É importante destacar que uma das abordagens de requisito de capital para risco de crédito definida pelo BCBS (2006) também considera, por exemplo, EAD , PD e LGD de forma simplificada, através de valores médios.

Usando o CVA , portanto, o agente B precifica o valor $\tilde{\Pi}_C^B$ de sua carteira de derivativos cuja contraparte é o agente C como:

$$\tilde{\Pi}_C^B = \Pi - CVA_C^B \quad (4.3)$$

onde:

Π é o valor da carteira *risk-free* ou *credit-risk-free*, isto é, da carteira livre de risco de CCR .

Assim, a carteira de derivativos, sob a perspectiva do agente B, vale $\tilde{\Pi}_C^B$, que é o valor de uma carteira livre de risco de crédito da contraparte subtraído de um valor CVA_C^B representativo do CCR que a contraparte C impõe. Esta análise envolve o conceito de CVA unilateral no sentido de que apenas uma das contrapartes incorpora no valor da carteira o CCR . Do ponto de vista gerencial, o ajuste através do CVA faz sentido uma vez que a carteira de derivativos, na qual existe exposição ao CCR , deve ter um valor menor do que uma carteira *risk-free*.

Uma das críticas para o modelo unilateral é que não propicia a simetria típica do mercado de derivativos, onde as operações estão associadas ao chamado jogo de soma zero ou *zero-sum game*. Neste tipo de produto, quando uma parte ganha um valor, a contraparte perde o mesmo valor e vice-versa. Sem considerar o CCR , em um contrato derivativo, a posição de um agente é oposta ao de sua contraparte. Isto é, dentro de um conceito de *risk-free*, se a carteira de derivativos de um agente vale Π , a mesma carteira deve valer $-\Pi$ para sua contraparte.

O problema de falta de simetria fica evidente quando se utiliza o mesmo mecanismo de CVA unilateral para o agente C. Supondo que a carteira *risk-free* vale Π para o agente C, o valor $\tilde{\Pi}_B^C$ da carteira de derivativos, levando em conta o risco de crédito da contraparte B é definido como:

$$\tilde{\Pi}_B^C = \Pi - CVA_B^C \quad (4.4)$$

Note que o valor CVA_B^C para o agente C depende da sua exposição em relação ao risco de crédito de sua contraparte e à probabilidade de *default* e à perda dado o *default* do agente B, pois:

$$CVA_B^C = EAD_B \cdot PD_B \cdot LGD_B \quad (4.5)$$

Dentro do CVA unilateral, portanto, o agente B precifica a carteira como $\tilde{\Pi}_C^B = \Pi - E_C \cdot PD_C \cdot LGD_C$ enquanto o agente C como $\tilde{\Pi}_B^C = \Pi - EAD_B \cdot PD_B \cdot LGD_B$. Note que somente em condições muito particulares a simetria $\tilde{\Pi}_C^B = -\tilde{\Pi}_B^C$ valeria, uma vez que as probabilidades de *default* de cada contraparte bem como a perda dado o *default* podem ser bastante diferentes para cada agente, mesmo que a exposição esperada fosse simétrica. Adicionalmente, a própria exposição ao risco de crédito da contraparte pode ser distinta dependendo das características dos derivativos que compõem a carteira. Assim, a falta de simetria entre $\tilde{\Pi}_B^C$ e $\tilde{\Pi}_C^B$ implica que dificilmente as

duas contrapartes concordariam sobre o valor a ser apurado em uma transação com derivativos (Sorensen e Bollier, 1994).

4.2.2 CVA bilateral ou BCVA

Considerando que na maioria das situações, usando o CVA unilateral, $\tilde{\Pi}_C^B \neq \tilde{\Pi}_B^C$, as contrapartes teriam dificuldades em definir um valor justo para essa carteira de derivativos. De acordo com Gregory (2010), através do CVA unilateral, em teoria, duas contrapartes nunca entrariam em acordo sobre os termos de uma nova transação, uma vez que ambas buscariam um valor melhor, negociando preços em função do CCR.

O CVA bilateral, apesar de controverso, por motivos que veremos mais adiante, soluciona o problema de falta de simetria encontrado no CVA unilateral. No CVA bilateral, também denominado de BCVA, o ajuste no valor de uma carteira *risk-free* decorre tanto do risco de crédito que a contraparte impõe ao agente quanto do risco de crédito que o agente impõe à contraparte. Assim, sob a perspectiva do agente B, o BCVA é dado por:

$$BCVA^B = CVA_{BC}^B = CVA_B^C - CVA_C^B \quad (4.6)$$

onde:

CVA_{BC}^B indica o ajuste, para a contraparte B, quando se considera tanto a possibilidade de C quanto a possibilidade de B entrarem em *default*.

Portanto, levando em consideração o BCVA, o valor da carteira de derivativos para o agente B é dado por:

$$\tilde{\Pi}_C^B = \Pi - BCVA^B = \Pi - CVA_{BC}^B = \Pi - (CVA_B^C - CVA_C^B) \quad (4.7)$$

De maneira análoga, pode-se obter o valor da carteira de derivativos para o agente C:

$$\tilde{\Pi}_B^C = \Pi - BCVA^C = \Pi - CVA_{BC}^C = \Pi - (CVA_B^C - CVA_C^B) \quad (4.8)$$

Esta definição de valor de carteira para os dois agentes, supondo o ajuste pelo BCVA, mantém a simetria, uma vez que sempre $\tilde{\Pi}_C^B = -\tilde{\Pi}_B^C$. Desta forma, usando BCVA, o agente B e o agente C teriam um mesmo valor, em termos absolutos, que poderia servir como referência para suas precificações, situação que não ocorria quando se usava o CVA unilateral.

Note que o uso do BCVA também permite ajustes mais adequados de exigência de garantias ou colaterais, pois leva em consideração tanto o risco de crédito que um agente impõe à sua contraparte quanto o risco de crédito que sua contraparte lhe impõe. Assim, uma contraparte com mais risco de crédito, pode ter uma maior exigência de colocação de garantias na operação.

Apesar de o BCVA permitir a manutenção da simetria de valor, as partes ainda podem discordar em relação aos parâmetros de cada ponta do CVA. Por exemplo, uma vez que as probabilidades de *default* de ambas as partes afetam o valor da carteira de derivativo, o BCVA não evita a ocorrência de conflitos sobre estimativas de componentes do risco de crédito da contraparte.

Todavia, em mercados mais desenvolvidos, disputas com relação à estimação das variáveis

relevantes para a precificação do *CCR* podem ser reduzidas em função de: (i) existência de empresas de *rating* que acompanham a qualidade de crédito de várias contrapartes, (ii) liquidez do mercado de títulos de dívida que possibilitam a construção de estruturas temporais de *spread* de crédito e (iii) negociação de derivativos de crédito sobre contrapartes específicas que permitem uma estimativa de mercado para a *PD* combinada com a *LGD*.

Apesar de esses aspectos eventualmente não serem suficientes para uma acurada mensuração do *CCR*, diminuem conflitos potenciais sobre percepção do risco de crédito. Destaca-se que na crise de 2007-2008, *ratings* definidos pelas agências de classificação de risco de crédito mostraram-se pouco realistas. Além disso, em períodos de crise, problemas de liquidez podem surgir, aumentando-se *spreads* de compra e venda e tornando pobres as estimativas de risco baseadas em valores de mercado.

Desconsiderando aspectos de estimação dos componentes do *CCR*, no que diz respeito à simetria, o *CVA* bilateral ou *BCVA* apresenta vantagens sobre o *CVA* unilateral, sendo agora amplamente utilizado pelo mercado (Gregory, 2010). Em alguns sistemas de gestão de *CCR*, o *BCVA* é decomposto entre *CVA* (*Credit Value Adjustment*) e *DVA* (*Debt Value Adjustment*) representando, respectivamente, o preço do risco de crédito que o agente corre em função da contraparte e o preço do risco de crédito que a contraparte corre em função do agente. Apesar de o *CVA* e o *DVA* serem, no caso simplificado, uma decomposição do *BCVA*, vale a pena discutir seus conceitos, pois têm uma ligação com critérios contábeis.

4.3 Análise através de CVA e DVA

Comumente, bancos e *dealers* de derivativos criam estruturas nas quais, pelo menos teoricamente, o risco de crédito que impõe às suas contrapartes é extremamente baixo, sendo muitas vezes considerados *triple A* ou *AAA* (Li, 1998). Neste contexto, o banco ou o *dealer* praticamente não possuem risco de crédito. Assim, a precificação de uma carteira de derivativos dá ênfase ao risco de crédito do cliente do banco ou contraparte do *dealer*.

Entretanto, conforme já comentado, a crise financeira recente mostrou que mesmo estruturas *triple A* podem ter um risco de crédito considerável e, portanto, contrapartes também estariam expostos à potenciais quebras de bancos e *dealers*. Neste contexto, levando-se ainda em consideração sua característica de simetria de valor, o *BCVA* parece se justificar.

No entanto, a precificação de carteiras de derivativos usando o *BCVA* pode conduzir a resultados que mascaram uma situação de degradação do valor de uma carteira de derivativos. Para ilustrar essa última observação, podemos analisar o *BCVA* através de uma outra perspectiva. A partir da equação 4.7, pode-se estruturar um balanço que representa o valor da carteira de derivativos sob a perspectiva do agente B, com ajuste do *BCVA*. Sem perda de generalidade, vamos supor que $\Pi > 0$, evidenciando que o valor presente da carteira de derivativos *risk-free* é positivo para o agente B.

Ativo	Passivo
V_F CVA_{BA}	CVA_{AB}

Figura 4.1: Valor do derivativo, considerando CVA.

Note portanto que, para o agente B, o lado ativo da estrutura de balanço indica que possui

um bem com um valor equivalente ao da carteira de derivativos *risk-free* Π adicionado pelo preço CVA_B^C do risco de crédito que impõe à contraparte C. Em contrapartida, o lado passivo do balanço sugere que possui um valor CVA_C^B que lhe diminui o valor total, em função da exposição ao risco de crédito da contraparte B. Esta visão na forma de balanço traz uma proximidade com conceitos contábeis de débito e crédito e sugere um ajuste na notação.

Considerando a convenção contábil, uma conta da ponta ativa do balanço aumenta quando é debitada enquanto uma conta da ponta passiva do balanço aumenta quando é creditada. Assim, quando a exposição do agente C ao risco de crédito do agente B aumenta, então o CVA_C^B na ponta passiva aumenta, havendo um crédito. Para essa exposição, sob a perspectiva do agente B, a adequação da nomenclatura CVA , ou seja, *Credit Value Adjustment* torna-se evidente. No entanto, a nomenclatura CVA parece não ser compatível com a posição contábil do CVA_B^C , na ponta ativa de seu balanço.

O aumento do CVA_B^C representaria um débito adicional na ponta ativa. Desta forma, uma nomenclatura usual para o conceito do preço CVA_C^B correspondente ao risco de crédito que o agente B impõe ao agente C, é DVA_C^B ou *Debt Value Adjustment* ou *Debt Valuation Adjustment*. Assim, a nomenclatura DVA possibilita uma compreensão seguindo uma lógica contábil, muito embora o conceito seja eminentemente financeiro. Note ainda que, definindo DVA da forma a seguir, pode-se simplificar a notação, evitando-se a troca da ordem nos índices:

$$DVA_C^B = CVA_B^C = EAD_B \cdot PD_B \cdot LGD_B \quad (4.9)$$

Sob o ponto de vista de estrutura contábil, portanto, para o agente B, a carteira de derivativos pode ser decomposta pelos seguintes valores, em posições ativas e passivas, da seguinte maneira.

Ativo	Passivo
V_F DVA_{AB}	CVA_{AB}

Figura 4.2: Valor do derivativo considerando CVA e DVA.

Essa configuração é útil para se compreender alguns resultados surpreendentes evidenciados por instituições financeiras na crise de 2007-2008. Em períodos de grande turbulência, quando se esperava uma deterioração do valor das carteiras de derivativos dos bancos, alguns relatórios apresentavam ganhos expressivos para as instituições financeiras. A Figura 4.2 ajuda a ilustrar o mecanismo de ganho, propiciado pelo uso do CVA bilateral, ou seja, do $BCVA$, ou de modo equivalente do CVA e DVA .

Considerando o modelo bilateral, o valor de uma carteira de derivativos $\tilde{\Pi}$, para o agente B, pode aumentar em três casos: (i) quando Π aumenta, (ii) quando CVA_C^B diminui ou (iii) quando DVA_C^B aumenta.

No primeiro caso, o valor Π da carteira *risk-free* depende dos fatores de risco que influenciam no preço dos derivativos. Note que esses fatores de risco, pelo próprio conceito de *risk-free* no contexto da nossa análise, não estão ligados ao risco de crédito das contrapartes. Assim, Π não se altera devido ao CCR .

No segundo caso, para $\tilde{\Pi}_C^B$ aumentar, o risco de crédito que o agente C impõe ao agente B deve diminuir. Usando a equação 4.3, sendo $CVA_C^B = EAD_C \cdot PD_C \cdot LGD_C$ então, $\tilde{\Pi}_C^B$ pode

aumentar caso diminuam ou o valor presente da exposição do agente B frente ao risco de crédito do agente C, ou a probabilidade de *default* do agente C e ou a perda dado o *default* relativa à inadimplência do agente C. Este resultado é relativamente intuitivo, pois quanto menor risco em relação à sua contraparte, melhor para o agente B.

O terceiro caso é menos intuitivo. Para o valor da carteira do agente B aumentar, considera-se que $DVA_C^B = EAD_B \cdot PD_B \cdot LGD_B$ aumente, pois a ponta ativa seria maior. Isso ocorre quando a exposição do agente C em relação ao agente B aumenta e, mais surpreendentemente, quando a probabilidade de *default* do agente B e a taxa de perda dado o *default* do agente B também aumentam. Ou seja, considerando o modelo bilateral do CVA, o valor da carteira de derivativos para um agente B pode aumentar caso a sua própria qualidade de crédito se deteriore.

Por exemplo, se a probabilidade de *default* do agente B aumentar, DVA_C^B pode aumentar, induzindo um maior valor $\tilde{\Pi}_C^B$ para sua carteira de derivativos com a contraparte C. Obviamente, nesse caso, o maior valor de $\tilde{\Pi}_C^B$ devido ao aumento do DVA_C^B dificilmente pode ser considerado como uma boa notícia. Conforme Gregory (2010) sugere, deve-se analisar com cautela o conceito de que uma instituição possa extrair valor de seu próprio *default*, uma vez que dificilmente o DVA_C^B pode se transformar em um ganho efetivo para a instituição financeira.

Assim, no modelo bilateral, em um contexto em que a qualidade de crédito do *dealer* sofre uma degradação acentuada maior que a da sua contraparte, o CVA pode conduzir a avaliações inadequadas do valor da carteira. Note que na crise de 2007-2008, instituições como *Lehman Brothers* e *AIG*, tiveram uma deterioração de sua qualidade de crédito maior que a maioria de suas contrapartes, provavelmente induzindo maiores valores de *DVA* e, portanto uma marcação a mercado $\tilde{\Pi}_C^B$ de sua carteira de derivativos maior. Porém, o maior valor $\tilde{\Pi}_C^B$ apurado não necessariamente se transformou em ganho e não impediram que essas instituições quebrassem.

Portanto, embora o CVA bilateral propicie uma simetria no valor da carteira de derivativos para as duas contrapartes envolvidas, pode conduzir a avaliações inadequadas em situações em que parâmetros de CCR se alteram drasticamente. Deve-se ressaltar que a análise através de estrutura de balanço, apesar de intuitiva do ponto de vista contábil, também deve ser compreendida do ponto de vista de variáveis aleatórias. Apesar de o modelo discutido nesta seção ser simplista no sentido de que *PD*, *LGD* e *EAD* são dados por valores médios, na prática, são variáveis aleatórias que podem conter alguma forma de relacionamento.

Assim, enquanto do ponto de vista contábil, a ponta ativa comumente independe da ponta passiva, sob uma perspectiva prática, CVA e DVA podem ter relacionamento, principalmente em função de risco sistêmico, ou seja, do risco que não é idiossincrático ou específico de cada contraparte e que depende de condições macros, por exemplo. Embora alguns modelos possam considerar que a *PD* do agente é independente da *PD* da contraparte, pode haver situações de mercado em que estas duas variáveis estão relacionadas. Períodos de crescimento e aquecimento da economia geralmente implicam em menores *PDs* para todos os agentes. Em contrapartida, períodos de crise ou recessão também causam aumento nas *PDs* de todos os agentes. Desta forma, apesar de as pontas do CVA e do DVA na estrutura de balanço parecerem independentes, podem conter uma dependência relevante.

4.4 Pontos adicionais sobre o uso de CVA bilateral

Conforme já discutido, uma justificativa relevante para o uso do CVA bilateral, ou seja, BCVA, recai na questão de simetria de valores de carteiras para ambas as contrapartes. Obviamente, pela formulação, a análise através de CVA e DVA segue essencialmente o conceito de BCVA, com uma maior proximidade de uma estrutura contábil, facilitando a compreensão de mecanismos que

afetam o valor de uma carteira de derivativos.

A discussão da seção anterior alerta para o fato de que o *BCVA*, apesar de propiciar simetria no valor da carteira para as contrapartes, pode conduzir a incentivos inadequados. Por exemplo, se a instituição usa um modelo de *BCVA* singelo, operadores cujo salário esteja atrelado à remuneração variável podem inflar o valor de suas carteiras de derivativos, buscando prejudicar a qualidade de crédito de suas próprias instituições, para terem um maior valor de *DVA*. Assim, é importante que a instituição tenha um controle sobre os componentes do valor da carteira de derivativos e desenvolva políticas de gestão de riscos e de remuneração que sejam alinhadas como o processo de criação de riqueza para o acionista ou proprietário da instituição.

Um *design* adequado de políticas e mecanismos de controle e gestão pode portanto evitar problemas de incentivos perversos que prejudiquem a instituição, mas que beneficiem funcionários. Ainda assim, alguns aspectos gerenciais sobre *CVA* e *BCVA* são importantes e merecem uma discussão antes de prosseguirmos com a apresentação de outros modelos quantitativos.

A ideia de simetria imposta pelo *BCVA* facilita a comunicação entre as contrapartes. Por exemplo, se um mesmo valor serve como referência, eventuais necessidades de garantias adicionais para fazer frente ao *CCR* tornam-se mais fáceis de serem acordadas. Assim, se o valor da carteira de derivativos, que é o mesmo em valores absolutos, para ambas as contrapartes, está se distanciando em relação ao valor da carteira *risk-free*, então as partes podem avaliar a necessidade de novas garantias devido à variação relativa de suas qualidades de crédito.

De forma oposta, se houver uma redução da diferença entre o valor da carteira *risk-free* e o valor da carteira estimado usando *BCVA*, então as partes podem estudar alguma liberação de garantias. Estes mecanismos de rebalanceamento de garantia a partir do *BCVA* podem diminuir custos de transação.

Porém, deve-se atentar para o fato de que o *BCVA* pode não necessariamente constituir um valor de base adequado. Em diversas situações, o valor da carteira $V_A B$ pode assumir valores maiores que o da carteira *risk-free* Π . Por exemplo, para o agente B, uma combinação de riscos de créditos na qual $DVA_C^B > CVA_C^B$ conduz a $\tilde{\Pi}_C^B > \Pi$, fato que não seria adequado, pois o valor de uma carteira livre de risco de *CCR* deveria ser sempre maior que o de uma carteira com *CCR*. Afinal, dado uma mesma estrutura de resultados possíveis, o preço de um ativo com risco deveria ser menor que o preço de um ativo livre de risco. Portanto, o benefício de simetria de valores do *BCVA* é acompanhado também da possibilidade de o valor atribuído à carteira $\tilde{\Pi}_C^B$ se tornar pouco realista.

A despeito da possibilidade de que o valor de ativo com risco seja maior do que o valor de um ativo livre de risco, o *BCVA* é ainda justificável em função de demandas de clientes de *dealers*, embora na prática, a pressão pelo modelo bilateral possa ter sido maior sob o aspecto de competição na oferta de derivativos do que de competição na demanda.

Para ilustrar melhor esse ponto, podemos apresentar um exemplo. Suponha um banco ou *dealer* de derivativo que esteja negociando um contrato com sua contraparte. Para simplificar a análise, vamos supor que o banco ainda não possua nenhuma exposição ao risco de crédito do cliente, nem vice-versa.

Note que o objetivo, neste exemplo, é precificar um novo contrato de derivativo com uma contraparte. Nas discussões realizadas anteriormente, a ideia era atribuir um valor a uma carteira de derivativos que uma instituição já possuía com a contraparte. Apesar da similaridade no que diz respeito à precificação ou atribuição de valor, neste exemplo, o *dealer* de derivativos deve incorporar o preço do risco de crédito da contraparte no valor que cobraria do cliente para realizar essa transação. Assim, caso o banco use uma análise de *CVA*, o preço mínimo que estaria cobrando

do cliente para esse contrato seria um valor Π de um contrato equivalente *risk-free*, adicionado do CVA, referente ao risco de crédito que o cliente lhe impõe. Ou seja, o banco deveria cobrar de sua contraparte um preço P equivalente a:

$$P_C^B = \Pi + CVA_C^B \quad (4.10)$$

Cobrar apenas o valor Π do contrato *risk-free* não seria razoável para o banco, uma vez que existe um risco adicional associado ao fato de o cliente poder não honrar eventuais perdas. No entanto, para o cliente, o valor P_C^B pode ser considerado alto. Em termos de negociação, o cliente gostaria de pagar um preço mais baixo. Obviamente, o preço mais baixo poderia advir de um CVA mais baixo que, por sua vez, decorreria, por exemplo, de menores estimativas para PD_C e $LGDC$.

Assim, em geral, a contraparte C gostaria que sua probabilidade de *default* e a perda dado o *default* fossem estimados com valores baixos. Esta dinâmica é comum também em qualquer outra operação de empréstimo tradicional. Em transações tradicionais, o cliente que toma recursos gostaria que o banco fizesse uma avaliação de probabilidade de *default* e perda dado o *default* baixas, pois isso reduziria o preço do empréstimo, na forma de menores taxas de juros.

Suponhamos, para fins de simplificação da discussão, que as contrapartes entrem em acordo sobre valores de PD_C e $LGDC$ razoáveis para serem usados na fórmula do CVA da equação 4.3. O agente C ainda teria uma forma de tentar reduzir o preço do derivativo. Seu argumento é que, ao entrar no contrato, o agente B também corre um risco de crédito da contraparte, pois o agente B pode eventualmente não honrar seus compromissos. Desta forma, esse risco também deve ser precificado, diminuindo o preço que o agente C deve pagar ao agente B, em função do CCR que está correndo. A nova fórmula de precificação, típica de uma análise de CVA bilateral é dada por:

$$P_B^C = \Pi + CVA_C^B - CVA_B^C \quad (4.11)$$

Portanto, o CVA bilateral tem também importância na definição de preços competitivos. Do ponto de vista de oferta e demanda, note que cada agente gostaria de maximizar sua riqueza. Para o *dealer* de derivativos, o ideal seria conseguir cobrar um valor cheio $P_C^B = \Pi + CVA_C^B$. Todavia, seu cliente, sendo racional, tentaria negociar um valor menor, descontando o preço associado ao risco de o *dealer* entrar em *default*. A equação 4.11, com um mecanismo de ajuste bilateral, apesar de possuir deficiências explicitadas anteriormente como, por exemplo, propiciar a apuração de ganho quando o risco de crédito do próprio agente se deteriora, possui uma justificativa associada a valores de equilíbrio em uma negociação com derivativos.

É importante ressaltar que, mesmo que o cliente do derivativo não tenha consciência de seu poder de barganha, isto é, não tenha capacitação para identificar que pode reduzir o preço do derivativo em um valor CVA_C^B decorrente do risco de crédito do *dealer*, a competição na ponta da oferta de produtos pode conduzir a um preço de equilíbrio que seja mais compatível com o modelo bilateral da equação 4.11 do que com o modelo unilateral da equação 4.3.

Em um modelo simplista, supondo a existência de competição entre vários *dealers* com mesmo nível de risco de crédito, se uma instituição cobra o valor cheio $P_C^B = \Pi + CVA_C^B$, outra instituição poderia ofertar um valor mais baixo, considerando que o preço justo do contrato seria menor, já que o cliente também incorre em risco de crédito da contraparte. Considerando premissas de simetria de informação, competição perfeita e inexistência de custos de transação, então o preço do contrato deveria se aproximar de um modelo bilateral de ajuste pelo CVA com valor equivalente a $P_C^B = \Pi + CVA_C^B - CVA_B^C$.

Assim, mesmo em uma situação em que o cliente do *dealer*, isto é, demandante do derivativo,

não tenha consciência de seu poder de barganha, ainda assim a competição no lado da oferta de produtos pode pressionar preços a valores mais próximos ao estabelecido por modelos de *CVA* bilaterais. Evidencia-se que, em diversas situações, os clientes dos *dealers* possuem menor domínio sobre técnicas de análise de risco de produtos financeiros.

É importante ressaltar que, embora teoricamente as pressões competitivas possam conduzir a um preço adequado ao cliente do *dealer*, na prática o mercado pode não ser totalmente perfeito. Desta forma, questões sobre assimetria de informação, custos de transação, etc... justificam ao cliente do *dealer* uma capacitação sobre operações com derivativos e, mais recentemente, com modelos de precificação do *CCR*. Uma vez que aspectos relacionados ao *CVA* podem afetar preços, seria importante uma maior capacitação dos agentes que em geral demandam derivativos para proteção. O desconhecimento sobre mecanismos de precificação podem conduzir a falhas de julgamento e assunção demasiada de riscos.

Por exemplo, suponha que existam dois *dealers* com risco de crédito diferentes, banco B1 e banco B2 que ainda não possuem operações com um potencial cliente C. Usando um modelo de *CVA* bilateral, o preço que o *dealer* de maior qualidade de crédito cobra é menos competitivo do que o preço que o *dealer* de menor qualidade de crédito cobra. Desta forma, se o cliente analisa somente o preço do derivativo e não avalia o *CCR*, pode ficar inclinado a entrar em uma transação com uma contraparte de pior qualidade de crédito.

O fundamento dessa afirmação pode ser compreendido analisando-se a equação 4.11. Considerando que o agente B1 tem menor risco de crédito, então o valor que deve descontar do preço para seu cliente CVA_{B1}^C é menor que o valor CVA_{B2}^C que o agente B2 tem que descontar do preço. Ou seja, sendo $CVA_{B1}^C < CVA_{B2}^C$ então $P_{B1}^C > P_{B2}^C$ e, portanto, em termos de preço, o banco B1 é menos competitivo, pois deve cobrar um preço maior de seu cliente. Assim, clientes que não avaliam o *CCR* podem fomentar uma indústria em que os *dealers* de pior qualidade de crédito são aqueles que conseguem mais mercado.

É importante destacar que situação semelhante existe em operações tradicionais de investimentos. Por exemplo, diferentes bancos pagam diferentes taxas para investidores em seus *CDBs* (Certificado de Depósito Bancário). Bancos mais arriscados devem prometer taxas de juros maiores, refletindo a exigência de seus clientes por maior retorno esperado em função do maior risco de crédito. O ajuste do preço nestas operações tradicionais está na taxa de juros paga pelo *CDB*. Em geral, os gestores financeiros identificam que bancos que estão pagando maiores taxas de juros ou ofertando menores preços estão oferecendo produtos mais arriscados. No entanto, dada a novidade do *CVA* e a complexidade dos contratos derivativos, talvez gestores financeiros ainda não consigam avaliar o impacto do *CCR* no valor de contratos, colocando-se em uma frágil posição de negociação. De fato, a crise de 2007-2008 sugere que nem mesmo bancos de investimentos sofisticados dominavam o *CCR*.

Capítulo 5

Modelagens alternativas de *CVA*

5.1 Considerações iniciais

O modelo discutido no estudo anterior é extremamente simplista, pois se considera que o *CVA* é obtido multiplicando-se variáveis associadas ao risco de crédito de forma semelhante a um dos modelos da Basileia II para requisitos de capital. A multiplicação dessas variáveis sugere que estão sendo utilizados valores médios não somente da exposição ao risco de crédito (*EAD*), como também da probabilidade de *default* (*PD*) e da perda dado o *default* (*LGD*). Apesar de esse modelo ser utilizado na prática, é importante destacar que cada um de seus componentes podem por si só representar variáveis aleatórias.

Assim, neste modelo simples, o *wrong-way risk* não pode ser analisado, pois a exposição e a probabilidade de *default* não estão sendo tratadas como variáveis aleatórias. O modelo discutido no capítulo anterior não possibilita, portanto, o estudo do *wrong-way risk*, uma vez que este risco advém da existência de dependência ou relacionamentos entre as variáveis aleatórias *EAD*, *PD* e *LDG*. Finalmente, o modelo também não incorpora informação sobre o instante do *default*. Com isso, elementos como probabilidade de falha ou *default* ao longo do tempo também não são incorporados.

Todavia, a despeito de diversas limitações, o modelo permite o entendimento de alguns pontos relevantes sobre o *CVA* como, por exemplo, a discussão sobre unilateralidade ou bilateralidade do *CVA*. É interessante evidenciar que, *ex-post*, algumas armadilhas da análise de *CVA* parecem evidentes. Porém, a crise de 2007-2008 sugere que alguns aspectos do *CCR* eram desconhecidos ou foram negligenciados pelo mercado financeiro. Desta forma, é conveniente estabelecer um modelo que contemplem mais particularidades da gestão de risco de crédito da contraparte. Neste capítulo, serão explorados modelos mais genéricos para o estudo de *CCR*, incluindo-se tanto o *CVA* unilateral quanto o *CVA* bilateral.

5.2 Modelo geral de *CVA*

5.2.1 *CVA* unilateral

Utilizado um modelo simples na seção anterior para ilustrar elementos fundamentais do *CVA*, vamos agora discutir um modelo que possibilita evidenciar aspectos teóricos mais aprofundados da modelagem de *CVA*, apresentando a abordagem de Gregory (2010) com adaptações na notação. Inicialmente, vamos supor que o valor de uma carteira de derivativos no instante t , com contrato de maior maturidade vencendo em T e sem risco de crédito da contraparte, seja $\Pi(t, T)$. Ou seja,

consideremos um valor de referência de uma carteira de derivativos idêntica, porém *risk-free*, no sentido de que não incorre em *CCR*.

Conforme já discutido, o *CVA* representa um ajuste no preço de uma carteira livre de risco de crédito em função do risco de crédito da contraparte. A ideia é identificar, portanto, um valor de ajuste $CVA_C^B(t, T)$ tal que:

$$\tilde{\Pi}_C^B(t, T) = \Pi(t, T) - CVA_C^B(t, T) \quad (5.1)$$

onde:

$\tilde{\Pi}_C^B(t, T)$ representa o valor no instante t da carteira de derivativos, considerando o risco de crédito da contraparte, sendo que a operação mais longa tem vencimento em T .

A análise conduzida nesta seção envolve o *CVA* unilateral, no qual apenas uma das contrapartes possui risco de crédito. Em particular, vamos supor a visão de um agente, um dealer de derivativos, analisando o valor da posição da carteira e considerando que corre *CCR* imposto pela sua contraparte, mas que não impõe *CCR* para sua contraparte. Ou seja, vamos considerar que o banco ou o *dealer* de derivativos, agente B, não possui risco de entrar em *default*. Em uma seção posterior, será analisado o caso de risco bilateral. Dois cenários podem ser estudados: (1) Cenário 1, no qual instante do *default* da contraparte C ocorre somente após a maturidade do instrumento derivativo de vencimento mais longo da carteira, isto é, $\tau_C > T$ e (2) Cenário 2, no qual o instante de *default* de C ocorre antes da maturidade da carteira, ou seja, $\tau_C \leq T$.

No Cenário 1, a contraparte pode não entrar em *default* durante a vigência da carteira, ou seja, um eventual *default* da contraparte somente ocorreria em uma data futura τ_C após T , $\tau_C > T$. Este cenário é relevante, pois evidencia que a contraparte pode entrar em *default* não somente devido às suas posições em derivativos com o agente como também em posições com outros instrumentos financeiros com outros agentes. Assim, as condições da empresa e suas obrigações com outros agentes podem alterar a sua probabilidade de *default* ao longo do tempo e impactar a análise de *CVA*. No Cenário 1, por não haver *default* até o instante T , o resultado da carteira de derivativos com *CCR* equivale ao valor da carteira sem *CCR*. Assim, a modelagem deste cenário, que ocorre quando $\tau_C > T$, pode ser feita da seguinte maneira:

$$\tilde{\Pi}_{C,1}^B(t, T) = \Pi(t, T) \quad (5.2)$$

O segundo cenário relevante para a análise, Cenário 2, envolve a situação em que a contraparte entra em *default* em algum momento τ_C antes do vencimento ou no próprio vencimento T . Em termos de precificação, esta situação pode ser decomposta em duas partes. Até o instante do *default* τ_C , o agente teria uma posição equivalente ao valor da carteira de referência, ou seja, o valor $\Pi(t, \tau_C)$. Até o momento do *default*, não há perda em função de risco de crédito e, portanto, o valor da carteira seria equivalente ao da carteira *risk-free*. Após o *default* da contraparte, o agente teria uma posição que poderia refletir eventual perda devido ao risco de crédito da contraparte.

Estas situações podem ser descritas por dois sub-cenários: (a) o Cenário 2a, no qual $\Pi(\tau_C, T) < 0$ e, portanto, o agente tem uma perda financeira no valor da carteira e (b) o Cenário 2b, no qual $\Pi(\tau_C, T) \geq 0$ e, assim, apesar do ganho financeiro em função do risco de mercado, o agente incorrerá em uma perda devido ao risco de crédito, dado que no Cenário 2 a contraparte entrou em *default*.

Portanto, no Cenário 2a, se o valor marcado a mercado da carteira no instante do *default* da

contraparte for negativo, ou seja, se o agente é devedor, então ele deve honrar sua perda e pagar sua contraparte. Independentemente de sua contraparte entrar em *default*, o agente tem o compromisso de honrar sua perda caso o valor da sua carteira seja negativa. Esta perda refere-se ao risco de mercado associado ao contrato de derivativo. Neste cenário, o resultado do agente equivale ao valor da carteira $\Pi(t, \tau_C)$ antes do *default* acrescido da perda, a valor presente, em função de sua posição no instante do *default* ser devedora:

$$\tilde{\Pi}_{C,2a}^B(t, T) = \Pi(t, \tau_C) + \min(\Pi(\tau_C, T), 0)B(\tau_C - t) \quad (5.3)$$

onde:

$B(\tau_C - t)$ é o fator de desconto, a valor presente em t , do resultado no instante do default τ_C .

No Cenário 2b, embora em termos de risco de mercado a carteira de derivativos tenha gerado um ganho, sua contraparte entre em *default* e, portanto, o agente incorre em uma perda devido ao risco de crédito. Assim, o agente incorrerá em perda do valor da carteira $\Pi(\tau_C, T)$ podendo-se ainda considerar que uma parte desse valor seja recuperada. Considerando uma taxa de recuperação δ_C , equivalente a $1 - LGBC$, então, no Cenário 2b, o resultado do agente B, a valor presente, seria:

$$\tilde{\Pi}_{C,2b}^B(t, T) = \Pi(t, \tau_C) + \delta_C \max(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t) \quad (5.4)$$

Assim, o valor da carteira de derivativos $\tilde{\Pi}_C^B(t, T)$ no instante t , considerando o *CCR*, é uma variável aleatória definida da seguinte forma:

$$\tilde{\Pi}_C^B(t, T) = \begin{cases} \Pi(t, T) & \tau_C > T \\ \Pi(t, \tau_C) + \min(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t) & \tau_C \leq T \\ + \delta_C \max(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - T) & \end{cases} \quad (5.5)$$

Alternativamente, tem-se:

$$\tilde{\Pi}_C^B(t, T) = \mathbf{1}_{\tau_C > T} \Pi(t, T) + \mathbf{1}_{\tau_C \leq T} (\Pi(t, \tau_C) + \delta_C \max(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t) + \min(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t)) \quad (5.6)$$

Considerando que $\min(x, 0) = x - \max(x, 0)$, então a equação 5.6 pode ser re-escrita como:

$$\tilde{\Pi}_C^B(t, T) = \mathbf{1}_{\tau_C > T} \Pi(t, T) + \mathbf{1}_{\tau_C \leq T} (\Pi(t, \tau_C) + \delta_C \max(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t) + (\Pi(\tau_C, T) - \max(\Pi(\tau_C, T), 0)) \cdot B(\tau_C - t)) \quad (5.7)$$

$$\tilde{\Pi}_C^B(t, T) = \mathbf{1}_{\tau_C > T} \Pi(t, T) + \mathbf{1}_{\tau_C \leq T} (\Pi(t, \tau_C) + (\delta_C - 1) \max(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t) + \Pi(\tau_C, T) \cdot B(\tau_C - t)) \quad (5.8)$$

É importante destacar que o valor presente da carteira de derivativos no instante t com maturidade T pode ser decomposto em duas partes, em função do instante do *default*: (i) valor

presente da carteira em t com vencimento no instante do default τ_C e (ii) valor da carteira em τ_C , com vencimento em T , trazido a valor presente para τ_C . Ou seja, $\Pi(t, T) = \Pi(t, \tau_C) + \Pi(\tau_C, T) \cdot B(\tau_C - t)$. Assim, tem-se:

$$\tilde{\Pi}_C^B(t, T) = \mathbb{1}_{\tau_C > T} \Pi(t, T) + \mathbb{1}_{\tau_C \leq T} (\Pi(t, T) + (\delta_C - 1) \max(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t)) \quad (5.9)$$

que, ajustando os termos, pode ser denotado como:

$$\tilde{\Pi}_C^B(t, T) = \mathbb{1}_{\tau_C > T} \Pi(t, T) + \mathbb{1}_{\tau_C \leq T} \Pi(t, T) + \mathbb{1}_{\tau_C \leq T} (\delta_C - 1) \max(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t) \quad (5.10)$$

Finalmente, sendo $\mathbb{1}_{\tau_C > T} \Pi(t, T) + \mathbb{1}_{\tau_C \leq T} \Pi(t, T) = \Pi(t, T)$, tem-se

$$\tilde{\Pi}_C^B(t, T) = \Pi - \mathbb{1}_{\tau_C \leq T} (1 - \delta_C) \max(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t) \quad (5.11)$$

Portanto, o valor de uma carteira de derivativos do agente B, sob risco de crédito da contraparte C, equivale ao valor de uma carteira *risk-free* Π subtraído de uma parcela $(1 - \delta_C) \max(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t)$, representativa da possibilidade de *default* da contraparte em um instante $\tau_C \leq T$. Assim, pode-se definir o CVA como:

$$\tilde{\Pi}_C^B(t, T) = \mathbb{1}_{\tau_C \leq T} (1 - \delta_C) \max(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t) \quad (5.12)$$

A fórmula acima é, de certa forma, intuitiva, pois indica que o CVA é uma métrica associada a um valor presente da exposição ao risco de crédito, considerando-se a possibilidade de *default* da contraparte em um instante τ_C antes do vencimento T da carteira de derivativos e uma taxa de recuperação δ_C .

De forma alternativa, supondo simplificadamente (a) que $\mathbb{1}_{\tau_C \leq T} = PD_C$, ou seja, que a função indicadora de *default* antes do vencimento da carteira seja definida como a probabilidade de *default* da contraparte até o vencimento, (2) que, sendo δ_C uma taxa de recuperação de crédito no caso de *default* da contraparte C, então $1 - \delta_C$ é o componente de perda dado o *default* ou $LGDC$ e (3) que $\max(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t)$ representa o valor presente de uma exposição EAD_C ao risco de crédito da contraparte, que só existe quando o agente possui uma carteira com posição vencedora, então o CVA pode ser expresso como apresentado na equação 5.13:

$$CVA_C^B(t, T) = PD_C(t, T) \cdot LGDC(t, T) \cdot EAD_C(t, T) \quad (5.13)$$

É importante destacar que a equação 5.13 é uma fórmula semelhante ao do requisito de capital para operações de crédito imposto pela Basileia II. Diferentemente do modelo da Basileia II, no entanto, no qual os componentes do risco de crédito são valores médios, no modelo desta última equação, os componentes são variáveis aleatórias. Desta forma, a equação 5.13 possibilita maior flexibilidade no estudo do CCR, por permitir análises de eventuais dependências ou relacionamentos entre as variáveis. No entanto, esta maior flexibilidade é acompanhada também por uma maior complexidade.

Finalmente, é importante ressaltar que, embora este modelo de CVA tenha seguido Gregory (2010), diversas adaptações foram realizadas visando um maior didatismo e generalização. Especificamente, Gregory (2010) introduz logo no início da análise uma esperança para tratar o valor da carteira com risco e somente indica o ajuste de valor presente da exposição ao final da discussão.

O ajuste a valor presente é imediato e simples e, desta forma, foi incorporado desde o início na nossa análise. Já a aplicação do operador esperança no começo da análise de Gregory (2010), apesar de ser razoável no contexto de precificação, pode não ser adequado no contexto de gestão de riscos. Enquanto em precificação comumente se busca identificar um valor médio de uma variável aleatória para estabelecer, por exemplo, o preço justo de um derivativo, em gestão de riscos, a maior preocupação está associada com a compreensão da distribuição de probabilidades de uma variável aleatória representativa de resultado. Desta forma, o gestor de riscos pode estudar probabilidades e magnitudes de variação do valor da carteira em relação ao valor atual. A análise de percentis de distribuições de resultados é prática comum relacionada, por exemplo, com o conceito de valor em risco (*VaR: value-at-risk*), amplamente usado em gestão de riscos financeiros.

5.2.2 CVA bilateral

A análise do CVA bilateral ou BCVA pode ser realizada de modo similar ao da seção anterior, estabelecendo-se possíveis situações para o *default*. Sem perda de generalidade, consideremos o agente B como o dealer de derivativos e o agente C como o cliente. A ideia básica é identificar um valor $BCVA_{BC}$ a ser subtraído do valor Π da carteira *risk-free* associado ao valor $\tilde{\Pi}$ da carteira com risco de crédito tanto do cliente quanto do dealer.

$$\tilde{\Pi}_{BC}^B(t, T) = \Pi(t, T) - BCVA_{BC}(t, T) \quad (5.14)$$

Uma vez que, na análise do CVA bilateral, tanto o *dealer* quanto o cliente podem entrar em *default*, os cenários relevantes são mais numerosos. Vamos considerar que o *dealer* entre em *default* em um instante τ_B e o cliente, em um instante τ_C .

Supondo que, após um agente entrar em *default*, a carteira de derivativos é liquidada, buscando-se evitar prejuízos maiores, então um elemento relevante para a análise é o prazo ou instante do primeiro agente a entrar em *default* (*first-to-default time*), definido como $\tau = \min(\tau_B, \tau_C)$. Vamos considerar também que a probabilidade de os dois agentes entrarem em *default* no mesmo instante é nula.

Os principais cenários relevantes envolvem (1) o Cenário 1, no qual nenhum agente, seja o cliente ou o *dealer*, entra em *default* até o vencimento da carteira de derivativos e (2) o Cenário 2, no qual um dos agentes, ou o *dealer* ou o cliente, entra em *default* até o vencimento.

No Cenário 1, não há *default* antes ou no vencimento, ou seja, um eventual *default* ocorre somente em $\tau_C > T$. Nesta situação, o resultado referente ao valor da carteira para o agente B é:

$$\tilde{\Pi}_{BC}^B(t, T) = \Pi(t, T) \quad (5.15)$$

De modo semelhante à análise conduzida na seção anterior, no Cenário 2, até o instante do *default*, o resultado de um agente está associado ao valor $\Pi(t, \tau)$ da carteira *risk-free* com vencimento em τ , adicionado de um valor associado a um sub-cenário 2a em que o agente possui uma carteira de valor negativo $\Pi(\tau, T) < 0$, incorrendo em uma perda devido ao risco de mercado, e um sub-cenário 2b em que o agente possui uma carteira de valor positivo $\Pi(\tau, T) \geq 0$, que tem um valor reduzido relativo a uma taxa de perda $1 - \delta$ dado o *default*.

Usando o resultado da seção anterior, no caso de o cliente ser o primeiro a entrar em *default*, $\tau = \tau_C \leq T$, pode-se analisar dois sub-cenários: (a) se $\Pi(\tau_C, T) < 0$, então o resultado envolve $\Pi(t, \tau_C) + \min(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t)$, (b) se $\Pi(\tau_C, T) \geq 0$ então o resultado é $\Pi(t, \tau_C) +$

$$\delta_B \max(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t).$$

O caso em que o *dealer* é o primeiro a entrar em *default*, a análise é semelhante, porém os resultados são diferentes, uma vez que sua contraparte incorre em risco de crédito. Assim, se o dealer é o primeiro a entrar em *default*, $\tau = \tau_B \leq T$, pode-se avaliar também dois sub-cenários. No primeiro sub-cenário, se $\Pi(\tau_B, T) \geq 0$, então a posição de *dealer* envolve um ganho que deve ser pago por sua contraparte, independentemente de o *dealer* ter ou não entrado em *default*. O valor presente a carteira de derivativos nesta situação é dado pelo valor presente da carteira avaliada considerando-se o instante de análise t e o instante do *default* τ_B , adicionado do valor presente da carteira considerando-se o instante do *default* τ_B e o vencimento T , ou seja, $\Pi(t, \tau_B) + \max(\Pi(\tau_B, T), 0) \cdot B(\tau_B - t)$. Assim, nesse caso, o dealer possui uma posição equivalente aos fluxos antes do *default* e após o *default*.

No segundo sub-cenário, se $\Pi(\tau_B, T) < 0$, o dealer possui uma posição perdedora que deve ser honrada. Porém, devido ao seu *default*, pagará ao seu cliente, isto é, à sua contraparte, apenas uma parcela do valor, levando-se em consideração uma taxa de recuperação δ_B . Portanto, nesse sub-cenário, o resultado é $\Pi(t, \tau_B) + \delta_B \min(\Pi(\tau_B, T), 0) \cdot B(\tau_B - t)$.

O valor da carteira de derivativos $\tilde{\Pi}_{BC}^B(t, T)$ no instante t , considerando o *CCR* dos dois agentes, é uma variável aleatória definida através de:

$$\tilde{\Pi}_{BC}^B(t, T) = \begin{cases} \Pi(t, T) & \tau > T \\ \Pi(t, \tau_C) + \min(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t) & \tau = \tau_C \leq T \\ \quad + \delta_C \max(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t) & \\ \Pi(t, \tau_B) + \max(\Pi(\tau_B, T), 0) \cdot B(\tau_B - t) & \tau = \tau_B \leq T \\ \quad + \delta_B \min(\Pi(\tau_B, T), 0) \cdot B(\tau_B - t) & \end{cases} \quad (5.16)$$

Assim, considerando os diferentes cenários relevantes:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{BC}^B(t, T) &= \mathbf{1}_{\tau > T} \Pi(t, T) + \mathbf{1}_{\tau \leq T} \mathbf{1}_{\tau = \tau_C} (\Pi(t, \tau_C) + \min(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot \\ &\quad B(\tau_C - t) + \delta_C \max(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t)) + \mathbf{1}_{\tau \leq T} \mathbf{1}_{\tau = \tau_B} (\Pi(t, \tau_B) + \\ &\quad \max(\Pi(\tau_B, T), 0) \cdot B(\tau_B - t) + \delta_B \min(\Pi(\tau_B, T), 0) \cdot B(\tau_B - t)) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Sendo $x = \min(x, 0) + \max(x, 0)$, então:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{BC}^B(t, T) &= \mathbf{1}_{\tau > T} \Pi(t, T) + \mathbf{1}_{\tau \leq T} \mathbf{1}_{\tau = \tau_C} (\Pi(t, \tau_C) + (\Pi(\tau_C, T) \\ &\quad - \max(\Pi(\tau_C, T), 0)) \cdot B(\tau_C - t) + \delta_C \max(\Pi(\tau_C, T), 0) \cdot B(\tau_C - t)) + \mathbf{1}_{\tau \leq T} \mathbf{1}_{\tau = \tau_B} (\Pi(t, \tau_B) \\ &\quad + (\Pi(\tau_B, T) - \min(\Pi(\tau_B, T), 0)) \cdot B(\tau_B - t) + \delta_B \min(\Pi(\tau_B, T), 0) \cdot B(\tau_B - t)) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Sabendo-se que, para qualquer instante de *default* τ , $\Pi(t, T) = \Pi(t, \tau) + \Pi(\tau, T) \cdot B(\tau - t)$, então

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{BC}^B(t, T) &= \mathbf{1}_{\tau > T} \Pi(t, T) + \mathbf{1}_{\tau \leq T} \mathbf{1}_{\tau = \tau_C} (\Pi(t, T) + ((\delta_C - 1) \max(\Pi(\tau_C, T), 0)) \cdot B(\tau_C - t)) \\ &\quad + \mathbf{1}_{\tau \leq T} \mathbf{1}_{\tau = \tau_B} (\Pi(t, T) + ((\delta_B - 1) \min(\Pi(\tau_B, T), 0)) \cdot B(\tau_B - t)) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Sendo $\mathbf{1}_{\tau \leq T} \mathbf{1}_{\tau = \tau_C} \Pi(t, T) + \mathbf{1}_{\tau \leq T} \mathbf{1}_{\tau = \tau_B} \Pi(t, T) = \mathbf{1}_{\tau \leq T} \Pi(t, T)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{BC}^B(t, T) = & \mathbf{1}_{\tau > T} \Pi(t, T) + \mathbf{1}_{\tau \leq T} \Pi(t, T) + \mathbf{1}_{\tau \leq T} \mathbf{1}_{\tau = \tau_C} (\delta_C - 1) (\max(\Pi(\tau_C, T), 0)) \cdot B(\tau_C - t) \\ & + \mathbf{1}_{\tau \leq T} \mathbf{1}_{\tau = \tau_B} (\delta_B - 1) (\min(\Pi(\tau_B, T), 0)) \cdot B(\tau_B - t) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Adicionalmente, $\mathbf{1}_{\tau > T} \Pi(t, T) + \mathbf{1}_{\tau \leq T} \Pi(t, T) = \Pi(t, T)$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{BC}^B(t, T) = & \Pi(t, T) + \mathbf{1}_{\tau \leq T} \mathbf{1}_{\tau = \tau_C} (\delta_C - 1) (\max(\Pi(\tau_C, T), 0)) \cdot B(\tau_C - t) \\ & + \mathbf{1}_{\tau \leq T} \mathbf{1}_{\tau = \tau_B} (\delta_B - 1) (\min(\Pi(\tau_B, T), 0)) \cdot B(\tau_B - t) \end{aligned} \quad (5.21)$$

O CVA bilateral pode ser definido como:

$$\begin{aligned} BCVA_{BC}(t, T) = & \mathbf{1}_{\tau \leq T} \mathbf{1}_{\tau = \tau_C} (1 - \delta_C) (\max(\Pi(\tau_C, T), 0)) \cdot B(\tau_C - t) \\ & + \mathbf{1}_{\tau \leq T} \mathbf{1}_{\tau = \tau_B} (1 - \delta_B) (\min(\Pi(\tau_B, T), 0)) \cdot B(\tau_B - t) \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$BCVA_{BC}(t, T) = CVA_C^B(t, T) - CVA_B^C(t, T) \quad (5.23)$$

Capítulo 6

CVA de swaps usando cópulas

6.1 Introdução

A regulamentação bancária tem avançado no estabelecimento de procedimentos de controle e requisitos de capital, trazendo diversos impactos para as instituições financeiras. A crise recente de 2007/2008 evidenciou a necessidade de aprimoramento dos mecanismos de mensuração e gestão de riscos. Em particular, o risco de crédito da contraparte (*CCR: Counterparty Credit Risk*) tornou-se ponto de atenção, tendo em vista que muitas perdas ocorridas na crise foram decorrentes de eventos associados a deterioração da crédito dos participantes de mercado (BCBS, 2011b).

A despeito de risco de crédito já ser tema de inúmeros estudos, um elemento importante que a crise trouxe à discussão envolve os modelos de precificação de carteiras de crédito que possuem posições em derivativos. Nesse contexto, não somente eventos efetivos de *defaults* causam desvalorizações substanciais nas posições de instituições financeiras, como também a degradação da qualidade de crédito, tanto de bancos quanto de clientes, pode afetar o valor de carteiras expostas ao risco de crédito da contraparte.

De fato, estudo com Comitê da Basileia para Supervisão Bancária (*BCBS: Basel Committee for Banking Supervision*) indicou que cerca de 2/3 das perdas associadas a crédito eram provenientes de desvalorizações, marcadas a mercado, de posições expostas ao risco de crédito da contraparte e apenas 1/3 era decorrente de inadimplência efetiva (BCBS, 2009). Considerando essa perspectiva, a regulação bancária vem direcionando esforços para definir requisitos de capital, mais especificamente por meio da mensuração do *CVA (Credit Valuation Adjustment)*, que constitui uma métrica para estimar perdas de marcação a mercado devido à exposição ao risco de crédito da contraparte.

O BCBS define *CVA* como a diferença entre os valores de um derivativo considerando, respectivamente, a inexistência e a existência de risco de crédito da contraparte (BCBS, 2011a). É importante destacar que requisitos de capital decorrentes do *CVA* estão ligados a carteiras de derivativos, distinguindo-se dos requisitos de capital tradicionais de crédito associados a *EL (Expected Losses)* e *UL (Unexpected Losses)*. De fato, de acordo com BCBS (2006) e BCBS (2011b), carteiras de crédito usuais como, por exemplo, empréstimos e financiamentos, são contempladas nas diretrizes do Acordo da Basileia II, enquanto carteiras com risco de crédito de contraparte em operações com derivativos são analisadas no Acordo da Basileia III.

Embora o BCBS tenha sugerido ajustes padronizados de *CVA*, simplificando a análise e aplicando-se um fator de correção à exposição que reflete o *spread* usado para descontar um título de dívida equivalente ao risco de crédito da contraparte (BCBS, 2009), críticas de praticantes e de acadêmicos induziram mudanças substanciais nos critérios. Assim, o Comitê da Basileia estabeleceu

uma fórmula de *CVA* baseada em um maior detalhamento da exposição ao risco de crédito da contraparte, levando-se em consideração elementos específicos associados aos componentes de risco de crédito: a Probabilidade de *Default* (*PD*), a Perda Dado o *Default* (*LGD*) e a Exposição no Instante do *Default* (*EAD*) de carteiras que possuem derivativos.

Porém, a despeito da evolução do modelo em relação à proposta inicial de aplicação de fator de correção, diversos pontos de atenção ainda existem, principalmente no que concerne à premissa de independência entre componentes do risco de crédito. Na modelagem estabelecida pelo BCBS para cálculo do *CVA*, os componentes de risco de crédito são considerados independentes.

No entanto, a dependência entre esses componentes de risco pode ser relevante e, dessa forma, não considerar eventuais relacionamentos pode levar a mensuração inadequada do risco. Mais especificamente, a existência do *Wrong Way Risk* (*WWR*) pode afetar consideravelmente a avaliação de riscos, implicando a subestimação de perdas potenciais quando se considera somente modelos com independência entre os componentes de risco de crédito. O *WWR* é o termo comumente utilizado para denotar uma dependência desfavorável entre a exposição ao risco de crédito e a qualidade do crédito da contraparte (BCBS, 2011b). Sem entrar em considerações sobre causas e efeitos, a existência de *WWR* é particularmente problemática, pois pode exacerbar perdas, uma vez que a exposição ao risco de crédito pode justamente ser maior quando a probabilidade de inadimplência aumenta. De forma alternativa, a probabilidade de *default* pode aumentar a medida que o valor devido por uma contraparte aumenta.

Neste capítulo, vamos investigar o risco de crédito da contraparte de operações de *swaps*, considerando potenciais relacionamentos entre a *PD* e a *EAD* e seguindo a discussão de Cherubini (2013) que usa uma abordagem baseada em cópulas para a modelagem de dependência. Destaca-se que o modelo de Cherubini (2013) incorpora como caso especial um dos modelos seminais de risco de crédito de contraparte de Sorensen e Bollier (1994), aplicado a *swaps*, bem como o modelo da Basileia (BCBS, 2011b). Porém, de forma mais genérica, o modelo de Cherubini (2013) permite levar em consideração o *WWR*, a partir da construção de relações de dependência por meio das cópulas.

Inicialmente, é estabelecida uma modelagem geral de *CVA* baseada na discussão de Brigo *et al.* (2013), que permite contemplar elementos do estudo de Sorensen e Bollier (1994) e dos modelos simplificados discutidos em Canabarro (2009) e Gregory (2012). O modelo de cópulas baseado em Cherubini (2013) é aplicado a operações de *swaps*. Finalmente, análises numéricas possibilitam a comparação de resultados entre modelos tradicionais mais simples, baseados em independência de componentes de risco, como, por exemplo, o sugerido pelo Comitê da Basileia, e o modelo de dependência baseado em cópulas.

Os resultados sugerem que a não incorporação da dependência entre componentes de risco implica na subestimação da perda potencial em função da marcação ao risco de crédito da contraparte. Os resultados indicam ainda que o *WWR* é relevante e, portanto, flutuações adversas e conjuntas entre os componentes de risco devem ser avaliadas tanto para fins de gerenciamento de riscos quanto para fins de precificação e *trading*. Ademais, tendo em vista o cálculo do *CVA* depender de modelagem como, por exemplo, das relações de dependência de componentes de risco de crédito, do processo de difusão de fatores de risco de mercado e da volatilidade de fatores de riscos, as avaliações de risco de crédito da contraparte ainda estão sujeitas a risco de modelagem. Nesse sentido, o estudo mostra também, para o caso específico de *CVA* de *swaps*, que a definição da dinâmica do processo de difusão da taxas de juros também influencia os resultados da análise do risco de crédito da contraparte.

6.2 Modelagem matemática do CVA

Consideremos o espaço de probabilidade, seguindo Brigo *et al.* (2013), dado por $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{Q})$, no qual Ω representa o conjunto de todos os elementos do experimento aleatório, com um resultado genérico $\omega \in \Omega$, \mathcal{G} representa uma σ -álgebra referente ao conjunto de eventos $A \subset \Omega$, e \mathcal{G}_t representa a σ -álgebra associada à informação disponível até o instante t . Por meio desta formulação, $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{G}_u \subseteq \mathcal{G}$ para todo $t \leq u$ e, se o resultado de um experimento é $\omega \in A \in \mathcal{G}_t$, então se estabelece que o evento A ocorreu até o tempo t .

Nesse espaço de probabilidade, podem ser avaliados genericamente, eventos associados a todos os dados de mercado relevantes e, mais especificamente, a eventos de *default* de contrapartes. Definindo-se \mathcal{F}_t como a σ -álgebra representativa das informações de mercado até o instante t , com exceção da informação de *default*, tem-se para todo t , $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t$. Essa formulação possibilita separar filtrações que levam em consideração dados de mercado que não estão relacionados com o *default* das filtrações que levam em consideração o risco de crédito da contraparte.

Um ponto importante sob as perspectivas teórica e prática envolve a escolha da medida de probabilidade do espaço de probabilidade. Neste trabalho, vamos considerar uma medida de probabilidade risco-neutra, tipicamente associada a procedimentos de precificação, em contraste com a medida de probabilidade real, geralmente ligada a mecanismos de mensuração de riscos (Brigo *et al.* (2013), Cherubini (2013), etc). Maiores detalhes sobre a adequação de medida de probabilidade *risk-neutral* em relação à medida de probabilidade *real-world* podem ser vistos, por exemplo, em Gregory (2012) e Brigo *et al.* (2013).

Em termos de notação, a medida risco-neutra ou *risk-neutral* é também denominada de medida de precificação ou *pricing measure* (Brigo *et al.*, 2013). Nesse contexto, esperanças das variáveis aleatórias serão obtidas a partir da medida de probabilidade risco-neutra \mathbb{Q} e, portanto, $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[\cdot] = \mathbb{E}_t[\cdot | \mathcal{G}_t] = \mathbb{E}_t[\cdot]$.

Considerando a medida de probabilidade risco-neutra, pode-se associar, no contexto de \mathcal{F} , uma taxa de juros livre de risco r , que remunera recursos monetários de acordo com $dB_t = r_t B_t dt$, com $B_0 = 1$. Essa taxa de juros pode ser utilizada para trazer a valor presente fluxos de caixa sob uma perspectiva de neutralidade a risco. Dessa forma, o fator de desconto de um fluxo de caixa que ocorre em um período u precificado em t é dado por B_t/B_u . Alternativamente, para cálculo do valor presente em t de um fluxo de caixa que ocorre em T é usado um fator de desconto $D(t, t_n)$ baseado em uma taxa de juros r livre de risco determinística, sendo $D(t, T) = \exp(-\int_t^T r(s) ds)$.

Uma vez definido o espaço de probabilidade e a estrutura de análise baseada em um mundo risco-neutro, vamos agora discutir o conceito de CVA, com ênfase no modelo unilateral, no qual apenas uma das contrapartes incorre em risco de crédito, considerando-se que a outra contraparte não oferece risco de crédito ao seu credor.

Vamos considerar duas contrapartes denotadas por B (banco) e C (cliente). Note que B não necessariamente representa um banco, mas essa notação facilita a adaptação da discussão para convenções de mercado. O banco ou *dealer* (B) disponibiliza um produto ao cliente (C) que possui uma determinada necessidade financeira. Tendo em vista que, na maioria dos casos os *dealers* possuem uma maior capacidade de gestão de riscos, vamos estabelecer que a análise de crédito da contraparte C esteja sendo realizado pela contraparte B.

Definamos $\Pi(t, T)$ como os fluxos de caixa líquidos entre t e T de uma carteira de operações que B realizou com C, trazidos a valor presente, considerando que C não possui risco de crédito. Nessa formulação, t é o instante da avaliação da carteira e T representa o instante de ocorrência do fluxo mais distante a ser trocado entre as contrapartes. No caso de carteiras com derivativos, T representa o vencimento do contrato de maior maturidade com a contraparte.

O valor dessa carteira, em termos de preço no instante t , é o valor esperado de $\Pi(t, T)$, ou seja, $NPV(t) = \mathbb{E}_t[\Pi(t, T)]$, onde NPV representa o valor presente líquido (NPV : *Net Present Value*). Pode-se, portanto, considerar que o valor justo, sem risco de crédito, dessa carteira de operações para B vale $NPV(t)$. Tipicamente, muitos modelos de precificação de derivativos foram desenvolvidos a partir dessa premissa de inexistência de risco de crédito de ambas as contrapartes.

Do ponto de vista prático, no entanto, a suposição de carteiras sem risco de crédito é pouco realista, principalmente no contexto de operações mais complexas como o caso de transações com derivativos. Assim, vamos supor que o banco B tenha probabilidade nula de entrar em falência, ou seja, seja *default-free*, enquanto o cliente C possui chance de entrar em *default*. Essa suposição de assimetria de risco, embora também possa parecer pouco razoável, porém era usual em modelos anteriores à crise de 2007/2008, pois considerava-se que *dealers*, por exemplo, com *rating AAA* tinha probabilidade extremamente baixa de não cumprirem com suas obrigações. Em geral, o risco que C corria por estar exposto à qualidade de crédito de B era negligenciado.

Assim, o mercado muitas vezes estabelecia que a contraparte B, isto é, o *dealer*, não estava sujeito a risco de falência e, portanto, a análise relevante envolvia somente a avaliação do risco de a contraparte C não pagar. A falência de vários bancos internacionais de grande reputação na crise do *subprime* mostrou que mesmo bancos com *ratings AAA* podem enfrentar problemas que ocasionem uma eventual dificuldade de pagamento de dívidas com contrapartes.

Para fins de modelagem nesse artigo, vamos considerar que, conforme discutido, somente B corre risco de crédito de C, vamos analisar o valor da carteira P do ponto de vista do banco, sendo que um eventual *default* de C ocorre no instante τ_C . Inicialmente, dois cenários podem ser analisados: (1) o *default* ocorre em $\tau_C > T$ ou (2) o *default* ocorre em $\tau_C \leq T$.

No primeiro caso (1), os fluxos de caixa do portfólio não seriam afetados pelo *default* que ocorreria somente após o vencimento do contrato de maior maturidade e, portanto, a avaliação segue a estrutura de uma carteira sem risco de crédito da contraparte dada por $\Pi(t, T)$.

No segundo caso (2), quando o evento de *default* ocorre antes do vencimento ou no vencimento T , então o resultado de B está associado ao valor presente dos fluxos que ocorrem até o vencimento $\Pi(t, \tau_C)$ e ao valor a pagar ou a receber em função do valor marcado a mercado da carteira. Nesse contexto, duas situações devem ser analisadas:

1. Se o valor da carteira é negativo, ou seja, se $NPV(\tau_C) < 0$, então a contraparte B está em uma posição perdedora e paga integralmente os fluxos de caixa para a contraparte C, mesmo que C tenha entrado em *default* e não honrado seus compromissos com seus credores. Assim, o valor a ser pago por B corresponde a $NPV(\tau_C) < 0$. Note que uma das premissas do modelo é que B é *default-free* e, portanto, honrará integralmente os fluxos de caixa a serem entregues à contraparte; e
2. Se o valor da carteira é positivo, ou seja, se $NPV(\tau_C) \geq 0$, então a contraparte B recebe o equivalente a $RR_C NPV(\tau_C)$, onde RR_C é a taxa de recuperação (RR : *Recovery Rate*).

Combinando os vários cenários dos fluxos de caixa líquidos em relação ao *default* de C, então o valor da carteira de B sujeita a risco de crédito de C pode ser definido como:

$$\tilde{\Pi}(t, T) = \mathbf{1}_{(\tau_C > T)} \Pi(t, T) + \mathbf{1}_{(t < \tau_C \leq T)} \left[\Pi(t, \tau_C) + D(t, \tau_C) \left(\min(NPV(\tau_C), 0) + RR_C \max(NPV(\tau_C), 0) \right) \right] \quad (6.1)$$

Conforme o Comitê da Basileia, para o caso específico de um contrato de derivativo, o *CVA* é tipicamente definido como a diferença entre o valor do produto assumindo-se que a contraparte não possui risco de *default* e o valor do produto refletindo o risco de *default* da contraparte (BCBS, 2011a).

Vamos agora analisar a definição de *CVA*, seguindo Brigo *et al.* (2013). Sejam $\Pi(t, T)$ e $\tilde{\Pi}(t, T)$ os fluxos de caixa líquidos avaliados a valor presente, no instante t , de uma carteira com vencimento e T negociada com contrapartes sem risco de crédito e com risco de crédito, respectivamente. O *CVA* (*Credit Value Adjustment*), ou seja, o valor do ajuste do valor da carteira, em função do risco de crédito da contraparte, é dado pelo valor esperado da diferença entre $\Pi(t, T)$ e $\tilde{\Pi}(t, T)$, ou seja:

$$CVA_C = \mathbb{E}_t[\Pi(t, T) - \tilde{\Pi}(t, T)] \quad (6.2)$$

A partir da definição da equação 6.2 pode-se obter o *CVA* unilateral. Assim, o ajuste de valor quando somente uma das contrapartes impõem risco de crédito, isto é, o *CVA* unilateral, é dado por:

$$CVA_C^B = \mathbb{E}_t[\mathbf{1}_{(t < \tau_c \leq T)} \cdot LGD_C \cdot EAD_C] \quad (6.3)$$

onde:

$LGD_C = 1 - RR_C$ é a perda dado o *default* (*LGD*: *Loss Given Default*); e

$EAD_C = (NPV(\tau_C))^+$ é a exposição ao risco de crédito no instante do *default* (*EAD*: *Exposure At Default*).

Para demonstrar a equivalência entre as equações 6.2 e 6.3, vamos considerar a definição de *CVA* dada por Brigo *et al.* (2013):

$$\begin{aligned} CVA_C^B &= \mathbb{E}_t[\Pi(t, T) - \tilde{\Pi}(t, T)] \\ &= \mathbb{E}_t \left[\Pi(t, T) - \mathbf{1}_{(\tau_c > T)} \Pi(t, T) - \right. \\ &\quad \left. \mathbf{1}_{(t < \tau_c \leq T)} \left[\Pi(t, \tau_C) + D(t, \tau_C) \left(\min(NPV(\tau_C), 0) + RR_C \max(NPV(\tau_C), 0) \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (6.4)$$

Dado que $\Pi(t, T) = \mathbf{1}_{(t < \tau_C \leq T)} \Pi(t, T) + \mathbf{1}_{(\tau_C > T)} \Pi(t, T)$, então:

$$\begin{aligned} CVA_C^B &= \mathbb{E}_t \left[\mathbf{1}_{(t < \tau_C \leq T)} \Pi(t, T) - \mathbf{1}_{(t < \tau_c \leq T)} \left[\Pi(t, \tau_C) + D(t, \tau_C) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\min(NPV(\tau_C), 0) + RR_C \max(NPV(\tau_C), 0) \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

Definindo NPV^+ e NPV^- como as partes positiva e negativa de NPV , respectivamente, temos $NPV^+(\tau_C) = \max(NPV(\tau_C), 0)$ e $NPV^-(\tau_C) = -\min(NPV(\tau_C), 0)$, que conduz a:

$$CVA_C^B = \mathbb{E}_t \left[\mathbf{1}_{(t < \tau_C \leq T)} \Pi(t, T) - \mathbf{1}_{(t < \tau_C \leq T)} \left[\Pi(t, \tau_C) + D(t, \tau_C) \right. \right. \\ \left. \left. \left(-NPV^-(\tau_C) + RR_C NPV^+(\tau_C) \right) \right] \right] \quad (6.6)$$

Como $NPV(\tau_C) = NPV^+(\tau_C) - NPV^-(\tau_C)$, então $-NPV^-(\tau_C) = NPV(\tau_C) - NPV^+(\tau_C)$. Seguindo Brigo *et al.* (2013), portanto:

$$CVA_C^B = \mathbb{E}_t \left[\mathbf{1}_{(t < \tau_C \leq T)} \Pi(t, T) - \mathbf{1}_{(t < \tau_C \leq T)} \left[\Pi(t, \tau_C) + D(t, \tau_C) \right. \right. \\ \left. \left. \left(NPV(\tau_C) - NPV^+(\tau_C) + RR_C NPV^+(\tau_C) \right) \right] \right] \\ = \mathbb{E}_t \left[\mathbf{1}_{(t < \tau_C \leq T)} \Pi(t, T) - \mathbf{1}_{(t < \tau_C \leq T)} \left[\Pi(t, \tau_C) + D(t, \tau_C) NPV(\tau_C) + D(t, \tau_C) \right. \right. \\ \left. \left. \left(-NPV^+(\tau_C) + RR_C NPV^+(\tau_C) \right) \right] \right] \\ = \mathbb{E}_t \left[\mathbf{1}_{(t < \tau_C \leq T)} \Pi(t, T) - \mathbf{1}_{(t < \tau_C \leq T)} \left[\Pi(t, \tau_C) + D(t, \tau_C) NPV(\tau_C) \right] + \mathbf{1}_{(t < \tau_C \leq T)} \left[D(t, \tau_C) \right. \right. \\ \left. \left. \left(NPV^+(\tau_C)(1 + RR_C) \right) \right] \right] \quad (6.7)$$

Sendo $\Pi(t, T) = \Pi(t, \tau_C) + D(t, \tau_C) NPV(\tau_C)$ e levando em consideração as definições de $LGD_C = 1 - RR_C$ e de $EAD_C = (NPV(\tau_C))^+$ dadas no enunciado, então:

$$CVA_C^B = \mathbb{E}_t \left[\mathbf{1}_{(t < \tau_C \leq T)} D(t, \tau_C) NPV^+(\tau_C)(1 + RR_C) \right] = \mathbb{E}_t \left[\mathbf{1}_{(t < \tau_C \leq T)} \cdot LGD_C \cdot EAD_C \right] \quad (6.8)$$

Se considerarmos que a exposição ao risco de crédito da contraparte, a perda caso aconteça a inadimplência e o instante do *default* sejam independentes e, estabelecendo $\mu_{PD_C} = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{(t < \tau_C \leq T)}]$, $\mu_{LGD_C} = \mathbb{E}_t[LGD_C]$ e $\mu_{EAD_C} = \mathbb{E}_t[EAD_C]$, então o ajuste em função do risco de crédito pode ser reescrito de forma simples como o produto de valores médios de PD , LGD e EAD .

$$CVA_C^B = \mu_{PD_C} \cdot \mu_{LGD_C} \cdot \mu_{EAD_C} \quad (6.9)$$

Na Basileia II, embora a preocupação principal não seja com a precificação do risco de crédito da contraparte, PD , LGD e EAD são denominados de componentes de risco de crédito e servem para estimativa de perdas em carteiras de crédito tradicionais compostas por empréstimos e financiamentos que faz parte de exigências de capital regulatório como, por exemplo, perdas esperadas (*EL: Expected Losses*) e perdas não-esperadas (*UL: Unexpected Losses*). De fato, na Basileia II, fórmula semelhante à equação 6.9 é utilizada para estimar a perda esperada de carteiras tradicionais de crédito.

A definição do CVA da equação 6.3 embora mais complexa, por envolver carteiras de produtos que podem possuir características diversas, segue a lógica de uma perda esperada. Neste contexto, o CVA representa uma estimativa de perda a partir da probabilidade de a contraparte entrar em *default*, da efetiva perda, considerando que há uma certa taxa de recuperação, e do valor que um agente tem para receber da contraparte que ficou inadimplente.

A fórmula estabelecida na equação 6.3 e, mais particularmente, a em 6.9, são as bases para

o cálculo do *CVA* dentro do mecanismo de *IMM* (*Internal Model Method*) estabelecido pela Basileia III (BCBS, 2011b):

$$CVA = LGD \cdot \sum_{i=1}^T \left[\max \left(0, \exp \left(-\frac{s_{i-1}t_{i-1}}{LGD} \right) - \exp \left(-\frac{s_i t_i}{LGD} \right) \right) \cdot \left(\frac{EE_{i-1}D_{i-1} + EE_i D_i}{2} \right) \right] \quad (6.10)$$

onde:

t_i é o prazo do i -ésimo agrupamento (*bucket*) de avaliação;

T é o prazo do fluxo de caixa de maior maturidade;

s_i é o *spread* de crédito da contraparte, para o prazo t_i ;

LGD é a perda dado o *default*, baseada em preços e taxas de mercado;

EE_i é a exposição esperada (*Expected Exposure*) à contraparte no instante de reavaliação t_i ; e

D_i é o fator de desconto neutro a risco para fluxos no instante t_i , com $D_0 = 1$.

Note que, em função de sua estrutura, o modelo da Basileia discretiza o cálculo do risco, agrupando potenciais fluxos de caixa de intervalos de tempo em diferentes *buckets* de avaliação. O modelo também supõe uma independência entre os componentes de risco. A equação 6.10 sugere que LGD é um valor constante, refletindo que a taxa de recuperação de um fluxo de caixa é a mesma para todos os possíveis instantes de *default* e para todos os níveis de exposição.

É importante observar que a Basileia III enfatiza que a LGD utilizada para fins de requisito de capital para risco de crédito da contraparte baseada no *CVA* é compatível com a medida de probabilidade risco-neutra na equação 6.10, distinguindo-se da LGD determinada por meio de estimativas realizadas, muitas vezes a partir de eventos de *default* históricos, para cálculo de requisito de capital para risco de inadimplência em modelos baseados em *ratings* internos para análise de risco de crédito tradicional.

A fórmula da Basileia para *CVA* não supõe de forma explícita a dependência da *EAD* e da *PD*, uma vez que podem ser computados separadamente e sem relacionamento. A *EAD* é uma média aritmética da exposição esperada *EE* (*Expected Exposure*) em um determinado *bucket* de avaliação. A probabilidade de *default* PD_i em cada *bucket* i é dada pela diferença na probabilidade de sobrevivência entre o início (t_{i-1}) e o final (t_i) do intervalo, que independe do volume de recursos em exposição ao risco de crédito da contraparte (*CCR*). Note que não há uma definição explícita de algum mecanismo que relacione *PD* e *CVA* e, comumente, esses componentes de risco são tratados de forma isolada. Nesse contexto, a discussão da próxima seção estabelece uma análise de *CVA* levando-se em consideração dependência entre *PD* e *EAD*, por meio de cópulas, seguindo o trabalho de Cherubini (2013) que constitui um dos primeiros estudos que exploram essa abordagem.

6.3 Precificação de *swaps* sujeitos a *CCR*

Conforme já discutido, a equação 6.3 contempla o modelo de Basileia III como caso especial. Como será visto nessa discussão, a equação 6.3 também trata, como caso particular, o modelo seminal de Sorensen e Bollier (1994), que trabalhou a precificação de *swaps* sujeitos a risco de crédito da contraparte. A despeito de o *CVA* ser aplicado a carteiras de produtos negociados com

determinada contraparte, a modelagem de transações individuais é relevante, uma vez que possibilita focalizar a precificação de operações específicas sem que o risco de crédito seja influenciado por outros produtos que compõem o portfólio.

Por exemplo, carteiras de derivativos comumente possuem operações que podem ter seus fluxos de caixa compensados e apurados pelo valor líquido. Assim, uma posição em um derivativo de taxa de juros pode ter fluxos de caixa que coincidam com os de um derivativo de ações, negociados com uma mesma contraparte. Do ponto de vista de análise de risco de crédito da contraparte, esses fluxos de caixa podem ser agrupados. Além disso, diferentes fatores de risco de mercado podem ser relacionados, implicando um efeito de diversificação que, por sua vez, pode mitigar parte do risco de crédito. Porém, sob a perspectiva de análise do derivativo em si, cada produto pode ser visto individualmente. Dessa forma, a análise de produtos específicos também é relevante no caso de precificação de produtos derivativos sujeitos a risco de crédito da contraparte, uma vez que o CVA da carteira pode ser diferente da soma dos CVA dos derivativos que compõem a carteira.

Dentre os produtos derivativos mais utilizados no mercado, destacam-se os *swaps*, nos quais duas contrapartes trocam fluxos de caixa indexados a diferentes taxas ou preços. Embora os *swaps* possam envolver praticamente quaisquer tipos de indexadores, o produto estudado nesse trabalho envolve um produto no qual uma das contrapartes possui uma ponta ativa, referente à posição comprada, indexada a uma taxa de juros flutuante, e uma ponta passiva, referente à posição vendida, indexada a uma taxa prefixada. A outra contraparte, portanto, recebe a taxa fixa e paga a taxa flutuante. Assim, o *swap* está associado a dois tipos de fluxos de caixa para cada contraparte, pagando-se ou recebendo valores corrigidos por taxa fixa ou flutuante. A contraparte que tem obrigações associadas a taxa prefixada é a compradora do *swap*. A contraparte que tem obrigações ligadas à taxa flutuante é a vendedora do *swap*.

6.3.1 Análise do *swap*

Para fins de análise, vamos considerar inicialmente o banco B com uma posição comprada no *swap*. Conforme discussão em seção anterior, vamos estabelecer, por exemplo, que o banco B não impõe risco de crédito. Seu cliente C, isto é, a contraparte de B, tem uma exposição contrária e apresenta chances de não pagar suas obrigações.

Sem perda de generalidade, o valor nominal, isto é, o valor que é corrigido pelas taxas de juros das pontas prefixada e flutuante, é definido como 1 unidade monetária. Nessa discussão, consideremos que os juros seguem o padrão internacional, em particular, o do mercado norte-americano, obedecendo uma capitalização simples. As taxas de juros são dadas para a mesma unidade de tempo dos prazos analisados. O valor presente líquido $NPV^B(t)$, mensurado em t , associado aos fluxos de caixa do banco B é dado por:

$$NPV^B(t) = \sum_{i=1}^n D(t, t_i) \delta_i (f(t, t_{i-1}, t_i) - r_s(t_0, t_n)) \quad (6.11)$$

onde:

$D(t, t_i)$ é o fator de desconto de fluxos de caixa sob uma perspectiva de neutralidade a risco;

$\delta_i = t_i - t_{i-1}$ é a diferença de prazo entre dois fluxos de caixa subsequentes;

$r_s(t_0, t_n)$, denominada de taxa do *swap* ou *swap rate*, é a taxa de juros à vista, ou *spot*, que corrigirá a ponta prefixada do *swap*; e

$f(t, t_{i-1}, t_i)$ é a taxa de juros a termo estipulada em t referente à taxa à vista que vigorará em t_{i-1} para operações com vencimento em t_i .

Note que as taxas do *swap* r_s e as taxas a termo f , conforme já indicado, são dadas na mesma unidade dos horizontes de tempo t . No instante da operação t_0 , o *swap* deve refletir um equilíbrio entre as expectativas de juros acumulados por meio de uma taxa prefixada r_s e de taxas a termo f , até o vencimento da operação. Assim, a taxa do *swap* $r_s(t_0, t_n)$ é a taxa prefixada que corrige o valor nacional, a cada período ou *bucket* de avaliação, mantendo-se constante entre todo o intervalo desde o instante da operação t_0 até o vencimento t_n . As taxas a termo $f(t_0, t_{i-1}, t_i)$ representam as taxas de juros que o mercado considera adequadas, no instante t_0 , para vigorarem a partir do instante t_{i-1} para o prazo δ_i , levando-se em conta os termos do *swap*.

Para não haver oportunidades de arbitragem, os valores presentes dos fluxos de caixa de entrada e de saída para uma dada contraparte, no instante da operação t_0 , devem se igualar e, portanto, $NPV^B(t_0) = 0$:

$$\sum_{i=1}^n D(t_0, t_i) \delta_i (f(t_0, t_{i-1}, t_i)) = \sum_{i=1}^n D(t_0, t_i) \delta_i (r_s(t_0, t_n)) \quad (6.12)$$

Sendo $r_s(t_0, t_n)$ constante para todos os períodos do *swap*, então a ponta prefixada, para não haver oportunidade de arbitragem, pode ser corrigida por uma taxa definida no instante da operação, equivalente a:

$$r_s(t_0, t_n) = \frac{\sum_{i=1}^n D(t_0, t_i) \delta_i (f(t_0, t_{i-1}, t_i))}{\sum_{i=1}^n D(t_0, t_i) \delta_i} \quad (6.13)$$

Deve-se evidenciar, do ponto de vista prático, que a taxa $r_s(t_0, t_n)$ é fornecida por um equilíbrio de oferta e demanda pelo *swap*, porém deve refletir teoricamente as expectativas de taxas a prazo no instante da operação. Embora no instante t_0 a taxa prefixada e as taxas flutuantes tenham uma relação que previna arbitragem, isto é, $NPV^B(t_0) = 0$, após a operação ter sido realizada, em um instante $t > t_0$, flutuações de variáveis do mercado podem fazer com que $NPV^B(t) \neq 0$. Evidencia-se que os ajustes para o equilíbrio podem ser feitos tanto na taxa prefixada r_s quanto na taxa flutuante, por meio de adições ou subtrações. É comum, por exemplo, que a taxa flutuante seja um indexador como LIBOR (*London Interbank Offered Rates*), TR (Taxa Referencial), TJLP (Taxa de Juros de Longo Prazo), ajustado por um cupom, que pode ser positivo ou negativo, dependendo das condições de mercado.

Sob a perspectiva de análise de riscos, se $NPV^B(t) < 0$, o investidor incorre em perdas advindas do risco de mercado, porém não está exposto a risco de crédito, uma vez que não tem recursos a receber de sua contraparte. Em contraste, se $NPV^B(t) > 0$, o investidor está em uma posição ganhadora em termos de risco de mercado, porém com uma exposição a risco de crédito, tendo em vista que pode não receber os fluxos a que tem direito caso a contraparte entre em *default*, por exemplo.

Nesse contexto, a exposição ao risco de crédito em um instante qualquer $t > t_0$ antes do vencimento em T é dada por $\max(NPV^B(t), 0)$ que implicaria a necessidade de comparação de $r_s(t_0)$ com as novas taxas a termo $f(t, t_{i-1}, t_i)$ referentes aos prazos para os fluxos de caixa a vencer entre t e T . No entanto, um mecanismo de análise de exposição mais pragmático envolve comparar a taxa prefixada do *swap* no instante da operação $r_s(t_0, t_n)$ com a taxa prefixada do *swap* no instante t , isto é, $r_s(t, t_n)$, que reflete as taxas a termo $f(t, t_i, t_j)$, em t , para os prazos a partir de t_i , $i = 1, \dots, n - 1$. Essa nova taxa $r_s(t, t_n)$ refere-se ao valor de equilíbrio de uma nova operação

de *swap* no instante t .

Se, por motivo de *default*, o contrato terminar em τ_C , com $t_{j-1} \leq \tau_C \leq t_j$, então a exposição ao risco de crédito é dada pelo valor presente positivo que ocorre quando $sr(\tau_C, t_n) > sr(t_0, t_n)$, para o caso do banco B posicionado como pagador da taxa fixa e receptor da taxa flutuante. Nessas condições, a exposição futura do banco B, caso o cliente C entre em *default* em τ_C , equivale ao valor presente:

$$NPV^B(\tau_C) = \sum_{i=j}^n D(\tau_C, t_i) \delta_i \max[r_s(\tau_C, t_n) - r_s(t_0, t_n), 0] \quad (6.14)$$

Quando a contraparte entra em *default*, todos os fluxos de caixa futuros a receber ou a pagar são trazidos a valor presente para o instante do *default* τ_C e a operação é liquidada. Esse valor deve ser pago pela contraparte devedora à contraparte vencedora. Considerando uma exposição unilateral na qual somente a contraparte B está exposta ao risco de crédito, então o montante sob risco envolve o valor positivo da diferença do valor nocional corrigido pelas taxas do *swap* em τ_C e em t_0 .

É interessante observar que a exposição evidencia uma analogia com uma opção de entrar em um *swap*, pagando a taxa $r_s(t_0, t_n)$ e recebendo a taxa $r_s(\tau_C, t_n)$. Esse resultado equivale a uma posição comprada em opção de entrar, em uma data futura, $t = \tau_C$, em um *swap* pagando uma taxa de exercício $r_s(t_0, t_n)$. No caso, portanto, o credor tem uma opção de entrar em um *swap* na posição comprada. Essa opção de escolher entre operar ou não um *swap* em uma data futura representa um outro derivativo transacionado no mercado, denominado de *swaption*.

Para a formulação de Cherubini (2013), vamos considerar a equação 6.3 e seguir algumas premissas compatíveis com as diretrizes da Basileia III. Vamos estabelecer que a *LGD* e, consequentemente, a taxa de recuperação, seja independente do instante do *default* e do nível de exposição a crédito. Apesar de utilizada em diversos trabalhos, essa premissa pode ser pouco realista como mostram os trabalhos de Altman (2001) e Folpmers (2012). No entanto, o foco desse estudo envolve a análise da relação entre o evento de inadimplência e a exposição no instante do *default*.

$$CVA_C^B = LGD_C \cdot \mathbb{E}_t \left[\mathbb{1}_{(t < \tau_C \leq T)} \cdot EAD_C \right] \quad (6.15)$$

Onde o índice superescrito mostra a contraparte cuja posição é ajustada em função do risco de crédito da contraparte que, por sua vez, é denotada no índice subscrito.

Para o cálculo do *CVA* por meio da equação 6.3, vamos analisar a exposição ao risco de crédito da contraparte de forma conjunta com o *default*. Conforme já destacado, se a contraparte C entrar em *default* em $t_{j-1} \leq \tau_C \leq t_j$, o contrato é liquidado e a contraparte B está exposta ao risco de crédito caso tenha recursos para receber. Assim, simultaneamente duas condições devem ser verificadas: (1) a contraparte C deve entrar em *default* em um instante em $t \leq \tau_C \leq t_n$ e (2) para o caso do banco B estar comprado no *swap*, sua exposição deve ser positiva, isto é, $\max[r_s(\tau_C, t_n) - r_s(t_0, t_n), 0] > 0$.

Note que, quando essas condições são obedecidas, para o banco B comprado no *swap*, isto é, com a ponta passiva prefixada, o valor presente da exposição dada pela equação 6.15 é $NPV^B(\tau_C) \geq 0$. Portanto, considerando a equação 6.3, a possibilidade de o *default* ocorrer em qualquer instante t havendo ainda n fluxos de caixa a vencer, e a natureza discretizada dos fluxos de caixa do *swap*, tem-se que o valor presente em τ_C dos fluxos de caixa restantes, sem levar em conta as correções pelas taxas fixa e flutuante do *swap*, é dada por $A(\tau_C, t_j, t_n) = \sum_{i=j}^n D(\tau_C, t_i)$. A exposição é dada,

portanto, quando há um *default* por:

$$EAD_C = A(t_C, t_j, t_n) \cdot \mathbb{E}_t((\max[r_s(\tau_C, t_n) - r_s(t_0, t_n), 0])) \quad (6.16)$$

A esperança pode ser obtida identificando as potenciais diferenças positivas nas taxas do *swap*, ou seja, no intervalo em que $r_s(\tau_C, t_n) \geq r_s(t_0)$, quando o *default* ocorre em $t_{j-1} \leq \tau_C \leq t_j$. Assim:

$$\mathbb{E}_t((\max[r_s(\tau_C, t_n) - r_s(t_0, t_n), 0])) = \int_{sr(t_0, t_n)}^{\infty} \mathbb{P}(r_s(t_j, t_n) > u, t_{j-1} \leq \tau_C \leq t_j) \, du \quad (6.17)$$

Nesse contexto, o *CVA* pode ser obtido por meio de

$$CVA_C^B(t) = LGD_C \cdot \sum_{j=1}^n A(t, t_j, t_n) \cdot \int_{sr(t_0, t_n)}^{\infty} \mathbb{P}(r_s(t_j, t_n) > u, t_{j-1} \leq \tau_C \leq t_j) \, du \quad (6.18)$$

A interessante contribuição de Cherubini (2013) para o cálculo de *CVA* envolve a representação da probabilidade conjunta trabalhada por meio de cópulas, que permite diversas extensões como, por exemplo, a análise de outros produtos derivativos e o estudo de relacionamentos entre os outros componentes do risco. Sendo, seguindo ainda a notação de Cherubini (2013), $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{P}(r_s(t_j, t_n) \leq u)$ a probabilidade risco-neutra de a taxa do *swap* ser menor que um dado valor u e considerando uma intensidade de *default* média para cada prazo t_j dada por $\lambda_i = s_i/LGD$, com probabilidade de sobrevivência após t_i definida por $S(t_i) = \exp(-\lambda_i t_i)$, então:

$$\mathbb{P}(r_s(t_j, t_n) > u, t_{j-1} \leq \tau_C \leq t_j) = \tilde{\mathbb{C}}(1 - \mathbb{Q}(u), \mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j)) \quad (6.19)$$

onde:

$\tilde{\mathbb{C}}(1 - z, v)$ é a função de cópula associada ao evento conjunto de a taxa do *swap* um instante t ser maior que a taxa do *swap* no momento da operação t_0 e a contraparte C entrar em *default* em um instante entre t_{j-1} e t_j (Cherubini, 2013).

Assim, o *CVA* para o banco B comprado no *swap*, sujeito ao risco de crédito da contraparte C , é dado por:

$$CVA_C^B(t) = LGD_C \cdot \sum_{j=1}^n A(t, t_j, t_n) \cdot \int_{r_s(t_0, t_n)}^{\infty} \tilde{\mathbb{C}}(1 - \mathbb{Q}(u), \mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j)) \, du \quad (6.20)$$

6.3.2 Estudo da dependência

O modelo da equação 6.20, definida a partir de cópulas, pode ser utilizado para analisar diversos relacionamentos entre a probabilidade de *default* e a exposição no instante do *default*. Considerando inicialmente a independência entre o instante do *default* e o valor em exposição,

então o ajuste por risco de crédito da contraparte é dado por:

$$CVA_C^B(t) = LGD_C \cdot \sum_{j=1}^n A(t, t_j, t_n) \cdot (\mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j)) \int_{r_s(t_0, t_n)}^{\infty} (1 - \mathbb{Q}(u)) \, du \quad (6.21)$$

Sendo que $\int_{r_s(t_0, t_n)}^{\infty} \tilde{\mathbb{Q}}(u) \, du = \mathbb{E}_Q[\max(r_s(t_j, t_n) - r_s(t_0, t_n), 0)]$, com $\tilde{\mathbb{Q}} = 1 - \mathbb{Q}$, então a esperança representa o preço de uma opção sobre um *swap*, uma vez que o agente teria o direito de entrar em um *swap*, em condições favoráveis. Assim:

$$CVA_C^B(t) = LGD_C \cdot \sum_{j=1}^n (\mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j)) \text{SwOp}(t, t_j, r_s(t_0, t_n)) \quad (6.22)$$

onde $\text{SwOp}(t, t_j, r_s(t_0, t_n))$ é o preço em t de uma opção sobre o *swap*, no qual o banco B possui o direito de entrar em uma posição comprada no *swap* em t_j pagando uma taxa prefixada $r_s(t_0, t_n)$.

Conforme observado por Cherubini (2013), esse resultado é análogo ao do trabalho de Sorensen e Bollier (1994), que constitui um dos primeiros e mais influentes artigos sobre risco de crédito da contraparte em operações com derivativos. De acordo com Sorensen e Bollier (1994), a exposição da contraparte B ao risco de crédito de contraparte C em um contrato de *swap* é equivalente a uma série de opções do tipo europeu sobre *swaps* que são exercidas por B para repor perdas de fluxos após um eventual *default* de C. É importante enfatizar que Sorensen e Bollier (1994) trabalha sob condições de independência entre os componentes de risco de crédito e agrega a *LGD* com a *EAD* em um único elemento.

O modelo da equação 6.20 também contempla a fórmula do requisito da Basileia. Cherubini (2013) identifica que se definirmos

$$EE_j = \frac{A(t, t_j, t_n)}{D(t, t_j)} \mathbb{E}_Q[\max(r_s(t_j, t_n) - r_s(t_0, t_n), 0)] \quad (6.23)$$

então

$$CVA_C^B(t) = LGD_C \cdot \sum_{j=1}^n (\mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j)) D(t, t_j) EE_j \quad (6.24)$$

Supondo uma discretização que considere a exposição como uma média entre dois períodos, $(EE_{j-1} + EE_j)/2$, obtém-se a equação 6.10 indicada pelo Comitê da Basileia. Assim, a modelagem de Cherubini (2013) contempla também outras formas de definição matemática do *CVA*.

Vamos supor agora que haja dependência entre componentes do risco de crédito da contraparte, mais particularmente, entre *PD* e *EAD*, considerando-se que a exposição pode depender do instante do *default* que, por sua vez, deriva da probabilidade de sobrevivência da empresa, em um dado intervalo de tempo. Vamos analisar então o *Wrong Way Risk (WWR)* sob a perspectiva da contraparte B, na posição comprada do *swap*. A exposição ao risco de crédito aumenta quando o valor presente do *swap* aumenta, ou seja, quanto maior $r_s(t, t_n)$ em relação a $r_s(t_0, t_n)$, maior valor da posição para o banco, porém maior o risco de crédito ao qual está exposto.

Uma situação de *WWR* envolve, para o comprador do *swap*, o cenário em que a taxa

de juros do *swap* aumenta, implicando maior exposição ao risco de crédito, e a probabilidade de *default*, dada pela diferença entre a probabilidade de sobrevivência de C entre dois períodos, também aumenta. Considerando um caso extremo, definido pela cópula $\tilde{C}(u, v) = \min(u, v)$, tem-se, seguindo Cherubini (2013):

$$\tilde{C}(1 - \mathbb{Q}(u), \mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j)) = \min(1 - \mathbb{Q}(u), \mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j)) \quad (6.25)$$

Assim, o *CVA* da contraparte B sujeita ao risco de crédito da contraparte C pode ser definido como:

$$CVA_C^B = LGD_C \cdot \sum_{j=1}^n A(t, t_j, t_n) \int_{r_s(t_0, t_n)}^{\infty} \min[1 - \mathbb{Q}(u), \mathbb{S}_B(t_{j-1}) - \mathbb{S}_B(t_j)] du \quad (6.26)$$

Note que $\mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_B(t_j) \leq 1$ não depende de u . Além disso, $1 - \mathbb{Q}(u)$ é monotonicamente decrescente. Assim, dois casos podem ser analisados: (1) $1 - \mathbb{Q}(u) \leq \mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_B(t_j)$ e (2) $1 - \mathbb{Q}(u) > \mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_B(t_j)$.

No primeiro caso, temos:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (1 - \mathbb{Q}(u)) \rightarrow 0 \leq 1 - \mathbb{Q}(r_s(t_0, t_n)) \leq \mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j) \quad (6.27)$$

Assim, a integral na equação 6.26 vale:

$$CVA_C^B = LGD_C \cdot \sum_{j=1}^n A(t, t_j, t_n) \cdot \int_{sr(t_0, t_n)}^{\infty} (1 - \mathbb{Q}(u)) du \quad (6.28)$$

No segundo caso, temos:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (1 - \mathbb{Q}(u)) \rightarrow 0 \leq \mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j) < 1 - \mathbb{Q}(r_s(t_0, t_n)) \quad (6.29)$$

Nesse caso, a integral em equação 6.26 é calculada separando-se duas parcelas, denotando cenários entre $[r_s(t_0, t_n), z)$ e $[z, \infty)$. Com isso,

$$CVA_C^B = LGD_C \cdot \sum_{j=1}^n A(t, t_j, t_n) \cdot \left(\int_{r_s(t_0, t_n)}^z (\mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j)) du + \int_z^{\infty} (1 - \mathbb{Q}(u)) du \right) \quad (6.30)$$

com $z \in [r_s(t_0, t_n), \infty)$ e $\{z : \mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j) = 1 - \mathbb{Q}(z)\}$.

Definindo ainda $k(t_j) = f^{-1}(\mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j))$, com $f = 1 - \mathbb{Q}(u)$, então:

$$CVA_C^B = LGD_C \cdot \sum_{j=1}^n A(t, t_j, t_n) \cdot \left(\int_{k(t_j)}^{\infty} (1 - \mathbb{Q}(u)) \, du + k(t_j) - r_s(t_0, t_n) \right) (\mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j)) \quad (6.31)$$

A equação 6.26, usando 6.28 e 6.31, pode ser escrita como:

$$CVA_C^B = LGD_C \cdot \sum_{j=1}^n A(t, t_j, t_n) \cdot \left(\max(k(t_j) - r_s(t_0, t_n), 0) (\mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j)) + LGD_C \cdot \sum_{j=1}^n \text{SwOp}_P(t, t_j, \max(r_s(t_0, t_n), k(t_j))) \right) \quad (6.32)$$

onde:

$\text{SwOp}_P(\cdot)$ representa o preço de uma *payer swaption*, na qual o agente possui o direito, mas não a obrigação, de entrar em um *swap* pagando fluxos de caixa atrelados a uma taxa de juros fixa e recebendo fluxos de caixa atrelados a uma taxa flutuante.

De forma contrária, pode-se analisar o *CVA* de uma posição vendida em *swap*, na qual o banco B recebe valores indexados a uma taxa de juros fixa e paga taxa de juros flutuante. Nesse caso, o *WWR* envolve o fato de a probabilidade de *default* aumentar quando a taxa de juros de mercado cai. Assim, o banco paga menos na ponta passiva, recebendo uma taxa de juros fixa maior, obtendo ganho em sua posição marcada a mercado, porém incorrendo em risco de crédito da contraparte. Com isso, para o caso de uma posição vendida no *swap*, o agente está sujeito ao *WWR* quando há uma associação negativa entre as taxas do *swap* e a probabilidade de *default* da contraparte.

Assim, seguindo Cherubini (2013), uma situação extrema envolve:

$$\mathbb{C}(\mathbb{Q}(u), \mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j)) = \min(\mathbb{Q}(u), \mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j)) \quad (6.33)$$

De forma análoga ao analisado para o caso da ponta compradora do *swap*, tem-se para a ponta vendida no *swap*:

$$CVA_C^B = LGD_C \cdot \sum_{j=1}^n A(t, t_j, t_n) \cdot \int_0^{r_s(t_0, t_n)} \min[\mathbb{Q}(u), \mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_B(t_j)] \, du \quad (6.34)$$

Definindo $k^*(t_j) = g^{-1}(\mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j))$, com $g = \mathbb{Q}(u)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
CVA_C^B = LGD_C \cdot \sum_{j=1}^n A(t, t_j, t_n) \cdot \\
\left(\min(r_s(t_0, t_n) - k^*(t_j), 0) (\mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j)) \right. \\
\left. + LGD_C \cdot \sum_{j=1}^n \text{SwOp}_R(t, t_j, \min(r_s(t_0, t_n), k^*(t_j))) \right) \quad (6.35)
\end{aligned}$$

onde:

$\text{SwOp}_B(\cdot)$ representa o preço de uma *receiver swaption*, na qual o agente possui o direito de entrar em um *swap* pagando fluxos indexados a uma taxa de juros flutuante e recebendo fluxos atrelados a uma taxa de juros fixa.

Assim, por meio do uso de cópulas extremas, o modelo de Cherubini (2013) possibilita o estudo do preço de um *swap* considerando-se o risco de crédito da contraparte, incluindo situações de dependência ou independência entre a probabilidade de *default* e a exposição ao *default*. A seguir, vamos analisar resultados do preço de *swaps* usando o modelo de Cherubini (2013), avaliando o comportamento sob diversas condições.

6.3.3 Análise de simulação

A equação 6.26 estabelece um modelo de análise em que o instante de *default*, associado à função de sobrevivência e, portanto, à probabilidade de *default* (*PD*), pode ser estudada de forma conjunta com a exposição no instante do *default* (*EAD*).

Vamos investigar o comportamento do *CVA* de um *swap*, utilizando arbitrariamente taxas de juros e volatilidades de opções sobre *swaps*, para fazer uma análise de sensibilidade. Para modelar o processo de difusão de taxa de juros r , vamos usar Hull e White (1990) que definem:

$$dr = [\vartheta(t) - a(t)r(t)] dt + \sigma(t) W(t) \quad (6.36)$$

onde ϑ , a , e σ são funções determinísticas no tempo.

De acordo com Brigo e Mercurio (2006), o modelo de Hull e White (1990) pode ser calibrado para se adequar a estrutura a termo de taxas de juros e a estrutura temporal, à vista ou a termo, de volatilidade. Porém, um ajuste perfeito da estrutura de juros pode implicar um ajuste problemático na estrutura de volatilidades, pois nem todas as volatilidades extraídas do mercado são relevantes devido à falta de liquidez e ao fato de que as estruturas de volatilidades futuras da equação 6.36 podem ser pouco realistas e incompatíveis com formatos tradicionais (Brigo e Mercurio, 2006; Carverhill, 1995; Hull e White, 1995).

Tendo em vista as considerações o sobre modelo genérico da equação 6.36, a análise conduzida segue Hull e White (1990) e Hull e White (1994a), simplificando o estudo para uma extensão do modelo de Vasicek (1977). na qual a e σ são constantes positivas e ϑ pode ser calibrada para ajustar a estrutura temporal de taxas de juros implícita nas operações do mercado (Brigo e Mercurio, 2006).

Para fins de aplicação do modelo de [Cherubini \(2013\)](#) para precificação de *swaps*, vamos descrever brevemente as fórmulas de avaliação de preço de títulos de dívida, de *swaps* e de opções sobre *swaps*, dentro do processo de difusão de taxa de juros estabelecido por [Hull e White \(1990\)](#) e [Hull e White \(1994a\)](#), uma vez que fundamentam o cálculo do CVA dado pela equação 6.26. Maiores detalhes sobre os modelos de taxas de juros e as fórmulas de precificação livres de risco de crédito da contraparte, podem ser obtidos em [Brigo e Mercurio \(2006\)](#).

Vamos considerar a fórmula genérica de preço de um *zero coupon bond*, isto é, um título de dívida que paga somente um fluxo de caixa no vencimento. Se o título gera o fluxo de caixa de 1 unidade monetária no vencimento, então:

$$P(t, T) = \mathbb{E}_t \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \right] \quad (6.37)$$

No contexto da dinâmica de taxa de juros estabelecida no modelo de Hull e White, o preço de um *zero coupon bond* é dado por ([Brigo e Mercurio, 2006](#)):

$$P(t, T) = A_1(t, T) \exp(-B_1(t, T)r(t)) \quad (6.38)$$

onde:

$$A_1(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp[B_1(t, T)f^M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1 - \exp(-2at))B_1(t, T)^2];$$

$$B_1(t, T) = \frac{1}{a}[1 - \exp(-a(T - t))];$$

$P^M(0, x)$ é o valor do fator de desconto para um fluxo com vencimento em x , obtido a partir de dados de mercado; e

$f^M(0, x)$ é a taxa de juros a termo instantânea observada no mercado em 0 para vencimento em T .

Considerando as equações 6.32 e 6.35, o CVA depende dos preços de *swaptions*. O modelo de Hull e White implica a possibilidade de obtenção de fórmulas analíticas para *payer swaption* e *receiver swaption* dadas, respectivamente, considerando um valor nominal de 1 unidade monetária, por ([Brigo e Mercurio, 2006](#)):

$$\text{SwOp}_P(t, T, X) = \sum_{i=1}^n c_i \text{Put}(t, T, t_i, X_i) \quad (6.39)$$

$$\text{SwOp}_R(t, T, X) = \sum_{i=1}^n c_i \text{Call}(t, T, t_i, X_i) \quad (6.40)$$

onde:

$c_i = X\delta_i$, para $i = 1, \dots, n$ com $\delta_i = t_i - t_{i-1}$, supondo uma correção de um fluxo de 1 unidade monetária para todo o período do *swap*.

Os valores em t de opções de compra Call e de venda Put do tipo europeu com preço de exercício X , maturidade T , sobre um ativo-objeto referente a um título de dívida *zero coupon* com

vencimento em S , são dados respectivamente por (Brigo e Mercurio, 2006):

$$\text{Call}(t, T, S, X) = P(t, S)\Phi(h) - XP(t, T)\Phi(h - \sigma_p) \quad (6.41)$$

$$\text{Put}(t, T, S, X) = XP(t, T)\Phi(-h + \sigma_p) - P(t, S)\Phi(-h) \quad (6.42)$$

onde:

$$\sigma_p = \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2a(T-t))}{2a}} B(T, S)$$

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln\left(\frac{P(t, S)}{P(t, T)X}\right) + \frac{\sigma_p}{2}$$

Ainda para o processo de precificação e calibração, são necessários também dados sobre derivativos sobre *swaps*. Para o modelo de precificação de *swaps*, seguindo Cherubini (2013), usamos um modelo de volatilidade local para o qual os parâmetros $k(t_j)$ e $k^*(t_j)$ são obtidos por meio de:

$$k(t_j) = \text{fsr}(t, t_j, t_n) \cdot \exp\left[-\frac{\sigma_{j,n}}{2} - \Phi^{-1}(\mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j))\sigma_{j,n}\sqrt{t_j - t}\right] \quad (6.43)$$

$$k^*(t_j) = \text{fsr}(t, t_j, t_n) \cdot \exp\left[-\frac{\sigma_{j,n}}{2} + \Phi^{-1}(\mathbb{S}_C(t_{j-1}) - \mathbb{S}_C(t_j))\sigma_{j,n}\sqrt{t_j - t}\right] \quad (6.44)$$

onde:

$\text{fsr}(t, t_j, t_n)$ é a taxa do *swap* a termo, ou seja, a taxa definida no instante t para um *swap* com início em t_j e maturidade em t_n ;

$\sigma_{j,n}$ é a volatilidade associada a operação de prazo correspondente; e

$\Phi(x)$ representa a função distribuição normal acumulada padrão.

A partir do mecanismo de precificação do *CVA* baseado em cópulas estabelecido por Cherubini (2013), podemos fazer uma análise de diferentes combinações de cenários, utilizando o modelo de Hull e White (1990) e Hull e White (1994b). A Figura 6.1 mostra, para um dado nível de taxa de juros, valores de *CVA* na posição comprada do *swap*, para diferentes volatilidades: 1%, 5%, 10%, 20% e 50%, considerando um modelo de dependência entre componentes de risco.

Os resultados sugerem que, quanto maior a volatilidade, maior a relevância do *CVA* para precificação do *swap*. Obviamente, por ser um componente de risco de mercado relevante, a volatilidade da taxa de juros tem uma influência na exposição a potencial ao risco de crédito da contraparte. Dessa forma, é interessante observar que, dentro do ponto de vista de *trading* de derivativos, situações em que o grau de nervosismo do mercado começa a aumentar, causando maior volatilidade, implicam em *spreads* maiores cobrados pelos *dealers*. Esse maior *spread* pode denotar simplesmente um maior custo do *dealer* para realizar seu próprio *hedge* como também um valor adicional em função do maior risco de crédito da contraparte. De forma, análoga, pode-se identificar, na Figura 6.2, o comportamento do *CVA* para diferentes volatilidades, em uma posição vendida no *swap*.

Para o caso de uma posição vendida em *swap*, o *CVA* também aumenta em função de uma maior volatilidade. De forma comparativa, observa-se que o *CVA* de uma posição comprada

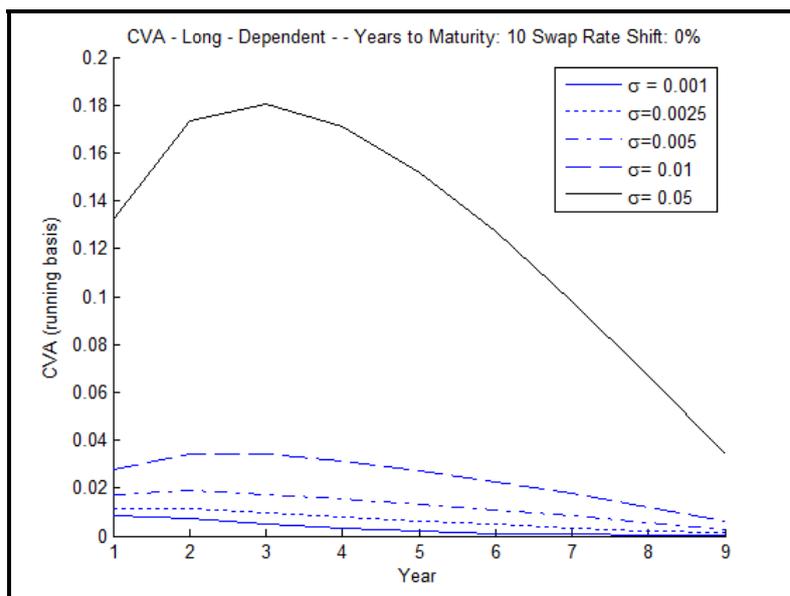


Figura 6.1: Exposição esperada - Posição comprada

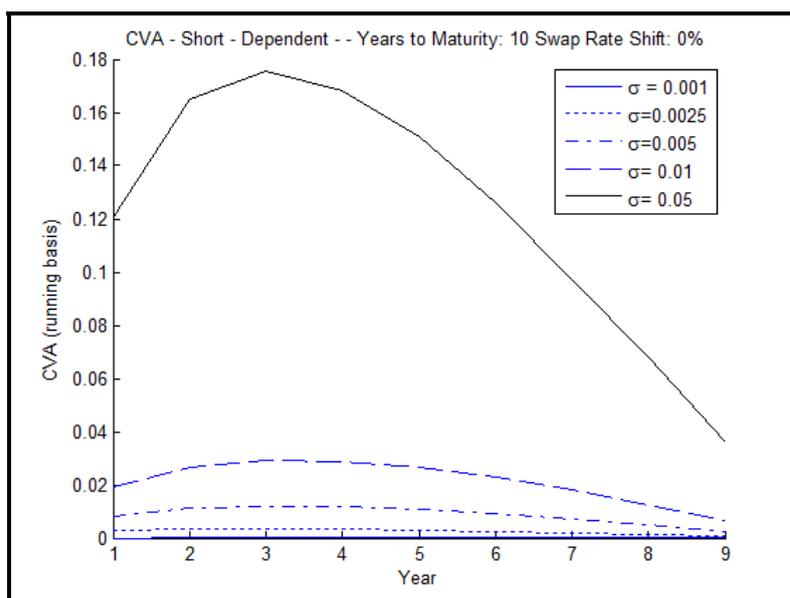


Figura 6.2: Exposição esperada - Posição vendida

em *swap* de taxa de juros é maior do que o da posição vendida. Esse resultado pode refletir não somente condições de taxas de juros e volatilidades, mas principalmente o fato de que, na posição comprada, o agente possui uma opção de compra sobre um *swaption* no qual tem o direito de pagar uma taxa fixa. Como a taxa flutuante pode aumentar substancialmente e dificilmente pode assumir valor negativo, essa opção pode ter um maior valor, uma vez que, na posição comprada no *swap*, a exposição ao risco de crédito da contraparte pode assumir valores elevados.

Outro fato relevante para ser analisado está associado à marcação-a-mercado da operação, após a negociação. Mesmo que não haja flutuação no nível de taxas de juros, o valor marcado-a-mercado de um *swap* pode ser alterado em função de alterações na estabilidade do mercado. Nesse sentido, posições a derivativos tendem a ter uma desvalorização associada à variação do *CVA* simplesmente em função de um aumento de volatilidade de fatores de risco de mercado, após a negociação do contrato.

6.4 Aplicação do modelo de Cherubini

Nessa seção, vamos aprofundar o estudo do modelo de Cherubini (2013), investigando o comportamento do *CVA* em função do processo de difusão da taxa de juros. Tendo em vista os fatores de risco que afetam um *swap* de taxa de juros, é interessante identificar como a escolha do modelo de difusão influencia nos resultados. Utilizando dados do mercado americano no período entre 2005 e 2015, podemos estudar o *CVA* em situações comuns e em cenários de crise.

É importante destacar que, sob o ponto de vista de gestão de capital, a eventual existência de modelos que consistentemente gerem menos *CVA* pode ser benéfica para fins de requisitos de capital por órgãos reguladores, embora se aumente a probabilidade de não-conformidades que, por sua vez, pode resultar em um aumento de exigência de patrimônio líquido.

Sob o ponto de vista de gestão de riscos, no caso de *swaps*, a dependência do *CVA* à escolha do modelo de taxa de juros, do modelo de precificação de *swaptions* e da forma de estimação de volatilidades de taxa de juros implica a existência de risco de modelagem. Dessa forma, a análise de vários modelos é imprescindível para uma adequada avaliação do *CVA*.

6.4.1 Dinâmica da difusão de taxa de juros

O risco de crédito da contraparte em operações de swaps de taxas de juros depende da modelagem do processo de difusão dos fatores de risco relevantes. Assim, a avaliação do *CVA* é influenciado não somente pela escolha da forma de dependência entre os componentes de risco (*PD*, *LGD* e *EAD*) como também da definição do modelo que expressa a dinâmica das taxas de juros. De acordo com Buetow *et al.* (2001), existem duas abordagens distintas para a estruturação de equações diferenciais estocásticas para modelar o comportamento das taxas de juros: (a) modelos de equilíbrio e (b) modelos de não-arbitragem.

Os modelos de equilíbrio buscam estabelecer mecanismos de precificação de títulos de dívida sob uma estrutura de análise baseada em equilíbrio de mercado, no qual se especifica o preço de mercado do risco (Buetow *et al.*, 2001; Vasicek, 2007). Alguns modelos de equilíbrio tradicionalmente estudados são Vasicek (1977), Brennan e Schwartz (1979), Cox *et al.* (1985), Longstaff (1989), Longstaff (1992) e Dai e Singleton (2003) (Vasicek, 2007).

Já os modelos de não-arbitragem usam preços de mercado para gerar uma grade de possíveis valores de taxas de juros, por meio dos quais o preço teórico de um título de dívida é igual ao preço observado no mercado. Modelos tradicionais de não-arbitragem são Ho e Lee (1986), Black *et al.* (1990), Hull e White (1990), Hull e White (1993), Black e Karasinski (1991), Heath *et al.* (1992) (Vasicek, 2007). É importante destacar que modelos de não-arbitragem permitem que parâmetros sejam calibrados de acordo com preços negociados no mercado, tendo portanto, maior aderência com valores operados por praticantes.

Tendo em vista o interesse em estudar o comportamento do modelo de *CVA* de Cherubini (2013), considerando-se dados reais de mercado, o foco desse estudo envolve os modelos de não-arbitragem. Em particular, será investigado o *CVA* de operações de *swaps* tradicionais a partir dos modelos clássicos de Hull-White, Black-Karasinski, Black-Derman-Toy e Heath-Jarrow-Morton.

O modelo de Black *et al.* (1990), apesar de inicialmente estabelecido a partir de um mecanismo discreto, pode ser resumido por meio de uma equação diferencial estocástica dada por:

$$d \ln(r(t)) = \Theta(t) dt + \sigma dW(t) \quad (6.45)$$

Hull e White (1990) e Hull e White (1994b) apresentam uma extensão ao modelo de Vasicek (1977), no qual o modelo de difusão de taxas de juros é dado por:

$$dr(t) = [\vartheta(t) - ar(t)] dt + \sigma dW(t) \quad (6.46)$$

sendo a e σ constantes e ϑ calibrada para se ajustar à estrutura a termo de taxas de juros observada no mercado (Brigo e Mercurio, 2006).

Já Black e Karasinski (1991) estabelecem que a dinâmica das taxas de juros à vista seguem o seguinte modelo, generalizando o modelo de Black *et al.* (1990) e simplificando-se, de forma semelhante a Hull e White (1994b), a e σ constantes:

$$d \ln(r(t)) = [\theta(t) - a \ln(r(t))] dt + \sigma dW(t) \quad (6.47)$$

sendo $r(0) = r_0$, a e σ constantes e θ calibrada para se ajustar à estrutura a termo de taxas de juros observada no mercado (Brigo e Mercurio, 2006).

Em contraste com os modelos anteriores, o modelo de Heath *et al.* (1992) estabelece um modelo para taxas de juros a termo que seguem o seguinte processo de difusão, dada uma maturidade T (Brigo e Mercurio, 2006):

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW(t) \quad (6.48)$$

com $f(0, T) = f_M(0, T)$ representando a estrutura a termo de taxas de juros dada por preços de mercado em $t = 0$.

onde:

$W = (W_1, \dots, W_N)$ segue um movimento *browniano* de N dimensões;

$\sigma(t, T) = (\sigma_1(t, T), \dots, \sigma_N(t, T))$ é um vetor de processos adaptados; e

$\alpha(t, T)$ é um processo adaptado, sendo escolhido baseado no vetor de volatilidades σ e da taxa de evolução da dinâmica dos N títulos *zero coupon* selecionados para a precificação.

6.4.2 Análise de resultados

Vamos agora analisar o comportamento do CVA de operações de *swaps*, usando os modelos de Black-Derman-Toy (BDT, Black *et al.* (1990)), Black-Karasinski (BK: Black e Karasinski (1991)), Hull-White (HW: Hull e White (1993)) e Heath-Jarrow-Morton (HJM: Heath *et al.* (1992)) calibrados usando dados do mercado americano entre 2005 e 2015. Para a obtenção da estrutura a termo de taxas de juros, são utilizados dados diários das taxas Libor até 6 meses para prazos curtos e da curva de *swaps* de taxas de juros no mercado americano, com maturidades entre 1 e 50 anos, para os prazos médios e longos. Taxas de juros para prazos intermediários são interpolados. Para implementação e calibração dos modelos de taxas de juros, referências sobre aspectos teóricos e empíricos podem ser encontrados em Hagan e Konikov (2004), La Chioma e Piccoli (2007), Keller-Ressel *et al.* (2012), Boyle *et al.* (2001) e Bjerksund e Stensland (1996), Leippold e Wiener (2004), Galluccio *et al.* (2007), por exemplo. A Figura 6.3 mostra as volatilidades diárias obtidas pela calibração de cada um dos modelos.

Pode-se observar uma grande diferença nas estimativas de volatilidade obtidas a partir de diferentes modelos de taxas de juros. Dessa forma, a calibração de parâmetros usando-se dados de mercado é bastante sensível ao modelo utilizado e pode ter um impacto considerável nos cálculos

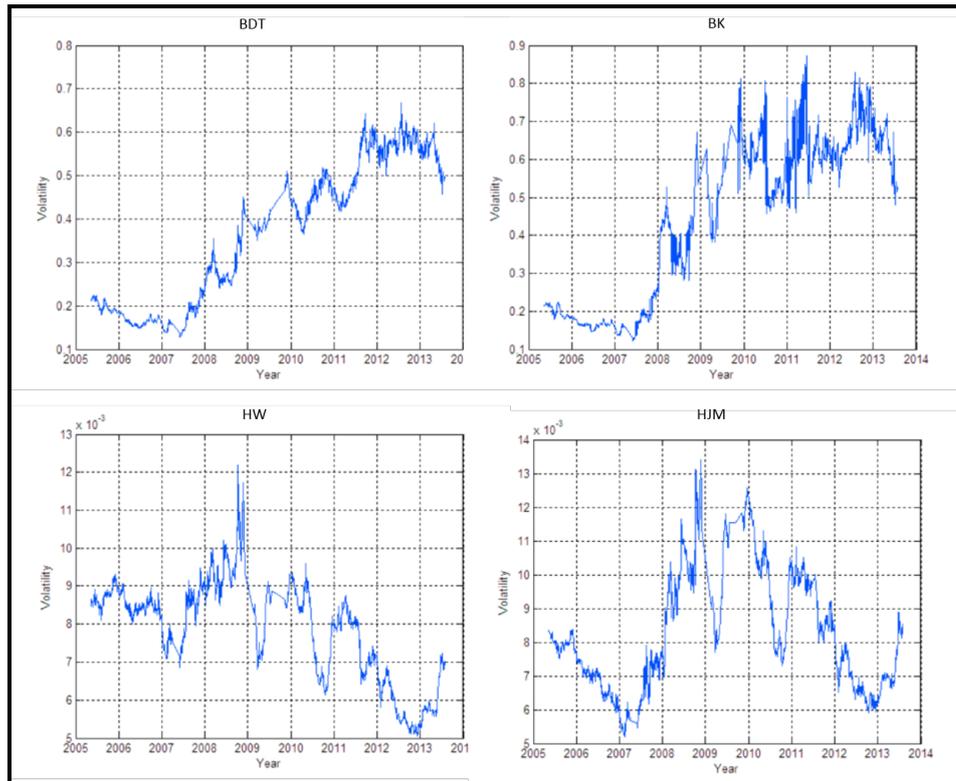


Figura 6.3: CVA para o período de 2005-2013 - Posição comprada, independência, modelo de Hull-White

de CVA. Nos modelos utilizados, as estimativas de volatilidade são obtidas a partir de opções *at-the-money*. No entanto, é importante destacar que diferentes preços de exercício para as opções de taxas de juros implicam diferentes estimativas de volatilidade implícitas. Dessa forma, um elemento importante no cálculo do CVA envolve também a escolha da volatilidade a ser utilizada.

Seguindo o mecanismo de calibração do cubo de volatilidades de taxas de juros no mundo neutro a risco de Hagan e Konikov (2004), foram utilizados dados de *caps* e *floors* com preços de exercício entre 1% e 14% com maturidades entre 2 a 10 anos. No contexto de taxas de juros, *caps* são derivativos nos quais o titular, isto é, o comprador do produto, recebe fluxos de caixa caso, no período da operação, a taxa de juros supere um determinado preço de exercício. Os *floors* são opções de taxas de juros, nas quais o titular, isto é, o comprador do produto, tem o direito de receber fluxos de caixa caso o nível de taxas de juros seja inferior ao preço de exercício. Para exemplificar o fato de que a volatilidade implícita é diferente para diferentes níveis de preço de exercício, pode-se construir a seguinte superfície de volatilidade para um dado dia. A Figura 6.4 sugere uma sensibilidade relevante do CVA à escolha da volatilidade, quando se utiliza a discussão das figuras 6.1 e 6.2

Aplicando-se os diversos modelos de taxas de juros, podemos identificar o comportamento do CVA ao longo do período de análise. A Figura 6.5 mostra os resultados usando o modelo de Black-Derman-Toy, no qual o cenário (a) representa a análise para a posição comprada no *swap* e o cenário (b) representa a posição vendida no *swap*. Os sub-cenários (1) e (2), representam respectivamente, o caso de independência e dependência entre os componentes de risco.

Conforme já observado anteriormente, a posição comprada no *swap* induz, em geral, um maior CVA, comparativamente à posição vendida. É interessante observar também que o CVA utilizando o modelo de dependência é substancialmente maior sugerindo que o *WWR* constitui importante elemento a ser considerado nas análises. Para fins de gestão de riscos e capital regulatório, não levar em consideração a dependência adversa entre componentes de risco pode implicar em uma

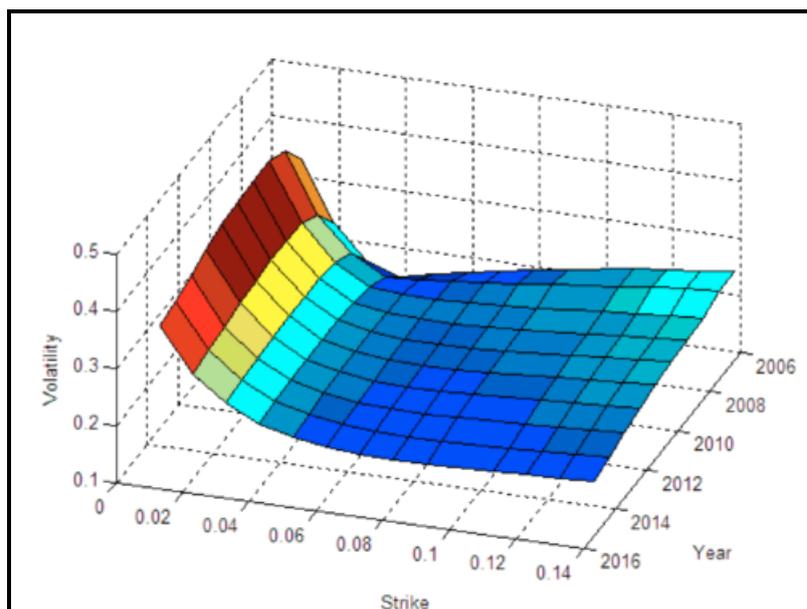


Figura 6.4: Superfície de volatilidade, em maio de 2005

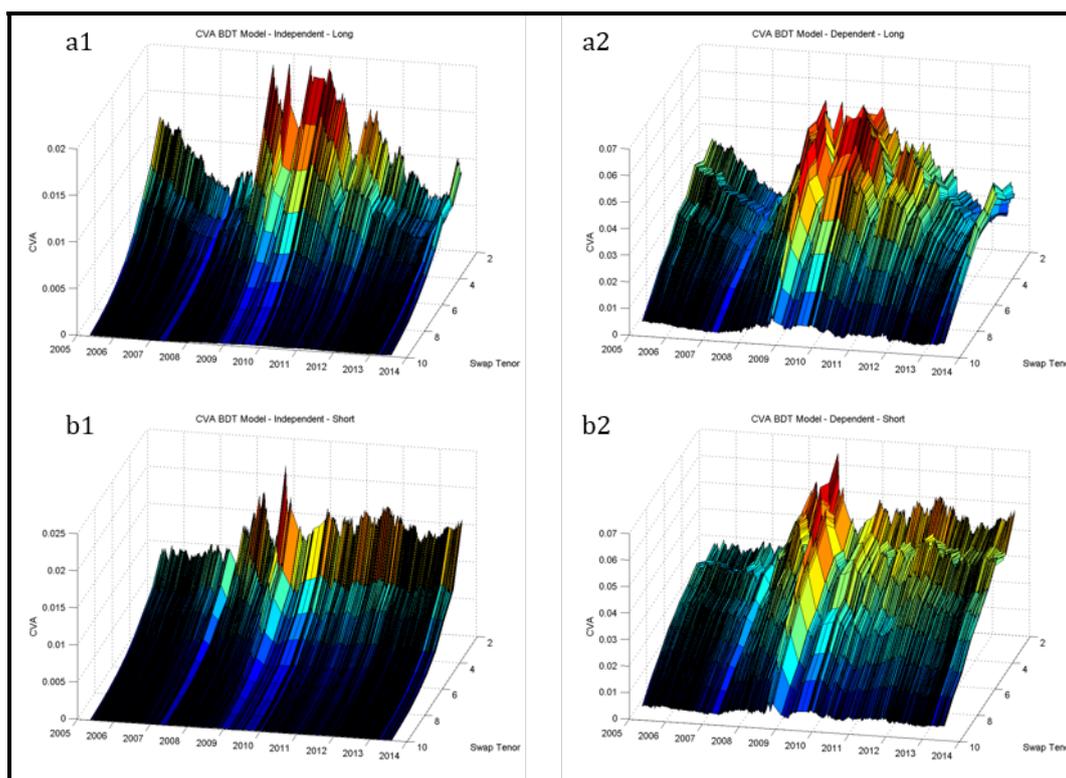


Figura 6.5: CVA para o período de 2005-2015 - Modelo de Black-Derman-Toy

relevante subestimação do valor associado ao risco de crédito da contraparte. De forma análoga, são apresentados na Figura 6.6 os resultados do *CVA* no período analisado, considerando-se o modelo de Black-Karasinski para representação da dinâmica de difusão das taxas de juros.

Os resultados para a análise do modelo de Hull-White ao longo do período de análise são apresentados na Figura 6.7 e os do modelo de Heath-Jarrow-Morton, na Figura 6.8.

Pode-se identificar também, ao analisar as posições compradas e vendidas, considerando-se dependência, que existem situações nas quais o *CVA* é maior para a posição comprada e outras

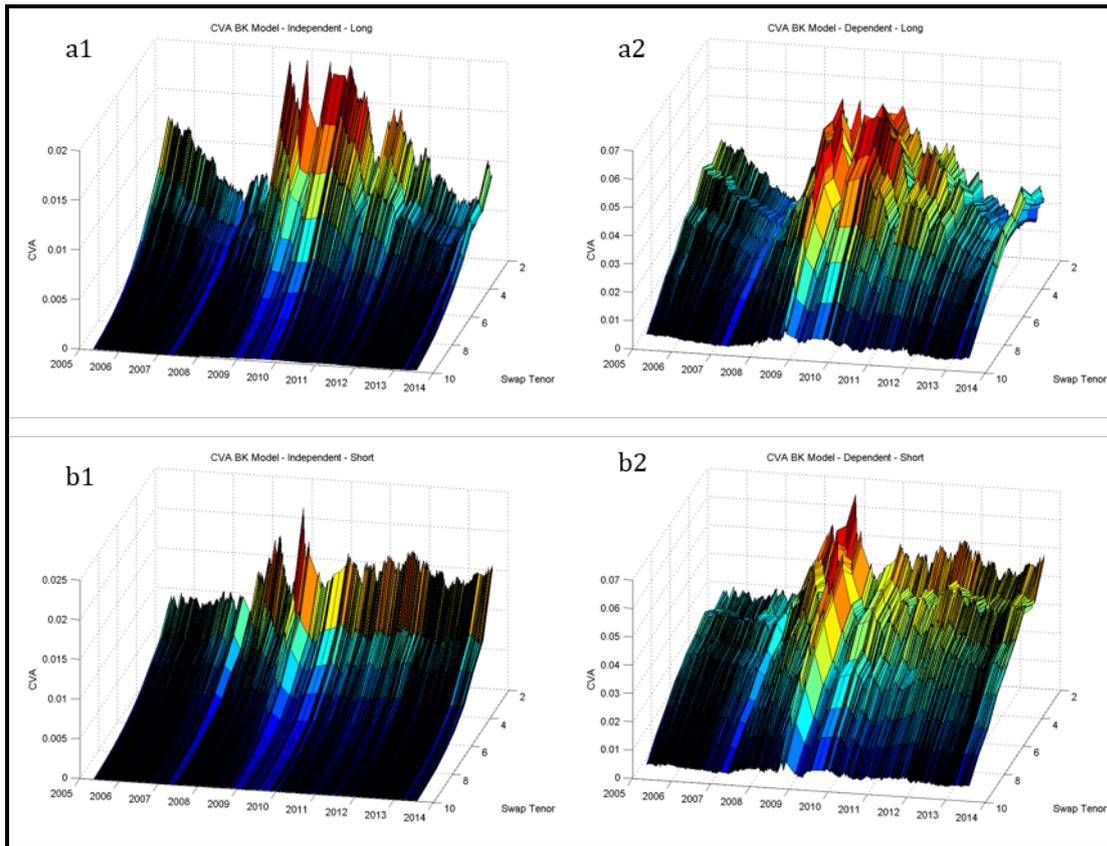


Figura 6.6: CVA para o período de 2005-2015 - Modelo de Black-Karasinski

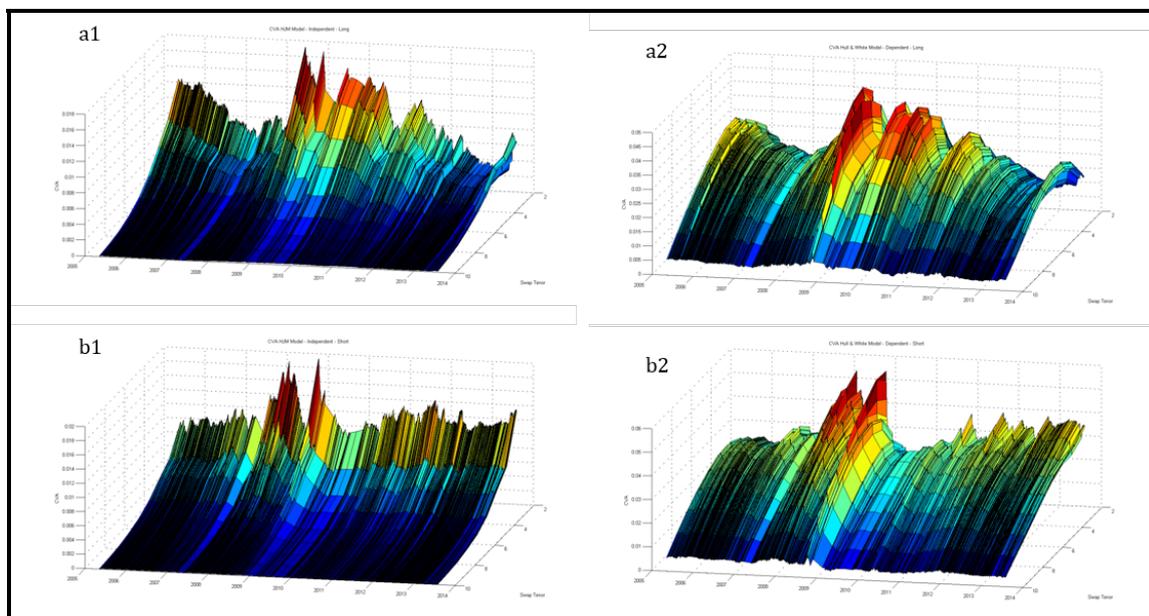


Figura 6.7: CVA para o período de 2005-2015 - Modelo de Hull-White

situações em que o CVA é maior para as posições vendidas. A Figura 6.9 mostra a diferença entre os $CVAs$ de posições compradas e vendidas. Essa inversão de sinal independe do modelo de taxa de juros. Dessa forma, combinações de mercado, notadamente de níveis de taxas de juros e volatilidades de taxas de juros podem ser fatores relevantes na inversão do sinal. Cabe destacar ainda que os resultados não indicam que um modelo sempre resulta em maiores ou menores $CVAs$ de forma consistente. Assim, a manipulação de requisitos de capital em função de gerenciamento de modelos

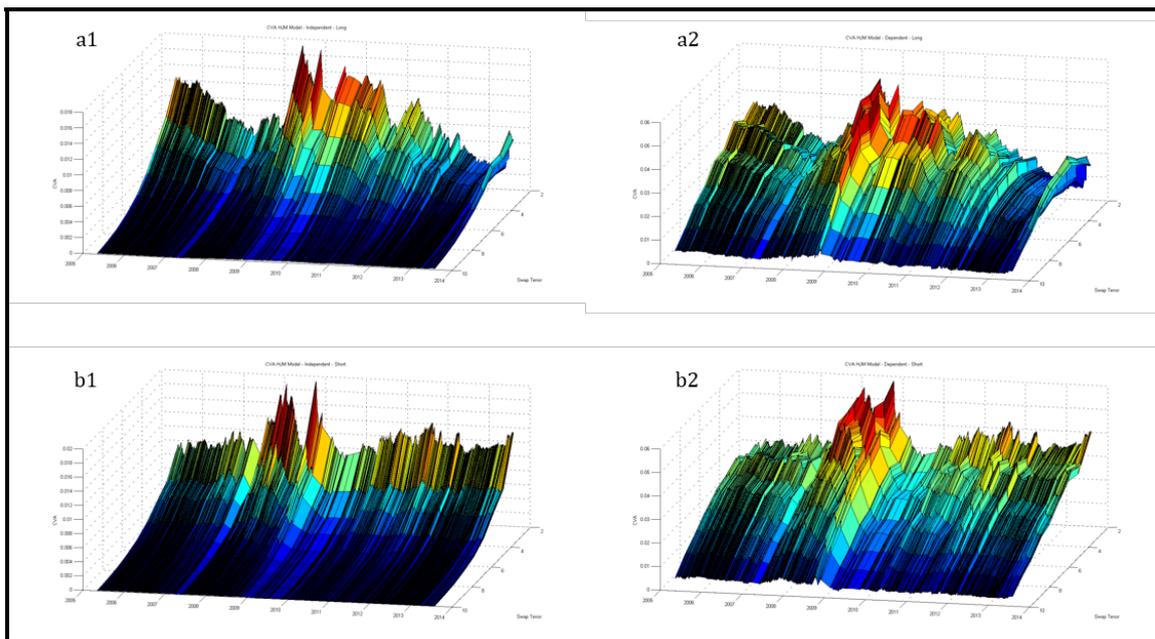


Figura 6.8: CVA para o período de 2005-2015 - Modelo de Heath-Jarrow-Morton

de taxas de juros parece menos produtivo.

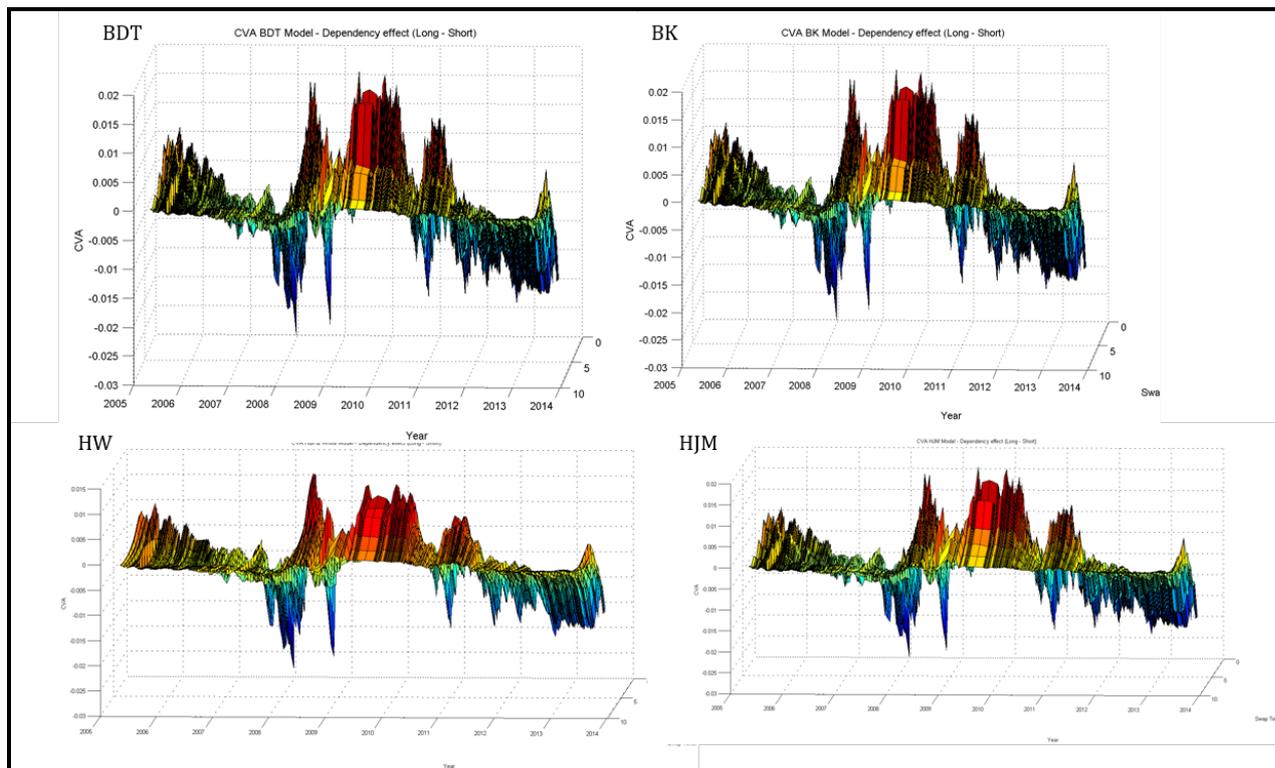


Figura 6.9: Diferença de CVA entre posições comprada e vendida, com dependência entre componentes

6.5 Considerações finais

A abordagem de Cherubini (2013) envolve o uso de cópulas que ligam dois componentes do risco de crédito. Considerando uma dependência entre o instante de *default* e o valor de exposição e

utilizando uma cópula que representa dependência perfeita, Cherubini (2013) obtém uma fórmula analítica para o cálculo de *CVA* de *swaps* de taxas de juros.

Observa-se que o uso de cópulas permite o estudo de *WWR* possibilitando a incorporação de dependência que comumente era negligenciado como se pode observar nas fórmulas simplificadas descritas, por exemplo, em Canabarro (2009) e Gregory (2012). Esse trabalho buscou estender a análise de Cherubini (2013), levando-se em consideração diferentes modelos de difusão da taxa de juros. Tendo em vista que a precificação de *swaps* depende da modelagem da estrutura temporal da taxa de juros e de seu comportamento ao longo do tempo até o vencimento de um derivativo, a análise se justifica uma vez que pode ter impacto relevante nas estimativas de *CVA*.

Utilizando os modelos de Black-Derman-Toy, Black-Karasinski, Heath-Jarrow-Morton e Hull-White, por meio da calibração de taxas de juros, volatilidades e preços de *swaptions* a partir de dados de mercado, foi feita uma análise comparativa das estimativas de *CVA*. Os resultados indicam a existência de diferenças que podem impactar ajustes de preços em carteiras de derivativos, embora nenhum modelo gere consistentemente maiores ou menores valores de , sugerindo uma dificuldade de redução do requisito de capital a partir da escolha do modelo de difusão de taxas de juros.

Capítulo 7

CVA usando cópulas para os componentes do risco de crédito

7.1 Introdução

O Acordo da Basileia (BCBS, 2006) estabelece, para posições de crédito tradicionais, uma fórmula para a perda esperada (*EL: Expected Loss*) a partir dos componentes do risco de crédito: Probabilidade de Inadimplência (*PD: Probability of Default*), Perda Dada a Inadimplência (*LGD: Loss Given Default*) e Exposição no Instante do Default (*EAD: Exposure at Default*). Mais especificamente, o valor da perda esperada de uma carteira de contendo operações tradicionais de empréstimos é dado pelo produto de valores esperados para cada componente de crédito: $EL = \mu_{PD} \cdot \mu_{LGD} \cdot \mu_{EAD}$.

Análise análoga pode ser realizada para estimar o *CVA* de uma carteira de crédito contendo produtos diversos, inclusive derivativos, considerando o valor associado ao risco de crédito da contraparte. Uma forma simples de análise do *CVA* envolve obter o produto das estimativas dos três componentes de risco de crédito usando mecanismo similar ao cálculo de *EL*. Porém, a existência de dependência entre os componentes de risco de crédito, que pode se refletir em *WWR* (*wrong-way risk*) ou em *RWR* (*right-way risk*), sugere a necessidade de abordagem por meio das variáveis aleatórias e não dos seus valores esperados. Nessa abordagem, o *CVA* seria obtido como uma variável aleatória $CVA = PD \cdot LGD \cdot EAD$ que, posteriormente, poderia propiciar estimativas de valores médios para fins de precificação e de, por exemplo, intervalos de variação, estimativas de perda máxima, etc para fins de gestão de riscos.

Neste contexto de variáveis aleatórias que podem ter dependências diversas, vamos analisar o *CVA* envolvendo os três componentes do risco de crédito, a partir de um mecanismo baseado em cópulas. Enquanto Cherubini (2013) estabelece um relacionamento entre *PD* e *EAD* por meio de uma cópula, vamos gerar estimativas de *CVA* a partir de *vine* cópulas, contemplando os diversos componentes de crédito, incluindo *LGD*.

Utilizando distribuições de probabilidades univariadas conhecidas para *PD* e *LGD* e genérica para *EAD*, e estabelecendo dependências por meio de cópulas bivariadas, aplica-se um algoritmo que permite a geração de dados simulados, com uma dependência entre os componentes de risco de crédito. Tendo em vista que esses dados simulados permitem o cálculo de possíveis realizações de uma variável aleatória, possibilitam obter não somente estimativas de *CVA* como também outras métricas associadas ao ajuste no valor da carteira em função do risco de crédito da contraparte.

7.2 Construção de dependência multivariada

Cópuas são distribuições multivariadas com marginais univariadas uniformes (Cooke *et al.*, 2011; Joe, 1997; Nelsen, 2006). A representação de distribuições conjuntas a partir de marginais uniformes e da cópula permite que problemas de estimação das distribuições univariadas sejam separados dos problemas de estimação de dependência entre as variáveis (Kurowicka, 2011).

Embora trabalhos sobre cópuas multivariadas, com dimensões $d \geq 3$, sejam escassos, há abundante literatura sobre cópuas bivariadas e suas propriedades (Mai e Scherer, 2012, p. 185). A construção de cópuas de dimensões mais elevadas é comumente considerada difícil, principalmente porque, ao contrário das cópuas paramétricas bivariadas, o conjunto de cópuas paramétricas de dimensões elevadas é bastante limitado (Aas *et al.*, 2009, p. 182).

Os *PCCs* (*Pair Copula Constructions*), também chamados de *vine* cópuas (Bedford e Cooke, 2002; Joe, 2015), representam uma maneira flexível para modelar dependências multivariadas a partir do estabelecimento de estruturas de dependências bivariadas (Aas *et al.*, 2009; Acar *et al.*, 2012). As *vine* cópuas são estruturas gráficas que representam distribuições de probabilidade conjunta (Kurowicka, 2011) e proporcionam um mecanismo sistemático de decomposição de uma cópula multivariada em uma cascata de cópuas bivariadas, sendo algumas condicionais (Acar *et al.*, 2012). Uma *vine* $\vartheta = (T_1, \dots, T_{n-1})$ em relação a n variáveis é um conjunto aninhado de árvores T_i , $i = 1, \dots, n-1$ conectadas, onde as pontas de uma árvore j são os nós da árvore $j+1$, $j = 1, \dots, n-2$ (Kurowicka, 2011).

Dentro do contexto de *vines* regulares, dois casos especiais são evidenciados por Aas *et al.* (2009): os *C-vines* e os *D-vines*. De acordo com Cooke *et al.* (2011), em uma *C-vine* ou *vine* canônica, o conjunto de cópuas bivariadas é denotado por $B = \{C_{i_1 i_2 | 1, \dots, i_1 - 1} : 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n\} = \{C_{12}; \dots; C_{1n}; C_{23|1}; \dots, C_{2n|1}; \dots; C_{n-1, n | 1, \dots, n-2}\}$ e em uma *D-vine*, $B = \{C_{i_1 i_2 | i_1 + 1, \dots, i_2 - 1} : 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n\} = \{C_{12}; \dots; C_{n-1, n}; C_{13|2}, \dots, C_{n-2, n | n-1}; \dots; C_{1, n | 2, \dots, n-1}\}$.

Aas *et al.* (2009), avançando os trabalhos de Joe (1996), Bedford e Cooke (2001, 2002) e Kurowicka e Cooke (2006), desenvolveram uma abordagem prática de *vine*, utilizando cópuas bidimensionais para a modelagem de dependências multivariadas de dimensão $d \geq 3$, e apresentando algoritmos de cálculo de verossimilhança e de geração de simulações (Mai e Scherer, 2012, p. 185).

Assim, o problema de construção de cópuas multivariadas de qualquer dimensão é convenientemente resolvido por meio de combinações de cópuas bivariadas. Destaca-se, no entanto, que embora bastante prático e amplamente utilizado para a construção de dependência multivariada, o mecanismo de simulação baseado em *PCC* apresenta limitações como discutido, por exemplo, em Haff *et al.* (2010) e Acar *et al.* (2012).

Para analisar o uso de *vine* cópuas em aplicações de CVA, vamos seguir Aas *et al.* (2009), usando a notação de Haff *et al.* (2010). Consideremos um vetor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ de variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade conjunta $f_{1 \dots n}(x_1, \dots, x_n)$ que pode ser fatorada de forma única, sem levar em conta as possíveis alterações da ordem das variáveis, por meio de (Aas *et al.*, 2009):

$$f_{1 \dots n}(x_1, \dots, x_n) = f_n(x_n) \cdot f_{n-1|n}(x_{n-1}|x_n) \cdot f_{n-2|n-1, n}(x_{n-2}|x_{n-1}, x_n) \cdots f_{1|2 \dots n}(x_1|x_2, \dots, x_n) \quad (7.1)$$

Utilizando o teorema de Sklar (1959), pode-se escrever uma distribuição multivariada F

com marginais $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (7.2)$$

usando uma cópula C apropriada de n dimensões, com marginais uniformemente distribuídas $U(0, 1)$ em $[0, 1]$, sendo $C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$, onde $F_i^{-1}(u_i)$ é a inversa da função de distribuição da marginal $F_i(x_i)$ (Aas *et al.*, 2009).

A função de densidade conjunta, supondo F absolutamente contínua com marginais F_1, \dots, F_n contínuas e estritamente crescentes, pode ser escrita, usando a regra da cadeira, a partir da densidade de uma cópula n -variada $c_{1\dots n}(\cdot)$ (Aas *et al.*, 2009):

$$f_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n) = c_{1\dots n}(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \quad (7.3)$$

Para duas variáveis quaisquer, $f_{ij}(x_i, x_j) = c_{ij}(F_i(x_i), F_j(x_j)) \cdot f_i(x_i) \cdot f_j(x_j)$ e $f(x_i|x_j) = c_{ij}(F_i(x_i), F_j(x_j)) \cdot f_i(x_i)$. Para o caso do cálculo de CVA a partir dos componentes de risco de crédito, o modelo da equação 7.1 reduz-se a três variáveis. Considerando $c_{23}(F_2(x_2), F_3(x_3))$ a função densidade da cópula $C_{23}(F_2(x_2), F_3(x_3))$ correspondente à distribuição $F_{23}(x_2, x_3)$ do par (X_2, X_3) (Haff *et al.*, 2010, p. 1297), então a densidade bivariada $f_{23}(x_2, x_3)$ e a densidade condicional $f_{2|3}(x_2|x_3)$, seguindo McNeil *et al.* (2006, p. 197), são dadas respectivamente por $f_{23}(x_2, x_3) = c_{23}(F_2(x_2), F_3(x_3)) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3)$ e $f_{2|3}(x_2|x_3) = c_{23}(F_2(x_2), F_3(x_3)) \cdot f_2(x_2)$.

Na equação 7.1, é necessário ainda obter $f_{1|23}(x_1|x_2, x_3)$, que pode ser calculado a partir, por exemplo, da densidade da cópula de $F_{12|3}(x_1, x_2|x_3)$ e de c_{13} , uma vez que (Haff *et al.*, 2010, p. 1297):

$$c_{12|3}(F_{1|3}(x_1|x_3), F_{2|3}(x_2|x_3); x_3) = \frac{f_{12|3}(x_1, x_2|x_3)}{f_{1|3}(x_1|x_3) \cdot f_{2|3}(x_2|x_3)} \quad (7.4)$$

Assim, tem-se que $f_{1|23}(x_1|x_2, x_3)$ pode ser rescrita como

$$\begin{aligned} f_{1|23}(x_1|x_2, x_3) &= \frac{f_{12|3}(x_1, x_2|x_3)}{f_{2|3}(x_2|x_3)} \\ &= c_{12|3}(F_{1|3}(x_1|x_3), F_{2|3}(x_2|x_3); x_3) \cdot f_{1|3}(x_1|x_3) \\ &= c_{12|3}(F_{1|3}(x_1|x_3), F_{2|3}(x_2|x_3); x_3) \cdot c_{13}(F_1(x_1), F_3(x_3)) \cdot f_1(x_1) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Substituindo a equação 7.5 em 7.1, temos:

$$\begin{aligned} f_{123}(x_1, x_2, x_3) &= f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3) \cdot c_{13}(F_1(x_1), F_3(x_3)) \cdot c_{2,3}(F_2(x_2), F_3(x_3)) \\ &\quad \cdot c_{12|3}(F_{1|3}(x_1|x_3), F_{2|3}(x_2|x_3); x_3) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Note que, para três dimensões, a forma canônica de C -vines equivale à forma de D -vines, conforme destacado pela Figura 7.1. Adicionalmente, considerando diferentes combinações das variáveis, podem ser obtidas três diferentes decomposições a partir de um modelo de três dimensões. Em dimensões maiores, o número de decomposições distintas aumenta significativamente chegando a 24 diferentes PCC s para um modelo de 4 dimensões e a 240 diferentes PCC s para um modelo de

5 dimensões (Aas *et al.*, 2009).

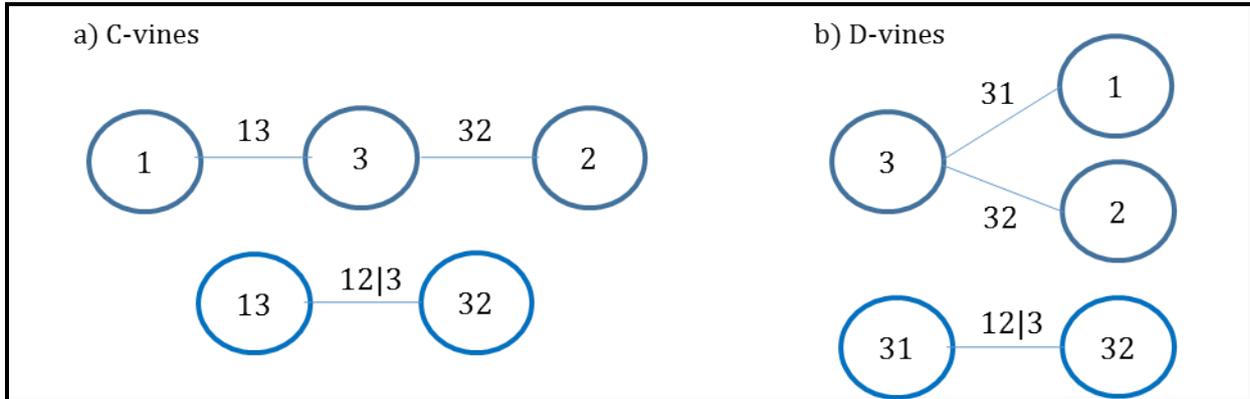


Figura 7.1: Configurações de C-vines e D-vines para $d = 3$ dimensões.

É importante destacar que o resultado na equação 7.6 indica que, no estudo de *vine* cópulas, a densidade da cópula $c_{12|3}$ depende da variável condicionante x_3 não apenas por meio dos argumentos $F_{1|3}(x_1|x_3)$ e $F_{2|3}(x_2|x_3)$, mas também de forma direta por meio do próprio x_3 (Acar *et al.*, 2012; Haff *et al.*, 2010).

Para fins de aplicação, no entanto, Haff *et al.* (2010) indica que, para grandes dimensões, quando o número de variáveis condicionantes aumenta, a estimação de cópulas torna-se difícil sob uma perspectiva paramétrica e impossível em um contexto não-paramétrico. Assim, em diversas aplicações, inferências usando *vine* cópulas exigem a premissa de que os pares de cópulas, isto é, os PCCs, sejam independentes das variáveis condicionantes, porém dependentes a partir das distribuições condicionais (Acar *et al.*, 2012; Haff *et al.*, 2010).

Para o caso de três dimensões, portanto, sendo a dependência definida apenas pelas distribuições condicionais, o modelo simplificado de PCC torna-se um caso particular da equação equação 7.6:

$$f_{123}(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3) \cdot c_{13}(F_1(x_1), F_3(x_3)) \cdot c_{2,3}(F(x_2), F(x_3)) \cdot c_{12|3}(F_{1|3}(x_1|x_3), F_{2|3}(x_2|x_3)) \quad (7.7)$$

7.3 Análise de simulação

Considerando a discussão anterior para três variáveis, pode-se generalizar os procedimentos para se encontrar uma decomposição adequada da equação 7.1 por meio do produto de uma cópula bivariada e uma densidade marginal condicional. De forma geral, para um vetor $\boldsymbol{\nu}$ de d dimensões, (Aas *et al.*, 2009, p. 183):

$$f(x|\boldsymbol{\nu}) = c_{x\nu_j|\boldsymbol{\nu}_{-j}}(F(x|\boldsymbol{\nu}_{-j}), F(\nu_j|\boldsymbol{\nu}_{-j})) \cdot f(x|\boldsymbol{\nu}_{-j}) \quad (7.8)$$

onde:

ν_j é um componente j do vetor $\boldsymbol{\nu}$ e $\boldsymbol{\nu}_{-j}$ é o vetor $\boldsymbol{\nu}$ sem o componente j .

Seguindo Joe (1996) e Aas *et al.* (2009), para todo j ,

$$F(x|\nu) = \frac{\partial C_{x,\nu_j}(F(x|\nu_j), F(\nu_j|\nu_j))}{\partial F(\nu_j|\nu_j)} \quad (7.9)$$

onde:

$C_{ij|k}$ é uma função de distribuição condicional de uma cópula bivariada.

No caso de condicionamento em relação a uma única variável ν , a equação 7.9 pode ser agora escrita como:

$$F(x|\nu) = \frac{\partial C_{x,\nu}(F(x), F(\nu))}{\partial F(\nu)} \quad (7.10)$$

Considerando x e ν uniformes, pode-se denotar uma função $h(x, \nu, \Theta)$ associada à distribuição de x , condicional à ν , com Θ sendo o conjunto de parâmetros da cópula da função de distribuição conjunta de x e ν como:

$$h(x, \nu; \Theta) = F(x|\nu) = \frac{\partial C_{x,\nu}(x, \nu; \Theta)}{\partial \nu} \quad (7.11)$$

Considerando essa fundamentação, o algoritmo descrito em Aas *et al.* (2009) para simulação de *PCCs*, gerando-se n variáveis uniformes no intervalo $[0, 1]$ e dependentes, envolve os seguintes passos: (i) são gerados inicialmente uma amostra x_1, \dots, x_n de variáveis uniformes em $[0, 1]$, independentes, (ii) define-se $x_1 = 1, x_2 = F^{-1}(w_2|x_1), x_3 = F^{-1}(w_3|x_1, x_2), \dots, x_n = F^{-1}(w_n|x_1, \dots, x_{n-1})$, (iii) para determinar $F^{-1}(w_j|x_1, \dots, x_{j-1})$ utiliza-se a função h estabelecida em 7.11 e na função descrita em 7.9.

A partir da discussão anterior, pode-se utilizar a flexibilidade das *vine* cópulas para decompor as dependências entre os componentes do *CVA*. Por meio de simulações de dados de *PD*, *LGD* e *EAD*, estruturados com dependências bivariadas, podemos estabelecer possíveis valores de *CVA* e identificar um valor médio correspondente ao risco de crédito da contraparte.

Assim, no caso de análise de *CVA*, apesar de o número de variáveis relevantes não ser elevado, uma vez que se restringe aos três componentes do risco de crédito, o uso de cópulas bivariadas é útil, pois o entendimento da dependência trivariada é menos imediato ou intuitivo. Em particular, uma vez que o *EAD* depende da carteira de produtos operados com a contraparte, dificilmente uma estrutura multivariada de dependência entre *PD*, *LGD* e *EAD* pode ser identificada a priori, sendo mais fácil a avaliação de dependência entre variáveis tomadas duas a duas.

Para a análise por *PCC*, inicialmente é importante definir as distribuições univariadas de cada componente. Em termos univariados, as distribuições de *PD* e de *LGD* são tipicamente associadas à exponencial (Bessis, 2015; Cherubini, 2013; Frey *et al.*, 2012; Neagu e Hoerl, 2005) e à beta (Altman, 2011; Hlawatsch e Ostrowski, 2011; Schuermann, 2004), respectivamente. Tendo em vista que o foco desse estudo não envolve a precificação de carteiras ou produtos específicos, vamos definir, sem perda de generalidade, que *EAD* possui uma distribuição lognormal. Destaca-se ainda que a abordagem adotada nesse trabalho não leva em conta a difusão do valor ao longo do tempo.

Além disso, é importante ressaltar que a distribuição lognormal de preços é razoavelmente frequente no estudo em finanças. Na modelagem de preços de ativos-objeto de contratos de opções como, ações ou *commodities*, o trabalho seminal de Black e Scholes (1973) utiliza uma distribuição lognormal. Essa premissa pode ser considerável para carteiras contendo produtos menos conven-

cionais que podem ter distribuições de valor bastante particulares e distintas da lognormal. Na prática, no entanto, modelos de precificação poderiam estabelecer algumas distribuições possíveis que se adequem ao comportamento do valor de carteira sujeita ao risco de crédito da contraparte.

Esse aspecto evidencia um ponto relevante da modelagem por *vine* cópulas, uma vez que a adaptação das estimativas de CVA para carteiras com comportamentos de *EAD* mais sofisticados envolve somente a preocupação com as características univariadas do próprio *EAD* e das características bivariadas do *EAD* com *PD* e do *EAD* com *LGD*, sendo desnecessário uma compreensão de toda complexidade do relacionamento simultâneo de *EAD*, *PD* e *LGD*. Além disso, como veremos a seguir, a modelagem de *EAD* com *PD* e de *EAD* com *LGD* pode ser simplificado, usando argumentos teóricos, com casos críticos de dependência perfeita e de independência.

Portanto, com relação à dependência entre as variáveis, podemos fazer uma análise duas a duas, tendo em vista que utilizaremos a flexibilidade proporcionada pela *PCC* ou *vine* cópulas. Apesar de dados sobre *PD* e *LGD* não estarem facilmente disponíveis, principalmente para contrapartes específicas, podemos usar informações consolidadas para fazer estimativas da dependência dessas variáveis. Os gráficos a1 e b1 na Figura 7.2 são obtidos, respectivamente, a partir de (a) relatório da *Moody's* de (Meng *et al.*, 2010) e (b) dados levantados em Altman (2001), Altman *et al.* (2004), Altman *et al.* (2005), Altman (2011) e *StandardPoor's* (RatingsDirect, 2013). Os gráficos a2 e b2 na Figura 7.2 são as representações dos gráficos anteriores, com os dados ordenados e aproximados para uma distribuição uniforme.

Tendo em vista o número extremamente limitado de observações, conduziu-se uma avaliação visual da possível relação de dependência das distribuições uniformes, identificando-se dois tipos de cópulas tradicionais a serem utilizadas para modelar a dependência de *PD* e *LGD*: cópula de Gumbel e cópula de Frank. Obviamente, a escolha é arbitrária e outras cópulas poderiam ser definidas na análise. É importante ressaltar que embora tratem do fenômeno de dependência das mesmas duas variáveis, os gráficos a2 e b2 sugerem que a relação entre *PD* e *LGD* podem ter características bem diversas dependendo da base de dados. Mais particularmente, o entendimento dessa dependência pelas instituições financeiras é fundamental, uma vez que reflete a carteira associada às contrapartes. Bancos mais conservadores que atuam com contrapartes de rating mais elevado e, provavelmente, de menor probabilidade de inadimplência e com maiores níveis de garantias, podem ter relações de *PD* e *LGD* bem diferentes de bancos mais agressivos, com políticas de crédito ou de operações com contrapartes menos restritivas.

Para a relação entre *PD* e *EAD*, vamos seguir um modelo adaptando uma estratégia de Cherubini (2013). Enquanto Cherubini (2013) utiliza uma relação de dependência perfeita entre a taxa do *swap* e a probabilidade de *default*, vamos estabelecer uma dependência relevante entre *PD* e *EAD*, porém que tenha características matemáticas compatíveis com o mecanismo do *PCC*, em particular, condições para derivação conforme equação 7.11. Assim, estabeleceremos, para modelar a distribuição conjunta das uniformes de *PD* e *EAD*, uma cópula de Frank com parâmetro que gere dependência.

Deve-se destacar também que a abordagem geral adotada neste trabalho é diferente da perspectiva do estudo de Cherubini (2013). Destaca-se que Cherubini (2013) utiliza apenas uma cópula, procurando modelar CVA sob condições de *wrong-way risk* e *right-way risk* em uma operação de *swap*, focando seu estudo no relacionamento entre a inadimplência e o valor do derivativo, supondo *LGD* constante. Em contrapartida, nós analisamos as relações entre todos os três componentes do risco de crédito, usando um pareamento por meio de *vine* cópulas. O foco do nosso estudo, portanto, não envolve a precificação do derivativo em si, mas a obtenção de dados simulados para os componentes do risco de crédito que posteriormente, serão usados para a realização de estimativas de CVA.

Outro relacionamento bivariado a ser analisado em nosso estudo envolve *EAD* e *LGD*.

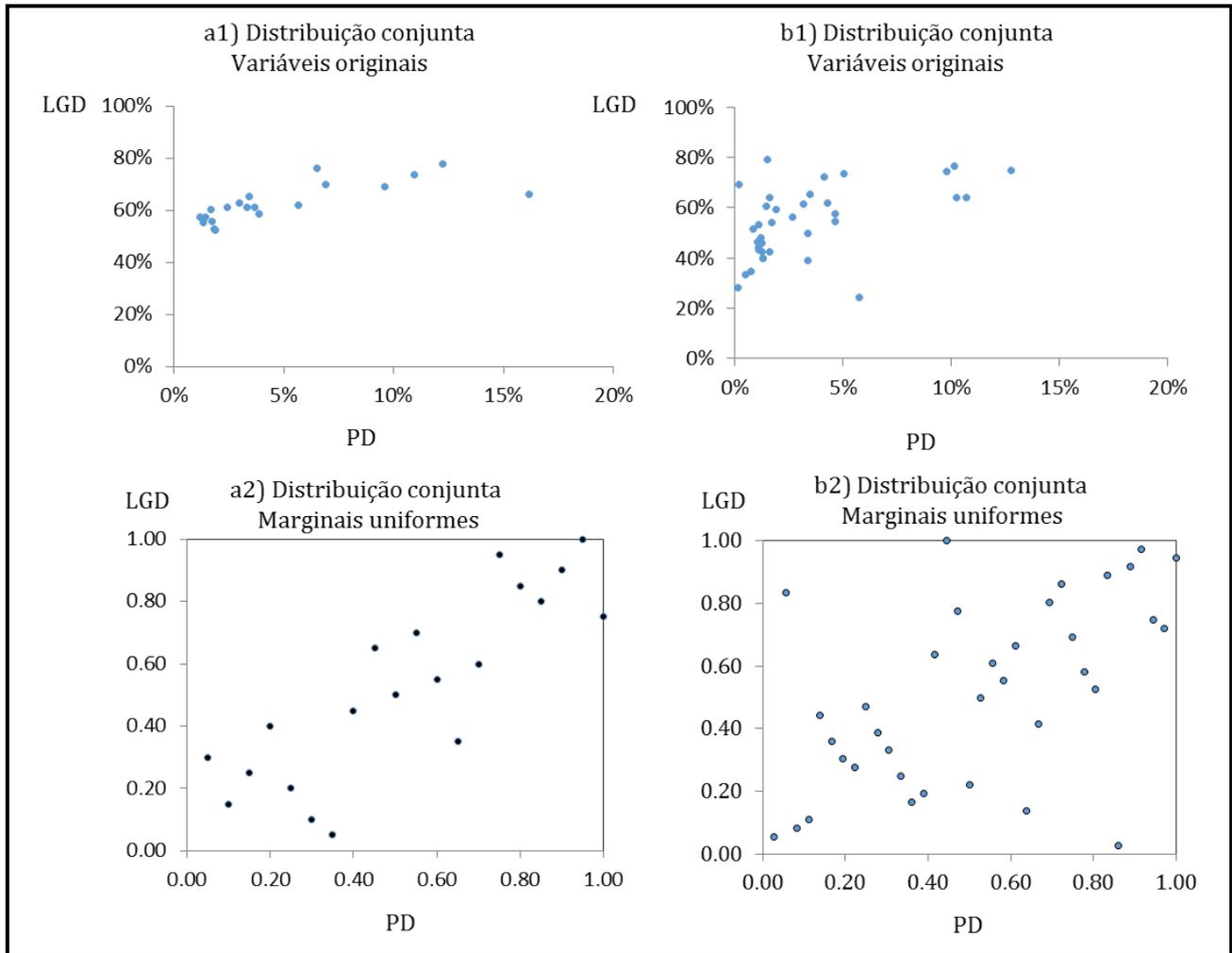


Figura 7.2: Relacionamento entre PD e LGD. O grupo (a) representa dados da Moody's e o grupo (b) dados de Altman e StandardPoor's.

Na literatura, comumente $LG D$ é tratado como um parâmetro fixo como em Canabarro (2009), Gregory (2012), Cherubini (2013). Tendo em vista que EAD depende da carteira transacionada com cada contraparte, eventuais evidências empíricas sobre a relação entre EAD e $LG D$ são menos prováveis de serem generalizáveis. Adicionalmente, ao contrário do relacionamento entre PD e EAD , no qual conceitos específicos como *wrong-way risk* e *right-way risk* são discutidos na literatura, o relacionamento de $LG D$ e EAD não possui um conceito ou contexto particular que seja abordado teoricamente. Assim, vamos estabelecer, tendo em vista que não há embasamento teórico de uma possível dependência entre $LG D$ e EAD , a cópula de independência para esses componentes do risco de crédito.

Tendo sido definidas as cópulas que fundamentarão o relacionamento entre as variáveis duas a duas, para a obtenção de um conjunto de dados simulados, vamos usar os algoritmos descritos em Aas *et al.* (2009, p. 187), para PCC s. Tendo em vista que o CVA pode ser modelado a partir de três variáveis aleatórias e que a escolha da ordem das variáveis pode ser importante, vamos estabelecer o seguinte:

É importante destacar que o mecanismo descrito em Aas *et al.* (2009) para simulação de dados gera, a partir de amostra de observações de variáveis aleatórias independentes e uniformes no intervalo $[0, 1]$, amostra de observações de variáveis aleatórias dependentes e uniformes no mesmo intervalo. Assim, a reconstrução da variável original PD , $LG D$ e EAD envolve uma transformação inversa, a partir das observações das variáveis uniformes dependentes. Conforme já discutido, na

modelagem desse estudo, PD tem uma distribuição exponencial, LGD possui uma distribuição beta e EAD tem uma distribuição lognormal.

A seguir, são apresentados resultados das simulações. A Figura 7.3 mostra, na primeira linha, a simulação de 100.000 observações conjuntas de PD , LGD e EAD , descritas a partir de seus relacionamentos bivariados por cópulas. A segunda linha da Figura 7.3 apresenta um conjunto de gráficos que mostra a relação de dependência entre as variáveis, já considerando as distribuições originais de PD , LGD e EAD . A Figura 7.3 a seguir apresenta os dados do caso em que PD e LGD seguem uma cópula Gumbel, LGD e EAD seguem uma cópula de independência e PD e EAD seguem uma cópula Frank. Para calibragem dos parâmetros da relação entre PD e LGD foram utilizados os dados de Altman e de *StandardPoor's*, com dados de 1978 a 2013.

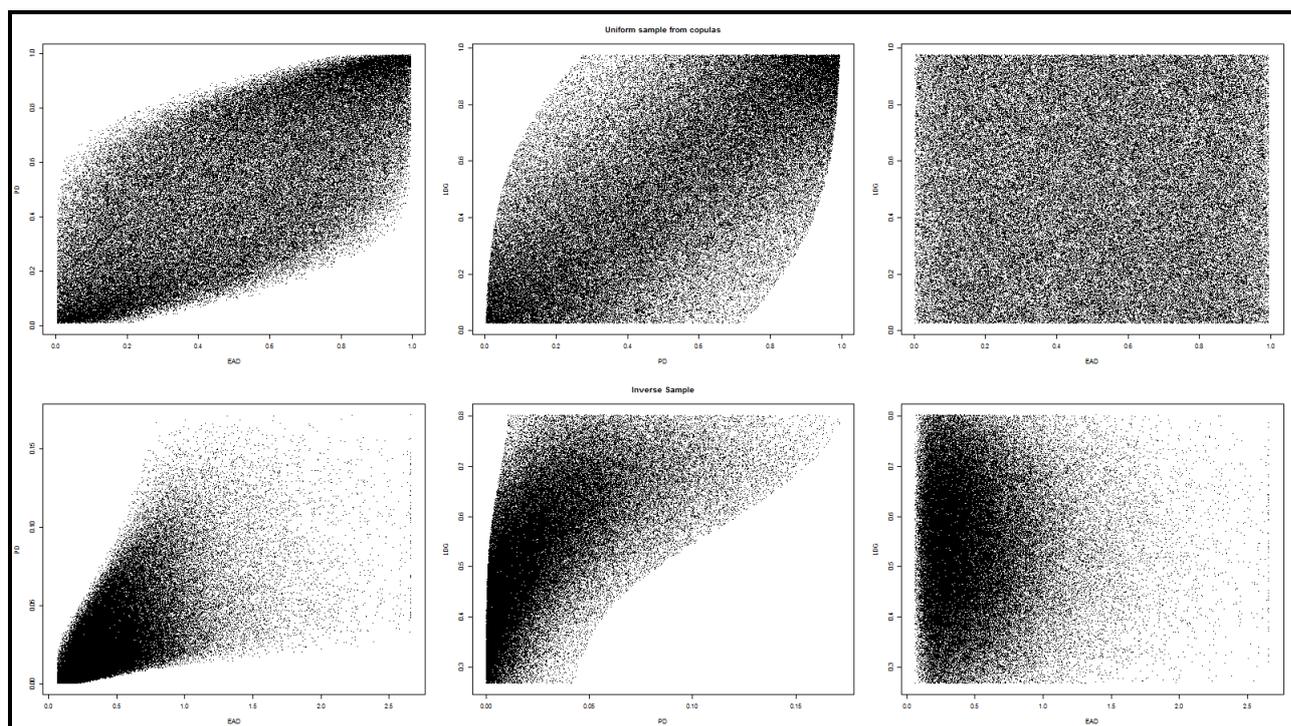


Figura 7.3: *Dados simulados. PD-LGD: Frank, LGD-EAD: Independência, PD-EAD: Frank*

As figuras a seguir mostram os dados simulados para as várias outras combinações de cópulas.

Esses dados, nas distribuições originais das variáveis, são usados para o cálculo do CVA . Tendo em vista que as simulações permitem a obtenção de diversos cenários com componentes diferentes, pode-se estabelecer um valor de CVA tradicional associado à média das possíveis perdas, como também outras métricas.

Em particular, apresentamos métrica de desvio-padrão e de percentis. A análise da distribuição os CVA simulados em percentis equivalentes 95%, 99% e 99,9% possibilita um estudo semelhante ao *Value-at-Risk* (VaR), medida associada a uma perda máxima potencial com um certo intervalo de confiança. Assim, o $VaR_{95\%}$ indica que, com 95% de probabilidade, uma dada perda não ultrapassará a estimativa dada pelo VaR (Joiron, 2006). Mais ainda, a geração de possíveis valores de CVA permite a estimativa de uma medida análoga à *Expected Shortfall* ou *Conditional Value-at-Risk* (ES ou $CVaR$), que representa a esperança das perdas que superam o VaR (Acerbi e Tasche, 2002).

A Tabela 7.2 a seguir mostra as diferentes métricas, para combinações distintas de cópulas (FR : Frank, Gum : Gumbel, Ind : independência, Gau : Gaussiana) entre os componentes do risco de

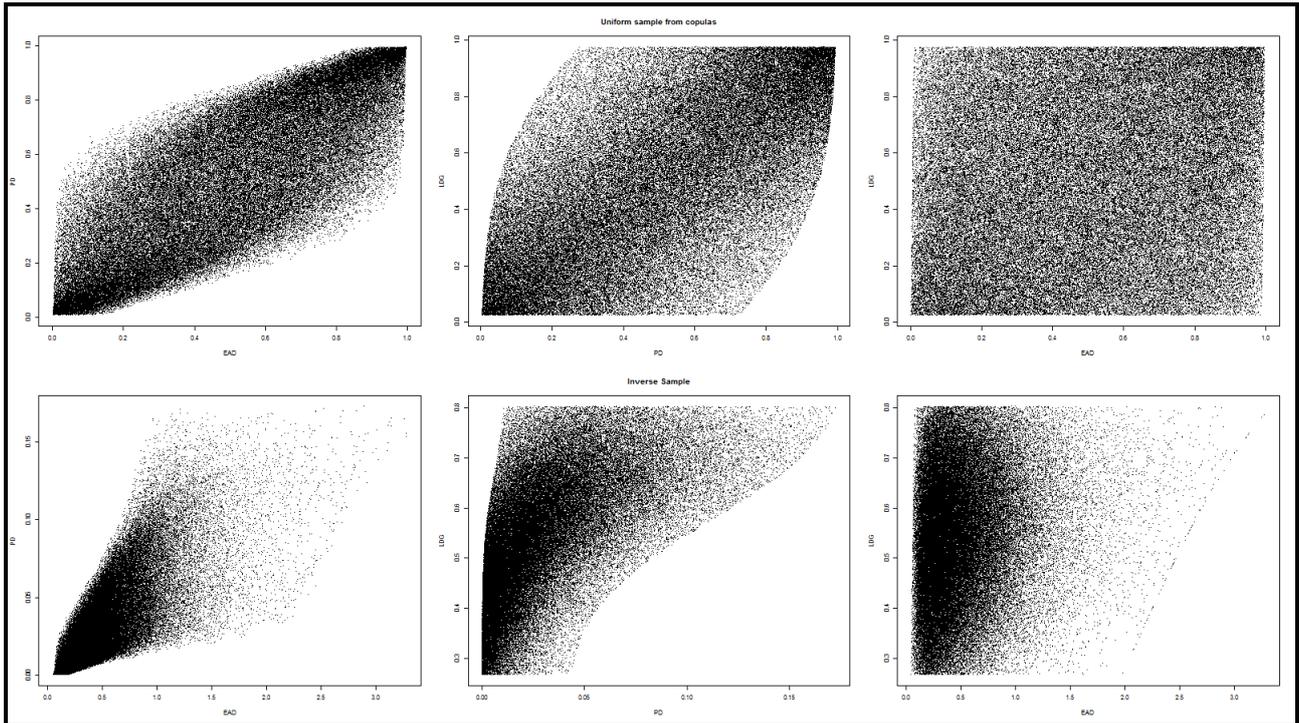


Figura 7.4: Dados simulados. PD-LGD: *Frank*, LGD-EAD: *Gaussiana*, PD-EAD: *Frank*

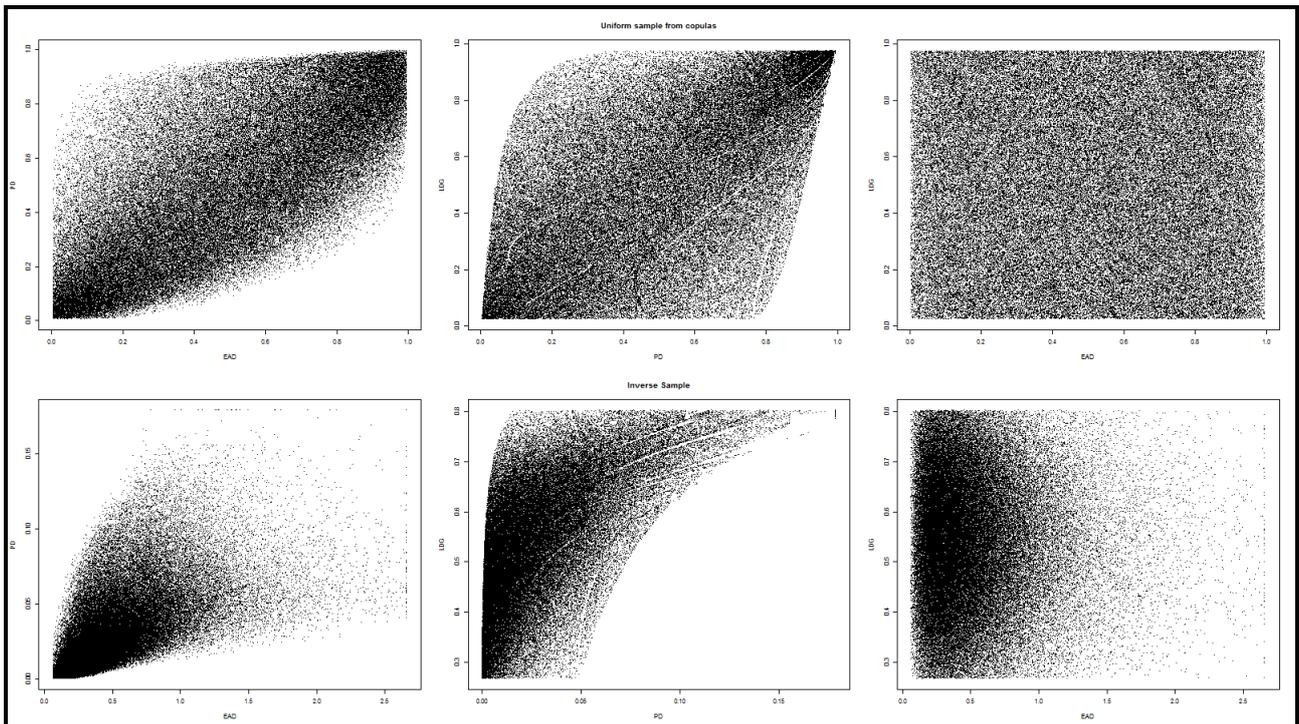


Figura 7.5: Dados simulados. PD-LGD: *Gumbel*, LGD-EAD: *Independência*, PD-EAD: *Frank*

crédito. Os resultados da análise por cópula são comparados também com as métricas considerando-se *PD*, *LGD* e *EAD* independentes.

Os resultados da simulação indicam valores de *CVA* entre 0,0129 e 0,0144 dependendo do conjunto de cópulas utilizado. Assim, a maior diferença entre as estimativas é de 11,93%. Apesar de a diferença parecer não ser contundente, pode ser relevante no contexto de negociação de operações específicas com determinada contraparte, uma vez que, em operações com notacionais elevados, o

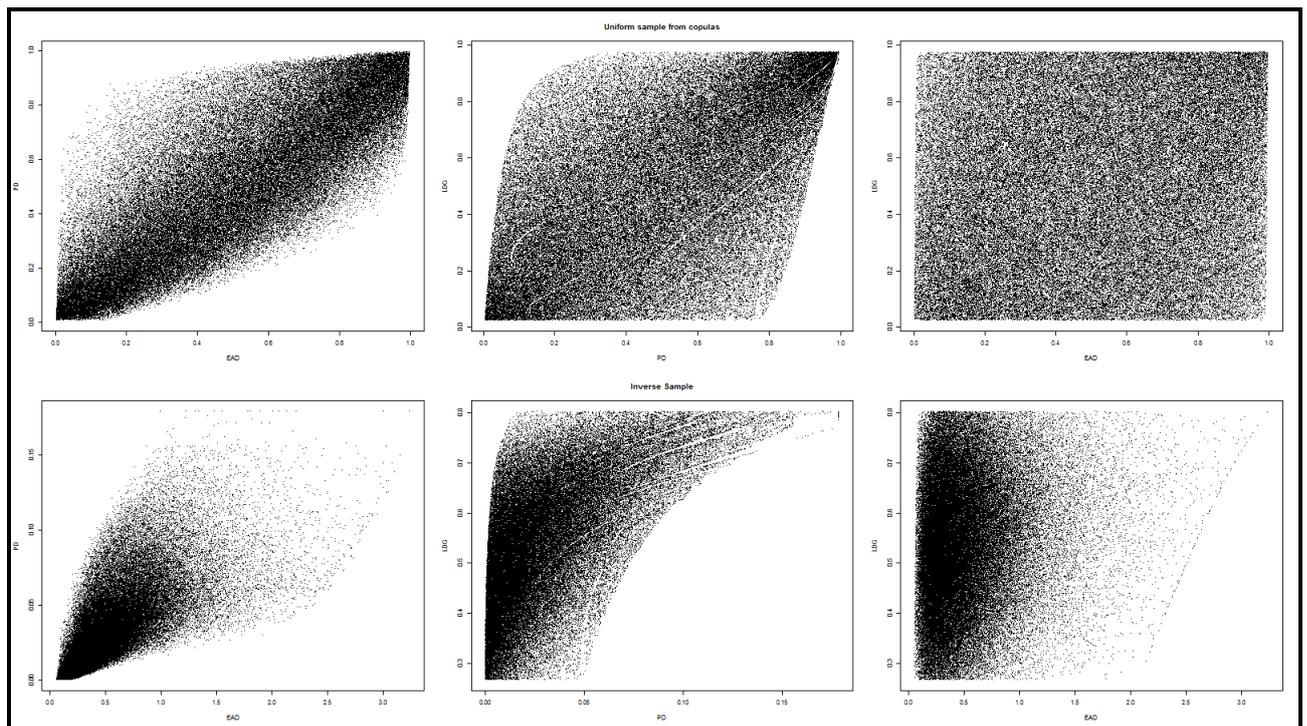


Figura 7.6: Dados simulados. PD-LGD: Gumbel, LGD-EAD: Gaussiana, PD-EAD: Frank

Métrica	Fr-Ind-Fr	Fr-Gau-Fr	Gum-Ind-Fr	Gum-Gau-Fr	Fr-Ind-Fr	Fr-Gau-Fr	Gum-Ind-Fr	Gum-Gau-Fr
	Dependência				Independência			
Média	0.0129	0.0136	0.0144	0.0138	0.0085	0.0088	0.0086	0.0085
Desvio-padrão	0.0207	0.0229	0.0256	0.0236	0.0109	0.0116	0.0114	0.0111
VaR95%	0.0518	0.0573	0.0609	0.0566	0.0285	0.0299	0.0295	0.0286
VaR99%	0.1002	0.1138	0.1268	0.1152	0.0525	0.0567	0.0553	0.0535
VaR99,9%	0.1838	0.2007	0.2374	0.2173	0.0956	0.1058	0.1011	0.0995
CVaR95%	0.0822	0.0923	0.1022	0.0939	0.0440	0.0466	0.0460	0.0445
CVaR99%	0.1357	0.1516	0.1735	0.1590	0.0718	0.0770	0.0755	0.0736
CVaR99,9%	0.2231	0.2354	0.2840	0.2644	0.1206	0.1284	0.1223	0.1279

Tabela 7.1: Resultados da simulação para a base de dados de Altman e StandardPoor's.

valor absoluto aumenta e uma instituição financeira pode ser mais ou menos competitiva que outra, em função das escolhas das formas de dependência, mesmo que as estimativas isoladas de PD , LGD e EAD sejam idênticas.

Nota-se que para a combinação de Gumbel-Independência-Frank, os resultados tanto de CVA quanto de desvio-padrão dos valores simulados são os maiores. O comportamento reflete-se em todas as outras métricas de VaR e de $CVaR$. É interessante observar que as diferenças, em relação a um modelo simplista de independência dos componentes do risco de crédito, são substanciais para quaisquer combinações de cópulas, conforme se pode observar na tabela. No caso mais relevante, uma estimativa de CVA com cópulas supera em 67.15% a estimativa levando-se em conta a independência. Assim, é evidente, para o caso estudado, que o uso do modelo de componentes independentes subestima o risco de crédito da contraparte, impactando uma menor estimativa de ajuste necessário em função do CCR . Vale destacar que o estudo de independência levou em consideração valores gerados nas simulações e, portanto, podem ter restrições em relação às combinações possíveis entre os componentes do risco de crédito.

Deve-se destacar que os dados de dependência e a forma e estimação de parâmetros podem impactar de forma relevante os resultados de CVA . A Tabela a seguir mostra aos resultados das

métricas de risco seguindo uma base de *PD* e *LGD* disponibilizadas pela Meng *et al.* (2010), com dados de 1982 a 2001.

Métrica	Fr-Ind-Fr	Fr-Gau-Fr	Gum-Ind-Fr	Gum-Gau-Fr	Fr-Ind-Fr	Fr-Gau-Fr	Gum-Ind-Fr	Gum-Gau-Fr
	Dependência				Independência			
Média	0.0187	0.0125	0.0122	0.0176	0.0096	0.0091	0.0090	0.0130
Desvio-padrão	0.0548	0.0301	0.0293	0.0548	0.0258	0.0207	0.0207	0.0432
VaR95%	0.0867	0.0581	0.0567	0.0788	0.0406	0.0403	0.0389	0.0542
VaR99%	0.2504	0.1506	0.1460	0.2527	0.1130	0.1008	0.0990	0.1764
VaR99,9%	0.6700	0.3259	0.3171	0.6731	0.3245	0.2255	0.2309	0.5729
CVaR95%	0.1945	0.1162	0.1135	0.1937	0.0899	0.0792	0.0782	0.1413
CVaR99%	0.4218	0.2248	0.2198	0.4335	0.1964	0.1543	0.1547	0.3396
CVaR99,9%	0.9009	0.3933	0.3779	0.8923	0.4490	0.2934	0.3040	0.7956

Tabela 7.2: Resultados da simulação para a base de dados da Moody's.

Os resultados mostram que as diferenças entre os resultados usando cópulas e os resultados usando independência dos componentes também são representativos, podendo chegar a até 94,38% para o caso da combinação Frank-Independência-Frank. Essas análises comparativas são relevantes uma vez que não somente cada banco pode estimar de maneira diferente a forma de relacionamento entre os componentes do risco de crédito como também tem diferentes perspectivas sobre *PD* e *LGD*. Assim, bancos diferentes podem ter estimativas univariadas diferentes de *PD* e *LGD*, em função de *ratings* atribuídos internamente ou de garantias nas carteiras transacionadas com uma mesma contraparte. Valores estimados no caso de dependência por cópulas e independência das variáveis também são relevantes, não podendo ser desprezadas. Assim, verifica-se a necessidade de que as dependências sejam analisadas tanto para fins de precificação quanto para fins de gestão de riscos.

7.4 Comentários finais

Neste capítulo, apresentamos um mecanismo de estimação de *CVA*, a partir de *vine* cópulas. Uma das vantagens da abordagem baseada em simulação de dados por meio de *PCCs* envolve a obtenção de uma distribuição de possíveis resultados do produto de *PD*, *LGD* e *EAD*. Dessa forma, é possível o cálculo não somente de uma estimativa média do *CVA* como também de estimativas de outras métricas baseadas na distribuição. Assim, dados análogos ao *VaR* e ao *CVaR* podem ser computados, permitindo que, além de mecanismos de precificação de ajuste em função do risco de crédito da contraparte possam ser realizados, indicadores úteis para gestão de riscos sejam levantados.

A despeito da flexibilidade propiciada pelo *PCC*, o modelo implementado nesse trabalho tem algumas limitações. Em primeiro lugar, supõe-se que a *EAD* possui uma distribuição lognormal, que pode ser substancialmente diferente de uma carteira sujeito ao risco de crédito de uma determinada contraparte. No entanto, caso houvesse um modelo de precificação da carteira exposta a risco de crédito, o formato de uma eventual distribuição univariada poderia ser utilizado. É importante salientar que a relação de *EAD* com os outros componentes de risco de crédito é bastante particular da contraparte com a qual a instituição está operando. Salienta-se ainda, com relação à distribuição lognormal da *EAD*, que a seleção do valor da exposição não depende do instante do *default*. Assim, evitou-se o estudo da dependência entre o processo de difusão do fator de risco de mercado com o instante da inadimplência.

Outra limitação do modelo refere-se às escolhas das demais distribuições univariadas e das cópulas bivariadas. Ressalta-se, no entanto, que as escolhas são embasadas em dados empíricos e em argumentos teóricos, conforme exposto no trabalho. Identifica-se, pelos resultados do estudo,

que a definição das relações têm um impacto relevante nos resultados de risco. Assim, o gestor de riscos deve realizar um estudo cauteloso sobre as formas de dependência e as distribuições a serem utilizadas. Esse ponto de atenção embora óbvio, muitas vezes é negligenciado como, por exemplo, pode ser visto no debate do uso do modelo de Li (2000), baseado em cópulas gaussianas para precificação de derivativos de crédito (MacKenzie e Spears, 2014).

Embora o modelo de *vines* cópulas permita flexibilidade nas seleções das dependências, é importante que as escolhas sejam fundamentadas por elementos empíricos ou teóricos. Deve-se enfatizar também que definições arbitrárias, sem fundamentação, podem levar a problemas de simulação. Por exemplo, embora as dependências sejam obtidas duas a duas, a dependência multivariada ainda pode ser muito complexa. Suposições a priori de certas configurações de dependência podem não se refletir nos dados simulados, pois eventualmente as relações bivariadas utilizadas no algoritmo não necessariamente conseguem estabelecer toda a riqueza do fenômeno multivariado.

Deve-se destacar que embora as cópulas sejam bastante utilizadas na área de finanças e que, em especial, as *vine* cópulas têm sido aplicadas em gestão de riscos, não foi encontrada literatura que utilize o conceito para o CVA. Exemplos de uso de PCC para VaR e de CVaR para carteiras de ações ou de dívidas podem ser encontrados, por exemplo, em Weiss e Supper (2013), Zhang *et al.* (2014), Reboredo e Ugolini (2015), porém a aplicação em precificação do risco de crédito da contraparte, mais particularmente para CVA não havia sido explorada.

Considerações finais

Embora o risco de crédito seja comumente associado com risco de crédito de empréstimos, existe um outro elemento relevante a ser analisado: o risco de crédito de contraparte. Enquanto o risco de crédito de empréstimos está relacionado a perdas potenciais advindas de inadimplência em operações tradicionais de crédito, o risco de crédito da contraparte está associado com perdas potenciais marcadas a mercado em função da exposição a eventuais *defaults* em carteiras complexas, notadamente compostas por operações com derivativos.

A crise de 2007-2008 que se iniciou no mercado de hipotecas imobiliárias de baixa qualidade nos Estados Unidos evidenciou que o risco de crédito da contraparte pode constituir importante elemento tanto para órgãos reguladores quanto para gestores de instituições financeiras. Em particular, perdas decorrentes da marcação a mercado do ajuste por risco de crédito da contraparte, calculados usando o *CVA* (*Credit Value Adjustment*), foram responsáveis por grandes prejuízos no mercado financeiro.

Considerando a perspectiva de risco de crédito da contraparte, esse estudo analisa o *CVA*, apresentando também diversas métricas de *CCR*. Partindo-se inicialmente de modelos básicos, são apresentadas formulações simplificadas do *CVA*, enfatizando-se os componentes de risco: *PD* (*Probability of Default*), *LGD* (*Loss Given Default*) e *EAD* (*Exposure at Default*). Dessa forma, pode-se comparar o *CVA* com componentes tradicionais do risco de crédito, tanto sob situações de independência quanto de dependência.

São ainda discutidas no trabalho, diversas características do *CVA*. Por exemplo, conforme apresentado no estudo, há vários aspectos controversos sobre o uso do *CVA*. Por exemplo, tradicionalmente, instituições com *rating* AAA sinalizavam um risco de crédito extremamente baixo, sendo praticamente desnecessário estimar, portanto, risco de *default* de *dealers* de altíssima qualidade de crédito. Porém, situações extremas, como as que ocorreram na crise do *sub-prime* indicam a relevância de cálculo do *CVA* bilateral. Em contrapartida, a marcação a mercado utilizando um modelo bilateral pode incentivar *traders* a assumirem posições apostando na degradação da qualidade de crédito de suas próprias instituições, pois esse cenário aumentaria o valor, ajustado ao risco de crédito da contraparte, de suas operações com derivativos.

Nesse estudo, uma das modelagens da dependência de componentes de risco de crédito focou-se na avaliação do *CVA* unilateral considerando-se um relacionamento extremo entre *PD* e *EAD*, seguindo o trabalho de Cherubini (2013). Por meio do uso de cópulas, foram obtidos modelos de precificação de *swaps* de taxa de juros considerando o risco de crédito da contraparte. Os resultados indicam uma sensibilidade relevante do *CVA* em relação ao nível de volatilidade da taxa de juros, uma vez que o ajuste em função do risco de crédito da contraparte pode ser substancial.

Além da análise teórica, foi conduzida uma avaliação empírica das fórmulas de *CVA*. Utilizando-se diferentes modelos de difusão de taxas de juros, foram calibradas a estrutura a termo e a volatilidade da taxa de juros a partir de dados de operações de mercado. Aplicando-se os modelos de Black-Derman-Toy, Black-Karasinski, Hull-White e Heath-Jarrow-Morton, foram comparados

os *CVAs* de posições compradas e vendidas em *swaps* tradicionais de taxas de juros. Os resultados sugerem a dependência do *CVA* em relação ao modelo de taxa de juros escolhido, implicando pontos de atenção. Como a escolha do processo de difusão de taxa de juros impacta o *CVA* e, conseqüentemente, o requisito de capital próprio, órgãos de regulamentação devem ter mecanismos para prevenir arbitragens por meio de seleção de modelos. Além disso, *traders* e *risk managers* devem estar atentos para o risco de modelagem. Nesse contexto, é importante destacar a necessidade de monitoramento e acompanhamento frequentes da adequação dos modelos, utilizando, por exemplo, técnicas de *backtesting*.

Avançando o estudo de *CVA*, foi também realizada uma modelagem baseada em *vine* cópulas. Nesse estudo, o foco passa a ser a dependência entre os componentes do risco de crédito, em particular, *PD*, *LGD* e *EAD*, sem a preocupação com a avaliação de um produto financeiro específico. Foram definidas distribuições univariadas e dependência bivariada para, usando um algoritmo de construção de cópulas pareadas, simular possíveis valores de *CVA*.

Nessa abordagem, o *CVA* é possibilita análise de aplicações tanto em precificação quanto em gestão de riscos. Em particular, por meio de médias das possíveis realizações de *CVA* a partir de observações simuladas de *PD*, *LGD* e *EAD*, pode-se obter estimativa para o ajuste de preço em carteiras ou operações que tenham exposição ao risco de crédito da contraparte. Por meio da análise de percentis, pode-se avaliar também métricas como *VaR* e *CVaR* aplicadas a exposição ao risco de crédito da contraparte.

Diversos aspectos podem ser tratados em estudos futuros. Por exemplo, nesse trabalho foram somente investigados modelos de *CVA* unilateral. Assim, dentro do contexto do mercado financeiro, os modelos estudados não levam em consideração, por exemplo, a possibilidade de as duas contrapartes terem risco de inadimplência. Em crises sistêmicas, *dealers* de alta qualidade de crédito também podem se tornar inadimplentes. Além disso, a dependência não se restringe aos componentes de risco de crédito (*PD*, *LGD* e *EAD*). Cenários de risco podem envolver também dependência entre a qualidade de crédito das várias contrapartes. Assim, esse estudo tem como limitação o foco no *CVA* unilateral, sem considerar eventuais relacionamentos entre risco de crédito de duas ou mais contrapartes.

Outra limitação do estudo envolve a análise focada em operações de *swaps* ou de carteiras simplificadas com uma distribuição de preços conhecida a priori. Na prática, o *CVA* é calculado para carteiras de ativos e derivativos, podendo contemplar operações ou produtos bastante sofisticados que dificultam o modelo de precificação e a estimativa de *EAD* e de seus relacionamentos com outras variáveis. Adicionalmente, as carteiras consolidam não somente exposições, por meio de *netting* de fluxos de caixa, como também levam em consideração o impacto de garantias. Assim, estudos futuros podem abordar o *CVA* por meio de cópulas, trazendo na modelagem mecanismos específicos para lidar com as características de *netting* e com as garantias das carteiras.

Outro ponto relevante quando se considera o *CVA* está associado a aspectos de liquidez. Tendo em vista que muitas operações com derivativos de balcão são *hedgeadas* por meio de operações em mercados de bolsa, questões referentes a ajustes diários ou margens de garantia podem se tornar importantes para o gestor de riscos. Por exemplo, quando o risco de crédito da contraparte aumenta em uma operação de balcão, indicando um ganho de valor marcado a mercado na posição do derivativo, o agente que fez o *hedge* incorre em uma perda marcada a mercado na operação no mercado de bolsa.

Tendo em vista que perdas marcadas a mercado em operações em bolsa implicam a necessidade de desembolsos de fluxos de caixa na forma de ajustes ou de aumento de garantias para manutenção da posição, e que ganhos marcados a mercado em operações de balcão não são usualmente acompanhados por recebimento de fluxos de caixa, o agente pode apresentar problemas de liquidez. Assim, aspectos de financiamento de posições e de liquidez têm influenciado o mercado

financeira na busca também de modelos de ajuste em função de *funding* por meio do *FVA* (textitFunding Value Adjustment). Assim, futuros trabalhos podem ligar elementos de *CVA* com *FVA*, conforme sugerido por [Brigo *et al.* \(2013\)](#).

Referências Bibliográficas

- Aas et al. (2009)** K. Aas, C. Czado, A. Frigessi e H. Bakken. Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and economics*, 44(2):182–198. Citado na pág. [ii](#), [iv](#), [70](#), [71](#), [72](#), [73](#), [75](#)
- Acar et al. (2012)** Elif F. Acar, Christian Genest e Johanna NeÅ¡lehovÅ¡j. Beyond simplified pair-copula constructions. *Journal of Multivariate Analysis*, 110:74–90. ISSN 0047-259X. doi: 10.1016/j.jmva.2012.02.001. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmva.2012.02.001>. Citado na pág. [70](#), [72](#)
- Acerbi e Tasche (2002)** Carlo Acerbi e Dirk Tasche. On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26(7):1487–1503. ISSN 0378-4266. doi: 10.1016/S0378-4266(02)00283-2. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4266\(02\)00283-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00283-2). Citado na pág. [76](#)
- Altman et al. (2004)** E. Altman, A. Resti e A. Sironi. Default recovery rates in credit risk modelling: a review of the literature and empirical evidence. *Economic Notes*, 33(2):183–208. Citado na pág. [74](#)
- Altman et al. (2005)** E. Altman, Brooks Brady, A. Resti e A. Sironi. The link between default and recovery rates: theory, empirical evidence, and implications. *Journal of Business*, 78(6): 2206–2227. Citado na pág. [74](#)
- Altman (2001)** Edward I. Altman. Default recovery rates and lgd in credit risk modelling and practice: An updated review of the literature and empirical evidence. *Advances in Credit Risk Modelling and Corporate Bankruptcy Prediction*, páginas 175–206. doi: 10.1017/cbo9780511754197.008. URL <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511754197.008>. Citado na pág. [52](#), [74](#)
- Altman (2011)** Edward I. Altman. Default recovery rates and lgd in credit risk modelling and practice. *Oxford Handbooks Online*. doi: 10.1093/oxfordhb/9780199546787.013.0003. URL <http://dx.doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199546787.013.0003>. Citado na pág. [73](#), [74](#)
- BCBS (2009)** BCBS. Strengthening the resilience of the banking sector. Relatório técnico, Consultative Document - Basel Committee on Banking Supervision, Bank of International Settlements. Citado na pág. [i](#), [iii](#), [2](#), [43](#)
- BCBS (2011a)** BCBS. Application of own credit risk adjustments to derivatives. Relatório técnico, Consultative Document - Basel Committee on Banking Supervision, Bank of International Settlements. Citado na pág. [43](#), [47](#)
- BCBS (2006)** BCBS. Basel II: International convergence on capital measurement and capital standards: a revised framework, comprehensive version. Relatório técnico, Basel Committee on Banking Supervision, Bank of International Settlements. Citado na pág. [6](#), [13](#), [17](#), [18](#), [19](#), [20](#), [21](#), [22](#), [27](#), [43](#), [69](#)
- BCBS (2011b)** BCBS. Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems. Relatório técnico, Basel Committee for Banking Supervision, Bank for International Settlements. Citado na pág. [43](#), [44](#), [49](#)

- Bedford e Cooke (2001)** Tim Bedford e Roger M. Cooke. Probability density decomposition for conditional dependent random variables modeled by vines. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 32(1/4):245–268. ISSN 1012-2443. doi: 10.1023/a:1016725902970. URL <http://dx.doi.org/10.1023/A:1016725902970>. Citado na pág. 70
- Bedford e Cooke (2002)** Tim Bedford e Roger M. Cooke. Vines: a new graphical model for dependent random variables. *The Annals of Statistics*, 30(4):1031–1068. doi: 10.1214/aos/1031689016. URL <http://dx.doi.org/10.1214/aos/1031689016>. Citado na pág. 70
- Bessis (2015)** Joel Bessis. *Risk management in banking*. Wiley, 4th edition ed. Citado na pág. 73
- Bjerkstrand e Stensland (1996)** Petter Bjerkstrand e Gunnar Stensland. Implementation of the black-derman-toy interest rate model. *Fixed Income*, 6(2):67–75. ISSN 1059-8596. doi: 10.3905/jfi.1996.408176. URL <http://dx.doi.org/10.3905/jfi.1996.408176>. Citado na pág. 62
- Black e Karasinski (1991)** F. Black e P. Karasinski. Bond and option pricing when short rates are lognormal. *Financial Analysts Journal*, 47(4):52–59. ISSN 0015198X. Citado na pág. i, iii, 3, 61, 62
- Black e Scholes (1973)** F. Black e M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654. Citado na pág. 73
- Black et al. (1990)** Fischer Black, Emanuel Derman e William Toy. A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options. *Financial Analysts Journal*, 46(1):33–39. ISSN 0015-198X. doi: 10.2469/faj.v46.n1.33. URL <http://dx.doi.org/10.2469/faj.v46.n1.33>. Citado na pág. i, iii, 3, 61, 62
- Boyle et al. (2001)** Phelim P. Boyle, Ken Seng Tan e Weidong Tian. Calibrating the black-derman-toy model: some theoretical results. *Applied Mathematical Finance*, 8(1):27–48. ISSN 1466-4313. doi: 10.1080/13504860110062049. URL <http://dx.doi.org/10.1080/13504860110062049>. Citado na pág. 62
- Brennan e Schwartz (1979)** Michael J. Brennan e Eduardo S. Schwartz. A continuous time approach to the pricing of bonds. *Journal of Banking & Finance*, 3(2):133–155. ISSN 0378-4266. doi: 10.1016/0378-4266(79)90011-6. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0378-4266\(79\)90011-6](http://dx.doi.org/10.1016/0378-4266(79)90011-6). Citado na pág. 61
- Brigo et al. (2013)** D. Brigo, M. Morini e A. Pallavicini. *Counterparty Credit Risk, Collateral and Funding: with Pricing Cases for All Asset Classes*. Wiley. Citado na pág. 3, 25, 44, 45, 47, 48, 83
- Brigo e Mercurio (2006)** Damiano Brigo e Fabio Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*. Springer Finance. Citado na pág. 57, 58, 59, 62
- Buetow et al. (2001)** Gerald W Buetow, Bernd Hanke e Frank J Fabozzi. Impact of different interest rate models on bond value measures. *Fixed Income*, 11(3):41–53. ISSN 1059-8596. doi: 10.3905/jfi.2001.319304. URL <http://dx.doi.org/10.3905/jfi.2001.319304>. Citado na pág. 61
- Canabarro (2009)** Eduardo Canabarro. *Counterparty Credit Risk: Measurement, Pricing and Hedging*. Risk Books. Citado na pág. 1, 9, 11, 25, 26, 44, 67, 75
- Carverhill (1995)** Andrew Carverhill. A note on the models of hull and white for pricing options on the term structure. *Journal of Fixed Income*, 5(2):89–96. ISSN 1059-8596. doi: 10.3905/jfi.1995.408140. URL <http://dx.doi.org/10.3905/jfi.1995.408140>. Citado na pág. 57
- Chander e Costa (2010)** A. Chander e R. Costa. Clearing credit default swaps: a case study in global legal convergence. *Chicago Journal of International Law*, 10(2):639–683. Citado na pág. 1

- Cherubini (2013)** U. Cherubini. Credit valuation adjustment and wrong way risk. *Quantitative Finance Letters*, 1(1):9–15. Citado na pág. [i](#), [iii](#), [1](#), [3](#), [44](#), [45](#), [49](#), [52](#), [53](#), [54](#), [55](#), [56](#), [57](#), [58](#), [59](#), [61](#), [66](#), [67](#), [69](#), [73](#), [74](#), [75](#), [81](#)
- Cooke et al. (2011)** R. M. Cooke, H. Joe e K. Aas. *Vines arise*. World Scientific. Citado na pág. [70](#)
- Cox et al. (1985)** J. Cox, J.E. Ingersoll e S.A. Ross. A theory of term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385–467. Citado na pág. [61](#)
- CRMPG (2005)** CRMPG. Towards greater financial stability: A private sector perspective. Relatório técnico, Counterparty Risk Management Policy Group II,. Citado na pág. [1](#)
- Dai e Singleton (2003)** Q. Dai e Kenneth Singleton. Term structure dynamics in theory and reality. *Review of Financial Studies*, 16(3):631–678. ISSN 1465-7368. doi: 10.1093/rfs/hhg010. URL <http://dx.doi.org/10.1093/rfs/hhg010>. Citado na pág. [61](#)
- Duffie e Huang (1996)** Darrell Duffie e Ming Huang. Swap rates and credit quality. *The Journal of Finance*, 51(3):921–949. ISSN 0022-1082. doi: 10.1111/j.1540-6261.1996.tb02712.x. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1996.tb02712.x>. Citado na pág. [25](#)
- Folpners (2012)** Marco Folpners. The impact of pd-lgd correlation on expected loss and economic capital. *Risk Professional*, 1(February):19–25. Citado na pág. [52](#)
- Frey et al. (2012)** Rüdiger Frey, Alexander McNeil e Mark Nyfeler. Copulas and credit models. *Risk Magazine*. Citado na pág. [73](#)
- Galluccio et al. (2007)** S. Galluccio, J.-M. Ly, Z. Huang e O. Scaillet. Theory and calibration of swap market models. *Mathematical Finance*, 17(1):111–141. ISSN 1467-9965. doi: 10.1111/j.1467-9965.2007.00296.x. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-9965.2007.00296.x>. Citado na pág. [62](#)
- Gregory (2010)** J. Gregory. *Counterparty Credit Risk*. John Wiley & Sons. Citado na pág. [5](#), [6](#), [8](#), [9](#), [11](#), [14](#), [16](#), [17](#), [18](#), [20](#), [22](#), [25](#), [26](#), [28](#), [29](#), [31](#), [35](#), [38](#), [39](#)
- Gregory (2012)** J. Gregory. *Counterparty Credit Risk and Credit Valuation Adjustment, 2nd Edition*. Wiley. Citado na pág. [1](#), [14](#), [22](#), [44](#), [45](#), [67](#), [75](#)
- Haff et al. (2010)** Ingrid Hobaek Haff, Kjersti Aas e Arnaldo Frigessi. On the simplified pair-copula construction: Simply useful or too simplistic? *Journal of Multivariate Analysis*, 101(5):1296–1310. ISSN 0047-259X. doi: 10.1016/j.jmva.2009.12.001. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmva.2009.12.001>. Citado na pág. [70](#), [71](#), [72](#)
- Hagan e Konikov (2004)** P. S. Hagan e M. Konikov. Interest rate volatility cube: construction and use. Relatório técnico, Bloomberg Technical Report. Citado na pág. [62](#), [63](#)
- Heath et al. (1992)** D. Heath, R. Jarrow e A. Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, páginas 77–105. Citado na pág. [i](#), [iii](#), [3](#), [61](#), [62](#)
- Hlawatsch e Ostrowski (2011)** Stefan Hlawatsch e Sebastian Ostrowski. Simulation and estimation of loss given default. *Journal of Credit Risk*, 7(3):39–73. Citado na pág. [73](#)
- Ho e Lee (1986)** T. S. Y. Ho e S.-B. Lee. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *The Journal of Finance*, 41(5):1011–1029. ISSN 00221082. URL <http://www.jstor.org/stable/2328161>. Citado na pág. [61](#)
- Hollings et al. (2009)** A. P. Hollings, S. Mukherjee e S. Stokke. *Contingent credit default swaps. In: Counterparty Credit Risk: Measuring, Pricing and Hedging*. Risk Books. Citado na pág. [1](#)

- Hull e White (1990)** J. C. Hull e A. D. White. Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of Financial Studies*, 3(4):573–592. ISSN 1465-7368. doi: 10.1093/rfs/3.4.573. URL <http://dx.doi.org/10.1093/rfs/3.4.573>. Citado na pág. [i](#), [iii](#), [3](#), [57](#), [58](#), [59](#), [61](#)
- Hull e White (1993)** John Hull e Alan White. One-factor interest-rate models and the valuation of interest-rate derivative securities. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(2): 235. ISSN 0022-1090. doi: 10.2307/2331288. URL <http://dx.doi.org/10.2307/2331288>. Citado na pág. [61](#), [62](#)
- Hull e White (2012)** John Hull e Alan White. Cva and wrong-way risk. *Financial Analysts Journal*, 68(5):58–69. ISSN 0015-198X. doi: 10.2469/faj.v68.n5.6. URL <http://dx.doi.org/10.2469/faj.v68.n5.6>. Citado na pág. [9](#)
- Hull e White (1994a)** John Hull e Alan White. Branching out. *Risk*, 7:34–37. Citado na pág. [57](#), [58](#)
- Hull e White (1994b)** John C Hull e Alan D White. Numerical procedures for implementing term structure models i. *The Journal of Derivatives*, 2(1):7–16. ISSN 1074-1240. doi: 10.3905/jod.1994.407902. URL <http://dx.doi.org/10.3905/jod.1994.407902>. Citado na pág. [3](#), [59](#), [62](#)
- Hull e White (1995)** John C Hull e Alan D White. A note on the models of hull and white for pricing options on the term structure. *Journal of Fixed Income*, 5(2):97–102. ISSN 1059-8596. doi: 10.3905/jfi.1995.408139. URL <http://dx.doi.org/10.3905/jfi.1995.408139>. Citado na pág. [57](#)
- Joe (1997)** H. Joe. *Multivariate models and dependence concepts*. Chapman & Hall. Citado na pág. [70](#)
- Joe (1996)** Harry Joe. Families of m-variate distributions with given margins and $m(m-1)/2$ bivariate dependence parameters. *Lecture Notes-Monograph Series* *Lecture Notes-Monograph Series*, 28:120–141. Citado na pág. [70](#), [73](#)
- Joe (2015)** Harry Joe. *Dependence modeling with copulas*. CRC Press. Citado na pág. [70](#)
- Joiron (2006)** Philippe Joiron. *Value at Risk: The new benchmark for managing financial risk*. McGraw-Hill, 3rd ed. Citado na pág. [76](#)
- Keller-Ressel et al. (2012)** M. Keller-Ressel, A. Papapantoleon e J. Teichmann. The affine libor models. *Mathematical Finance*, 23(4):627–658. ISSN 0960-1627. doi: 10.1111/j.1467-9965.2012.00531.x. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-9965.2012.00531.x>. Citado na pág. [62](#)
- Kjaer (2011)** M. Kjaer. A generalized credit value adjustment. *Journal of Credit Risk*, 7(1):65–92. Citado na pág. [1](#)
- Kurowicka (2011)** D. Kurowicka. *Introduction: dependence modeling*. World Scientific. Citado na pág. [70](#)
- Kurowicka e Cooke (2006)** Dorota Kurowicka e Roger Cooke. Uncertainty analysis with high dimensional dependence modelling. *Wiley Series in Probability and Statistics*. ISSN 1940-6347. doi: 10.1002/0470863072. URL <http://dx.doi.org/10.1002/0470863072>. Citado na pág. [70](#)
- La Chioma e Piccoli (2007)** Claudia La Chioma e Benedetto Piccoli. Heath-jarrow-morton interest rate dynamics and approximately consistent forward rate curves. *Mathematical Finance*, 17(3):427–447. ISSN 1467-9965. doi: 10.1111/j.1467-9965.2007.00310.x. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-9965.2007.00310.x>. Citado na pág. [62](#)

- Leippold e Wiener (2004)** Markus Leippold e Zvi Wiener. Efficient calibration of trinomial trees for one-factor short rate models. *Review of Derivatives Research*, 7(3):213–239. ISSN 1573-7144. doi: 10.1007/s11147-004-4810-8. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11147-004-4810-8>. Citado na pág. 62
- Li (2000)** David X Li. On default correlation: a copula function approach. *Journal of Fixed Income*, 9(4):43–54. ISSN 1059-8596. doi: 10.3905/jfi.2000.319253. URL <http://dx.doi.org/10.3905/jfi.2000.319253>. Citado na pág. 80
- Li (1998)** Haitao Li. Pricing of swaps with default risk. *Review of Derivatives Research*, 2(2-3): 231–250. ISSN 1573-7144. doi: 10.1007/bf01531336. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01531336>. Citado na pág. 29
- Liu et al. (2006)** Jun Liu, Francis A. Longstaff e Ravit E. Mandel. The market price of risk in interest rate swaps: the roles of default and liquidity risks. *Journal of Business*, 79(5):2337–2359. Citado na pág. 1
- Longstaff (1989)** Francis A. Longstaff. A nonlinear general equilibrium model of the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*, 23(2):195–224. ISSN 0304-405X. doi: 10.1016/0304-405x(89)90056-1. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0304-405X\(89\)90056-1](http://dx.doi.org/10.1016/0304-405X(89)90056-1). Citado na pág. 61
- Longstaff (1992)** Francis A. Longstaff. Multiple equilibria and term structure models. *Journal of Financial Economics*, 32(3):333–344. ISSN 0304-405X. doi: 10.1016/0304-405x(92)90031-r. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0304-405X\(92\)90031-R](http://dx.doi.org/10.1016/0304-405X(92)90031-R). Citado na pág. 61
- MacKenzie e Spears (2014)** D. MacKenzie e T. Spears. The formula that killed wall street: The gaussian copula and modelling practices in investment banking. *Social Studies of Science*, 44(3): 393–417. ISSN 1460-3659. doi: 10.1177/0306312713517157. URL <http://dx.doi.org/10.1177/0306312713517157>. Citado na pág. 80
- Mai e Scherer (2012)** Jan-Frederik Mai e Matthias Scherer. *Simulating copulas: stochastic models, sampling algorithms, and applications*. Imperial College Press. Citado na pág. 70
- McNeil et al. (2006)** A. McNeil, R. Frey e P. Embrechts. *Quantitative risk management: concepts, techniques, and tools*. Princeton University Press. Citado na pág. 71
- Meng et al. (2010)** Qiang Meng, Amnon Levy, Andrew Kaplan, Yashan Wang e Zhenya Hu. Implications of pd-lgd correlation in a portfolio setting. Relatório técnico, Moody's Analytics. Citado na pág. 74, 79
- Neagu e Hoerl (2005)** Radu Neagu e Roger Hoerl. A six sigma approach to predicting corporate defaults. *Quality and Reliability Engineering International*, 21(3):293–309. ISSN 1099-1638. doi: 10.1002/qre.632. URL <http://dx.doi.org/10.1002/qre.632>. Citado na pág. 73
- Nelsen (2006)** R.B. Nelsen. *An introduction to copulas*. Springer. Citado na pág. 70
- Pengelly (2010)** M. Pengelly. Basel to overhaul cva capital calculation. *Risk*, 23(12):12. Citado na pág. 2
- Pengelly (2011)** M. Pengelly. Cva melee. *Risk*, 24(2):37–39. Citado na pág. 2
- Pykhtin e Rosen (2010)** M. Pykhtin e D. Rosen. Pricing counterparty risk at the trade level and credit valuation adjustment allocations. *The Journal of Credit Risk*, 6(4):3–38. Citado na pág. 1, 6
- Pykhtin e Zhu (2007)** M. Pykhtin e S. Zhu. A guide to modelling counterparty credit risk. *Global Association of Risk Professionals*, July/August(37):16–22. Citado na pág. 6, 17

- RatingsDirect (2013)** RatingsDirect. Default, transition, and recovery: 2013 annual global corporate default study and rating transitions. Relatório técnico, Standard&Poor's Rating Services. Citado na pág. 74
- Reboredo e Ugolini (2015)** Juan C. Reboredo e Andrea Ugolini. A vine-copula conditional value-at-risk approach to systemic sovereign debt risk for the financial sector. *The North American Journal of Economics and Finance*, 32:98–123. ISSN 1062-9408. doi: 10.1016/j.najef.2015.02.002. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.najef.2015.02.002>. Citado na pág. 80
- Rowe et al. (2009)** D. M. Rowe, P. Koop e D. Travers. *Efficient calculation of counterparty exposure conditional on default*. In: *Counterparty credit risk: measurement, pricing and hedging*. Risk Books. Citado na pág. 9
- Sawyer et al. (2011)** N. Sawyer, J. Clark e M. Pengelly. Basel committee makes alterations to counterparty credit risk rules. *Risk*, 24(1):8. Citado na pág. 2
- Schuermann (2004)** Til Schuermann. What do we know about loss given default? Relatório técnico, Wharton Financial Institutions Center. Citado na pág. 73
- Sklar (1959)** Abe Sklar. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris*, 8:229–231. Citado na pág. 70
- Sorensen e Bollier (1994)** Eric H. Sorensen e Thierry F. Bollier. Pricing swap default risk. *Financial Analysts Journal*, 50(3):23–33. ISSN 0015-198X. doi: 10.2469/faj.v50.n3.23. URL <http://dx.doi.org/10.2469/faj.v50.n3.23>. Citado na pág. 25, 28, 44, 49, 54
- Turnbull (2009)** S. M. Turnbull. Measuring and managing risk in innovative financial instruments. *Journal of Credit Risk*, 5(2):87–114. Citado na pág. 1
- Vasicek (1977)** Oldrich Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2):177–188. ISSN 0304-405X. doi: 10.1016/0304-405x(77)90016-2. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0304-405X\(77\)90016-2](http://dx.doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2). Citado na pág. 57, 61, 62
- Vasicek (2007)** Oldrich Alfons Vasicek. The heath, jarrow, morton model. *Economic Notes*, 36(3):205–207. ISSN 1468-0300. doi: 10.1111/j.1468-0300.2007.00183.x. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1468-0300.2007.00183.x>. Citado na pág. 61
- Weiss e Supper (2013)** Gregor N.F. Weiss e Hendrik Supper. Forecasting liquidity-adjusted intraday value-at-risk with vine copulas. *Journal of Banking & Finance*, 37(9):3334–3350. ISSN 0378-4266. doi: 10.1016/j.jbankfin.2013.05.013. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jbankfin.2013.05.013>. Citado na pág. 80
- Zhang et al. (2014)** Bangzheng Zhang, Yu Wei, Jiang Yu, Xiaodong Lai e Zhenfeng Peng. Forecasting var and es of stock index portfolio: A vine copula method. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 416:112–124. ISSN 0378-4371. doi: 10.1016/j.physa.2014.08.043. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2014.08.043>. Citado na pág. 80