

"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail [bibfea@usp.br](mailto:bibfea@usp.br) para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE  
DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**MODELOS ESTOCÁSTICOS DA ESTRUTURA TEMPORAL  
DE TAXAS DE JUROS:  
ANÁLISE COMPARATIVA DE DESEMPENHO NA  
PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES SOBRE IRI DA BOLSA DE  
MERCADORIAS E FUTUROS**

Marcos Ribeiro de Castro

Orientador: Prof. Dr. José Roberto Securato

São Paulo  
2003

**MODELOS ESTOCÁSTICOS DA ESTRUTURA TEMPORAL DE  
TAXAS DE JUROS: ANÁLISE COMPARATIVA DE DESEMPENHO NA  
PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES SOBRE IRI DA BOLSA DE  
MERCADORIAS E FUTUROS**

**Dissertação de Mestrado**

**Autor**

**Marcos Ribeiro de Castro**

**Reitor da Universidade de São Paulo**

**Prof. Dr. Adolpho José Melfi**

**Diretora da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade**

**Profa. Dra. Maria Tereza Leme Fleury**

**Chefe do Departamento de Administração**

**Prof. Dr. Eduardo Pinheiro Gondin de Vasconcellos**

**Orientador**

**Prof. Dr. José Roberto Securato**

**Dissertação apresentada à Faculdade de Economia, Administração e Ciências  
Contábeis da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do  
título de Mestre em Administração**

**São Paulo  
2003**

## Agradecimentos

Agradeço a meus pais pelo estímulo e a força que me deram durante todo o período do mestrado. Em especial, agradeço a meu irmão gêmeo Eduardo, pelo apoio constante e incondicional que sempre me deu, não só durante o mestrado, mas ao longo de toda a vida.

Agradeço a meu orientador, professor José Roberto Securato, por ter despertado em mim o interesse por finanças, pelo conhecimento compartilhado e por ter aceitado orientar minha dissertação, ajudando-me a sempre manter um direcionamento objetivo durante sua elaboração.

Sou grato também aos professores Joe Yoshino e José Siqueira, sempre disponíveis para esclarecer de minhas diversas dúvidas sobre finanças e modelos de taxas de juros.

Aos colegas Fernando Kato e Christian Zimmer, agradeço por terem compartilhado comigo seus conhecimentos e sobretudo sua motivação e seu interesse pela área de finanças.

Por fim, agradeço à CAPES pela bolsa de mestrado recebida durante dois anos, que proporcionou certa tranquilidade para conduzir os estudos durante este período. Espero poder retribuir à sociedade, ao longo de minha vida profissional futura, a ajuda que dela recebi através da bolsa.

## RESUMO

O tema deste trabalho é a aplicação de modelos estocásticos de taxas de juros na precificação de opções de IDI da Bolsa de Mercadorias e Futuros de São Paulo.

Os capítulos 2, 3 e 4 constituem a revisão bibliográfica. O capítulo 2 descreve resumidamente o mercado de renda fixa brasileiro e as teorias que procuram explicar o comportamento das taxas de juros. No capítulo 3 são introduzidos os elementos matemáticos básicos para a precificação de ativos contingentes, e o capítulo 4 descreve os modelos estocásticos unifatoriais para as taxas de juros de curto prazo.

No capítulo 5 descreve a aplicação dos modelos de Black, Merton, Vasicek, Ho-Lee e Hull-White na precificação de opções de IDI, e são deduzidas as fórmulas fechadas para os prêmios das opções segundo os modelos de Ho-Lee e Hull-White, que se mostram iguais às dos modelos de Merton e Vasicek, respectivamente.

O capítulo 6 detalha a metodologia utilizada na implementação dos modelos de precificação do capítulo anterior, sendo desenvolvido um método para a estimação dos parâmetros dos modelos a partir das cotações dos contratos futuros de DI de 1 dia.

No capítulo 7 são exibidos os resultados da implementação dos modelos, ou seja, os parâmetros estimados e as medidas de erro entre os modelos e os preços de mercado. Por fim, no capítulo 8 são feitas as considerações finais. Observa-se que os modelos de Merton/Ho-Lee e Vasicek/Hull-White apresentam desempenhos semelhantes e superiores aos do modelo de Black, sendo que os parâmetros estimados para o modelo de Vasicek/Hull-White apresentaram maior instabilidade. Por conta disso, dá-se preferência ao modelo de Merton/Ho-Lee.

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	SITUAÇÃO-PROBLEMA	1
1.2	OBJETIVOS DA PESQUISA	3
1.3	METODOLOGIA DO TRABALHO	3
1.4	DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS	4
2	O MERCADO DE TAXAS DE JUROS E SEUS INSTRUMENTOS	6
2.1	MERCADO MONETÁRIO	6
2.2	O MERCADO INTERBANCÁRIO DE REAIS	8
2.3	INSTRUMENTOS DO MERCADO DE RENDA FIXA	11
2.3.1	TÍTULOS DA DÍVIDA PÚBLICA FEDERAL	11
2.3.2	SWAPS	13
2.3.3	CONTRATOS FUTUROS DE DI 1 DIA	15
2.3.4	OPÇÕES	19
2.3.5	OPÇÃO DE COMPRA SOBRE IDI	20
2.4	ESTRUTURA TEMPORAL DE TAXAS DE JUROS	23
2.4.1	DEFINIÇÃO E REPRESENTAÇÃO	23
2.4.2	TEORIAS PARA A ESTRUTURA TEMPORAL DE TAXAS DE JUROS	27
	a) TEORIA DAS EXPECTATIVAS PURA	27
	b) TEORIA DA PREFERÊNCIA POR LIQUIDEZ	28
	c) TEORIA DO HABITAT PREFERIDO	29
	d) TEORIA DA SEGMENTAÇÃO DE MERCADO	30
3	PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS CONTINGENTES	31
3.1	ELEMENTOS DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS	31
3.1.1	ESPAÇO DE PROBABILIDADE	31
3.1.2	VARIÁVEL ALEATÓRIA	35
3.1.3	PROCESSO ESTOCÁSTICO	40
3.2	ELEMENTOS DE CÁLCULO ESTOCÁSTICO	48
3.2.1	MOVIMENTO BROWNIANO	48
3.2.2	INTEGRAL DE ITÔ	50
3.2.3	PROCESSO DE ITÔ	52
3.2.4	FÓRMULA DE ITÔ	54

3.2.5	MUDANÇA DE MEDIDA DE PROBABILIDADE E TEOREMA DE GIRSANOV	57
	<i>a) MUDANÇA DE MEDIDA</i>	57
	<i>b) TEOREMA DE GIRSANOV</i>	62
3.3	MODELO DE MERCADO FINITO	65
3.3.1	DESCRIÇÃO DO MODELO DE MERCADO FINITO	65
3.3.2	MODELO BINOMIAL	69
3.4	MODELO DE MERCADO NO TEMPO CONTÍNUO	74
3.4.1	DESCRIÇÃO DO MODELO EM TEMPO CONTÍNUO	74
4	MODELOS ESTOCÁSTICOS PARA O COMPORTAMENTO DA ESTRUTURA TEMPORAL DE TAXAS DE JUROS	79
4.1	DEFINIÇÕES PRELIMINARES	79
4.2	MODELOS ESTOCÁSTICOS UNIFATORIAIS PARA A ESTRUTURA TEMPORAL DE TAXAS DE JUROS	80
4.2.1	MODELOS DE EQUILÍBRIO	81
	<i>a) MODELO DE MERTON</i>	81
	<i>b) MODELO DE VASICEK</i>	83
	<i>c) MODELO DE COX, INGERSOLL E ROSS</i>	86
4.2.2	MODELOS DE NÃO ARBITRAGEM	89
	<i>a) MODELO DE HO E LEE</i>	89
	<i>b) MODELO DE HULL E WHITE (1990)</i>	94
	<i>c) MODELO DE BLACK, DERMAN E TOY</i>	102
	<i>d) MODELO DE BLACK E KARASINSKY</i>	103
5	PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES DE IDI	105
5.1	MODELO DE BLACK	105
5.2	MODELO DE VASICEK	106
5.3	MODELO DE MERTON	107
5.4	MODELOS DE HULL-WHITE E HO-LEE	108
	5.4.1 FÓRMULA PARA O MODELO DE HULL-WHITE	111
	5.4.2 FÓRMULA PARA O MODELO DE HO E LEE	112
6	METODOLOGIA DE PESQUISA	113
6.1	POPULAÇÃO E AMOSTRA	113
6.2	TRATAMENTO E ANÁLISE DOS DADOS	114

6.2.1	ANÁLISE E TRATAMENTO PRELIMINARES DOS DADOS	115
a)	ANÁLISE PRELIMINAR DOS DADOS	115
b)	TRATAMENTO PRELIMINAR DOS DADOS	122
6.2.2	IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS DE ETTJ	123
a)	DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS USANDO DADOS HISTÓRICOS	126
b)	DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS USANDO CONTRATOS FUTUROS DE DI DE 1 DIA	128
c)	DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS USANDO VOLATILIDADES IMPLÍCITAS	138
6.3	COMPARAÇÃO DOS DESEMPENHOS DOS MODELOS	139
7	ANÁLISE DOS RESULTADOS	142
7.1	COMPORTAMENTO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS	142
7.2	INDICADORES DE ERRO DOS MODELOS	153
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	159
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	161
	APÊNDICE I – CÓDIGOS EM MATLAB	164
	SCRIPT PARA O CÁLCULO DOS PARÂMETROS E PRÊMIOS DOS MODELOS A PARTIR DA SÉRIE HISTÓRICA DO DI.	164
	SCRIPT PARA O CÁLCULO DOS PARÂMETROS E PRÊMIOS DOS MODELOS A PARTIR DAS SÉRIES HISTÓRICAS DOS CONTRATOS FUTUROS DE DI DE 1 DIA.	170
	SCRIPT PARA O CÁLCULO DOS PARÂMETROS IMPLÍCITOS E RESPECTIVOS PRÊMIOS DOS MODELOS.	175
	FUNÇÕES UTILIZADAS	177
	Função CallBlackIDI	177
	Função CallMertonIDI	177
	Função CallVasicekIDI	178
	Função FunçãoVerossimVasicexA	178
	Função VolImplBlack	179
	Função VolImplMerton	180
	Função VolImplVasicek	181
	Função ErroVolBlackIDI	182



Função ErroVolMertonIDI	182
Função ErroVolVasicekIDI	182
APÊNDICE II – Formatos dos arquivos utilizados pelos programas em MATLAB	183

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 SITUAÇÃO-PROBLEMA

Para melhor poder lidar com o risco nos mercados financeiros e de mercadorias, os bancos, bolsas e investidores desenvolveram uma série de novos ativos financeiros – os derivativos – cujos preços são função dos preços de outros ativos geralmente negociados em bolsa ou cuja cotação seja de conhecimento público. Dentre os principais tipos de derivativos estão os contratos a termo, os contratos futuros, os *swaps* e as opções.

Como, no Brasil, parte significativa das aplicações financeiras se dirige a investimentos em renda fixa, torna-se bastante importante a administração de carteiras de renda fixa, ou seja, a gestão do retorno e do risco deste tipo de *portfolio*. Por conseguinte, também os instrumentos auxiliares a esta administração, como os derivativos de taxas de juros, adquirem maior relevância.

À medida que o mercado brasileiro se tornar mais sofisticado e que aumentar o prazo dos investimentos em renda fixa, mais sofisticada deverá ser a gestão de risco desta categoria de investimento, o que demandará a utilização de ferramentas de *hedge* mais complexas. Dentre estes instrumentos estão diversos tipos de opções, como por exemplo *swaptions*, *caps* e *floors*. Para que um administrador de carteira possa utilizar estes instrumentos com segurança, é necessário que seja capaz de determinar seus preços economicamente corretos com relativa precisão, caso contrário poderá incorrer em prejuízos significativos.

Nos mercados financeiros dos países desenvolvidos, em especial nos Estados Unidos, já existe uma grande variedade de opções sobre taxas de juros, incluindo uma vasta gama de opções exóticas. Para fazer frente a estas necessidades, foram desenvolvidos vários modelos para o comportamento da estrutura temporal de taxas de juros, com diversos graus de complexidade, cada um deles com o propósito de permitir a precificação conjunta de uma variedade cada vez maior de derivativos de taxas de juros.

O mercado de derivativos de renda fixa no Brasil ainda é pouco desenvolvido, contando com poucos negócios envolvendo opções. Ainda assim, é um mercado que vem se sofisticando, e no qual operações com produtos mais complexos começam a ser feitas, exigindo o uso de modelos de precificação destes ativos. Partindo-se dos modelos já desenvolvidos no exterior,

surge o problema de selecionar qual dentre eles utilizar para a precificação de derivativos de renda fixa no Brasil.

Embora boa parte das operações com opções de renda fixa seja feita em balcão, algumas outras, como a opção sobre IDI da Bolsa de Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&F), são negociadas em bolsa, com cotações divulgadas ao público. Se considerarmos que as instituições que negociam opções de balcão vão à BM&F negociar opções sobre IDI para fazer o hedge de suas posições, então podemos assumir que as informações de mercado relativas a expectativas destas instituições sobre o comportamento da estrutura temporal de taxas de juros são transmitidas ao preço das opções de IDI, e assim um modelo de taxas de juros que explique bem os preços de mercado das opções de IDI seria também útil para determinar o preço de opções de balcão e dos derivativos de renda fixa de maneira geral.

A opção sobre IDI, como qualquer outra opção, é um derivativo, ou seja, um ativo cujo valor deriva do preço de outro ativo subjacente. O primeiro passo para que se possa determinar um modelo para a precificação de um derivativo é o desenvolvimento de outro modelo que explique o comportamento de seu ativo subjacente. No caso de qualquer opção sobre renda fixa, o preço do ativo subjacente a ser analisado é função da estrutura temporal de taxa de juros, a qual nada mais é do que o conjunto das taxas de juros do mercado interbancário para empréstimos com vários prazos de vencimentos diferentes. Ao determinarmos como se comportam estas taxas de juros ao longo do tempo, podemos estudar a dinâmica dos preços do ativo subjacente e conseqüentemente o preço adequado para a opção sobre este ativo. Ou seja, o ponto central em um método de precificação de opções sobre renda fixa é o modelo utilizado para o comportamento das taxas de juros.

Já são bastante conhecidos diversos modelos estocásticos para a estrutura temporal de taxas de juros, cada um dos quais com um determinado grau de complexidade. O problema que surge é determinar qual destes modelos é o mais adequado para a utilização na precificação do derivativo em questão. Para tanto, o procedimento geral é:

- 1- parametrizar o modelo da estrutura temporal de taxa de juros usando informações de mercado: as taxas de juros vigentes no dia e os preços das opções negociadas no mercado;
- 2- utilizar o modelo já parametrizado para calcular o preço das opções;
- 3- comparar o preço fornecido pelo modelo com o preço de mercado das opções.

O melhor modelo será aquele que calcular preços mais próximos aos praticados no mercado. Desta forma, pode-se estabelecer o objetivo deste trabalho conforme se segue.

## 1.2 OBJETIVOS DA PESQUISA

Este estudo tem por objetivos:

- Fazer uma revisão dos principais modelos estocásticos do comportamento das taxas de juros, apresentando detalhadamente sua formulação matemática.
- Aplicar estes modelos na precificação de opções sobre IDI negociadas na Bolsa de Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&F), identificando aqueles que porventura apresentem melhores desempenhos para as condições do mercado brasileiro.

## 1.3 METODOLOGIA DO TRABALHO

A pesquisa envolverá a implementação de cada um dos modelos de estrutura temporal de taxas de juros e a sua utilização para a precificação das opções sobre IDI, sendo comparados os preços de mercado das opções com os preços fornecidos pelos modelos, buscando-se apurar qual dos modelos produz resultados mais próximos aos do mercado. Cada modelo exigirá como dados de entrada os preços dos ativos de renda fixa (CDI, contratos de DI, opções) e produzirá como resultado os preços de diferentes opções sobre IDI.

Utilizando-se dados passados, para cada dia serão utilizadas, em cada modelo, todas as informações até aquela data, e o preço fornecido pelo modelo será comparado com o preço de mercado na mesma data. Será feito este tipo de simulação para todos os dias para os quais se tiver dados, e com base no resultado das comparações será possível identificar os modelos com melhor desempenho e as condições em que isso ocorre.

Trata-se portanto de uma pesquisa de caráter descritivo. Segundo Gil (1987):

“As pesquisas descritivas têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou, então, o estabelecimento de relações entre variáveis”.

A pesquisa é descritiva pois se limita a indicar qual modelo de taxas de juros é o mais adequado, sem buscar entender por que razão tal modelo se mostrou melhor, o que seria o caso se a pesquisa tivesse natureza explicativa.

A pesquisa pode ainda ser caracterizada como “ex-post-facto”. Conforme Gil (1987), neste tipo de pesquisa são tomadas como experimentais situações que se desenvolveram naturalmente e trabalha-se sobre elas como se estivessem submetidas a controles. Na pesquisa em questão, as situações são dadas pelos preços dos ativos em cada dia, os quais são aplicados a cada um dos modelos e em seguida comparados os resultados como os preços das opções naquele dia.

Uma vez que serão comparados os desempenhos de vários modelos de comportamento das taxas de juros, a hipótese nula subjacente à pesquisa é a seguinte:

**Não existe diferença entre os modelos estocásticos para a estrutura temporal de taxas de juros na precificação de opções sobre IDI negociadas na BM&F.**

#### 1.4 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS

No capítulo 2 serão apresentados conceitos relacionados ao funcionamento dos mercados de juros no Brasil, sendo descritos os principais instrumentos financeiros utilizados.

O capítulo 3 introduz alguns conceitos relacionados à teoria de probabilidade, cálculo estocástico e modelos de precificação de ativos, conceitos estes que serão úteis no desenvolvimento de modelos para a precificação das opções europeias de IDI.

No capítulo 4 são apresentados os modelos estocásticos para o comportamento das taxas de juros de curto prazo. São descritas algumas consequências destes modelos, acompanhadas das respectivas deduções quando necessário.

No capítulo 5 são descritas as aplicações dos modelos de taxas de juros na precificação das opções sobre IDI, com a dedução de fórmulas quando isso se mostrar necessário.

No capítulo 6 é apresentada a metodologia de pesquisa utilizada na implementação dos modelos de precificação de opções e na comparação dos modelos.

No capítulo 7 são exibidos os resultados obtidos, e no capítulo 8 são feitas as considerações finais.

## 2 O MERCADO DE TAXAS DE JUROS E SEUS INSTRUMENTOS

### 2.1 MERCADO MONETÁRIO

Segundo uma definição simples dada por Mellagi (2000, p.17), mercado financeiro é “o conjunto de instituições e operações ocupadas com o fluxo de recursos monetários entre os agentes econômicos.” Ainda segundo Mellagi, “é o mercado de emprestadores e tomadores de empréstimos, sendo que o valor da remuneração dos empréstimos é chamado de **juro** ou, em termos percentuais, de taxa de **juros**.”

Uma boa segmentação do mercado financeiro é dada por Assaf (1999, p.80), que o divide em mercados monetário, de crédito, de capitais e cambial. Segundo ele:

“O mercado monetário envolve operações de curto e curtíssimo prazos, proporcionando um controle ágil e rápido da liquidez da economia e das taxas de juros básicas pretendidas pela política econômica das autoridades monetárias.

O mercado de crédito engloba as operações de financiamento de curto e médio prazos, direcionadas aos ativos permanentes e capital de giro das empresas. Esse mercado é constituído, basicamente, pelos Bancos Comerciais e Sociedades Financeiras.

O mercado de capitais contempla as operações financeiras de médio e longo prazos, e de prazo indeterminado, como as operações com ações.

O mercado cambial inclui as operações de conversão (troca) de moeda de um país pela de outro, determinada principalmente pela necessidade da prática do comércio internacional.”

Devido ao histórico recente brasileiro de alta inflação e de instabilidade econômica, que dificulta a formação de expectativas dos investidores para operações de prazos mais longos, os mercados de capitais ainda são pouco desenvolvidos no Brasil quando comparados com os mercados de países desenvolvidos. Com a maior parte das operações financeiras concentrada nos prazos mais curtos, o mercado monetário assume no Brasil uma importância maior.

A figura seguinte, adaptada de Fortuna (1999, p.53), representa de forma resumida o funcionamento do mercado monetário no Brasil:

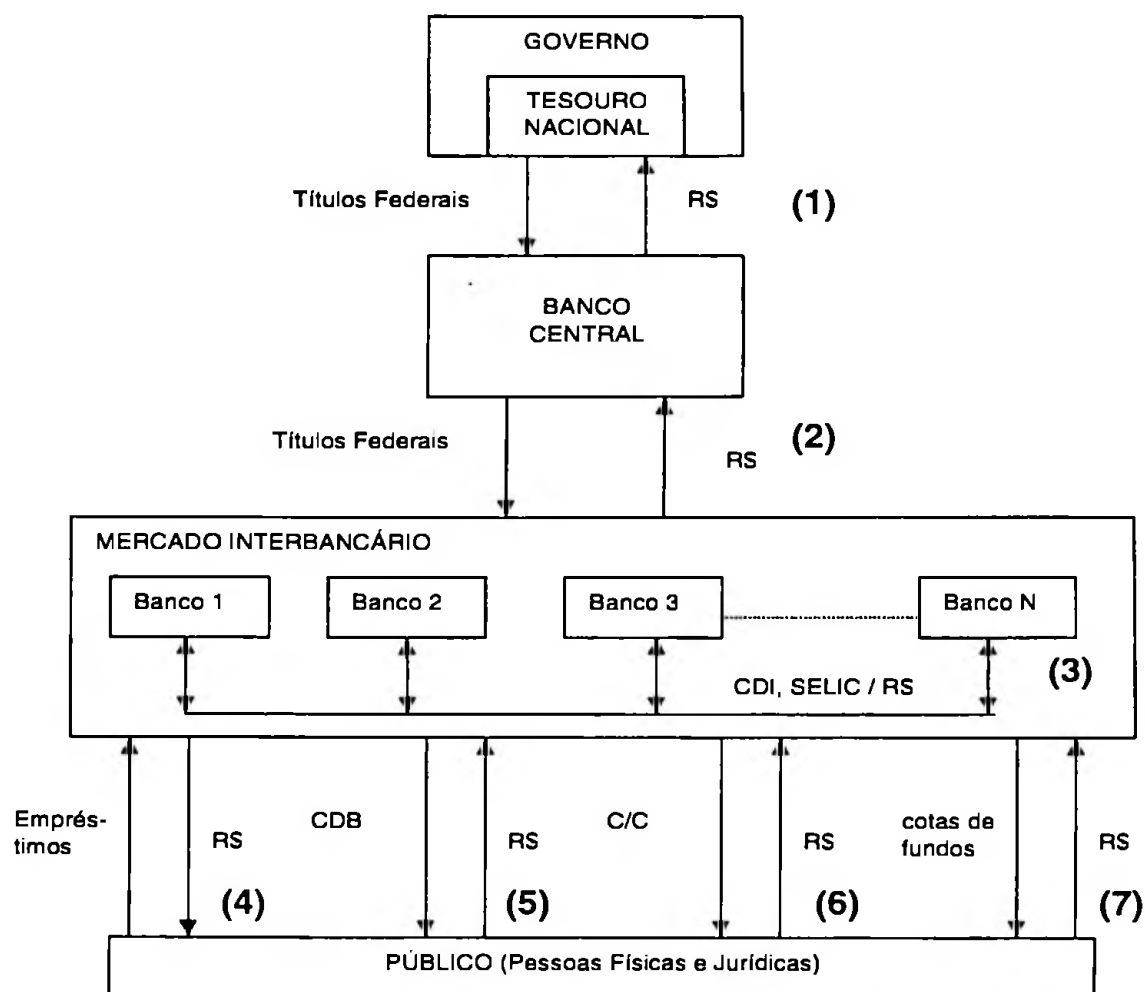


Figura 2.1 – Representação simplificada do mercado monetário no Brasil.

Os fluxos de recursos são representados pelas setas e identificados pelos números de 1 a 7, sendo descritos a seguir.

- (1) O Governo Federal emite títulos de sua dívida pública a fim de financiar o seu déficit, repassando-os para as instituições financeiras através do Banco Central;
- (2) O Banco Central repassa os títulos do Tesouro para as instituições financeiras e negocia títulos federais de sua carteira (de emissão própria ou do Tesouro Nacional) conforme as diretrizes da política monetária (a partir de maio de 2002 ficou proibida a emissão de títulos da dívida pública pelo Banco Central);



- (3) Os bancos trocam recursos entre si através da emissão de CDI (certificados de depósito interbancário) ou da negociação de títulos federais;
- (4) Os bancos repassam recursos para o público na forma de empréstimos;
- (5) Os bancos tomam recursos do público, dando em troca títulos privados (CDB, LC...);
- (6) Os bancos trocam recursos com o público através das contas correntes;
- (7) Os bancos recebem recursos do público através da compra de cotas de fundos de investimento, recursos estes aplicados em títulos públicos ou privados.

Cada um destes tipos de operações tem sua própria dinâmica e taxa de juros, embora, como sugere a figura anterior, estejam todos inter-relacionados, sendo que neste inter-relacionamento o mercado interbancário (troca de recursos entre bancos) desempenha um papel central.

## 2.2 O MERCADO INTERBANCÁRIO DE REAIS

Dentro do mercado monetário, um dos mercados mais importantes no Brasil é o mercado interbancário de reais. Entende-se aqui o mercado interbancário no seu conceito mais amplo, envolvendo a negociação de reais entre instituições financeiras tendo como contrapartida tanto títulos privados emitidos por estas mesmas instituições financeiras (CDI, CDB) como títulos públicos, principalmente os emitidos pelo governo federal. As taxas negociadas neste mercado são um importante ponto de referência a partir do qual os bancos determinam as taxas de juros praticadas nos seus demais negócios com o público. A figura seguinte, adaptada de Securato (2000, p.138), mostra de que maneira isso ocorre:

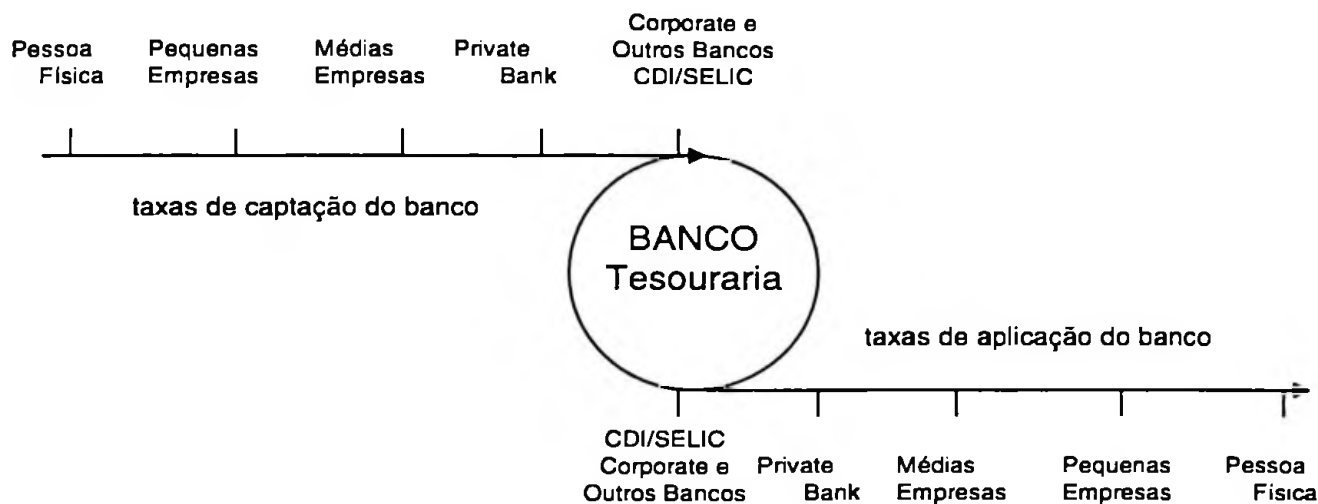


Figura 2.2 – Relação entre as taxas de captação e de aplicação das instituições bancárias

Sendo a taxa básica (CDI/SELIC) aquela pela qual o banco pode obter ou repassar recursos para outros banco, procurará tomar recursos emprestados do seu público a taxas menores do que a taxa básica, tão menores quanto menor for o poder de barganha de cada cliente, sendo que, na escala acima, as grandes empresas e os outros bancos de maneira geral possuem o maior poder de barganha ao passo que as pessoas físicas apresentam menor poder. Da mesma forma, o banco procurará repassar recursos para seus clientes a taxas maiores do que a taxa básica, tanto maiores quanto menor o poder de barganha destes.

A negociação de reais entre instituições financeiras se dá através da negociação de títulos públicos ou de títulos privado emitidos pelas próprias instituições.

A negociação destes títulos privados se dá em um mercado privativo de instituições financeiras, onde estas trocam dinheiro entre si a fim de satisfazer suas necessidades individuais de alocação de recursos, tendo como lastro títulos privados emitidos por estas mesmas instituições. Tais títulos são negociados num sistema privado designado para este fim e denominado CETIP (Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos), que é responsável pela custódia, registro e liquidação de operações com títulos privados.

O título mais importante deste mercado é o CDI (Certificado de Depósito Interbancário), emitido por instituições financeiras para lastrear empréstimos de dinheiro junto a outras instituições. Tais operações são geralmente negociadas a prazos de 1 a 30 dias, sendo o volume mais significativo das operações feito para o prazo de um dia.

As operações com CDI são cotadas em porcentagem ao ano (%a.a.), embora a maioria das operações corresponda a prazos inferiores a isso, e os juros somente são capitalizados nos dias úteis. O cálculo da taxa de juros efetiva no período da operação é feito a partir da taxa ao ano conforme a fórmula seguinte:

$$i_p = (1 + i_{a.a.})^{\frac{du}{252}} - 1$$

onde  $du$  é o número de dias úteis da operação,  $i_p$  é a taxa efetiva no período e  $i_{a.a.}$  é a cotação em %a.a. Por convenção de mercado, admite-se que o ano possui 252 dias úteis, o que corresponde a 21 dias úteis ao mês.

Além do mercado de CDI's, outro mercado bem mais amplo também é responsável pela formação das taxas de juros básicas da economia: o mercado de títulos da dívida pública federal. Sendo as taxas do mercado interbancário importantes na determinação do custo do dinheiro na economia, o Governo, através do Banco Central, procura influenciá-las para atingir seus objetivos econômicos, conforme sua política monetária. Dentre os vários instrumentos de que dispõe para este fim está o controle do volume de moeda em circulação e da taxa de juros de curto prazo através da negociação de títulos da dívida pública no mercado aberto. Tal negociação se dá dentro de um sistema eletrônico desenvolvido com o propósito específico de negociar títulos da dívida pública federal – o SELIC (Sistema Especial de Liquidação e Custódia) – operado sob a responsabilidade do Banco Central.

Através do mercado aberto, as instituições financeiras negociam títulos públicos federais entre si e com o Banco Central em operações com prazos variando de 1 dia até alguns anos. Neste mercado, assumem especial importância as operações de 1 dia (também conhecidas como *overnight*). Mensalmente, o Conselho de Política Monetária (COPOM) se reúne para determinar a meta para as taxas deste tipo de operação. O BC então intervém no mercado aberto comprando ou vendendo títulos até que a taxa vigente no mercado se ajuste à meta determinada pelo COPOM. Esta taxa de 1 dia recebe entre os participantes do mercado o

nome de taxa SELIC, e é calculada pelo BC ao final do dia com base na média das taxas praticadas pelos participantes do mercado aberto em operações deste tipo.

Como seria de se esperar, existe uma forte relação entre a taxa SELIC e a taxa do CDI de um dia (ou taxa DI). Por exemplo, se a taxa SELIC for maior do que o DI, os bancos seriam tentados a tomar recursos emprestados no CDI de um dia e aplicá-los à SELIC, lucrando a diferença. Evidentemente, tal movimento faria, através do mecanismo de oferta e procura, com que a diferença entre as duas taxas diminuísse até se tornar pouco significativa. Assim, através do controle da taxa SELIC, o Banco Central consegue determinar também os níveis da taxa DI e o custo do dinheiro em todo o sistema financeiro.

Neste ponto, já deve estar clara a importância do mercado interbancário na formação das taxas de juros praticadas na economia. Entretanto, para que se possa aprofundar a compreensão do comportamento das taxas de juros interbancárias, é necessário conhecer antes alguns instrumentos utilizados pelos investidores nestes mercados.

## 2.3 INSTRUMENTOS DO MERCADO DE RENDA FIXA

Os valores para as taxas de juros de diferentes prazos praticadas nas operações entre os bancos não são cotados diretamente no mercado, mas aparecem implícitos nos preços de ativos financeiros negociados entre bancos. Assim, para se determinar quais são as taxas de juros praticadas num dado momento, deve-se analisar os preços destes ativos no mercado e a sua relação com as taxas de juros. A seguir são descritos alguns dos principais ativos financeiros que permitem observar o comportamento das taxas de juros no mercado.

### 2.3.1 TÍTULOS DA DÍVIDA PÚBLICA FEDERAL

São títulos emitidos pelo Tesouro Nacional com o propósito de financiar o déficit público e são negociados no sistema SELIC, com liquidação no mesmo dia.

Conforme nota para a imprensa divulgada pela página de internet do Banco Central do Brasil em outubro de 2002, 88,6% da dívida pública mobiliária federal em poder do público se apresentava na forma de 5 tipos diferentes de títulos públicos:

Título	Código	Volume (R\$ bilhões)	Participação na dívida total	Indexador
Nota do Banco Central – Série E	NBC-E	85,09	13,46%	Dólar
Letra Financeira do Tesouro	LFT	336,21	53,19%	Selic
Letra do Tesouro Nacional	LTN	41,05	6,49%	Pré-fixado
Nota do Tesouro Nacional – Série C	NTN-C	37,74	5,97%	IGPM
Nota do Tesouro Nacional – Série D	NTN-D	60,23	9,53%	Dólar

Tabela 2.1 – Principais títulos componentes da dívida pública federal

Destes, são de interesse imediato para estudo da formação das taxas de juros em reais as LFTs (Letras Financeiras do Tesouro) e as LTNs (Letras do Tesouro Nacional), ambas emitidas pelo Tesouro para financiar o déficit público. As informações sobre estes títulos foram obtidas do Banco Central do Brasil (2002b).

As LTNs são títulos pré-fixados que pagam em uma data futura previamente estipulada um valor em reais também previamente determinado (em geral R\$1.000,00), sendo portanto negociada com desconto. Por exemplo, se a taxa de juros hoje para aplicações de 100 dias úteis está em 20%a.a., o valor negociado hoje para uma LTN que paga R\$ 1.000,00 daqui a 100 dias úteis será:

$$PU = \frac{R\$1000,00}{\left(1 + \frac{20}{100}\right)^{\frac{100}{252}}} = R\$930,21$$

sendo que  $PU$  (preço unitário) é o valor pago hoje por cada título.

As LFTs são títulos pós-fixados cujos preços são corrigidos diariamente segundo a taxa SELIC. Por exemplo, se uma LFT é emitida com valor nominal R\$ 1000,00 e é negociada após dois dias, sendo que as taxas SELIC nestes dois dias foram de 18,5%a.a. e 21%a.a., então seu preço de venda será:

$$PU = 1000,00 \cdot \left(1 + \frac{18,5}{100}\right)^{\frac{1}{252}} \cdot \left(1 + \frac{21}{100}\right)^{\frac{1}{252}} = 1001,43$$

Neste cálculo, considera-se que o risco de crédito do título (ou seja, a possibilidade de o governo não honrar o seu pagamento) é nulo.

Como é fácil de perceber, apenas as LTNs embutem em seu preço alguma informação sobre expectativas de taxas de juros, embora ambos os títulos possam ser utilizados com o propósito de especular com as taxas de juros. Por exemplo, um investidor que resolva apostar numa queda da taxa Selic maior do que a esperada pelo mercado pode trocar sua posição em LFTs por outra em LTNs.

### 2.3.2 SWAPS

Em inglês, *swap* significa troca, permuta. No mercado financeiro, segundo Hull (1999, p.121), *swap* é o nome de um contrato pelo qual duas contrapartes concordam em trocar rentabilidades associadas a dois indicadores financeiros diferentes por um determinado período de tempo. Cada investidor se compromete a pagar ao outro a variação de um dos indicadores, sendo o contrato liquidado por diferença.

De maneira genérica, sejam  $i_1$  e  $i_2$  dois índices financeiros. Suponha que os investidores A e B celebrem um contrato de swap de  $i_1$  com  $i_2$ , sendo que o investidor A fica comprado no índice  $i_1$  e vendido no índice  $i_2$ , enquanto o investidor B fica comprado em  $i_2$  e vendido em  $i_1$ , e o contrato tem duração de 1 mês e valor nominal R\$ 1.000,00. Após este período, constata-se que as variações dos índices  $i_1$  e  $i_2$  foram respectivamente de 6% e 4%. Neste caso, o investidor A tem o direito de receber R\$60,00 do investidor B, que por sua vez deve receber R\$40,00 de A. A operação é liquidada por diferença, ou seja, o investidor A recebe R\$20,00 do investidor B.

O *swap* é um tipo de derivativo, ou seja, um ativo cujo valor depende (ou deriva) do valor de outro ativo. Na explicação do parágrafo anterior, os dois ativos dos quais o valor do *swap* depende são os índices  $i_1$  e  $i_2$ .

Um exemplo de *swap* de taxa de juros é o *swap* DI x Pré, através do qual dois investidores trocam entre si uma remuneração pré-fixada e a remuneração do DI de 1 dia. Por exemplo, suponha que o investidor A está na posição comprada em DI (consequentemente a outra ponta da operação, o investidor B, está comprado em Pré). O contrato possui valor inicial de R\$1000,00, e a taxa pré-fixada acordada no contrato é de 18,5%a.a., por um período de 21

dias úteis. Suponha que, ao final do contrato, a remuneração acumulada média das aplicações em DI tenha sido de 20%a.a. Neste caso, o investidor A tem direito a receber de B o rendimento de 20%a.a. sobre R\$1000,00 no período de 21 dias, enquanto B deve receber de A o rendimento de 18,5%a.a. sobre o valor inicial. Liquidando por diferença, B deve pagar para A a quantia

$$Q = 1000,00.(1 + 0,20)^{\frac{21}{252}} - 1000,00.(1 + 0,185)^{\frac{21}{252}} = R\$1,06$$

A duração dos contratos de swap DI x Pré costuma ser, em dias corridos, de múltiplos de 30 dias (30, 60, 90, 120...), ou seja, aproximadamente meses inteiros.

Em geral, no início de um contrato de *swap* DI x Pré, não há nenhum desembolso de recurso por ambas as partes, e se acerta uma taxa pré-fixada próxima à vigente no mercado para operações com títulos com a mesma duração do contrato. Caso isso não ocorresse, uma das partes estaria ganhando dinheiro às custas da outra, sem correr risco. Por exemplo, se a taxa do mercado interbancário para empréstimos de 1 ano fosse de 20%a.a. e um investidor consiga fechar um swap a 18%a.a. comprado em DI, ele poderia tomar dinheiro no mercado à taxa DI e aplicar por 1 ano a 20%a.a., arbitrando o mercado.

O uso deste tipo de *swap* pode simplificar a administração financeira. Por exemplo, uma empresa cuja dívida esteja indexada ao CDI e que ache que as taxas de juros vão subir no futuro pode querer passar a estar endividada a uma taxa pré-fixada, evitando a flutuação do CDI. Uma maneira de fazer isso seria quitando sua dívida atual e contraindo outra dívida, agora pré-fixada. Isso evidentemente implicaria em consideráveis custos de crédito, operacionais e de transação. Outra alternativa seria entrar num contrato de *swap* DI x Pré na ponta compradora de DI. Assim, se a taxa de juros subir, o aumento do endividamento será compensado pelo ganho proporcionado pelo *swap*, e a posição líquida da empresa será a mesma que teria no caso da troca das dívidas, com a vantagem de menores custos de crédito, visto que o principal da operação não é aportado, e operacionais, visto que os limites de crédito não são utilizados, além de não haver todas as etapas da operação de crédito.

No entanto, resta ainda o risco de crédito da diferença de taxas, que será liquidada apenas no vencimento do contrato. Este tipo de risco pode ser praticamente eliminado através do uso de contratos futuros.

### 2.3.3 CONTRATOS FUTUROS DE DI 1 DIA

O *swap* DI x Pré apresenta uma característica que, em determinadas situações, pode ser negativa: o fato de sua liquidação se dar apenas no final do contrato, o que pode tornar o risco de crédito relativo ao pagamento da diferença das taxas no vencimento indesejavelmente alto. Uma maneira de evitar este tipo de risco é utilizar contratos futuros de DI de 1 dia da BM&F (DI1). Este tipo de contrato financeiro reduz o risco de crédito de duas maneiras: (1) através de ajustes diários, pelos quais as partes liquidam os ganhos ou perdas de cada dia, não acumulando saldos devedores até o fim do contrato, e (2) através de depósitos de margens de garantia. Enquanto o uso de margens de garantia pode também ocorrer em contratos de *swap*, as liquidações diárias são características dos contratos futuros. As especificações deste tipo de contrato são fornecidas pela Bolsa de Mercadorias e Futuros (2001).

Assim como os *swaps*, os contratos futuros de DI1 têm por finalidade trocar uma posição longa em pós por uma posição longa em pré (ou vice-versa). Entretanto, os contratos futuros são negociados em bolsa e possuem características padronizadas. O valor de face de cada contrato no vencimento é igual a R\$100.000,00, e as datas de vencimento são sempre os primeiros dias úteis de cada mês. Antes do vencimento, os contratos são negociados a um preço unitário (PU) cujo valor é igual a R\$100.000,00 descontados à taxa pré-fixada esperada para o período de duração do contrato. Por exemplo, em 18/10/2002, um contrato de DI1 com vencimento em 02/03/2002 era cotado a 95.684, o que equivale a uma taxa efetiva ao período de  $100.000/95.684 - 1 = 4,51\%a.p.$ , ou  $24,36\%a.a.$  (são 51 dias úteis).

Ao final de cada dia, a bolsa calcula uma cotação média de fechamento de cada tipo de contrato, cotação esta que será o valor do ajuste do contrato. Apurados os ajustes dos contratos, a bolsa calcula a posição em aberto de cada investidor, que deve ser liquidada no dia seguinte. O cálculo dos ajustes das posições são dados por:



a) ajuste das posições realizadas no dia

$$AD_t = (PA_t - PO)M.N$$

b) ajuste das posições em aberto no dia anterior

$$AD_t = \left\{ PA_t - \left[ PA_{t-1} \cdot \left( 1 + \frac{DI_{t-1}}{100} \right)^{\frac{1}{252}} \right] \right\} M.N$$

onde

$AD_t$  é o ajuste diário da posição referente à data  $t$ ;

$PA_t$  é o preço de ajuste do contrato referente à data  $t$ ;

$PO$  é o preço da operação em PU, dado por

$$PO = \frac{100.000}{\left( 1 + \frac{i}{100} \right)^{\frac{n}{252}}}$$

onde  $i$  é a taxa negociada em %a.a. e  $n$  o número de dias úteis até o vencimento;

$DI_{t-1}$  é a taxa média do DI de um dia apurada pela CETIP no dia anterior ao ajuste;

$M$  é o número de reais para cada ponto de PU ( $M = R\$1,00$  por ponto);

$N$  é o número de contratos da posição.

Como exemplo, suponha que um investidor deseja trocar uma posição pré-fixada por uma pós-fixada e compra, no dia 18/10/2002, 10 contratos futuros de DI1 com vencimento em 02/03/2003 por um PU de 95.670, ou equivalentemente, 24,45%a.a. O ajuste do final do dia apurado pela bolsa foi de 95.684,04, o que significa que o investidor deverá receber da bolsa (no dia seguinte) o valor de

$$AD_t = (95.684,04 - 95.670) 1.10 = 140,40$$

No dia útil seguinte (21/10/2002), o investidor carrega sua posição. Como a taxa do DI1 da CETIP do dia anterior foi de 20,84%a.a. (0,07514%a.d.u.) e o ajuste de fechamento do contrato apurado pela BM&F foi igual a 95.857,10, o investidor deverá receber da bolsa no dia seguinte o valor

$$AD_t = \left\{ PA_t - \left[ PA_{t-1} \cdot \left( 1 + \frac{DI_{t-1}}{100} \right)^{\frac{1}{252}} \right] \right\} \cdot M \cdot N = \left\{ 95.857,10 - \left[ 95.684,04 \cdot \left( 1 + \frac{20,84}{100} \right)^{\frac{1}{252}} \right] \right\} \cdot 1.10$$

ou seja,  $AD_t = R\$1.011,57$ .

No terceiro dia (22/10/2002), o investidor resolve liquidar sua posição, vendendo 10 contratos de DI1 com o mesmo vencimento por 95.920 (23,39%a.a.). No final do dia, deverá receber o ajuste referente ao carregamento da operação mais o ajuste relativo à liquidação da posição (que portanto aparece com sinal negativo), ou seja:

$$AD_t = \left\{ PA_t - \left[ PA_{t-1} \cdot \left( 1 + \frac{DI_{t-1}}{100} \right)^{\frac{1}{252}} \right] \right\} \cdot M \cdot N - (PA_t - PO) \cdot M \cdot N$$

$$AD_t = \left\{ PO - \left[ PA_{t-1} \cdot \left( 1 + \frac{DI_{t-1}}{100} \right)^{\frac{1}{252}} \right] \right\} \cdot M \cdot N$$

Se a taxa DI do dia anterior foi de 20,84%a.a., o investidor deverá receber da bolsa

$$AD_t = \left\{ 95.920 - \left[ 95.857,10 \cdot \left( 1 + \frac{20,74}{100} \right)^{\frac{1}{252}} \right] \right\} \cdot 1.10 = -8,82$$

ou seja, pagará R\$8,82.

Suponha que um investidor compre contratos futuros e os carregue até o vencimento, aplicando os ajustes diários que recebe em CDI de 1 dia. Ao final do período, sua posição será igual à soma dos ajustes recebidos (ou pagos) em cada dia remunerados à taxa do CDI. Sendo  $t=0$  o dia do início da operação,  $t=n$  o dia do vencimento,  $n$  o número de dias úteis entre as duas datas, e  $r_k$  a taxa média do CDI no dia  $k$ , e lembrando que no vencimento o valor de ajuste do contrato é 100.000, o valor final da posição do investidor será:

$$VF = \sum_{t=0}^n AD_t \prod_{k=t+1}^n (1+r_k) = AD_0 \prod_{k=1}^n (1+r_k) + \sum_{t=1}^{n-1} AD_t \prod_{k=t+1}^n (1+r_k) + AD_n$$

$$VF = (PA_0 - PO) \prod_{k=1}^n (1+r_k) + \sum_{t=1}^{n-1} (PA_t - PA_{t-1} (1+r_t)) \prod_{k=t+1}^n (1+r_k) + (100.000 - PA_{n-1} (1+r_n))$$

$$VF = 100.000 - PO \cdot \prod_{k=1}^n (1+r_k) + \sum_{t=0}^{n-1} PA_t \prod_{k=t+1}^n (1+r_k) - \sum_{t=1}^n PA_{t-1} \prod_{k=t-1}^n (1+r_k)$$

$$VF = 100.000 - PO \cdot \prod_{k=1}^n (1+r_k)$$

$$VF = PO \cdot \left[ \frac{100.000}{PO} - \prod_{k=1}^n (1+r_k) \right]$$

Tal posição é equivalente à de um *swap* DI x Pré, no qual o investidor recebe uma taxa pré-fixada ( $100.000/PO$ ) e paga o CDI sobre o valor nominal  $PO$ . Assim, o contrato futuro de DI possui o mesmo propósito básico que um *swap*, com a diferença de ser negociado em bolsa, ter características padronizadas de prazo e montante, exigir ajustes diários de posição e depósito de margens de garantia.

Os contratos futuros têm a grande desvantagem de terem as datas de vencimento fixadas pela Bolsa, no primeiro dia útil de cada mês, o que geralmente não estará de acordo com as necessidades de gestão financeira da maioria das empresas. Outro problema é a necessidade de liquidez para cobrir os ajustes diários de posições, o que torna difícil a administração deste tipo de contrato por empresas. Assim, dada a maior flexibilidade dos contratos de *swap*, as empresas não-financeiras costumam utilizar este tipo de instrumento ao invés dos contratos futuros, os quais, por sua vez, são mais utilizados por instituições financeiras, que são mais capacitadas a administrar este tipo de instrumento.

De qualquer forma, tanto os swaps quanto os contratos futuros são de grande importância por indicarem nas suas cotações as expectativas dos agentes financeiros com relação ao comportamento das taxas de juros, e podem também ser usados para construir a curva de juros do mercado.

#### 2.3.4 OPÇÕES

Uma opção é outro tipo de derivativo, ou seja, ativo cujo preço depende diretamente do preço de outro ativo. Segundo Hull (1999, p.6), uma opção é um contrato financeiro que dá a seu detentor o direito de comprar ou vender para outro investidor, numa determinada data futura e por um preço pré-acordado, um certo ativo.

Por exemplo, na Bolsa de Valores de São Paulo são negociadas opções sobre ações da Petrobrás. No dia 18/10/2002, a opção PETRL36 era uma opção de compra que dava direito a seu detentor, até o dia 16/12/2002, de comprar por R\$36,00 uma ação Petrobrás PN. Se a ação estiver cotada abaixo de R\$36,00, é evidente que o dono da opção não desejará exercê-la, uma vez que pode comprar a ação por preço mais barato no mercado. Por outro lado, se a ação estiver acima de R\$36,00, por exemplo R\$40,00, o investidor pode optar por exercer a opção, comprando a ação por R\$36,00, vendendo-a no mercado a R\$40,00 e embolsando a diferença, ou pode optar por não exercê-la, esperando que as cotações subam ainda mais. Assim, se no dia de vencimento da opção a ação estiver abaixo de R\$36,00, a opção não vale nada, ao passo que se a ação valer mais do que R\$36,00, a opção vale a diferença entre o preço de mercado e R\$36,00.

De maneira geral, representando por  $S$  o valor da ação,  $c$  o valor do prêmio da opção e  $K$  o seu preço de exercício (que é o preço pelo qual a opção permite que se compre a ação), a relação entre o valor da opção e o valor da ação na data de vencimento da opção é dada por:

$$c = \max\{0, S - K\}$$

Se este é o valor da posição do detentor da opção, o investidor que a vendeu está em posição inversa: é obrigado a vender a ação pelo preço de exercício da opção para o detentor desta, caso este a exerça. Assim, está exatamente na posição oposta, sendo sua perda igual ao ganho do dono da opção.

Para aceitar correr o risco de prejuízo, o investidor que vende a opção cobra um valor que considera condizente com o risco que corre, sendo este preço chamado *prêmio* da opção. A determinação do preço racional deste prêmio não é um processo trivial, e em seu trabalho clássico, Black e Scholes (1973) determinaram o preço justo de uma opção de compra européia de ações, que é dado pela fórmula:

$$c = S.N(d_1) - K.e^{-r}.N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S.e^{rt}}{K}\right) + \frac{t.\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

onde  $c$  é o prêmio da opção,

$S$  o preço da ação,

$K$  o preço de exercício,

$r$  a taxa de juros livre de risco em capitalização contínua,

$t$  o prazo até o vencimento da opção,  $\sigma$  o desvio-padrão dos retornos da ação, e

$N(.)$  a função de distribuição normal padronizada acumulada.

Pode-se ver que a fórmula do prêmio de uma opção não é trivial, e dependendo do ativo objeto da opção, pode não existir fórmula analítica para determinação do preço, devendo-se lançar mão de métodos numéricos.

O prêmio de uma opção depende tanto das características do ativo subjacente quanto da própria opção. Uma característica importante da opção é o momento em que ela pode ser exercida. Uma opção européia permite que seu detentor a exerça apenas na data de seu vencimento. Já uma opção americana pode ser exercida em qualquer instante desde o seu lançamento até o seu vencimento. Após o vencimento, qualquer opção deixa de poder ser exercida e portanto perde seu valor.

### 2.3.5 OPÇÃO DE COMPRA SOBRE IDI

O IDI é um indicador financeiro que representa a remuneração acumulada do DI de 1 dia ao longo do tempo. Segundo definição dada no contrato de opção de compra de IDI da Bolsa de Mercadorias e Futuros (1997):

“O Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia - IDI - é definido como o valor teórico de 100.000,00 pontos em 2 de janeiro de 1997 que, nessa data, passou a ser

corrigido pela taxa média de Depósitos Interfinanceiros de um dia, calculada pela Central de Custódia e Liquidação Financeira de Títulos - Cetip, através da seguinte fórmula:

$$IDI_t = IDI_{t-1} \left( \frac{i_{t-1}}{100} + 1 \right)$$

onde  $IDI_t$  e  $IDI_{t-1}$  são respectivamente os valores do IDI nos dias  $t$  e  $t-1$ , e  $i_{t-1}$  é o valor da taxa média de Depósitos Interfinanceiros de um dia, referente ao dia anterior, calculada pela Central de Custódia e Liquidação Financeira de Títulos-Cetip, expressa em percentual ao dia (taxa efetiva dia), com até sete casas decimais.”

O IDI portanto é um indicador do rendimento em aplicação de DI de 1 dia. Assim, **comprar** IDI equivale a aplicar dinheiro no DI de um dia. Conforme Ofício Circular de 08/12/1999, a BM&F modificou o cálculo do IDI, que passou a ter o valor básico de 100.000 em 03/01/2000, sendo corrigido desde então segundo a mesma metodologia anterior. Em 18/10/2002 o valor do IDI segundo a BM&F era 157.478,31.

Uma opção de compra de IDI é um contrato que permite a seu detentor receber numa determinada data futura (os vencimentos são no primeiro dia útil de cada mês) a diferença entre o valor do índice IDI e o preço de exercício da opção, caso esta diferença seja positiva. Ou seja, no vencimento, recebe-se por contrato:

$$VL = \max\{0, IDI_V - PE\}$$

onde  $VL$  é o valor da opção na data de vencimento,

$IDI_V$  é o valor do IDI na data de vencimento, e

$PE$  é o preço de exercício da opção.

A opção de compra de IDI é européia, podendo ser exercida apenas na data de seu vencimento.

Este tipo de contrato permite que o investidor se beneficie de um eventual aumento da remuneração do IDI acima de um certo patamar dado pelo preço de exercício  $PE$ , sem incorrer em perda caso o rendimento do DI caia.

Como exemplo, consideremos no dia 18/10/2002 a opção de compra de IDI com vencimento em 02/01/2003, com preço de exercício 164.000,00. Entre ambas as datas contam-se 51 dias úteis. Como no dia 18/10/02 o IDI estava em 157.478,31, este preço de exercício implica numa taxa de juros ao período de  $164.000,00/157.478,31 - 1 = 4,1413\%a.p.$ , ou uma taxa anualizada de:

$$i = \left( \frac{164.000,00}{157.478,31} \right)^{\frac{51}{252}} - 1 = 0,222022$$

ou seja, 22,20%a.a. Se a taxa DI efetiva neste período for maior, digamos 23%a.a., o valor do IDI no vencimento da opção será:

$$IDI_v = 157.478,31 \cdot (1 + 0,23)^{\frac{51}{252}} = 164.216,14$$

Como este valor está acima do preço de exercício da opção, o detentor desta receberá a diferença ou valor líquido (VL)

$$VL = IDI_v - PE = 164.216,14 - 164.000,00 = 216,14$$

Por outro lado, se a taxa DI média no período for de 21%a.a., o valor do IDI no vencimento será:

$$IDI_v = 157.478,31 \cdot (1 + 0,21)^{\frac{51}{252}} = 163.672,20$$

que é inferior ao preço de exercício. Neste caso, a opção não é exercida e vence sem valor algum.

Assim, a opção deste exemplo permite que seu detentor ganhe se a taxa de juros do DI superar os 22,20%a.a. implícitos no preço de exercício, mas não ganhe nem perca nada se o DI acumulado no período for inferior aos 22,20%a.a., a menos do valor do prêmio da opção pago na entrada do contrato.

O cálculo do valor do prêmio da opção sobre IDI dependerá do comportamento previsto para o valor deste índice, comportamento este que por sua vez dependerá do modelo adotado para a dinâmica das taxas de juros. Diferentes modelos para o comportamento da taxa de juros

poderão implicar em preços distintos para as opções sobre IDI, ou para quaisquer outros derivativos de taxas de juros.

## 2.4 ESTRUTURA TEMPORAL DE TAXAS DE JUROS

### 2.4.1 DEFINIÇÃO E REPRESENTAÇÃO

Segundo Van Horne (1994, p.91), a estrutura temporal de taxas de juros (ETTJ) ou curva de juros é a relação entre os valores das taxas internas de retorno das aplicações e seus respectivos prazos. Em outras palavras, é a função que relaciona taxas de juros com prazos de vencimento das aplicações em um determinado instante.

Ocorre no entanto que existem diversos tipos de aplicações de renda fixa com padrões bastante variados de desembolsos ao longo do tempo. Alguns títulos proporcionam pagamentos semestrais fixos (ou cupons) além de um valor principal pago na data de vencimento, outros pagam apenas um valor pré-determinado na data de seu vencimento. Estes últimos são denominado *zero-coupon bonds* (bônus sem cupom).

Desconsiderando o risco de inadimplência, é fácil mostrar que é possível reproduzir sinteticamente qualquer tipo de título pré-fixado (ou seja, com desembolsos futuros em reais previamente conhecidos) por uma carteira de *zero-coupon bonds*. De maneira geral, se um determinado título paga os valores de cupom  $C_1, C_2, \dots, C_N$  nas datas  $t_1, t_2, \dots, t_N$ , além do principal  $V_N$  na data  $t_N$ , se existirem *zero-coupon bonds* que vencem em cada uma destas datas pagando \$1,00 no seu vencimento, então é possível reproduzir exatamente o fluxo de pagamentos do título original compondo uma carteira com  $C_1$  *zero-coupon bonds* que vencem em  $t_1$ ,  $C_2$  *zero-coupon bonds* vencendo em  $t_2$ , e assim sucessivamente até  $C_N + V_N$  *zero-coupon bonds* que vencem na data  $t_N$ .

Além disso, sendo  $P$  o valor do título original e  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  os preços dos *zero-coupon bonds*, num mercado onde não existam oportunidades de arbitragem, o valor do título original deve ser igual ao valor da carteira de *zero-coupon bonds* que o reproduz. Caso isso não ocorresse, um investidor poderia auferir ganhos sem risco negociando o título original e a carteira, comprando o mais barato e vendendo o mais caro na mesma quantidade. Como os



pagamentos futuros dos dois se cancelam, o investidor obteria um lucro igual a  $IP - C_1.Z_1 - C_2.Z_2 - \dots - (C_N+V_N).Z_N$  para cada título negociado. Assumindo que não existem oportunidades de arbitragem no mercado, deve valer:

$$P = C_1.Z_1 + C_2.Z_2 + \dots + (C_N+V_N).Z_N$$

Assim, o valor de qualquer título de renda fixa pode ser determinado a partir de valores de *zero-coupon bonds* que vencem nas datas de desembolso do título. Desta forma, basta conhecer os preços dos *zero-coupon bonds* para se poder precificar qualquer título de renda fixa. Por essa razão, é conveniente representar a ETTJ do mercado usando a taxa interna de retorno dos *zero-coupon bonds*. Adaptando a definição de Van Horne, de agora em diante a ETTJ será definida como a relação entre os valores das taxas internas de retorno dos *zero-coupon bonds* e seus respectivos prazos.

A ETTJ pode ser representada de duas maneiras, através de taxas à vista (*spot*) ou através de taxas a termo (*forward*).

Para um determinado prazo de vencimento, a taxa de juros à vista é simplesmente a taxa de uma operação com início hoje e conclusão na data do vencimento. Por exemplo, uma operação de empréstimo de R\$1000,00 com vencimento em 6 meses no valor de R\$1100,00 implica numa taxa de juros *spot* de 10% ao semestre, ou 21%a.a. Assim, construir uma ETTJ com base em taxas *spot* consiste simplesmente em enumerar os prazos e as taxas internas de juros dos *zero-coupon bonds* associados a estes prazos.

Por sua vez, as taxas a termo procuram representar, ao invés da remuneração média da operação, o rendimento proporcionado em cada período de tempo que compõe o prazo total da operação. Por exemplo, se num determinado instante as cotações à vista de mercado para empréstimos de um e dois anos são respectivamente 20%a.a. e 25%a.a., a taxa a termo do segundo ano seria aquela que, aplicada ao montante final resultante de uma aplicação de 1 ano, resultaria no mesmo valor final produzido pela taxa à vista de 2 anos.

Usando os valores acima, R\$1000,00 aplicados em 1 e 2 anos resultam respectivamente em R\$1200,00 e R\$1562,50 ( $R\$ 1000,00 \times 1,25^2$ ). A taxa a termo do segundo ano  $i_{12}$  seria aquela cuja remuneração, aplicada sobre o resultado de uma aplicação de 1 ano, produz o mesmo resultado que a operação de 2 anos. Em termos numéricos:

$$R\$1000,00 \times 1,20 \times (1 + i_{t2}) = R\$1000,00 \times 1,25^2$$

Ou seja, 
$$(1 + i_{t2}) = \frac{1,25^2}{1,20} = 1,3021$$

Assim, a taxa a termo do segundo ano associada às taxas à vista dadas é 30,21%a.a.

De maneira geral, se as taxas à vista são cotadas em porcentagem ao período  $T$  e os prazos expressos na forma  $n.T$ , representando a taxa à vista referente ao período  $n.T$  por  $i_n$ , a taxa a termo relativa ao período entre  $(m-1).T$  e  $m.T$  por  $i_m$ , a relação entre as taxas a termo e à vista é dada por:

$$(1 + i_n)^n = (1 + i_{t1})(1 + i_{t2})(1 + i_{t3}) \dots (1 + i_m)$$

Assim, a taxa a termo correspondente ao período entre  $(n-1).T$  e  $n.T$  é dada por:

$$(1 + i_m) = \frac{(1 + i_n)^n}{(1 + i_{n-1})^{n-1}}$$

As taxas a termo possuem este nome por representarem a taxa pela qual é possível acertar antecipadamente um empréstimo a ser efetivado apenas em uma data futura. Tal operação pode ser construída sinteticamente a partir de empréstimos e aplicações feitos previamente. Por exemplo, usando as taxas do exemplo anterior, é possível fazer um empréstimo de R\$1.000,00 a serem recebidos daqui a um ano e quitados no final do segundo ano. Para tanto, aplicam-se 1.000/1,20 reais a 20%a.a. por um ano e toma-se o mesmo valor emprestado para se pagar em dois anos à taxa de 25%a.a.. Neste instante inicial, o fluxo de caixa líquido é zero. Ao final do primeiro ano, recebem-se os 1.000 reais referentes à aplicação de 1.000/1,20 reais a 20%. No final do segundo ano, deve-se pagar  $(1.000/1,20) \times 1,25^2$ , ou seja, R\$1.302,08. A taxa da operação é a taxa a termo  $(1,25^2/1,20 - 1)$  ou 30,21%.

A tabela e o gráfico seguintes exemplificam estes conceitos com dados referentes às taxas médias de swaps apuradas pela BM&F em 18/10/2002. Foi representada a ETTJ vigente naquele dia, usando taxas à vista e taxas a termo. No cômputo da taxa ao ano (%a.a.) considera-se um ano composto por 252 dias úteis.

Prazo (dias úteis)	20	41	61	83	101	123	142	163	183	205	227	247
Taxa à vista (%a.a.)	22.83	23.95	24.63	25.10	25.43	25.94	26.43	26.84	27.33	27.96	28.46	28.99
Taxa a termo (%a.a.)	22.83	25.03	26.04	26.41	26.96	28.31	29.65	29.65	31.39	33.32	33.21	35.16

Tabela 2.2 – Curvas de juros de swaps em 18/10/2002, nas formas à vista e a termo.

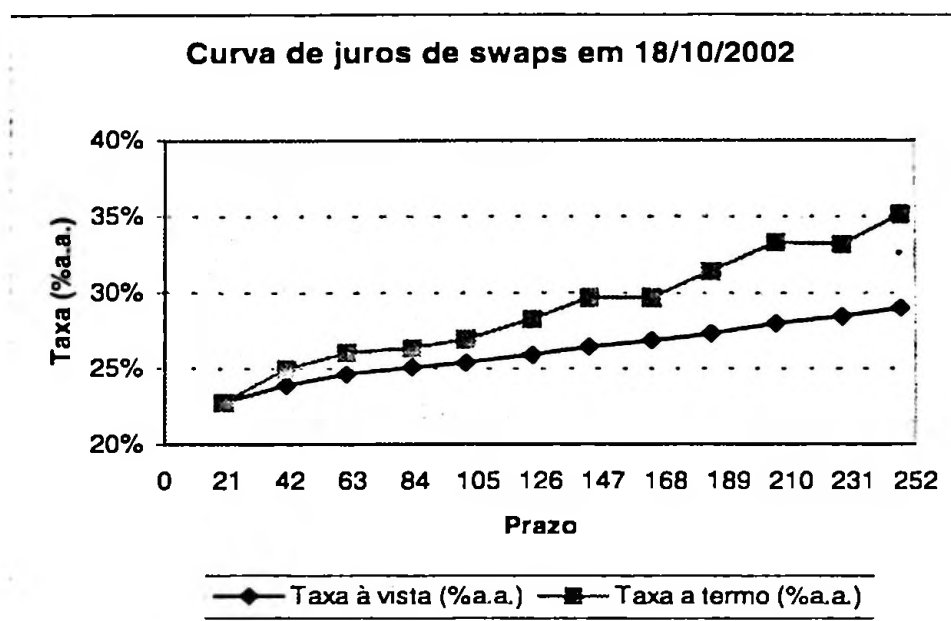


Figura 2.3 - Curvas de juros de swaps em 18/10/2002, nas formas à vista e a termo.

Na ETTJ acima foram determinadas as taxas para todos os prazos mensais de até 1 ano. Entretanto, apenas para alguns destes prazos, denominados vértices, existe um número suficiente de operações que tornam tais cotações representativas das expectativas dos agentes do mercado. Para os demais prazos, as cotações costumam ser obtidas por interpolação. Para *swaps*, os vértices costumam ser os prazos de 1, 2, 3, 4, 6, 12 e 24 meses.

Assim, um modelo que procure representar a ETTJ deverá tentar explicar o comportamento de tantas variáveis quantos forem os prazos disponíveis na ETTJ, ou pelo menos quantos vértices esta possuir. Entretanto, estas taxas costumam estar bastante correlacionadas entre si, podendo ser explicadas por um número bem menor de fatores. Estudos utilizando análise fatorial indicam que com até 3 fatores é possível explicar mais de 90% da variabilidade destes dados. Varga e Valli (2001), utilizando análise por componentes principais, analisaram a ETTJ implícita nas cotações de swaps fornecidas pela BM&F relativas ao período de 02/01/1995 a 06/07/1999 e concluíram que modelos de 1, 2 e 3 componentes principais conseguiam explicar respectivamente 80,6%, 90,7% e 94,3% da variabilidade dos

movimentos da ETTJ. Assim, modelos estocásticos com 3, 2 ou até 1 fator costumam ser suficientes para representar a dinâmica da ETTJ.

#### 2.4.2 TEORIAS PARA A ESTRUTURA TEMPORAL DE TAXAS DE JUROS

As curvas de juros costumam variar ao longo do tempo, assumindo três formatos típicos: inclinação crescente, inclinação decrescente ou inclinação nula. Cada um destes formatos reflete as condições do mercado em determinado instante, conforme as necessidades e expectativas dos agentes financeiros. Existem várias teorias que procuram explicar este comportamento. Fabozzi (1998, p.51) identifica duas teorias principais: a teoria das expectativas e a teoria da segmentação de mercado. Identifica também algumas variantes para a teoria das expectativas, que são a teoria das expectativas pura, a teoria da preferência pela liquidez e a teoria do *habitat* preferido. O diagrama seguinte, adaptado de Fabozzi (1998, p.53), representa a relação entre as teorias.

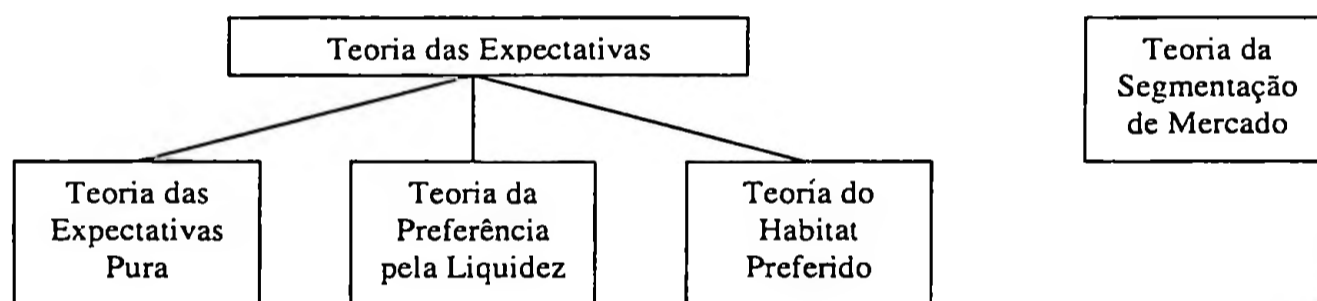


Figura 2.4 - Teorias para a estrutura temporal de taxas de juros

De maneira geral, as teorias das expectativas assumem que as taxas a termo estão fortemente relacionadas com as expectativas do mercado para as taxas de curto prazo no futuro.

##### a) TEORIA DAS EXPECTATIVAS PURA

A Teoria das Expectativas Pura afirma que as taxas a termo representam exclusivamente as expectativas para as taxas futuras. Assim, por exemplo, se no início de um dado mês a taxa a termo para o mês seguinte é de 20%a.a., segundo esta teoria o mercado espera que, no início do mês seguinte, a taxa para aplicação pelo prazo de um mês será 20%a.a. A Teoria das Expectativas Pura sugere portanto que o retorno de uma aplicação de longo prazo (por exemplo 5 anos) é igual ao retorno esperado de aplicações de curto prazo renovadas sucessivamente (por exemplo, aplicações de 3 meses renovadas sucessivamente até completar

os 5 anos). Tal raciocínio implica que um investidor com um determinado horizonte de investimento seria indiferente entre aplicar em títulos de curto prazo e renovar a aplicação até aquele horizonte, aplicar em títulos com prazo igual ao seu horizonte de investimento, ou aplicar em títulos com prazos maiores que seu horizonte e vendê-los ao final deste, uma vez que o retorno esperado de qualquer estratégia seria o mesmo.

Desta forma, uma curva de juros com taxas crescentes indicaria que o mercado espera que as taxas de curto prazo aumentarão ao longo do tempo; uma curva com taxas decrescentes indicaria a expectativa de que as taxas de juros de curto prazo cairão; e uma curva horizontal indicaria expectativa de taxas de curto prazo constantes no tempo. Resta agora saber o que faz com que o mercado espere que as taxas de juros subam ou caiam. Segundo Burton (2000, p.151), as taxas de juros de curto prazo esperadas ( $i_s^e$ ) seriam função das expectativas quanto ao comportamento futuro do PIB ( $Y^e$ ), da oferta monetária ( $M^e$ ) e da inflação ( $p^e$ ):

$$i_s^e = f(Y^e, M^e, p^e)$$

sendo que o aumento do PIB e da inflação contribuiriam para o aumento das taxas de juros, enquanto que o aumento esperado da oferta monetária provocariam sua diminuição.

A Teoria da Expectativas Pura apresenta entretanto algumas falhas. Na maior parte do tempo, a inclinação da curva de juros tem sido positiva, o que indicaria que o mercado vem sistematicamente esperando que as taxas de juros de curto prazo subam, implicação esta difícil de ser aceita. Além disso, a teoria prevê que os investidores sejam indiferentes entre títulos de curto e longo prazo, embora a experiência sugira que a maioria dos aplicadores tenham preferência por ativos de curto prazo e a maioria dos tomadores de recursos desejem empréstimos de longo prazo. A explicação para estes problemas é que a Teoria das Expectativas Pura não leva em consideração a existência de incerteza sobre o valor das taxas de juros de curto prazo futuras, ou seja, desconsidera o risco, ao qual os investidores de maneira geral são avessos. Duas variantes da Teoria das Expectativas foram sugeridas: a Teoria da Preferência por Liquidez e a Teoria do Habitat Preferido.

#### b) TEORIA DA PREFERÊNCIA POR LIQUIDEZ

O fato de as taxas de juros futuras serem incertas faz com que títulos de prazos mais longos apresentem maiores variações nos seus valores. Considerando um investidor que pretende

fazer um investimento por  $N$  meses. Se comprar um *zero-coupon bond* de  $N$  meses, obterá ao final do período uma taxa de retorno certa para seu investimento. Se ao invés disso comprar um *zero-coupon bond* de  $N+T$  meses, para ser vendido ao final dos  $N$  meses, incorrerá em um certo nível de risco. Sendo  $i_{N+T}$  a taxa mensal do zero-coupon bond de prazo  $N+T$  meses no instante inicial e  $i_T$  a taxa mensal do zero-coupon bond de prazo  $T$  meses após o período de  $N$  meses, o retorno efetivo do investidor será dado por:

$$r = \frac{(1 + i_{N+T})^{N+T}}{(1 + i_T)^T} - 1$$

Sendo o valor de  $i_T$  incerto, também será incerto o valor do retorno efetivo  $r$ . Essa incerteza será tanto maior quanto maior for o valor de  $T$ , ou seja, quanto mais longo for o prazo de vencimento do título. Num ambiente onde os investidores têm aversão ao risco, deverá ser dada preferência maior para os títulos de prazos mais curtos.

A Teoria de Preferência pela Liquidez afirma que os investidores apenas aceitariam o risco maior dos títulos de longo prazo se recebessem por estes uma taxa de retorno acima da taxa futura esperada, sendo a diferença entre a taxa do título e a taxa esperada o prêmio de liquidez. Este prêmio seria tanto maior quanto mais longo fosse o prazo de vencimento do título.

A Teoria de Preferência pela Liquidez ajuda a explicar por que as curvas de juros tendem a apresentar inclinação positiva. Parte desta inclinação seria explicada pelos prêmios de liquidez crescentes com os prazos de aplicação.

### c) TEORIA DO HABITAT PREFERIDO

A Teoria do Habitat Preferido parte do pressuposto que cada investidor ou tomador de recursos possui uma preferência própria no que diz respeito ao prazo das aplicações. Gestores de fundos de curto prazo tendem a dar preferência por títulos de curto prazo, ao passo que gestores de fundos de previdência desejam adquirir ativos com prazos mais longos. Isso ocorre porque os primeiros possuem passivos de curto prazo (os cotistas podem querer sacar seus recursos a qualquer momento) enquanto os segundos possuem passivos de longo prazo (pagarão os benefícios dos pensionistas num futuro mais distante). Assim, cada perfil de investidor possui seu nicho na ETTJ, ou seu *habitat*, tanto aplicadores como tomadores de

recursos. Entretanto, nada garante que o perfil dos tomadores seja idêntico ao dos aplicadores. Pelo contrário, os tomadores de recursos tendem a dar preferência pelos empréstimos de longo prazo, enquanto os aplicadores de recursos geralmente desejam retornos em prazos mais curtos. Tal descasamento de preferências faz com que alguns dos investidores mudem de sua estratégia inicial se receberem alguma compensação por isso. Tomadores de empréstimos de longo prazo podem aceitar assumir parte de suas dívidas em curto prazo se as taxas forem suficientemente pequenas. Da mesma forma, investidores que aplicam em curto prazo podem alocar parte de seus recursos em títulos de longo prazo se a remuneração for suficientemente atrativa. Assim, havendo um excesso de oferta de recursos no curto prazo e um excesso de demanda para empréstimos de prazo longo, é de se esperar que no equilíbrio as taxas de juros de curto prazo sejam menores e as taxas de longo prazo maiores, o que explicaria a tendência da curva de juros apresentar inclinação crescente.

Estes investidores ainda consideram as expectativas sobre os valores futuros das taxas de juros, mas levam em conta também suas preferências de alocação temporal de recursos.

#### d) TEORIA DA SEGMENTAÇÃO DE MERCADO

É semelhante à Teoria do Habitat Preferido, supondo que cada tipo de investidor tem um perfil de alocação temporal de recursos, e que a curva de juros resulta do equilíbrio da oferta e demanda de recursos para cada prazo. Entretanto, a Teoria da Segmentação de Mercado difere da Teoria do Habitat Preferido por considerar que nem os aplicadores, nem os tomadores de recursos estão dispostos a mudar seu padrão temporal de alocação de recursos para aproveitar oportunidades de ganho resultantes das diferenças entre as taxas de juros esperadas e as taxas a termo. A cada prazo de investimento corresponderia um mercado estanque de taxas de juros, com pouca influência dos demais. Assim, a Teoria de Segmentação de Mercado não é uma teoria de expectativas, uma vez que as taxas de juros a termo não seria resultado das expectativas dos agentes financeiros, mas sim do equilíbrio entre oferta e demanda de empréstimos para cada um dos prazos independentemente.

Em certo sentido, a Teoria de Segmentação de Mercado é uma restrição da Teoria do Habitat Preferido (ou, de outra forma, a última é uma extensão da primeira).

### 3 PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS CONTINGENTES

Neste capítulo serão introduzidos conceitos e definições matemáticas necessárias para a precificação de derivativos segundo o enfoque de Harrison e Pliska (1981). Na primeira seção serão descritos conceitos gerais relacionados a processo estocásticos, na segunda seção são introduzidas algumas noções de cálculo estocástico, incluindo a definição de movimento browniano, e na terceira seção é descrita a metodologia de precificação de derivativos.

#### 3.1 ELEMENTOS DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Nesta seção serão introduzidos os conceitos associados a espaços de probabilidade, variável aleatória, processo estocástico, filtração, probabilidade e esperança condicionais, e martingais, conceitos estes necessários para se compreender processos estocásticos e para o desenvolvimento posterior do cálculo estocástico. Descrições mais rigorosas e detalhadas podem ser encontradas em Billingsley (1995), Ross (1996) e Klebaner (1998).

Para introduzir os conceitos gerais associados a processos estocásticos será utilizado um exemplo simples de apostas com moedas que será utilizado para ilustrar cada um dos conceitos à medida que são apresentados.

##### 3.1.1 ESPAÇO DE PROBABILIDADE

Considere uma situação na qual um apostador joga uma moeda três vezes seguidas, nos instantes  $t=1$ ,  $t=2$  e  $t=3$ , sendo que, em cada jogada, o apostador ganha \$1 se o resultado for cara e perde \$1 se o resultado for coroa.

O **espaço amostral** do experimento é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento. Representando por  $\Omega$  o espaço amostral, no exemplo dado tem-se:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (+1,-1,-1), \\ (-1,+1,+1), (-1,+1,-1), (-1,-1,+1), (-1,-1,-1) \end{array} \right\}$$

onde cada elemento é representado por uma tripla  $(a_1, a_2, a_3)$ , em que cada  $a_i$  é o resultado da aposta na jogada feita no instante  $t=i$ . É fácil verificar que todos os resultados possíveis dos três lançamentos foram elencados. Este é um espaço amostral finito, ou seja, com um número limitado de elementos. Entretanto, em outras situações pode-se ter um espaço amostral



infinito enumerável (ex:  $\Omega$ =números naturais) ou mesmo um espaço amostral infinito não-enumerável (ex:  $\Omega$ =[0,1]). Um conjunto é enumerável quando é possível estabelecer uma relação biunívoca entre cada um de seus elementos e os elementos do conjunto dos números naturais. Um conjunto é não-enumerável quando tal procedimento não é possível, como, por exemplo, o conjunto [0,1] na reta real .

De maneira geral, um **evento** é um subconjunto do espaço amostral. Por exemplo, o evento no qual o jogador termina o jogo com lucro é dado pelo subconjunto do espaço amostral  $\Omega$ :

$$A = \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (-1,+1,+1)\}$$

O evento no qual o jogador ganha a segunda jogada é dado por:

$$B = \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (-1,+1,+1), (-1,+1,-1)\}$$

No exemplo do jogador, onde o espaço amostral é finito ( $n$ =número de elemento=8), o número de possíveis subconjuntos do espaço amostral também é finito, dado por  $2^n$ . No entanto, para espaços amostrais mais complexos (por exemplo  $\Omega$ =[0,1]), a quantidade de subconjuntos do espaço amostral é não enumerável e muito grande, o que pode tornar o seu uso para fins de análise probabilística bastante complicado. Assim, os subconjuntos para os quais se poderá atribuir uma probabilidade – os eventos – devem pertencer a alguma classe  $\mathcal{F}$  de subconjuntos do espaço amostral  $\Omega$  que satisfaça às seguintes propriedades:

- (i)  $\Omega \in \mathcal{F}$ ,
- (ii) Se  $A \in \mathcal{F}$ , então  $A^c \in \mathcal{F}$  ( $A^c$  é o complemento de  $A$ ),
- (iii) Se  $A_i \in \mathcal{F}$ ,  $i=1,2,3,\dots$  então  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{F}$ .

Ou seja,  $\mathcal{F}$  é uma classe de subconjuntos de  $\Omega$  fechada quanto a complemento e união enumerável (uma classe é fechada com relação a algum tipo de operação se, quando a operação é aplicada a elementos da classe, o resultado é outro elemento também pertencente à classe). Uma classe de subconjuntos de  $\Omega$  que satisfaz às três propriedades acima é denominada uma  $\sigma$ -álgebra (sigma-álgebra). Assim, a rigor, definida uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ , um **evento é qualquer conjunto pertencente a  $\mathcal{F}$ .**

Desta forma, usando o exemplo do jogador, uma possível  $\sigma$ -álgebra seria:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$$

conhecida como  $\sigma$ -álgebra trivial, que é a menor  $\sigma$ -álgebra que pode ser construída.

Outro exemplo de  $\sigma$ -álgebra seria:

$$\mathcal{F} = \left\{ \emptyset, \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (+1,-1,-1)\}, \{(-1,+1,+1), (-1,+1,-1), (-1,-1,+1), (-1,-1,-1)\}, \Omega \right\}$$

Mais um outro exemplo de  $\sigma$ -álgebra seria a classe que contém todos os subconjuntos de  $\Omega$ . Tal classe é denominada conjunto das partes de  $\Omega$ , é representada por  $2^\Omega$  e é a maior  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$ .

É possível provar que uma  $\sigma$ -álgebra é fechada também com relação às operações de interseção enumerável e diferença, ou seja:

- Se  $A_i \in \mathcal{F}$ ,  $i=1, 2, \dots$ , então  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \in \mathcal{F}$ .
- Se  $A, B \in \mathcal{F}$ , então  $A - B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$ .

Um conceito importante é o de  $\sigma$ -álgebra gerada por uma classe de conjuntos. Seja  $\mathcal{C}$  uma classe de subconjuntos do espaço amostral  $\Omega$ . A  $\sigma$ -álgebra  $\sigma(\mathcal{C})$  gerada por  $\mathcal{C}$  é a  $\sigma$ -álgebra que satisfaz às propriedades:

- (i)  $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$ ;
- (ii) Se  $\mathcal{B}$  é outra  $\sigma$ -álgebra contendo  $\mathcal{C}$ , então  $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$ .

Assim,  $\sigma(\mathcal{C})$  é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém a classe  $\mathcal{C}$ .

Um exemplo importante de  $\sigma$ -álgebra é a  $\sigma$ -álgebra de Borel, que é uma  $\sigma$ -álgebra gerada sobre os números da reta real. Por exemplo, se tomarmos apenas o intervalo  $\Omega = [0,1]$  da reta real, podemos definir a classe formada pelos intervalos contidos em  $\Omega$  por:

$$\mathcal{C} = \{[a,b], 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

A  $\sigma$ -álgebra de Borel em  $[0,1]$  é dada por  $\mathcal{B}([0,1]) := \sigma(\mathcal{C})$ , ou seja, é a  $\sigma$ -álgebra gerada pela classe formada pelos intervalos contidos em  $\Omega$ ; os conjuntos que dela fazem parte são denominados borelianos. Nela estão contidos, por exemplo, todos os intervalos abertos e fechados contidos em  $[0,1]$ , todas as uniões e interseções enumeráveis destes conjuntos, bem como todos os conjuntos unitários do tipo  $\{x\}$ , onde  $x$  é um número pertencente a  $[0,1]$ . A  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre toda a reta real, representada por  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , é a  $\sigma$ -álgebra gerada pela classe de conjuntos da forma:

$$\mathcal{C} = \{(a,b], -\infty < a \leq b < \infty\}$$

A uma dupla  $(\Omega, \mathcal{F})$ , composta pelo espaço amostral  $\Omega$  e pela  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  dá-se o nome de **espaço mensurável**.

Uma função de conjunto é qualquer função real definida sobre alguma classe de subconjuntos de  $\Omega$ . Uma função de conjunto  $P$  definida numa  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  é uma **medida de probabilidade** (ou simplesmente probabilidade) se satisfaz às seguintes condições:

- (i)  $0 \leq P(A) \leq 1$ , para  $A \in \mathcal{F}$ ,
- (ii)  $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$ ,
- (iii) Se  $A_1, A_2, \dots$  é uma sequência disjunta de conjuntos de  $\mathcal{F}$ , então

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

No exemplo do jogador, se a moeda é honesta, cada uma das faces tem a mesma chance de cair. Neste caso, cada um dos elementos de  $\Omega$  constituiria um evento unitário com probabilidade  $1/8$ , e a medida de probabilidade seria uma função  $P$  do evento  $A$  tal que:

$$P(A) = (1/8) \cdot \#(A)$$

onde o operador cardinalidade  $\#(\cdot)$  retorna o número de elementos do subconjunto  $A$  de  $\Omega$ .

Se as duas faces da moeda forem “cara”, então o evento  $[(+1,+1,+1)]$  possui probabilidade 1, e a medida de probabilidade  $P$  seria:

$$P(A) = \begin{cases} 0; & \text{se } (+1,+1,+1) \notin A \\ 1; & \text{se } (+1,+1,+1) \in A \end{cases}$$

Se  $\Omega$  é um espaço amostral,  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$ , e  $P$  é uma medida de probabilidade em  $\mathcal{F}$ , então a tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  é chamada **espaço de probabilidade**.

### 3.1.2 VARIÁVEL ALEATÓRIA

Para introduzir o conceito geral de variável aleatória, será necessário definir primeiramente uma variável aleatória simples. Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade, e  $X$  uma função de conjunto em  $\Omega \mapsto \mathbb{R}$ .  $X$  é uma **variável aleatória simples** se possui conjunto imagem finito (assume apenas uma quantidade finita de valores) e se, para qualquer  $x$  real,

$$[\omega: X(\omega) = x] \in \mathcal{F}$$

Neste caso, diz-se que  $X$  é  $\mathcal{F}$ -**mensurável**. Se  $X$  satisfaz ou não esta condição depende apenas de  $\mathcal{F}$ , e não de  $P$ , mas o propósito da definição é garantir que as probabilidades  $P[\omega: X(\omega) = x]$  são definidas, uma vez que a função  $P$  é definida para todo conjunto de  $\mathcal{F}$ .

Por exemplo, definindo a função de conjunto  $S_3$  como a soma dos resultados das apostas até a terceira jogada, temos que:

$$[\omega: S_3(\omega) = 3] = \{(+1,+1,+1)\}$$

$$[\omega: S_3(\omega) = 1] = \{(+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (-1,+1,+1)\}$$

$$[\omega: S_3(\omega) = -1] = \{(+1,-1,-1), (-1,+1,-1), (-1,-1,+1)\}$$

$$[\omega: S_3(\omega) = -3] = \{(-1,-1,-1)\}$$

$$[\omega: S_3(\omega) = a] = \emptyset, \text{ para } a \text{ diferente de } 3, 1, -1 \text{ e } -3.$$

Seja a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_1$  dada por:

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ \emptyset, \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (+1,-1,-1)\}, \{(-1,+1,+1), (-1,+1,-1), (-1,-1,+1), (-1,-1,-1)\}, \Omega \right\}$$

Como os conjuntos  $[\omega: S_3(\omega) = s]$ ,  $s = 3, 1, -1, -3$  não pertencem a  $\mathcal{F}_1$ , então  $S_3$  não é  $\mathcal{F}_1$ -mensurável e portanto não pode ser uma variável aleatória num espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}_1, P)$ . De fato, como a probabilidade  $P$  só estará definida para conjuntos de  $\mathcal{F}_1$ , então não seria possível atribuir probabilidade aos conjuntos  $[\omega: S_3(\omega) = s]$ .

Se definirmos uma outra  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_2$ , gerada a partir da classe de conjuntos  $[\omega: S_3(\omega) = s]$ , com  $s \in \mathbb{R}$ , então  $\mathcal{F}_2$  é dada por:

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \\ \{(+1, +1, +1)\} \\ \{(+1, +1, -1), (+1, -1, +1), (-1, +1, +1)\}, \\ \{(+1, -1, -1), (-1, +1, -1), (-1, -1, +1)\}, \\ \{(-1, -1, -1)\}, \\ \{(+1, +1, +1), (+1, +1, -1), (+1, -1, +1), (-1, +1, +1)\}, \\ \{(+1, +1, +1), (+1, -1, -1), (-1, +1, -1), (-1, -1, +1)\}, \\ \{(+1, +1, +1), (-1, -1, -1)\}, \\ \{(+1, +1, -1), (+1, -1, +1), (-1, +1, +1), (+1, -1, -1), (-1, +1, -1), (-1, -1, +1)\}, \\ \{(+1, +1, -1), (+1, -1, +1), (-1, +1, +1), (-1, -1, -1)\}, \\ \{(+1, -1, -1), (-1, +1, -1), (-1, -1, +1), (-1, -1, -1)\}, \\ \{(+1, +1, +1), (+1, +1, -1), (+1, -1, +1), (-1, +1, +1), (+1, -1, -1), (-1, +1, -1), (-1, -1, +1)\}, \\ \{(+1, +1, +1), (+1, +1, -1), (+1, -1, +1), (-1, +1, +1), (-1, -1, -1)\}, \\ \{(+1, +1, +1), (+1, -1, -1), (-1, +1, -1), (-1, -1, +1), (-1, -1, -1)\}, \\ \{(+1, +1, -1), (+1, -1, +1), (-1, +1, +1), (+1, -1, -1), (-1, +1, -1), (-1, -1, +1), (-1, -1, -1)\} \end{array} \right\}$$

Como todos conjuntos  $[\omega: S_3(\omega) = s]$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , estão contidos em  $\mathcal{F}_2$ , então  $S_3$  é  $\mathcal{F}_2$ -mensurável e portanto é uma variável aleatória num espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}_2, P)$ . Repare que  $\mathcal{F}_2$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos conjuntos  $[\omega: S_3(\omega) = s]$ . Este tipo de  $\sigma$ -álgebra é denominada  **$\sigma$ -álgebra gerada por uma variável aleatória**, no caso, a variável aleatória simples  $S_3$ , podendo ser representada por  $\sigma(S_3)$ . Esta é a menor  $\sigma$ -álgebra a partir da qual a variável aleatória é mensurável.

Definindo uma terceira  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_3$ , composta por todos os subconjuntos de  $\Omega$ , ou seja, por todas as  $2^8$  combinações dos 8 elementos de  $\Omega$ , então evidentemente os conjuntos  $[\omega: S_3(\omega) = s]$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , pertencerão a  $\mathcal{F}_3$ , e portanto  $S_3$  será  $\mathcal{F}_3$ -mensurável e conseqüentemente

uma variável aleatória num espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}_3, P)$ . Repare que os elementos de  $\sigma(S_3) = \mathcal{F}_2$  também são elementos de  $\mathcal{F}_3$ , ou seja,  $\sigma(S_3) \subset \mathcal{F}_3$ . De maneira geral, para qualquer  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  tal que uma variável aleatória  $X$  é  $\mathcal{F}$ -mensurável, vale  $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$ .

O conceito de variável aleatória discutido até aqui – as variáveis aleatórias simples – pode ser estendido para funções na forma  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , onde o conjunto imagem de  $X$  é um subconjunto qualquer de  $\mathbb{R}$ , finito ou infinito, enumerável ou não. Neste caso, dado um espaço mensurável  $(\Omega, \mathcal{F})$ , uma **variável aleatória**  $X$  é uma função mensurável de  $(\Omega, \mathcal{F})$  em  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , onde  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  é a  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre a reta real. Isto significa que, para todo conjunto boreliano  $B \in \mathcal{B}$ , o conjunto  $\{\omega: X(\omega) \in B\}$  é um membro de  $\mathcal{F}$ .

Assim, a princípio pareceria que, para verificar se uma função  $X$  é uma variável aleatória, seria necessário verificar se, para todo boreliano  $B$ , o conjunto  $\{\omega: X(\omega) \in B\}$  é um membro de  $\mathcal{F}$ . Entretanto, mostra-se que, se para todo  $x$  real os conjuntos na forma  $\{\omega: X(\omega) \leq x\}$  pertencem a  $\mathcal{F}$ , então todos os demais conjuntos  $\{\omega: X(\omega) \in B\}$ ,  $B$  boreliano, também pertencem a  $\mathcal{F}$ , e portanto  $X$  é mensurável e variável aleatória.

Desta forma, dado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e uma variável aleatória  $X$ , podemos definir a **função de distribuição de probabilidade** de  $X$  como sendo

$$F(x) = P[X \leq x] := P[\omega: X(\omega) \leq x]$$

No exemplo do jogador, temos um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , onde

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (+1,-1,-1), \\ (-1,+1,+1), (-1,+1,-1), (-1,-1,+1), (-1,-1,-1) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{F} = 2^\Omega \text{ (conjunto das partes de } \Omega \text{)}$$

$$P(A) = (1/8) \cdot \#(A) \text{ (medida de probabilidade equiprovável para todos os resultados)}$$

Definindo a variável aleatória  $S_3$  como a soma dos resultados das apostas após a terceira jogada, temos que a função de distribuição de probabilidade de  $S_3$  é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & \text{se } x < -3 \\ 1/8; & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ 1/2; & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 7/8; & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 1; & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

pois  $P[\omega: S_3(\omega) = 3] = P(\{(+1,+1,+1)\}) = 1/8$

$P[\omega: S_3(\omega) = 1] = P(\{(+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (-1,+1,+1)\}) = 3/8$

$P[\omega: S_3(\omega) = -1] = P(\{(+1,-1,-1), (-1,+1,-1), (-1,-1,+1)\}) = 3/8$

$P[\omega: S_3(\omega) = -3] = P(\{(-1,-1,-1)\}) = 1/8$

$P[\omega: S_3(\omega) = a] = P(\emptyset) = 0$ , para  $a$  diferente de 3, 1, -1 e -3

e  $F(x) = P[\omega: S_3(\omega) \leq x]$

Uma variável aleatória possui uma **distribuição discreta** se sua função de distribuição muda apenas em saltos. Isso equivale a dizer que existe um conjunto enumerável de eventos  $[X=x_i]:=[\omega: X(\omega) = x_i]$ , cada qual com probabilidade não nula e tais que a soma de suas probabilidades é igual a 1. Neste caso, a função de distribuição de  $X$  é dada por:

$$F(x) = \sum_i P(X = x_i)$$

Exemplos de distribuições discretas são as distribuições de Bernoulli, binomial, multinomial e de Poisson.

Uma variável aleatória  $X$  possui **distribuição contínua** se, para todo o  $x$  real, existe uma função  $f(s)$  tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s).ds$$

onde  $f(s)$  é chamada função densidade de probabilidade de  $X$ . Evidentemente, neste caso  $F(x)$  é uma função contínua e para quaisquer números reais  $a$  e  $b$ ,  $a \leq b$ , vale

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(s).ds$$

Exemplos de distribuições contínuas são as distribuições normal, exponencial, gama, uniforme, beta, e de Weibull.

Se  $X$  e  $Y$  são duas variáveis aleatórias num espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , então sua função de distribuição conjunta é definida como:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

A distribuição conjunta  $F(x,y)$  possui uma densidade  $f(x,y)$  se, para todo  $x$  e  $y$  reais

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v).dudv$$

e neste caso, a densidade é dada por  $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$ .

O **valor esperado** ou **esperança** de uma variável aleatória  $X$  com distribuição discreta é definido por:

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$$

Para uma variável aleatória  $X$  com distribuição contínua, o valor esperado é dado por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s).ds$$

De maneira geral, o valor esperado de uma variável aleatória  $X$  qualquer é dado pela integral de Stieltjes:

$$E[X] = \int_{\Omega} X(\omega).dP(\omega)$$

Entretanto, na maioria dos casos é possível decompor a variável aleatória em componentes discreta e contínua, para as quais se pode usar as respectivas fórmulas de esperança.



A função de distribuição condicional de  $X$  dado  $Y = y$  é definida como

$$P(X \leq x | Y = y) = \frac{P(X \leq x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

quando  $P(Y=y)>0$ . Se  $X$  e  $Y$  possuem densidade conjunta  $f(x,y)$ , então suas densidades

individuais são  $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y).dy$  e  $f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y).dx$ , e é possível definir a função

densidade de probabilidade de  $X$  dado  $Y=y$  como sendo

$$f(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_y(y)}$$

em todo ponto onde  $f_y(y)>0$ . Neste caso, define-se também a **esperança condicional de  $X$  dado  $Y=y$**  por

$$E(X | Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x | y).dx$$

No caso discreto, define-se a esperança condicional de  $X$  dado  $Y=y$  como

$$E(X | Y = y) = \sum x_i.P(x | Y = y)$$

onde  $P(x | Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$ .

### 3.1.3 PROCESSO ESTOCÁSTICO

Segundo Ross (1996, pg. 41), um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias associadas a algum indexador. Mais formalmente, um processo estocástico  $\mathbf{X}=\{X(t), t \in T\}$  é a coleção das variáveis aleatórias  $X(t)$ , cada qual possuindo uma distribuição de probabilidade própria e associada ao indexador  $t$  pertencente ao conjunto de indexadores  $T$ . Em geral, o indexador utilizado é o tempo; assim,  $X(t)$  é o estado do processo estocástico no instante  $t$ , e  $T$  compreende o intervalo de tempo para o qual se define o processo. Por exemplo, seja  $\mathbf{S}=\{S(t), t \in [0, \infty)\}$  o processo representativo dos preços de uma ação ao longo do tempo, a partir de

um instante inicial indicado por  $t=0$ . Temos então que  $T=[0,\infty)$  e  $S(t)$  é a variável aleatória que representa o preço da ação no instante  $t$ .

Um processo estocástico pode ocorrer no **tempo discreto** se o conjunto  $T$  de números reais é enumerável (por exemplo  $T=\{0,1,2,\dots\}$ ). O processo ocorre no **tempo contínuo** se  $T$  é um intervalo contínuo da reta (por exemplo,  $T=[0, \infty)$ ).

No caso do exemplo do jogador, podemos definir as variáveis aleatórias  $S(t)$  que representam o valor acumulado das apostas feitas até o instante  $t$ , onde  $t$  assume os valores contidos em  $T=\{1,2,3\}$ . Uma representação gráfica deste processo pode ser feita na forma de árvore:

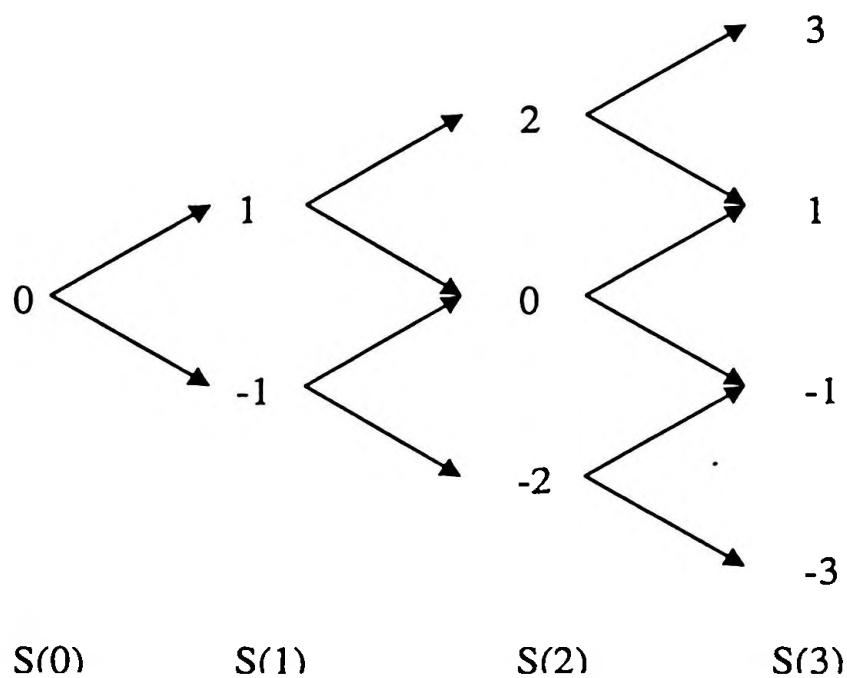


Figura 3.1 - Representação em árvore do processo estocástico do valor acumulado das apostas

O espaço amostral do processo é dado por:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (+1,-1,-1), \\ (-1,+1,+1), (-1,+1,-1), (-1,-1,+1), (-1,-1,-1) \end{array} \right\}$$

onde cada elemento é representado por uma tripla  $(a_1, a_2, a_3)$ , em que cada  $a_i$  é o resultado da aposta na jogada feita no instante  $t=i$ . A cada elemento do espaço amostral corresponde uma possível realização do processo estocástico. Por exemplo, à trinca  $(+1,-1,+1)$  correspondem os seguintes valores das variáveis aleatórias:  $S(1)=1$ ,  $S(2)=0$ ,  $S(3)=1$ . Na representação em árvore, corresponde a uma trajetória formada por uma subida seguida de uma descida e depois

por outra subida. Assim, cada realização de um processo estocástico é denominada também um **caminho** (*path*, em inglês) do processo.

Observando-se um processo estocástico, à medida que se avança no tempo, mais informação a seu respeito é revelada. Por exemplo, no instante  $t=0$ , sabe-se apenas que qualquer um dos caminhos de  $\Omega$  pode vir a ser percorrido. No instante  $t=1$ , após o conhecido o resultado do lançamento da primeira moeda, já é possível apontar a qual dos dois grupos da classe  $\mathcal{C}_1$  abaixo pertence o caminho que será percorrido, embora este ainda não possa ser totalmente identificado.

$$\mathcal{C}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \{ \{ (+1, +1, +1), (+1, +1, -1), (+1, -1, +1), (+1, -1, -1) \}, \\ \{ \{ (-1, +1, +1), (-1, +1, -1), (-1, -1, +1), (-1, -1, -1) \} \} \end{array} \right\}$$

Entretanto, qualquer variável aleatória cujo valor dependa apenas da informação revelada até o instante  $t=1$  já pode ser determinada com certeza, como por exemplo a variável aleatória  $S(1)$ . Isto significa que é possível determinar a probabilidade de qualquer evento  $[\omega.S(1, \omega) \leq x]$ , ou seja, a variável aleatória  $S(1)$  é mensurável na  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_1 = \sigma(\mathcal{C}_1)$ .

No instante  $t=2$  são conhecidos os resultados dos dois primeiros lançamentos, e já é possível determinar a qual dos 4 conjuntos da partição  $\mathcal{C}_2$  de  $\Omega$  pertence o caminho.

$$\mathcal{C}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \{ \{ (+1, +1, +1), (+1, +1, -1) \}, \{ \{ (+1, -1, +1), (+1, -1, -1) \}, \\ \{ \{ (-1, +1, +1), (-1, +1, -1) \}, \{ \{ (-1, -1, +1), (-1, -1, -1) \} \} \end{array} \right\}$$

Qualquer variável aleatória que dependa apenas dos resultados das duas primeiras jogadas, ou seja, que assume um valor constante dentro de cada um dos conjuntos de  $\mathcal{C}_2$ , pode então ter seu valor determinado com certeza, como por exemplo a variável aleatória  $S(2)$ . É fácil verificar que, dentro de cada conjunto da partição  $\mathcal{C}_2$ , o valor de  $S(2)$  é constante, podendo no entanto variar de um conjunto para o outro. Se sabemos a probabilidade de ocorrência de cada um destes conjuntos, então sabemos a distribuição de probabilidade de  $S(2)$ . Assim, sendo  $\mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{C}_2)$ , então a variável aleatória  $S(2)$  é  $\mathcal{F}_2$ -mensurável.

Por fim, no instante  $t=3$ , já é possível identificar qual foi o caminho percorrido, ou seja, pode-se determinar a qual dos conjuntos da partição  $\mathcal{C}_3$  ele pertence:

$$\mathcal{C}_3 = \left\{ \begin{array}{l} \{(+1,+1,+1)\}, \{(+1,+1,-1)\}, \{(+1,-1,+1)\}, \{(+1,-1,-1)\} \\ \{(-1,+1,+1)\}, \{(-1,+1,-1)\}, \{(-1,-1,+1)\}, \{(-1,-1,-1)\} \end{array} \right\}$$

Agora, conhecido o conjunto de  $\mathcal{C}_3$  onde o caminho se encontra, qualquer variável aleatória cujo valor dependa dos resultados dos três lançamentos pode ser determinada com certeza, com por exemplo a variável aleatória  $S(3)$ . Ou seja, sendo  $\mathcal{F}_3 = \sigma(\mathcal{C}_3)$ , então  $S(3)$  é  $\mathcal{F}_3$ -mensurável.

Como as classes  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  são partições de  $\Omega$ , então as  $\sigma$ -álgebras geradas por cada uma delas nada mais são do que o conjunto de todas as uniões e interseções dos elementos de cada partição. Como  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  são partições sucessivamente mais finas de  $\Omega$ , então o mesmo se sucede como as  $\sigma$ -álgebras por elas geradas, e decorre que:

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3, \text{ onde } \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_1 = \sigma(\mathcal{C}_1), \mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{C}_2) \text{ e } \mathcal{F}_3 = \sigma(\mathcal{C}_3).$$

Por definição, dado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , uma **filtração**  $\mathbb{F}$  é uma sequência de  $\sigma$ -álgebras tais que:

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_T\}, \text{ onde } \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1} \text{ e } \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}.$$

Um **espaço de probabilidade filtrado** é definido como a quádrupla  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ .

Assim, se definirmos para o exemplo do jogador um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  onde  $\Omega$  é o conjunto de triplas já descrito,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$ , e  $P$  uma medida de probabilidade (por exemplo, a medida equiprovável), então a sequência  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$  é uma filtração, com  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_3$ , e  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  é um espaço de probabilidade filtrado.

Filtrações geralmente são utilizadas para representar um fluxo de informações. À medida que o tempo passa, um observador vai obtendo informações cada vez mais detalhadas da realidade, o que implica em identificar partições cada vez mais finas do espaço amostral, daí o uso de  $\sigma$ -álgebras crescentes.

Um processo estocástico  $\mathbf{X} = \{X(t)\}$  é dito **adaptado** a uma filtração  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$  se, para todo tempo  $t$ , a respectiva variável aleatória  $X(t)$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável. Isso significa que, em cada

instante  $t$ , conhecida a informação fornecida por  $\mathcal{F}_t$ , é possível determinar com certeza o valor de  $X(t)$ . No exemplo do jogador, o processo  $S=\{S(1),S(2),S(3)\}$  é adaptado à filtração  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ , uma vez que, dada a informação contida em  $\mathcal{F}_t$ , ou seja, os resultados dos lançamentos até o instante  $t$ , é possível determinar sem dúvida o valor de  $S(t)$ . Em outras palavras, cada  $S(t)$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável.

Dada uma filtração  $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_T\}$ , um processo estocástico  $Y=\{Y(t)\}$  é denominado **previsível** em relação a esta filtração se, para cada instante  $t$ , a variável aleatória  $Y(t)$  é  $\mathcal{F}_{t-1}$ -mensurável, ou seja, pode ser determinada com certeza conhecida a informação contida na  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_{t-1}$ . No exemplo do jogador, podemos definir um processo estocástico  $H=\{H(t)\}$ , onde  $H(t)$  representa o número de jogadas ganhas até o instante  $t-1$ , sendo  $H(0)=H(1)=0$  por definição. Evidentemente, para se conhecer o valor de  $H(t)$ , basta saber o resultado dos lançamentos até o instante  $t-1$ , ou seja,  $H(t)$  é  $\mathcal{F}_{t-1}$ -mensurável, e portanto o processo  $H$  é previsível (com relação à filtração  $\mathbb{F}$ ).

Dado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e um processo estocástico  $X=\{X(t)\}$  nele definido, é possível definir uma filtração que contém, para cada instante  $t$ , toda a informação que pode ser obtida da observação do processo até o instante  $t$ , ou seja, das variáveis aleatórias  $X(s)$ ,  $s \leq t$ . Tal filtração é denominada **filtração gerada pelo processo estocástico  $X$** , e é definida como a sequência  $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}$  de  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}_t$  tais que  $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X(s), 0 \leq s \leq t\})$ . Assim, cada  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$  de  $\mathbb{F}$  é definida de maneira que todo subconjunto  $\{\omega \mid X(s, \omega) \in B\}$ , com  $s \leq t$  e  $B$  boreliano, pertença a  $\mathcal{F}_t$ , ou seja, todas as variáveis aleatórias  $X(s)$ ,  $s \leq t$ , são  $\mathcal{F}_t$ -mensuráveis. Isso significa que, dada a informação disponível em  $\mathcal{F}_t$ , é possível determinar com certeza os valores de todas as variáveis aleatórias  $X(s)$ ,  $s \leq t$ , o que corresponde a todo o comportamento do processo até o instante  $t$ .

Partindo do processo estocástico  $S=\{S(1),S(2),S(3)\}$  do exemplo do jogador, podemos determinar a filtração  $\mathbb{G}=\{\mathcal{G}_t\}$  gerada por  $S$ . Como função de  $\Omega$ ,  $S(1)$  é dada por:

$$S(1, \omega) = \begin{cases} +1; & \omega \in \{(+1, +1, +1), (+1, +1, -1), (+1, -1, +1), (+1, -1, -1)\} \\ -1; & \omega \in \{(-1, +1, +1), (-1, +1, -1), (-1, -1, +1), (-1, -1, -1)\} \end{cases}$$

onde  $\omega$  é um elemento de  $\Omega$ . Assim, a primeira  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}_1$  de  $\mathbb{G}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $S(1)$ , ou seja:

$$\mathcal{G}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \\ \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (+1,-1,-1)\}, \\ \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (+1,-1,-1)\}, \\ \Omega \end{array} \right\}$$

A variável aleatória  $S(2)$ , por sua vez, é dada pela função de conjunto em  $\Omega$ :

$$S(2, \omega) = \begin{cases} +2; \omega \in \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1)\} \\ 0; \omega \in \{(+1,-1,+1), (+1,-1,-1), (-1,+1,+1), (-1,+1,-1)\} \\ -2; \omega \in \{(-1,-1,+1), (-1,-1,-1)\} \end{cases}$$

A  $\sigma$ -álgebra gerada por  $S(2)$  é dada por:

$$\sigma(S(2)) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \\ \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1)\}, \\ \{(+1,-1,+1), (+1,-1,-1), (+1,+1,+1), (+1,+1,-1)\}, \\ \{(+1,-1,+1), (+1,-1,-1)\}, \\ \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (+1,-1,-1), (+1,+1,+1), (+1,+1,-1)\}, \\ \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (+1,-1,-1)\}, \\ \{(+1,-1,+1), (+1,-1,-1), (+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (+1,-1,-1)\}, \\ \Omega \end{array} \right\}$$

Como o segundo membro  $\mathcal{G}_2$  de  $\mathbb{G}$  deve ser tal que ambas as variáveis  $S(1)$  e  $S(2)$  sejam  $\mathcal{G}_2$ -mensuráveis, então  $\sigma(S(2))$  ainda não é o segundo membro da filtração, pois  $S(1)$  não é  $\sigma(S(2))$ -mensurável, uma vez que alguns conjuntos de  $\sigma(S(1)) = \mathcal{G}_1$  não fazem parte de  $\sigma(S(2))$ , como por exemplo o conjunto  $\{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (+1,-1,-1)\}$ . O segundo membro  $\mathcal{G}_2$  da filtração deve ser tal que tanto  $S(1)$  quanto  $S(2)$  sejam  $\mathcal{G}_2$ -mensuráveis, ou seja, ambas as  $\sigma$ -álgebras  $\sigma(S(1))$  e  $\sigma(S(2))$  devem estar contidas em  $\mathcal{G}_2$ , e  $\mathcal{G}_2$  deve ser a menor  $\sigma$ -álgebra que as contém. É fácil ver que  $\mathcal{G}_2$  deve ser dada por:

$$\mathcal{G}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \\ \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1)\}, \\ \{(+1,-1,+1), (+1,-1,-1)\}, \\ \{(-1,+1,+1), (-1,+1,-1)\}, \\ \{(-1,-1,+1), (-1,-1,-1)\}, \\ \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (+1,-1,-1)\}, \\ \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (-1,+1,+1), (-1,+1,-1)\}, \\ \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (-1,-1,+1), (-1,-1,-1)\}, \\ \{(+1,-1,+1), (+1,-1,-1), (-1,+1,+1), (-1,+1,-1)\}, \\ \{(+1,-1,+1), (+1,-1,-1), (-1,-1,+1), (-1,-1,-1)\}, \\ \{(-1,+1,+1), (-1,+1,-1), (-1,-1,+1), (-1,-1,-1)\}, \\ \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (+1,-1,-1), (-1,+1,+1), (-1,+1,-1)\}, \\ \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (+1,-1,+1), (+1,-1,-1), (-1,-1,+1), (-1,-1,-1)\}, \\ \{(+1,+1,+1), (+1,+1,-1), (-1,+1,+1), (-1,+1,-1), (-1,-1,+1), (-1,-1,-1)\}, \\ \{(+1,-1,+1), (+1,-1,-1), (-1,+1,+1), (-1,+1,-1), (-1,-1,+1), (-1,-1,-1)\} \end{array} \right\}$$

$$\Omega$$

Assim,  $\mathcal{G}_2$  representa todas as possíveis de trajetórias percorridas até o instante  $t=2$  e todas as combinações destas trajetórias.

Por fim, raciocínio semelhante mostra que o terceiro membro da filtração  $\mathcal{G}$  é dado por  $\mathcal{G}_3=2^\Omega$ .

Dado um espaço de probabilidade filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ , um processo estocástico  $M=\{M(t)\}$  adaptado à filtração  $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}$  é denominado um **martingal** se, para qualquer valor de  $t$ ,  $E|M(t)|<\infty$ , e para quaisquer  $0 \leq s < t$  vale:

$$E(M(t)|\mathcal{F}_s) = M(s)$$

Em outras palavras, isso significa que, se no momento  $s$  o processo atingiu um valor  $M(s)$ , o valor esperado neste instante  $s$  para o valor que o processo assumirá num instante futuro  $t$  será igual a  $M(s)$ , ou seja, a média da alteração no valor do processo entre os dois instantes é nula.

O processo  $S=\{S(t)\}$  representativo do resultado acumulado das apostas no exemplo do jogador é um exemplo de martingal. Se cada face da moeda tem a mesma probabilidade de ocorrer (50%), então o resultado médio de cada aposta é igual a zero, e se no instante atual  $s$  a

riqueza do jogador é igual a  $S(s)$ , como a sua riqueza futura  $S(t)$  em  $t > s$  será dada por  $S(s)$  mais a soma dos resultados das jogadas neste intervalo de tempo, cada uma delas com valor esperado nulo. Então o valor esperado de  $S(t)$  dado que valia  $S(s)$  no instante  $s$  será igual a  $S(s)$ .

Por exemplo, se no primeiro lançamento o jogador ganhar, então teremos  $S(1)=1$ , e será sabido que o evento será um dos contidos no conjunto

$$[\omega: S(1, \omega) = 1] = \{(+1,+1,+1),(+1,+1,-1),(+1,-1,-1),(+1,-1,+1)\}$$

Os valores de  $S(2)$  e  $S(3)$  e as probabilidades associadas a cada caminho são:

$\omega$	(+1,+1,+1)	(+1,+1,-1)	(+1,-1,+1)	(+1,-1,-1)
$S(2, \omega)$	2	2	0	0
$S(3, \omega)$	3	1	1	-1
$P[\{\omega\}]$	1/8	1/8	1/8	1/8

Tabela 3.1 – Valores de  $S(2)$  e  $S(3)$  em função dos caminhos que partem de  $S(1)=+1$

Assim, é fácil ver que  $E[S(2)|S(1)=1] = E[S(3)|S(1)=1] = 1 = S(1)$ . O mesmo acaba valendo quando  $S(1) = -1$  e, de maneira geral, para  $E[S(3)|S(2)]$ , sendo  $S$  portanto um martingal.



## 3.2 ELEMENTOS DE CÁLCULO ESTOCÁSTICO

Nesta seção serão introduzidos conceitos básicos relacionados ao cálculo estocástico, incluindo as definições de movimento browniano, processo de Itô e integral de Itô, e será apresentada a fórmula de Itô e alguns resultados que podem ser obtidos a partir desta. Não se procurará apresentar definições rigorosas ou provas de teoremas, as quais podem ser encontradas, por exemplo, em Karatzas e Shreve (1994) ou Klebaner (1998).

### 3.2.1 MOVIMENTO BROWNIANO

O movimento browniano, também denominado processo de Wiener, é um processo estocástico  $[W(t), t \geq 0]$  definido em algum espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  para o qual valem as três propriedades seguintes:

- (i) Os incrementos  $W(t)-W(s)$ ,  $s < t$ , possuem distribuição normal com média 0 e variância  $t-s$ .
- (ii) Os seus incrementos são independentes, ou seja, cada incremento  $W(t)-W(s)$ ,  $s < t$ , é independente do comportamento do processo até o instante  $s$ .
- (iii) O processo  $W(t)$  é contínuo no tempo, ou seja, todos os caminhos possíveis são funções contínuas de  $t$ .

Em geral, convencionou-se que  $W(0)=0$ . O movimento browniano pode ser utilizado, por exemplo, para modelar o deslocamento de uma partícula suspensa num fluido, a qual se move erraticamente à medida que é bombardeada pelas moléculas do próprio fluido. Este tipo de movimento foi observado pelo botânico Robert Brown, que descreveu-o pela primeira vez em 1828 para um grão de pólen suspenso em água, daí vindo o nome movimento browniano.

Em finanças, o movimento browniano costuma ser utilizado para representar o comportamento dos preços de ativos financeiros ao longo do tempo, ativos estes tais como ações, taxas de câmbio, preços de *commodities* e taxas de juros.

Cada uma das possíveis ocorrências do movimento browniano é denominada um **caminho** ou uma **realização** do processo. Cada um destes caminhos possui as seguintes propriedades:

- é uma função contínua de  $t$ .
- não é diferenciável em nenhum de seus pontos.
- possui variação infinita em qualquer intervalo, por mais pequeno que seja.
- possui variação quadrática igual a  $t$  no intervalo  $[0, t]$ , para qualquer  $t$ .

A **variação** de uma função  $f$  num intervalo  $[a, b]$  é definida por:

$$V_f([a, b]) = \sup \sum_{i=1}^n |f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n)|$$

onde o supremo é avaliado nas partições  $a = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = b$ . Isso equivale a

$$V_f([a, b]) = \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n)|$$

onde  $\delta_n = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$  é o maior intervalo da partição. Tendo em mente o gráfico da função com relação a  $t$ , a variação da função nada mais é do que a soma dos valores absolutos dos deslocamentos verticais da curva. Assim, para uma função  $g$  não-crescente ou não-decrescente, a variação num intervalo  $[a, b]$  é dada simplesmente por  $|g(b) - g(a)|$ . Mostra-se que qualquer função contínua e diferenciável possui variação finita.

A **variação quadrática**  $VQ$  de uma função  $f$  num intervalo  $[a, b]$  é definida por:

$$VQ_f([a, b]) = \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n)|^2$$

onde  $\delta_n = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$  é o maior intervalo da partição  $a = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = b$ .

Conforme mencionado anteriormente, a variação de um movimento browniano é infinita, enquanto sua variação quadrática é finita e igual  $t-s$  num intervalo  $[s, t]$ .

Dado o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e o intervalo de tempo  $[0, T]$  para os quais o movimento browniano é definido, define-se para cada  $t$  fixado a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$  gerada por  $W(t)$ , como sendo a  $\sigma$ -álgebra gerada pelo processo até o instante  $t$ , ou seja:

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{W(s), 0 \leq s \leq t\})$$

Tal  $\sigma$ -álgebra representa toda a informação proporcionada pelo processo  $W$  até o momento  $t$ . Define-se também a **filtração gerada pelo movimento browniano** por:

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}, 0 \leq t \leq T.$$

A filtração representa o fluxo de informações proporcionadas pelo processo ao longo do tempo. Dadas estas definições, decorre da propriedade (ii) do movimento browniano que o mesmo é um processo **markoviano**, ou seja, para todo  $t, s > 0$ , a distribuição de  $W(t+s)$  condicional a  $\mathcal{F}_t$  (ou seja, condicional ao comportamento de todo o processo até o instante  $t$ ) é igual à distribuição condicional de  $W(t+s)$  dado  $W(t)$ . Isso significa que a distribuição do comportamento futuro do processo em  $t+s$  depende apenas de seu valor no instante  $t$ , e não do que aconteceu antes.

Além disso, o fato de os incrementos possuírem distribuição normal com média zero faz com que o movimento browniano seja um martingal, ou seja,

$$E[W(t+s)|\mathcal{F}_t] = W(t)$$

### 3.2.2 INTEGRAL DE ITÔ

Antes de apresentar a definição generalizada de integral de Itô será introduzido o conceito de integral de Itô de processos estocásticos simples.

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade,  $W(t)$  um movimento browniano definido neste espaço para o intervalo de tempo  $[0, T]$  e  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$  a filtração gerada por este movimento browniano. Por definição, um **processo estocástico simples**  $X(t)$  é um processo para o qual existem instantes  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < T$  e variáveis aleatórias  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  tais que:

$$X(t) = \xi_0 \cdot 1_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \cdot 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t); \quad 0 \leq t \leq T.$$

onde  $1_0(t)$  e  $1_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$  são funções indicadoras. Isso significa que o valor do processo só se modifica ao longo do tempo através de saltos imediatamente após os instantes  $t_i$ , mantendo-se

constante dentro dos intervalos  $(t_i, t_{i+1}]$  no valor  $\xi_i$ . Caso cada uma das variáveis aleatórias  $\xi_i$  seja  $\mathcal{F}_i$ -mensurável, então o processo  $X(t)$  será também um processo previsível, uma vez que para determinar seu valor num intervalo  $(t_i, t_{i+1}]$  basta apenas conhecer o desenvolvimento do processo  $W(t)$  no intervalo  $(0, t_i]$ .

Neste caso, a **integral de Itô** é definida como a soma

$$\int_0^T X(t).dW(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i.(W(t_{i+1}) - W(t_i))$$

É fácil mostrar que a integral de Itô de processos simples é uma variável aleatória com as seguintes propriedades:

1- Se  $X(t)$  e  $Y(t)$  são processos simples e  $\alpha$  e  $\beta$  duas constantes, então

$$\int_0^T (\alpha.X(t) + \beta.Y(t)).dW(t) = \alpha.\int_0^T X(t).dW(t) + \beta.\int_0^T Y(t).dW(t)$$

2- A integral da função indicadora  $1_{[a,b]}(t)$ ,  $0 < a < b < T$  é igual a

$$\int_0^T 1_{[a,b]}(t).dW(t) = W(b) - W(a)$$

3- Se  $E(\xi_i^2) < \infty$  para todo  $\xi_i$ , então

$$E\left(\int_0^T X(t).dW(t)\right) = 0$$

4- (Isometria de Itô) Se  $E(\xi_i^2) < \infty$  para todo  $\xi_i$ , então

$$E\left(\int_0^T X(t).dW(t)\right)^2 = \int_0^T E(X^2(t))dt$$

O conceito de integral de Itô pode ser estendido de processos simples para processos previsíveis quaisquer, satisfeitas algumas condições. De fato, mostra-se que, para um processo aleatório  $X(t)$  previsível, com  $\int_0^T X^2(t).dt < \infty$  com probabilidade 1, a **integral de Itô**

$$\int_0^T X(t).dW(t)$$

é definida e satisfaz as propriedades 1 a 4 citadas anteriormente.

A integral de Itô pode ser vista também como um processo. De fato, se deixarmos  $t$  variar de 0 a  $T$ , então obtemos o processo

$$Y(t) = \int_0^t X(s).dW(s)$$

É possível mostrar que este é um processo adaptado à  $\sigma$ -álgebra gerada por  $W(t)$  e que é um processo contínuo (mais formalmente, que existe uma versão contínua de  $Y(t)$ ).

Caso o processo  $X(t)=g(t)$  seja determinístico, então é possível mostrar, através da aproximação de  $g(t)$  por uma sequência  $\{g_n(t)\}$  de funções simples, com  $g_n(t) \rightarrow g(t)$ , que a integral de Itô de  $g(t)$  apresenta distribuição normal com média zero e variância  $\int_0^t g^2(t).dt$  :

$$\int_0^t g(t).dW(t) \sim N\left(0; \int_0^t g^2(t).dt\right)$$

### 3.2.3 PROCESSO DE ITÔ

Um processo  $Y$  é dito um **processo de Itô** se, para todo  $t$ ,  $0 \leq t \leq T$ , pode ser representado na forma:

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \mu(s).ds + \int_0^t \sigma(s).dW(s)$$

onde  $\mu(t)$  e  $\sigma(t)$  são processos tais que

-  $\mu(t)$  é adaptado e  $\int_0^T |\mu(t)|.dt < \infty$  com probabilidade 1.

-  $\sigma(t)$  é previsível e  $\int_0^T \sigma^2(t).dt < \infty$  com probabilidade 1.

Em geral, costuma-se representar o processo de Itô na forma de equação diferencial estocástica:

$$dY(t) = \mu(t).dt + \sigma(t).dW(t)$$

Apesar da forma diferencial, esta equação é apenas uma convenção que procura transmitir o mesmo significado da equação na forma integral, uma vez que, pelo fato de  $W(t)$  não ser diferenciável, a diferencial  $dW(t)$  a rigor não é definida.

- Variação Quadrática e Covariação de Processos de Itô

A variação quadrática de um processo de Itô  $Y(t)$  é definida por

$$[Y, Y](0, t] = \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n))^2$$

onde  $\{t_i^n\}$  é uma partição de  $[0, t]$  e o limite é tomado em todas as partições para as quais  $\delta_n = \max_i (t_{i+1}^n - t_i^n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . O valor da variação quadrática de um processo de

Itô é dado por:

$$[Y, Y](t) = \int_0^t \sigma^2(s).ds$$

Dados dois processos de Itô  $X(t)$  e  $Y(t)$ , com coeficientes de difusão  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$ , define-se a covariação destes dois processo por:

$$[X, Y](t) := \frac{1}{2} ([X + Y, X + Y](t) - [X, X](t) - [Y, Y](t)) = \int_0^t \sigma_X(s). \sigma_Y(s).ds$$

Por convenção, define-se

$$dY(t).dX(t) = d[X,Y](t) \quad \text{e} \quad (dY(t))^2 = d[Y,Y](t)$$

É possível provar que, se  $Y(t)$  é um processo de Itô e  $X(t)$  é um processo contínuo com variação finita, então a covariação deste dois processos é nula.

Seja o processo  $X(t) = t$  com variação finita e variação quadrática nula, e seja  $Y(t) = W(t)$  com variação finita e variação quadrática igual a  $t$ . Segue que:

$$(dt)^2 = d[t,t](t) = 0,$$

$$dW(t).dt = d[W,t] = 0,$$

$$(dW(t))^2 = d[W,W](t) = dt.$$

O primeiro resultado decorre do fato de a variação quadrática da função  $t$  ser nula. O segundo resultado ocorre porque  $t$  possui variação finita e  $W(t)$  é um processo de Itô. O terceiro resultado é obtido lembrando que a variação quadrática de  $W(t)$  é  $t$ .

### 3.2.4 FÓRMULA DE ITÔ

Seja  $f(x)$  uma função com derivada segunda contínua, e seja  $X(t)$  um processo de Itô no intervalo  $0 \leq t \leq T$ :

$$dX(t) = \mu(t).dt + \sigma(t).dW(t)$$

Então a equação diferencial estocástica para o processo  $Y(t) = f(X(t))$  existe e é dada por:

$$\begin{aligned} df(X(t)) &= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2} f''(X(t))d[X, X](t) = \\ &= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2} f''(X(t))\sigma^2(t).dt = \\ &= \left( f'(X(t))\mu(t) + \frac{1}{2} f''(X(t))\sigma^2(t) \right) dt + f'(X(t))\sigma(t).dW(t) \end{aligned}$$

Ou, na forma integral:

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X(s))\sigma^2(s).ds$$

A fórmula acima, tanto na forma diferencial quanto na integral, é conhecida como fórmula de Itô.

A mesma fórmula pode ser desenvolvida para uma função de duas variáveis, envolvendo dois processos de Itô. Seja  $f(x,y)$  uma função com derivadas parciais contínuas até a segunda ordem, e sejam dois processos de Itô  $X(t)$  e  $Y(t)$  adaptados ao mesmo movimento browniano  $W(t)$ , dados por:

$$dX(t) = \mu_x(t).dt + \sigma_x(t).dW(t)$$

$$dY(t) = \mu_y(t).dt + \sigma_y(t).dW(t)$$

Então, a equação diferencial estocástica referente ao processo  $f(X(t),Y(t))$  é:

$$df(X(t),Y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t),Y(t))dX(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t),Y(t))dY(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t),Y(t))\sigma_x^2(t).dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X(t),Y(t))\sigma_y^2(t).dt + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X(t),Y(t))\sigma_x(t)\sigma_y(t).dt$$

Um caso particular da equação acima ocorre quando  $Y(t) = t$ . Neste caso,  $\sigma_y(t) = 0$ , e a equação se reduz a:

$$df(X(t),t) = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t)dX(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(X(t),t).dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t),t)\sigma_x^2(t).dt$$

Outro resultado útil que pode ser obtido da fórmula de Itô para funções de duas variáveis é a fórmula de integração por partes do cálculo estocástico. Tomando  $f(x,y) = x.y$ , tem-se:

$$d(X(t).Y(t)) = Y(t).dX(t) + X(t).dY(t) + \sigma_x(t)\sigma_y(t).dt$$



Esta fórmula se diferencia da correspondente do cálculo tradicional pela presença do último termo contendo os coeficientes de difusão  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$ , cuja ocorrência se deve ao fato de a covariação de  $X(t)$  e  $Y(t)$  não ser nula, mas dada por:

$$[X, Y][0, t] = \int_0^t \sigma_X(s) \cdot \sigma_Y(s) \cdot ds$$

ou, na forma diferencial:

$$dX(t) \cdot dY(t) := d[X, Y](t) = \sigma_X(t) \cdot \sigma_Y(t) \cdot dt$$

### 3.2.5 MUDANÇA DE MEDIDA DE PROBABILIDADE E TEOREMA DE GIRSANOV

O conceito de mudança de medida de probabilidade é um dos mais importantes na teoria de precificação de ativos contingentes. Seu desenvolvimento será feito nesta seção a partir de um exemplo extraído de Baxter e Rennie (2000, pg.63). Além desta referência, é possível encontrar um tratamento mais detalhado do assunto em Karatzas e Shreve (1994) ou em Klebaner (1998).

#### a) MUDANÇA DE MEDIDA

Considere-se inicialmente um experimento em que um apostador parte de uma situação de riqueza zero no instante inicial  $t=0$  e joga duas moedas, a primeira no instante  $t=1$  e a segunda no instante  $t=2$ , sendo que a primeira moeda tem probabilidade  $p_1$  de dar resultado cara, e a segunda moeda tem probabilidade  $p_2$  de dar cara. O apostador ganha \$1 a cada resultado cara e perde \$1 a cada coroa. Assim, o processo  $S(t)$  que representa a riqueza do jogador pode ser representado pela seguinte árvore:

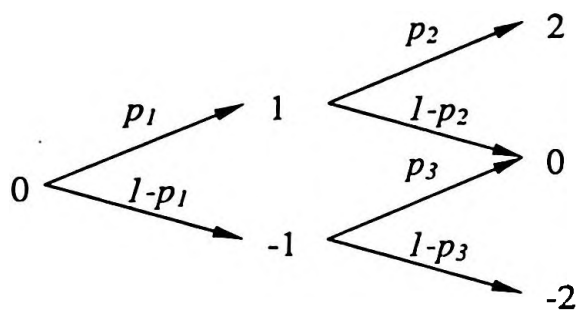


Figura 3.2 – Representação em árvore da riqueza do jogador

As quatro realizações possíveis deste processo são  $(0,1,2)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(-1,0)$  e  $(0,-1,-2)$ , cujas respectivas probabilidades são:

Caminho ( $\omega$ )	Realizações de $S(t)$	Probabilidade
$\omega_1 = (+1,+1)$	$(0,1,2)$	$p_1 \cdot p_2 = \pi_1$
$\omega_2 = (+1,-1)$	$(0,1,0)$	$p_1 \cdot (1-p_2) = \pi_2$
$\omega_3 = (-1,+1)$	$(0,-1,0)$	$(1-p_1) \cdot p_3 = \pi_3$
$\omega_4 = (-1,-1)$	$(0,-1,-2)$	$(1-p_1) \cdot (1-p_3) = \pi_4$

Tabela 3.2 – Probabilidades das realizações segundo a medida  $P$ .

Assim, tem-se um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  onde o espaço amostral é dado por  $\Omega = \{(+1, +1), (+1, -1), (-1, +1), (-1, -1)\}$ , sendo cada dupla  $(m_1, m_2)$  formada pelos resultados dos lances nos instantes  $t=1$  e  $t=2$ ,  $\mathcal{F}$  é a classe de todos os subconjuntos de  $\Omega$  e  $P$  é uma probabilidade conforme definida acima.

Se ao invés de  $P$  tivesse sido definida outra medida de probabilidade  $Q$ , para a qual cada valor  $p_i$  é substituído por um outro valor  $q_i$ , então ter-se-ia um outro espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ , para o qual valeria:

Caminho ( $\omega$ )	Realizações de $S(t)$	Probabilidade
$\omega_1 = (+1, +1)$	$(0, 1, 2)$	$q_1 \cdot q_2 = \pi'_1$
$\omega_2 = (+1, -1)$	$(0, 1, 0)$	$q_1 \cdot (1 - q_2) = \pi'_2$
$\omega_3 = (-1, +1)$	$(0, -1, 0)$	$(1 - q_1) \cdot q_3 = \pi'_3$
$\omega_4 = (-1, -1)$	$(0, -1, -2)$	$(1 - q_1) \cdot (1 - q_3) = \pi'_4$

Tabela 3.3 – Probabilidades das realizações segundo a medida  $Q$ .

Seja o evento  $A \in \mathcal{F}$ . Deseja-se agora relacionar as probabilidades dadas nas medidas  $Q$  e  $P$ . Na medida  $P$ , a probabilidade de  $A$  é dada por:

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 \pi_i \cdot 1_A(\omega_i) = E_P(1_A)$$

onde  $1_A$  é a função indicadora do evento  $A$ . De forma análoga, a probabilidade de  $A$  na medida  $Q$  é:

$$Q(A) = \sum_{i=1}^4 \pi'_i \cdot 1_A(\omega_i) = E_Q(1_A)$$

Outra forma de expressar  $Q(A)$  é a seguinte:

$$Q(A) = \sum_{i=1}^4 \pi'_i \cdot 1_A(\omega_i) = \sum_{i=1}^4 \frac{\pi'_i}{\pi_i} \pi_i \cdot 1_A(\omega_i) = E_P\left(\frac{\pi'_i}{\pi_i} \cdot 1_A\right)$$

A razão  $\frac{\pi'_i}{\pi_i}$  varia para cada elemento  $\omega_i$  do espaço amostral, sendo portanto uma variável aleatória. Como ela dá a razão entre as probabilidades  $P$  e  $Q$  de cada elemento, costuma ser

representada na forma  $\frac{dQ}{dP}$  (o motivo desta representação se torna mais claro quando se trabalha com espaço amostral contínuo), e é denominada **derivada de Radon-Nikodym** de  $Q$  com relação a  $P$ .

Assim, através da derivada de Radon-Nikodym, é possível achar a probabilidade de um evento  $A$  na medida  $Q$  utilizando-se o operador esperança na medida  $P$ . Tal operação é denominada mudança de medida.

Repare no entanto que, para que a derivada seja definida, o valor do denominador não pode ser nulo. São duas as situações onde isso pode ocorrer. Na primeira, tanto o numerador quanto o denominador são nulos, ou seja, o evento  $\{\omega_i\}$  em questão tem probabilidade nula em ambas as medidas  $P$  e  $Q$ . Neste caso, basta descartá-lo do problema, uma vez que é irrelevante. Na segunda situação, mais dificultosa, o denominador é nulo mas o numerador não. Neste caso, a derivada de Radon-Nikodym não pode ser definida. Isso motiva as definições seguintes.

**Definição:** Sejam  $P$  e  $Q$  duas medidas de probabilidade definidas num mesmo espaço mensurável  $(\Omega, \mathcal{F})$ . A medida  $Q$  é denominada **absolutamente contínua** com relação à medida  $P$  (notação:  $Q \ll P$ ) se  $Q(A) = 0$  sempre que  $P(A) = 0$ , sendo  $A$  um evento. Ou seja, qualquer evento com probabilidade nula na medida  $P$  também terá probabilidade nula em  $Q$ . As medidas  $P$  e  $Q$  são **equivalentes** se  $Q \ll P$  e  $P \ll Q$ .

Assim, no exemplo dado, se a medida  $Q$  for absolutamente contínua em relação a  $P$ , então é possível definir a derivada de Radon-Nikodym. De fato, isso vale para quaisquer medidas  $P$  e  $Q$  definidas em um espaço mensurável qualquer, conforme o seguinte teorema.

**Teorema de Radon-Nikodym:** Sejam  $P$  e  $Q$  duas medidas de probabilidade definidas num mesmo espaço mensurável  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Se  $Q \ll P$ , então existe uma variável aleatória  $\frac{dQ}{dP}$  tal que

$\frac{dQ}{dP} \geq 0$ ,  $E_P\left(\frac{dQ}{dP}\right) = 1$  e, para qualquer evento  $A$ :

$$Q(A) = E_P\left(\frac{dQ}{dP} \cdot 1_A\right) = \int_A \left(\frac{dQ}{dP}\right) dP.$$

Um outro exemplo de mudança de medida, agora com uma variável aleatória contínua, é dado a seguir. Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição normal  $N(0,1)$  segundo uma medida de probabilidade  $P$ . Suponha que há outra medida de probabilidade  $Q$  para a qual  $X$  tem distribuição normal  $N(\mu,1)$ ,  $\mu \neq 0$ . As funções de densidade de probabilidade de  $X$  segundo as medidas  $P$  e  $Q$  são dadas respectivamente por:

$$f_P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{e} \quad f_Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} = f_P(x) \cdot e^{\mu \cdot x - \mu^2/2}$$

Por exemplo, sendo o evento  $A$  um intervalo  $[a,b]$  na reta real, então as probabilidades de  $A$  segundo as medidas  $P$  e  $Q$  são dadas por:

$$P(A) = \int_a^b f_P(x) \cdot dx = \int_A f_P(x) \cdot dx = \int_A dP$$

$$Q(A) = \int_a^b f_Q(x) \cdot dx = \int_A f_Q(x) \cdot dx = \int_A dQ$$

A equação de  $Q(A)$  pode ser reescrita como:

$$Q(A) = \int_a^b f_Q(x) \cdot dx = \int_a^b f_P(x) \cdot e^{\mu \cdot x - \mu^2/2} \cdot dx = \int_A e^{\mu \cdot x - \mu^2/2} \cdot dP = E_P \left( \mathbb{1}_A \cdot e^{\mu \cdot X - \mu^2/2} \right)$$

Aqui, a derivada de Radon-Nikodym é  $\frac{dQ}{dP} = e^{\mu \cdot X - \mu^2/2}$ , e tem-se que:

$$dQ(x) = f_P(x) \cdot e^{\mu \cdot x - \mu^2/2} \cdot dx = e^{\mu \cdot x - \mu^2/2} \cdot dP(x)$$

A mudança de medida pode ser usada do cálculo do valor esperado de uma variável aleatória. Voltando ao exemplo inicial de dois lançamentos de moeda, seja  $X$  uma variável aleatória definida no instante  $t=2$  do processo (poderia ser, por exemplo,  $X=S(2)$ ). Deseja-se agora

relacionar seus valores esperados dados nas medidas  $Q$  e  $P$ . Na medida  $P$ , o valor esperado de  $X$  é dado por:

$$E_P(X) = \sum_{i=1}^4 \pi_i \cdot x_i = \int_{\Omega} x(\omega) \cdot dP(\omega)$$

De forma análoga, o valor esperado de  $X$  na medida  $Q$  é dado por:

$$E_Q(X) = \sum_{i=1}^4 \pi'_i \cdot x_i = \int_{\Omega} x(\omega) \cdot dQ(\omega)$$

Outra forma de expressar  $E_Q(X)$  seria:

$$E_Q(X) = \sum_{i=1}^4 \pi'_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^4 \frac{\pi'_i}{\pi_i} \cdot x_i \cdot \pi_i = \int_{\Omega} \left( \frac{\pi'(\omega)}{\pi(\omega)} \cdot x(\omega) \right) dP(\omega) = E_P \left( \frac{\pi'}{\pi} \cdot X \right)$$

Representando a razão  $\frac{\pi'}{\pi}$  como  $\frac{dQ}{dP}$ , é possível escrever:

$$E_Q(X) = E_P \left( \frac{dQ}{dP} \cdot X \right)$$

Assim, foi possível obter o valor esperado da variável aleatória segundo a medida  $Q$  usando o operador esperança na medida  $P$ . De fato, o resultado deste exemplo pode ser generalizado. Se  $P$  e  $Q$  são medidas de probabilidade num mesmo espaço,  $X$  é uma variável aleatória,  $E_Q(|X|) < \infty$ ,  $Q \ll P$  e  $dQ/dP$  é a derivada de Radon-Nikodym de  $Q$  em relação a  $P$ , então  $E_P(|X \cdot dQ/dP|) < \infty$  e

$$E_Q(X) = E_P \left( \frac{dQ}{dP} \cdot X \right)$$

Por exemplo, se  $X \sim N(0,1)$  na medida  $P$  e  $X \sim N(\mu,1)$  na medida  $Q$ , então a derivada de Radon-Nikodym é igual a  $\frac{dQ}{dP} = e^{\mu \cdot X - \mu^2/2}$ . Daí:

$$\begin{aligned}
E_P\left(\frac{dQ}{dP} \cdot X\right) &= E_P\left(e^{\mu \cdot X - \mu^2/2} \cdot X\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{\mu \cdot x - \mu^2/2} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( (y+\mu) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \right) dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \right) dy + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \right) dy = 0 + \mu = E_Q(X)
\end{aligned}$$

conforme esperado.

b) **TEOREMA DE GIRSANOV**

Seja  $X(t)$  um processo de Itô definido num espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  na forma:

$$dX(t) = \mu(t) \cdot dt + \sigma(t) \cdot dW(t)$$

onde o movimento browniano  $W(t)$  é definido segundo a medida de probabilidade  $P$ . Em algumas situações (como por exemplo nos modelos de precificação de ativos descritos mais adiante) pode ser conveniente identificar outra medida de probabilidade  $Q$  equivalente a  $P$  segundo a qual o processo  $X(t)$  possui a representação

$$dX(t) = v(t) \cdot dt + \sigma(t) \cdot d\tilde{W}(t)$$

onde  $\tilde{W}(t)$  é um movimento browniano segundo a medida  $Q$ . Ou seja, procura-se fazer uma mudança de medida de forma a trocar a componente de tendência do processo de Itô de  $\mu(t)$  para  $v(t)$ . Tal procedimento é facilitado pelo resultado do teorema de Girsanov.

**Teorema de Girsanov:** seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  um espaço de probabilidade filtrado,  $W(t)$  um movimento browniano definido neste espaço para o intervalo de tempo  $[0, T]$  e  $H(t)$  um processo previsível para o qual  $\int_0^T H(s) \cdot ds < \infty$ . Se a condição  $E_P\left(\exp\left(\frac{1}{2} \int_0^T H^2(s) \cdot ds\right)\right) < \infty$  é satisfeita, então existe uma medida de probabilidade  $Q$  equivalente a  $P$  e tal que:

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t H(s).ds$$

$$e \quad \frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_0^T H(s).dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^T H^2(s).ds\right)$$

onde  $\tilde{W}(t)$  é um movimento browniano segundo a medida  $Q$ .

Representado na forma de equação diferencial, o efeito da mudança de medida é dado por:

$$d\tilde{W}(t) = dW(t) + H(t).dt$$

ou seja, acrescenta-se a tendência  $H(t)$  ao movimento browniano inicial. Desta forma, partindo de um processo de Itô na medida  $P$  dado por:

$$dX(t) = \mu(t).dt + \sigma(t).dW(t)$$

se deseja-se obter outra representação de  $X(t)$  numa medida equivalente  $Q$  tal que

$$dX(t) = \nu(t).dt + \sigma(t).d\tilde{W}(t)$$

basta seguir o raciocínio seguinte:

$$dX(t) = \mu(t).dt + \sigma(t).dW(t) = \nu(t).dt + \sigma(t) \cdot \left( \frac{\mu(t) - \nu(t)}{\sigma(t)} .dt + dW(t) \right)$$

Fazendo  $H(t) = \frac{\mu(t) - \nu(t)}{\sigma(t)}$ , define-se a derivada de Radon-Nikodym

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_0^T H(s).dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^T H^2(s).ds\right)$$

Admitindo que  $E_P\left(\exp\left(\frac{1}{2} \int_0^T H^2(s).ds\right)\right) < \infty$ , então, pelo teorema de Girsanov, o processo



$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \left( \frac{\mu(s) - v(s)}{\sigma(s)} \right) ds \quad \text{ou} \quad d\tilde{W}(t) = dW(t) + \frac{\mu(t) - v(t)}{\sigma(t)} .dt$$

é um movimento browniano segundo a medida equivalente  $Q$ . Daí segue que:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \mu(t).dt + \sigma(t).dW(t) = v(t).dt + \sigma(t) \left( \frac{\mu(t) - v(t)}{\sigma(t)} .dt + dW(t) \right) = \\ &= v(t).dt + \sigma(t) \left( \frac{\mu(t) - v(t)}{\sigma(t)} .dt - \frac{\mu(t) - v(t)}{\sigma(t)} .dt + d\tilde{W}(t) \right) = v(t).dt + \sigma(t).d\tilde{W}(t) \end{aligned}$$

### 3.3 MODELO DE MERCADO FINITO

Para que se possa obter um modelo de precificação de ativos, é necessário inicialmente desenvolver um modelo de mercado para os ativos de uma economia. Será apresentado nesta seção um modelo finito de mercado, no qual o horizonte temporal  $t = 0, 1, \dots, T$  é discreto, e os ativos podem assumir apenas uma quantidade finita de valores. Tal modelo será estendido na seção seguinte para uma situação mais geral. As definições e teoremas apresentados nesta e na próxima seção são descritos e provados com maior rigor em Pliska (1998) e Klebaner (1998).

#### 3.3.1 DESCRIÇÃO DO MODELO DE MERCADO FINITO

Seja um **processo de preços**  $S(t) = (S_0(t), S_1(t), \dots, S_n(t))$  onde cada  $S_i(t)$  representa o processo desenvolvido pelo preço do ativo  $i$  ao longo do tempo, com  $t = 0, 1, \dots, T$ . Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  um espaço de probabilidade onde estes processos estão definidos,  $\mathcal{F}_t$  uma  $\sigma$ -álgebra contida em  $\mathcal{F}$  tal que todo processo  $S_i(t)$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável, e seja  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$  uma filtração constituída por estas  $\sigma$ -álgebras. Assim, por construção, o processo  $S(t)$  é adaptado à filtração  $\mathbb{F}$ .

Em cada intervalo de tempo  $(t-1, t]$ , assume-se que um investidor possui uma quantidade  $a_i(t)$  de cada ativo  $i$ . Isso significa que o valor de  $a_i(t)$  só se modifica imediatamente após os instantes  $t=0,1,\dots,T-1$ , mantendo-se constante no restante do tempo. Assim, o investidor adquire uma quantidade  $a_i(t)$  do ativo  $i$  imediatamente após o instante  $t-1$  e carrega esta posição até o instante  $t$ , baseando-se para isso na informação sobre os preços disponível até o instante  $t-1$ . Desta forma, cada processo  $a_i(t)$  é  $\mathcal{F}_{t-1}$ -mensurável, ou seja, é um processo previsível com relação à filtração  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ .

O conjunto  $a(t) = (a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t))$  das quantidades de cada ativo possuídas pelo investidor é denominado a **carteira** do investidor no instante  $t$ , ou também **estratégia de investimento**.

Por hipótese, assume-se que o ativo  $S_0$  assume valores estritamente positivos ao longo do tempo. Em geral,  $S_0$  representa uma aplicação numa taxa de juros de curto prazo livre de risco  $r(t)$ , ou seja,

$$S_0(t) = S_0(0) \cdot \prod_{i=0}^{t-1} e^{r(i)}$$

o que garante que  $S_0$  seja estritamente positivo se  $S_0(0) > 0$ . Por conveniência, costuma-se fazer também  $S_0(0) = 1$ .

Define-se um **processo de preços descontados**  $\mathbf{S}^*(t) = (S_0^*(t), S_1^*(t), \dots, S_n^*(t))$ , onde cada  $S_i^*(t)$  é dado por

$$S_i^*(t) = \frac{S_i(t)}{S_0(t)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Cada  $S_i^*(t)$  representa desta forma quantas unidades do ativo  $S_0$  podem ser compradas com o preço de uma unidade do ativo  $S_i$ , ou seja, o preço do ativo  $S_0$  passa a ser uma unidade de valor. Por isso, nesta situação o ativo  $S_0$  é chamado de **numerário** do processo descontado. O fato de o ativo  $S_0$  ser em geral uma aplicação na taxa de juros de curto prazo livre de risco, que seria um custo de oportunidade do dinheiro, justifica a denominação processo descontado para  $\mathbf{S}^*$ . Evidentemente,  $S_0^*(t) = 1$  para todo  $t$ .

O **valor** de uma carteira  $\mathbf{a}(t)$  para  $t = 1, 2, \dots, T$  é dado pelo processo:

$$V(t) = \sum_{i=0}^n a_i(t) \cdot S_i(t) = \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{S}(t)$$

isto é, pela soma dos produtos dos preços de cada ativo com a quantidade deste existente na carteira. No instante  $t = 0$  convencionou-se que  $V(0) = \sum_{i=0}^n a_i(0) \cdot S_i(0) = \mathbf{a}(0) \cdot \mathbf{S}(0)$ . O processo

$V(t)$  representa o valor da carteira imediatamente antes do rebalanceamento de carteira no instante  $t$ , mas imediatamente após os preços do instante  $t$  terem sido observados.

Por sua vez, o ganho  $\Delta G(t)$  proporcionado pela carteira entre os instantes  $t-1$  e  $t$  é dado pela variação do valor da carteira no instante  $t$  devida à variação dos preços dos ativos, ou seja:

$$\Delta G(t) = \sum_{i=0}^n a_i(t) \cdot (S_i(t) - S_i(t-1))$$

O processo  $G(t)$  dos **ganhos acumulados** pela estratégia de investimento até o instante  $t$  é definido por:

$$G(t) = \sum_{k=1}^t \Delta G(k) = \sum_{k=1}^t \sum_{i=0}^n a_i(k) \cdot (S_i(t) - S_i(t-1))$$

Uma carteira é denominada **autofinanciada** se todas as mudanças de seu valor são devidas exclusivamente à variação dos preços dos ativos, ou seja, nenhum recurso é aportado ou retirado da carteira durante os rebalanceamentos. Assim, após conhecidos os preços dos ativos no instante  $t$ , os valores da carteira antes e após o rebalanceamento devem ser iguais, ou seja:

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) \cdot S_i(t) = \sum_{i=0}^n a_i(t+1) \cdot S_i(t), \text{ ou } a(t) \cdot S(t) = a(t+1) \cdot S(t).$$

Desta forma, se uma carteira é autofinanciada, é fácil verificar a partir da equação anterior e das definições dos processos  $G(t)$  e  $V(t)$  que:

$$V(t) = V(0) + G(t)$$

De forma análoga, é possível definir os processos do **valor descontado**  $V^*(t)$  e do **ganho acumulado descontado**  $G^*(t)$  da carteira como sendo:

$$V^*(t) = \sum_{i=0}^n a_i(t) \cdot S_i^*(t) = a(t) \cdot S^*(t)$$

$$G^*(t) = \sum_{k=1}^t \sum_{i=0}^n a_i(k) \cdot (S_i^*(t) - S_i^*(t-1))$$

Define-se uma carteira ou estratégia **admissível** como uma carteira autofinanciada e cujo processo de valor é não-negativo.

Um **ativo contingente**  $X$  com vencimento na data  $T$ , por definição, é uma variável aleatória não-negativa em  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ , ou seja, cujo valor é conhecido com certeza no instante  $T$ . É portanto um ativo que dá direito a um pagamento aleatório positivo ou nulo numa única data  $T$ . Assim, um *zero-coupon bond* que pague \$1 numa data futura  $T$  seria um exemplo de ativo contingente, bem como uma opção europeia sobre uma ação com data de vencimento  $T$ .

Um ativo contingente  $X$  é **atingível** se existe uma estratégia admissível que o reproduz, ou seja, para a qual  $V(T) = X$  com probabilidade 1. Isso significa que existe uma estratégia de investimento construída com os ativos  $S_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , cujo valor até a data  $T$  é sempre não-negativo e que em  $T$  assume com certeza um valor igual ao de  $X$ , qualquer que seja este valor. Esta carteira (que pode ou não ser única) é denominada **carteira replicante** de  $X$ .

Um conceito bastante importante é o de arbitragem. Por definição, **arbitragem** é uma estratégia de negociação admissível para a qual o valor inicial da carteira é nulo ( $V(0) = 0$ ) e o valor esperado num instante  $T > 0$  é  $E[V(T)] > 0$ . Como uma estratégia admissível é sempre não-negativa, isso significa que, numa arbitragem, começa-se com um carteira de valor nulo e existe a possibilidade de se obter algum ganho, mas nenhuma chance de ocorrer perda. Evidentemente, esta é uma estratégia de investimento bastante desejável, e num mercado eficiente os investidores procurariam assumir esta posição até o momento em que, pelo mecanismo da oferta e da procura, ela desapareceria. Assim, é bastante razoável supor, num modelo de mercado, que não existem oportunidades de arbitragem.

Seguem-se agora dois teoremas importantes para a precificação de ativos por meio de martingais, ambos apresentados sem as respectivas provas.

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  um espaço de probabilidade filtrado onde o processo de preços de mercado está definido. O modelo de mercado não apresenta oportunidades de arbitragem se e somente se existe uma medida de probabilidade  $Q$  equivalente a  $P$  tal que o processo de preços descontados  $S^*$  é um  $Q$ -martingal (ou seja, um martingal em relação à medida de probabilidade  $Q$ ).  $Q$  é denominada **medida martingal equivalente** ou medida risco-neutra.

Repare que esta medida de probabilidade  $Q$  depende do ativo escolhido como numerário. Se um outro ativo  $S_0'$  com valores estritamente positivos for escolhido como novo numerário, então será definido outro processo de preços descontados  $S^{*'} e existirá outra medida  $Q'$  tal que  $S^{*'}$  é  $Q'$ -martingal, sendo que esta nova medida não necessariamente é igual a  $Q$ . Além disso, para um mesmo numerário  $S_0$ , podem existir várias medidas martingal equivalentes, e não necessariamente uma única.$

Suponha agora que o modelo de mercado não admite arbitragem, e que  $X$  é um ativo contingente atingível com vencimento  $T$ . Então mostra-se que o preço de  $X$  num instante  $t \leq T$  é dado pelo valor  $C(t)$  de qualquer carteira admissível que replique  $X$ , e este valor é dado por:

$$\frac{C(t)}{S_0(t)} = E_Q \left( \frac{X}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

onde  $S_0$  é o preço do ativo numerário,  $Q$  é a medida martingal equivalente,  $E_Q$  é o operador esperança segundo a medida  $Q$ , e  $\mathcal{F}_t$  é a  $\sigma$ -álgebra que representa a informação disponível até o instante  $t$ , ou seja, para a qual todos as variáveis aleatórias  $S_i(t)$  são mensuráveis.

Assim, é possível determinar o preço de um ativo contingente  $X$  se o mesmo for atingível, ou seja, puder ser reproduzido através de uma carteira composta pelos ativos  $S_i$ . Entretanto, se  $X$  não for atingível, pode não ser possível determinar o seu preço.

Um modelo de mercado é dito **completo** se todo ativo contingente é atingível, ou seja, se pode ser reproduzido através de uma carteira replicante de ativos  $S_i$ . Um teorema importante, que não será provado, afirma que um modelo de mercado é completo se e somente se a medida martingal equivalente  $Q$  é única.

Os modelos de mercado completos são úteis porque, na ausência de arbitragem, como todos os ativos contingentes são atingíveis, então todos podem ter seu preço determinado pela equação anterior..

Como exemplo ilustrativo de modelo de mercado finito, será desenvolvido em seguida o conhecido modelo binomial de precificação de derivativos sobre uma ação.

### 3.3.2 MODELO BINOMIAL

Seja um processo de preços  $S = \{B(t), S(t)\}$  composto por apenas dois ativos: um bônus  $B(t)$  e uma ação  $S(t)$ , definido no tempo discreto  $t = 0, 1, \dots, T$ . O bônus é remunerado por uma taxa de juros constante  $r$ , de capitalização contínua, ou seja, o processo do bônus é determinístico, dado por  $B(t) = \exp(r.t)$  (por convenção adota-se  $B(0) = 1$ ). O preço da ação no instante inicial é conhecido, dado por  $S(0)$ . Em cada intervalo de tempo  $[t, t+1]$  o preço da ação  $S(t)$  pode variar da seguinte forma:

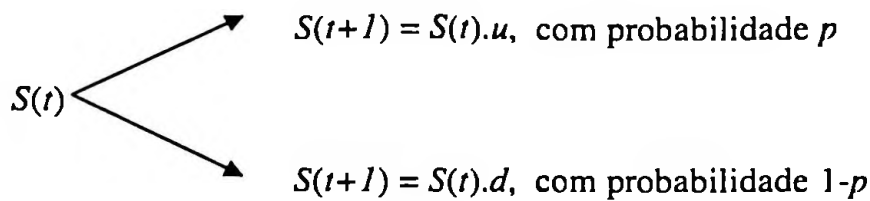


Figura 3.3 – Variação do preço da ação a cada intervalo de tempo

onde os valores  $u$  e  $d$  são constantes,  $d < u$ , e a probabilidade  $p$  é tal que  $0 < p < 1$ . O processo de preços da ação forma assim uma árvore recombinante:

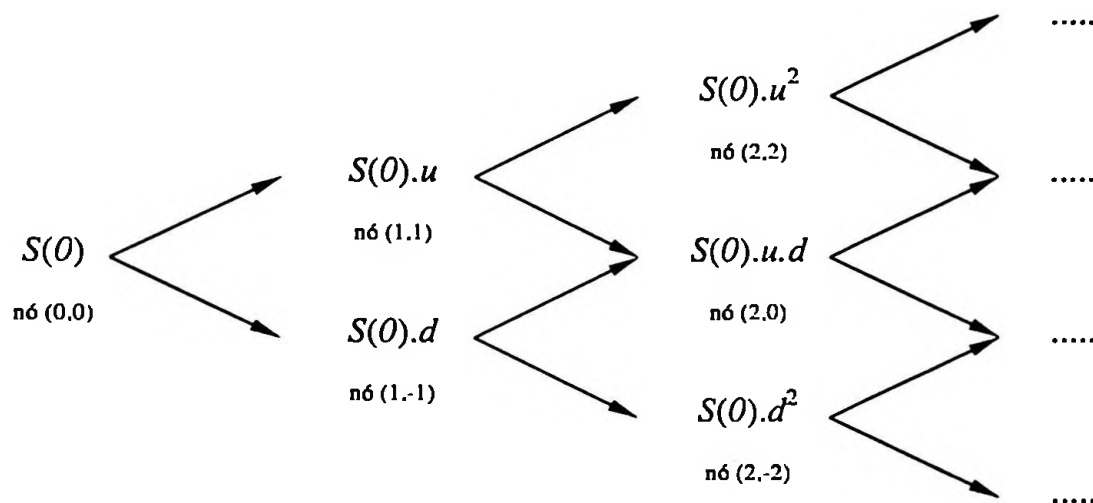


Figura 3.4 – Representação em árvore do processo de preços da ação

Cada nó da árvore é dado por  $(t, j)$ , onde  $t$  é o tempo,  $t = 0, 1, \dots, T$ , e  $j$  é o estado, sendo o número  $j$  igual ao número de subidas menos o número de descidas de qualquer caminho que atinja o nó. Em cada nó  $(t, j)$  da árvore, a ação assume o valor  $S(0).u^j.d^{t-j}$ .

Cada caminho na árvore é dado por  $\omega = (m_1, m_2, \dots, m_T)$ , onde cada  $m_i$  representa um salto na árvore no tempo  $i$ , sendo  $m_i = 1$  se o salto é para cima e  $m_i = -1$  se o salto é para baixo. Como a probabilidade de cada subida é  $p$  e a de cada descida é  $1-p$ , e como cada salto de preços é independente dos anteriores, então a probabilidade de qualquer caminho  $\omega$  com  $u$  saltos para cima e  $v$  saltos para baixo é igual a  $p^u.(1-p)^v$ .

Assim, define-se um espaço de probabilidade filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  onde o processo de preços é definido. O espaço amostral  $\Omega$  é dado pelo conjunto de todos os caminhos  $\omega = (m_1, m_2, \dots, m_T)$ . A  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  é definida como a classe de todos os subconjuntos do espaço finito  $\Omega$ . A

medida de probabilidade  $P$  é dada pela regra definida no parágrafo anterior. E  $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}$  é a filtração gerada pelo processo  $S(t)$ .

Usando o bônus  $B$  como numerário, obtém-se o processo de preços descontados para a ação

$$S^*(t) = \frac{S(t)}{B(t)} = e^{-rt} \cdot S(t)$$

Entre os instantes  $t$  e  $t+1$ , podemos definir a variação  $\Delta S^*(t)$  do preço descontado com sendo

$$\Delta S^*(t) = S^*(t) - S^*(t-1)$$

Assim, é possível expressar o valor de  $S^*(t)$  por

$$S^*(t) = S^*(s) + \sum_{i=s+1}^t \Delta S^*(i)$$

Para que este processo seja um martingal segundo uma medida de probabilidade  $Q$ , é necessário que, para todo  $0 \leq s < t \leq T$  valha a relação:

$$E_Q[S^*(t) | \mathcal{F}_s] = S^*(s)$$

Como  $S^*(t) = S^*(s) + \sum_{i=s+1}^t \Delta S^*(i)$ , isso equivale a

$$E_Q[S^*(t) | \mathcal{F}_s] = E_Q\left[S^*(s) + \sum_{i=s+1}^t \Delta S^*(i) \middle| \mathcal{F}_s\right] = S^*(s) + \sum_{i=s+1}^t E_Q[\Delta S^*(i) | \mathcal{F}_s]$$

Assim, para que  $S^*(t)$  seja um martingal segundo  $Q$ , basta garantir que  $E_Q[\Delta S^*(i) | \mathcal{F}_{i-1}] = 0$  para todo  $i > s$ . Nesta nova medida de probabilidade, ter-se-ia para cada salto:



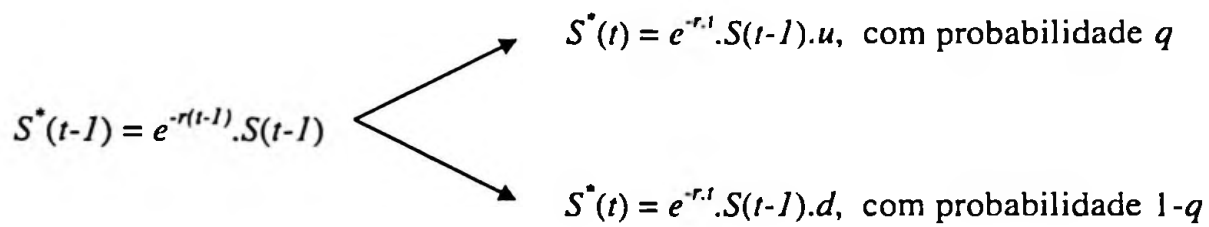


Figura 3.5 – Variação do preço da ação a cada intervalo de tempo na medida  $Q$ .

O valor de  $\Delta S^*(t)$  numa medida martingal equivalente ou risco-neutra  $Q$  seria dado por:

$$\Delta S^*(t) = S^*(t) - S^*(t-1) = \begin{cases} e^{-r(t-1)} \cdot S(t-1) - e^{-r.t} \cdot S(t-1) \cdot u, & \text{com prob. } q \\ e^{-r(t-1)} \cdot S(t-1) - e^{-r.t} \cdot S(t-1) \cdot d, & \text{com prob. } 1-q \end{cases}$$

Desta forma, se o valor esperado de  $\Delta S^*(t)$  for nulo, então:

$$\begin{aligned} E_Q[\Delta S^*(t) | \mathcal{F}_{t-1}] &= \\ &= q \cdot (e^{-r.t} \cdot S(t-1) \cdot u - e^{-r(t-1)} \cdot S(t-1)) + (1-q) \cdot (e^{-r.t} \cdot S(t-1) \cdot d - e^{-r(t-1)} \cdot S(t-1)) = \\ &= e^{-r.t} \cdot S(t-1) \cdot [q \cdot (u - e^r) + (1-q) \cdot (d - e^r)] = \\ &= e^{-r.t} \cdot S(t-1) \cdot [q \cdot (u - d) + d - e^r] = 0 \end{aligned}$$

Decorre daí que  $q = \frac{e^r - d}{u - d}$ . Isso representará uma probabilidade se  $0 < q < 1$ , o que implica em  $d < e^r < u$ , sendo esta portanto a condição para a existência da medida de probabilidade martingal equivalente, e consequentemente para a ausência de arbitragem. Desta forma, a medida martingal equivalente  $Q$  será dada pela mesma regra de formação da medida  $P$ , mas substituindo o valor de  $p$  por  $q$ . Como o valor  $q$  obtido foi único, então a medida de probabilidade  $Q$  também é única, o que implica que o mercado analisado é completo. Conforme mencionado na subseção anterior, a existência da medida martingal equivalente garante que o modelo de mercado não oferece oportunidade de arbitragem.

Seja  $X$  um ativo contingente com vencimento numa data  $t$ . O fato de o mercado ser completo implica que o ativo  $X$  é atingível, ou seja, existe uma estratégia de investimento admissível (não-negativa e autofinanciada) que replica perfeitamente o ativo  $X$  na data  $t$ . Assim, sendo  $X$

um ativo atingível num mercado sem oportunidade de arbitragem, seu preço  $C(s)$  num instante  $s < t$  será dado por:

$$\frac{C(s)}{B(s)} = E_Q \left( \frac{X}{B(t)} \middle| \mathcal{F}_s \right)$$

Por exemplo, fazendo  $s = t-1$  na fórmula acima, tem-se:

$$C(t-1) = E_Q \left( \frac{X \cdot B(t-1)}{B(t)} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right) = E_Q \left( \frac{X \cdot e^{r \cdot (t-1)}}{e^{r \cdot t}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right) = e^{-r} \cdot E_Q (X | \mathcal{F}_{t-1})$$

Se no instante  $t-1$  tiver sido atingido o nó  $(t-1, j)$  então os dois nós subsequentes possíveis são  $(t, j+1)$  e  $(t, j-1)$ , cada qual com probabilidades de ocorrência  $q$  e  $1-q$  segundo a medida  $Q$ . Representando por  $X(j+1)$  e  $X(j-1)$  os valores do ativo contingente nestes dois nós, a equação acima se reduz a:

$$C(t-1) = e^{-r} \cdot E_Q (X | \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{1}{e^r} [q \cdot X(j+1) + (1-q) \cdot X(j-1)]$$

Raciocínio semelhante aplicado sobre o agora ativo contingente  $C(t-1)$  produz a relação:

$$C(t-2, j) = e^{-r} \cdot E_Q (C(t-1) | \mathcal{F}_{t-2}) = \frac{1}{e^r} [q \cdot C(t-1, j+1) + (1-q) \cdot C(t-1, j-1)]$$

De maneira geral, obtém-se

$$C(s-1, j) = e^{-r} \cdot E_Q (C(s) | \mathcal{F}_s) = \frac{1}{e^r} [q \cdot C(s, j+1) + (1-q) \cdot C(s, j-1)]$$

que é a conhecida fórmula recursiva de precificação de derivativos sobre ações usando a árvore binomial.

O fato de o mercado ser completo garante que a carteira replicante autofinanciada existe. Como os dois ativos disponíveis são o bônus  $B$  e a ação  $S$ , sendo  $a_1$  a posição do ativo  $B$  na carteira,  $a_2$  a posição em  $S$  e  $a(t) = (a_1(t), a_2(t))$ , o processo da carteira deve ser tal que o seu valor seja sempre dado por  $C(t)$ . Para tanto, deve-se ter em cada transição da árvore:

$$C(t-1, j) = a_1(t).S(t-1) + a_2(t).B(t-1) \begin{cases} \rightarrow C(t, j+1) = a_1(t).S(t-1).u + a_2(t).B(t-1).e^r \\ \rightarrow C(t, j-1) = a_1(t).S(t-1).d + a_2(t).B(t-1).e^r \end{cases}$$

Figura 3.6 – Variação do preço da opção para cada transição da árvore

Resolvendo as duas equações da direita para  $a_1(t)$  e  $a_2(t)$ , obtém-se:

$$a_1(t) = \frac{C(t, j+1) - C(t, j-1)}{S(t-1).(u-d)}, \quad a_2(t) = \frac{u.C(t, j-1) - d.C(t, j+1)}{B(t-1).e^r.(u-d)}$$

Por verificação, substituindo os valores de  $a_1(t)$  e  $a_2(t)$  na equação da esquerda da transição, obtém-se novamente a equação

$$C(s-1, j) = e^{-r}.E_Q(C(s)|\mathcal{F}_s) = \frac{1}{e^r} [q.C(s, j+1) + (1-q).C(s, j-1)]$$

### 3.4 MODELO DE MERCADO NO TEMPO CONTÍNUO

Será desenvolvida agora uma extensão do modelo de mercado finito, na qual o tempo variará continuamente no intervalo real  $[0, T]$  e os preços dos ativos podem assumir valores na reta real. As definições de termos são análogas às do modelo finito, valendo no entanto para o tempo contínuo.

#### 3.4.1 DESCRIÇÃO DO MODELO EM TEMPO CONTÍNUO

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  um espaço de probabilidade filtrado, com  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$  uma filtração definida para todo  $0 \leq t \leq T$ . Define-se um **processo de preços**  $S(t) = (S_0(t), S_1(t), \dots, S_n(t))$ , onde cada  $S_i(t)$  representa o processo desenvolvido pelo preço do ativo  $i$  ao longo do tempo, com  $t$

pertencente ao intervalo real  $[0, T]$ . Cada processo  $S_i(t)$  é adaptado à filtração  $\mathbb{F}$  e segue um processo de Itô:

$$S_i(t) = S_i(0) + \int_0^t \mu_i(s).ds + \int_0^t \sigma_i(s).dW(s)$$

ou, na forma de equação diferencial estocástica:

$$dS_i(t) = \mu_i(t).dt + \sigma_i(t).dW(t)$$

onde  $W(t)$  é um movimento browniano na medida de probabilidade  $P$ .

Uma **carteira** ou **estratégia de investimento**  $\mathbf{a}(t) = (a_0(t), a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t))$  representa as posições  $a_i(t)$  de cada ativo  $S_i$  possuídas por um investidor em cada instante  $t$ . Por definição, cada um dos processos  $a_i(t)$  é previsível com relação à filtração  $\mathbb{F}$ . Isso significa que, para montar sua estratégia, o investidor utiliza apenas as informações passadas relativas aos preços dos ativos  $S_i$ .

O **valor** de uma carteira  $\mathbf{a}(t)$  num instante  $t$  é dado pelo processo:

$$V(t) = \sum_{i=0}^n a_i(t).S_i(t) = \mathbf{a}(t).\mathbf{S}(t)$$

Por sua vez, o ganho  $dG(t)$  proporcionado pela carteira no intervalo de  $t$  a  $t+dt$  é dado pela alteração do valor da carteira neste período devida à variação dos preços dos ativos, ou seja:

$$dG(t) = \sum_{i=0}^n a_i(t).dS_i(t)$$

O processo  $G(t)$  dos **ganhos acumulados** pela estratégia de investimento até o instante  $t$  é definido por:

$$G(t) = \sum_{i=0}^n \int_0^t a_i(s).dS_i(s)$$

Por definição, uma estratégia de investimento é **autofinanciada** se o seu valor a cada instante é dado pelo valor inicial mais os ganhos acumulados até aquele instante, ou seja, nenhum recurso é aportado ou retirado da carteira ao longo do tempo. Tem-se assim:

$$V(t) = V(0) + G(t)$$

Na forma de equação diferencial estocástica, isso equivale à fórmula:

$$dV(t) = dG(t) = \sum_{i=0}^n a_i(t).dS_i(t)$$

Para que esta relação seja um processo de Itô, devem valer para a carteira a as seguintes

restrições:  $\int_0^T \left| \sum_{i=0}^n a_i(t).\mu_i(t) \right|.dt < \infty$  e  $\int_0^T \left( \sum_{i=0}^n a_i(t).\sigma_i(t) \right)^2 .dt < \infty$  com probabilidade 1.

Uma carteira  $a(t)$  é dita **admissível** se for autofinanciada, seu processo de valor  $V(t)$  for

estritamente positivo e se  $E \left[ \int_0^t \left( \sum_{i=0}^n a_i(u).\sigma_i(u) \right)^2 du \right] < \infty$ .

Assumindo que o processo  $S_0(t)$  é estritamente positivo, pode-se usar o ativo  $S_0$  como numerário e definir o **processo de preços descontados**  $S^*(t) = (S_0^*(t), S_1^*(t), \dots, S_n^*(t))$ , onde cada  $S_i^*(t)$  é dado por

$$S_i^*(t) = \frac{S_i(t)}{S_0(t)}, i = 0, 1, 2, \dots, n, 0 \leq t \leq T.$$

Em geral, o ativo  $S_0$  representa um investimento na taxa de juros de curtíssimo prazo  $r(t)$ , a qual tanto pode ser um processo determinístico (função apenas do tempo) quanto estocástico. Assim o processo  $S_0(t)$  é dado por:

$$S_0(t) = \exp \left( \int_0^t r(t).dt \right)$$

De forma semelhante à apresentada no modelo finito, é possível definir os processos do **valor descontado**  $V^*(t)$  e do **ganho acumulado descontado**  $G^*(t)$  da carteira como sendo:

$$V^*(t) = \sum_{i=0}^n a_i(t) \cdot S_i^*(t) = a(t) \cdot S^*(t)$$

$$G^*(t) = \sum_{i=0}^n \int_0^t a_i(t) \cdot dS_i^*(t)$$

É possível mostrar que, se uma dada estratégia de investimento  $a(t)$  é autofinanciada, então  $V^*(t) = V^*(0) + G^*(t)$  e vice-versa, ou seja:

$$V(t) = V(0) + G(t) \Leftrightarrow V^*(t) = V^*(0) + G^*(t)$$

Um **ativo contingente**  $X$  com vencimento na data  $T$ , por definição, é uma variável aleatória não-negativa em  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ , ou seja, cujo valor é conhecido com certeza no instante  $T$ . É portanto um ativo que dá direito a um pagamento aleatório positivo ou nulo numa única data  $T$ , como por exemplo um *zero-coupon bond* que pague \$1 numa data futura  $T$ , ou uma opção europeia sobre uma ação com data de vencimento  $T$ .

Um ativo contingente  $X$  é **atingível** se  $E[X|\mathcal{F}_t] < \infty, t \leq T$  e se existe uma estratégia admissível que o reproduz, ou seja, para a qual  $V(T) = X$  com probabilidade 1. Isso significa que existe uma estratégia de investimento construída com os ativos  $S_i, i = 0, 1, \dots, n$ , cujo valor até a data  $T$  é sempre não-negativo e que em  $T$  assume com certeza um valor igual ao de  $X$ , qualquer que seja este valor. Esta carteira (que pode ou não ser única) é denominada **carteira replicante** de  $X$ .

Define-se **arbitragem** como estratégia de negociação admissível para a qual o valor inicial da carteira é nulo ( $V(0) = 0$ ) e o valor esperado num instante  $T > 0$  é  $E[V(T)] > 0$ . Supõe-se, num modelo de mercado com investidores racionais, que não existem oportunidades de arbitragem.

Seguem-se agora dois teoremas importantes para a precificação de ativos, ambos apresentados sem as respectivas provas.

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  um espaço de probabilidade filtrado onde o processo de preços de mercado está definido. O modelo de mercado não apresenta oportunidades de arbitragem se e somente se existe uma medida de probabilidade  $Q$  equivalente a  $P$  tal que o processo de preços

descontados  $S^*$  é um  $Q$ -martingal (ou seja, um martingal em relação à medida de probabilidade  $Q$ ).  $Q$  é denominada **medida martingal equivalente** ou medida risco-neutra.

Suponha que o modelo de mercado não admite arbitragem, e que  $X$  é um ativo contingente atingível com vencimento  $T$ . Então mostra-se que o preço de  $X$  num instante  $t \leq T$  é dado pelo valor  $C(t)$  de qualquer carteira admissível que replique  $X$ , e este valor é dado por:

$$\frac{C(t)}{S_0(t)} = E_Q \left( \frac{X}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

onde  $S_0$  é o preço do ativo numerário,  $Q$  é a medida martingal equivalente,  $E_Q$  é o operador esperança segundo a medida  $Q$ , e  $\mathcal{F}_t$  é a  $\sigma$ -álgebra que representa a informação disponível até o instante  $t$ , ou seja, para a qual todos as variáveis aleatórias  $S_i(t)$  são mensuráveis.

Um modelo de mercado é completo se qualquer ativo contingente é atingível. Desta forma, por argumento de não-arbitragem, o preço de qualquer ativo contingente deverá ser igual ao da estratégia de investimento que o reproduz. É possível mostrar que um modelo de mercado é completo se e somente se existe uma única medida  $Q$  martingal equivalente.

## 4 MODELOS ESTOCÁSTICOS PARA O COMPORTAMENTO DA ESTRUTURA TEMPORAL DE TAXAS DE JUROS

### 4.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Antes de iniciar a descrição dos modelos para a estrutura temporal de taxas de juro, são necessárias algumas definições de termos, que serão feitas conforme Baxter e Rennie (2000, pgs.129-135).

Será representado por  $P(t,T)$  o valor, no instante  $t$ , de um *zero-coupon bond* que paga \$1 na data  $T > t$ . Assim,  $P(t,T)$  pode ser encarado como o valor presente na data  $t$  de \$1 a ser recebido em  $T$ . Quando o valor deste *zero-coupon bond* for também função da taxa de juros de curto prazo  $r(t)$  (definida na seqüência), será representado na forma  $P(r(t),t,T)$ .

A taxa de juros à vista ou *spot* (ou, em inglês, *yield*)  $R(t,T)$  é a taxa de juros média proporcionada por um *zero-coupon bond*  $P(t,T)$ , representada na forma de taxa de capitalização contínua. Assim, na data  $t$ , sendo  $P(t,T)$  o valor inicial do *bond* e 1 seu valor final na data  $T$ , a taxa de juros  $R(t,T)$  é dada por:

$$P(t,T).e^{(T-t)R(t,T)} = 1 \quad \text{ou} \quad P(t,T) = e^{-(T-t)R(t,T)}$$

De forma equivalente:

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}$$

A taxa de juros de curto prazo ou instantânea  $r(t)$  é aquela proporcionada, na data  $t$ , por um *zero-coupon bond* com prazo tendendo a zero, ou seja, é a remuneração de uma aplicação em renda fixa cujo prazo para recebimento  $T-t$  tende a zero. Usando a definição prévia de taxa de juros à vista, isso corresponde a fazer com que a data futura de recebimento  $T$  seja bastante próxima de  $t$ , ou seja:

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t,T) = \lim_{T \rightarrow t} \left( -\frac{\ln P(t,T)}{T-t} \right) = \lim_{T \rightarrow t} \left( -\frac{\ln P(t,T) - \ln P(t,t)}{T-t} \right)$$

pois  $P(t,t)=1$  e  $\ln P(t,t)=0$ . Da definição de derivada, segue que:



$$r(t) = \left( - \frac{d \ln P(t, T)}{dT} \right)_{T=t}$$

Na prática, a taxa de juros de um dia (SELIC ou CDI) pode ser considerada uma boa aproximação da taxa de juros instantânea.

Conforme visto no capítulo 2, uma taxa de juros a termo é aquela pela qual se aceita, num instante  $t$ , fechar uma negociação em que se concorda em fazer uma aplicação na data futura  $T_1 > t$ , com vencimento em outra data posterior  $T_2 > T_1$ . Representando por  $F(t, T_1, T_2)$  a taxa a termo em capitalização contínua vigente no instante  $t$  para um negócio entre as datas  $T_1$  e  $T_2$ , o valor da taxa é dado por:

$$F(t, T_1, T_2) = \ln \left[ \left( \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} \right)^{\frac{1}{T_2 - T_1}} \right] = - \frac{\ln P(t, T_2) - \ln P(t, T_1)}{T_2 - T_1}$$

A definição de taxa a termo instantânea é análoga à de taxa de juros de curto prazo. Sendo denotada por  $f(t, T)$ , representa a taxa a termo vigente na data  $t$  para uma aplicação em outra data  $T > t$  e com prazo tendendo a zero. Ou seja:

$$f(t, T) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} F(t, T, T + \Delta T) = - \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\ln P(t, T + \Delta T) - \ln P(t, T)}{\Delta T}$$

$$f(t, T) = - \frac{d \ln P(t, T)}{dT}$$

Comparando as definições e as fórmulas de  $r(t)$  e  $f(t, T)$  é fácil verificar que  $f(t, t) = r(t)$ .

## 4.2 MODELOS ESTOCÁSTICOS UNIFATORIAIS PARA A ESTRUTURA TEMPORAL DE TAXAS DE JUROS

Hull (1999: pg. 564) classifica os modelos para a estrutura temporal de taxas de juros em dois grupos: os modelos de equilíbrio e os modelos de não-arbitragem. Ambos são descritos na sequência.

#### 4.2.1 MODELOS DE EQUILÍBRIO

Os modelos de equilíbrio, conforme Hull (1999: pg. 564), são aqueles modelos de estrutura temporal de taxas de juros que partem de um modelo de equilíbrio econômico geral contendo diversas variáveis, a partir do qual derivam um processo estocástico para a taxa de juros de curto prazo.

Os modelos de equilíbrio podem apresentar diversos números de fatores, sendo que se entende por fatores as fontes de incerteza ou aleatoriedade do modelo. Os modelos de um fator para a taxa de juros instantânea podem, de maneira geral, ser representados através de um processo de Itô da forma:

$$dr = m(r)dt + s(r)dz$$

onde a tendência  $m$  e a volatilidade  $s$  são funções de  $r$ , mas não do tempo. Dentre os modelos mais conhecidos estão os modelos de Merton, de Vasicek e de Cox, Ingersoll e Ross (CIR), descritos a seguir.

##### a) MODELO DE MERTON

Apresentado por Merton (1973), é o modelo mais simples, segundo o qual o processo para a taxa de juros de curto prazo é um processo de Wiener simples, dado pela equação diferencial estocástica:

$$dr = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz$$

onde a tendência  $\mu$  e a volatilidade  $\sigma$  são constantes,  $t$  é o tempo e  $z$  é um movimento browniano padronizado, dado na medida de probabilidade do “mundo real”. Representando a equação acima na forma integral, temos:

$$r(t) = r(s) + \int_s^t \mu \cdot du + \int_s^t \sigma \cdot dz(u) = r(s) + \mu \cdot (t - s) + \sigma \cdot [z(t) - z(s)]$$

Como  $[z(t)-z(s)]$  possui distribuição normal com média zero e variância  $(t-s)$ , esta equação indica que a distribuição de probabilidade da taxa de curto prazo é normal, com média e

variância que crescem linearmente ao longo do tempo. Ou seja, num dado momento  $s$ , a distribuição de probabilidade esperada para  $r$  num outro instante  $t > s$  é dada por:

$$r(t) \sim N(r(s) + (t-s)\mu, (t-s)\sigma^2)$$

Segundo Munnik (1996), é possível mostrar que, para este modelo estocástico de comportamento da taxa de juros de curto prazo, o preço num instante  $t$  de um *zero-coupon bond* que paga \$1 em uma data futura  $T > t$  é dado pela fórmula:

$$P(r(t), t, T) = \exp\left(-r(t)\tau - (\mu + \lambda\sigma)\frac{\tau^2}{2} + \sigma^2\frac{\tau^3}{6}\right)$$

onde  $\tau = T - t$  é o prazo da operação e  $\lambda$  é o prêmio de risco de mercado, que é uma constante que depende do grau de aversão a risco dos investidores. A partir desta equação obtém-se a curva de juros à vista (*yield curve*), dada por:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(r(t), t, \tau)}{\tau} = r(t) + (\mu + \lambda\sigma)\frac{\tau}{2} - \sigma^2\frac{\tau^2}{6}$$

A curva de juros seria portanto uma função quadrática do prazo da operação, partindo do valor da taxa de juros de curto prazo, apresentando inicialmente uma tendência de crescimento mas em seguida revertendo para taxas decrescentes de juros até que no limite:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = -\infty$$

Esta reversão para taxas negativas tende a ser tão mais rápida quanto maior o termo de volatilidade  $\sigma$ . Por sua vez, quanto maior o prêmio de risco de mercado  $\lambda$ , maior a inclinação inicial da curva de juros.

Embora apresente uma certa semelhança com curvas de juros de mercado (cuja inclinação geralmente é positiva no começo da curva e se reduz ao longo do tempo), seu comportamento no longo prazo é distante da realidade, onde as taxas de juros costumam ser finitas e positivas. Tal deficiência decorre de dois inconvenientes do modelo. Em primeiro lugar, o modelo implica que a dispersão da distribuição de  $r$  aumenta ao longo do tempo, embora na prática se verifique que a taxa de juros instantânea tenda a se distribuir em torno de um valor médio de longo prazo. Ou seja, quando as taxas de juros estão muito altas, a tendência futura é que

caiam, e quando estão muito baixas, a tendência futura é que subam, voltando a se aproximar do valor médio de longo prazo, de forma que tanto o valor médio quanto a dispersão da distribuição de  $r$  tendem a se estabilizar para prazos mais longos. Este comportamento, denominado reversão à média, é típico para as taxas de juros, e não é contemplado pelo modelo de Merton. O outro inconveniente do modelo, devido ao fato de assumir distribuição normal, é permitir a possibilidade de taxas de juros negativas. Embora isto já tenham ocorrido em alguns poucos momentos no passado em alguns países, é algo que dificilmente acontece, e é desejável de um modelo de taxas de juros que exclua esta possibilidade. Os modelos de Vasicek e Cox-Ingersoll-Ross, apresentados mais à frente, procuram superar tais falhas.

#### b) MODELO DE VASICEK

Apresentado por Vasicek (1977), procura incorporar no componente da tendência da equação de Itô a propriedade de reversão à média, resultando na equação diferencial estocástica:

$$dr = a.(b - r).dt + \sigma .dz$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $\sigma$  são constantes positivas, representando respectivamente a velocidade de reversão à média, a taxa média de juros de longo prazo e a volatilidade da taxa de curto prazo. A componente de tendência  $a.(b-r)$  assume valores positivos quando  $r < b$  e negativos se  $r > b$ , forçando a taxa instantânea  $r$  a se aproximar de  $b$ .

Para obter a distribuição de probabilidade de  $r(t)$ , é necessário resolver a equação diferencial estocástica acima. Para tanto, aplicamos o lema de Itô sobre a função auxiliar  $g(r,t) = a.(r - b).exp(a.t)$ :

$$dg = \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial r} a.(b - r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial g}{\partial r} \sigma .dz$$

$$dg = [a^2.(r - b).exp(a.t) + a^2.(b - r).exp(a.t)]dt + a.\sigma .exp(a.t).dz = a.\sigma .exp(a.t).dz$$

Escrevendo a equação acima na forma integral, tem-se:

$$\int_0^t dg(s) = g(t) - g(0) = \int_0^t a.\sigma .exp(a.s).dz(s)$$

$$a.(r(t) - b)e^{at} - a.(r(0) - b) = a.\sigma \int_0^t e^{as} dz(s)$$

Isolando  $r(t)$ :

$$r(t) = b + e^{-at} (r(0) - b) + e^{-at} \sigma \int_0^t e^{as} dz(s)$$

Como, no termo à direita da equação acima, a integral estocástica possui esperança nula, o valor esperado para  $r(t)$  no instante zero é igual a:

$$E[r(t)] = b + (r - b).e^{-at}$$

A variância de  $r(t)$ , por sua vez, é dada por:

$$Var(r(t)) = E[(r(t) - E[r(t)])^2] = E\left[\left(e^{-at} \cdot \sigma \int_0^t e^{as} dz(s)\right)^2\right] = e^{-2at} \cdot \sigma^2 \cdot E\left[\left(\int_0^t e^{as} dz(s)\right)^2\right]$$

Pela Isometria de Itô, segue que:

$$Var(r(t)) = e^{-2at} \cdot \sigma^2 \cdot E\left[\left(\int_0^t e^{2as} ds\right)^2\right] = e^{-2at} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{(e^{2at} - 1)}{2a} = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})$$

Assim, como a integral estocástica  $\int_0^t e^{as} dz(s)$  tem distribuição normal, a distribuição de probabilidade de  $r(t)$  também é normal, dada por

$$r(t) \sim N\left(b + (r(0) - b)e^{-at}, \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})\right)$$

No longo prazo ( $t$  crescente), temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(r(t)) = b$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Var(r(t)) = \frac{\sigma^2}{2a}$$

ou seja, a distribuição de  $r$  tende a se estabilizar para  $t$  grande, com sua média e variância assumindo valores finitos quando  $t$  tende a infinito. Este comportamento é mais próximo do da curva de juros real do que o proposto pelo modelo de Merton, uma vez que a probabilidade de a taxa de juros assumir valores muito altos ou baixos se reduz consideravelmente.

Utilizando-se esta especificação para o comportamento estocástico da taxa de juros instantânea, pode-se deduzir (MUNNIK: 1996), para um dado instante  $t$ , o preço de um *zero-coupon bond* com data de vencimento  $T$ , que é dado por:

$$P(r(t), t, T) = \exp\left(\frac{1}{a}(1 - e^{-a\tau})\left(b + \lambda\frac{\sigma}{a} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2} - r(t)\right) - \tau\left(b + \lambda\frac{\sigma}{a} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right) - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-a\tau})^2\right)$$

onde  $\tau = T - t$  e  $\lambda$  é o prêmio de risco de mercado. Tal relação implica que a curva de juros expressa na forma de taxas à vista é dada por:

$$R(t, T) = \frac{(1 - e^{-a\tau})}{a\tau}\left(r(t) - b - \lambda\frac{\sigma}{a} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right) + \left(b + \lambda\frac{\sigma}{a} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right) + \frac{\sigma^2}{4a^3\tau}(1 - e^{-a\tau})^2$$

À medida que o prazo  $\tau$  cresce, o valor da taxa de juros à vista tende a:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(t, T) = b + \lambda\frac{\sigma}{a} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}$$

ou seja, um valor finito e diretamente proporcional com o prêmio de risco de mercado. Substituindo esta última expressão na anterior, pode-se reescrever a equação geral da curva de juros à vista na forma:

$$R(t, T) = \frac{(1 - e^{-a\tau})}{a\tau}(r(t) - R(t, \infty)) + R(t, \infty) + \frac{\sigma^2}{4a^3\tau}(1 - e^{-a\tau})^2$$

Fazendo-se o limite de  $T$  tendendo a  $t$  para a expressão acima obtém-se  $R(t, t) = r(t)$ . Ou seja, a curva de juros parte de  $r(t)$  e cresce (ou decresce) tendendo assintoticamente a  $R(t, \infty)$ .

Embora resolva o problema da reversão à média, propiciando curvas de juros à vista mais realísticas, cujas taxas não caem a valores negativos para prazos mais longos, o modelo ainda apresenta o inconveniente de atribuir probabilidades não nulas a taxas de juros negativas,

devido à sua distribuição normal. O modelo de Cox-Ingersoll-Ross procura resolver este problema.

c) MODELO DE COX, INGERSOLL E ROSS

Proposto por Cox, Ingersoll e Ross (1985), é também conhecido por modelo CIR, e representa o comportamento da taxa instantânea da forma:

$$dr = a.(b - r).dt + \sigma.\sqrt{r}.dz$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $\sigma$  são constantes positivas. O modelo CIR, da mesma forma que o de Vasicek, incorpora a propriedade de reversão à média, evitando que a média e a variância da distribuição de  $r$  cresçam indefinidamente. O acréscimo da raiz de  $r$  no termo de volatilidade faz com que, se a relação  $2.a.b \geq \sigma^2$  for válida e a taxa de juros inicial for positiva,  $r$  seja não-negativo com probabilidade 1. Isso ocorre porque, à medida que  $r$  se aproxima de zero, a componente de volatilidade da equação diferencial diminui, reduzindo o tamanho das variações aleatórias e tornando mais improvável a possibilidade de que a taxa instantânea se reduza ainda mais. A distribuição de  $r$  ao longo do tempo será qui-quadrada não-centrada com  $2q+2$  graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade proporcional à taxa de juros instantânea. Num momento  $s$ , a distribuição de probabilidade para o instante  $t > s$  é dada por:

$$r(t) \sim \chi(2.c.r(s), 2q + 2, 2u)$$

$$c = \frac{2a}{\sigma^2(1 - e^{-a(t-s)})}$$

$$u = c.r(s).e^{-a(t-s)}$$

$$v = c.r(t)$$

$$q = \frac{2ab}{\sigma^2} - 1$$

Tal distribuição implica numa média e numa variância da taxa instantânea no instante  $t$  dadas por:

$$E(r(t)) = b + (r(t) - b)e^{-a(t-s)}$$

$$Var(r(t)) = r(s) \left( \frac{\sigma^2}{a} \right) (e^{-a(t-s)} - e^{-2a(t-s)}) + b \left( \frac{\sigma^2}{2a} \right) (1 - e^{-a(t-s)})^2$$

sendo que para  $t$  tendendo a infinito, os valores da média e variância da distribuição ficam:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(r(t)) = b$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Var(r(t)) = b \cdot \left( \frac{\sigma^2}{2a} \right)$$

Segundo Munnik (1996, pg. 78), o valor de um *zero-coupon bond* produzido por esta especificação de comportamento da taxa de juros instantânea é dado por:

$$P(r(t), t, T) = A(\tau) \cdot e^{-B(\tau) \cdot r(t)}$$

$$A(\tau) = \left( \frac{2\gamma \cdot e^{(\tilde{a} + \gamma)\tau/2}}{(\tilde{a} + \gamma)(e^\tau - 1) + 2\gamma} \right)^{\frac{(\tilde{a} + \gamma)R(t, \infty)}{\sigma^2}}$$

$$B(\tau) = \frac{2(e^\tau - 1)}{(\tilde{a}^2 + \gamma)(e^\tau - 1) + 2\gamma}$$

$$\gamma = (\tilde{a}^2 + 2\sigma^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{a} = a - \lambda\sigma$$

onde  $\tau = T - t$  e  $\lambda$  é o prêmio de risco de mercado, e

$$R(t, \infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = \frac{2ab}{\tilde{a} + \gamma}$$

é a taxa de juros à vista para um *zero-coupon bond* com prazo tendendo ao infinito. A curva de juros à vista decorrente deste modelo é portanto



$$R(t, T) = \frac{-\ln P(r(t), t, \tau)}{\tau} = \frac{B(\tau)}{\tau} r(t) - \frac{(\tilde{a} + \gamma) \ln(A(\tau))}{2ab \tau}$$

É fácil ver que, para  $T$  tendendo a  $t$ , o valor de  $R(t, T)$  converge para  $r(t)$ , e para  $T$  tendendo a infinito,  $R(t, T)$  se aproxima de  $R(t, \infty)$ .

#### 4.2.2 MODELOS DE NÃO ARBITRAGEM

Os modelos de equilíbrio apresentam a inconveniência de não se ajustarem perfeitamente à curva de juros do mercado, ou seja, por mais bem calibrados que estejam seus parâmetros, de maneira geral não conseguem reproduzir com exatidão os preços dos títulos de renda fixa negociados no mercado, podendo em alguns casos produzir erros consideráveis. Se não conseguem sequer precificar corretamente os preços de título de renda fixa, podem fazer trabalho ainda pior na determinação dos preços das opções, uma vez que, segundo Hull (1999, pg. 571), um erro de 1% no preço de um título pode induzir a erros de até 25% no preço de sua opção, de forma que os operadores se sentem pouco confortáveis em usar este tipo de modelos.

Para contornar esta dificuldade, foram desenvolvidos modelos de não-arbitragem para estrutura temporal de taxas de juros, os quais são capazes de reproduzir exatamente os preços dos títulos de renda fixa negociados no mercado. Enquanto os modelos de equilíbrio partem das características das distribuição de probabilidade da taxa instantânea e, utilizando argumentos de não-arbitragem, deduzem sua estrutura temporal de taxas de juros, que pode ser diferente da de mercado, os modelos de não-arbitragem utilizam a ETTJ de mercado na sua calibração, de maneira que a curva de juros resultante do modelo é igual à de mercado. Se nos modelos de equilíbrio a curva de juros é uma saída do modelo, nos modelos de não-arbitragem é um dado de entrada.

Esta propriedade dos modelos de não-arbitragem é conseguida fazendo-se com que o termo de tendência de sua equação diferencial estocástica seja função tanto da taxa instantânea  $r$  quanto do tempo  $t$ .

##### a) MODELO DE HO E LEE

Foi apresentado por Ho e Lee (1986) na forma de uma árvore binomial de preços de bônus, com dois parâmetros: o desvio-padrão da taxa de juros instantânea e o prêmio de risco de mercado. Entretanto, possui também uma representação no tempo contínuo, pela qual a taxa de juros instantânea, segundo uma medida de probabilidade neutralizadora do risco, é dada por:

$$r(t) = \theta(t) + \sigma \cdot z(t)$$

ou, equivalentemente:

$$dr = \frac{d\theta(t)}{dt} dt + \sigma \cdot dz$$

onde  $\sigma$  é uma volatilidade constante da taxa instantânea,  $z(t)$  é um movimento browniano padronizado definido na medida risco-neutra  $Q$  e  $\theta(t)$  é uma função do tempo escolhida de maneira a garantir que a estrutura temporal de taxas de juros produzida pelo modelo seja igual à curva de juros do mercado.

Para se determinar esta especificação de  $\theta(t)$ , deverá ser calculado o preço do *zero-coupon bond*  $P(t, T)$  em função de  $\theta(t)$ , que será em seguida ajustado de maneira que, para  $t=0$ , os valores calculados para  $P(0, T)$  coincidam com os de mercado. Para tanto, será necessário obter como resultado intermediário a distribuição de  $y(t, T) = \int_t^T r(s) \cdot ds$ :

$$\begin{aligned} y(t, T) &= \int_t^T r(s) \cdot ds = \int_t^T \left[ \theta(s) + \sigma \cdot \int_0^s dz(u) \right] \cdot ds = \\ &= \int_t^T \theta(s) \cdot ds + \sigma \int_t^T \int_0^s dz(u) \cdot ds = \int_t^T \theta(s) \cdot ds + \sigma \int_0^t \int_t^T ds \cdot dz(u) + \sigma \int_t^T \int_u^T ds \cdot dz(u) = \\ &= \int_t^T \theta(s) \cdot ds + \sigma (T - t) \int_0^t dz(u) + \sigma \int_t^T (T - u) dz(u) \\ &= \int_t^T \theta(s) \cdot ds + \sigma \cdot (T - t) [z(t) - z(0)] + \sigma \int_t^T (T - u) dz(u) \end{aligned}$$

Lembrando que  $\sigma \cdot z(t) = r(t) - \theta(t)$ , tem-se que:

$$y(t, T) = \int_t^T \theta(s) \cdot ds + (T - t) [r(t) - \theta(t) - r(0) + \theta(0)] + \sigma \int_t^T (T - u) dz(u)$$

Como a integral estocástica no lado direito da equação acima possui distribuição normal com esperança nula, o valor esperado de  $y(t, T)$ , dada a informação disponível no instante  $t$ , é igual a:

$$E[y(t, T) | \mathcal{F}_t] = \int_t^T \theta(s) ds + (T-t)[r(t) - \theta(t) - r(0) + \theta(0)]$$

A variância de  $y(t, T)$ , por sua vez, é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Var}(y(t, T) | \mathcal{F}_t) &= E[(y(t, T) - E[y(t, T) | \mathcal{F}_t])^2 | \mathcal{F}_t] = \\ &= E\left[\left(\sigma \int_t^T (T-u) dz(u)\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right] = \sigma^2 \int_t^T (T-u)^2 du = \frac{\sigma^2 (T-t)^3}{3} \end{aligned}$$

onde a penúltima passagem segue por Isometria de Itô.

Define-se agora  $B_{t,T}$  como o valor na data  $T$  de uma aplicação de \$1 no instante  $t$  remunerada continuamente à taxa de curto prazo  $r$ , ou seja:

$$B_{t,T} = \exp\left(\int_t^T r(s) ds\right) = \exp(y(t, T))$$

Seja  $P(t, T)$  o valor no instante  $t$ , de um *zero-coupon bond* que vence na data  $T > t$  pagando \$1.

Na medida risco-neutra, usando como numerário a variável  $B_{0,t}$ , o valor  $P(t, T)$  será dado por:

$$\frac{P(t, T)}{B_{0,t}} = E_Q\left[\frac{P(T, T)}{B_{0,T}} \middle| \mathcal{F}_t\right] = E_Q\left[\frac{1}{B_{0,T}} \middle| \mathcal{F}_t\right] = E_Q\left[\frac{1}{B_{0,t} B_{t,T}} \middle| \mathcal{F}_t\right] = \frac{E_Q[B_{t,T}^{-1} | \mathcal{F}_t]}{B_{0,t}}$$

ou seja,

$$P(t, T) = E_Q[B_{t,T}^{-1} | \mathcal{F}_t]$$

Como  $y(t, T)$  tem distribuição normal, então  $B_{t,T}^{-1} = \exp(-y(t, T))$  tem distribuição lognormal com esperança igual a:

$$E_Q[B_{t,T}^{-1} | \mathcal{F}_t] = \exp(-E_Q[y(t, T) | \mathcal{F}_t] + \text{Var}(y(t, T) | \mathcal{F}_t)/2)$$

Daí

$$P(t, T) = \exp(-E[y(t, T) | \mathcal{F}_t] + \text{Var}(y(t, T) | \mathcal{F}_t)/2) =$$

$$= \exp \left[ - \int_t^T \theta(s).ds - (T-t)[r(t) - \theta(t) - r(0) + \theta(0)] + \frac{\sigma^2(T-t)^3}{6} \right]$$

Para que tal função seja compatível com a ETTJ vigente no instante 0, deve valer, para  $P(0, T)$  e  $f(0, T)$  dados pela ETTJ:

$$P(0, T) = \exp \left[ - \int_0^T \theta(s).ds + \frac{\sigma^2 T^3}{6} \right]$$

$$\ln P(0, T) = - \int_0^T \theta(s).ds + \frac{\sigma^2 T^3}{6}$$

$$f(0, T) = - \frac{\partial \ln P(0, T)}{\partial T} = \theta(T) - \frac{\sigma^2 T^2}{2}$$

Daí, obtém-se a especificação de  $\theta(t)$  compatível com a ETTJ do instante 0:

$$\theta(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

e portanto o processo estocástico de  $r(t)$  pode ser representado por:

$$r(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma.z(t)$$

Desta forma, a distribuição de probabilidade esperada para  $r$  num instante futuro  $t > 0$ , na medida risco-neutra, é dada por:

$$r(t) \sim N \left( f(0, t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2}, \sigma^2 t \right)$$

Assim como no modelo de Merton, também no modelo de Ho e Lee a média e a variância da taxa de juros instantânea crescem linearmente com o tempo.

Conhecido  $\theta(t)$ , o valor de  $P(t, T)$  segundo o modelo de Ho e Lee é igual a:

$$\begin{aligned}
P(t, T) &= \exp \left[ - \int_t^T \theta(s) . ds - (T - t) [r(t) - \theta(t) - r(0) + \theta(0)] + \frac{\sigma^2 (T - t)^3}{6} \right] = \\
&= \exp \left[ - \int_t^T \left( f(0, s) + \frac{\sigma^2 s^2}{2} \right) ds - (T - t) \left[ r(t) - f(0, t) - \frac{\sigma^2 t^2}{2} - r(0) + f(0, 0) \right] + \frac{\sigma^2 (T - t)^3}{6} \right] = \\
&= \exp \left[ - \int_t^T f(0, s) . ds - \int_t^T \frac{\sigma^2 s^2}{2} . ds - (T - t) \left[ r(t) - f(0, t) - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right] + \frac{\sigma^2 (T - t)^3}{6} \right] = \\
&= \exp \left[ \int_t^T \frac{\partial \ln P(0, s)}{\partial s} . ds - \frac{\sigma^2 \cdot (T^3 - t^3)}{6} - (T - t) \left[ r(t) - f(0, t) - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right] + \frac{\sigma^2 (T - t)^3}{6} \right] = \\
&= \exp \left[ \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - (T - t) [r(t) - f(0, t)] - \frac{\sigma^2 \cdot t \cdot (T - t)^2}{2} \right] \\
P(t, T) &= \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left[ - (T - t) [r(t) - f(0, t)] - \frac{\sigma^2 \cdot t \cdot (T - t)^2}{2} \right]
\end{aligned}$$

ou, fazendo  $\tau = T - t$ :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left( - \frac{1}{2} \sigma^2 t \cdot \tau^2 - \tau \cdot r(t) + \tau \cdot f(0, t) \right)$$

fórmula esta semelhante à fornecida por Hull (1999, pg. 572).

Da equação do preço do *zero-coupon bond* decorre que a curva de juros à vista é dada por

$$R(t, T) = - \frac{\ln P(t, T)}{\tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 t \cdot \tau + r(t) - f(0, t) - \frac{\ln P(0, t + \tau) - \ln P(0, t)}{\tau}$$

Quando o prazo  $\tau$  tende a zero, é fácil ver que o valor de  $R(t, T)$  na equação acima tende a  $r(t)$ , conforme seria esperado. Por outro lado, quando o prazo tende a infinito, temos que

$$R(t, \infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(t, T) = \infty$$

ou seja, a curva de juros, segundo o modelo de Ho e Lee, cresce ilimitadamente. A forma da curva de juros, por sua vez, dependerá da ETTJ vigente no instante 0, ou seja, será função de  $f(0,t)$ .

O modelo de Ho e Lee pode ser encarado como uma extensão do modelo de Merton, com um ajuste sendo feito na componente de tendência a fim de ajustá-lo à curva de juros de mercado. Apresenta, no entanto, a mesma deficiência do modelo de Merton no que diz respeito a não considerar a propriedade de reversão à média.

#### b) MODELO DE HULL E WHITE (1990)

Também denominado de modelo de Vasicek estendido, o modelo de Hull e White (1990), procura incorporar a propriedade de reversão à média e o ajuste perfeito à curva de juros de mercado. Sua representação por equação diferencial estocástica na medida de probabilidade risco-neutra é:

$$dr = (\theta(t) - a.r)dt + \sigma.dz$$

sendo  $a$  e  $\sigma$  constantes positivas e  $\theta(t)$  uma função do tempo. Como se pode ver, é uma generalização tanto do modelo de Vasicek quanto do de Ho e Lee (para se obter o modelo de Vasicek a partir do de Hull-White, basta fazer  $\theta(t)$  igual a  $a.b$ ; e obtém-se o modelo de Ho e Lee fazendo  $a=0$ ). O valor da função  $\theta(t)$  necessário para se obter o ajuste à curva de juros de mercado é dado por:

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + a.f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

onde  $f(0,t)$  é a taxa a termo instantânea para o instante  $t$  vigente no tempo inicial. Como o último termo do lado direito da equação acima é pequeno, pode-se dizer que o termo de tendência da equação diferencial estocástica é aproximadamente igual a  $\frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + a.[f(0,t) - r]$ , ou seja, faz com que  $r$  tenda a seguir a inclinação da curva inicial de taxas a termo.

Para provar que  $\theta(t)$  deve assumir esta forma, deve-se inicialmente calcular o valor de  $P(t, T)$  em função de  $\theta(t)$  e em seguida impor que seu valor no instante  $t=0$  deve ser condizente com a curva de juros vigente na mesma data. Serão necessários 3 passos: determinar a distribuição de  $r(t)$  segundo a medida risco-neutra, calcular a distribuição da função  $y(t, T) = \int_t^T r(s).ds$ , e, por fim, calcular o valor de  $P(t, T)$ .

PASSO 1: determinação da distribuição de  $r(T)$

A equação diferencial estocástica que, conforme o modelo de Hull-White, determina a taxa de juros de curto prazo segundo a medida de probabilidade risco-neutra pode ser representada na forma:

$$dr = a(\theta(t) - r).dt + \sigma.dz$$

sendo  $a$  e  $\sigma$  constantes positivas e  $\theta(t)$  função do tempo. Para resolver esta equação diferencial estocástica, assume-se que  $\theta(t)$  é diferenciável e define-se a função auxiliar  $g(t, r)$  por

$$g(t, r) = a.e^{at} (\theta(t) - r) - a \int_0^t e^{a-s} \theta'(s).ds$$

Aplicando o lema de Itô, tem-se

$$dg = \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial r} . a.(\theta(t) - r) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial g}{\partial r} dz$$

$$dg = [a^2 e^{at} (\theta(t) - r) + a.e^{at} . \theta'(t) - a.e^{at} . \theta'(t) - a^2 e^{at} (\theta(t) - r) + 0] dt - a.\sigma.e^{at} . dz$$

$$dg = -a.\sigma.e^{at} . dz$$

Reescrevendo na forma integral, obtém-se:

$$\int_t^T dg = g(T) - g(t) = -a.\sigma. \int_t^T e^{as} . dz(s)$$

ou, substituindo  $g(t)$ :



$$\begin{aligned}
& a.e^{aT} .(\theta(T) - r(T)) - a \int_0^T e^{as} .\theta'(s) .ds - a.e^{at} .(\theta(t) - r(t)) + a \int_0^t e^{as} .\theta'(s) .ds = \\
& = -a.\sigma . \int_t^T e^{as} dz(s)
\end{aligned}$$

Isolando  $r(T)$ :

$$r(T) = \theta(T) - e^{-a(T-t)} .[\theta(t) - r(t)] - e^{-aT} . \int_t^T e^{as} .\theta'(s) .ds + \sigma .e^{-aT} \int_t^T e^{as} .dz(s)$$

Lembrando que  $z(s)$  é um movimento browniano, temos que o valor esperado de  $r(T)$  dada a informação  $\mathfrak{S}_t$ , disponível no instante  $t$  (ou seja, conhecido  $z(t)$ ) é, na probabilidade risco-neutra, igual a:

$$E[r(T) | \mathfrak{F}_t] = \theta(T) - e^{-a(T-t)} .[\theta(t) - r(t)] - e^{-aT} . \int_t^T e^{as} .\theta'(s) .ds$$

A variância de  $r(T)$ , dada a informação  $\mathfrak{S}_t$ , disponível no instante  $t$  é, na probabilidade risco-neutra:

$$\begin{aligned}
Var(r(T) | \mathfrak{F}_t) &= E[(r(T) - E[r(T) | \mathfrak{F}_t])^2 | \mathfrak{F}_t] = \\
&= E\left[\left(\sigma .e^{-aT} \int_t^T e^{as} .dz(s)\right)^2 | \mathfrak{F}_t\right] = \sigma^2 .e^{-2aT} E\left[\left(\int_t^T e^{as} .dz(s)\right)^2 | \mathfrak{F}_t\right] = \\
&= \sigma^2 .e^{-2aT} . \int_t^T e^{2as} .ds = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(T-t)})
\end{aligned}$$

A penúltima igualdade segue da Isometria de Itô. Como  $r(T)$  é resultado de uma integral estocástica onde o integrando é função apenas do tempo, então  $r(T)$  tem distribuição normal, dada por:

$$r(T) | \mathfrak{S}_t \sim N(E[r(T) | \mathfrak{F}_t], Var(r(T) | \mathfrak{F}_t))$$

PASSO 2: determinação da distribuição de  $y(t, T) = \int_t^T r(s) .ds$

Conforme verificado anteriormente, o valor de  $r(T)$  é dado por:

$$\begin{aligned}
r(T) | \mathcal{F}_t &= \theta(T) - e^{-a(T-t)} \cdot [\theta(t) - r(t)] - e^{-aT} \int_t^T e^{as} \cdot \theta'(s) \cdot ds + \sigma \cdot e^{-aT} \int_t^T e^{as} \cdot dz(s) = \\
&= E[r(T) | \mathcal{F}_t] + \sigma \cdot e^{-aT} \int_t^T e^{as} \cdot dz(s)
\end{aligned}$$

Desta forma, a função  $y(t, T)$  pode ser calculada pela integral:

$$y(t, T) = \int_t^T r(s) \cdot ds = \int_t^T \left[ E[r(s) | \mathcal{F}_t] + \sigma \cdot e^{-as} \int_t^s e^{au} \cdot dz(u) \right] \cdot ds$$

Lembrando que a integral sobre  $dz$  possui esperança nula, tem-se que:

$$E[y(t, T) | \mathcal{F}_t] = \int_t^T E[r(s) | \mathcal{F}_t] \cdot ds$$

A variância de  $y(t, T)$  por sua vez é dada por:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(y(t, T) | \mathcal{F}_t) &= E\left[ (y(t, T) - E[y(t, T) | \mathcal{F}_t])^2 | \mathcal{F}_t \right] = \\
&= E\left[ \left( \int_t^T \left[ \sigma \cdot e^{-as} \int_t^s e^{au} \cdot dz(u) \right] \cdot ds \right)^2 | \mathcal{F}_t \right] = \\
&= \sigma^2 E\left[ \left( \int_t^T \int_t^s e^{-a(s-u)} \cdot dz(u) \cdot ds \right)^2 | \mathcal{F}_t \right] = \sigma^2 E\left[ \left( \int_t^T \int_u^T e^{-a(s-u)} \cdot ds \cdot dz(u) \right)^2 | \mathcal{F}_t \right] = \\
&= \sigma^2 E\left[ \left( \int_t^T \left( \frac{1 - e^{-a(T-u)}}{a} \right) dz(u) \right)^2 | \mathcal{F}_t \right] = \sigma^2 \int_t^T \left( \frac{1 - e^{-a(T-u)}}{a} \right)^2 \cdot du = \\
&= \frac{\sigma^2}{a^2} \int_t^T (1 - 2e^{-a(T-u)} + e^{-2a(T-u)}) \cdot du = \frac{\sigma^2}{a^2} \left( (T-t) - \frac{2 - 2e^{-a(T-t)}}{a} + \frac{1 - e^{-2a(T-t)}}{2a} \right) = \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^3} (2a(T-t) + 4e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)} - 3)
\end{aligned}$$

onde mais uma vez se utilizou a Isometria de Itô para determinar o valor da esperança do quadrado da integral estocástica.. Como  $y(t, T)$  é uma integral de Itô sobre uma variável

estocástica  $r(s)$  cuja variância é função apenas do tempo, então  $y(t,T)$  é distribuída normalmente:

$$y(t,T) | \mathcal{F}_t \sim N(E[y(t,T) | \mathcal{F}_t], \text{Var}(y(t,T) | \mathcal{F}_t))$$

PASSO 3: Determinação do preço de um *zero-coupon bond*  $P(t,T)$

Define-se  $B_{t,T}$  como o valor na data  $T$  de uma aplicação de \$1 no instante  $t$  remunerada continuamente à taxa de curto prazo  $r$ , ou seja:

$$B_{t,T} = \exp\left(\int_t^T r(s) ds\right) = \exp(y(t,T))$$

Seja  $P(t,T)$  o valor no instante  $t$ , de um *zero-coupon bond* que vence na data  $T > t$  pagando \$1.

Na medida risco-neutra, usando como numerário a variável  $B_{0,s}$ , o valor  $P(t,T)$  será dado por:

$$\frac{P(t,T)}{B_{0,t}} = E^Q \left[ \frac{P(T,T)}{B_{0,T}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = E^Q \left[ \frac{1}{B_{0,T}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = E^Q \left[ \frac{1}{B_{0,t} B_{t,T}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{E^Q [B_{t,T}^{-1} | \mathcal{F}_t]}{B_{0,t}}$$

ou seja,

$$P(t,T) = E^Q [B_{t,T}^{-1} | \mathcal{F}_t]$$

Como  $y(t,T)$  tem distribuição normal, então  $B_{t,T}^{-1} = \exp(-y(t,T))$  tem distribuição lognormal com esperança igual a:

$$E^Q [B_{t,T}^{-1} | \mathcal{F}_t] = \exp(-E[y(t,T) | \mathcal{F}_t] + \text{Var}(y(t,T) | \mathcal{F}_t)/2)$$

Daí

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \exp\left(-\int_t^T E[r(s) | \mathcal{F}_t] ds + \frac{\sigma^2}{4a^3} (2a(T-t) + 4e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)} - 3)\right) = \\ &= \exp\left(-\int_t^T \left[\theta(s) - e^{-a(s-t)} \cdot [\theta(t) - r(t)] - e^{-as} \cdot \int_t^s e^{au} \cdot \theta'(u) du\right] ds + \frac{\sigma^2}{4a^3} (2a(T-t) + 4e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)} - 3)\right) \end{aligned}$$

O valor de  $P(t, T)$  ainda depende da função desconhecida  $\theta(t)$ . Para determiná-la utiliza-se como condição de contorno a curva de taxas a termo  $f(0, T)$  dada no instante 0.

$$f(0, T) = -\frac{\partial(\ln P(0, T))}{\partial T} =$$

$$= \theta(T) - e^{-a(T-0)} \cdot [\theta(0) - r(0)] - e^{-aT} \cdot \int_0^T e^{au} \cdot \theta'(u) \cdot du - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - 2 \cdot e^{-a(T-0)} + e^{-2a(T-0)})$$

Derivando novamente  $f(0, T)$  em relação a  $T$ :

$$\frac{\partial f(0, T)}{\partial T} = \theta'(T) + a \cdot e^{-aT} \cdot [\theta(0) - r(0)] + a \cdot e^{-aT} \cdot \int_0^T e^{au} \cdot \theta'(u) \cdot du - e^{-aT} \cdot e^{aT} \theta'(T) - \frac{\sigma^2}{a} (e^{-aT} - e^{-2aT}) =$$

$$= a \cdot e^{-aT} \cdot [\theta(0) - r(0)] + a \cdot e^{-aT} \cdot \int_0^T e^{au} \cdot \theta'(u) \cdot du - \frac{\sigma^2}{a} (e^{-aT} - e^{-2aT})$$

Daí, obtém-se que:

$$\int_0^T e^{au} \cdot \theta'(u) \cdot du = \frac{e^{aT}}{a} \frac{\partial f(0, T)}{\partial T} - \theta(0) + r(0) + \frac{\sigma^2}{a^2} (1 - e^{-aT})$$

Substituindo na equação de  $f(0, T)$ , tem-se:

$$f(0, T) = \theta(T) - e^{-aT} \cdot [\theta(0) - r(0)] - \frac{1}{a} \frac{\partial f(0, T)}{\partial T} + e^{-aT} \cdot [\theta(0) - r(0)] - \frac{\sigma^2}{a^2} (e^{-aT} - e^{-2aT}) - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - 2 \cdot e^{-aT} + e^{-2aT}) =$$

$$= \theta(T) - \frac{1}{a} \frac{\partial f(0, T)}{\partial T} - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2aT})$$

Obtém-se então a função  $\theta(t)$ :

$$\theta(T) = f(0, T) + \frac{1}{a} \frac{\partial f(0, T)}{\partial T} + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2aT})$$

É possível agora determinar os valores esperados de  $r(T)$  e  $y(t, T)$ :

$$E[r(T) | \mathcal{F}_t] = \theta(T) - e^{-a(T-t)} \cdot [\theta(t) - r(t)] - e^{-aT} \cdot \int_t^T e^{as} \cdot \theta'(s) \cdot ds =$$

$$\begin{aligned}
&= f(0, T) + \frac{1}{a} \frac{\partial f(0, T)}{\partial T} + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2aT}) - e^{-a(T-t)} \left[ f(0, t) + \frac{1}{a} \frac{\partial f(0, t)}{\partial T} + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2at}) - r(t) \right] - \\
&- e^{-at} \left[ \frac{e^{aT}}{a} \frac{\partial f(0, T)}{\partial T} - \theta(0) + r(0) + \frac{\sigma^2}{a^2} (1 - e^{-aT}) - \frac{e^{at}}{a} \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \theta(0) - r(0) - \frac{\sigma^2}{a^2} (1 - e^{-at}) \right] = \\
&= f(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2aT}) - e^{-a(T-t)} \left[ f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2at}) - r(t) \right] - e^{-at} \cdot \frac{\sigma^2}{a^2} (e^{-at} - e^{-aT}) = \\
&= f(0, T) - e^{-a(T-t)} \cdot [f(0, t) - r(t)] + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 + e^{-2aT} - e^{-a(T-t)} - e^{-a(T+t)})
\end{aligned}$$

O valor esperado de  $y(t, T)$ , por sua vez, é dado por:

$$\begin{aligned}
E[y(t, T) | \mathcal{F}_t] &= \int_t^T E[r(s) | \mathcal{F}_t] ds = \\
&= \int_t^T \left[ f(0, s) - e^{-a(s-t)} \cdot [f(0, t) - r(t)] + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 + e^{-2as} - e^{-a(s-t)} - e^{-a(s+t)}) \right] da = \\
&= \int_t^T f(0, s) \cdot ds - [f(0, t) - r(t)] \int_t^T e^{-a(s-t)} ds + \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_t^T (1 + e^{-2as} - e^{-a(s-t)} - e^{-a(s+t)}) ds = \\
&= \int_t^T -\frac{\partial(\ln P(0, T))}{\partial T} \cdot ds - [f(0, t) - r(t)] \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) + \\
&+ \frac{\sigma^2}{4a^3} (2a(T-t) - e^{-2aT} + e^{-2at} + 2e^{-a(T-t)} - 2 + 2e^{-a(T+t)} - 2e^{-2at}) \\
&= -\ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - [f(0, t) - r(t)] \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) + \frac{\sigma^2}{4a^3} (2a(T-t) - e^{-2aT} - e^{-2at} + 2e^{-a(T-t)} - 2 + 2e^{-a(T+t)})
\end{aligned}$$

Por fim, obtém-se o valor de  $\ln[P(t, T)]$ :

$$\ln[P(t, T)] = -E[y(t, T) | \mathcal{F}_t] + \text{Var}(y(t, T) | \mathcal{F}_t) / 2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + [f(0, t) - r(t)] \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} (2a(T-t) - e^{-2aT} - e^{-2at} + 2e^{-a(T-t)} - 2 + 2e^{-a(T-t)}) + \\
&+ \frac{\sigma^2}{4a^3} (2a(T-t) + 4e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)} - 3) = \\
&= \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + [f(0, t) - r(t)] \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) + \frac{\sigma^2}{4a^3} (e^{-2aT} + e^{-2at} + 2e^{-a(T-t)} - 2e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)} - 1) = \\
&= \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + [f(0, t) - r(t)] \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) + \frac{\sigma^2}{4a^3} (e^{-aT} - e^{-a})^2 (1 - e^{2at})
\end{aligned}$$

É fácil ver que a relação acima proporciona um ajuste perfeito à curva de juros vigente no instante inicial, bastando substituir  $t=0$ .

Decorre dos resultados acima obtidos que, num dado momento  $t$ , a distribuição de probabilidade esperada para  $r$  num outro instante futuro  $T > t$ , na medida risco-neutra, é dada por é igual a:

$$r(T) \sim N \left( f(0, T) - e^{-a(T-t)} \cdot f(0, t) + r(t) \cdot e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 + e^{-2aT} - e^{-a(T-t)} - e^{-a(T+t)}) \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(T-t)}) \right)$$

Ao contrário do modelo de Ho e Lee, neste caso a variância da distribuição não cresce indefinidamente com  $T$ , mas converge para um número finito, efeito da inclusão da reversão à média.

A expressão obtida para o preço do *zero-coupon bond* pode ser expressa também na forma apresentada por Hull e White (1990), segundo a qual o preço no instante  $t$  de um *zero-coupon bond* que vence no momento  $T > t$  é dado por

$$P(t, T) = A(t, T) \cdot e^{-B(t, T)r(t)}$$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - B(t, T) \frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{4a^3} (e^{-aT} - e^{-at})^2 (e^{2at} - 1)$$

A curva de juros implícita neste preço é dada por:

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{\tau} =$$

$$= -\ln \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \frac{1}{\tau} + \left( \frac{1 - e^{-a\tau}}{a\tau} \right) \left( \frac{\partial \ln P(0,t)}{\partial t} + r(t) \right) + \frac{\sigma^2}{4a^3\tau} (e^{-a\tau} - e^{-at})^2 (e^{2at} - 1)$$

onde  $\tau=T-t$ . É fácil verificar que, para  $T$  tendendo a  $t$ ,  $R(t,T)$  se iguala a  $r(t)$ , conforme seria desejado. Fazendo  $T$  tender a infinito, converge para a curva de juros dada no instante 0.

Assim como no modelo de Ho e Lee, por trabalhar diretamente com a probabilidade risco-neutra, o modelo de Hull-White evita a necessidade de se determinar o preço de risco de mercado. Entretanto, ao assumir distribuição normal para as taxas de juros instantâneas, o modelo de Hull-White atribui probabilidades não-nulas para taxas de juros negativas, repetindo uma deficiência dos modelos de Ho e Lee, Vasicek e Merton.

Embora seja possível deduzir formas analíticas para alguns tipos de derivativos, a forma mais comum de implementação deste modelo, proposta por Hull e White, é através de árvore trinomial.

### c) MODELO DE BLACK, DERMAN E TOY

Foi apresentado por Black, Derman e Toy (1986) na forma de uma árvore binomial para a taxa de juros de curto prazo. Sua representação em tempo contínuo na medida risco-neutra é dada por

$$d(\ln r) = \left[ \theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \ln r \right] dt + \sigma(t) dz$$

onde  $\sigma(t)$  é uma função positiva do tempo que representa a volatilidade das taxas de juros instantâneas e  $\theta(t)$  é outra função do tempo. Como atribui uma distribuição lognormal para  $r$ , torna-se nula a probabilidade de que a taxa de curto prazo seja inferior a zero. Além disso, se  $\sigma(t)$  for uma função decrescente do tempo ( $\sigma' < 0$ ), então a equação diferencial estocástica apresenta a propriedade de reversão à média. As funções  $\sigma(t)$  e  $\theta(t)$  são ajustadas de maneira que a curva de juros e estrutura temporal de volatilidades de taxas de juros à vista produzidas pelo modelo sejam iguais às de mercado.

Desta forma, o modelo de Black, Derman e Toy apresenta três propriedades interessantes na modelagem de taxas de juros: reversão à média (se a volatilidade da taxa instantânea for decrescente), probabilidade zero de taxas de juros negativas e ajuste perfeito às curvas de juros e de volatilidade do mercado. Entretanto, o fato de assumir uma distribuição lognormal para as taxas de juros dificulta a obtenção de fórmulas fechadas para os preços de títulos e de opções, devendo-se fazer uso da implementação na forma de árvore binomial.

Outra deficiência do modelo de BDT refere-se ao fato de a taxa de reversão à média estar intimamente relacionada com a volatilidade, o que faz com que, para certas especificações de estruturas temporais de volatilidades que exijam que  $\sigma' > 0$ , o modelo apresente comportamento de fuga à média.

Uma implementação mais simples do modelo assume que a volatilidade das taxas instantâneas é constante, o que reduz o modelo a

$$d(\ln r) = \theta(t).dt + \sigma.dz$$

ou seja, uma versão lognormal do modelo de Ho e Lee..

#### d) MODELO DE BLACK E KARASINSKY

Proposto por Black e Karasinski (1991), é uma generalização do modelo BDT que evita a associação estreita entre taxa de reversão à média e volatilidade das taxas de curto prazo. Sua representação estocástica é dada por

$$d(\ln r) = [\theta(t) - \alpha(t).\ln r].dt + \sigma(t).dz$$

onde  $\theta(t)$ ,  $\alpha(t)$  e  $\sigma(t)$  são funções do tempo. O acréscimo do termo  $\alpha(t)$  ao modelo aumenta seu grau de liberdade, permitindo o ajuste a um conjunto mais variado de estruturas temporais de taxas de juros e de volatilidades sem que ocorra o fenômeno de fuga da média.

Da mesma forma que no modelo BDT, o modelo de BK apresenta também as propriedades de reversão à média, taxas de juros não negativas e ajuste perfeito às curvas de juros e de volatilidades. Aqui também o fato de  $r$  possuir distribuição lognormal dificulta a obtenção de



fórmulas fechadas para os preços de títulos e opções, que devem ser calculados numericamente através de árvores binomiais ou trinomiais.

Uma implementação mais simples do modelo assume que a volatilidade das taxas instantâneas é constante, o que reduz o modelo a

$$d(\ln r) = [\theta(t) - \alpha \ln r]dt + \sigma dz$$

ou seja, uma versão lognormal do modelo de Hull-White.

## 5 PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES DE IDI

Neste capítulo serão descritas as maneiras através das quais os modelos de taxas de juros serão utilizados na precificação das opções de compra de IDI. Em alguns casos, como nos modelos de Merton, Vasicek, Ho-Lee e Hull-White, é possível obter fórmulas fechadas para o preço da opção. Nos demais casos, serão utilizados métodos numéricos.

Embora alguns dos modelos descritos no capítulo anterior (Black-Derman-Toy e Black-Karasinski) sejam mais sofisticados que os demais, ajustando-se inclusive à curva de volatilidades das taxas à vista, neste trabalho serão consideradas apenas versões mais simplificadas destes modelos, para as quais a volatilidade da taxa de juros de curto prazo é constante. Tal restrição ocorre pelo fato de as operações no mercado de opções de IDI serem realizadas em geral para um número limitado de prazos de vencimento, prazos estes bastante curtos, o que não justificaria o uso, de início, de abordagens mais complexas.

O primeiro modelo de precificação a ser descrito será o de Black, o mais simples de todos. Não parte de um modelo para o comportamento da taxa de juros de curto prazo, sendo apenas uma adaptação de modelos de precificação de outros derivativos mais simples.

### 5.1 MODELO DE BLACK

Trata-se de uma adaptação da fórmula de Black (1976) para a precificação de opções sobre contratos futuros, que por sua vez é uma adaptação do modelo de Black e Scholes (1973) para precificação de opções sobre ações. Parte do pressuposto de que o retorno do IDI é distribuído normalmente, com volatilidade  $\sigma$ . Para obter o preço da opção de compra sobre IDI, basta substituir o preço da ação pelo valor do IDI, na fórmula original de B&S. Assim, o preço no momento  $t$  de uma opção europeia de compra de IDI que vence na data  $T$  seria dado por:

$$c = IDI_t \cdot N(d_1) - K \cdot P(t, T) \cdot N(d_2)$$
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{IDI_t}{K \cdot P(t, T)}\right) + \frac{(T-t)\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{IDI_t}{K \cdot P(t, T)}\right) - \frac{(T-t)\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

onde  $c$  é o valor da opção no instante  $t$ ,  $IDI_t$  é o valor do IDI na data  $t$ ,  $K$  é o preço de exercício (strike) da opção,  $P(t,T)$  é o valor de um zero-coupon bond que paga \$1 na data  $T$  e  $\sigma$  é a volatilidade dos retornos do IDI.

Este modelo apresenta duas inconveniências teóricas. A primeira é que o fato de assumir distribuição normal para os retornos do IDI permite a possibilidade de ocorrência de taxas de juros de curto prazo negativas. O segundo problema é que, na dedução da fórmula acima, há a hipótese implícita de que a taxa de juros é determinística. Embora tal hipótese seja aceitável quando utilizada na precificação de opções sobre ações, moedas, commodities ou contratos futuros, não é plausível para o caso da opção de IDI, uma vez que a volatilidade dos retornos do IDI é diferente de zero justamente porque a taxa de juros possui uma componente aleatória.

Apesar destes inconvenientes, ainda é um modelo muito usado para a precificação de opções de IDI.

## 5.2 MODELO DE VASICEK

Conforme visto anteriormente, o modelo de Vasicek supõe que a taxa de juros de curto prazo se comporta conforme a seguinte equação diferencial estocástica

$$dr = a.(b - r).dt + \sigma.dz$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $\sigma$  são constantes. Segundo Vieira Neto (1999), o preço de uma opção europeia de compra de IDI segundo o modelo de Vasicek é dado por:

$$c_t = IDI_t . N(h) - E.P(t,T).N(h - k)$$

$$h = \frac{\ln\left(\frac{IDI_t}{P(t,T).E}\right) + \frac{k^2}{2}}{k}$$

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{2a^3} \left( 4.e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)} + 2a(T-t) - 3 \right)$$

onde  $c_t$  é o valor da opção no instante  $t$ ,  $IDI_t$  é o valor do IDI no instante  $t$ ,  $E$  é o preço de exercício da opção,  $P(t, T)$  é o preço na data  $t$  de um *zero-coupon bond* que paga \$1 em  $T$ .

Percebe-se que a fórmula obtida é bastante semelhante à do modelo de Black, modificando-se apenas o termo da volatilidade.

### 5.3 MODELO DE MERTON

Conforme visto anteriormente, o modelo de Merton supõe que a taxa de juros de curto prazo se comporta conforme a seguinte equação diferencial estocástica

$$dr = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz$$

onde  $\mu$  e  $\sigma$  são constantes.

É possível, usando método semelhante ao utilizado por Vieira Neto (1999) para o modelo de Vasicek, determinar-se a fórmula de precificação de opção de IDI segundo o modelo de Merton. Entretanto, uma maneira mais simples de se obter o mesmo resultado é partindo-se da fórmula de Vieira Neto e fazendo-se o limite de  $a$  tendendo a zero, o que equivale a eliminar do modelo de Vasicek a propriedade de reversão à média, reduzindo-o ao modelo de Merton. Como a constante de reversão à média  $a$  só aparece na fórmula do termo  $k^2$ , temos que

$$\lim_{a \rightarrow 0} k^2 = \lim_{a \rightarrow 0} \left( \sigma^2 \frac{4e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)} + 2a(T-t) - 3}{2a^3} \right) = \sigma^2 \frac{(T-t)^3}{3}$$

resultado este obtido aplicando-se seguidamente a regra de L'Hospital.

A fórmula de precificação da opção segundo o modelo de Merton fica então

$$c_t = IDI_t \cdot N(h) - E \cdot P(t, T) \cdot N(h - k)$$

$$h = \frac{\ln \left( \frac{IDI_t}{P(t, T) \cdot E} \right) + \frac{k^2}{2}}{k}$$

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{3} (T - t)^3$$

onde os termos são definidos da mesma forma que o foram para a fórmula de precificação do modelo de Vasicek.

#### 5.4 MODELOS DE HULL-WHITE E HO-LEE

Para se obter uma fórmula analítica para o preço de uma opção de compra de IDI segundo os modelos de Ho-Lee e Hull-White, é necessário primeiro determinar a distribuição de probabilidade de  $y(t, T) = \int_t^T r(s) ds$ , que para ambos os modelos é normal (conforme demonstrado no capítulo anterior). Em seguida, calcula-se o valor de um *zero-coupon bond*  $P(t, T)$  e por fim torna-se possível determinar a fórmula analítica do preço da opção. Como tanto a distribuição de  $y(t, T)$  quanto a fórmula de  $P(t, T)$  já foram deduzidas no capítulo anterior, pode-se partir para a determinação da fórmula do preço da opção.

Seja  $IDI_t$  o valor do IDI no instante  $t$ . Como o IDI é remunerado diariamente à taxa do CDI, aqui representada pela taxa de juros de curto prazo  $r$ , o valor do IDI no instante  $T > t$  será igual a

$$IDI(T) = IDI_t \cdot \exp\left(\int_t^T r(s) ds\right) = IDI_t \cdot \exp(y(t, T)) = IDI_t \cdot B_{t, T}$$

Uma opção europeia de compra de IDI com preço de exercício  $K$  e data de vencimento  $T$  paga, no seu vencimento:

$$c(T) = \max\{0, IDI_t \cdot \exp(y(t, T)) - K\}$$

Seja  $c(t, T)$  o valor no instante  $t$  da opção que vence na data  $T > t$ . Na medida risco-neutra, usando como numerário a variável  $B_{0, s}$ , o valor  $c(t, T)$  será dado por:

$$\begin{aligned} \frac{c(t,T)}{B_{0,t}} &= E^Q \left[ \frac{\max\{IDI, B_{t,T} - K, 0\}}{B_{0,T}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{1}{B_{0,t}} E^Q \left[ \frac{\max\{IDI, B_{t,T} - K, 0\}}{B_{t,T}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\ &= \frac{1}{B_{0,t}} E^Q [\max\{IDI, -K \cdot B_{t,T}^{-1}, 0\} | \mathcal{F}_t] = \frac{1}{B_{0,t}} E^Q [\max\{IDI, -K \cdot \exp(-y(t,T)), 0\} | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

ou seja,

$$c(t,T) = E^Q [\max\{IDI, -K \cdot \exp(-y(t,T)), 0\} | \mathcal{F}_t]$$

Como, tanto para o modelo de Ho-Lee quanto para o de Hull-White,  $y(t,T)$  tem distribuição de probabilidade risco-neutra normal, com média  $m = E[y(t,T) | \mathcal{F}_t]$  e variância  $v^2 = \text{Var}(y(t,T) | \mathcal{F}_t)$ , então o valor de  $c(t,T)$  é dado por:

$$\begin{aligned} c(t,T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \max\{IDI, -K \cdot e^{-y}, 0\} \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-m)^2}{v^2}\right) dy = \\ &= \int_{\ln(K/IDI)}^{\infty} (IDI, -K \cdot e^{-y}) \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-m)^2}{v^2}\right) dy = \\ &= IDI, \int_{\ln(K/IDI)}^{\infty} \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-m)^2}{v^2}\right) dy - K \int_{\ln(K/IDI)}^{\infty} \frac{e^{-y}}{v\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-m)^2}{v^2}\right) dy = \\ &= IDI, \int_{\ln(K/IDI)}^{\infty} \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-m)^2}{v^2}\right) dy - \\ &- K \int_{\ln(K/IDI)}^{\infty} \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y^2 - 2my + m^2 + 2yv^2)}{v^2}\right) dy = \\ &= IDI, \int_{\ln(K/IDI)}^{\infty} \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-m)^2}{v^2}\right) dy - \\ &- K \int_{\ln(K/IDI)}^{\infty} \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{y^2 - 2y(m-v^2) + (m-v^2)^2 + m^2 - (m-v^2)^2}{v^2}\right) dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= IDI_t \int_{\ln(K/IDI_t)}^{\infty} \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-m)^2}{v^2}\right) dy - \\
&- K \int_{\ln(K/IDI_t)}^{\infty} \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-m+v^2)^2 + v^2(2m-v^2)}{v^2}\right) dy = \\
&= IDI_t \int_{\ln(K/IDI_t)}^{\infty} \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-m)^2}{v^2}\right) dy - \\
&- K \cdot e^{-\left(\frac{m-v^2}{2}\right)} \int_{\ln(K/IDI_t)}^{\infty} \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-m+v^2)^2}{v^2}\right) dy
\end{aligned}$$

Fazendo as mudanças de variáveis  $r = (y-m)/v$  e  $s = (y-m+v^2)/v$  nas integrais, obtém-se:

$$c(t, T) = IDI_t \int_{\frac{\ln(K/IDI_t)-m}{v}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dy - K \cdot e^{-\left(\frac{m-v^2}{2}\right)} \int_{\frac{\ln(K/IDI_t)-m+v^2}{v}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) dy$$

Pela simetria da distribuição normal padronizada, invertem-se os limites da integração:

$$c(t, T) = IDI_t \cdot \int_{-\infty}^{\frac{\ln(K/IDI_t)-m}{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dy - K \cdot e^{-\left(\frac{m-v^2}{2}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{\ln(K/IDI_t)-m+v^2}{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) dy$$

Representando através da função de distribuição normal padronizada acumulada  $N(\cdot)$ :

$$c(t, T) = IDI_t \cdot N\left(-\frac{\ln(K/IDI_t)-m}{v}\right) - K \cdot e^{-\left(\frac{m-v^2}{2}\right)} \cdot N\left(-\frac{\ln(K/IDI_t)-m+v^2}{v}\right)$$

Por fim, lembrando que  $P(t, T) = \exp(-m+v^2/2)$  e rearranjando os termos dentro dos parênteses, chega-se a:

$$c(t, T) = IDI_t \cdot N\left(\frac{\ln(IDI_t/K)+m}{v}\right) - K \cdot P(t, T) \cdot N\left(\frac{\ln(IDI_t/K)+m-v^2}{v}\right)$$

$$m = E[y(t, T) | \mathcal{F}_t]$$

$$v^2 = \text{Var}(y(t, T) | \mathcal{F}_t)$$

#### 5.4.1 FÓRMULA PARA O MODELO DE HULL-WHITE

Conforme o capítulo anterior, a média e a variância de  $y(t, T)$  para o modelo de Hull-White são dadas por:

$$m = E[y(t, T) | \mathcal{F}_t] = -\ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - [f(0, t) - r(t)] \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) + \frac{\sigma^2}{4a^3} (2a(T-t) - e^{-2aT} - e^{-2at} + 2e^{-a(T-t)} - 2 + 2e^{-a(T-t)})$$

$$v^2 = \frac{\sigma^2}{2a^3} (2a(T-t) + 4e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)} - 3)$$

Para  $t=0$ , que é o momento para o qual se conhece a curva de juros à vista, os valores de  $m$  e  $v^2$  se simplificam, tornando-se:

$$v^2 = \frac{\sigma^2}{2a^3} (2aT + 4e^{-aT} - e^{-2aT} - 3)$$

$$m = -\ln P(0, T) + \frac{\sigma^2}{4a^3} (2aT - e^{-2aT} - 3 + 4e^{-aT}) = -\ln P(0, T) + \frac{v^2}{2}$$

A fórmula do preço da opção fica, neste caso, igual a:

$$c(0, T) = IDI_0 \cdot N \left( \frac{\ln \left( \frac{IDI_0}{K \cdot P(0, T)} \right) + \frac{v^2}{2}}{v} \right) - K \cdot P(0, T) \cdot N \left( \frac{\ln \left( \frac{IDI_0}{K \cdot P(0, T)} \right) - \frac{v^2}{2}}{v} \right)$$

que é idêntica à fórmula produzida por Vieira Neto (1999) para o modelo de Vasicek. A diferença reside no fato de que, no modelo de Hull-White, o valor de  $P(0, T)$  é uma variável exógena ao modelo, enquanto que no modelo de Vasicek  $P(0, T)$  é função do prêmio de risco.



## 5.4.2 FÓRMULA PARA O MODELO DE HO E LEE

Conforme o capítulo anterior, a média e a variância de  $y(t,T)$  para o modelo de Ho-Lee são dadas por:

$$m = -\ln \frac{P(0,T)}{P(0,t)} + \frac{\sigma^2(T-t)(T^2 + tT - 2t^2)}{6} + (T-t)(r(t) - f(0,t))$$

$$v^2 = \frac{\sigma^2(T-t)^3}{3}$$

Para  $t=0$ , que é o momento para o qual se conhece a curva de juros à vista, os valores de  $m$  e  $v^2$  se simplificam, tornando-se:

$$m = -\ln P(0,T) + \frac{\sigma^2 T^3}{6} \quad \text{e} \quad v^2 = \frac{\sigma^2 T^3}{3}$$

Substituindo na fórmula geral para o preço da opção, obtém-se:

$$c(0,T) = IDI_0 \cdot N \left( \frac{\ln \left( \frac{IDI_0}{K \cdot P(0,T)} \right) + \frac{\sigma^2 T^3}{6}}{\frac{\sigma^2 T^3}{3}} \right) - K \cdot P(0,T) \cdot N \left( \frac{\ln \left( \frac{IDI_0}{K \cdot P(0,T)} \right) - \frac{\sigma^2 T^3}{6}}{\frac{\sigma^2 T^3}{3}} \right)$$

Esta fórmula obtida segundo o modelo de Ho e Lee é idêntica à produzida pelo modelo de Merton. Da mesma forma que na comparação entre as fórmulas para os modelos de Hull-White e Vasicek, a diferença entre as fórmulas produzidas para os modelos de Ho-Lee e Merton é que, no primeiro caso,  $P(0,T)$  é uma variável externa ao modelo, e no segundo caso  $P(0,T)$  é função do prêmio de risco.

## 6 METODOLOGIA DE PESQUISA

### 6.1 POPULAÇÃO E AMOSTRA

Os dados necessários à pesquisa são as cotações de mercado dos seguintes instrumentos e indicadores financeiros:

- Cotações diárias das taxas médias de operações de 1 dia com Certificados de Depósito Interfinanceiro da CETIP;
- Cotações diária para o IDI calculadas pela BM&F;
- Cotações diárias dos contratos Futuros de DI de um dia negociados na BM&F;
- Cotações das opções sobre IDI da BM&F.

As opções sobre IDI começaram a ser negociadas na BM&F em meados de julho de 1997, sendo que todas as cotações diária desde aquela data foram disponibilizadas pelo Sistema de Recuperação de Informações, na página de *internet* da BM&F. As cotações do IDI referentes ao mesmo período também estão disponíveis no mesmo sistema, bem como as cotações de fechamento dos contratos futuros de DI de um dia e as das taxas médias de operações de 1 dia com CDI's.

A tabela seguinte relaciona, para cada instrumento e indicador financeiro utilizado, os respectivos dados ou variáveis diários a serem recolhidos e utilizados no estudo.

Taxa DI de 1 dia	IDI	Contrato Futuro de DI 1 dia	Opção sobre IDI
Data da operação	Data do Pregão	Data do Pregão	Data do Pregão
Valor da taxa	Valor do Índice	Data de Vencimento	Tipo de Série (Compra ou Venda)
		Cotação Média	Data de Vencimento
		Negócios efetuados	Preço de Exercício
		Dias de Saque até o vencimento	Volume Negociado
			Contratos Abertos (final)
			Negócios Efetuados
			Contratos Negociados
			Cotação Média
			Dias de Saque até o vencimento

Tabela 6.1 – Detalhamento dos dados de mercado utilizados no estudo

## 6.2 TRATAMENTO E ANÁLISE DOS DADOS

A comparação entre os modelos envolve três etapas gerais:

- Análise e tratamento preliminares dos dados;
- Implementação dos modelos de ETTJ e sua utilização para a precificação diária da opção sobre IDI, para cada um dos dias para os quais existirem dados consistentes;
- Comparação entre os desempenhos dos modelos.

Cada uma destas etapas envolve características metodológicas próprias e será tratada individualmente a seguir.

## 6.2.1 ANÁLISE E TRATAMENTO PRELIMINARES DOS DADOS

### a) ANÁLISE PRELIMINAR DOS DADOS

Os dados analisados relativos às opções sobre IDI cobrem o período que vai de 18/07/1997 (data de início da negociação das opções sobre IDI) até 31/12/2002, e foram obtidos do Sistema de Recuperação de Informações disponível na página da BM&F na internet ([www.bmf.com.br](http://www.bmf.com.br)).

O conjunto inicial de dados consistiu de 24.048 registros, sendo que de cada um destes foram utilizados neste estudo os seguintes campos:

Data do pregão
Tipo de série (compra ou venda)
Data de Vencimento
Preço de exercício
Volume negociado
Contratos em aberto (Final)
Negócios efetuados
Contratos negociados
Cotação média
Dias de saques até vencimento

Tabela 6.2 – Campos utilizados dos registros diários de opções de IDI da BM&F

A primeira discriminação que pode ser feita com estes dados é entre opções de compra e opções de venda. As tabelas seguintes apresentam um resumo dos dados:

Ano	Opções de Compra			
	Negócios Efetuados	Contratos Negociados	Volume Financeiro (R\$)	Número de dias com negócios
1997	769	284.840	236.200.824,00	102
1998	6.986	1.588.999	265.298.697,00	236
1999	4.397	809.604	96.031.518,00	227
2000	1.292	557.218	82.713.469,00	188
2001	3.239	1.108.162	327.483.786,00	229
2002	9.813	2.300.052	3.427.922.636,00	249
Total	26.496	6.648.875	4.435.650.930,00	1.231

Tabela 6.3 – Dados anuais sobre negociações com opções de compra de IDI.

Ano	Opções de Venda			
	Negócios Efetuados	Contratos Negociados	Volume Financeiro (R\$)	Número de dias com negócios
1997	221	64.150	13.512.810,00	63
1998	94	16.107	12.956.662,00	23
1999	29	98.400	58.767.200,00	11
2000	24	104.000	91.231.500,00	9
2001	130	20.898	7.972.960,00	45
2002	982	238.917	76.081.434,00	190
Total	1.480	542.472	260.522.566,00	341

Tabela 6.4– Dados anuais sobre negociações com opções de venda de IDI.

Ano	Opções de Venda: Percentual em relação às opções de compra			
	Negócios Efetuados	Contratos Negociados	Volume Financeiro	Número de dias com negócios
1997	28,7%	22,5%	5,7%	61,8%
1998	1,3%	1,0%	4,9%	9,7%
1999	0,7%	12,2%	61,2%	4,8%
2000	1,9%	18,7%	110,3%	4,8%
2001	4,0%	1,9%	2,4%	19,7%
2002	10,0%	10,4%	2,2%	76,3%
Total	5,6%	8,2%	5,9%	27,7%

Tabela 6.5 – Comparação entre dados anuais sobre negociações com opções de compra e de venda de IDI.

É fácil notar que as opções de venda apresentam muito menos liquidez do que as opções de compra. Enquanto as últimas foram negociadas em praticamente todos os dias (com exceção do ano de 2000), as opções de venda apresentaram poucos negócios durante o período analisado, realizados num número pequeno de dias, com exceção do ano de 2002, quando foram negociadas mais frequentemente.

Sejam negócios efetuados, contratos negociados, volume financeiro ou dias com negócios, os números relativos às opções de venda se mostraram sempre reduzidos quando comparados aos das opções de compra, com exceção dos volumes financeiros dos anos de 1999 e 2000. Entretanto, nestes dois anos o número de negócios com opções de venda foi reduzidíssimo, e estes volumes financeiros podem ser atribuídos a algumas poucas operações atípicas. Assim,

dada a reduzida liquidez do mercado de opções de venda de IDI, optou-se por utilizar nesta pesquisa apenas os dados relativos às opções de compra sobre IDI.

Embora o mercado de opções de compra de IDI seja mais líquido do que o de opções de venda, ainda assim é um mercado com baixa liquidez quando comparado ao de outros ativos financeiros, como por exemplo o de contratos futuros de DI ou o de opções de câmbio e de ações. Além disso, sua liquidez oscila ao longo do tempo, intercalando-se períodos de maior e de menor quantidade de negócios. Os gráficos seguintes representam, para as opções de compra de IDI, as variações nos números de negócios efetuados por dia, número de contratos negociados por dia, volume financeiro negociado por dia e quantidade de contratos em aberto ao final de cada dia.

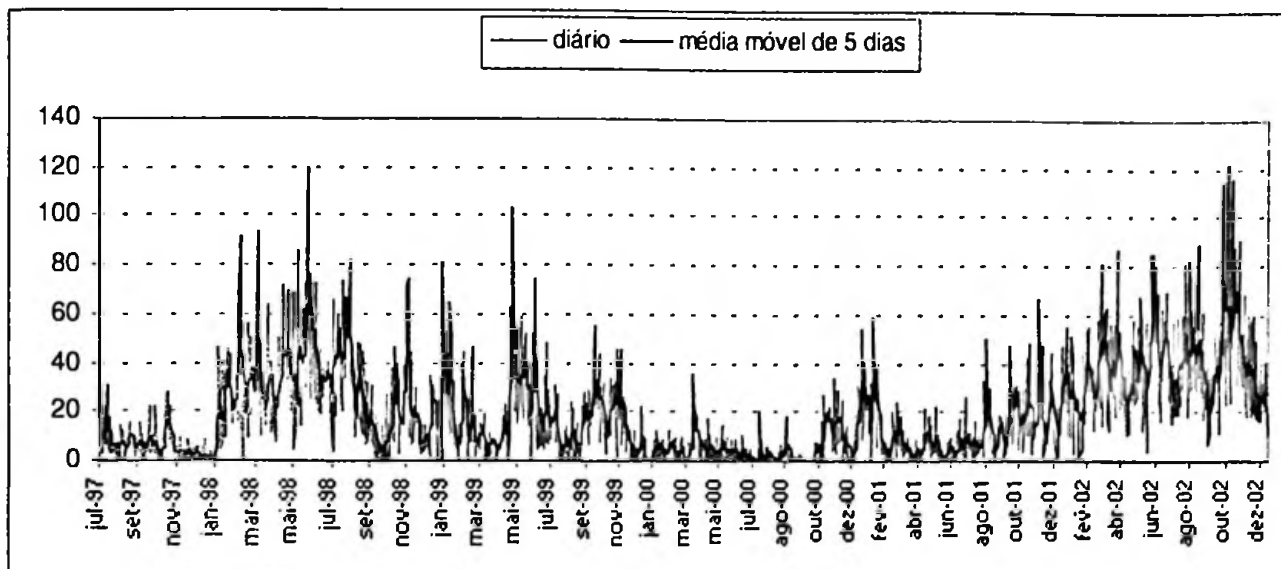


Figura 6.1 – Número de negócios com opções de compra de IDI: quantidade diária e média móvel de cinco dias úteis.

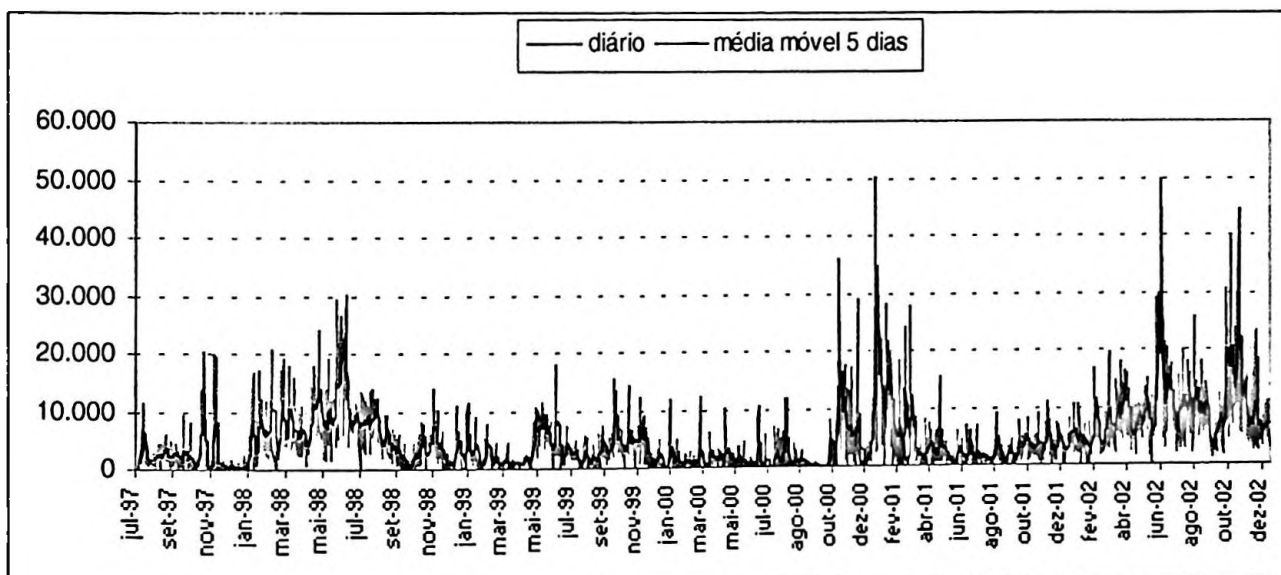


Figura 6.2 – Número de contratos de opções de compra de IDI negociados: quantidade diária e média móvel de cinco dias úteis.

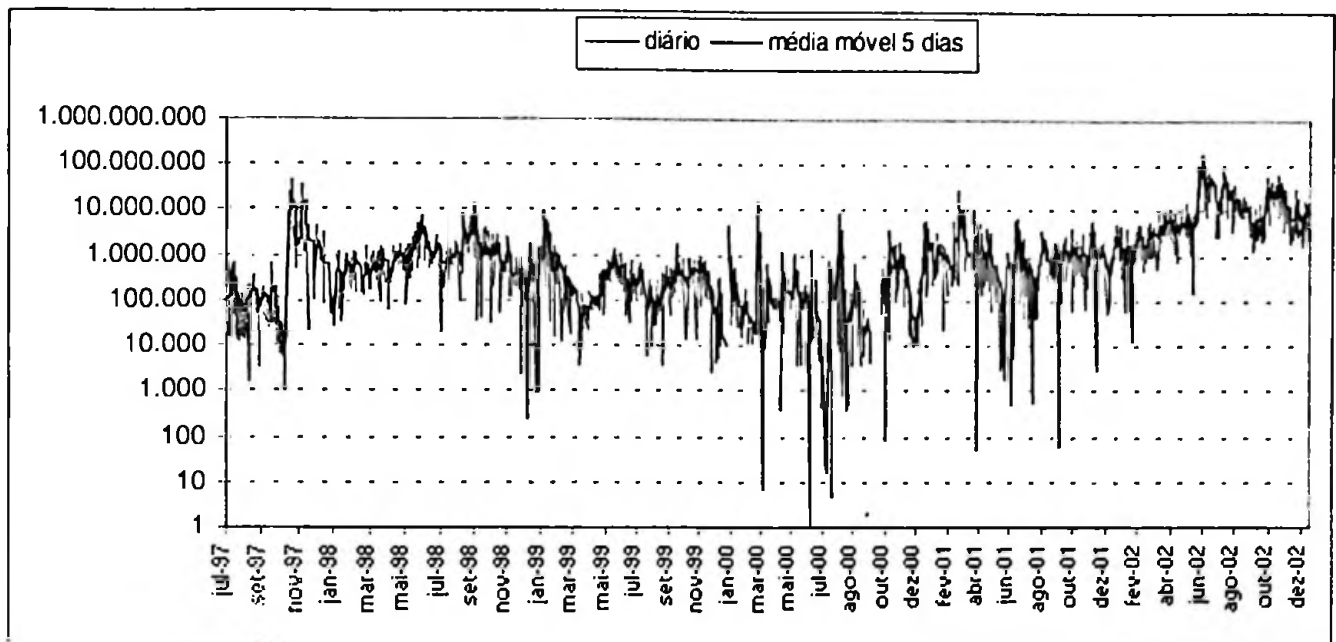


Figura 6.3 – Volume financeiro em R\$ das negociações com opções de compra de IDI: volume diário e média móvel de cinco dias úteis (escala logarítmica)

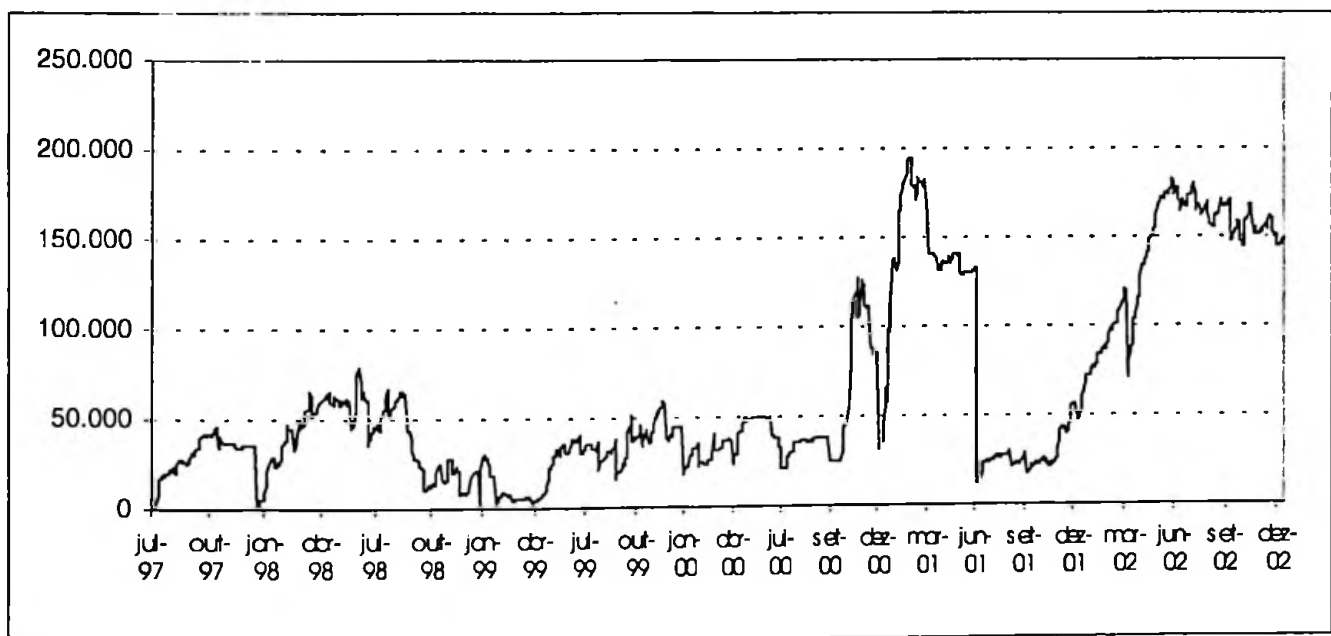


Figura 6.4 – Número de contratos opções de compra de IDI abertos ao final do dia.



Observando-se os gráficos de negócios efetuados e de contratos negociados é possível distinguir 2 períodos de menor liquidez e 2 períodos de maior liquidez. O período inicial que vai de julho de 1997 a janeiro de 1998 é o primeiro período de baixa liquidez, caracterizado por um número reduzido de negócios e contratos negociados diariamente. Segue-se um período de maior liquidez, que vai de janeiro de 1998 a dezembro de 1999, no qual a quantidade de negócios e o volume financeiro negociado apresentam um grande aumento entre janeiro e outubro de 1998, reduzindo-se um pouco entre outubro de 1998 a dezembro de 1999. O segundo período de baixa liquidez vai de dezembro de 1999 a outubro de 2000, e acaba caracterizando 2000 como um ano de pouca negociação. A partir de novembro de 2000 em diante inicia-se o segundo período de maior liquidez, sendo que o ano de 2002 em especial apresentou consistentemente um bom volume de negócios.

Outra característica das opções que pode ser analisada é seu prazo de vencimento. Os vencimentos das opções sobre IDI se dão sempre no primeiro dia útil do mês. Em cada dia podem ser negociadas opções de compra de IDI com vários prazos de vencimento distintos. O gráfico seguinte representa em dias úteis os prazos das opções negociadas em cada dia através de pontos pretos, no período de julho de 1997 a dezembro de 2002. Em linha vermelha, é representada também para cada dia a média móvel de 5 dias dos prazos das opções negociadas, ponderada pelo volume financeiro de cada negócio.

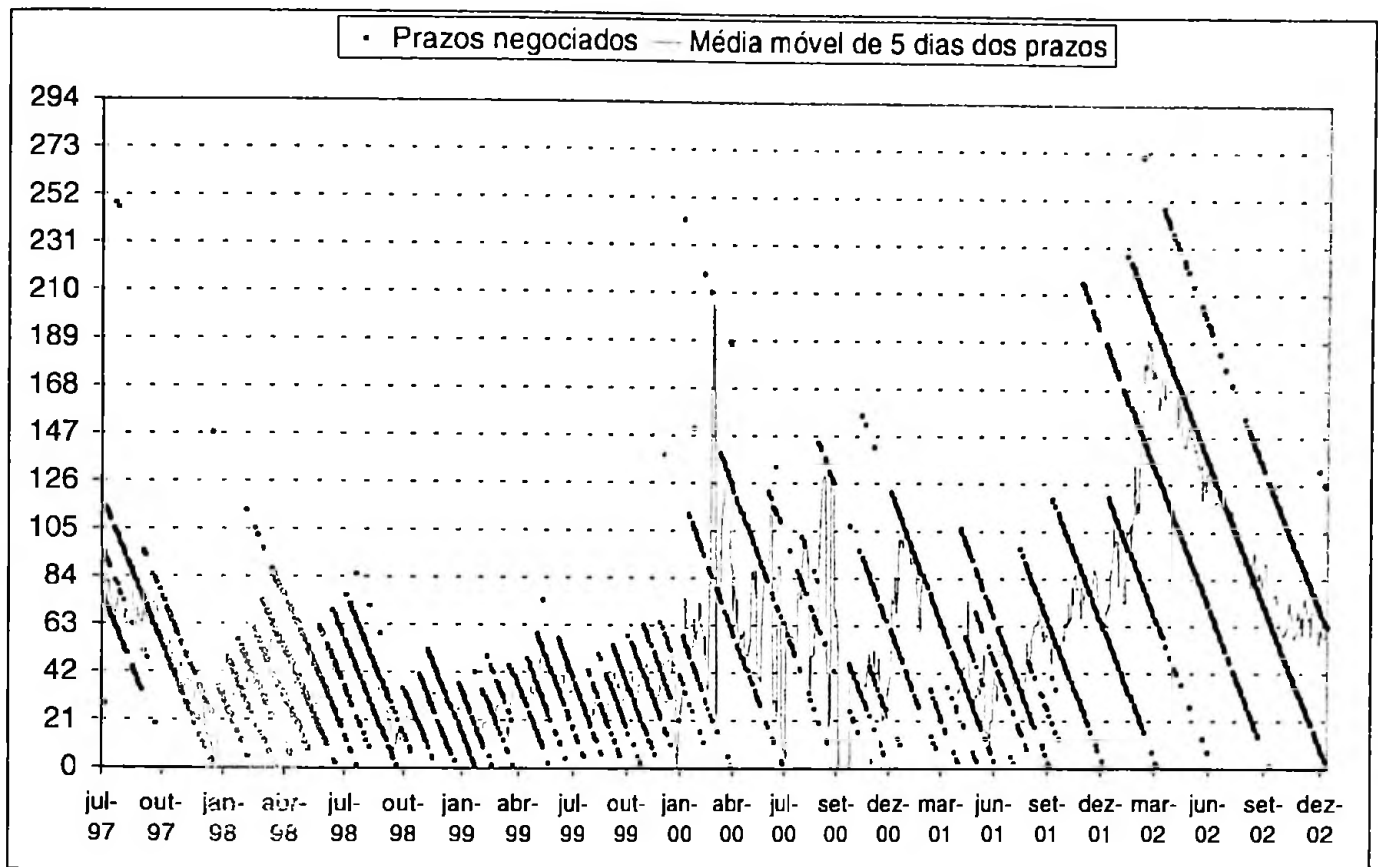


Figura 6.5 – Prazos das opções negociadas na BM&F entre julho de 97 e dezembro de 2002: valores diários e média móvel de 5 dias úteis.

Cada fileira de pontos pretos representa uma data de vencimento de opção. À medida que se avança no tempo, os prazos das opções com uma dada data de vencimento diminuem até se tornar zero na data de vencimento da opção, o que explica a inclinação negativa destas fileiras. Os pontos se tornam mais rarefeitos à medida que os prazos se aproximam de zero, indicando que há pouca negociação de opções próximas ao vencimento. Nota-se que, de maneira geral, os prazos das opções negociadas são bastante curtos, quase nunca superando 1 ano (252 dias úteis).

Distinguem-se aqui três períodos. De julho de 1997 a janeiro de 2000, o prazo médio das opções negociadas oscila entre 1 e 4 meses (21 e 84 dias úteis), e são negociadas opções com vencimentos em todos os meses (a distância entre as fileiras de pontos corresponde a um mês).

O segundo período, que vai de janeiro de 2000 a outubro de 2000, caracteriza-se pela baixa liquidez. A quantidade de prazos de vencimento negociados em cada dia se torna menor. O

comportamento errático da curva de prazo médio decorre da baixa quantidade de negócios, que impede que a média móvel de 5 dias consiga representar de maneira consistente o prazo médio das operações.

No terceiro período, que vai de outubro de 2000 a dezembro de 2002, volta a aumentar o volume de negócios. Entretanto, passam a ser mais negociadas apenas as opções com vencimentos nos inícios de cada trimestre, e começa a aumentar o prazo médio das opções negociadas. Em 2002, são negociadas apenas opções com vencimento em inícios de trimestres, e pode-se reparar que por um bom período é dada preferência à negociação de opções com vencimento em janeiro de 2003, comportamento explicado pelas incertezas geradas pela eleição presidencial de 2002.

#### b) TRATAMENTO PRELIMINAR DOS DADOS

Conforme mencionado anteriormente, a base inicial de dados de opções sobre IDI utilizada consiste de 24.048 registros, cada um contendo os seguintes campos:

- Data do pregão
- Tipo de série (compra ou venda)
- Data de Vencimento
- Preço de exercício
- Volume negociado
- Contratos em aberto (Final)
- Negócios efetuados
- Contratos negociados
- Cotação média
- Dias de saques até vencimento

Como foi decidido que seriam estudadas apenas as opções de compra, eliminaram-se 4.255 registros relativos às opções de venda, restando 19.793 registros referentes a opções de compra.

Como os dados serão utilizados para calibração e comparação de modelos de precificação de opções, são desnecessários os registros diários referentes a séries de opções sem negociação no dia, registros estes que totalizam uma quantidade de 13.399. Restam então 6.394 registros diários relativos a séries opções de compra para as quais houve alguma negociação.

Por se tratar de um mercado de pouca liquidez, é possível que, para determinados dias, algumas poucas operações atípicas provoquem distorções nos resultados da calibração. Decidiu-se então por eliminar os dados referentes a todos os dias em que houve menos do que 3 negócios ou menos do que 500 contratos negociados. Além disso, foram eliminados também os registros para os quais as cotações médias dos prêmios das opções eram baixas o bastante para possibilitar arbitragem.

Por fim, verificou-se que os preços das opções nos dias 29/12/97, 28/02/00 e 03/08/00 possuíam volatilidades implícitas segundo o modelo de Black com valores bastante destoantes do comportamento normal da volatilidade implícita, em decorrência de operações atípicas com opções ocorridas nestes dias. Decidiu-se assim descartar os dados das opções referentes a estes dias.

Após estas eliminações, a quantidade de registros remanescente passou a ser de 5.821, e serão esses os dados utilizados para a comparação dos modelos usados na precificação das opções de IDI.

## 6.2.2 IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS DE ETTJ

São cinco os modelos de precificação que serão analisados: Black, Merton, Vasicek, Ho-Lee e Hull-White, para os quais foram deduzidas fórmulas fechadas para o preço da opção de compra sobre o IDI. Conforme demonstrado no capítulo anterior, as fórmulas do preço da opção de IDI segundo os modelos de Merton e de Vasicek são respectivamente iguais às fórmulas deduzidas para os modelos de Ho-Lee e Hull-White, o que reduz a quantidade total de modelos a serem comparados de 5 para 3. Desta forma, de agora em diante não serão mais mencionados os modelos de Ho-Lee e Hull-White, devendo-se lembrar no entanto que os mesmos já estão sendo considerado quando se analisam os modelos de Merton e de Vasicek.

A implementação de cada um dos modelos envolve uma etapa de estimação de parâmetros do modelo, dos quais a volatilidade da taxa de juros de curto prazo é o mais crítico. Para cada modelo a ser implementado, este parâmetro de volatilidade será estimado de três maneiras distintas. A primeira será através da análise da série histórica de valores da taxa do DI de um dia, para a qual serão usadas as médias móveis simples de 21, 42 e 63 dias úteis, e também a estimação por EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*, ou média móvel ponderada exponencialmente) com fatores 0,98, 0,94 e 0,90. A escolha destes valores foi arbitrária,

embora cubram uma faixa de valores comumente utilizada na prática. O uso da série histórica do DI pressupõe que o comportamento futuro da taxa de juros de curto prazo será semelhante ao passado.

O segundo método de estimação da volatilidade será através do uso das séries de preços dos contratos de DI futuro. Este segundo método apresentaria como vantagem sobre a análise das séries históricas do DI o fato de levar em consideração expectativas dos agentes financeiros sobre a taxa de juros até o vencimento da opção. Serão usados também neste caso as médias móveis de 21, 42 e 63 dias, além da estimação por EWMA com fatores 0,98, 0,94 e 0,90. A descrição detalhada da estimação da volatilidade usando os preços dos contratos futuros será feita mais adiante.

Por fim, a terceira maneira de se estimar o termo de volatilidade dos modelos será através da volatilidade implícita do próprio modelo. Para precificar uma determinada opção de IDI num dado dia, será utilizado o valor da volatilidade implícita nos preços das opções negociadas no dia anterior. Tal método, assim como a utilização dos preços dos contratos futuros, permite obter alguma informação sobre as expectativas, embora, durante a comparação do desempenho dos diferentes modelos, possa vir a ocultar algumas deficiências destes.

Nos três modelos, as fórmulas para os preços das opções são bastante semelhantes entre si, e conseqüentemente as suas implementações são bastante similares. Por essa razão, serão tratadas conjuntamente a seguir.

As fórmulas fechadas para os modelos de Black, Merton e Vasicek podem ser escritas na forma

$$c(0, T) = IDI_0 \cdot N \left( \frac{\ln \left( \frac{IDI_0}{K \cdot P(0, T)} \right) + \frac{v^2}{2}}{v} \right) - K \cdot P(0, T) \cdot N \left( \frac{\ln \left( \frac{IDI_0}{K \cdot P(0, T)} \right) - \frac{v^2}{2}}{v} \right)$$

onde o termo  $v$  assume diferentes formas para cada um dos modelos. A tabela seguinte relaciona o nome de cada modelo com a sua descrição na forma de equação diferencial estocástica e com o respectivo valor de  $v^2$ .

Modelo	Representação	$v^2$
Black	$dIDI = IDI \cdot \mu \cdot dt + IDI \cdot \sigma_B \cdot dz$	$v^2 = \sigma_B^2 T$
Merton	$dr = \mu \cdot dt + \sigma_M \cdot dz$	$v^2 = \frac{\sigma_M^2 T^3}{3}$
Vasicek	$dr = a(b-r)dt + \sigma_V \cdot dz$	$v^2 = \frac{\sigma_V^2}{2a^3} (2aT + 4e^{-aT} - e^{-2aT} - 3)$

Tabela 6.6 – coeficientes  $v^2$  dos modelos de Black, Merton e Vasicek.

É importante reparar que os coeficientes de difusão possuem significados diferentes nos três modelos, e portanto devem ser estimados de maneiras distintas. No modelo de Black, o coeficiente  $\sigma_B$  representa o desvio-padrão da taxa de retorno do IDI (ou seja, da taxa de juros de curto prazo  $r$ ). Já nos modelos de Merton e de Vasicek, os coeficientes de difusão representam a volatilidade da variação de taxa de juros de curto prazo  $r$ .

Os parâmetros seguintes da fórmula do preço da opção são iguais para todos os três modelos. A tabela seguinte apresenta-os, descreve seu significado e como são obtidos seu valores.

Parâmetro	Descrição	Determinação
$IDI_0$	Valor do IDI	Valor do IDI no fechamento do dia anterior, fornecido pela BM&F
$K$	Preço de exercício da opção	Característica de cada contrato de opção.
$T$	Prazo para o vencimento da opção	Calculado a partir da data de vencimento da opção.
$P(0,T)$	Preço de um <i>zero-coupon bond</i> que paga \$1 na data T.	Calculado a partir dos valores dos contratos futuros da BM&F com vencimento em prazo T.

Tabela 6.7 – Parâmetros comuns das fórmulas de precificação de opções de IDI

Por fim, um último parâmetro que deve ser determinado é o coeficiente de reversão à média  $a$ , específico do modelo de Vasicek. No que se segue, serão descritas as metodologias de determinação dos valores dos parâmetros  $a$ ,  $\sigma_B$ ,  $\sigma_M$  e  $\sigma_V$ , utilizando dados históricos da taxa DI de 1 dia, dados referentes aos contratos futuros de DI e a volatilidade implícita nos preços das opções.

a) DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS USANDO DADOS HISTÓRICOS

Segundo o modelo de Black, o comportamento do valor do IDI é dado por

$$dIDI = IDI \cdot \mu \cdot dt + IDI \cdot \sigma_B \cdot dz$$

Pela fórmula de Itô, isso implica que

$$d(\ln IDI) = \left( \mu - \frac{\sigma_B^2}{2} \right) dt + \sigma_B \cdot dz$$

Desta forma, num intervalo de tempo pequeno  $\Delta t$  (por exemplo, 1 dia útil) vale a seguinte aproximação:

$$\ln IDI(t + \Delta t) - \ln IDI(t) = \left( \mu - \frac{\sigma_B^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_B \cdot (z(t + \Delta t) - z(t))$$

onde  $z(t)$  é um movimento browniano. Da equação acima resulta que

$$\ln \left( \frac{IDI(t + \Delta t)}{IDI(t)} \right) \sim N \left( \left( \mu - \frac{\sigma_B^2}{2} \right) \Delta t, \sigma_B^2 \cdot \Delta t \right)$$

Assim, como  $\ln IDI(t + \Delta t) = r(t) \cdot \Delta t + \ln IDI(t)$ , o valor da volatilidade  $\sigma_B$  pode ser estimado a partir da série histórica da taxa DI:

$$s_B^2 \cdot \Delta t = \text{var}(r(t) \cdot \Delta t)$$

Conforme mencionado anteriormente, esta variância será estimada usando janelas móveis de 21, 42 e 63 dias úteis, e pelo método EWMA com fatores 0,98, 0,94 e 0,90.

Segundo o modelo de Merton, a taxa de juros de curto prazo se comporta conforme a equação

$$dr = \mu \cdot dt + \sigma_M \cdot dz$$

Em representação discreta, esta relação assume a seguinte forma:

$$r(t + \Delta t) - r(t) = \mu \cdot \Delta t + \sigma_M \cdot (z(t + \Delta t) - z(t))$$

Isso implica na seguinte distribuição de probabilidade:

$$(r(t + \Delta t) - r(t)) \sim N(\mu \cdot \Delta t, \sigma_M^2 \cdot \Delta t)$$

Assim, o coeficiente de difusão  $\sigma_M$  do modelo de Merton pode ser estimado pela relação

$$s_M^2 \cdot \Delta t = \text{var}(r(t + \Delta t) - r(t))$$

Esta estimação será feita sobre a série histórica de taxas do DI de 1 dia, e, semelhantemente ao procedimento usado no modelo de Black, serão utilizadas janelas móveis de 21, 42 e 63 dias úteis, e também o método EWMA com fatores 0,98, 0,94 e 0,90.

O modelo de Vasicek assume que a taxa de juros de curto prazo se comporta conforme a equação diferencial estocástica seguinte:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma_v \cdot dz$$

Em representação discreta, a equação acima assume a forma

$$r(t + \Delta t) - r(t) = a \cdot b \cdot \Delta t - a \cdot r(t) \cdot \Delta t + \sigma_v \cdot (z(t + \Delta t) - z(t))$$

ou, equivalentemente:

$$r(t + \Delta t) = a \cdot b \cdot \Delta t + (1 - a \cdot \Delta t) \cdot r(t) + \sigma_v \cdot (z(t + \Delta t) - z(t))$$

Usando dados diários das taxas do DI de 1 dia, pode-se estimar a seguinte regressão:

$$r_{t+1} = \alpha + \beta \cdot r_t + \varepsilon_{t+1}$$

O valor do coeficiente de reversão à média  $a$  pode ser obtido da relação

$$\beta = 1 - a \cdot \Delta t, \quad \text{ou} \quad a = \frac{1 - \beta}{\Delta t}$$



O coeficiente de difusão  $\sigma_V$  é obtido a partir da estimativa da variância residual da regressão  $s^2(\varepsilon_t)$ :

$$s_V^2 \cdot \Delta t = s^2(\varepsilon_t)$$

Da mesma forma que as estimativas feitas para os dois modelos anteriores, aqui também serão utilizadas, na estimação da volatilidade, janelas móveis de 21, 42 e 63 dias úteis, além do método EWMA com fatores 0,98, 0,94 e 0,90.

**b) DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS USANDO CONTRATOS FUTUROS DE DI DE 1 DIA**

O procedimento de calibração dos modelos de Black, Merton e Vasicek usando as cotações dos contratos futuros de DI de 1 dia da BM&F será baseado em um estudo sobre a volatilidade do mercado futuro de juros de autoria de Eduarda Cunha de La Rocque, que faz parte de sua tese de doutorado (De La Rocque, 1996).

Inicialmente, será necessário mostrar que estes três modelos, quando apresentados na forma discreta, possuem uma representação MA( $\infty$ ), ou seja, podem ser escritos na forma:

$$r_t = k + e_t + a_1 \cdot e_{t-1} + a_2 \cdot e_{t-2} + \dots$$

onde  $r_t$  é a taxa de juros de curto prazo, representada pela taxa do DI de 1 dia,  $t$  é o tempo, que varia de 1 em 1 dia útil, e as variáveis  $e_t$  são independentes e de mesma distribuição normal, com média nula e variância  $\sigma^2(e)$ .

Conforme visto anteriormente, o modelo de Black implica, na sua forma discreta, na relação

$$\ln IDI(t + \Delta t) - \ln IDI(t) = \ln \left( \frac{IDI(t + \Delta t)}{IDI(t)} \right) = \left( \mu - \frac{\sigma_B^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_B \cdot (z(t + \Delta t) - z(t))$$

Por outro lado, lembrando que o IDI representa a acumulação das taxas de juros do DI de 1 dia, tem-se que

$$IDI(t) = IDI(0) \cdot \exp \left( \int_0^t r(s) \cdot ds \right), \text{ ou } d \ln IDI(t) = r(t) \cdot dt$$

Relacionando as expressões acima, obtém-se

$$r(t).\Delta t = \left( \mu - \frac{\sigma_B^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_B.(z(t + \Delta t) - z(t))$$

Isso implica na seguinte distribuição para a taxa de juros de 1 dia:

$$r(t).\Delta t \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma_B^2}{2}\right)\Delta t, \sigma_B^2.\Delta t\right), \text{ ou } r(t) \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma_B^2}{2}\right)\frac{\sigma_B^2}{\Delta t}\right)$$

Desta forma, a taxa de juros  $r(t)$  possui a seguinte representação em série temporal:

$$r_t = k + e_t,$$

onde  $k = \left(\mu - \frac{\sigma_B^2}{2}\right)$  e  $e_t$  é distribuído normalmente com média 0, variância  $\sigma_B^2 / \Delta t$  e  $\text{cov}(e_t, e_{t-i}) = 0$  para qualquer  $i$ , o que caracteriza um caso particular de uma série  $MA(\infty)$ .

A representação discreta do modelo de Merton é dada por:

$$r(t + \Delta t) - r(t) = \mu.\Delta t + \sigma_M.(z(t + \Delta t) - z(t))$$

Expressa na forma de série temporal, tal relação fica:

$$r_t = r_{t-1} + k + e_t,$$

com  $k = \mu.\Delta t$  e  $e_t$  distribuído normalmente com média 0, variância  $\sigma_M^2.\Delta t$  e  $\text{cov}(e_t, e_{t-i})=0$  para qualquer  $i$ . Através de substituições sucessivas, esta expressão pode ser expandida para

$$r_t = r_{t-n} + k.n + \sum_{i=0}^{n-1} e_{t-i}.$$

Sem grande perda de generalidade, assumindo-se  $k=0$  e fazendo  $n$  tender a infinito, obtém-se:

$$r_t = \sum_{i=0}^{\infty} e_{t-i}$$

que é um caso particular de uma série MA( $\infty$ ).

Por fim, o modelo de Vasicek possui a seguinte representação no tempo discreto

$$r(t + \Delta t) = a.b.\Delta t + (1 - a.\Delta t).r(t) + \sigma_v.(z(t + \Delta t) - z(t))$$

a qual, na forma de série temporal, fica igual a

$$r_t = \alpha + \beta.r_{t-1} + e_t$$

onde  $\alpha = a.b.\Delta t$ ,  $\beta = (1 - a.\Delta t)$  e  $e_t$  distribuído normalmente com média 0, variância  $\sigma_v^2.\Delta t$  e  $\text{cov}(e_t, e_{t-i})=0$  para qualquer  $i$ . Assumindo que  $\beta < 1$ , através de substituições sucessivas chega-se à seguinte expressão, que é mais um caso particular de uma série MA( $\infty$ ):

$$r_t = \frac{\alpha}{1 - \beta} + \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i . e_{t-i} = b + \sum_{i=0}^{\infty} (1 - a.\Delta t)^i . e_{t-i}$$

Em resumo, a representação dos três modelos (Black, Merton e Vasicek) na forma de série MA( $\infty$ ) é dada por:

$$r_t = k + e_t + a_1.e_{t-1} + a_2.e_{t-2} + \dots$$

sendo que as características da equação variam de acordo com o modelo, conforme se segue:

Modelo	k	$a_i$	Var( $e_t$ )
Black	$\mu - \frac{\sigma_B^2}{2}$	0	$\sigma_B^2 / \Delta t$
Merton	0	1	$\sigma_M^2 . \Delta t$
Vasicek	b	$(1 - a.\Delta t)^i$	$\sigma_v^2 . \Delta t$

Tabela 6.8 – Representação dos modelos de Black, Merton e Vasicek na forma MA( $\infty$ )

O passo seguinte agora é definir o método pelo qual serão estimados os parâmetros  $a$ ,  $\sigma_B$ ,  $\sigma_M$  e  $\sigma_V$ , a partir da série histórica dos preços dos contratos futuros de DI de 1 dia.

Conforme visto na parte teórica deste trabalho, o valor num instante  $t$  de um *zero-coupon bond* que vence na data  $T$  pagando \$1 é dado pela esperança do valor descontado de \$1 segundo a medida risco-neutra  $Q$ :

$$P(t, T) = E^Q \left[ \exp \left( - \int_t^T r(t) \cdot dt \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Representando por  $r_t$  a taxa média diária do DI de 1 dia na data  $t$ , a expressão acima pode ser apresentada na forma

$$P(t, T) = E^Q \left[ \exp \left( - \sum_{i=t}^{T-1} r_i \cdot \Delta t \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

onde a variação temporal  $\Delta t$  equivale a um dia útil.

O valor na data  $t$  de um contrato futuro de DI com vencimento em  $T$ , quando expresso na forma de preço unitário (PU), pode ser dado em função do valor do *zero-coupon bond* com a mesma data de vencimento:

$$PU_t = 100.000 \cdot P(t, T) = 100.000 \cdot E^Q \left[ \exp \left( - \sum_{i=t}^{T-1} r_i \cdot \Delta t \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Como por hipótese as taxas de juros de curto prazo  $r_t$  podem ser representadas como

processos MA( $\infty$ ), então a somatória  $r_{t, T-1} = \sum_{i=t}^{T-1} r_i \cdot \Delta t$  possui distribuição normal com média

$\mu_t = E^Q \left[ \sum_{i=t}^{T-1} r_i \cdot \Delta t \middle| \mathcal{F}_t \right]$  e variância  $\sigma_t^2 = \text{var}^Q \left[ \sum_{i=t}^{T-1} r_i \cdot \Delta t \middle| \mathcal{F}_t \right]$ . Decorre disso que o valor de

$\exp \left( - \sum_{i=t}^{T-1} r_i \cdot \Delta t \right)$  possui distribuição lognormal com média igual a  $\exp(-\mu_t + \sigma_t^2 / 2)$  segundo

a medida de probabilidade risco-neutra  $Q$ . Assim, o valor do PU de um contrato futuro de DI com vencimento em  $T$  pode ser representado por:

$$PU_t = 100.000 \cdot E^Q \left[ \exp \left( - \sum_{i=t}^{T-1} r_i \cdot \Delta t \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = 100.000 \cdot \exp \left( -\mu_t + \frac{\sigma_t^2}{2} \right)$$

Defina-se a seguinte série temporal, que será útil na determinação dos parâmetros dos modelos de Black, Merton e Vasicek a partir da série histórica das cotações do DI futuro:

$$\begin{aligned} L_t &= \ln \left( \frac{PU_t}{e^{r_{t-1} \cdot \Delta t} \cdot PU_{t-1}} \right) = -r_{t-1} \cdot \Delta t + \ln(PU_t) - \ln(PU_{t-1}) = \\ &= -r_{t-1} \cdot \Delta t + \mu_{t-1} - \mu_t + \frac{\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2}{2} \end{aligned}$$

Os valores de  $(\mu_{t-1} - \mu_t)$  e de  $(\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2)$  serão determinados separadamente a seguir.

$$\begin{aligned} (\mu_{t-1} - \mu_t) &= E^Q \left[ \sum_{i=t-1}^{T-1} r_i \cdot \Delta t \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] - E^Q \left[ \sum_{i=t}^{T-1} r_i \cdot \Delta t \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\ &= \sum_{i=t-1}^{T-1} E^Q [r_i | \mathcal{F}_{t-1}] \Delta t - \sum_{i=t}^{T-1} E^Q [r_i | \mathcal{F}_t] \Delta t = \\ &= E^Q [r_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] \Delta t + \sum_{i=t}^{T-1} (E^Q [r_i | \mathcal{F}_{t-1}] - E^Q [r_i | \mathcal{F}_t]) \Delta t \end{aligned}$$

Por definição,  $r_t$  é a taxa do DI no dia  $t$ , que só é conhecida no final do dia, o mesmo valendo para a variável  $e_t$ . Por outro lado, representa-se por  $\mathcal{F}_t$  a informação disponível no início do dia  $t$ . Assim, o valor da taxa  $r_t$  ainda não está considerado na informação  $\mathcal{F}_t$ , e nem o valor de  $e_t$ , embora os valores de  $e_{t-1}$ ,  $e_{t-2}$ , etc. estejam. Desta forma, a esperança de  $r_t$  dada a informação  $\mathcal{F}_t$  é igual a:

$$E^Q [r_t | \mathcal{F}_t] = E^Q [k + e_t + a_1 \cdot e_{t-1} + a_2 \cdot e_{t-2} + \dots | \mathcal{F}_t] = k + a_1 \cdot e_{t-1} + a_2 \cdot e_{t-2} + \dots$$

De maneira geral, para  $i > t-1$ , vale:

$$E^Q [r_i | \mathcal{F}_t] = E^Q [k + e_i + a_1 \cdot e_{i-1} + a_2 \cdot e_{i-2} + \dots | \mathcal{F}_t] = k + a_{i-(t-1)} \cdot e_{t-1} + a_{i-(t-2)} \cdot e_{t-2} + \dots$$

Decorre disso que

$$E^Q[r_i|\mathcal{F}_{t-1}] - E^Q[r_i|\mathcal{F}_t] = -a_{i-(t-1)} \cdot e_{t-1}$$

Conhecidos estes resultados, é possível calcular o valor de  $(\mu_{t-1} - \mu_t)$ :

$$\begin{aligned} (\mu_{t-1} - \mu_t) &= E^Q[r_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}]\Delta t + \sum_{i=t}^{T-1} (E^Q[r_i|\mathcal{F}_{t-1}] - E^Q[r_i|\mathcal{F}_t])\Delta t = \\ &= \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot e_{t-2} \right) \Delta t - \left( \sum_{i=t}^{T-1} a_{i-(t-1)} \right) e_{t-1} \cdot \Delta t = \\ &= (a_1 \cdot e_{t-2} + a_2 \cdot e_{t-3} + \dots) \Delta t - (a_1 + a_2 + \dots + a_{T-t}) e_{t-1} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Para calcular  $(\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2)$  é necessário primeiro determinar o valor de  $\sigma_t^2 = \text{var}^Q \left[ \sum_{i=t}^{T-1} r_i \cdot \Delta t \middle| \mathcal{F}_t \right]$ .

Expressando os valores dos  $r_i$ 's na forma MA( $\infty$ ), a sua somatória passa a ser dada por:

$$\begin{aligned} \sum_{i=t}^{T-1} r_i &= r_t + r_{t+1} + \dots + r_{T-1} = \\ &= k + e_t + a_1 \cdot e_{t-1} + a_2 \cdot e_{t-2} + \dots + k + e_{t+1} + a_1 \cdot e_t + a_2 \cdot e_{t-1} + \dots + k + e_{T-1} + a_1 \cdot e_{T-2} + \dots \end{aligned}$$

Agrupando os termos, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=t}^{T-1} r_i &= k \cdot (T-t) + e_{T-1} + e_{T-2} \cdot (1+a_1) + e_{T-2} \cdot (1+a_1+a_2) + \dots + e_t \cdot (1+a_1+\dots+a_{T-t-1}) + \\ &+ e_{t-1} \cdot (a_1+a_2+\dots+a_{T-t}) + e_{t-2} \cdot (a_2+a_3+\dots+a_{T-t+1}) + \dots \end{aligned}$$

Como, num instante  $t$ , os valores de  $e_{t-1}$ ,  $e_{t-2}$ , ... já são conhecidos, então a sua variância condicionada à informação disponível até o instante  $t$  é nula:

$$\text{var}(e_{t-i}|\mathcal{F}_t) = 0, \text{ para } i > 0.$$

Lembrando que, por hipótese,  $\text{cov}(e_t, e_{t-i}) = 0$  e  $\text{var}(e_t) = \text{var}(e_{t-i}) = \sigma^2(e)$  para todo  $i > 0$  então segue que

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \text{var}^Q \left[ \sum_{i=t}^{T-1} r_i \cdot \Delta t \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\ &= \left[ \text{var}(e_{T-1}) + (1+a_1)^2 \cdot \text{var}(e_{T-2}) + \dots + (1+a_1+a_2+\dots+a_{T-t-1})^2 \cdot \text{var}(e_t) \right] (\Delta t)^2 = \\ &= \sigma^2(e) (\Delta t)^2 \cdot \left[ 1 + (1+a_1)^2 + (1+a_1+a_2)^2 + \dots + (1+a_1+\dots+a_{T-t-1})^2 \right] \end{aligned}$$

Desta forma, o valor de  $(\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2)$  é dado por:

$$(\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2) = -\sigma^2(e) \cdot (\Delta t)^2 \cdot (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{T-t})^2$$

Conhecidos  $(\mu_{t-1} - \mu_t)$  e  $(\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2)$  é possível agora determinar o valor dos elementos da série  $L_t$ :

$$L_t = -r_{t-1} \cdot \Delta t + \mu_{t-1} - \mu_t + \frac{\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2}{2}$$

$$L_t = -(e_{t-1} + a_1 \cdot e_{t-2} + \dots) \Delta t + (a_1 \cdot e_{t-2} + a_2 \cdot e_{t-3} + \dots) \Delta t - (a_1 + a_2 + \dots + a_{T-t}) e_{t-1} \cdot \Delta t - \sigma^2(e) \cdot (\Delta t)^2 \cdot (1 + a_1 + \dots + a_{T-t})^2 / 2$$

$$L_t = -(1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{T-t}) e_{t-1} \cdot \Delta t - \sigma^2(e) \cdot (\Delta t)^2 \cdot (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{T-t})^2 / 2$$

Dividindo ambos os lados da equação por  $(1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{T-t}) \cdot \Delta t$ , obtém-se:

$$\frac{L_t}{(1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{T-t}) \Delta t} = -e_{t-1} - \frac{\sigma^2(e) \cdot (\Delta t) (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{T-t})}{2}$$

Isolando  $e_{t-1}$ , tem-se:

$$e_{t-1} = -\frac{L_t}{(1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{T-t}) \Delta t} - \frac{\sigma^2(e) \cdot (\Delta t) (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{T-t})}{2}$$

Assim, aceitando-se que a taxa de juros de curto prazo se comporta conforme o modelo MA( $\infty$ ), pode-se obter os valores das variáveis  $e_t$  usando a fórmula acima e a série  $L_t$  calculada a partir de dados históricos. Esta expressão pode ser escrita numa versão geral válida para os modelos de Black, Merton e Vasicek. Assumindo  $\Delta t=1$ , por simplificação, obtém-se:

$$e_{t-1} = -\frac{L_t}{(1 + (1-a) + (1-a)^2 + \dots + (1-a)^{T-t})} - \frac{\sigma^2 \cdot (1 + (1-a) + (1-a)^2 + \dots + (1-a)^{T-t})}{2}$$

sendo que para o modelo de Black,  $a=1$ , para o modelo de Merton,  $a=0$ , e para o modelo de Vasicek,  $a$  pode assumir quaisquer outros valores positivos entre 0 e 1..

Para estimar o valor de  $\sigma^2$  para os três modelos de forma comparável às abordagens de média móvel e EWMA utilizadas para a série histórica do DI, desenvolveu-se a seguinte função de verossimilhança:

$$F = \prod_{i=0}^n \left[ \frac{1}{\sigma} \cdot \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \left( -\frac{L_{t-i}}{1+(1-a)+\dots+(1-a)^{T-t+i}} - \frac{\sigma^2 \cdot (1+(1-a)+\dots+(1-a)^{T-t+i})}{2} \right)^2 \right) \right]^{p_i}$$

Tal função se baseia na hipótese de que os  $e_i$ 's relativos a instantes distintos são independentes e normalmente distribuídos com média nula e variância  $\sigma^2$ . Os pesos  $p_i$ 's são ponderações dadas a cada observação conforme o tipo de estimação utilizada. No caso das médias móveis de  $n$  dias, às  $n$  observações mais recentes são atribuídos pesos  $p_i=1$  e para as demais  $p_i=0$ . Na estimação por EWMA, os valores dos  $p_i$ 's caem exponencialmente.

A função de log-verossimilhança é dada por:

$$f = \sum_{i=0}^n p_i \cdot \left[ -\ln \sigma + \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \left( -\frac{L_{t-i}}{1+(1-a)+\dots+(1-a)^{T-t+i}} - \frac{\sigma^2 \cdot (1+(1-a)+\dots+(1-a)^{T-t+i})}{2} \right)^2 \right) \right]$$

A partir desta função são definidos os estimadores de máxima verossimilhança relativos a cada um dos modelos.

No caso do modelo de Black, o valor de  $a$  é igual a 1, e a função de verossimilhança reduz-se a:

$$f_{Black} = \sum_{i=0}^n p_i \cdot \left[ -\ln \sigma + \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \left( L_{t-i} + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \right) \right]$$

Derivando esta função em relação a  $\sigma$ , igualando o resultado a zero e resolvendo a equação, obtém-se:



$$\hat{\sigma}_{Black}^2 = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=0}^n p_i\right) + \left(\sum_{i=0}^n p_i\right) \left(\sum_{i=0}^n p_i \cdot L_{t-i}^2\right) - \sum_{i=0}^n p_i}}{\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n p_i}$$

Como é possível mostrar que  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_{Black} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} f_{Black} = -\infty$  e que  $\frac{\partial^2 f_{Black}(\hat{\sigma}_{Black})}{\partial \sigma^2} < 0$  em  $(0, \infty)$ , tendo  $f_{Black}$  derivadas contínuas em  $(0, \infty)$ , então  $\hat{\sigma}_{Black}$  é o máximo de  $f_{Black}$  e portanto o estimador de máxima verossimilhança para  $\sigma$ .

No caso do modelo de Merton, o valor de  $a$  é igual a 0, e a função de verossimilhança reduz-se a:

$$f_{Merton} = \sum_{i=0}^n p_i \left[ -\ln \sigma + \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{L_{t-i}}{(T-t+1+i)} + \frac{(T-t+1+i)\sigma^2}{2} \right)^2 \right) \right]$$

Derivando esta função em relação a  $\sigma$ , igualando o resultado a zero e resolvendo a equação, obtém-se:

$$\hat{\sigma}_{Merton}^2 = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=0}^n p_i\right) + \left(\sum_{i=0}^n p_i (T-t+i+1)^2\right) \left(\sum_{i=0}^n p_i \frac{L_{t-i}^2}{(T-t+i+1)^2}\right) - \sum_{i=0}^n p_i}}{\frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^n p_i (T-t+i+1)^2\right)}$$

É possível mostrar que  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_{Merton} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} f_{Merton} = -\infty$  e que  $\frac{\partial^2 f_{Merton}(\hat{\sigma})}{\partial \sigma^2} < 0$  em  $(0, \infty)$ . Como  $f_{Merton}$  possui derivada contínua em  $(0, \infty)$ , então  $\hat{\sigma}_{Merton}$  é o máximo de  $f_{Black}$  e portanto o estimador de máxima verossimilhança para  $\sigma$ .

O modelo de Vasicek é o caso mais geral. A função de verossimilhança é dada por:

$$f_{Vasicek} = \sum_{i=0}^n p_i \left[ -\ln \sigma + \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{L_{t-i}}{1 + (1-a) + \dots + (1-a)^{T-t+i}} + \frac{(1 + (1-a) + \dots + (1-a)^{T-t+i}) \sigma^2}{2} \right)^2 \right) \right]$$

Fixando um valor para  $a$ , derivando a equação em relação a  $\sigma$  e igualando a zero, obtém-se:

$$\hat{\sigma}_{Vasicek}^2 = \frac{\sqrt{\left( \sum_{i=0}^n p_i \right) + \left( \sum_{i=0}^n p_i (1 + (1-a) + \dots + (1-a)^{T-t+i})^2 \right) \left( \sum_{i=0}^n \frac{p_i \cdot L_{t-i}^2}{(1 + (1-a) + \dots + (1-a)^{T-t+i})^2} \right) - \sum_{i=0}^n p_i}}{\frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^n p_i (1 + (1-a) + \dots + (1-a)^{T-t+i})^2 \right)}$$

É possível mostrar que  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_{Vasicek}(\sigma, a) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} f_{Vasicek}(\sigma, a) = -\infty$  e que

$\frac{\partial^2 f_{Vasicek}(\hat{\sigma}_{Vasicek}, a)}{\partial \sigma^2} < 0$  para qualquer valor de  $a$  menor do que 1. Desta forma, dado qualquer

$a$  fixo menor do que 1, o valor de  $\sigma_{Vasicek}$  é o máximo da função de verossimilhança para aquele  $a$ . Para se identificar os estimadores de máxima verossimilhança, pode-se substituir a fórmula de  $\sigma_{Vasicek}$  na função de verossimilhança e utilizar métodos numéricos para encontrar o valor de  $\hat{a}_{Vasicek}$  que maximiza a função. Por fim, substitui-se este valor na fórmula de  $\sigma_{Vasicek}$  e encontra-se o estimador de máxima verossimilhança para a volatilidade.

Por hipótese, o coeficiente de reversão à média  $a$  do modelo de Vasicek deverá se situar no intervalo  $(0,1)$ . Se  $a < 0$ , tem-se um comportamento de “fuga” da média, e a taxa de juros de curto prazo tende a divergir. Se  $a > 1$ , a reversão à média é intensa demais, e a taxa de juros de curto prazo fica oscilando bruscamente em torno da taxa média de longo prazo. Assim, no procedimento numérico de identificação dos estimadores do modelo de Vasicek, será imposta a restrição de que o coeficiente de reversão à média deve se situar em  $[0,1]$ , lembrando que, para  $a=1$  tem-se o modelo de Black, e para  $a=0$ , o modelo de Merton.

Para se estimar os parâmetros de cada um dos três modelos, será usado procedimento semelhante ao adotado para a estimação a partir da série histórica do DI: serão utilizadas janelas móveis de 21, 42 e 63 dias úteis, além do método EWMA com fatores 0,98, 0,94 e

0,90. Para cada opção, o contrato futuro a ser utilizado no cálculo de  $L_t$  será aquele com data de vencimento igual à do vencimento da opção. Além disso, se optará pelo uso da cotação média das negociações de contratos futuros, uma vez que serão utilizadas na análise as cotações médias dos prêmios das opções .

c) DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS USANDO VOLATILIDADES IMPLÍCITAS

A volatilidade implícita no preço de uma opção é aquela que, substituída na fórmula do preço da opção, reproduz exatamente o seu valor de mercado. Assim, cada negócio com opções possui uma respectiva volatilidade implícita.

Desta forma, uma maneira de determinar o preço de uma opção seria utilizar na fórmula de sua precificação o valor da volatilidade implícita no preço de outra opção semelhante negociada um pouco antes, supondo que as expectativas dos investidores não tenham se alterado durante o tempo decorrido entre os dois negócios.

No entanto, os dados relativos às opções sobre IDI disponibilizados pela BM&F apresentam, para cada série de opção e para cada dia, apenas as cotações de abertura, de fechamento, máxima, mínima e a média do dia. Como a cotação de fechamento é mais sujeita a oscilações devidas a negociações atípicas, optou-se por utilizar a cotação média, cujo valor seria mais representativo da expectativa média do mercado no dia.

Em cada dia são negociadas diversas opções de compra de IDI, com prazos e *strikes* distintos. A volatilidade implícita deste conjunto de cotações será aquela que minimizar o erro entre o preço calculado para as opções e o seu preço de mercado. O indicador de erro a ser minimizado será dado por:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_i N_i \cdot (p_{c,i} - p_{M,i})^2}{\sum_i N_i}}$$

onde cada  $i$  representa um tipo de opção (com vencimento e *strike* próprios),  $N_i$  é o número de contratos daquela opção negociados no dia,  $p_{M,i}$  é a cotação média de mercado negociada no

dia para aquele tipo de opção, e  $p_{c,i}$  é o preço calculado para a opção, que é função da volatilidade. Optou-se por ponderar os desvios quadrados pelo número de contratos negociados para dar mais peso às negociações mais volumosas, cujas cotações tendem a se desviar menos dos valores “justos” do que as operações menores. Além disso, preferiu-se utilizar o desvio absoluto ao quadrado, ao invés do erro percentual ao quadrado, porque a primeira alternativa trata de igual maneira as opções *in-the-money* e *out-of-the-money*, ao contrário da última, que atribui pesos maiores às opções *out-of-the-money*.

Assim, será considerada a volatilidade implícita do conjunto de opções negociadas num dado dia o valor de volatilidade que, utilizado no cálculo dos preços  $p_{c,i}$ , produzir o menor valor para o indicador de erro  $S$ . O valor da volatilidade implícita será obtido através de métodos numéricos que minimizem o valor de  $S$ .

Definido o procedimento para o cálculo da volatilidade implícita, o cálculo do preço de uma opção pode ser feito usando a volatilidade implícita nos preços das opções negociadas no dia anterior. Como, neste estudo, optou-se por descartar os dados referentes a dias com pouca liquidez, será utilizada a volatilidade implícita nos preços das opções negociadas no dia útil imediatamente anterior para o qual os registros das opções não foram descartados.

Para cada um dos três modelos (Black, Merton e Vasicek) serão calculadas as volatilidades implícitas que estimam os valores de  $\sigma_B$ ,  $\sigma_M$  e  $\sigma_V$  respectivamente, utilizando para cada modelo a fórmula adequada. No caso do modelo de Vasicek, será também determinado o coeficiente de reversão à média.

### 6.3 COMPARAÇÃO DOS DESEMPENHOS DOS MODELOS

Para cada um dos três modelos foram descritos 13 procedimentos distintos para sua implementação: 6 usando a série histórica das taxas do DI de 1 dia, 6 usando a série histórica das cotações dos contratos futuros, e 1 utilizando a volatilidade implícita nos preços das opções negociadas no dia anterior. É necessário agora determinar a maneira pela qual os desempenhos destes modelos podem ser comparados.

Será feita uma análise *ex-post* de cada um dos modelos e cada um dos métodos de implementação, na qual serão comparados, em cada dia para o qual se tiver dados sobre os preços das opções, os preços calculados pelos modelos e a cotação média negociada no dia. Serão utilizados três indicadores de desempenho dos modelos: o erro médio (*EM*), o erro absoluto médio (*EAM*) e o erro quadrático médio (*EQM*), todos ponderados pelo número de contratos:

$$EM = \frac{\sum_i N_i (p_{c,i} - p_{M,i})}{\sum_i N_i}$$

$$EAM = \frac{\sum_i N_i |p_{c,i} - p_{M,i}|}{\sum_i N_i}$$

$$EQM = \sqrt{\frac{\sum_i N_i (p_{c,i} - p_{M,i})^2}{\sum_i N_i}}$$

onde cada *i* representa um tipo de opção negociado numa dada data (com vencimento e *strike* próprios), *N<sub>i</sub>* é o número de contratos daquela opção negociados naquela data, *p<sub>M,i</sub>* é a cotação média de mercado negociada na data para aquele tipo de opção, e *p<sub>c,i</sub>* é o preço calculado para a opção. As somatórias são feitas sobre todo o período para o qual se deseja avaliar o desempenho do método.

Optou-se por utilizar nas ponderações as diferenças dos preços ao invés dos erros percentuais pois estes últimos dão ênfase excessiva aos desvios nas opções out-of-the-money, ênfase pequena para as opções in-the-money e ênfase moderada para as opções at-the-money. Por outro lado, a simples diferença entre os preços calculado e de mercado devida a erros de calibração tende a ser maior para as opções at-the-money, que possuem vega maior do que as opções in-the-money e out-of-the money. Como a liquidez das negociações costuma se concentrar nas opções at-the-money, as cotações das opções nesta condição em geral são mais representativas do que as das opções longe do dinheiro, que por sua vez estão mais sujeitas à ocorrência de transações atípicas componentes de operações estruturadas.

O erro médio (*EM*) representa o valor médio dos desvios dos preços calculados em relação aos de mercado. É uma representação do erro sistemático do modelo de precificação. O erro absoluto médio (*EAM*) e o erro quadrático médio (*EQM*) são ambas representações da dispersão dos preços calculados em relação aos preços de mercado, sendo que o *EQM* tende a dar mais ênfase aos desvios maiores e menos ênfase aos desvios menores do que o *EAM*.

## 7 ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 7.1 COMPORTAMENTO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS

A implementação dos modelos foi feita em MATLAB, e seu código é apresentado no apêndice deste trabalho.

Os gráficos que se seguem mostram a evolução temporal dos parâmetros estimados para os três modelos, segundo cada um dos métodos de estimação. Para facilitar a interpretação da evolução dos parâmetros, é útil ter em mente o comportamento da curva de juros no período, dado resumidamente na figura abaixo, que mostra a evolução das taxas de juros de 1, 90, 180 e 360 dias. As taxas de 90, 180 e 360 dias foram calculadas a partir da interpolação exponencial das cotações de ajuste dos contratos futuros de DI de 1 dia da BM&F.

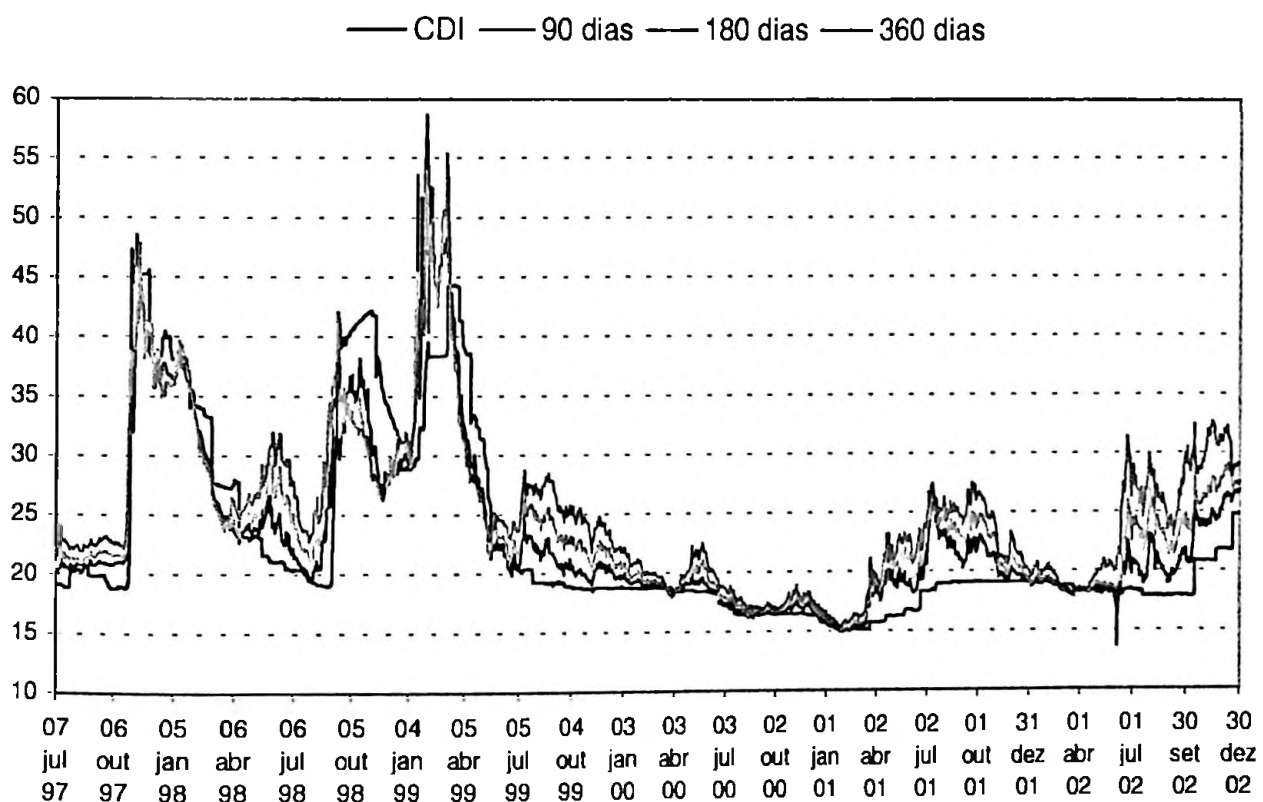


Figura 7.1 – Evolução temporal das taxas de juros de 90, 180 e 360 dias e do CDI.

Visualmente, é possível identificar, a partir de 1999, a alteração de comportamento das taxas de juros decorrente da mudança do regime cambial, após a qual houve redução considerável da volatilidade das taxas. É possível também observar, após de 1999, a ocorrência de períodos de maior volatilidade em 2001 (por conta das crise energética, argentina e dos

atentados nos EUA) e em 2002 (devido às eleições presidenciais). Tais eventos deverão se refletir no comportamento dos parâmetros estimados para os modelos.

Os gráficos seguintes mostram as volatilidades estimadas para o modelo de Black, segundo cada um dos modelos.

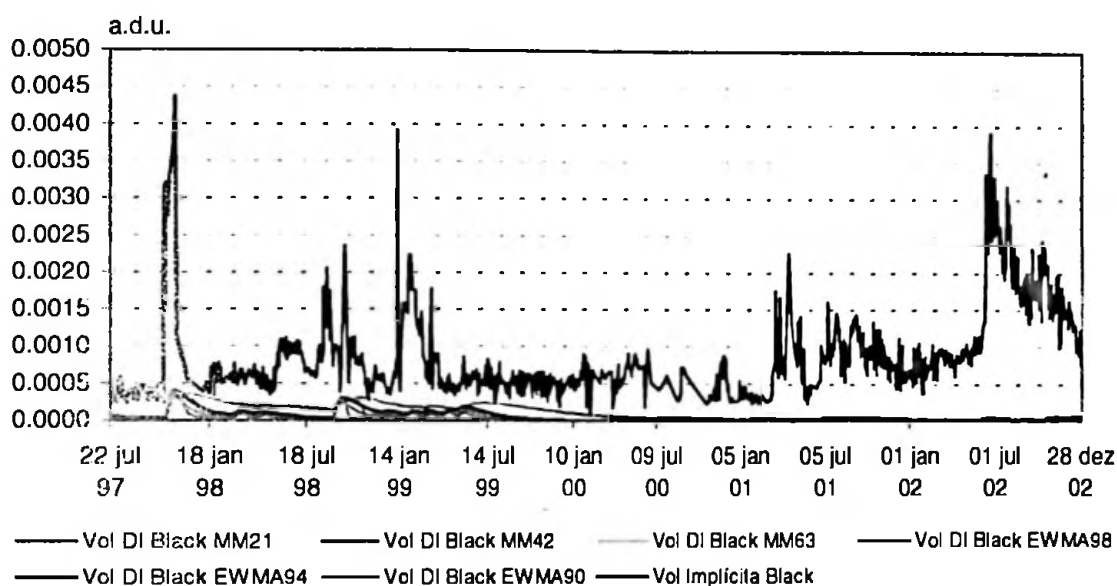


Figura 7.2 – Volatilidades do modelo de Black calculadas a partir da série histórica do CDI, juntamente com a volatilidade implícita

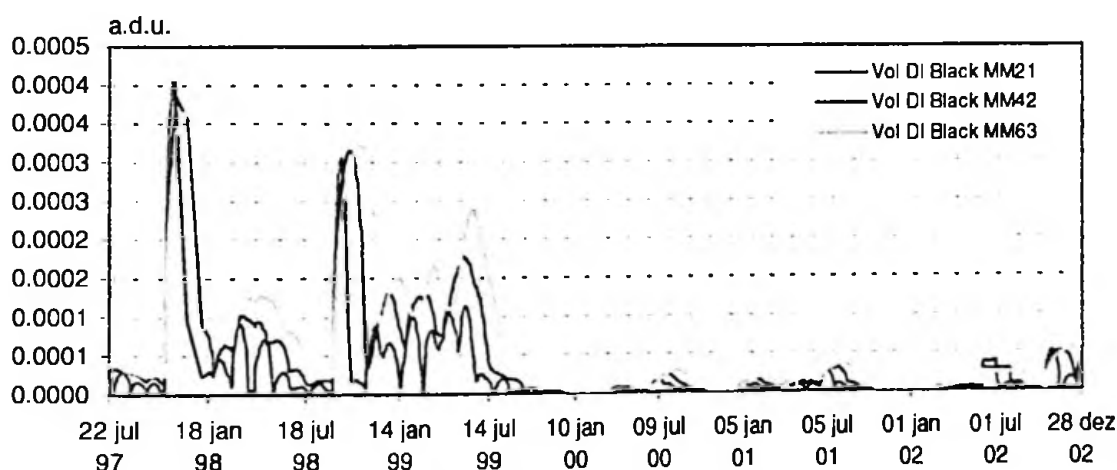


Figura 7.3 – Volatilidades do modelo de Black calculadas a partir da série histórica do CDI (médias móveis)



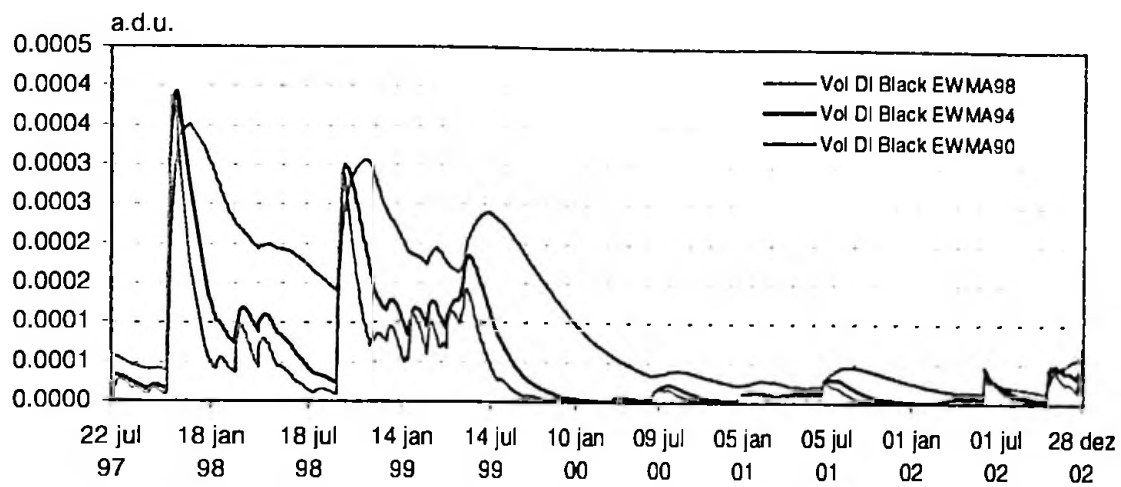


Figura 7.4 – Volatil. do modelo de Black calculadas a partir da série histórica do CDI (EWMA)

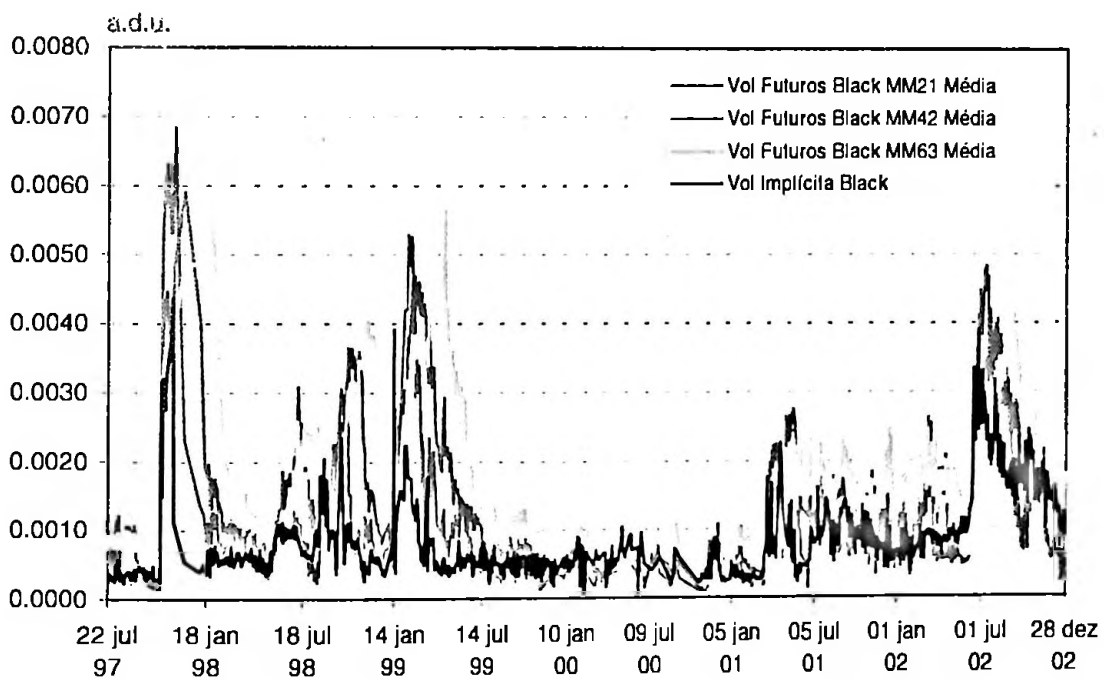


Figura 7.5 – Valores médios diários das volatilidades do modelo de Black calculadas a partir das séries históricas dos contratos de DI Futuro (médias móveis)

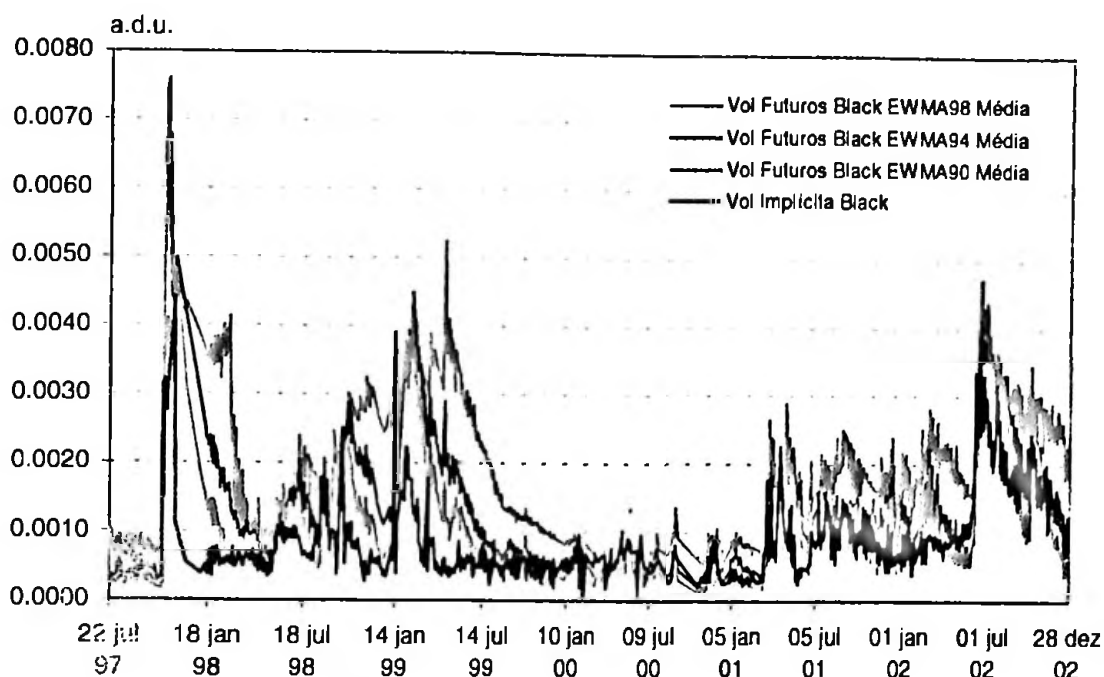


Figura 7.6 – Valores médios diários das volatilidades do modelo de Black calculadas a partir das séries históricas dos contratos de DI Futuro (EWMA)

A unidade da volatilidade nos gráficos é  $\text{du}^{-1}$ . Como para cada prazo de opção é calculada uma volatilidade diferente quando se usa a série dos contratos futuros, foi utilizada nos gráficos a média diária destas volatilidades.

Por definição, a volatilidade implícita é aquela que produz menor erro quadrático médio. Assim, quanto mais próximas da volatilidade implícita estiverem as demais volatilidades, menores serão os valores de EQM que produzirão.

Quando comparadas com a volatilidade implícita, as volatilidade calculadas a partir da série histórica do CDI se mostram consideravelmente menores. Como consequência, quando utilizadas para precificar as opções, resultarão em valores de prêmios mais baixos do que os de mercado. Por outro lado, as volatilidades calculadas a partir da série dos contratos futuros mostraram-se da mesma ordem de grandeza da volatilidade implícita, assumindo em geral valores mais altos, e devendo portanto conduzir a valores de prêmios maiores do que os de mercado.

Outro aspecto a se observar é que as volatilidades derivadas das séries de contratos futuros tendem a acompanhar melhor o comportamento da volatilidade implícita do que as volatilidades derivadas da série do DI. Isso ocorre porque as cotações dos contratos futuros

embutem informações sobre expectativas para a taxa de curto prazo, ao contrário da série histórica do DI.

Dentre os métodos de estimação utilizados, aqueles que dão maiores pesos às informações mais recentes (ou seja, os métodos EWMA com  $\lambda=0,90$  e a média móvel de 21 dias) produziram, para as séries calculadas a partir dos contratos futuros, curvas mais próximas à da volatilidade implícita.

Os gráficos seguintes mostram as volatilidades obtidas segundo o modelo de Merton.

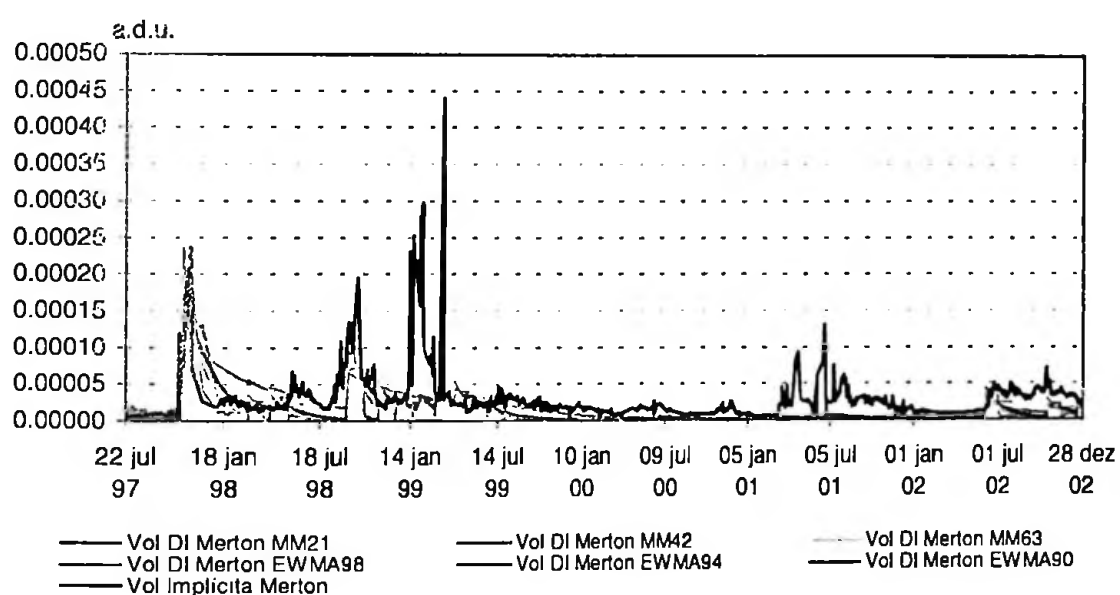


Figura 7.7 – Volatilidades do modelo de Merton calculadas a partir da série histórica do CDI

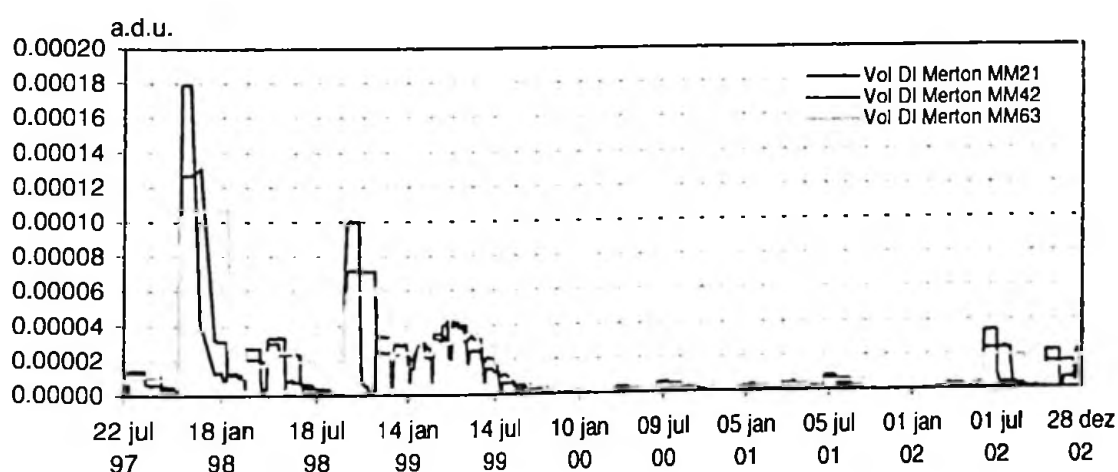


Figura 7.8 – Volatilidades do modelo de Merton calculadas a partir da série histórica do CDI (médias móveis)

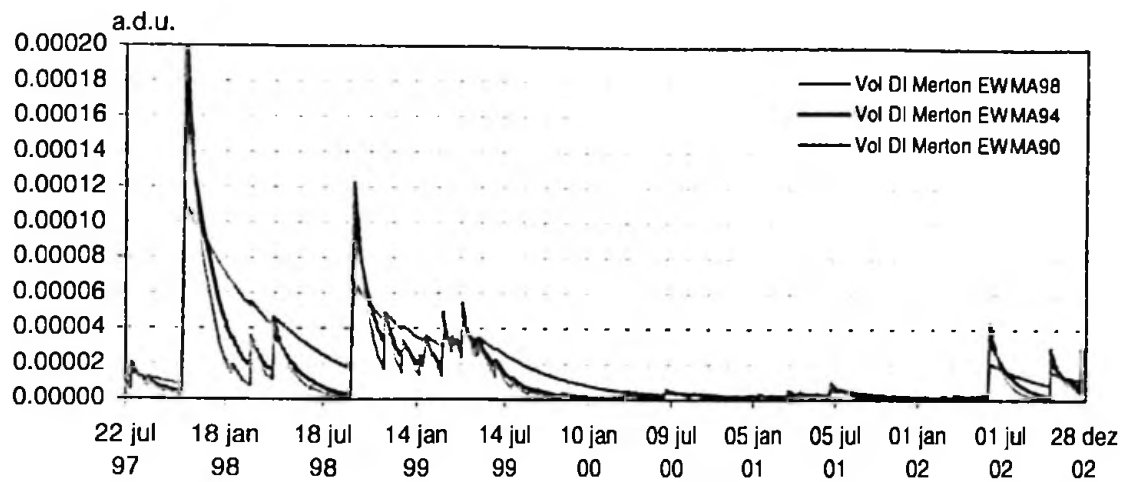


Figura 7.9 – Volatil. do modelo de Merton calculadas a partir da série histórica do CDI (EWMA)

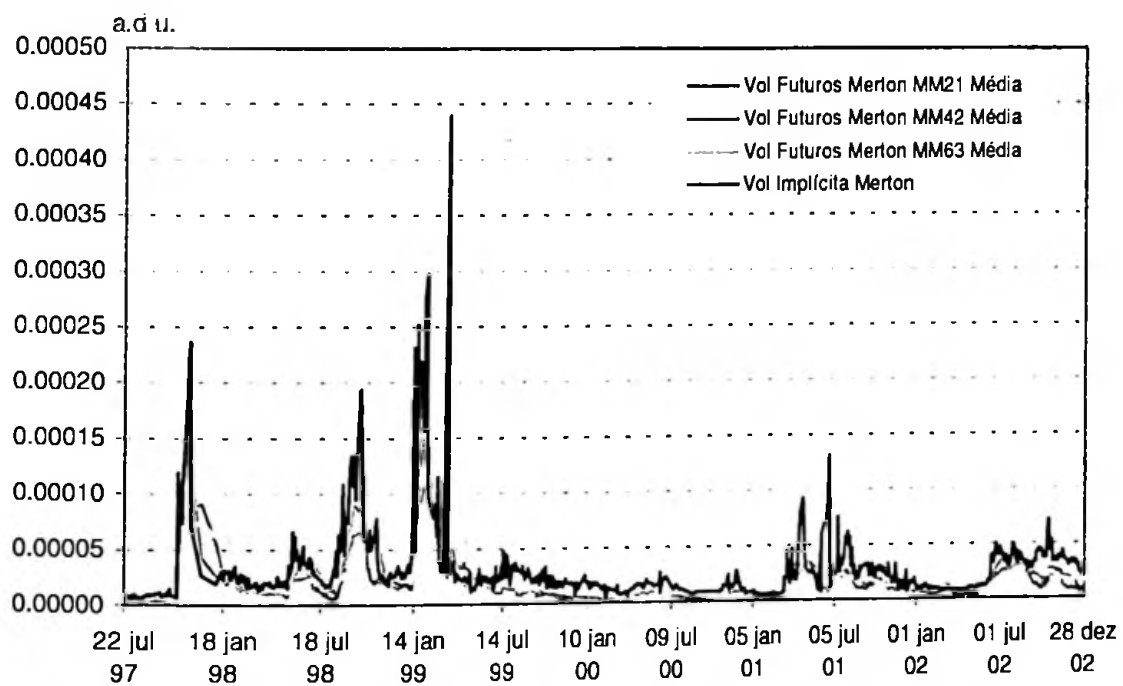


Figura 7.10 – Valores médios diários das volatilidades do modelo de Merton calculadas a partir das séries históricas dos contratos de DI Futuro (médias móveis)

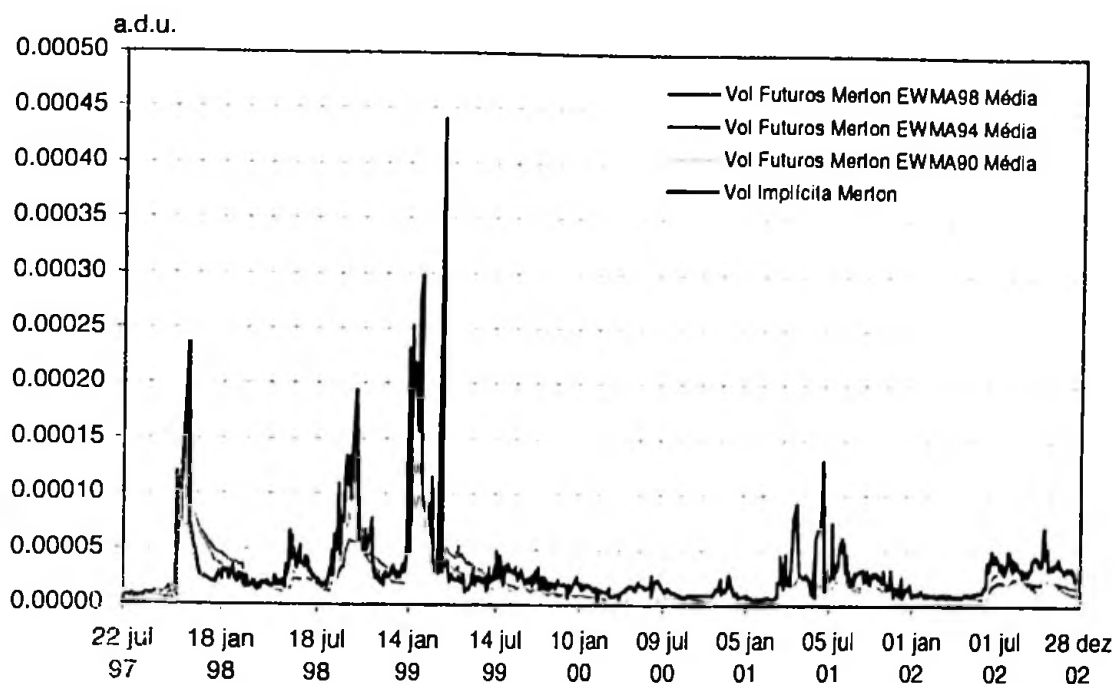


Figura 7.11 – Valores médios diários das volatilidades do modelo de Merton calculadas a partir das séries históricas dos contratos de DI Futuro (EWMA)

De forma geral, as observações feitas para as volatilidades do modelo de Black são válidas também para o modelo de Merton. No entanto, neste caso, a volatilidade calculada a partir dos dados de contratos futuros tende, em geral, a ser inferior à implícita para todos os métodos de estimação.

Outra diferença pode ser notada comparando-se as curvas das volatilidades implícitas dos modelos de Black e de Merton. Em ambos os casos, é possível identificar dois grandes períodos de maior volatilidade: o primeiro vai de outubro de 1997 a março de 1999, e o segundo se inicia em março de 2001 e se estende até dezembro de 2002. A diferença está no fato de que, enquanto as volatilidades implícitas do modelo de Black nestes dois períodos apresentam a mesma magnitude, no modelo de Merton a volatilidade no segundo período é sensivelmente menor. Isso ocorre porque o modelo de Merton tende a amplificar mais do que o de Black o efeito da volatilidade para prazos mais longos. Por essa razão, se duas opções, uma curta e outra longa, apresentarem a mesma volatilidade implícita pelo modelo de Black, segundo o modelo de Merton a volatilidade implícita da longa deverá ser menor do que a da curta. Como as opções negociadas no segundo período apresentam prazos maiores do que as negociadas no primeiro período e volatilidades implícitas de Black de mesma magnitude, as volatilidades implícitas do modelo de Merton deverão ser menores para as opções mais longas do segundo período.

Os gráficos seguintes mostram os parâmetros estimados para o modelo de Vasicek.

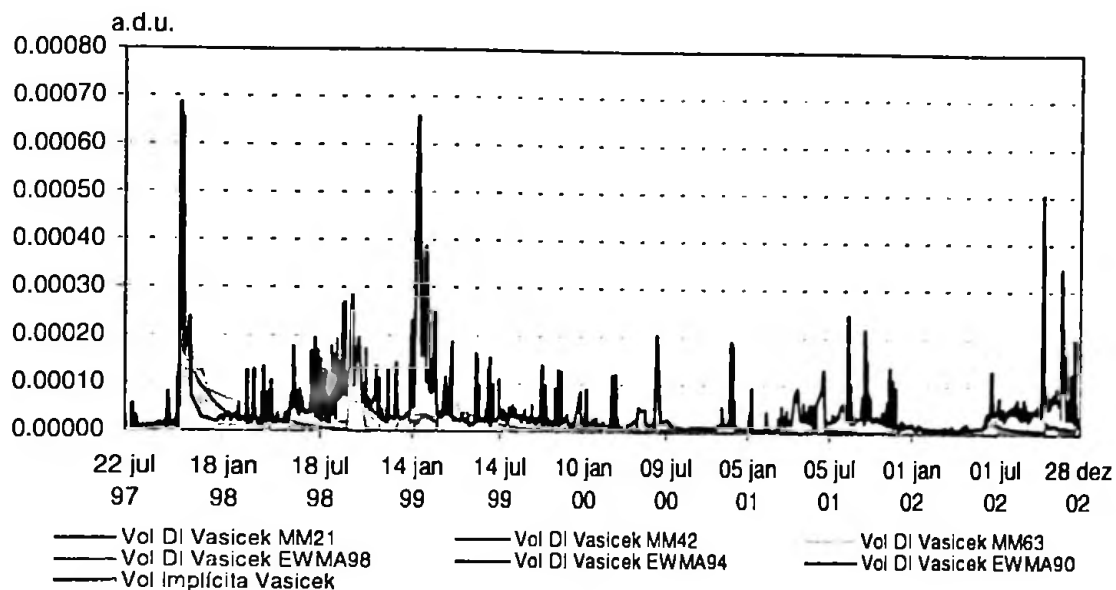


Figura 7.12 -- Volatilidades do modelo de Vasicek calculadas a partir da série histórica do CDI

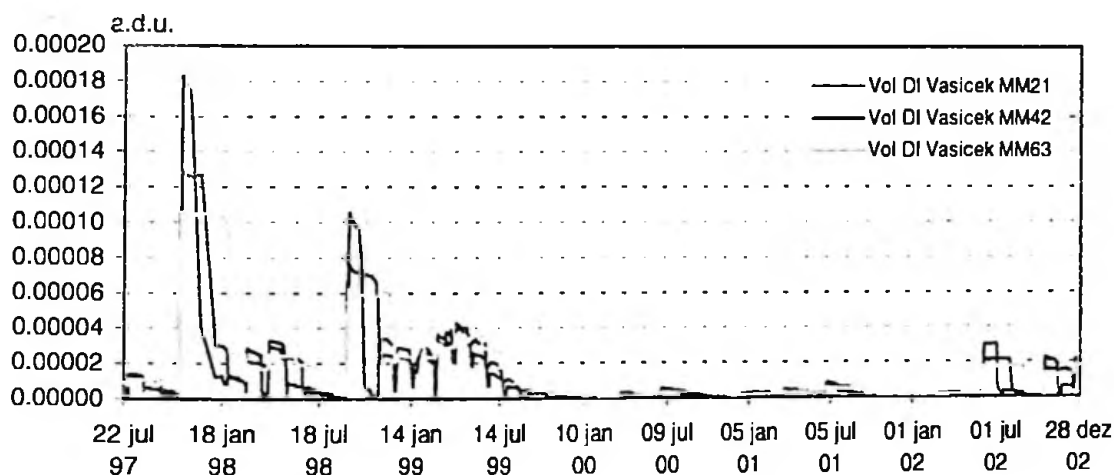


Figura 7.13 – Volatilidades do modelo de Vasicek calculadas a partir da série histórica do CDI (médias móveis)

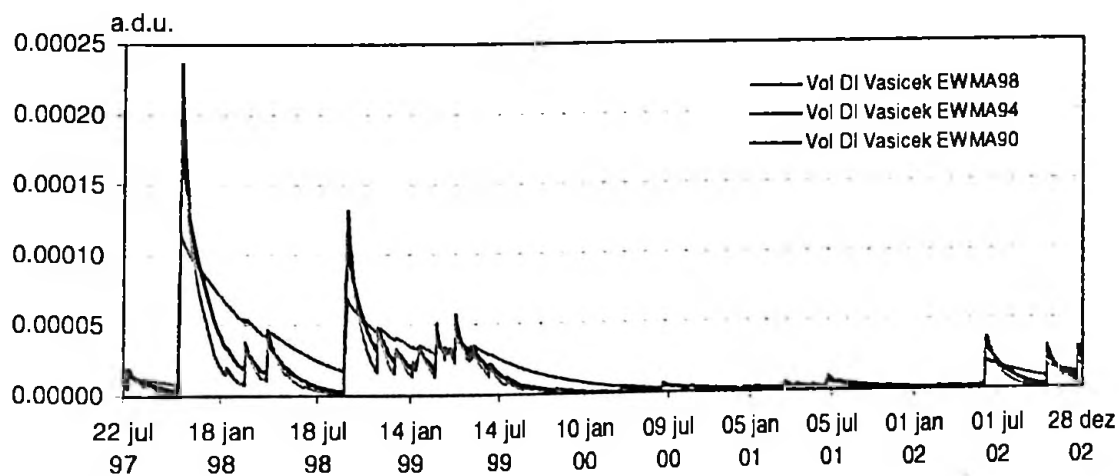


Figura 7.14 – Volatil. do modelo de Vasicek calculadas a partir da série histórica do CDI (EWMA)

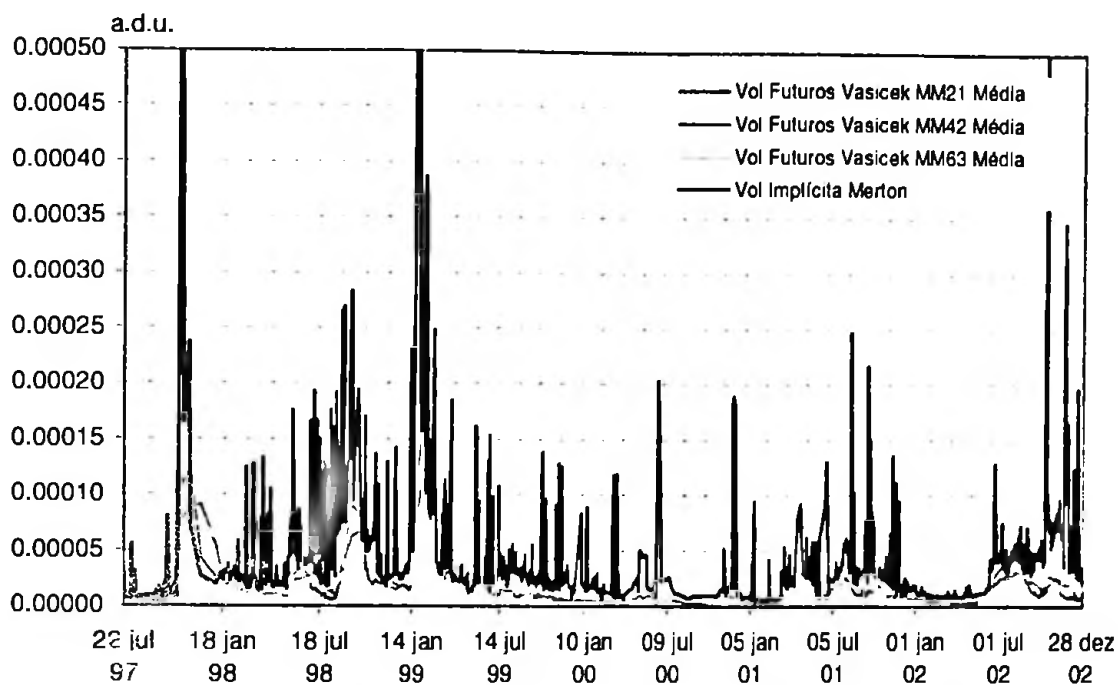


Figura 7.15- Valores médios diários das volatilidades do modelo de Vasicek calculadas a partir das séries históricas dos contratos de DI Futuro (médias móveis)

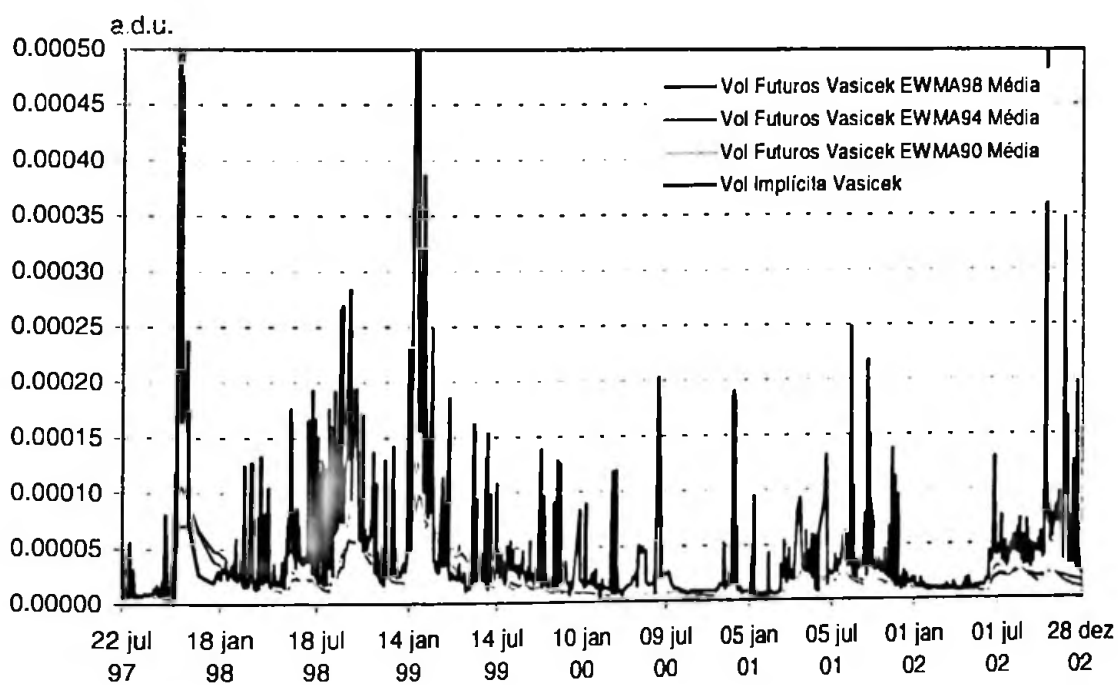


Figura 7.16 – Valores médios diários das volatilidades do modelo de Vasicek calculadas a partir das séries históricas dos contratos de DI Futuro (EWMA)

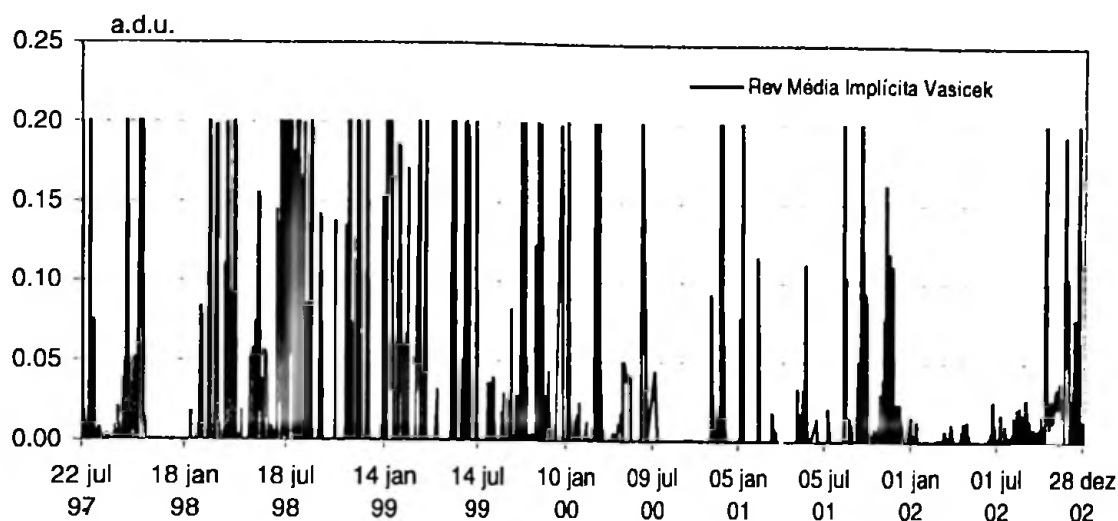


Figura 7.17 – Coeficiente de reversão à média implícito do modelo de Vasicek calculado a partir da série histórica do CDI

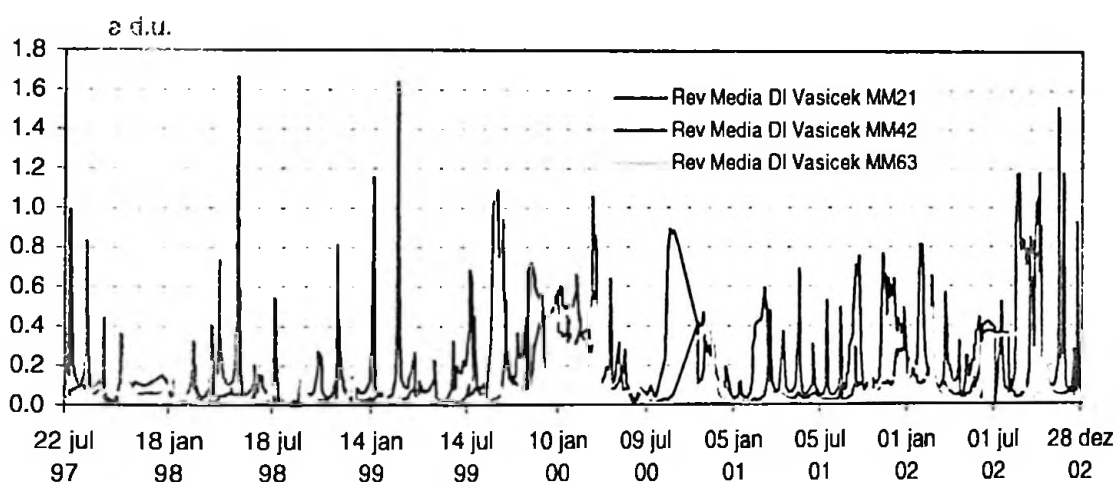


Figura 7.18 – Coeficientes de reversão à média do modelo de Vasicek calculados a partir da série histórica do CDI (médias móveis)

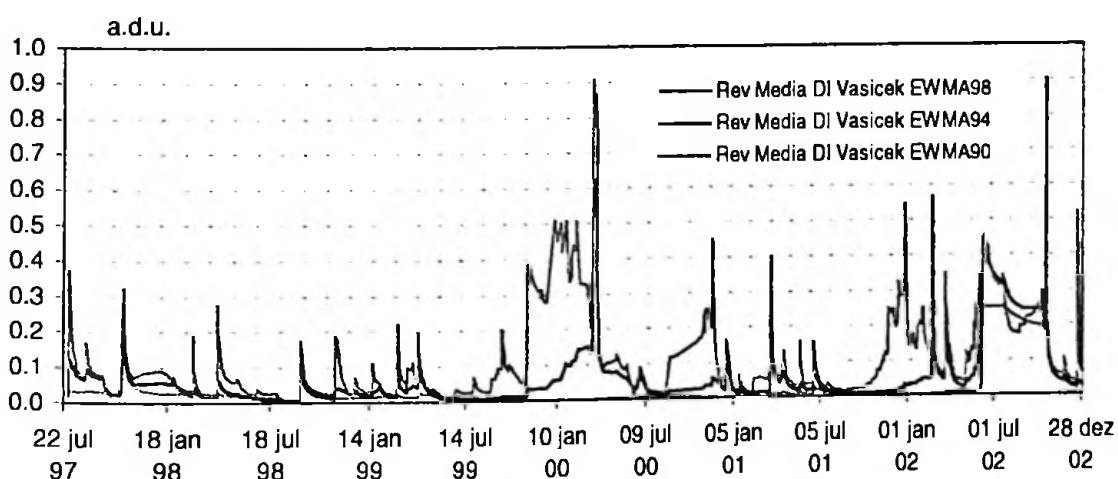


Figura 7.19 – Coeficientes de reversão à média do modelo de Vasicek calculados a partir da série histórica do CDI (EWMA)



Os coeficientes de reversão à média do modelo de Vasicek estimados a partir dos dados dos contratos futuros resultaram todos iguais a zero, não sendo por esta razão mostrados em gráficos. Por conta disso, neste caso o modelo de Vasicek se reduz ao modelo de Merton, e as volatilidades e prêmios estimados para as opções são iguais em ambos os modelos.

Na estimação do coeficiente de reversão à média implícito foi imposto como restrição que seu valor se situasse no intervalo  $[0; 0,2]$ . Por esta razão, no respectivo gráfico os valores situam-se apenas nesta faixa. Além disso, como são necessárias pelo menos duas observações diárias para que se possa estimar os parâmetros implícitos, nos dias em que houve apenas um registro de negociação de opção foram considerados também para o cálculo os registros do dia anterior para o qual houve negociação.

De maneira geral, os coeficientes de reversão à média do modelo de Vasicek apresentam pouca estabilidade para quaisquer dos métodos de estimação utilizados. No método implícito, se for permitida uma faixa admissível maior para o coeficiente de reversão, este pode assumir valores superiores a 100% a.d.u. ou negativos, e as respectivas volatilidades tomariam valores extremamente altos ou baixos. A observação do seu gráfico mostra que, mesmo limitado ao intervalo  $[0, 0,2]$ , o coeficiente de reversão apresenta-se instável, e essa instabilidade se transmite também para a curva da volatilidade implícita, que mostra mais irregularidades do que a sua equivalente do modelo de Merton.

Por sua vez, os coeficientes de reversão estimados das cotações de contratos futuros foram todos nulos apenas por causa da restrição de positividade imposta no seu cálculo. Se esta imposição fosse removida, os coeficientes assumiriam todos valores negativos, resultando em volatilidade estimadas excessivamente reduzidas e prêmios das opções baixos.

Por fim, mesmo os coeficientes de reversão calculados a partir da série histórica do CDI são muito pouco estáveis, assumindo valores bastante altos se for levado em conta que a sua unidade é  $\text{du}^{-1}$ . Essa instabilidade é um indício de que o modelo de Vasicek pode não ser o mais adequado para precificar as opções de IDI, ao menos quando associados aos métodos de estimação aqui utilizados.

## 7.2 INDICADORES DE ERRO DOS MODELOS

Para o período completo, os valores dos indicadores *EQM* relacionados a cada um dos modelos e cada um dos métodos de estimação foram calculados e são dados na tabela seguinte:

Método de Estimação		Black	Merton	Vasicek	MÉDIA	
Série Histórica das cotações do DI	Média Móvel	21 du	401	324	399	375
		42 du	401	323	398	374
		63 du	400	335	397	377
	EWMA	$\lambda=0,98$	400	340	393	378
		$\lambda=0,94$	401	330	397	376
		$\lambda=0,90$	401	346	398	382
Série Histórica das cotações dos contratos futuros	Média Móvel	21 du	363	254	254	291
		42 du	415	270	270	318
		63 du	529	280	280	363
	EWMA	$\lambda=0,98$	539	269	269	359
		$\lambda=0,94$	354	240	240	278
		$\lambda=0,90$	336	234	234	268
Volatilidade Implícita do dia anterior		165	136	130	144	
MÉDIA		393	283	312		

Tabela 7.1 – Erro quadrático médio ponderado (EQM), calculado para cada método de estimação de volatilidade e para cada modelo de precificação.

Para efeito de comparação, o preço médio das opções de compra de DI ponderado pelo número de contratos negociados foi igual a R\$644,70 neste período.

Com relação aos métodos de estimação, alguns fatos podem ser observados. Em primeiro lugar, verifica-se que a estimação usando a série histórica do DI é muito pouco sensível ao tamanho da janela de dados utilizada pelo método da média móvel. De forma semelhante, é pouco sensível também a variações dos pesos no método EWMA. Vale lembrar que, neste método, valores menores de  $\lambda$  correspondem a atribuir pesos maiores a dados mais recentes e pesos menores a dados mais remotos, com efeitos semelhantes ao do encurtamento do tamanho da janela do método da média móvel. Esta pouca sensibilidade se deve ao fato de a taxa do DI se mover aos saltos, mantendo-se em grande parte do tempo em patamares praticamente constantes, nos quais a volatilidade é pequena e pouco variável se avaliada tanto em janelas longas como curtas. Esta volatilidade menor implica em prêmios sistematicamente mais baixos que os de mercado, razão pela qual o indicador *EQM* tornou-se alto.

Já na estimação usando as cotações dos contratos futuros, o efeito do tamanho da janela de dados utilizada é mais evidente. Usando média móvel, quanto mais curto o prazo, melhor o desempenho dos modelos. Pelo método EWMA, o fator  $\lambda=0,90$  apresenta o melhor desempenho, e  $\lambda=0,98$  o pior. Assim, a estimação pelas cotações dos contratos futuros apresenta melhor performance quando é dada maior importância a dados mais recentes do que a informações mais remotas.

Comparando os desempenhos dos diferentes métodos de estimação usando dados históricos do DI e dos contratos futuros, verifica-se que, para todos os modelos, os melhores resultados são obtidos usando estimação a partir da série histórica dos contratos futuros e o método EWMA com fator  $\lambda=0,90$ , seguido de perto pelo método EWMA com  $\lambda=0,94$ .

No entanto, o método de estimação que atingiu os melhores resultados foi o da volatilidade implícita do dia anterior, que produziu, para todos os modelos, valores de *EQM* de menos da metade da média dos *EQM* obtidos pelos demais métodos. Tal fato se deveria a dois motivos. Em primeiro lugar, o método da volatilidade implícita é o único dos três que leva em consideração a expectativa do mercado com relação à volatilidade das taxas de juros até o prazo de vencimento da opção. O método da série histórica dos DI não leva em conta nenhuma expectativa, ao passo que o método que usa a série histórica dos contratos futuros leva em conta a volatilidade das expectativas passadas a respeito da taxa de juros futura, mas não a expectativa da volatilidade futura das taxas de juros. O segundo motivo seria o fato de que o uso da volatilidade implícita mascara as deficiências implícitas de cada modelo. A volatilidade implícita nada mais é do que um número que se substitui na fórmula do modelo de maneira a obter um preço da opção próximo ou igual ao do mercado. Assim, se um modelo de taxas de juros não for representativo da dinâmica real do mercado, o uso da volatilidade implícita significa apenas que se alterou arbitrariamente um dos parâmetros do modelo para que este dê o resultado desejado, ainda que o parâmetro alterado passe a ter pouca relação com comportamentos reais do mercado que busca representar. Desta forma, embora a volatilidade implícita seja um método prático para a calibração de modelos, seu uso pode não ser adequado para a comparação de modelos de precificação, embora seja de se esperar que modelos mais próximos da realidade tendam a apresentar melhores desempenhos do que os demais quando calibrados utilizando a volatilidade implícita.

Com relação à comparação entre modelos, é fácil verificar que, para qualquer método de estimação de parâmetros, o modelo de Black apresenta desempenho inferior aos dos outros dois modelos, cujas performances por sua vez são bastante semelhantes.

Comparando os modelos de Merton e de Vasicek, nota-se que o primeiro se mostra sensivelmente melhor do que o último quando os parâmetros são estimados a partir da série histórica do DI, e ligeiramente pior segundo o método de estimação implícita. O desempenho dos dois modelos é idêntico na estimação através das cotações de contratos futuros porque nesta situação os coeficientes de reversão estimados para o modelo de Vasicek foram todos nulos, tornando o modelo idêntico ao modelo de Merton. Tais resultados indicam que existe pouca vantagem em se utilizar o modelo mais sofisticado (Vasicek). A propriedade de reversão à média das taxas de juros só se faz sentir mais intensamente para prazos grandes. Como as operações com opções de DI geralmente envolvem prazos curtos, haveria pouco espaço para que se manifestassem claramente os efeitos da reversão à média, especialmente se o coeficiente de reversão à média efetivo do mercado (se existir) for bastante próximo de zero. Assim, mesmo que o comportamento de reversão à média exista, se for pouco pronunciado, a sua inclusão no modelo de taxas de juros pode não chegar a compensar os erros decorrentes da necessidade de se estimar mais um parâmetro, que pode levar a uma precificação menos precisa.

Outro indicador de dispersão dos erros de precificação dos modelos, o *EAM*, é apresentado na tabela seguinte, onde tem seus valores calculados para cada método de estimação e cada modelo de taxas de juros.

Método de Estimação			Black	Merton	Vasicek	MÉDIA
Série Histórica das cotações do DI	Média Móvel	21 du	258	213	255	242
		42 du	258	212	250	240
		63 du	256	220	249	242
	EWMA	$\lambda=0,98$	254	227	242	241
		$\lambda=0,94$	257	217	248	241
		$\lambda=0,90$	258	223	252	244
Série Histórica das cotações dos contratos futuros	Média Móvel	21 du	196	160	160	172
		42 du	267	161	161	196
		63 du	366	163	163	231
	EWMA	$\lambda=0,98$	399	158	158	238
		$\lambda=0,94$	227	148	148	175
		$\lambda=0,90$	191	150	150	164
Volatilidade Implícita do dia anterior			97	72	69	79
MÉDIA			253	179	193	208

Tabela 7.2 – Erro absoluto médio ponderado (EAM), calculado para cada método de estimação de volatilidade e para cada modelo de precificação.

A análise do desempenho utilizando o *EAM* produz conclusões semelhantes às da análise feita com o *EQM*. O modelo de Black se mostra visivelmente inferior aos modelos de Vasicek e de Merton, os quais apresentam desempenhos mais próximos. A estimação de volatilidades usando a série histórica do DI se mostra pouco sensível a variações na janela utilizada na média móvel ou a variações nos pesos usados no EWMA. Os melhores resultados das estimações com dados históricos são obtidos pela estimação através da série histórica das cotações dos contratos futuros usando EWMA com pesos 0,90 e 0,94. E, por fim, o método da volatilidade implícita mostrou-se ser o melhor método de estimação das volatilidades.

O último indicador de desempenho a ser analisado é o erro médio (*EM*). Seus valores, calculados para cada modelo de precificação e cada método de estimação, são dados na tabela seguinte.

Método de Estimação		Black	Merton	Vasicek	
Série Histórica das cotações do DI	Média Móvel	21 du	-258	-182	-255
		42 du	-258	-191	-248
		63 du	-256	-190	-241
	EWMA	$\lambda=0,98$	-254	-167	-220
		$\lambda=0,94$	-257	-187	-245
		$\lambda=0,90$	-258	-191	-251
Série Histórica das cotações dos contratos futuros	Média Móvel	21 du	106	-138	-138
		42 du	192	-130	-130
		63 du	299	-118	-118
	EWMA	$\lambda=0,98$	371	-118	-118
		$\lambda=0,94$	191	-127	-127
		$\lambda=0,90$	126	-132	-132
Volatilidade Implícita do dia anterior		4.5	-6.1	-0.2	

Tabela 7.3 – Erro médio ponderado (EM), calculado para cada método de estimação de volatilidade e para cada modelo de precificação.

O valor de *EM* representa o erro sistemático do modelo, ou seja, o seu erro médio. Quanto aos métodos de estimação, é visível a superioridade do método da volatilidade implícita, que apresenta valores de erro médio bem mais próximos de zero. Nos demais casos, o erro médio produzido é negativo, com exceção do método da série histórica das cotações dos contratos futuros aplicado ao modelo de Black, para o qual os erros médios são positivos. Como o preço calculado para uma opção é função crescente da volatilidade, erros sistemáticos negativos indicam que a volatilidade estimada foi subestimada, e erros positivos indicam superestimação da volatilidade. Assim, os modelos de Merton e Vasicek, associados aos métodos de estimação utilizados, sistematicamente subestimaram os preços das opções, enquanto o modelo de Black ora subestimou, ora superestimou os preços das opções.

Para cada um dos modelos, os diferentes métodos de estimação da volatilidade usando a série histórica das cotações do DI produziram resultados bastante próximos entre si, indicando que variações no tamanho da janela móvel ou nos pesos do método EWMA pouco afetaram os valores estimados de volatilidade, os quais tenderam a produzir preços calculados inferiores aos de mercado.

Já o uso da série histórica das cotações dos contratos futuros de DI produziu resultados mais variados. Para o modelo de Black, o erro sistemático dado por *EM* foi positivo, ou seja, os preços foram superestimados. O método da média móvel e o EWMA produziram desvios

sistemáticos menores quando foram utilizadas respectivamente janelas mais curtas e pesos menores. Para os modelos de Merton e Vasicek, os resultados foram opostos. O erro sistemático foi negativo, indicando preços calculados subestimados, e atingiu valores absolutos menores quando foram utilizadas janelas mais longas no método da janela móvel e valores maiores para os pesos do EWMA.

Os menores valores absolutos de *EM* foram obtidos para o modelo de Merton, pelos métodos de estimação a partir das cotações dos contratos futuros, usando média móvel com janela de 63 dias úteis e usando EWMA com peso 0,98, e para o modelo de Black, pelos métodos de estimação a partir das cotações dos contratos futuros, usando média móvel com janela de 21 dias úteis e usando EWMA com peso 0,90.

De maneira geral, quando são utilizados dados históricos, o modelo que apresenta mais aderência às cotações de mercado é o modelo de Merton, em especial quando são usadas janelas curtas e dados dos contratos futuros de DI. Quando é feita a estimação implícita dos parâmetros, o modelo de Vasicek mostra-se melhor, mas com desempenho apenas ligeiramente melhor do que o de Merton. No entanto, o modelo de Vasicek apresenta como desvantagem a dificuldade de se obter estimativas estáveis para o coeficiente de reversão à média. Assim, dada a quase equivalência entre estes dois modelos na estimação implícita, a nítida superioridade do modelo de Merton na estimação por dados históricos e a sua maior simplicidade, por critério de parcimônia pode-se afirmar que, para os dados e métodos de estimação utilizados neste estudo, o modelo de Merton mostrou-se mais adequado.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho procurou descrever alguns dos principais modelos unifatoriais de taxas de juros e aplicá-los à precificação de opções de IDI.

Na introdução teórica do texto foram descritos os principais modelos unifatoriais e foram deduzidas as fórmulas fechadas para os preços das opções de IDI segundo os modelos de Ho-Lee e Hull-White, que se mostraram iguais às respectivas fórmulas dos modelos de Merton e de Vasicek. Na parte metodológica do trabalho, descreveram-se os procedimentos para estimação dos parâmetros dos modelos de Black, Merton/Ho-Lee e Vasicek/Hull-White, tendo sido desenvolvido um método para estimação da volatilidade da taxa de juros de curto prazo a partir das cotações dos contratos futuros de DI de 1 dia.

A implementação dos modelos e a análise comparativa dos resultados indicaram que os modelos de Merton/Ho-Lee e Vasicek/Hull-White apresentam desempenhos semelhantes na precificação das opções de compra de IDI, superando o modelo de Black. Na comparação entre os modelos de Merton e Vasicek, o último apresentou ligeira superioridade quando é empregada a estimação de parâmetros implícitos, mas mostrou-se inferior para a estimação a partir da série histórica de DI e equivalente quando utilizadas as cotações de contratos futuros.

Uma deficiência do modelo de Vasicek foi a instabilidade dos valores estimados para o parâmetro de reversão à média. Na estimação dos parâmetros implícitos, mesmo aplicando-se uma restrição aos valores admissíveis para o coeficiente de reversão à média, o mesmo apresentou-se muito pouco estável. Na estimação a partir dos contratos futuros, se tivesse sido eliminada a restrição de positividade, o coeficiente assumiria sempre valores negativos, resultando em preços calculados para as opções bastante distantes dos de mercado. Por fim, mesmo na estimação a partir da série histórica de DI, o coeficiente de reversão à média apresentou-se pouco estável. Tais resultados sugerem que seja preferível utilizar o modelo de Merton/Ho-Lee na precificação de opções de IDI, por apresentar desempenho praticamente equivalente ao do modelo de Vasicek/Hull-White e dispensar a estimação do coeficiente de reversão à média.

Uma sugestão de continuidade deste trabalho seria a implementação dos demais modelos de taxas de juros (unifatoriais e multifatoriais) e a comparação de seus desempenhos. Poderiam ser incluídos também modelos estocásticos com saltos, comportamento este mais próximo do



observado para as taxas de juros de curto prazo. Por fim, pode ser acrescentada outra forma de comparação de desempenho entre os modelos através dos resultados da aplicação das estratégias de *delta-hedge* das opções sugeridas por cada um dos modelos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSAF NETO, A. *Mercado financeiro*. São Paulo: Atlas, 1999.

AVELLANEDA, M. & LAURENCE, P. *Quantitative Modeling of Derivative Securities: from Theory to Practice*. USA: Chapman & Hall/CRC, 2000.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. Nota para a Imprensa: Mercado Aberto. <http://www.bacen.gov.br/htms/infeccon/demab>. Brasília, outubro de 2002.

———. Sumário dos Planos Brasileiros de Estabilização e Glossário de Instrumentos e Normas relacionados à Política Econômico Financeira. Brasília, junho de 2002.

BAXTER, M. W. & RENNIE, A. J. O. *Financial Calculus: an Introduction to derivative pricing*. Terceira reimpressão. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000

BILLINGSLEY, P. *Probability and Measure*. USA: John Wiley & Sons, 1995.

BLACK, F. The Pricing of Commodity Contracts. *Journal of Financial Economics*, 3:167-179, 1973.

BLACK, F. & SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, No 3 (May/June 1973), p.163-181.

BLACK, F., DERMAN, E. & TOY, W. A one-factor model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options. *Financial Analysts Journal*, Jan-Fev: 33-39, 1990.

BLACK, F. & KARASINSKI, P. Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal. *Financial Analysts Journal*, 1991 Jul-Ago:52-59.

BOLSA DE MERCADORIAS E FUTUROS. Especificações do Contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de 1 Dia. <http://www.bmf.com.br>. São Paulo, atualização de 13/11/2001.

———. Especificações do Contrato de Opções de Compra sobre Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia. <http://www.bmf.com.br>. São Paulo, atualização de 08/07/1997.

- BURTON, M & LOMBRA, R. *The financial system and the economy*. USA: South-Western College Publishing, 2000.
- CLEWLOW, L. & STRICKLAND, C. *Implementing Derivatives Models*. Segunda reimpressão. West Sussex, England: John Wiley & Sons, 2000.
- COX, J, INGERSOLL, J & ROSS, S. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385-408, 1985.
- DE LA ROCQUE, E. C. *O mercado de juros brasileiro: Uma contribuição para a modelagem de Mercados de Juros e Futuros em Economias Instáveis*. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1996.
- FABOZZI, F. J. *Valuation of fixed income securities and derivatives*. 3<sup>rd</sup> ed. New Hope: Frank F. Fabozzi Associates, 1998.
- FORTUNA, E. *Mercado Financeiro: produtos e serviços*. 11<sup>a</sup> edição. Rio de Janeiro, Brasil: Qualitymark Editora, 1999.
- GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Atlas, 1987.
- HARRISON, M., & PLISKA, S, Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11:215-260, 1981.
- HO, T. S. Y. & LEE, S. B. Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims. *Journal of Finance*, 41:1011-29, 1986.
- HULL, J. C. *Options, futures and other derivatives*. 4th ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1999.
- HULL, J. & WHITE, A. Pricing Interest Rate Derivative Securities. *Review of Financial Studies*, 3:573-92, 1990.
- JARROW, R. A. *Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*. USA: McGraw-Hill, 1996.
- KARATZAS, I. & SHREVE, E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2<sup>nd</sup> ed. USA: Springer-Verlag, 1994.

KLEBANER, F. C. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. Londres: Imperial College Press, 1998.

MELLAGI FILHO, A & ISHIKAWA, S. *Mercado Financeiro e de Capitais*. São Paulo: Atlas, 2000.

MERTON, R. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4:141-83, 1973.

MUNNIK, J. F. J. *The valuation of interest rate derivative securities*. New York: Routledge, 1996.

PLISKA, S. R. *Introduction to Mathematical Finance: discrete time models*. Segunda reimpressão. Massachusetts, USA: Blackwell Publishers, 1998.

REBONATO, R. *Interest-rate option models: understanding, analyzing and using models for exotic interest-rate options*. 2<sup>nd</sup> ed. West Sussex, England: John Wiley & Sons, 1998.

ROSS, S. M. *Stochastic Processes*. 2<sup>nd</sup> ed. USA: John Wiley & Sons, 1996.

SECURATO, J. R. (Org.) *Cálculo Financeiro das Tesourarias: Bancos e Empresas*. São Paulo: Saint Paul Institute of Finance, 2000.

VAN HORNE, J.C. *Financial Market Rates & Flows*. 4<sup>th</sup> ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1994.

VARGA, G. & VALLI, M. Movimentos da estrutura a termo da taxa de juros brasileira e imunização. *Revista Economia Aplicada*. Vol 5, Nº 1. Março de 2001.

VASICEK, O. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5:177-88, 1977.

VIEIRA NETO, C.A. *Modelagem da Estrutura a Termo da Taxa de Juros e Avaliação de Contratos Derivativos*, Tese de Doutorado, FEA-USP, 1999.

## APÊNDICE I – CÓDIGOS EM MATLAB

### SCRIPT PARA O CÁLCULO DOS PARÂMETROS E PRÊMIOS DOS MODELOS A PARTIR DA SÉRIE HISTÓRICA DO DI.

```
#####
% ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS E PRÊMIOS A PARTIR DA SÉRIE HISTÓRICA DO CD:
%
% Carrega a série histórica do DI a partir do arquivo DI.txt e os dados diários das
% opções do arquivo opcoes.txt, calcula os parâmetros dos modelos de Black, Merton e
% Vasicek, calcula os prêmios das opções segundo os três modelos a partir dos parâmetros
% estimados e salva os resultados no arquivo ResultadosDI.csv.
%
#####

%Carrega série de dados diários de DI (datas na coluna 1 e taxa logarítmica na coluna 3).
load 'C:\DI.txt';
datas=DI(:,1);
lnDI=DI(:,3);

deltar=zeros(length(lnDI),1);
deltar(2:length(lnDI))=lnDI(2:(length(lnDI)))-lnDI(1:(length(lnDI)-1));

%Cálculo das volatilidades do modelos de Black e Merton pela média móvel
volBlackMM21=zeros(length(lnDI),1);
volBlackMM42=zeros(length(lnDI),1);
volBlackMM63=zeros(length(lnDI),1);
volMertonMM21=zeros(length(lnDI),1);
volMertonMM42=zeros(length(lnDI),1);
volMertonMM63=zeros(length(lnDI),1);

for i=21:length(lnDI),
    if i>=21
        volBlackMM21(i)=std(lnDI((i-20):i));
    end
    if i>=42
        volBlackMM42(i)=std(lnDI((i-41):i));
    end
    if i>=63
        volBlackMM63(i)=std(lnDI((i-62):i));
    end
end

for i=22:length(deltar),
    if i>=22
        volMertonMM21(i)=std(deltar((i-20):i));
    end
    if i>=43
        volMertonMM42(i)=std(deltar((i-41):i));
    end
    if i>=64
        volMertonMM63(i)=std(deltar((i-62):i));
    end
end

%Cálculo das volatilidades do modelos de Black e Merton por alisamento exponencial
volBlackEWMA98=zeros(length(lnDI),1);
volBlackEWMA94=zeros(length(lnDI),1);
volBlackEWMA90=zeros(length(lnDI),1);
volMertonEWMA98=zeros(length(lnDI),1);
volMertonEWMA94=zeros(length(lnDI),1);
volMertonEWMA90=zeros(length(lnDI),1);

mediaBlackEWMA98=zeros(length(lnDI),1);
mediaBlackEWMA94=zeros(length(lnDI),1);
mediaBlackEWMA90=zeros(length(lnDI),1);
```

```

mediaMertonEWMA98=zeros(length(lnDI),1);
mediaMertonEWMA94=zeros(length(lnDI),1);
mediaMertonEWMA90=zeros(length(lnDI),1);

P98=zeros(length(lnDI),1);
P94=zeros(length(lnDI),1);
P90=zeros(length(lnDI),1);

for i = 1:length(lnDI),
    P98(length(lnDI)+1-i)=0.02*0.98^i/0.98;
    P94(length(lnDI)+1-i)=0.06*0.94^i/0.94;
    P90(length(lnDI)+1-i)=0.1*0.9^i/0.9;
end;

for i=1:length(lnDI),
    mediaBlackEWMA98(i)=(transpose(lnDI(1:i))*P98(length(lnDI)-i+1:length(lnDI)))
    /(ones(1,i)*P98(length(lnDI)-i+1:length(lnDI)));
    mediaBlackEWMA94(i)=(transpose(lnDI(1:i))*P94(length(lnDI)-i+1:length(lnDI)))
    /(ones(1,i)*P94(length(lnDI)-i+1:length(lnDI)));
    mediaBlackEWMA90(i)=(transpose(lnDI(1:i))*P90(length(lnDI)-i+1:length(lnDI)))
    /(ones(1,i)*P90(length(lnDI)-i+1:length(lnDI)));
end

for i=2:length(deltar),
    mediaMertonEWMA98(i)=(transpose(deltar(1:i))*P98(length(deltar)-i+1:length(deltar)))
    /(ones(1,i)*P98(length(deltar)-i+1:length(deltar)));
    mediaMertonEWMA94(i)=(transpose(deltar(1:i))*P94(length(deltar)-i+1:length(deltar)))
    /(ones(1,i)*P94(length(deltar)-i+1:length(deltar)));
    mediaMertonEWMA90(i)=(transpose(deltar(1:i))*P90(length(deltar)-i+1:length(deltar)))
    /(ones(1,i)*P90(length(deltar)-i+1:length(deltar)));
end

for i=3:length(lnDI),
    volBlackEWMA98(i)=sqrt( transpose(lnDI(1:i)-mediaBlackEWMA98(i))*((lnDI(1:i)-
mediaBlackEWMA98(i)).*P98(length(lnDI)-i+1:length(lnDI))) );
    volBlackEWMA94(i)=sqrt( transpose(lnDI(1:i)-mediaBlackEWMA94(i))*((lnDI(1:i)-
mediaBlackEWMA94(i)).*P94(length(lnDI)-i+1:length(lnDI))) );
    volBlackEWMA90(i)=sqrt( transpose(lnDI(1:i)-mediaBlackEWMA90(i))*((lnDI(1:i)-
mediaBlackEWMA90(i)).*P90(length(lnDI)-i+1:length(lnDI))) );
end

for i=3:length(deltar),
    volMertonEWMA98(i)=sqrt( transpose(deltar(1:i)-mediaMertonEWMA98(i))*((deltar(1:i)-
mediaMertonEWMA98(i)).*P98(length(deltar)-i+1:length(deltar))) );
    volMertonEWMA94(i)=sqrt( transpose(deltar(1:i)-mediaMertonEWMA94(i))*((deltar(1:i)-
mediaMertonEWMA94(i)).*P94(length(deltar)-i+1:length(deltar))) );
    volMertonEWMA90(i)=sqrt( transpose(deltar(1:i)-mediaMertonEWMA90(i))*((deltar(1:i)-
mediaMertonEWMA90(i)).*P90(length(deltar)-i+1:length(deltar))) );
end

%Inicializa vetores de volatilidades dos modelos de Vasicek
volVasicekMM21=zeros(length(lnDI),1);
volVasicekMM42=zeros(length(lnDI),1);
volVasicekMM63=zeros(length(lnDI),1);
volVasicekEWMA98=zeros(length(lnDI),1);
volVasicekEWMA94=zeros(length(lnDI),1);
volVasicekEWMA90=zeros(length(lnDI),1);

revmediaVasicekMM21=zeros(length(lnDI),1);
revmediaVasicekMM42=zeros(length(lnDI),1);
revmediaVasicekMM63=zeros(length(lnDI),1);
revmediaVasicekEWMA98=zeros(length(lnDI),1);
revmediaVasicekEWMA94=zeros(length(lnDI),1);
revmediaVasicekEWMA90=zeros(length(lnDI),1);

mediaVasicekEWMA98=zeros(length(lnDI),1);
mediaVasicekEWMA94=zeros(length(lnDI),1);
mediaVasicekEWMA90=zeros(length(lnDI),1);

intercVasicekEWMA98=zeros(length(lnDI),1);
intercVasicekEWMA94=zeros(length(lnDI),1);
intercVasicekEWMA90=zeros(length(lnDI),1);

```

```

%Cálculo das volatilidades do modelo de Vasicek usando médias móveis
for i=23:length(deltar),
    if i>=23
        k=corrcoef(lnDI((i-20):i),lnDI((i-21):(i-1)));
        revmediaVasicekMM21(i)=1-k(1,2);
        volVasicekMM21(i)=std( lnDI((i-20):i)-k(1,2)*lnDI((i-21):(i-1))-mean(lnDI((i-
20):i)) );
    end
    if i>=44
        k=corrcoef(lnDI((i-41):i),lnDI((i-42):(i-1)));
        revmediaVasicekMM42(i)=1-k(1,2);
        volVasicekMM42(i)=std( lnDI((i-41):i)-k(1,2)*lnDI((i-42):(i-1))-mean(lnDI((i-
41):i)) );
    end
    if i>=65
        k=corrcoef(lnDI((i-62):i),lnDI((i-63):(i-1)));
        revmediaVasicekMM63(i)=1-k(1,2);
        volVasicekMM63(i)=std( lnDI((i-62):i)-k(1,2)*lnDI((i-63):(i-1))-mean(lnDI((i-
62):i)) );
    end
end

```

```

%Cálculo das volatilidades do modelo de Vasicek usando decaimento exponencial
for i=3:length(deltar),
    mediaVasicekEWMA98(i)=( transpose(lnDI(1:i))*P98(length(lnDI)-i-1:length(lnDI)) ) /
(ones(1,i)*P98(length(lnDI)-i+1:length(lnDI)));
    mediaVasicekEWMA94(i)=( transpose(lnDI(1:i))*P94(length(lnDI)-i-1:length(lnDI)) ) /
(ones(1,i)*P94(length(lnDI)-i+1:length(lnDI)));
    mediaVasicekEWMA90(i)=( transpose(lnDI(1:i))*P90(length(lnDI)-i-1:length(lnDI)) ) /
(ones(1,i)*P90(length(lnDI)-i+1:length(lnDI)));

    revmediaVasicekEWMA98(i)=( transpose(lnDI(2:i)-mediaVasicekEWMA98(i))*( lnDI(1:(i-
1))-mediaVasicekEWMA98(i-1)).*P98(length(lnDI)-i+2:length(lnDI)))/sqrt( transpose(lnDI(2:i)-
mediaVasicekEWMA98(i))*(
lnDI(2:i)-mediaVasicekEWMA98(i)).*P98(length(lnDI)-
i+2:length(lnDI)))/sqrt( transpose(lnDI(1:(i-1))-mediaVasicekEWMA98(i-1))*( lnDI(1:(i-1))-
mediaVasicekEWMA98(i-1)).*P98(length(lnDI)-i+2:length(lnDI))));
    revmediaVasicekEWMA94(i)=( transpose(lnDI(2:i)-mediaVasicekEWMA94(i))*( lnDI(1:(i-
1))-mediaVasicekEWMA94(i-1)).*P94(length(lnDI)-i+2:length(lnDI)))/sqrt( transpose(lnDI(2:i)-
mediaVasicekEWMA94(i))*(
lnDI(2:i)-mediaVasicekEWMA94(i)).*P94(length(lnDI)-
i+2:length(lnDI)))/sqrt( transpose(lnDI(1:(i-1))-mediaVasicekEWMA94(i-1))*( lnDI(1:(i-1))-
mediaVasicekEWMA94(i-1)).*P94(length(lnDI)-i+2:length(lnDI))));
    revmediaVasicekEWMA90(i)=( transpose(lnDI(2:i)-mediaVasicekEWMA90(i))*( lnDI(1:(i-
1))-mediaVasicekEWMA90(i-1)).*P90(length(lnDI)-i+2:length(lnDI)))/sqrt( transpose(lnDI(2:i)-
mediaVasicekEWMA90(i))*(
lnDI(2:i)-mediaVasicekEWMA90(i)).*P90(length(lnDI)-
i+2:length(lnDI)))/sqrt( transpose(lnDI(1:(i-1))-mediaVasicekEWMA90(i-1))*( lnDI(1:(i-1))-
mediaVasicekEWMA90(i-1)).*P90(length(lnDI)-i+2:length(lnDI))));

    if revmediaVasicekEWMA98(i)==NaN, revmediaVasicekEWMA98(i)=1; end,
    if revmediaVasicekEWMA94(i)==NaN, revmediaVasicekEWMA94(i)=1; end,
    if revmediaVasicekEWMA90(i)==NaN, revmediaVasicekEWMA90(i)=1; end,

    intercVasicekEWMA98(i)=mediaVasicekEWMA98(i)
revmediaVasicekEWMA98(i)*mediaVasicekEWMA98(i-1);
    intercVasicekEWMA94(i)=mediaVasicekEWMA94(i)
revmediaVasicekEWMA94(i)*mediaVasicekEWMA94(i-1);
    intercVasicekEWMA90(i)=mediaVasicekEWMA90(i)
revmediaVasicekEWMA90(i)*mediaVasicekEWMA90(i-1);

    volVasicekEWMA98(i)=sqrt( (transpose(lnDI(2:i)-revmediaVasicekEWMA98(i))*lnDI(1:(i-1))-
intercVasicekEWMA98(i))*(
lnDI(2:i)-revmediaVasicekEWMA98(i))*lnDI(1:(i-1))-
intercVasicekEWMA98(i)).*P98(length(lnDI)-i-2:length(lnDI)) );
    volVasicekEWMA94(i)=sqrt( (transpose(lnDI(2:i)-revmediaVasicekEWMA94(i))*lnDI(1:(i-1))-
intercVasicekEWMA94(i))*(
lnDI(2:i)-revmediaVasicekEWMA94(i))*lnDI(1:(i-1))-
intercVasicekEWMA94(i)).*P94(length(lnDI)-i+2:length(lnDI)) );
    volVasicekEWMA90(i)=sqrt( (transpose(lnDI(2:i)-revmediaVasicekEWMA90(i))*lnDI(1:(i-1))-
intercVasicekEWMA90(i))*(
lnDI(2:i)-revmediaVasicekEWMA90(i))*lnDI(1:(i-1))-
intercVasicekEWMA90(i)).*P90(length(lnDI)-i+2:length(lnDI)) );

    revmediaVasicekEWMA98(i)=max(1-revmediaVasicekEWMA98(i),0);

```

```

        revmediaVasicekEWMA94(i)=max(1-revmediaVasicekEWMA94(i),0);
        revmediaVasicekEWMA90(i)=max(1-revmediaVasicekEWMA90(i),0);
end

```

```

%Carrega dados relativos às opções
load('c:\opcoes.txt');
opcDataPregao=opcoes(:,1);
opcDataVencimento=opcoes(:,2);
opcExercicio=opcoes(:,3);
opcContratosNegociados=opcoes(:,6);
opcCotacaoMedia=opcoes(:,7);
opcIDI=opcoes(:,10);
opcDIFuturo=opcoes(:,9);
opcDiasSaqueAteVencimento=opcoes(:,8);

```

```

%Cálculo dos prêmios das opções usando as volatilidades apuradas com os dados do dia anterior
ao de negociação das opções.

```

```

%Cria vetores que associam a cada opção suas respectivas volatilidades

```

```

opcvolBlackMM21=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcvolBlackMM42=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcvolBlackMM63=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcvolBlackEWMA98=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcvolBlackEWMA94=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcvolBlackEWMA90=zeros(length(opcDataPregao),1);

opcvolMertonMM21=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcvolMertonMM42=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcvolMertonMM63=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcvolMertonEWMA98=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcvolMertonEWMA94=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcvolMertonEWMA90=zeros(length(opcDataPregao),1);

opcvolVasicekMM21=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcvolVasicekMM42=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcvolVasicekMM63=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcvolVasicekEWMA98=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcvolVasicekEWMA94=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcvolVasicekEWMA90=zeros(length(opcDataPregao),1);

opcrevmediaVasicekMM21=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcrevmediaVasicekMM42=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcrevmediaVasicekMM63=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcrevmediaVasicekEWMA98=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcrevmediaVasicekEWMA94=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcrevmediaVasicekEWMA90=zeros(length(opcDataPregao),1);

opcpremioBlackMM21=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioBlackMM42=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioBlackMM63=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioBlackEWMA98=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioBlackEWMA94=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioBlackEWMA90=zeros(length(opcDataPregao),1);

opcpremioMertonMM21=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioMertonMM42=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioMertonMM63=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioMertonEWMA98=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioMertonEWMA94=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioMertonEWMA90=zeros(length(opcDataPregao),1);

opcpremioVasicekMM21=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioVasicekMM42=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioVasicekMM63=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioVasicekEWMA98=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioVasicekEWMA94=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioVasicekEWMA90=zeros(length(opcDataPregao),1);

```

```

j=1

```



```

for i=1:length(opcDataPregao),
    while opcDataPregao(i,1)>datas(j,1),
        j=j+1;
    end

    opcvolBlackMM21(i)=volBlackMM21(j-1);
    opcvolBlackMM42(i)=volBlackMM42(j-1);
    opcvolBlackMM63(i)=volBlackMM63(j-1);
    opcvolBlackEWMA98(i)=volBlackEWMA98(j-1);
    opcvolBlackEWMA94(i)=volBlackEWMA94(j-1);
    opcvolBlackEWMA90(i)=volBlackEWMA90(j-1);

    opcvolMertonMM21(i)=volMertonMM21(j-1);
    opcvolMertonMM42(i)=volMertonMM42(j-1);
    opcvolMertonMM63(i)=volMertonMM63(j-1);
    opcvolMertonEWMA98(i)=volMertonEWMA98(j-1);
    opcvolMertonEWMA94(i)=volMertonEWMA94(j-1);
    opcvolMertonEWMA90(i)=volMertonEWMA90(j-1);

    opcvolVasicekMM21(i)=volVasicekMM21(j-1);
    opcvolVasicekMM42(i)=volVasicekMM42(j-1);
    opcvolVasicekMM63(i)=volVasicekMM63(j-1);
    opcvolVasicekEWMA98(i)=volVasicekEWMA98(j-1);
    opcvolVasicekEWMA94(i)=volVasicekEWMA94(j-1);
    opcvolVasicekEWMA90(i)=volVasicekEWMA90(j-1);

    opcrevmediaVasicekMM21(i)=revmediaVasicekMM21(j-1);
    opcrevmediaVasicekMM42(i)=revmediaVasicekMM42(j-1);
    opcrevmediaVasicekMM63(i)=revmediaVasicekMM63(j-1);
    opcrevmediaVasicekEWMA98(i)=revmediaVasicekEWMA98(j-1);
    opcrevmediaVasicekEWMA94(i)=revmediaVasicekEWMA94(j-1);
    opcrevmediaVasicekEWMA90(i)=revmediaVasicekEWMA90(j-1);

end

%Cálculo dos prêmios das opções
opcpremioBlackMM21=callBlackIDI (opcvolBlackMM21,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDias
SaqueAteVencimento);
opcpremioBlackMM42=callBlackIDI (opcvolBlackMM42,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDias
SaqueAteVencimento);
opcpremioBlackMM63=callBlackIDI (opcvolBlackMM63,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDias
SaqueAteVencimento);
opcpremioBlackEWMA98=callBlackIDI (opcvolBlackEWMA98,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opc
DiasSaqueAteVencimento);
opcpremioBlackEWMA94=callBlackIDI (opcvolBlackEWMA94,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opc
DiasSaqueAteVencimento);
opcpremioBlackEWMA90=callBlackIDI (opcvolBlackEWMA90,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opc
DiasSaqueAteVencimento);

opcpremioMertonMM21=callMertonIDI (opcvolMertonMM21,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcD
iasSaqueAteVencimento);
opcpremioMertonMM42=callMertonIDI (opcvolMertonMM42,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcD
iasSaqueAteVencimento);
opcpremioMertonMM63=callMertonIDI (opcvolMertonMM63,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcD
iasSaqueAteVencimento);
opcpremioMertonEWMA98=callMertonIDI (opcvolMertonEWMA98,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,
opcDiasSaqueAteVencimento);
opcpremioMertonEWMA94=callMertonIDI (opcvolMertonEWMA94,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,
opcDiasSaqueAteVencimento);
opcpremioMertonEWMA90=callMertonIDI (opcvolMertonEWMA90,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,
opcDiasSaqueAteVencimento);

opcpremioVasicekMM21=callVasicekIDI ([opcvolVasicekMM21,opcrevmediaVasicekMM21],opcIDI,opcExerc
icio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
opcpremioVasicekMM42=callVasicekIDI ([opcvolVasicekMM42,opcrevmediaVasicekMM42],opcIDI,opcExerc
icio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
opcpremioVasicekMM63=callVasicekIDI ([opcvolVasicekMM63,opcrevmediaVasicekMM63],opcIDI,opcExerc
icio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
opcpremioVasicekEWMA98=callVasicekIDI ([opcvolVasicekEWMA98,opcrevmediaVasicekEWMA98],opcIDI,opc
Exercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
opcpremioVasicekEWMA94=callVasicekIDI ([opcvolVasicekEWMA94,opcrevmediaVasicekEWMA94],opcIDI,opc
Exercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);

```

```
opcpremioVasicekEWMA90=callVasicekIDI (opcvolVasicekEWMA90,opcmediaVasicekEWMA90,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
```

```
%Gravação dos Resultados em arquivo
ResultadosDI=zeros(length(opcDataPregao),50);
ResultadosDI(:,1)=opcDataPregao;
ResultadosDI(:,2)=opcDataVencimento;
ResultadosDI(:,3)=opcExercicio;
ResultadosDI(:,4)=opcContratosNegociados;
ResultadosDI(:,5)=opcCotacaoMedia;
ResultadosDI(:,6)=opcIDI;
ResultadosDI(:,7)=opcDIFuturo;
ResultadosDI(:,8)=opcDiasSaqueAteVencimento;

ResultadosDI(:,9)=opcvolBlackMM21;
ResultadosDI(:,10)=opcvolBlackMM42;
ResultadosDI(:,11)=opcvolBlackMM63;
ResultadosDI(:,12)=opcvolBlackEWMA98;
ResultadosDI(:,13)=opcvolBlackEWMA94;
ResultadosDI(:,14)=opcvolBlackEWMA90;

ResultadosDI(:,15)=opcvolMertonMM21;
ResultadosDI(:,16)=opcvolMertonMM42;
ResultadosDI(:,17)=opcvolMertonMM63;
ResultadosDI(:,18)=opcvolMertonEWMA98;
ResultadosDI(:,19)=opcvolMertonEWMA94;
ResultadosDI(:,20)=opcvolMertonEWMA90;

ResultadosDI(:,21)=opcvolVasicekMM21;
ResultadosDI(:,22)=opcvolVasicekMM42;
ResultadosDI(:,23)=opcvolVasicekMM63;
ResultadosDI(:,24)=opcvolVasicekEWMA98;
ResultadosDI(:,25)=opcvolVasicekEWMA94;
ResultadosDI(:,26)=opcvolVasicekEWMA90;

ResultadosDI(:,27)=opcmediaVasicekMM21;
ResultadosDI(:,28)=opcmediaVasicekMM42;
ResultadosDI(:,29)=opcmediaVasicekMM63;
ResultadosDI(:,30)=opcmediaVasicekEWMA98;
ResultadosDI(:,31)=opcmediaVasicekEWMA94;
ResultadosDI(:,32)=opcmediaVasicekEWMA90;

ResultadosDI(:,33)=opcpremioBlackMM21;
ResultadosDI(:,34)=opcpremioBlackMM42;
ResultadosDI(:,35)=opcpremioBlackMM63;
ResultadosDI(:,36)=opcpremioBlackEWMA98;
ResultadosDI(:,37)=opcpremioBlackEWMA94;
ResultadosDI(:,38)=opcpremioBlackEWMA90;

ResultadosDI(:,39)=opcpremioMertonMM21;
ResultadosDI(:,40)=opcpremioMertonMM42;
ResultadosDI(:,41)=opcpremioMertonMM63;
ResultadosDI(:,42)=opcpremioMertonEWMA98;
ResultadosDI(:,43)=opcpremioMertonEWMA94;
ResultadosDI(:,44)=opcpremioMertonEWMA90;

ResultadosDI(:,45)=opcpremioVasicekMM21;
ResultadosDI(:,46)=opcpremioVasicekMM42;
ResultadosDI(:,47)=opcpremioVasicekMM63;
ResultadosDI(:,48)=opcpremioVasicekEWMA98;
ResultadosDI(:,49)=opcpremioVasicekEWMA94;
ResultadosDI(:,50)=opcpremioVasicekEWMA90;

dlmwrite('C:\ResultadosDI.csv',ResultadosDI,',' );
```

## SCRIPT PARA O CÁLCULO DOS PARÂMETROS E PRÊMIOS DOS MODELOS A PARTIR DAS SÉRIES HISTÓRICAS DOS CONTRATOS FUTUROS DE DI DE 1 DIA.

```

#####
% ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS A PARTIR DA SÉRIE HISTÓRICA DOS CONTRATOS FUTUROS
%
% Carrega os dados diários das opções do arquivo opcoes.txt. Carrega as séries das
% variáveis Lt com respectivos prazos para vencimento dos arquivos Lt.csv e
% DiasSaque.csv, calcula os parâmetros dos modelos de Black, Merton e Vasicek, calcula
% os prêmios das opções segundo os três modelos a partir dos parâmetros estimados e
% salva os resultados no arquivo ResultadosFuturos.csv.
%
#####

%Carrega dados relativos às opções
load('c:\opcoes.txt');
opcDataPregao=opcoes(:,1);
opcDataVencimento=opcoes(:,2);
opcExercicio=opcoes(:,3);
opcContratosNegociados=opcoes(:,6);
opcCotacaoMedia=opcoes(:,7);
opcIDI=opcoes(:,10);
opcDIFuturo=opcoes(:,9);
opcDiasSaqueAteVencimento=opcoes(:,8);

%Carrega dados relativos às séries da variável Lt
Lt=dlmread('c:\Lt.csv',';');
DiasSaque=dlmread('c:\DiasSaque.csv',';');

qtdeLt=zeros(length(opcDataPregao),1);

%Inicializa variáveis
volFutBlackMM21=zeros(length(opcDataPregao),1);
volFutBlackMM42=zeros(length(opcDataPregao),1);
volFutBlackMM63=zeros(length(opcDataPregao),1);
volFutBlackEWMA98=zeros(length(opcDataPregao),1);
volFutBlackEWMA94=zeros(length(opcDataPregao),1);
volFutBlackEWMA90=zeros(length(opcDataPregao),1);

volFutMertonMM21=zeros(length(opcDataPregao),1);
volFutMertonMM42=zeros(length(opcDataPregao),1);
volFutMertonMM63=zeros(length(opcDataPregao),1);
volFutMertonEWMA98=zeros(length(opcDataPregao),1);
volFutMertonEWMA94=zeros(length(opcDataPregao),1);
volFutMertonEWMA90=zeros(length(opcDataPregao),1);

volFutVasicekMM21=zeros(length(opcDataPregao),1);
volFutVasicekMM42=zeros(length(opcDataPregao),1);
volFutVasicekMM63=zeros(length(opcDataPregao),1);
volFutVasicekEWMA98=zeros(length(opcDataPregao),1);
volFutVasicekEWMA94=zeros(length(opcDataPregao),1);
volFutVasicekEWMA90=zeros(length(opcDataPregao),1);

revmediaFutVasicekMM21=zeros(length(opcDataPregao),1);
revmediaFutVasicekMM42=zeros(length(opcDataPregao),1);
revmediaFutVasicekMM63=zeros(length(opcDataPregao),1);
revmediaFutVasicekEWMA98=zeros(length(opcDataPregao),1);
revmediaFutVasicekEWMA94=zeros(length(opcDataPregao),1);
revmediaFutVasicekEWMA90=zeros(length(opcDataPregao),1);

iterFutVasicekMM21=zeros(length(opcDataPregao),1);
iterFutVasicekMM42=zeros(length(opcDataPregao),1);
iterFutVasicekMM63=zeros(length(opcDataPregao),1);
iterFutVasicekEWMA98=zeros(length(opcDataPregao),1);
iterFutVasicekEWMA94=zeros(length(opcDataPregao),1);
iterFutVasicekEWMA90=zeros(length(opcDataPregao),1);

exitflagFutVasicekMM21=zeros(length(opcDataPregao),1);
exitflagFutVasicekMM42=zeros(length(opcDataPregao),1);
exitflagFutVasicekMM63=zeros(length(opcDataPregao),1);
exitflagFutVasicekEWMA98=zeros(length(opcDataPregao),1);
exitflagFutVasicekEWMA94=zeros(length(opcDataPregao),1);

```

```

exitflagFutVasicekEWMA90=zeros(length(opcDataPregao),1);

%Calcula vetores de pesos para o método EWMA
P98=zeros(1000,1);
P94=zeros(1000,1);
P90=zeros(1000,1);

for i = 1:1000,
    P98(1001-i,1)=0.02*0.98^i/0.98;
    P94(1001-i,1)=0.06*0.94^i/0.94;
    P90(1001-i,1)=0.1*0.9^i/0.9;
end;

OPTIONS=optimset('TolX',0.00001,'Display','off');

linLt=2;

%Estimação dos parâmetros
for i=1:length(opcDataPregao)
    i
    colLt=2;

    %Procura a linha e coluna da série Lt
    while Lt(linLt,1) < opcDataPregao(i),
        linLt=linLt+1;
    end;

    while Lt(1,colLt) < opcDataVencimento(i),
        colLt=colLt+1;
    end;

    if (Lt(1,colLt)==opcDataVencimento(i) & Lt(linLt,1)==opcDataPregao(i)),
        linLtinicio=linLt;
        while Lt(linLtinicio-1,colLt)==0,
            linLtinicio=linLtinicio-1;
        end,

        LtAux=Lt(linLtinicio:linLt-1,colLt);
        DiasSaqueAux=DiasSaque(linLtinicio:linLt-1,colLt);
        qtdeLt(i)=linLt-linLtinicio;

        %Estima as volatilidades dos modelos de Black e Merton
        if (qtdeLt(i)>1),
            pesosauxMM21=[zeros((length(LtAux)-21),1);ones(min([21,length(LtAux)]),1)];
            pesosauxMM42=[zeros((length(LtAux)-42),1);ones(min([42,length(LtAux)]),1)];
            pesosauxMM63=[zeros((length(LtAux)-63),1);ones(min([63,length(LtAux)]),1)];
            pesosauxEWMA98=P98((1000-length(LtAux)-1):1000)/sum(P98((1000-
length(LtAux)+1):1000));
            pesosauxEWMA94=P94((1000-length(LtAux)-1):1000)/sum(P94((1000-
length(LtAux)+1):1000));
            pesosauxEWMA90=P90((1000-length(LtAux)-1):1000)/sum(P90((1000-
length(LtAux)+1):1000));

            volFutBlackMM21(i)=sqrt((-sum(pesosauxMM21) + sqrt((sum(pesosauxMM21))^2
-sum(pesosauxMM21) * (pesosauxMM21*((LtAux.*LtAux)))) / (0.5*sum(pesosauxMM21)));
            volFutBlackMM42(i)=sqrt((-sum(pesosauxMM42) + sqrt((sum(pesosauxMM42))^2
-sum(pesosauxMM42) * (pesosauxMM42*((LtAux.*LtAux)))) / (0.5*sum(pesosauxMM42)));
            volFutBlackMM63(i)=sqrt((-sum(pesosauxMM63) + sqrt((sum(pesosauxMM63))^2
+sum(pesosauxMM63) * (pesosauxMM63*((LtAux.*LtAux)))) / (0.5*sum(pesosauxMM63)));
            volFutBlackEWMA98(i)=sqrt((-sum(pesosauxEWMA98) + sqrt((sum(pesosauxEWMA98))^2
-sum(pesosauxEWMA98) * (pesosauxEWMA98*((LtAux.*LtAux)))) / (0.5*sum(pesosauxEWMA98)));
            volFutBlackEWMA94(i)=sqrt((-sum(pesosauxEWMA94) + sqrt((sum(pesosauxEWMA94))^2
+sum(pesosauxEWMA94) * (pesosauxEWMA94*((LtAux.*LtAux)))) / (0.5*sum(pesosauxEWMA94)));
            volFutBlackEWMA90(i)=sqrt((-sum(pesosauxEWMA90) + sqrt((sum(pesosauxEWMA90))^2
+sum(pesosauxEWMA90) * (pesosauxEWMA90*((LtAux.*LtAux)))) / (0.5*sum(pesosauxEWMA90)));

            volFutMertonMM21(i)=sqrt((-sum(pesosauxMM21) + sqrt((sum(pesosauxMM21))^2
+(pesosauxMM21*((DiasSaqueAux+1).*(DiasSaqueAux+1)))
(pesosauxMM21*((LtAux.*LtAux)./(DiasSaqueAux-1).*(DiasSaqueAux-1)))) /
(0.5*pesosauxMM21*((DiasSaqueAux+1).*(DiasSaqueAux+1))));
            volFutMertonMM42(i)=sqrt((-sum(pesosauxMM42) + sqrt((sum(pesosauxMM42))^2
+(pesosauxMM42*((DiasSaqueAux+1).*(DiasSaqueAux+1)))
(pesosauxMM42*((LtAux.*LtAux)./(DiasSaqueAux+1).*(DiasSaqueAux+1)))) /
(0.5*pesosauxMM42*((DiasSaqueAux+1).*(DiasSaqueAux+1))));

```

```

        volFutMertonMM63(i)=sqrt( (-sum(pesosauxMM63) + sqrt((sum(pesosauxMM63))^2
+ (pesosauxMM63'*((DiasSaqueAux+1).*(DiasSaqueAux-1))
(pesosauxMM63'*((LtAux.*LtAux)./(DiasSaqueAux-1).*(DiasSaqueAux-1))))))
(0.5*pesosauxMM63'*((DiasSaqueAux-1).*(DiasSaqueAux+1))) );
        volFutMertonEWMA98(i)=sqrt( (-sum(pesosauxEWMA98)
sqrt((sum(pesosauxEWMA98))^2 + (pesosauxEWMA98'*((DiasSaqueAux-1).*(DiasSaqueAux-1))
(pesosauxEWMA98'*((LtAux.*LtAux)./(DiasSaqueAux-1).*(DiasSaqueAux-1))))))
(0.5*pesosauxEWMA98'*((DiasSaqueAux-1).*(DiasSaqueAux+1))) );
        volFutMertonEWMA94(i)=sqrt( (-sum(pesosauxEWMA94)
sqrt((sum(pesosauxEWMA94))^2 + (pesosauxEWMA94'*((DiasSaqueAux-1).*(DiasSaqueAux-1))
(pesosauxEWMA94'*((LtAux.*LtAux)./(DiasSaqueAux-1).*(DiasSaqueAux-1))))))
(0.5*pesosauxEWMA94'*((DiasSaqueAux-1).*(DiasSaqueAux+1))) );
        volFutMertonEWMA90(i)=sqrt( (-sum(pesosauxEWMA90)
sqrt((sum(pesosauxEWMA90))^2 + (pesosauxEWMA90'*((DiasSaqueAux-1).*(DiasSaqueAux-1))
(pesosauxEWMA90'*((LtAux.*LtAux)./(DiasSaqueAux-1).*(DiasSaqueAux-1))))))
(0.5*pesosauxEWMA90'*((DiasSaqueAux-1).*(DiasSaqueAux+1))) );
    end,

    %Estima as volatilidades do modelo de Vasicek
    if (i>2 & opcDataVencimento(i)==opcDataVencimento(i-1) &
opcDataPregao(i)==opcDataPregao(i-1) & qtdeLt(i)>1),

        volFutVasicekMM21(i)=volFutVasicekMM21(i-1);
        volFutVasicekMM42(i)=volFutVasicekMM42(i-1);
        volFutVasicekMM63(i)=volFutVasicekMM63(i-1);
        volFutVasicekEWMA98(i)=volFutVasicekEWMA98(i-1);
        volFutVasicekEWMA94(i)=volFutVasicekEWMA94(i-1);
        volFutVasicekEWMA90(i)=volFutVasicekEWMA90(i-1);

        revmediaFutVasicekMM21(i)=revmediaFutVasicekMM21(i-1);
        revmediaFutVasicekMM42(i)=revmediaFutVasicekMM42(i-1);
        revmediaFutVasicekMM63(i)=revmediaFutVasicekMM63(i-1);
        revmediaFutVasicekEWMA98(i)=revmediaFutVasicekEWMA98(i-1);
        revmediaFutVasicekEWMA94(i)=revmediaFutVasicekEWMA94(i-1);
        revmediaFutVasicekEWMA90(i)=revmediaFutVasicekEWMA90(i-1);

    elseif qtdeLt(i)>1,

        [revmediaFutVasicekMM21(i), fval, exitflagFutVasicekMM21(i), output]=fminbnd('funcaoveros
simvasiceka', 0, 1, OPTIONS, LtAux, DiasSaqueAux, pesosauxMM21);
        iterFutVasicekMM21(i)=getfield(output, 'iterations');

        [revmediaFutVasicekMM42(i), fval, exitflagFutVasicekMM42(i), output]=fminbnd('funcaoveros
simvasiceka', 0, 1, OPTIONS, LtAux, DiasSaqueAux, pesosauxMM42);
        iterFutVasicekMM42(i)=getfield(output, 'iterations');

        [revmediaFutVasicekMM63(i), fval, exitflagFutVasicekMM63(i), output]=fminbnd('funcaoveros
simvasiceka', 0, 1, OPTIONS, LtAux, DiasSaqueAux, pesosauxMM63);
        iterFutVasicekMM63(i)=getfield(output, 'iterations');

        [revmediaFutVasicekEWMA98(i), fval, exitflagFutVasicekEWMA98(i), output]=fminbnd('funcaov
erossimvasiceka', 0, 1, OPTIONS, LtAux, DiasSaqueAux, pesosauxEWMA98);
        iterFutVasicekEWMA98(i)=getfield(output, 'iterations');

        [revmediaFutVasicekEWMA94(i), fval, exitflagFutVasicekEWMA94(i), output]=fminbnd('funcaov
erossimvasiceka', 0, 1, OPTIONS, LtAux, DiasSaqueAux, pesosauxEWMA94);
        iterFutVasicekEWMA94(i)=getfield(output, 'iterations');

        [revmediaFutVasicekEWMA90(i), fval, exitflagFutVasicekEWMA90(i), output]=fminbnd('funcaov
erossimvasiceka', 0, 1, OPTIONS, LtAux, DiasSaqueAux, pesosauxEWMA90);
        iterFutVasicekEWMA90(i)=getfield(output, 'iterations');

        kkMM21=zeros(length(LtAux), 1);
        kkMM42=zeros(length(LtAux), 1);
        kkMM63=zeros(length(LtAux), 1);
        kkEWMA98=zeros(length(LtAux), 1);
        kkEWMA94=zeros(length(LtAux), 1);
        kkEWMA90=zeros(length(LtAux), 1);
        for ii=1:length(LtAux),
            kkMM21(ii, 1)=sum((1-revmediaFutVasicekMM21(i)).^(0:DiasSaqueAux(ii)));
            kkMM42(ii, 1)=sum((1-revmediaFutVasicekMM42(i)).^(0:DiasSaqueAux(ii)));
            kkMM63(ii, 1)=sum((1-revmediaFutVasicekMM63(i)).^(0:DiasSaqueAux(ii)));

```

```

kkEWMA98(ii,1)=sum((1-
revmediaFutVasicekEWMA98(i)).^(0:DiasSaqueAux(i)));
kkEWMA94(ii,1)=sum((1-
revmediaFutVasicekEWMA94(i)).^(0:DiasSaqueAux(i)));
kkEWMA90(ii,1)=sum((1-
revmediaFutVasicekEWMA90(i)).^(0:DiasSaqueAux(i)));
end;

volFutVasicekMM21(i)=sqrt((-sum(pesosauxMM21) + sqrt((sum(pesosauxMM21))^2
+(pesosauxMM21'*(kkMM21.*kkMM21)) * (pesosauxMM21'*(LtAux.*LtAux)./(kkMM21.*kkMM21))) ) ) /
(0.5*pesosauxMM21'*(kkMM21.*kkMM21)) );
volFutVasicekMM42(i)=sqrt((-sum(pesosauxMM42) + sqrt((sum(pesosauxMM42))^2
+(pesosauxMM42'*(kkMM42.*kkMM42)) * (pesosauxMM42'*(LtAux.*LtAux)./(kkMM42.*kkMM42))) ) ) /
(0.5*pesosauxMM42'*(kkMM42.*kkMM42)) );
volFutVasicekMM63(i)=sqrt((-sum(pesosauxMM63) + sqrt((sum(pesosauxMM63))^2
+(pesosauxMM63'*(kkMM63.*kkMM63)) * (pesosauxMM63'*(LtAux.*LtAux)./(kkMM63.*kkMM63))) ) ) /
(0.5*pesosauxMM63'*(kkMM63.*kkMM63)) );
volFutVasicekEWMA98(i)=sqrt(
sqrt((sum(pesosauxEWMA98))^2 + (pesosauxEWMA98'*(kkEWMA98.*kkEWMA98))
(pesosauxEWMA98'*(LtAux.*LtAux)./(kkEWMA98.*kkEWMA98)))
(0.5*pesosauxEWMA98'*(kkEWMA98.*kkEWMA98)) );
volFutVasicekEWMA94(i)=sqrt(
sqrt((sum(pesosauxEWMA94))^2 + (pesosauxEWMA94'*(kkEWMA94.*kkEWMA94))
(pesosauxEWMA94'*(LtAux.*LtAux)./(kkEWMA94.*kkEWMA94)))
(0.5*pesosauxEWMA94'*(kkEWMA94.*kkEWMA94)) );
volFutVasicekEWMA90(i)=sqrt(
sqrt((sum(pesosauxEWMA90))^2 + (pesosauxEWMA90'*(kkEWMA90.*kkEWMA90))
(pesosauxEWMA90'*(LtAux.*LtAux)./(kkEWMA90.*kkEWMA90)))
(0.5*pesosauxEWMA90'*(kkEWMA90.*kkEWMA90)) );
end;

end;

end;

%Grava resultados
ResultadoFuturos=zeros(length(opcDataPregao),63);

ResultadoFuturos(:,1)=opcDataPregao;
ResultadoFuturos(:,2)=opcDataVencimento;
ResultadoFuturos(:,3)=opcExercicio;
ResultadoFuturos(:,4)=opcContratosNegociados;
ResultadoFuturos(:,5)=opcCotacaoMedia;
ResultadoFuturos(:,6)=opcIDI;
ResultadoFuturos(:,7)=opcDIFuturo;
ResultadoFuturos(:,8)=opcDiasSaqueAteVencimento;

ResultadoFuturos(:,9)=volFutBlackMM21;
ResultadoFuturos(:,10)=volFutBlackMM42;
ResultadoFuturos(:,11)=volFutBlackMM63;
ResultadoFuturos(:,12)=volFutBlackEWMA98;
ResultadoFuturos(:,13)=volFutBlackEWMA94;
ResultadoFuturos(:,14)=volFutBlackEWMA90;

ResultadoFuturos(:,15)=volFutMertonMM21;
ResultadoFuturos(:,16)=volFutMertonMM42;
ResultadoFuturos(:,17)=volFutMertonMM63;
ResultadoFuturos(:,18)=volFutMertonEWMA98;
ResultadoFuturos(:,19)=volFutMertonEWMA94;
ResultadoFuturos(:,20)=volFutMertonEWMA90;

ResultadoFuturos(:,21)=volFutVasicekMM21;
ResultadoFuturos(:,22)=volFutVasicekMM42;
ResultadoFuturos(:,23)=volFutVasicekMM63;
ResultadoFuturos(:,24)=volFutVasicekEWMA98;
ResultadoFuturos(:,25)=volFutVasicekEWMA94;
ResultadoFuturos(:,26)=volFutVasicekEWMA90;

ResultadoFuturos(:,27)=revmediaFutVasicekMM21;

```

```

ResultadoFuturos(:,28)=revmediaFutVasicekMM42;
ResultadoFuturos(:,29)=revmediaFutVasicekMM63;
ResultadoFuturos(:,30)=revmediaFutVasicekEWMA98;
ResultadoFuturos(:,31)=revmediaFutVasicekEWMA94;
ResultadoFuturos(:,32)=revmediaFutVasicekEWMA90;

ResultadoFuturos(:,33)=callBlackIDI(volFutBlackMM21,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
ResultadoFuturos(:,34)=callBlackIDI(volFutBlackMM42,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
ResultadoFuturos(:,35)=callBlackIDI(volFutBlackMM63,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
ResultadoFuturos(:,36)=callBlackIDI(volFutBlackEWMA98,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
ResultadoFuturos(:,37)=callBlackIDI(volFutBlackEWMA94,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
ResultadoFuturos(:,38)=callBlackIDI(volFutBlackEWMA90,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);

ResultadoFuturos(:,39)=callMertonIDI(volFutMertonMM21,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
ResultadoFuturos(:,40)=callMertonIDI(volFutMertonMM42,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
ResultadoFuturos(:,41)=callMertonIDI(volFutMertonMM63,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
ResultadoFuturos(:,42)=callMertonIDI(volFutMertonEWMA98,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
ResultadoFuturos(:,43)=callMertonIDI(volFutMertonEWMA94,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
ResultadoFuturos(:,44)=callMertonIDI(volFutMertonEWMA90,opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);

ResultadoFuturos(:,45)=callVasicekIDI([volFutVasicekMM21,revmediaFutVasicekMM21],opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
ResultadoFuturos(:,46)=callVasicekIDI([volFutVasicekMM42,revmediaFutVasicekMM42],opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
ResultadoFuturos(:,47)=callVasicekIDI([volFutVasicekMM63,revmediaFutVasicekMM63],opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
ResultadoFuturos(:,48)=callVasicekIDI([volFutVasicekEWMA98,revmediaFutVasicekEWMA98],opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
ResultadoFuturos(:,49)=callVasicekIDI([volFutVasicekEWMA94,revmediaFutVasicekEWMA94],opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);
ResultadoFuturos(:,50)=callVasicekIDI([volFutVasicekEWMA90,revmediaFutVasicekEWMA90],opcIDI,opcExercicio,opcDIFuturo/100000,opcDiasSaqueAteVencimento);

ResultadoFuturos(:,51)=iterFutVasicekMM21;
ResultadoFuturos(:,52)=iterFutVasicekMM42;
ResultadoFuturos(:,53)=iterFutVasicekMM63;
ResultadoFuturos(:,54)=iterFutVasicekEWMA98;
ResultadoFuturos(:,55)=iterFutVasicekEWMA94;
ResultadoFuturos(:,56)=iterFutVasicekEWMA90;

ResultadoFuturos(:,57)=exitflagFutVasicekMM21;
ResultadoFuturos(:,58)=exitflagFutVasicekMM42;
ResultadoFuturos(:,59)=exitflagFutVasicekMM63;
ResultadoFuturos(:,60)=exitflagFutVasicekEWMA98;
ResultadoFuturos(:,61)=exitflagFutVasicekEWMA94;
ResultadoFuturos(:,62)=exitflagFutVasicekEWMA90;

ResultadoFuturos(:,63)=qtdeLt;

dlmwrite('c:\ResultadoFuturos.csv',ResultadoFuturos,');

```

## SCRIPT PARA O CÁLCULO DOS PARÂMETROS IMPLÍCITOS E RESPECTIVOS PRÊMIOS DOS MODELOS.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS PELO MÉTODO IMPLÍCITO
%
% Carrega os dados diários das opções a partir do arquivo opcoes.txt, calcula os
% parâmetros implícitos dos modelos de Black, Merton e Vasicek, calcula os prêmios das
% opções segundo os três modelos a partir dos parâmetros estimados para o dia anterior
% e salva os resultados no arquivo ResultadosImplic.csv.
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Carrega dados relativos às opções
load('c:\opcoes.txt');
opcDataPregao=opcoes(:,1);
opcDataVencimento=opcoes(:,2);
opcExercicio=opcoes(:,3);
opcContratosNegociados=opcoes(:,6);
opcCotacaoMedia=opcoes(:,7);
opcIDI=opcoes(:,10);
opcDIFuturo=opcoes(:,9);
opcDiasSaqueAteVencimento=opcoes(:,8);

%Calcula Volatilidades Implícitas
volImplMerton0=dlmread('c:\volImplMerton0.csv','');
[volImplMerton, iterMerton]=VolImplMerton(volImplMerton0, opcContratosNegociados,
opcDataPregao, opcExercicio, opcDIFuturo/100000, opcCotacaoMedia, opcDiasSaqueAteVencimento,
opcIDI );

volImplBlack0=dlmread('c:\volImplBlack0.csv','');
[volImplBlack,iterBlack]=VolImplBlack(volImplBlack0, opcContratosNegociados, opcDataPregao,
opcExercicio, opcDIFuturo/100000, opcCotacaoMedia, opcDiasSaqueAteVencimento, opcIDI );

xImplVasicek0=zeros(length(opcDataPregao),2);
xImplVasicek0(:,1)=dlmread('c:\volImplMerton0.csv','');
xImplVasicek0(:,2)=0.01;
[volImplVasicek, revmediaImplVasicek, iterVasicek]=VolImplVasicek(xImplVasicek0,
opcContratosNegociados, opcDataPregao, opcExercicio, opcDIFuturo/100000, opcCotacaoMedia,
opcDiasSaqueAteVencimento, opcIDI );

opcpremioImpBlack=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioImpMerton=zeros(length(opcDataPregao),1);
opcpremioImpVasicek=zeros(length(opcDataPregao),1);

%Identifica a linha correspondente ao segundo dia para o qual são negociadas as opções
segundodia=2;
while (opcDataPregao(segundodia)==opcDataPregao(1))
    segundodia=segundodia-1;
end,

%Calcula os prêmios das opções com base nos parâmetros implícitos estimados no dia anterior
for i=segundodia:length(opcDataPregao)
    linhadiaanterior=i;
    while (opcDataPregao(i)==opcDataPregao(linhadiaanterior) & linhadiaanterior>1)
        linhadiaanterior=linhadiaanterior-1;
    end,
    opcpremioImpBlack(i)=callBlackIDI(volImplBlack(linhadiaanterior),opcIDI(i),opcExercicio
o(i),opcDIFuturo(i)/100000,opcDiasSaqueAteVencimento(i));
    opcpremioImpMerton(i)=callMertonIDI(volImplMerton(linhadiaanterior),opcIDI(i),opcExerc
icio(i),opcDIFuturo(i)/100000,opcDiasSaqueAteVencimento(i));
    opcpremioImpVasicek(i)=callVasicekIDI([volImplVasicek(linhadiaanterior)
revmediaImplVasicek(linhadiaanterior)],opcIDI(i),opcExercicio(i),opcDIFuturo(i)/100000,opcDias
SaqueAteVencimento(i));
end,

%Salva os resultados em arquivo
ResultadoImplic=zeros(length(opcDataPregao),18);

ResultadosImplic(:,1)=opcDataPregao;
ResultadosImplic(:,2)=opcDataVencimento;
ResultadosImplic(:,3)=opcExercicio;

```



```
ResultadosImplic(:,4)=opcContratosNegociados;
ResultadosImplic(:,5)=opcCotacaoMedia;
ResultadosImplic(:,6)=opcIDI;
ResultadosImplic(:,7)=opcDIFuturo;
ResultadosImplic(:,8)=opcDiasSaqueAteVencimento;

ResultadosImplic(:,9)=volImplBlack;
ResultadosImplic(:,10)=volImplMerton;
ResultadosImplic(:,11)=volImplVasicek;
ResultadosImplic(:,12)=revmediaImplVasicek;

ResultadosImplic(:,13)=opcpremioImpBlack;
ResultadosImplic(:,14)=opcpremioImpMerton;
ResultadosImplic(:,15)=opcpremioImpVasicek;

ResultadosImplic(:,16)=iterBlack;
ResultadosImplic(:,17)=iterMerton;
ResultadosImplic(:,18)=iterVasicek;

dlmwrite('c:\ResultadosImplic.csv',ResultadosImplic,',' );
```

## FUNÇÕES UTILIZADAS

### Função CallBlackIDI

```
function F=CallBlackIDI(vol, IDI, K, P, T)
%-----
%Função F=CallBlackIDI(vol, IDI, K, P, T)
%
%Calcula o prêmio de uma opção de compra europeia sobre IDI,
%segundo o modelo de Black.
%
%Parâmetros:
%
% vol - volatilidade
% IDI - valor do IDI
% K - preço de exercício
% P - P(0,T), valor de um zero-coupon bond que vence da data
% de vencimento da opção
% T - Prazo de vencimento da opção, em dias úteis.
%

vol=vol+(1-sign(vol).^2)*0.0000000001;

if length(vol)==1
    v2=(vol*vol)*T;
else
    v2=(vol.*vol).*T;
end

d1=(log((IDI./K)./P)+v2/2)./sqrt(v2);
F=IDI.*normcdf(d1)-(K.*P).*normcdf(d1-sqrt(v2));
```

### Função CallMertonIDI

```
function F=CallMertonIDI(vol, IDI, K, P, T)
%-----
%Função F=CallMertonIDI(vol, IDI, K, P, T)
%
%Calcula o prêmio de uma opção de compra europeia sobre IDI,
%segundo o modelo de Merton.
%
%Parâmetros:
%
% vol - volatilidade
% IDI - valor do IDI
% K - preço de exercício
% P - P(0,T), valor de um zero-coupon bond que vence da data
% de vencimento da opção
% T - Prazo de vencimento da opção.
%

vol=vol+(1-sign(vol).^2)*0.0000000001;

if length(vol)==1
    v2=(vol^2)*(T.^3)/3;
else
    v2=(vol.^2).*(T.^3)/3;
end

d1=(log((IDI./K)./P)+v2/2)./sqrt(v2);
F=IDI.*normcdf(d1)-(K.*P).*normcdf(d1-sqrt(v2));
```

## Função CallVasicekIDI

```
function F=CallVasicekIDI(x, IDI, K, P, T)
%
%Função F=CallVasicekIDI(x, IDI, K, P, T)
%
%Calcula o prêmio de uma opção de compra europeia sobre IDI,
%segundo o modelo de Merton.
%
%Parâmetros:
%
% x(1) - volatilidade
% x(2) - coeficiente de reversão à média
% IDI - valor do IDI
% K - preço de exercício
% P - P(0,T), valor de um zero-coupon bond que vence da data
% de vencimento da opção
% T - Prazo de vencimento da opção.
%
vol=x(:,1);
revmedia=x(:,2);

vol=vol+(1-sign(vol).^2)*0.000000001;

if length(vol)==1
    v2=( (vol^2)/(2*(revmedia^3)) ) * (2*revmedia*T-4*exp(-revmedia*T)-exp(-2*revmedia*T)-3);
else
    v2=( (vol.^2)./(2*(revmedia.^3)) ) .* (2*revmedia.*T-4*exp(-revmedia.*T)-exp(-2*revmedia.*T)-3);
end

d1=(log( (IDI./K) ./P)+v2/2)./sqrt(v2);
F=IDI.*normcdf(d1)-(K.*P).*normcdf(d1-sqrt(v2));
```

## Função FunçãoVerossimVasicexA

```
function F=funcaooverossimvasiceka(a, Lt, DiasSaqueatevenc, pesos)
% Função de verossimilhança usada na estimação dos parâmetros do modelo de Vasicek
% usando as séries históricas de contratos futuros de DI de 1 dia.
%
% Parâmetros da Função:
%
% a - coeficiente de reversão à média
% Lt - vetor com a série de variáveis Lt
% DiasSaqueatevenc - vetor dos prazos para o vencimento de cada elemento de Lt
% pesos - pesos atribuídos a cada registro diário
%
revmedia=a;
kk=zeros(length(Lt),1);
for ii=1:length(Lt),
    kk(ii,1)=sum((1-revmedia).^(0:DiasSaqueatevenc(ii)));
end;

vol=sqrt((-sum(pesos)+sqrt(sum(pesos)^2-(pesos.*(kk.*kk))*(pesos.*(Lt.*Lt)./(kk.*kk)))/(0.5*pesos.*(kk.*kk)));

XX=-Lt./kk - kk*((vol^2)/2);

F=-log(vol)*sum(pesos)-(1/(2*vol^2))*((XX.*pesos).^XX);
F=-F;
```

## Função VolImplBlack

```
function [F,iter]=VolImplBlack(vol0, w, opcDataPregao, K, PU, c, T, IDI )
%
%Calcula a volatilidade implícita de opções de compra de IDI segundo o modelo de Black.
%A volatilidade implícita relativa a cada dia será aquela que produzir menor
%erro quadrático médio entre os preços calculado e os de mercado, ponderado
%pelos pesos w.
%
% [F,iter]=VolImplBlack(vol0, w, opcDataPregao, K, PU, c, T, IDI )
%
%Parâmetros:
%   vol0 - estimativa inicial para a volatilidade
%   w - pesos para ponderação
%   opcDataPregao - data de negociação das opções
%   K - Strike da opção
%   PU - P(0,T), valor de um zero-coupon bond que vence da data
%   de vencimento da opção
%   c - valor de mercado do prêmio da opção
%   T - prazo de vencimento da opção
%   IDI - valor do IDI
%
%Resultados:
%   F - volatilidade implícita calculada
%   iter - número de iterações numéricas até convergir para a resposta
%

F=zeros(length(opcDataPregao),1);
iter=zeros(length(opcDataPregao),1);

OPTIONS=optimset('LargeScale','on','LevenbergMarquardt','off');

i=1;
cont=1;

LB=[0.0000001];
UB=[1];

while i<=length(opcDataPregao),
    inicio=i;
    fim=0;
    while fim==0,
        if i==length(opcDataPregao),
            fim=i;
        elseif opcDataPregao(i+1)~=opcDataPregao(inicio),
            fim=i;
        end
        i=i+1;
    end

    inicio
    fim

    PUaux=PU(inicio:fim,1);
    Kaux=K(inicio:fim,1);
    caux=c(inicio:fim,1);
    Taux=T(inicio:fim,1);
    waux=w(inicio:fim,1);
    IDIaux=IDI(inicio:fim,1);

    vol0aux=((vol0(inicio:fim,1))*waux)/(ones(1,(fim-inicio+1))*waux);

    [vol,resnorm,residual,exitflag,output]=lsqnonlin('ErroVolBlackIDI',vol0aux,LB,UB,OPTIO
NS,waux,caux,IDIaux,Kaux,PUaux,Taux)

    F(inicio:fim)=vol;
    iter(inicio:fim)=getfield(output,'iterations');

    cont=cont+1
end
```

## Função VolImplMerton

```

function [F,iter]=VolImplMerton(vol0, w, opcDataPregao, K, PU, c, T, IDI )
%
%Calcula a volatilidade implícita de opções de compra de IDI segundo o modelo de Merton.
%A volatilidade implícita relativa a cada dia será aquela que produzir menor
%erro quadrático médio entre os preços calculado e os de mercado, ponderado
%pelos pesos w.
%
% [F,iter]=VolImplMerton(vol0, w, opcDataPregao, K, PU, c, T, IDI )
%
%Parâmetros:
%   vol0 - estimativa inicial para a volatilidade
%   w - pesos para ponderação
%   opcDataPregao - data de negociação das opções
%   K - Strike da opção
%   PU - P(0,T), valor de um zero-coupon bond que vence da data
%   de vencimento da opção
%   c - valor de mercado do prêmio da opção
%   T - prazo de vencimento da opção
%   IDI - valor do IDI
%
%Resultados:
%   F - volatilidade implícita calculada
%   iter - número de iterações numéricas até convergir para a resposta
%

F=zeros(length(opcDataPregao),1);
iter=zeros(length(opcDataPregao),1);

OPTIONS=optimset('LargeScale','on','LevenbergMarquardt','off');

i=1;
cont=1;

LB=[0.0000001];
UB=[1];

while i<=length(opcDataPregao),
    inicio=i;
    fim=0;
    while fim==0,
        if i==length(opcDataPregao),
            fim=i;
        elseif opcDataPregao(i+1)~=opcDataPregao(inicio),
            fim=i;
        end
        i=i+1;
    end

    PUaux=PU(inicio:fim,1);
    Kaux=K(inicio:fim,1);
    caux=c(inicio:fim,1);
    Taux=T(inicio:fim,1);
    waux=w(inicio:fim,1);
    IDIaux=IDI(inicio:fim,1);

    vol0aux=((vol0(inicio:fim,1))*waux)/(ones(1,(fim-inicio-1))*waux);

    [vol, resnorm, residual, exitflag, output]=lsqnonlin('ErroVolMertonIDI',vol0aux,LB,UB,OPTI
ONS,waux, caux, IDIaux, Kaux, PUaux, Taux)

    F(inicio:fim)=vol;
    iter(inicio:fim)=getfield(output,'iterations');

    cont=cont-1
end

```

## Função VolImplVasicek

```
function [vol,revmedia,iter]=VolImplVasicek(x0, w, opcDataPregao, K, PU, c, T, IDI )
%
%Calcula a volatilidade e o coeficiente de reversão à média implícitos nos
%preços de opções de compra de IDI segundo o modelo de Vasicek
%A volatilidade implícita relativa a cada dia será aquela que produzir menor
%erro quadrático médio entre os preços calculado e os de mercado, ponderado
%pelos pesos w.
%
% [vol,revmedia,iter]=VolImplVasicek(x0, w, opcDataPregao, K, PU, c, T, IDI )
%
%Parâmetros:
%   x0 - estimativa inicial para a volatilidade e coeficiente de
%   reversão à média: x0=[vol revmedia]
%   w - pesos para ponderação
%   opcDataPregao - data de negociação das opções
%   K - Strike da opção
%   PU - P(0,T), valor de um zero-coupon bond que vence da data
%   de vencimento da opção
%   c - valor de mercado do prêmio da opção
%   T - prazo de vencimento da opção
%   IDI - valor do IDI
%
%Resultados:
%   vol - volatilidade implícita calculada
%   revmedia - coeficiente de reversão à média implícito calculado
%   iter - número de iterações numéricas até convergir para a resposta
%

vol=zeros(length(opcDataPregao),1);
revmedia=zeros(length(opcDataPregao),1);
iter=zeros(length(opcDataPregao),1);

vol0=x0(:,1);
revmedia0=x0(:,2);

OPTIONS=optimset('LargeScale','on','LevenbergMarquardt','off');

i=1;
cont=1;

LB=[0.0000001 0.000001];
UB=[1 0.2];

iniciol=1;

while i<=length(opcDataPregao),
    inicio0=iniciol;
    iniciol=i;
    fim=i-1;
    while fim<iniciol,
        if i==length(opcDataPregao),
            fim=i;
        elseif opcDataPregao(i-1)~=opcDataPregao(iniciol),
            fim=i;
        end
        i=i+1;
    end
    if iniciol==fim,
        inicio=inicio0;
    else
        inicio=iniciol;
    end
    PUaux=PU(inicio:fim,1);
```

```

Kaux=K(inicio:fim,1);
caux=c(inicio:fim,1);
Taux=T(inicio:fim,1);
waux=w(inicio:fim,1);
IDiaux=IDI(inicio:fim,1);

vol0aux=(vol0(inicio:fim,1))*waux/(ones(1,(fim-inicio-1))*waux);
revmedia0aux=(revmedia0(inicio:fim,1))*waux/(ones(1,(fim-inicio-1))*waux);
iaux=[ vol0aux revmedia0aux];

[x, resnorm, residual, exitflag, output]=lsqnonlin('ErroVolVasicekIDI',iaux, LB, UB, OPTIONS,
waux, caux, IDiaux, Kaux, PUaux, Taux)

vol(inicio1:fim)=x(:,1);
revmedia(inicio1:fim)=x(:,2);

iter(inicio1:fim)=getfield(output,'iterations');

cont=cont+1
i
end

```

### Função ErroVolBlackIDI

```

function F=ErroVolBlackIDI(vol,w, c, IDI, K, P, T)
% Utilizada pela função VolImplBlack. Fornece vetor com os desvio do preço calculado da opção
% com relação ao preço de mercado, multiplicado pela raiz dos respectivos pesos de ponderação de
% erro, vetor este utilizado pela função de otimização lsqnonlin.

F=(w.^0.5).*(c-CallBlackIDI(vol, IDI, K, P, T));

```

### Função ErroVolMertonIDI

```

function F=ErroVolMertonIDI(vol,w, c, IDI, K, P, T)
% Utilizada pela função VolImplMerton. Fornece vetor com os desvio do preço calculado da
% opção com relação ao preço de mercado, multiplicado pela raiz dos respectivos pesos de
% ponderação de erro, vetor este utilizado pela função de otimização lsqnonlin.

F=(w.^0.5).*(c-CallMertonIDI(vol, IDI, K, P, T));

```

### Função ErroVolVasicekIDI

```

function F=ErroVolVasicekIDI(x,w, c, IDI, K, P, T)
% Utilizada pela função VolImplVasicek. Fornece vetor com os desvio do preço calculado da
% opção com relação ao preço de mercado, multiplicado pela raiz dos respectivos pesos de
% ponderação de erro, vetor este utilizado pela função de otimização lsqnonlin.

F=(w.^0.5).*(c-CallVasicekIDI(x, IDI, K, P, T));

```

## APÊNDICE II – Formatos dos arquivos utilizados pelos programas em MATLAB

### Arquivo DI.txt

Arquivo-texto com registros diários da taxa do CDI expressa em termos anualizados. Contém três colunas de campos separados por tabulações. A primeira coluna contém números em ordem crescente representando as datas dos registros, conforme especificação do Excel, variando de 02/01/1997 a 14/01/2003. A segunda coluna fornece a taxa média do CDI em termos anualizados, e a terceira coluna contém o logaritmo desta taxa em termos diários.

### Arquivo Opcoes.txt

Arquivo-texto com a amostra de registros diários das opções de compra de IDI, com colunas separadas por tabulações. Contém os seguintes campos, nesta ordem:

- 1) Data de pregão: data de negociação da opção, em ordem crescente;
- 2) Data de Vencimento: data de vencimento da opção;
- 3) Preço de exercício: preço de exercício da opção;
- 4) Volume negociado: volume financeiro negociado no dia para a opção;
- 5) Negócios Efetuados: numero de negócios efetuados no dia para a opção;
- 6) Contratos Negociados: número de contratos negociados da opção no dia;
- 7) Cotação Média: valor médio das cotações da opção negociadas no dia;
- 8) Dias de Saque até o vencimento: número de dias da data corrente até a data de vencimento;
- 9) DI Futuro Médio: cotação média no dia dos contratos futuros com mesma data de vencimento da opção, expressa em termos de PU;
- 10) IDI: valor do IDI de fechamento do dia anterior.

### Arquivo Lt.csv

Arquivo-texto com colunas delimitadas por ponto-e-vírgula, contendo as séries das variáveis Lt utilizadas na estimação dos parâmetros dos modelos a partir das séries históricas. É uma



tabela dinâmica: a primeira linha contém as datas de vencimento dos contratos futuros em ordem crescente e a primeira coluna as datas de pregão, também em ordem crescente. Os demais campos da tabela fornecem os valores das variáveis Lt referentes à data de pregão da respectiva linha e a data de vencimento do contrato futuro da respectiva coluna.

#### **Arquivo DiasSaque.csv**

De mesmo formato que o arquivo Lt.csv, contém o número de dias úteis até o vencimento da opção relativos a cada um dos valores de Lt contidos no arquivo Lt.csv.