

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE ASTRONOMIA, GEOFÍSICA E CIÊNCIAS ATMOSFÉRICAS
DEPARTAMENTO DE ASTRONOMIA

RODRIGO FERNANDES LIRA DE HOLANDA

ANÁLOGOS CLÁSSICOS PARA COSMOLOGIAS
RELATIVÍSTICAS ACELERADAS: UMA ABORDAGEM
LAGRANGIANA

SÃO PAULO, FEVEREIRO DE 2007

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE ASTRONOMIA, GEOFÍSICA E CIÊNCIAS ATMOSFÉRICAS
DEPARTAMENTO DE ASTRONOMIA

ANÁLOGOS CLÁSSICOS PARA COSMOLOGIAS
RELATIVÍSTICAS ACELERADAS: UMA ABORDAGEM
LAGRANGIANA

RODRIGO FERNANDES LIRA DE HOLANDA

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial à obtenção do grau de **MESTRE** em **CIÊNCIAS**.
Área de Concentração: Cosmologia.

Orientador: **Prof. Dr. JOSÉ ADEMIR SALES DE LIMA**

SÃO PAULO, FEVEREIRO DE 2007

Agradecimentos

- Ao Prof. José Ademir Sales de Lima, por seu estímulo permanente, pela amizade, pelos preciosos conselhos em meus momentos de ansiedade, pela escolha do tema e pelo exemplo de dedicação à física.

- À toda minha família, em especial, à minha linda mãe Socorro Fernandes, ao meu carismático pai José Lira, a minha querida tia-mãe Terezinha Araújo, a minha linda companheira Illana Louise, aos meus queridos e estimados irmãos João Paulo Holanda e Ana Larissa Holanda, ao meu querido primo Thiago Holanda, ao meu grande cunhado Gustavo Mafaldo e ao meu irreverente tio Nilton Sá, por tudo.

- Ao amigo José Fernando de Jesus pelo grande apoio em minha chegada a São Paulo e pelas valiosas discussões científicas.

- Aos meus amigos de graduação em física da UFRN, Sandro Gomes, Klaydson Celino, Josenildo Firmino, Luís Neto e Carlos A. Barbosa pelos divertidos momentos ao longo de quatros anos que tornaram o dia-a-dia do curso de física bem menos estressante.

- Ao amigo Augusto César (ECA-USP) pela hospedagem temporária no Conjunto Residencial da USP (CRUSP).

- Aos professores Janilo Santos (UFRN) e Nilza Pires (UFRN), por tudo que me ensinaram nas seis disciplinas lecionadas, pela amizade e paciência.

- Aos professores do departamento de Astronomia do IAG, em especial aos professores Janot Pacheco, Laerte Sodré, Ronaldo Eustáquio, Amâncio Friaça, Zulema Abraham, Thais E.P. Idiart, Cláudia Oliveira e Ruth Gruenwald pelas disciplinas lecionadas.

- Ao prof. Raul Abramo (IF-USP) pela atenção no curso de gravitação e cosmologia.
- Ao João Vital pelas discussões e pelas palavras de paciência e apoio.
- Aos novos amigos feitos na USP, em especial, ao Vinícius Placco, Felipe Santos, Oscar Moraes, Márcio Barreto e Alessandro Moisés por dividir comigo os inesquecíveis momentos de "Bandeijão".
- A CAPES pela bolsa concedida.

RESUMO

Nesta dissertação, uma revisão dos modelos cosmológicos newtonianos e neo-newtonianos baseados na formulação da hidrodinâmica clássica é apresentada, com especial ênfase para os resultados básicos e as limitações mais importantes dessas abordagens. Em seguida, mostramos que a descrição Lagrangiana clássica proposta por Lima, Moreira e Santos (1998) para fluidos simples, pode ser generalizada para incluir modelos com misturas de fluidos, e portanto, cosmologias mais realísticas contendo bárions, matéria escura e energia escura, bem como qualquer forma de interação entre essas componentes.

Neste trabalho propomos uma descrição lagrangiana clássica para modelos relativísticos do tipo FRW. Nesta descrição, o comportamento dinâmico do fator de escala $a(t)$, como previsto pelas cosmologias relativísticas, é substituído pelo movimento unidimensional de uma partícula teste de massa m sob a ação de um potencial clássico, $V(x)$, onde x é a coordenada unidimensional da partícula. O tratamento pode ser aplicado para os mais diversos cenários de energia escura. Para exemplificar, discutimos com detalhe os seguintes modelos contendo matéria escura e energia escura: Λ CDM, $X(z)$ CDM, $\Lambda(t)$ e gás de Chaplygin. Por completeza, modelos multidimensionais do tipo FRW também são considerados. Em todos esses modelos, o parâmetro de curvatura k das seções espaciais das cosmologias determina a energia total da partícula teste pela relação, $E = -mk/2$, tal como ocorre nos modelos de fluidos simples. As propriedades dinâmicas associadas com o presente estágio de aceleração do universo são univocamente descritas em termos da função potencial do sistema. Finalmente, utilizando os dados da distância de luminosidade provenientes das supernovas do tipo Ia, discutimos como o potencial unidimensional pode ser reconstruído a partir das observações.

ABSTRACT

In this dissertation, a review of the Newtonian and neo-Newtonian cosmological models based on the classical hydrodynamics formulation is presented with special emphasis to the basic results and the main limitations of such approaches. Next, we show that the classical Lagrangian description as proposed by Lima, Moreira & Santos (1998) for simple fluids, can be generalized to include fluid mixtures, and, therefore, more realistic cosmologies containing baryons, dark matter and dark energy, as well as, any kind of interaction among such components.

In the lagrangian description, the dynamic behavior of the scale factor $a(t)$, as predicted by the relativistic cosmologies, is replaced by the unidimensional motion of a test particle with mass m under the action of a classical potential, $V(x)$, where $x(t)$ is the coordinate of the particle. The treatment can be applied for many different scenarios of dark energy. In order to exemplify, we discuss with detail the following models containing dark matter and dark energy: Λ CDM, $X(z)$ CDM, $\Lambda(t)$ CDM and the Chaplygin gas. For completeness, FRW type multidimensional models are also considered. For all these models, the curvature parameter k of the spatial sections in the relativistic cosmologies determines the total energy by the relation, $E = -mk/2$, as occurs in the simple fluid models. The dynamic property associated with the present accelerating stage of the Universe are univocally described in terms of the potential function of the system. Finally, by using the data from luminosity distance of supernovae type Ia, we discuss how the unidimensional potential can be reconstructed from the observations.

Índice

1	O MODELO PADRÃO DA COSMOLOGIA	10
1.1	Introdução Geral	10
1.2	A Teoria da Relatividade Geral	11
1.3	A Dinâmica Cosmológica	13
1.4	A Nucleossíntese Primordial (NP)	19
1.5	A Radiação Cós mica de Fundo (CMB)	23
1.6	O experimento <i>Wmap</i>	26
1.7	Formação de estruturas	29
1.8	A Teoria da Inflação	31
2	O UNIVERSO ESCURO E A ACELERAÇÃO DO UNI- VERSO	34
2.1	Introdução	34
2.2	A Matéria Escura	34
2.3	A aceleração do Universo e a Energia Escura	36
2.3.1	A constante cosmológica	39
2.3.2	Modelos com $\Lambda(t)$	41
2.3.3	Gás Chaplygin (GC)	46
2.3.4	A Matéria-X e parametrizações	49
2.3.5	Cosmologia em D-dimensões espaciais	53
2.3.6	Considerações finais do capítulo	55
3	COSMOLOGIA NEWTONIANA	57
3.1	A Formulação Hidrodinâmica	57

3.1.1	Modelos do tipo FRW sem pressão, $p = 0$	58
3.1.2	Modelos do tipo FRW com pressão, $p \neq 0$	62
3.2	Propagação da luz na Cosmologia newtoniana	67
3.3	Limites da cosmologia newtoniana	68
3.4	A Formulação lagrangiana para modelos de fluido simples do tipo FRW	70
3.4.1	Metodologia e Discussões	71
4	A FORMULAÇÃO LAGRANGIANA PARA MODELOS DO TIPO FRW COM MISTURAS DE FLUIDOS	75
4.1	Introdução	75
4.2	Metodologia e Discussões	76
4.2.1	Matéria-X ($p = \omega_x \rho_x$) + CDM	76
4.2.2	Matéria-X com equação de estado dinâmica ($p =$ $\omega_x(z) \rho_x$) + CDM	77
4.2.3	Gás de Chaplygin: $p = -\frac{A}{\rho_{GC}^\alpha}$	80
4.2.4	Chen-Wu generalizado: $\Lambda(t) = \frac{\Lambda_0}{a^n}$	80
4.2.5	Wang-Meng: $\rho_m = \rho_{m0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3+\epsilon}$	80
4.2.6	Modelos multidimensionais:	83
4.3	A Reconstrução do Potencial	85
4.3.1	A relação Distância-Luminosidade	85
4.3.2	O potencial como função do parâmetro de desaceleração, $q(z)$	86
4.4	A descrição Hamiltoniana de Szydlowski & Czaja	88
5	CONCLUSÃO	90
A	Equação do tipo FRW para um fluido simples: redução a forma de um oscilador	94
A.1	Parte 1 - O caso em 3 dimensões espaciais.	94
A.2	Parte 2 - O caso em D-dimensões espaciais	97

B	Detalhes da descrição lagrangiana para os modelos discutidos nesta dissertação	99
B.1	Gás de Chaplygin	99
B.2	Chen-Wu generalizado	101
B.3	Wang-Meng	102
B.4	$p = \omega\rho + \Lambda$ em D-dimensões espaciais:	104
B.5	$p = \omega_x\rho_x + \text{CDM}$ em D-dimensões espaciais:	105
	Referências Bibliográficas	107

Notação e Convenções

- Assinatura da métrica: $(+, -, -, -)$
- Índices gregos variam de 0 a 3 e latinos de 1 a 3. Índices repetidos obedecem a convenção de Einstein.
- Derivada parcial: $\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \equiv \phi_{,\alpha}$
- Derivadas covariante: $A^\alpha_{;\beta} = A^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} A^\lambda$
- Usaremos aqui $c = 1$, salvo em algumas situações em que achamos relevante explicitá-la. Nestes casos faremos uma prévia indicação.
- Nesta tese a constante gravitacional de Einstein é $\chi = 8\pi G$
- Expressões em outro idioma serão escritas em *itálico*.

Informação Eletrônica

A maioria das referências utilizadas nesta dissertação podem ser encontradas nas seguintes páginas da WEB:

- <http://www.periodicos.capes.gov.br/>
- http://adsabs.harvard.edu/abstract_service.html
- <http://xxx.lanl.gov/>

Lista de Figuras

1.1	Evolução do quadrado do parâmetro de Hubble, no qual todas as componentes típicas (radiação, matéria, curvatura e constante cosmológica) dominam uma após a outra.	16
1.2	Evolução do fator de escala para alguns modelos do tipo FRW.	16
1.3	As linhas tracejadas indicam a incerteza do modelo na abundância de cada elemento. As observações atuais se encontram nos retângulos para cada elemento.	22
1.4	A reta na figura corresponde aos valores nos quais $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. As análises correspondem aos dados do <i>Wmap</i> (contorno preto) e <i>Wmap</i> + outros conjuntos de dados (vermelho). Nestes contornos não são assumidos a priori $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. Os dados apenas do <i>Wmap</i> favorecem cosmologias com $\Omega_m = 0.415$ e $+\Omega_\Lambda = 0.630$, ou seja, Universo não plano, entretanto, quando cruzados com os outros conjunto de dados há um favorecimento para o Universo plano.	27
1.5	Limites sobre o parâmetro ω da equação de estado da energia escura e de Ω_k baseado na junção dos conjuntos de dados da CMB+2dFGRS+SDSS+SNe Ia. Aqui é assumido ω independente do tempo e nenhuma suposição é tomada a priori com respeito a curvatura. Os contornos mostram os níveis de confiança de 68% e 95%, com $\omega = -1.062_{-0.079}^{+0.0128}$ e $\Omega_k = -0.024_{0.013}^{+0.016}$ em 68%.	27

1.6	Limites sobre o parâmetro ω da equação de estado da energia escura, em um modelo de Universo plano baseado nas medidas do <i>Wmap</i> e de outros dados astronômicos. Aqui é assumido ω independente do tempo e as possíveis flutuações na pressão e na densidade da energia escura são ignoradas. Em todas figuras, o conjunto de dados do <i>Wmap</i> são mostrados em preto e a junção do <i>Wmap</i> + dados astronômicos estão em vermelho. Os contornos mostram os níveis de confiança de 68% e 95% para Ω_m e ω	28
1.7	Espectro de potência das flutuações de densidade determinados a partir de diversas técnicas (note que cada uma é mais sensível para um certo intervalo de número de onda k). O traço contínuo representa um modelo com $\Lambda = 0,72$, $\Omega_M = 0,28$ e $h = 0,72$	31
2.1	Fontes de matéria como função do parâmetro de Hubble. A matéria luminosa é dada por $0.002 \leq \Omega_{lum} \leq 0.006$; a banda horizontal é a componente do halo galático, $0.03 \leq \Omega_{halo} \leq 0.05$, cruzando com a componente bariônica dada pela NP, $\Omega_b = 0.0224 \pm 0.0024$; a faixa de cima é a componente dinâmica medida através da análise de estruturas em largas escalas $\Omega_M = 0.3 \pm 0.1$	35
2.2	Diagrama de Hubble para diversas cosmologias.	37
2.3	Genealogia: Energia Escura.	38
2.4	Os intervalos de valores permitidos de n	44
2.5	Diâmetro angular versus redshift para algumas combinações dos parâmetros A_s . O primeiro gráfico corresponde ao cenário de Quintessência e o segundo ao modelo unificado ($\Omega_M = \Omega_b$). Os dados e as barras de erro fazem parte da amostra de 145 fontes de rádio compactas distribuídas em 12 feixes atualizadas por Gurvits <i>et al.</i>	49
3.1	Esfera de massa distribuída uniformemente.	59

3.2	As curvas são: vácuo ($n=2$), poeira ($n=1$), radiação ($n=-2$), stiff matter ($n=-4$). Modelos fechados ($E < 0$) possui um ponto de retorno que é um Big-Bounce para n positivo. Para valores negativos de n o modelo expande de um big bang, alcança o tamanho máximo e contrai para um big crunch em um tempo finito. Para $E \geq 0$ não existe ponto de retorno.	73
4.1	Potenciais para os cenários gás de Chaplygin, poeira e vácuo.	82
4.2	$V(z)$ para diferentes modelos de energia escura.	82
4.3	Potenciais para o modelo de Wang & Meng com e sem a presença dos bárions. Notar as diferentes épocas de transição.	82
4.4	Gráficos de Wang & Meng (com e sem bárions) e Λ CDM.	82
4.5	Reconstrução do potencial da partícula via distância-luminosidade de SnIa. A região permitida é a hachurada em 1σ	87
4.6	Reconstrução do potencial da partícula via distância-luminosidade de SnIa juntamente com os potenciais de outros modelos.	87

INTRODUÇÃO

A cosmologia é a parte da física que investiga a estrutura de grande escala do Universo. Seu principal objetivo consiste em determinar um modelo cosmológico que prediga e explique os resultados das observações astronômicas. Do ponto de vista teórico, o surgimento da cosmologia moderna está intimamente associado a formulação da Teoria da Relatividade Geral (TRG) em 1915. Esta teoria, que é uma descrição geométrica da gravitação, mostrou-se consistente nas suas aplicações para o entendimento da dinâmica global do Universo, o que não ocorria com a teoria gravitacional newtoniana, considerada incapaz de lidar com os paradoxos associados a um espaço que se estende ao infinito. No contexto da TRG, o estudo teórico das questões cosmológicas inicia quando se conhece a estrutura geométrica do espaço-tempo, a qual é determinada pela distribuição de matéria do Universo.

Em 1917, Einstein obteve o primeiro modelo cosmológico baseado na TRG. Afim de tornar o estudo da dinâmica universal matematicamente tratável, utilizou uma hipótese simplificadora, denominada **Princípio cosmológico** [1]. Esta hipótese estabelece que o conteúdo material observado no Universo é distribuído de forma homogênea e isotrópica. Para compatibilizar seu modelo com as idéias de Universo estático e imutável vigentes na época, Einstein se viu compelido a introduzir nas suas equações de campo a constante cosmológica. Este termo adicional teria uma origem cosmológica e caráter repulsivo, contrabalanceando o efeito atrativo da gravitação. Nesta mesma época, W. de Sitter [2] propôs um modelo que de uma certa forma contrariava o modelo de Einstein. O universo de de Sitter consistia de um espaço plano, sem matéria e estava em um estado estacionário, onde nada mudava em qualquer momento. O termo de Hubble e o parâmetro de desaceleração eram constantes. O universo de Einstein, que continha matéria, mas não movimento, e o universo de de Sitter, que tinha

movimento mas não matéria, foram os primeiros modelos cosmológicos propostos.

Entretanto, A. Friedmann [3] e G. Lemaître [4] em 1922 e 1927, respectivamente, mostraram que era possível encontrar soluções não estacionárias para as equações de campo da TRG e que a constante cosmológica não era impensável para a elaboração de um modelo para o Universo. Porém, a idéia de um universo dinâmico não era claro na época, graças ao estado rudimentar das observações astronômicas para objetos muito distantes.

Em 1923, Edwin Hubble, usando um recém-instalado telescópio de 2,5 m de diâmetro no Monte Wilson, na Califórnia, se encarregou de demolir o conceito da imutabilidade cósmica. Primeiro, ao conseguir enxergar e medir distâncias de estrelas individuais na nebulosa de Andrômeda, demonstrou conclusivamente que nossa galáxia não é a única do Universo. Segundo, em 1929, juntamente com dados a favor de um *redshift* cosmológico já obtidos por Slipher [5] e outros por ele mesmo observados, demonstrou que as galáxias próximas se afastam de nós com velocidades crescentes com as distâncias que nos separam delas [6], descartando definitivamente o modelo estático. Isso fez com que o próprio Einstein propusesse a eliminação do termo cosmológico das suas equações de campo, obtendo juntamente com de Sitter em 1932 uma solução expansionista sem constante cosmológica [7].

As soluções possíveis encontradas por Friedmann e Einstein-de Sitter das equações da TRG incluem expansão eterna ou recolapso. Se a constante cosmológica é nula, os modelos se dividem em três classes. Se a densidade de matéria é maior do que a densidade necessária para reverter a expansão (densidade crítica), o Universo tem a seção espacial fechada ($k=1$). Se a densidade for menor que a densidade crítica, o Universo tem a seção espacial aberta ($k=-1$) e continuará a se expandir para sempre. O terceiro caso, chamado Universo plano ($k=0$), é o limite entre o fechado e o aberto. Neste caso, o Universo tem a densidade crítica e se expande para sempre,

mas a velocidade das galáxias será cada vez menor, chegando a zero no infinito. Aqui a seção espacial é euclidiana. Essa classe de modelos, cujos elementos se diferenciam apenas pela geometria das seções espaciais ($k = 0, \pm 1$) constituíram até os anos noventa, o chamado modelo cosmológico padrão.

A possibilidade proposta pela TRG de um Universo dinâmico, a descoberta da expansão universal por Hubble em 1929, somadas a outros dois extraordinários fatos ocorridas no século passado, formam os pilares da tão chamada Teoria do *Big Bang*. Estes dois importantes fatos foram: (i) a demonstração na década de 60 de que os elementos leves (D, ^3He , ^4He e Li) teriam sido produzidos nos primeiros segundos após o *Big Bang*, quando o Universo era pouco mais quente que o núcleo do Sol, em um processo modernamente conhecido por nucleossíntese primordial ¹; (ii) a descoberta acidental em 1965 por A. Penzias e Robert W. Wilson [9] da radiação cósmica de fundo em microondas (CMB), uma radiação de corpo negro isotrópica com temperatura de 3K. Esta radiação é uma verdadeira "pedra da Roseta" para a cosmologia, uma vez que foi emitida a aproximadamente 380.000 anos após o *Big Bang* quando o universo se esfriou suficientemente para formar átomos neutros e os fótons desacoplarem da matéria.

Resumindo, o que se entendia por modelo cosmológico padrão até meados dos anos 90, era um fluido homogêneo, isotrópico e autogravitante com pressão nula, atualmente denominado por matéria escura fria (*Cold Dark Matter* - CDM) e cujo o espaço-tempo era descrito pelas geometrias do tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Além disso, sendo a gravidade uma força atrativa, mesmo não existindo evidências observacionais conclusivas naquela época, era sempre suposto que o Universo se expandia desaceleradamente.

Entretanto, em 1998, alguns resultados provenientes das observações de supernovas do tipo Ia (SNe Ia), publicados independentemente por dois

¹Os primeiros trabalhos sobre a nucleossíntese primordial e a previsão da existência de uma radiação cósmica de fundo (CMB) foram efetuados por Gamow e colaboradores na década de 1940 [8].

grupos distintos [10], mudaram drasticamente nossa visão do Universo. Em síntese, uma análise do diagrama de Hubble-Sandage, que descreve o brilho observado desses objetos em função do *redshift*, gerou uma nova e inesperada conclusão: o Universo expande aceleradamente. Implicitamente, tais observações sugeriram que o conteúdo energético do Universo é predominantemente repulsivo e aparece como uma componente de **energia escura**: uma forma desconhecida de energia com pressão negativa.

Na verdade, outros estudos independentes das observações de SNe Ia também indicam a existência de uma componente extra no Universo. Entre eles, podemos citar: o estudo das flutuações na CMB (radiação cósmica de fundo), que indicam que vivemos em um Universo muito próximo de plano (resultado também previsto pela Teoria Inflacionária), ou seja, a densidade total de matéria-energia é aproximadamente a densidade crítica; o valor da densidade da CDM, obtido pelo espectro de potência associado com as estruturas em grandes escalas e dados provenientes de raios-X em aglomerados de galáxias, como sendo apenas cerca 30% da densidade crítica; as estimativas das idades de objetos velhos em altos *redshifts* (a idade prevista para um Universo com a densidade crítica contendo apenas CDM é menor do que a idade destes objetos), etc.

Embora considerando que a componente de energia escura é necessária e modifica a visão tradicional do Universo, a inexistência de um bom candidato oriundo, por exemplo, da física de partículas, tem provocado um intenso debate e estimulado muitas especulações teóricas. No momento, existem diversos candidatos na literatura, a lista abaixo não é exaustiva o suficiente para incluir todos os candidatos possíveis como se poderia pensar em um primeiro momento. Alguns candidatos são: a própria constante cosmológica (Λ) (hoje interpretada como a resultante das contribuições das densidades de energia dos vácuos associados com os vários campos quânticos); um termo $\Lambda(t)$ (ou densidade de energia do vácuo decaindo com o tempo) [11, 12, 14]; uma matéria-x (uma componente extra carac-

terizada por uma equação de estado $p = \omega_x \rho$, $1 \leq \omega_x \leq 0$) [15, 16]; um gás tipo Chaplygin cuja a equação de estado é dado por $p = -\frac{A}{\rho^\alpha}$, onde A é uma constante positiva e $0 \leq \alpha \leq 1$ [17]-[20]; uma matéria-x com equação de estado dinâmica, onde $\omega = \omega(z)$, etc. Assim, para melhorar nossa compreensão sobre a verdadeira natureza da energia escura, é importante encontrar novas técnicas ou reviver métodos antigos que possam quantificar direta ou indiretamente as consequências da energia escura no Universo, bem como determinar sua equação de estado efetiva.

Diante desta discussão, podemos dizer que a cosmologia moderna é usualmente estudada no contexto da TRG, teoria de gravitação formulada em uma geometria Riemanniana quadri-dimensional espaço-temporal. Assim, a cosmologia é freqüentemente associada à complexidade matemática inerente à geometria Riemanniana, isto é, álgebra tensorial, variedades diferenciáveis, grupos contínuos de simetria, etc.

Entretanto, Milne (1934)[21] e Milne & McCrea (1934) [22], 17 anos após o trabalho inicial da cosmologia relativística feito por Einstein, demonstraram que as equações cosmológicas de *background* (não-perturbadas) poderiam ser obtidas utilizando as noções de tempo absoluto, gravitação newtoniana, hidrodinâmica clássica e o espaço Euclidiano. O fenômeno da expansão universal, analisada por meio da *expansão do espaço* na cosmologia relativística, é substituído pelo movimento de um fluido auto-gravitante num espaço euclidiano e estático. Contudo, a formulação proposta por eles mostrou-se consistente apenas para universos preenchidos por um fluido sem pressão (poeira), ou, modernamente, preenchidos apenas por CDM. Esta dificuldade básica possui uma razão muito simples, diferentemente do que ocorre na TRG, uma pressão uniforme não desempenha qualquer papel dinâmico na hidrodinâmica clássica, uma vez que as equações básicas desta possui dependência apenas com o gradiente da pressão e não com seu valor absoluto.

Afim de obter os análogos para modelos com $p \neq 0$, McCrea (1951) [23] e Harrison (1965)[24] propuseram formulações semi-clássicas, incorporando alguns aspectos relativísticos (como, por exemplo, a relação massa-energia) dentro da descrição hidrodinâmica. Em outras palavras, os resultados básicos das duas teorias (Hidrodinâmica euleriana e Relatividade Geral) passaram a coincidir pelo menos para as soluções não perturbadas, ou seja, para o cenário expansionista básico.

Mais recentemente, a questão dos análogos clássicos foi rediscutida por Lima, Zanchin & Brandenberger (1997)[25]. Esses autores argumentaram que uma descrição neo-newtoniana mais consistente deveria reproduzir não apenas as equações de *background*, mas também as equações perturbadas, já que estas constituem a base do processo de formação de estruturas. É importante ressaltar, que embora as equações dinâmicas derivadas por McCrea (1951) e Harrison (1965) correspondessem as equações de Friedmann de background, paradoxalmente, as soluções das equações perturbadas correspondiam as soluções relativísticas apenas no caso $p = 0$. A raiz deste problema estava na nova equação de continuidade, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho + p/c^2)\vec{v}$, obtida por Harrison em 1965 com o objetivo de estender a descrição hidrodinâmica para modelos com $p \neq 0$. O termo contendo o gradiente de pressão gera termos extras quando as inomogeneidades são consideradas, levando a resultados que não concordam com a teoria relativística. Assim, a construção de análogos neoneutronianos descrevendo as equações perturbadas para um fluido com $p \neq 0$ foi possível através de uma nova equação de continuidade proposta por Lima, Zanchin & Brandenberger.

Em 1998, afim de contornar as dificuldades encontradas pela abordagem da hidrodinâmica para modelos do tipo FRW com $p \neq 0$, Lima, Moreira & Santos [26] propuseram uma descrição Lagrangeana clássica (tipo partícula) para modelos de fluidos simples do tipo FRW com equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$. Foi mostrado que o comportamento dinâmico do

fator de escala $a(t)$ nestes modelos era equivalente ao de uma partícula sob a ação de um potencial homogêneo unidimensional $V(q) = \alpha q^n$, onde α e n são constantes. As relações $n(\gamma)$ e $E(k)$, onde k é a curvatura e E a energia total da partícula teste, foram estabelecidas. Nesse contexto, a coordenada generalizada, $q(t)$, da partícula, desempenha o papel do fator de escala $a(t)$ e a equação de movimento, para cada valor da pressão (ou de γ), está associada com o índice \mathbf{n} presente no potencial. Modelos com constante cosmológica não-nula e modelos com viscosidade [27] também foram tratados. As descrições da cosmologia relativística e da Lagrangeana do tipo partícula foram comparadas com um certo detalhe.

O presente trabalho, tem por objetivo generalizar para o caso de mistura de fluidos o formalismo Lagrangeano clássico (análogo do fluido simples) proposto originalmente por Lima *et al.* em 1998. Dessa forma, poderemos discutir os análogos Lagrangeanos para modelos cosmológicos mais realistas, ou seja, contendo bárions, matéria escura, energia escura, ou mesmo, qualquer forma de interação entre essas componentes . O tratamento é estendido para diversos modelos de energia escura, incluindo: matéria-x, modelos com Λ -variável, o chamado gás de Chaplygin e, por completeza, obtemos a descrição para cosmologias do tipo FRW multidimensionais [28]. Discutimos, também, como o potencial da partícula teste pode ser reconstruído por meio das observações de SNe Ia e, por fim, comparamos nosso método com alguns trabalhos recentes da literatura que buscam uma descrição similar.

A organização geral do presente trabalho é apresentado a seguir.

No primeiro capítulo, fazemos um resumo do modelo cosmológico padrão, os fatos observacionais e teóricos que o consolidaram, as quantidades físicas e os resultados dinâmicos mais relevantes.

No segundo capítulo, é feito uma breve revisão do problema da matéria escura e da intrigante fase de expansão acelerada do Universo, bem como a descrição de alguns candidatos à *energia escura*, tais como: a matéria-X,

uma componente extra simplesmente caracterizada por uma equação de estado do tipo $p_x = \omega \rho_x$, onde $\omega < 0$; matéria-x com o parâmetro ω variável, ou seja, $p = \omega(z)\rho$; modelos com decaimento do vácuo, mais precisamente, o modelo de Chen & Wu generalizado [29] e Wang & Meng [30]; um gás do tipo Chaplygin, cuja equação de estado é dada por $p_C = -A/\rho_C^\alpha$, sendo A e α constantes positivas. Por completeza, também consideraremos modelos multidimensionais do tipo FRW (homogêneo e isotrópico).

O terceiro capítulo é dividido em duas partes: inicialmente, apresentamos as hipóteses básicas sobre as quais uma cosmologia Newtoniana, baseada na formulação da hidrodinâmica clássica, pode ser construída. Mostramos os principais resultados e as limitações desta abordagem. Em seguida, apresentamos a descrição Lagrangeana (tipo partícula) proposta por Lima *et al.* [26] em 1998 para modelos de fluido simples do tipo FRW.

No quarto capítulo, apresentamos os resultados originais desta dissertação [31, 32]. Mostramos como os análogos Lagrangeanos podem ser obtidos para modelos cosmológicos mais realistas, isto é, contendo bárions, energia escura, matéria escura, bem como qualquer forma de interação entre essas componentes. Abordamos, também, a descrição para modelos em D-dimensões espaciais. Por fim, reconstruímos o potencial da partícula através dos dados de distância-luminosidade de SnIa e comparamos nosso método com alguns recentes trabalhos presentes na literatura que também investigam uma descrição tipo partícula.

No apêndice A1, descrevemos como a equação do tipo FRW para um fluido simples com equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$ pode ser reduzida a equação do oscilador, tanto para o caso usual em 4 dimensões quanto em D-dimensões espaciais. Finalmente, no apêndice B, apresentamos os detalhes dos cálculos para a obtenção do potencial da partícula para os seguintes cenários cosmológicos: gás de Chaplygin, modelo de Chen-Wu generalizado, Modelo de Wang-Meng e os casos em D-dimensões espaciais.

O nosso contato com a literatura indica que a parte original deste trabalho se encontra no capítulo 4 e nos apêndicês A2 e B.

CAPÍTULO 1

O MODELO PADRÃO DA COSMOLOGIA

1.1 Introdução Geral

O nosso presente entendimento do Universo está baseado na teoria do Big Bang, cenário onde o Universo expande adiabaticamente de um estado inicial extremamente quente e denso. Esta teoria descreve a evolução do cosmos desde as suas primeiras frações de segundo¹ até nosso estágio presente, em torno de 13,7 bilhões de anos. Esta teoria repousa sobre quatro robustos pilares, um teórico, baseado na TRG que, como mostrado em 1922 por A. Friedmann[3] e em 1927 por Lemaître [4], permite soluções dinâmicas para o Universo, e três fatos observacionais: primeiro, a descoberta por Edwin Hubble [6] em 1929 da expansão universal, onde as galáxias se afastam de nós com velocidade proporcional a sua distância; segundo, a demonstração, na década de 60, de que os elementos leves (D,³He,⁴He e Li) teriam sido produzidos nos primeiros segundos após o Big Bang (nucleossíntese primordial) [8], quando o Universo era pouco mais quente que o núcleo do Sol e, terceiro, a descoberta acidental em 1965 por A. Penzias e Robert W. Wilson [9] da radiação cósmica de fundo em microondas (CMB), uma radiação de corpo negro isotrópica com temperatura de 3K. Hoje, todas estas observações são comprovadas com grande precisão

¹Mais precisamente após a **era Planck**, uma vez que antes desta fase a Teoria da Relatividade Geral é incapaz de descrevê-lo devido à necessidade de inclusão de efeitos quânticos. Esta fase ocorreu quando a idade do Universo era inferior a cerca de 10^{-43} segundos.

e tem ajudado a estabelecer a teoria do Big Bang como a preferida para o Universo.

Neste capítulo, nós introduzimos os conceitos e as equações básicas associadas a Teoria do Big Bang, definimos os principais parâmetros cosmológicos e suas correspondentes relações, fazemos uma breve retrospectiva dos pilares observacionais citados acima e, por fim, abordaremos, sem ater a detalhes, o cenário inflacionário.

1.2 A Teoria da Relatividade Geral

No início do século XX, diante das contradições existentes entre a teoria do eletromagnetismo e a mecânica newtoniana, Einstein formula a Teoria da Relatividade Especial (TRE) ou Restrita, na qual o espaço e o tempo deixam de ser intocáveis. O fato da velocidade da luz ser finita, ou ainda, o fato da informação não propagar-se instantaneamente como na Física Clássica, faz com que o nosso entendimento do espaço, e do tempo, mude radicalmente. Na Teoria da Relatividade Restrita, a existência, por si só, do espaço, deixa de ter significado, pois o espaço não pode existir sem o tempo e vice-versa. Na realidade espaço e tempo são conceitos (quantidades), de uma certa forma, equivalentes, pois a uma dilatação do espaço corresponde uma contração do tempo e a uma contração do espaço corresponde uma dilatação do tempo. Entretanto, na TRE ainda existe o "incômodo" fato de ser válida apenas em referências inerciais.

O espaço-tempo da Teoria da Relatividade Restrita é descrito pela Geometria quadridimensional Minkowskiana. Matematicamente, o vínculo entre as dimensões de espaço e tempo na TRE é descrito pelo elemento de linha de Minkowski:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.1)$$

Em 1915, estendendo o princípio de relatividade para referenciais em um campo gravitacional, Einstein publica sua teoria relativística da gravitação, a Teoria da Relatividade Geral (TRG), segundo a qual a geometria do espaço-tempo é distorcido pela presença de matéria-energia. Esta nova teoria destitui os referenciais inerciais de sua posição privilegiada a cerca do princípio de relatividade, pois, pelo Princípio de Equivalência (princípio base na formulação da TRG), sistemas acelerados e sistemas sob ação de um campo gravitacional são equivalentes. Para campos gravitacionais fracos e de lenta variação, tais como os interplanetários, a Gravitação Universal de Isaac Newton e a TRG concordam em seus resultados.

A geometria local da Relatividade Geral é curva e dinâmica, consistentemente com o movimento local da matéria-energia. A sua equação de campo é:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R é o escalar de curvatura de Ricci, G a constante Gravitacional, $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento dos campos materiais onde (1.2) se aplica e $8\pi G$ a constante de Einstein (ajustada no limite de campo fraco). A componente T^{00} é a densidade de energia do sistema, $T^{0i} = T^{i0}$ é a densidade do fluxo de energia e T^{ij} é o fluxo da densidade do i-momento na direção j[35].

A consagração desta teoria deu-se em 1919, com a observação, em Sobral, Ceará, e na Ilha do Príncipe, na costa da África, do extraordinário fenômeno do desvio gravitacional da luz², que permitiu a observação de uma estrela que se encontrava atrás do Sol durante um eclipse. Hoje, a teoria explica convincentemente várias outras observações e fenômenos, sendo muito bem testada no sistema solar, nas medidas do movimento radial de *Pulsares Binários*, via nucleossíntese primordial, constituindo o arcabouço teórico da cosmologia moderna.

²A Teoria Gravitacional newtoniana previa metade do desvio observado.

1.3 A Dinâmica Cosmológica

A equação de campo de Einstein na TRG (adicionada com o termo Λ) é [35]:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

Pela conservação do tensor de energia-momento, $T_{;\alpha}^{\alpha\beta} = 0$, e o fato de $G_{;\alpha}^{\alpha\beta} = 0$ temos que $\Lambda g_{\alpha\beta}$ é conservado no espaço-tempo.

A métrica mais geral que satisfaz a homogeneidade e a isotropia é a métrica de FRW [36]. Esta métrica é escrita em um particular sistema de referência, onde as coordenadas são "comóveis" com a expansão do fluido cósmico. Um observador em repouso neste referencial acompanha a expansão do Universo sem nenhum movimento peculiar e é chamado de observador comóvel. Isto não particulariza nossa descrição uma vez que a TRG permite escolher qualquer sistema de coordenadas.

A métrica FRW em coordenadas esféricas comóveis é:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2 \right] \quad (1.4)$$

esta expressão é caracterizada por duas quantidades, o fator de escala $a(t)$, que determina a distância física do Universo, e a constante k , que caracteriza a curvatura espacial do Universo, esta última podendo assumir os valores 0,-1 e 1, que são, respectivamente: Universo espacialmente euclidiano, hiperbólico e esférico. A coordenada temporal t é o tempo medido por relógios em repouso nas coordenadas comóveis.

A fonte de curvatura dos modelos cosmológicos é o fluido perfeito cujo o tensor de energia-momento $T_{\alpha\beta}$ é dado por:

$$T_{\alpha\beta} = \left(\sum_j \rho_j + \sum_j p_j \right) u_\alpha u_\beta - \sum_j p_j g_{\alpha\beta}, \quad (1.5)$$

onde ρ_j é a densidade de energia das componentes do fluido (radiação,

matéria, curvatura, energia escura, constante cosmológica, etc), p_j é a pressão escalar dessas componentes medidas no referencial comóvel ($u_\alpha = \delta_\alpha^0$) e u^α é a quadri-velocidade comóvel, que satisfaz o vínculo $u^\alpha u_\alpha = 1$. Como é assumido isotropia e homogeneidade, essas grandezas só podem depender do tempo.

Para um observador comóvel, as componentes tempo-tempo e espaço-espaço da equação (1.8)³ nos fornece as seguintes equações (equações de Friedmann), respectivamente:

$$8\pi G\left(\sum_i \rho_i + \frac{\Lambda}{8\pi G}\right) = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2} \quad (1.6)$$

e

$$8\pi G\left(\sum_i p_i - \frac{\Lambda}{8\pi G}\right) = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} \quad (1.7)$$

onde $\Lambda/(8\pi G)$ é a densidade de energia do vácuo, $-\Lambda/(8\pi G)$ é a pressão do vácuo e os termos ρ_i e p_i são as densidades e as pressões, respectivamente, das outras componentes que preenchem o Universo. Combinando (1.6) e (1.7) e considerando fluidos não interagentes é possível mostrar que eles se conservam separadamente e a equação de conservação de energia é:

$$\dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_i + p_i) = 0 \quad (1.8)$$

multiplicando esta por a^3 , podemos obtê-la numa forma mais familiar,

$$\frac{d\rho_i a^3}{da} = -3p_i a^2$$

que expressa a Segunda Lei da Termodinâmica $d(U) + pdV = TdS$, com $U = \rho V$ sendo a energia total do fluido. Como o volume V é proporcional a a^3 e a variação do volume dV é proporcional a $3a^2$, concluímos então que $TdS = 0$. Assim, o fluido não troca energia, garantindo que a expansão (ou contração) ocorra adiabaticamente.

³As componentes tipo tempo-espaço nos fornecem 0=0.

Os fluidos mais relevantes para a cosmologia são os barotrópicos, isto é, fluidos cuja a pressão é linear com a densidade, $p = \omega\rho$ e, assim, a velocidade do som é constante nestes fluidos. A equação (1.8) toma, então, a seguinte forma:

$$\dot{\rho} + 3H(t)\rho(1 + \omega) = 0 \quad (1.9)$$

onde, por exemplo, $\omega = 0$ e $1/3$ para poeira e radiação, respectivamente, enquanto que $\omega < 0$ para uma energia escura e $\omega = -1$ para descrevermos um puro vácuo. O primeiro termo $\dot{\rho}$ nos diz quão rápido a densidade muda e o segundo termo é a perda da energia cinética do fluido devido a diluição da matéria com a expansão e ao trabalho realizado pelos elementos de volume do fluido ($p \neq 0$). Da equação (1.8) é direto a obtenção de⁴:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\omega)} \quad (1.10)$$

de forma que a radiação, a matéria, a curvatura espacial, a constante cosmológica e um fluido desconhecido com uma equação de estado arbitrária ω_x evoluem com o fator de escala das seguintes formas: $\rho_r \propto a^{-4}$, $\rho_M \propto a^{-3}$, $\rho_k \propto a^{-2}$, $\rho_\Lambda \propto a^0$ e $\rho_x \propto a^{-3(1+\omega_x)}$.

A equação (1.6) pode ser reescrita em uma outra forma:

$$H(t)^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_r + \frac{8\pi G}{3}\rho_M + \frac{8\pi G}{3}\rho_x - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.11)$$

⁴Assumindo ω constante.

A evolução do quadrado do parâmetro de Hubble com o fator de escala pode ser visto segundo a figura abaixo⁵:

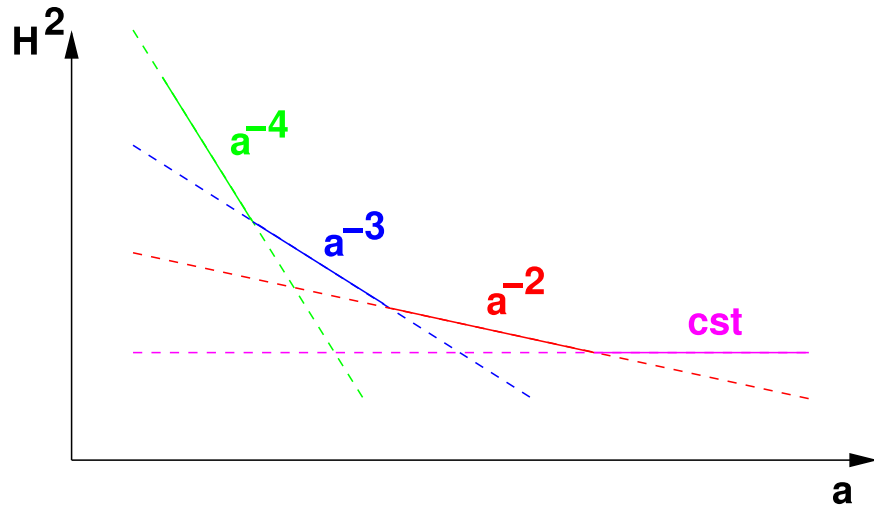


Figura 1.1: Evolução do quadrado do parâmetro de Hubble, no qual todas as componentes típicas (radiação, matéria, curvatura e constante cosmológica) dominam uma após a outra.

A seguir, temos a evolução do fator de escala com o tempo para alguns modelos do tipo FRW:

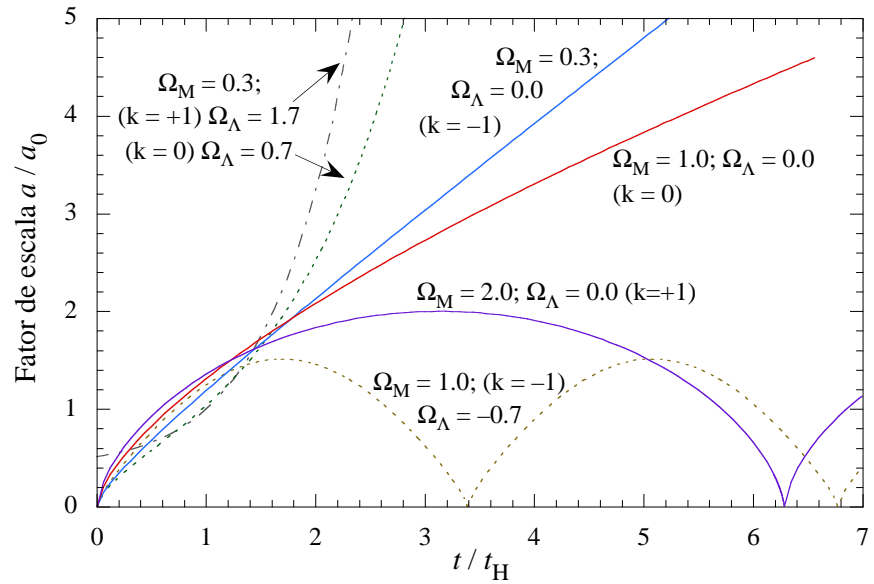


Figura 1.2: Evolução do fator de escala para alguns modelos do tipo FRW.

⁵Desconsiderando a componente x.

É usualmente definido um parâmetro adimensional de densidade total em termos da densidade crítica. Este termo é $\Omega_{tot} \equiv \frac{\rho_{tot}}{\rho_c} = \frac{8\pi G \rho_{tot}}{3H(t)^2}$. Com este novo parâmetro, a equação (1.6) torna-se:

$$\Omega_{tot} - 1 = \frac{k}{a^2 H(t)^2} \quad \text{assim} \quad \begin{cases} k=0 & \Omega_{tot} = 1 & \text{Universo Euclidiano} \\ k=-1 & \Omega_{tot} < 1 & \text{Universo Hiperbólico} \\ k=1 & \Omega_{tot} > 1 & \text{Universo Esférico} \end{cases} \quad (1.12)$$

No ano de 2000, dois estudos realizados na CMB, o BOOMERanG e MAXIMA, obtiveram que a geometria do Universo era muito perto de plana[37, 38]. Os resultados do BOOMERanG em 2001 deram $\Omega_{tot} = 1,02_{-0,05}^{+0,05}$. Os três anos de resultados do satélite WMAP mais o limite imposto sobre H_0 pelo HST Key Project forneceram $\Omega_k = -0.010_{-0.009}^{+0.016}$ [53].

Da equação (1.6) vemos ainda que a soma de todos os parâmetros adimensionais é igual a unidade:

$$\Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_k + \Omega_x = 1$$

onde: $\Omega_R = \frac{8\pi G \rho_{0R}}{3H_0^2}$, $\Omega_M = \frac{8\pi G \rho_{0M}}{3H_0^2}$, $\Omega_k = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}$, $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}$ e $\Omega_x = \frac{8\pi G \rho_{0x}}{3H_0^2}$.

Ao combinarmos (1.6) e (1.7), obtemos a seguinte equação de aceleração:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3} \rho(1 + 3\omega) + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.13)$$

esta equação não contém o termo de curvatura k e, assim, nós podemos usá-la sem o conhecimento da geometria do Universo. Para um Universo dominado por uma componente com $\omega < \frac{-1}{3}$ (energia escura) com $p < \frac{-\rho}{3}$ temos \ddot{a} positivo e o Universo acelera, isto também ocorre no caso de uma constante cosmológica suficientemente positiva. Recentes observações de Supernovas tipo IA (SNe Ia)⁶ sugerem fortemente que o Universo encontra-se em um estado presente de aceleração [10].

⁶Exploraremos este fato no próximo capítulo.

O último parâmetro a ser definido é o parâmetro de desaceleração $q(t)$:

$$q_0 = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}(t_0) = \frac{4\pi G}{3H_0^2}[\rho_{tot}(t_0) + 3p(t_0)] \quad (1.14)$$

definido de maneira que é positivo para CDM e radiação, expressando o fato do Universo expandir desaceleradamente se dominado por uma destas componentes. No caso do domínio de uma energia escura com $\omega < -1/3$ ou de uma constante cosmológica, o Universo acelera. Pelas definições do parâmetro de densidade:

$$q_0 = \Omega_R + \frac{1}{2}\Omega_M - \Omega_\Lambda + \frac{1}{2}\sum_x(1 + 3\omega_x)\Omega_x. \quad (1.15)$$

para $q_0 = 0$, $q_0 > 0$ e $q_0 < 0$ as taxas de expansão são uniforme, desacelerada e acelerada, respectivamente.

Com relação a evolução da temperatura, a expansão do Universo afeta a lei de temperatura de um fluido do tipo $p = \omega\rho$ da seguinte forma [15]:

$$T_i = T_{0i} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\omega} \quad (1.16)$$

No caso de radiação, ($\omega = 1/3$), a expansão do Universo não altera o caráter planckiano do espectro [39]. De fato, como observado pelos experimentos na CMB, a radiação de $3K$ é o melhor corpo negro encontrado na natureza. A expansão adiabática diminui a temperatura desta segundo a lei de escala $T \propto a^{-1}$.

Assim, concluímos que a evolução de um Universo que obedece (1.6) e (1.7) pode ser descrito inteiramente em termos dos principais parâmetros, chamados *parâmetros cosmológicos*: $\Omega_R, \Omega_M, \Omega_\Lambda, \Omega_k, \Omega_x, H_0, q_0$. O Principal objetivo da cosmologia observacional é medir os valores deste parâmetros a partir das observações da luminosidade e diâmetros angulares de objetos distantes, idade do Universo, contagem de fontes, etc.

1.4 A Nucleossíntese Primordial (NP)

A tabela abaixo nos fornece uma breve história térmica do Universo:

Evento	Idade	z	T(K)	kT
Hoje	$(0.6 - 1, 0)9, 8 \times 10^9 h^{-1}$ anos	0	2,728	$\approx 10^{-4}$ eV
Reionização	$(20 - 300) \times 10^6 h^{-1}$ anos	10-50	30-150	$\approx 10^{-3}$ eV
Desacoplamento dos fótons	$1, 8 \times 10^5 (\Omega_M h^2)^{-1/2}$ a	1100	3000	0,26 eV
Recombinação	$1, 4 \times 10^5 (\Omega_M h^2)^{-1/2}$ anos	14000	3800	0,33 eV
Equipartição Mat.-Rad.	$1800 (\Omega_M h^{3/2})^{-2}$ anos	$2, 3 \times 10^4 \Omega_M h^2$	6200	5,4 eV
Nucleossíntese	1-500 s	$10^8 - 10^9$	$10^8 - 10^9$	1-0,1 eV
Aniquilação de e^+				
Desacoplamento dos neutrinos	1s	4×10^9	10^{10}	1 MeV
Transição quark-hádron	5×10^{-6} s	4×10^{12}	10^{13}	1 GeV
Unificação eletro-frac				
Bariogênese	5×10^{-10} s	4×10^{14}	10^{15}	100 GeV
GUT/Inflação	5×10^{-33} s	4×10^{26}	10^{13}	10^{14} GeV
Época de Planck				
Desacopl. dos grávitons	5×10^{-43} s	10^{32}	3×10^{32}	2×10^{19} GeV

De acordo com o cenário padrão os estágios iniciais são: era de Planck⁷ ($t \sim 10^{-43}$ s); era de Compton ($10^{-43} < t < 10^{-23}$ s); era dos Hádrons ($10^{-35} < t < 10^{-6}$ s). Depois dos primeiros estágios, o Universo entra numa série de períodos que caracterizam vários processos mais bem compreendidos. O primeiro deles é a Nucleossíntese ($t = 1 - 100$ s, $T \sim 10^9 - 10^{10}$ K), época de formação dos elementos mais leves ($D, {}^3\text{He}, {}^4\text{He}$ e Li). Logo após temos o equilíbrio entre radiação e matéria ($t \sim 10^4$ anos, $T \sim 10^4$ K), a densidade de radiação é igual a da matéria, mas os bárions permanecem em equilíbrio com a radiação. Na era da matéria houve a recombinação dos átomos ($t \sim 10^6$ anos, $T \sim 1500$ K) que causou o desacoplamento dos fótons. Por fim, temos a época de formação onde ocorre as ampliações das pequenas inhomogeneidades da matéria, permitindo a formação

⁷Convenciona-se a origem do tempo por extrapolação do fator de escala $R(t=0) = 0$.

de estrelas, galáxias e as outras estruturas ($t \sim 10^7 - 10^9$ anos).

Hoje sabe-se que a composição química do Universo consiste principalmente de hidrogênio e hélio, com quantidades muito pequenas de todos os outros elementos químicos conhecidos. Se "pesarmos" todos os bárions existentes no Universo, cerca de 75% são hidrogênio, 24% hélio (${}^4\text{He}$) e 1% corresponde a todo o resto⁸. É interessante comparar este resultado com a abundância de ${}^4\text{He}$ produzida apenas por *nucleossíntese estelar*. Podemos estimar isso da seguinte forma: uma cadeia de reações nucleares que dão origem ao ${}^4\text{He}$ produz uma certa energia ΔE dada por⁹

$$\Delta E = c^2(4M_p - M_{\text{He}}) = c^2 4M_p \eta, \quad \text{onde } \eta = \frac{4M_p - M_{\text{He}}}{4M_p} \quad (1.17)$$

η é a eficiência da reação nuclear $\eta \approx 0.007$. Vamos calcular a fração em massa de ${}^4\text{He}$ produzida por uma estrela como o Sol. O número N de reações de formação de ${}^4\text{He}$ em uma estrela como o sol de luminosidade (energia emitida por unidade de tempo) L_\odot em um intervalo de tempo Δt é $N = \frac{\Delta t L_\odot}{\Delta E}$. A massa total de hélio formada é $M_{\text{totHe}} = N M_{\text{He}}$. Assim, a fração em massa de Hélio produzida durante Δt é:

$$f = \frac{N M_{\text{He}}}{M_\odot} = \Delta t \frac{1 - \eta}{\eta} \frac{L_\odot}{c^2 M_\odot}$$

Tomando $\Delta t = 10^{10}$ anos, obtemos $f \approx 10\%$. Isto é um limite superior, pois em todas as estrelas com massa menor que $M \approx 9M_\odot$ o hélio termina no cadáver da estrela, não sendo passado de volta ao meio interestelar. Assim, isto significa que a abundância observada de ${}^4\text{He}$, da ordem de 24%, é mais de duas vezes ao que pode ser sintetizado pelas estrelas. O acordo entre a nucleossíntese primordial e as observações é um dos maiores argumentos a favor da teoria do Big Bang.

Durante o final da década de 40 e início de 50, Gamow e seus alunos criaram as bases do *Big Bang*. Eles exploraram as origens dos elementos em

⁸Peebles em 1966 [40] foi o primeiro a calcular as abundâncias de ${}^3\text{He}$ e ${}^4\text{He}$

⁹Para estes cálculos explicitaremos c.

reações nucleares em um Universo em expansão [8]. Foi um dos maiores sucessos da cosmologia moderna. Na teoria do Big Bang, a síntese de elementos leves $H, {}^4He, D, {}^3He, {}^7Li$ depende apenas de dois parâmetros livres: a densidade de bárions ρ_B , ou equivalentemente, $\Omega_B h^2$; e a densidade de radiação ρ_R ¹⁰, ou equivalentemente, $\Omega_R h^2$. De forma que é definido o parâmetro $\eta = \frac{n_B}{n_R} \approx 2,74 \cdot 10^{-8} \left(\frac{T}{2,73K}\right)^{-3} \Omega_B h^2$.

A figura (1.3) nos mostra a abundância dos elementos leves devido à nucleossíntese primordial em função da densidade de bárions no Universo (expresso pelo fator η ou $\Omega_B h^2$) e as abundâncias empíricas (retângulos). A área hachurada corresponde ao valor de $\Omega_B h^2 = 0.0224 \pm 0.0010$ como fornecido pela estimativa combinada das medidas dos detectores WMAP, ACBAR e CBI utilizando a CMB [41].

É interessante notar que para cada valor de $\Omega_B h^2$ e de η , a teoria prediz uma diferente abundância de hidrogênio, hélio, lítio, etc. Assim, observando a abundância desses elementos em regiões pobres em metais, onde os efeitos da nucleossíntese estelar (destruição de deutério e 7Li , síntese de 4He) são minimizados, é possível estimar a densidade de bárions originadas da nucleossíntese. Observações atuais nos levam a $\Omega_B h^2 = 0.021 \pm 0.005$. Compátivel com o valor obtido de forma independente via CMB.

¹⁰A densidade de radiação é bem conhecida via radiação cósmica de fundo (CMB).

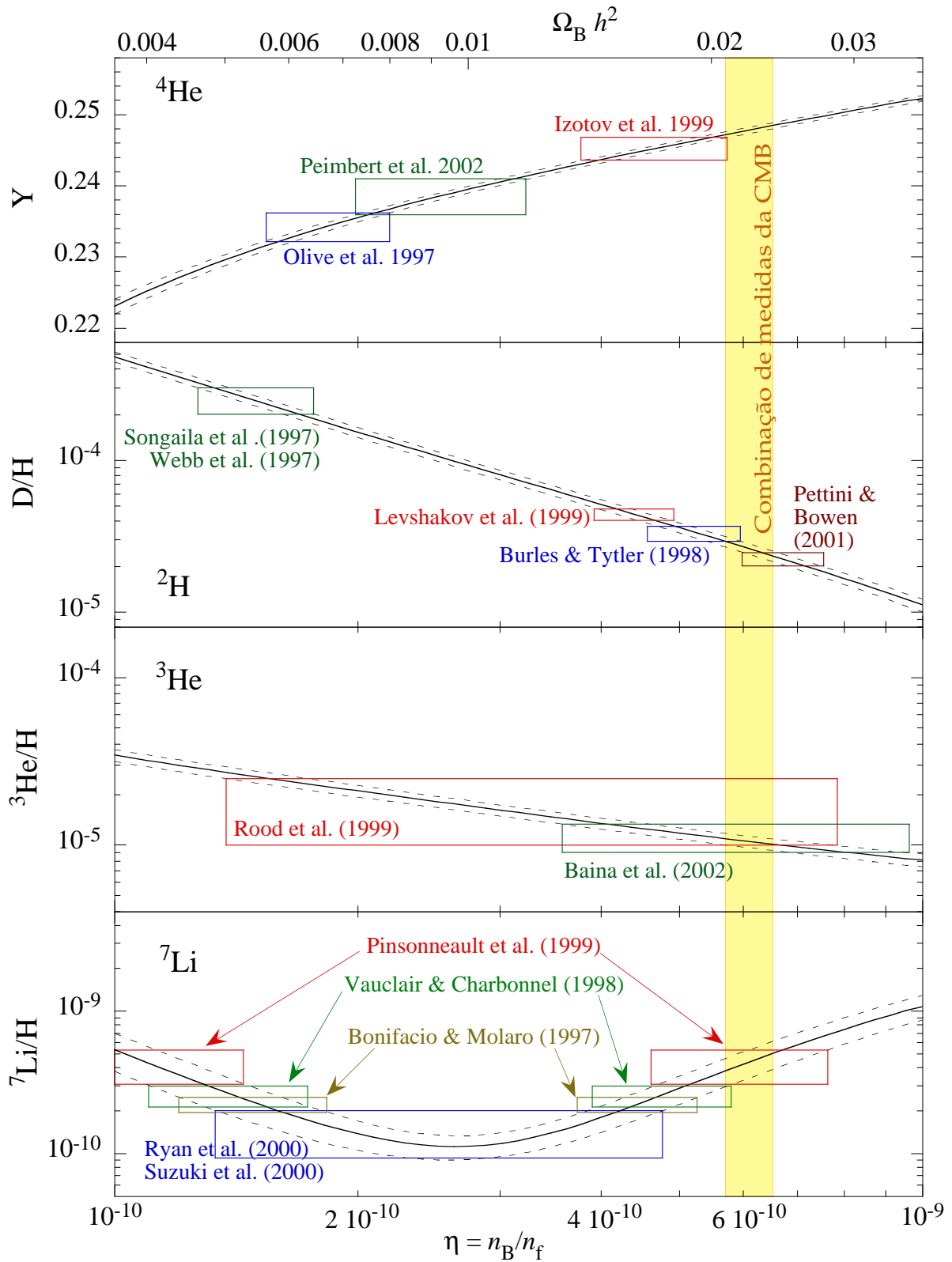


Figura 1.3: As linhas tracejadas indicam a incerteza do modelo na abundância de cada elemento. As observações atuais se encontram nos retângulos para cada elemento.

1.5 A Radiação Cósmica de Fundo (CMB)

Na teoria do Big Bang, o Universo inicial era composto de um plasma quente de fótons, elétrons e bárions. Os fótons interagiam constantemente com o plasma através do Efeito Compton, pois, para $T \geq 4000\text{K}$, os fótons da CMB tinham energia acima da necessária para ionizar a matéria, fazendo com que a mesma seguisse sua lei de temperatura dada pela equação (1.16), com $\omega = 1/3$. Uma das consequências disto é que a formação de estruturas bariônicas não pôde acontecer enquanto ocorreu este acoplamento fóton-elétron-próton. Este fenômeno é conhecido como amortecimento de Silk [42]. À medida que o Universo se expandia, o desvio para o vermelho cosmológico fazia com que o plasma esfriasse até que fosse possível aos elétrons combinarem-se com os núcleos atômicos de hidrogênio e hélio para formarem átomos. Isso aconteceu por volta de 3000 K, ou quando o Universo tinha aproximadamente 380 000 anos de idade ($z \approx 1088$). Nesse momento, os fótons puderam começar a viajar livremente pelo espaço¹¹ conservando seu espectro planckiano, uma vez que o único efeito da expansão é diminuir a sua temperatura. Esse processo é chamado "recombinação" e a CMB traz consigo as impressões de como era o Universo naquela época. O período da recombinação compreende a largura da última superfície de espalhamento (quando os fótons interagiram pela última vez com os bárions) para os fótons da CMB. A CMB é a *pedra da Roseta* para a cosmologia, pois permitiu montar a história cósmica dos últimos bilhões de anos relacionando tempo com temperatura.

A radiação cósmica de fundo foi predita primeiramente por George Gamov, Ralph Alpher e Robert Herman em 1948 [8]. Além disso, Alpher e Herman foram capazes de estimar a temperatura da radiação cósmica de

¹¹Sabemos que, a formação complexa de estruturas - estrelas, galáxias, e estrutura de grande escala - no Universo não afeta a CMB. Contudo, as forças de atração gravitacional e a pressão da radiação induzem **oscilações acústicas adiabáticas** no fluido fóton-bárion.

fundo como sendo de 5 K, entretanto, os resultados de Gamov não foram amplamente discutidos. Na década de 60, Peebles, Dicke, Roll e Wilkinson [40] estudaram o problema novamente. Antes que eles pudessem medir a CMB, dois engenheiros da *Bell Telephone Laboratories*, Arno A. Penzias e Robert W. Wilson [9], detectaram um sinal isotrópico no comprimento das ondas de rádio (7,5 cm), correspondendo a uma temperatura de corpo negro de $T = 3,5 \pm 1$ K. De forma inesperada eles tinham detectado a radiação cósmica de fundo predita por Gamov, Alpher e Herman. Penzias e Wilson receberam o Prêmio Nobel de Física de 1978 pela descoberta.

Se o Universo começou realmente de um estado altamente denso, homogêneo e isotrópico, a previsão mais simples de tal modelo é que a temperatura desta radiação de corpo negro sempre foi espacialmente uniforme e mais alta no passado. Para redshifts superiores, a temperatura da CMB deve ser superior a $T(z = 0)$ (1.16). Bahcall & Wolf (1968) [44] sugeriram que a temperatura da radiação cósmica no passado poderia ser medida através das linhas de excitação atômicas hiperfinas produzidas em nuvens a alto redshift. De fato, Levshakov et al. [46] mediram $T = 12,2_{-3,2}^{+1,7}$ K em $z = 3,025$ na direção do QSO 0347-3819, compatível com o valor esperado de $T = 10,968 \pm 0,004$ K. Hoje, a temperatura desta radiação tem medidas muito precisas obtidas nos experimentos do COBE (*Cosmic Background Explorer*) sendo $T_{COBE} = 2.728 \pm 0.002$ K [45].

A CMB apresenta dipolos devido ao efeito Doppler decorrente do movimento da Terra em relação as coordenadas comóveis, este dipolo foi observado pela primeira vez em 1977 [47]. Uma vez subtraída a contribuição do dipolo cinemático, a radiação cósmica de fundo apresenta ainda flutuações (anisotropias) da ordem de 10^{-5} K, estas anisotropias foram detectadas pela primeira vez pelo satélite COBE em 1992 [48] e desempenham um papel crucial no entendimento do processo de crescimento de estruturas¹².

Inspiradas pelos resultados obtidos pelo COBE, uma série de ex-

¹²Estas anisotropias foram previstas por Harrison, Peebles e Yu, e Zel'dovich [49]. As marcas que estas anisotropias teriam na CMB foram calculados por Rashid Sunyaev [50].

periências de solo e baseadas em balões mediram as anisotropias da radiação cósmica de fundo em escalas angulares inferiores ao do COBE no decorrer da década de noventa. O objetivo principal dessas experiências era medir a escala do primeiro pico acústico, que o COBE não tinha resolução suficiente para resolver. O primeiro pico na anisotropia foi detectado pelos experimentos BOOMERanG e MAXIMA [51]. A dinâmica precisa das oscilações acústicas antes da recombinação depende de quase todos os parâmetros cosmológicos, de maneira que o espectro de anisotropias da CMB é utilizado para pôr limites nestes parâmetros. Um exemplo é a densidade de bárions, ou $\Omega_B h^2$, que está relacionado com a amplitude relativa dos picos acústicos.

No começo de 2003, o satélite da NASA *Wmap* obteve dados com precisão 30 vezes superior aos do COBE, medindo as escalas dos primeiros picos acústicos com enorme precisão. Os recentes dados do *Wmap* [52] nos fornecem: $\Omega_B h^2 = 0.0223_{-0.0009}^{+0.0007}$, perfeitamente compatível com a predição da nucleossíntese. A posição do primeiro pico acústico nos fornece informação sobre o raio de Hubble na época da recombinação, que é o tamanho da última superfície de espalhamento. Pelo uso de uma relação de distância (distância-*redshift* de diâmetro angular) é possível colher informações sobre a curvatura e a evolução do fator de escala $a(t)$. O resultado combinado dos três anos de dados do *Wmap* mais o limite do HST Key Project sobre o valor de H_0 nos fornecem um valor de $\Omega_K = -0.010_{-0.009}^{-0.016}$ [52].

Em 2007 o satélite europeu *PLANCK* deverá ser lançado com resolução espacial melhor e maior sensibilidade na temperatura. Informações ainda mais precisas serão obtidas nesta missão.

1.6 O experimento *Wmap*

Como citado anteriormente, a CMB foi observada primeiro em 1965 por Arno Penzias e Robert Wilson nos Laboratórios da *Bell Telephone* em Nova Jersey. As propriedades da radiação contêm uma larga quantidade de informação sobre as condições físicas do Universo primordial e muito esforço tem sido feito para extrair estas informações. Esta radiação é notavelmente isotrópica tendo a mesma temperatura em todas as direções no céu.

Em 1992, o satélite *Cosmic Background Explorer* (COBE) descobriu flutuações minúsculas, ou anisotropias, na CMB. Por exemplo, achou uma parte do céu com uma temperatura de 2.7251 K, enquanto outra parte do céu com uma temperatura de 2.7249 K. Estas flutuações estão relacionadas com as flutuações na densidade de matéria no Universo primordial e, assim, carregam informações sobre as condições iniciais para a formação de estruturas cósmicas. O satélite COBE teve uma resolução angular de 7 graus no céu, 14 vezes maior que o tamanho aparente da Lua. Isto tornou o COBE sensível apenas para grandes flutuações.

Em junho de 2001, o satélite *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (Wmap) foi lançado e desde então realiza medidas mais sensíveis e de maior precisão que o satélite COBE, tendo feito, nos últimos anos, um mapa das flutuações de temperatura da radiação da CMB com uma resolução sem precedentes[41, 53]. Nas figuras abaixo mostramos os valores de alguns parâmetros cosmológicos vinculados pelos dados do Wmap e por cruzar estes dados com outros experimentos astronômicos.

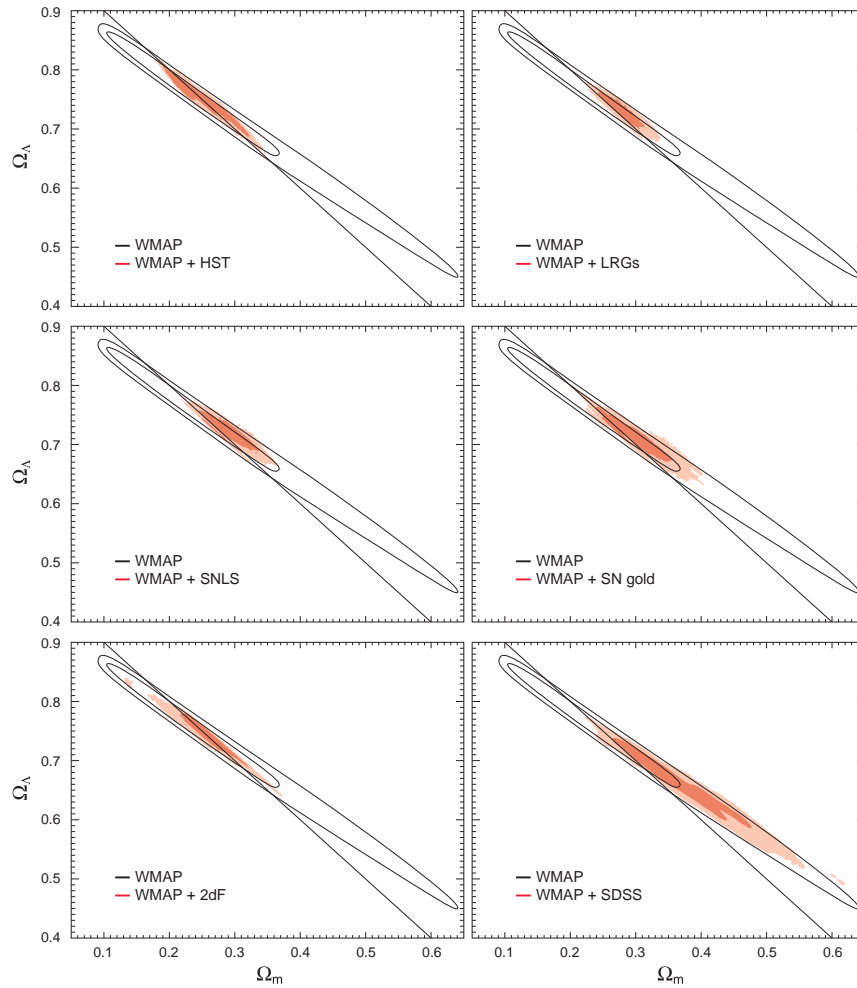


Figura 1.4: A reta na figura corresponde aos valores nos quais $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. As análises correspondem aos dados do *Wmap* (contorno preto) e *Wmap* + outros conjuntos de dados (vermelho). Nestes contornos não são assumidos a priori $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. Os dados apenas do *Wmap* favorecem cosmologias com $\Omega_m = 0.415$ e $\Omega_\Lambda = 0.630$, ou seja, Umiverso não plano, entretanto, quando cruzados com os outros conjunto de dados há um favorecimento para o Universo plano.

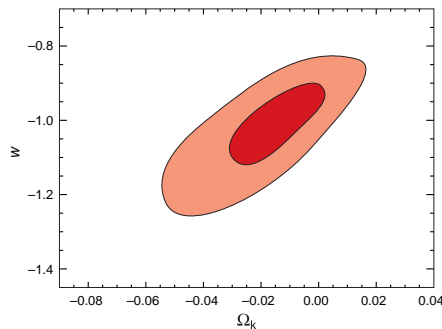


Figura 1.5: Limites sobre o parâmetro ω da equação de estado da energia escura e de Ω_k baseado na junção dos conjuntos de dados da CMB+2dFGRS+SDSS+SNe Ia. Aqui é assumido ω independente do tempo e nenhuma suposição é tomada a priori com respeito a curvatura. Os contornos mostram os níveis de confiança de 68% e 95%, com $\omega = -1.062^{+0.0128}_{-0.079}$ e $\Omega_k = -0.024^{+0.016}_{0.013}$ em 68%.

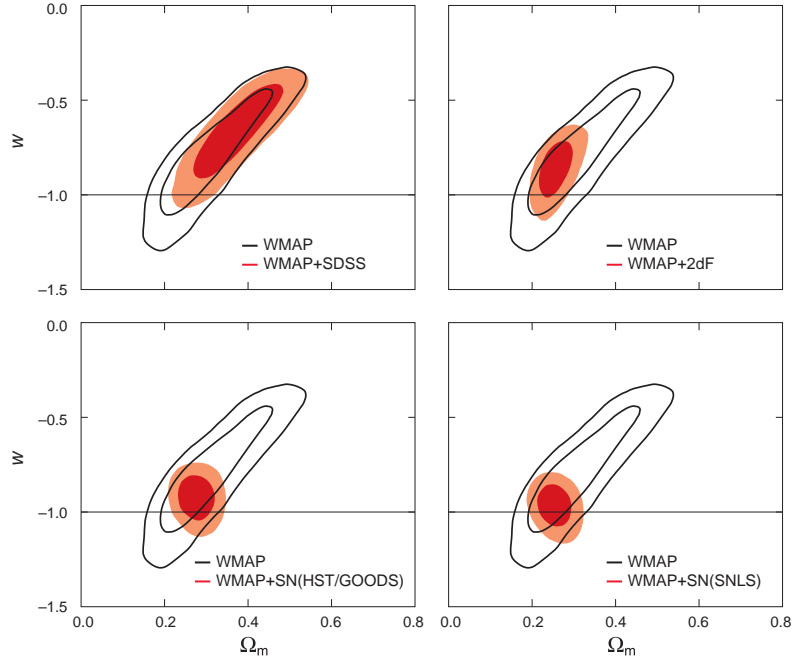


Figura 1.6: Limites sobre o parâmetro ω da equação de estado da energia escura, em um modelo de Universo plano baseado nas medidas do *Wmap* e de outros dados astronômicos. Aqui é assumido ω independente do tempo e as possíveis flutuações na pressão e na densidade da energia escura são ignoradas. Em todas figuras, o conjunto de dados do *Wmap* são mostrados em preto e a junção do *Wmap* + dados astronômicos estão em vermelho. Os contornos mostram os níveis de confiança de 68% e 95% para Ω_m e ω .

Na tabela abaixo temos os limites encontrados por cruzar os dados do *Wmap* com outros dados astronômicos. Aqui foi considerado a priori $\omega = -1$.

Tabela 1.1: Limites sobre a geometria e energia do vácuo

Data Set	Ω_K	Ω_Λ
WMAP + $h = 0.72 \pm 0.08$	$-0.003^{+0.013}_{-0.017}$	$0.758^{+0.035}_{-0.058}$
WMAP + SDSS	$-0.037^{+0.021}_{-0.015}$	$0.650^{+0.055}_{-0.048}$
WMAP + 2dFGRS	$-0.0057^{+0.0061}_{-0.0088}$	$0.739^{+0.026}_{-0.029}$
WMAP + SDSS LRG	$-0.010^{+0.011}_{-0.015}$	$0.728^{+0.020}_{-0.028}$
WMAP + SNLS	$-0.015^{+0.020}_{-0.016}$	$0.719^{+0.021}_{-0.029}$
WMAP + SNGold	$-0.017^{+0.022}_{-0.017}$	$0.703^{+0.030}_{-0.038}$

1.7 Formação de estruturas

Apesar da CMB indicar que o Universo no passado foi extremamente homogêneo, nós sabemos que hoje ele está longe da homogeneidade: nós observamos galáxias, aglomerados e superaglomerados em largas escalas. Estas estruturas surgiram de inomogeneidades primordiais muito pequenas, originadas de perturbações da própria métrica [54], que cresceram com o tempo via instabilidade gravitacional. Estas perturbações deixaram anisotropias na CMB, as quais foram detectadas pela primeira vez pelo satélite COBE em 1992.

O estudo moderno da formação de estruturas é focado na evolução das perturbações de densidade da matéria escura fria (CDM) ($p = 0$), pois existem inúmeras observações que indicam uma quantidade bem maior desta do que a matéria luminosa ou bariônica (Ω_b) e é baseado na teoria linear de perturbações, ou seja, o contraste de densidade, $\delta(\vec{x}, a(t))$ é $\ll 1$, é decomposto em componentes de Fourier¹³ [40]:

$$\delta(a, \vec{x}) = \int d^3\vec{k} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \delta_k(a)$$

Isto é muito conveniente uma vez que na teoria linear de perturbações as componentes de Fourier individuais evoluem independentemente.

O fato da CDM não interagir com os fótons e ter pressão nula é crucial, uma vez que, ao invés de apenas oscilar como os bárions na era da radiação, poderá começar o colapso mesmo antes da igualdade matéria-radiação (equipartição) e alcançar a amplitude do contraste de densidade observado hoje. Devido a argumentos de causalidade, o colapso gravitacional apenas afeta os modos k (número de onda comóvel) que estão dentro do raio de Hubble. A amplificação das inomogeneidades da CDM é eficiente apenas após a época de equipartição, pois, se uma certa perturbação de

¹³O objetivo da teoria de perturbações cosmológicas não é dá o valor individual de cada $\delta(\vec{x}, a(t))$ em cada direção, mas apenas o espectro das perturbações em um dado tempo.

modo k entrar no horizonte antes da época de equipartição, $R_H < R_{Heq}$, seu colapso é evitado pela rápida taxa de expansão do Universo na era da radiação, $H(t) \propto 1/t$. Um número de onda k entra no horizonte quando $k = 1/R_H(a)$, na equipartição $k = 1/R_{Heq}(a)$.

Assim, o espectro de Fourier das perturbações da CDM tem uma escala característica correspondendo ao raio de Hubble na época de equipartição. Entretanto, a teoria linear de perturbações é válida apenas enquanto as perturbações são pequenas. Após esta época não é mais interessante o uso da decomposição em Fourier, uma vez que a evolução de cada modo no regime não-linear não é mais independente dos outros. Neste caso, são feitas simulações numéricas de colapso gravitacional, as chamadas simulações de N-corpos.

Uma consequência importante da teoria de perturbação cosmológica é que os primeiros modos a entrarem no regime não-linear são os maiores (comprimentos de ondas maiores), uma vez que entraram primeiro dentro do raio de Hubble, assim, as estruturas menores são as mais velhas. Este cenário de formação de estrutura é conhecido como: formação hierárquica de estruturas.

O espectro de potência apresenta um pico (chamado de "turnover") que corresponde à escala onde as flutuações de densidade começam a ser suprimidas. Esta escala é aproximadamente o tamanho do horizonte na era da equipartição. A dimensão comóvel do horizonte nesta época é cerca de $\frac{16}{\Omega_M h^2}$.

Medidas do espectro de potência, $P(k)$, são mostradas na Figura (1.7) em comparação com a previsão do modelo Λ CDM [55].

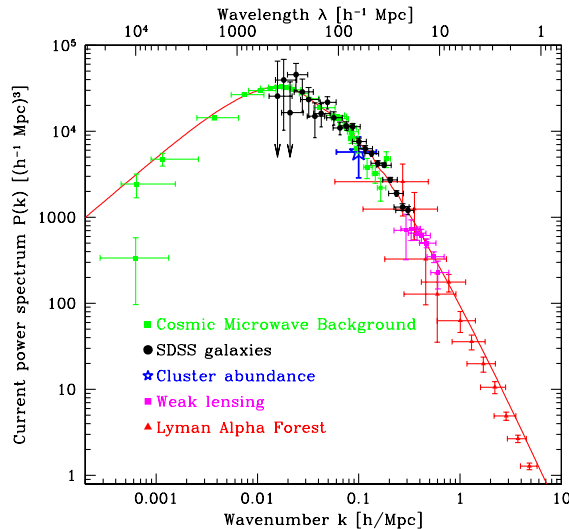


Figura 1.7: Espectro de potência das flutuações de densidade determinados a partir de diversas técnicas (note que cada uma é mais sensível para um certo intervalo de número de onda k). O traço contínuo representa um modelo com $\Lambda = 0,72$, $\Omega_M = 0,28$ e $h = 0,72$.

1.8 A Teoria da Inflação

A teoria do Big Bang é sustentada por várias observações independentes: a expansão do Universo, a abundância de elementos leves, a radiação cósmica de fundo e a formação de estruturas via colapso gravitacional de pequenas inhomogeneidades iniciais. Entretanto, na década de 70, foram apontados alguns problemas na teoria, muito dos quais são problemas de condições iniciais: o problema do horizonte, o problema da planaridade, a origem das flutuações e o problema dos monopólos.

Vejamos, inicialmente, o problema da planaridade: das equações de Friedmann é direto que $|\Omega_k(t)| = \frac{|k|}{\dot{a}(t)}$. Na época da radiação, por exemplo, o fator $\dot{a}(t)^{-1}$ cresce com $t^{2/3}$, de forma que se k é inicialmente zero, Ω_k permanecerá zero ao longo da evolução, mas, se $k \neq 0$, Ω_k crescerá com o tempo. Os dados recentes do WMAP [52] nos fornecem $\Omega_k(t_0) \ll 1$, ou seja, nenhum domínio significante da curvatura. Para ter este resultado tão pequeno, mas não nulo, do termo de curvatura, temos que ter $\Omega_k \leq 10^{-60}$

na era Planck. A teoria do Big Bang não fornece nenhuma explicação para este valor tão pequeno no Universo primordial.

Outro sério desafio à teoria é a extrema isotropia e homogeneidade da CMB. A temperatura deste fundo de radiação, medidas em direções angulares cuja separação mútua é maior que 2° , mostra que as diferenças locais são inferiores a cerca de $\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-5}$. O problema, no entanto, é que estas regiões não teriam condições de ter tido contato causal antes do desacoplamento. De acordo com a teoria, regiões causalmente conectadas na época do desacoplamento estariam separadas no máximo de 1° , de forma que na escala de 2° deveríamos observar um grau de flutuações muito superior aquele observado. Esse é o problema do Horizonte.

Outro problema que aflinge o cenário do Big Bang se relaciona com as origens das perturbações que resultaram na formação de galáxias e aglomerados que hoje observamos. Para justificar a presença de galáxias é preciso que na época do desacoplamento tenhamos perturbações de $\frac{\delta\rho}{\rho} \approx 10^{-3}$. Mas, é impossível que estas perturbações tenham surgido espontaneamente através de flutuações estatísticas aleatórias do meio, as quais teriam uma amplitude muito menor. Portanto, na teoria do Big Bang, não existe um mecanismo que explique o surgimento natural dessas perturbações.

O último problema que iremos discutir nesta seção é o problema dos monopólos. De acordo com as teorias de grande unificação, transições de fase ocorridas nos estágios iniciais de desenvolvimento do Universo produziram diversos tipos de partículas suficientemente estáveis para contribuir formidavelmente para a densidade de energia presentemente observada. Tomemos, por exemplo, os monopólos magnéticos que esperam ser extremamente estáveis e massivos (com massa da ordem de 10^{16}GeV). Sem algum mecanismo complementar ao modelo padrão que "dilua" a densidade de monopólos ao longo da expansão, teríamos que $\rho_0 \sim 10^{15}\rho_c$. Com tal densidade, é possível mostrar que o Universo teria recolapsado em, no máximo 30.000 anos depois do *Big Bang* [56, 57].

Diante destas dificuldades, o físico Alan Guth lançou no início dos anos 80 os primórdios da Teoria da inflação (a "velha inflação") [58], que seria revista por Andrei Linde [59], e, de maneira independente, por Andreas Albrecht e Paul Steinhardt (inflação "Slow-roll") [60]. Na teoria inflacionária, à temperaturas suficientemente altas ($\approx 10^{27}K$, $10^{-35}s$ após a singularidade inicial), a dinâmica do Universo é determinada por um campo escalar ϕ inspirado no campo de Higgs¹⁴, chamado de **inflaton**. De acordo com a teoria, nesta fase o Universo atravessa uma "fase de Sitter", onde a expansão é exponencial: $a(t) = e^{Ht}$, quanto maior t maior a fase inflacionária. Esta "super" expansão explica a homogeneidade e a planura observada hoje. As regiões separadas hoje por mais de 1^0 no céu estavam, na verdade, causamente conectadas antes da inflação, mas foram separadas pela rápida expansão cósmica. Esta mesma expansão exponencial tornou o raio de curvatura do Universo muito maior que nosso Universo observável, de forma que o vemos hoje muito perto de plano. As flutuações quânticas do campo escalar em uma região microscópica foram magnificadas tornando-se as sementes para o crescimento de estruturas. O problema da não observação dos monopólos, previstos pelas teorias de GUT, decorre do super resfriamento do Universo devido a esta forte expansão, ver [60, 59].

Entretanto, muito pouco se sabe deste campo, o Inflaton, sabe-se apenas que tem massa e um potencial de interação $V(\phi)$. Uma possível observação futura do campo de Higgs nos aceleradores de partículas afetará a idéia da inflação em um nível fundamental.

Com esta visão histórica geral do modelo padrão, seus sucessos e descrição cinemática, pretendemos estruturar conceitos, formar idéias e instigar o leitor as próximas discussões.

¹⁴Este campo ainda não foi detectado, mas há uma grande esperança por parte da comunidade científica que ele seja detectado nos futuros aceleradores de partículas. Ele é o suposto responsável pelas massas das partículas elementares (quarks e Léptons).

CAPÍTULO 2

O UNIVERSO ESCURO E A ACELERAÇÃO DO UNIVERSO

2.1 Introdução

Neste capítulo, será abordado o Universo escuro: a matéria escura e a energia escura, componente necessária, via TRG, para explicar a atual fase acelerada da expansão.

2.2 A Matéria Escura

A matéria escura é crucial para o modelo do Big Bang como uma componente que corresponda diretamente as medidas dos parâmetros associados com as equações de Friedmann (1.6) e (1.7). Desde décadas atrás até o presente, várias fontes de matéria foram adicionadas ao parâmetro Ω_M afim de obter a quantidade empírica, ou seja, $\Omega_M = \Omega_{b,Lum}(\text{estrelas, galáxias}) + \Omega_{b,Dark}(\text{MACHOs}) + \Omega_{CDM}(\text{Cold Dark Matter}) + \Omega_{HDM}(\text{Hot Dark Matter})$. Entretanto, a matéria escura quente (HDM: neutrinos massivos) não explica o padrão de galáxias observado no Universo, o chamado cenário hierárquico, as observações mostram que as estruturas se formaram de baixo para cima, isto é, galáxias primeiro, seguidas por aglomerados e superaglomerados, exatamente como previsto pelo modelo de matéria escura fria. Assim, a contribuição de neutrinos massivos (HDM) é limitada pelo cenário hierárquico,

sendo cerca de $\Omega_\nu = 0.5\%$ e a maior parte da matéria escura é fria, $\Omega_{CDM} = 30\%$.

A determinação empírica de Ω_M é feita de diversas maneiras: através do estudo da razão massa/luminosidade de diversos objetos, das curvas de rotação de galáxias, da estatística de micro lentes, da busca direta pelos objetos massivos compactos (MACHOs), da dispersão de velocidades de aglomerados com o uso do teorema do virial, da fração de bárions via raio-X do gás de aglomerados, da distribuição de matéria observada no Universo via espectro de potência, das anisotropias da radiação cósmica de fundo, etc. O valor médio encontrado é $\Omega_M = 0.25 \pm 0.07$ (95% c.l.) [61, 62].

O problema da matéria escura pode ser resumida no gráfico abaixo [61]

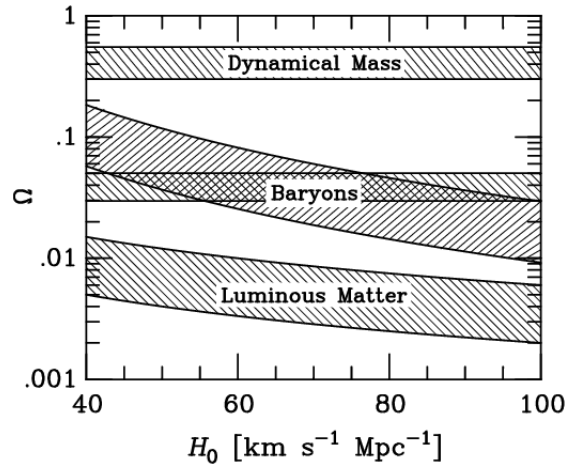


Figura 2.1: Fontes de matéria como função do parâmetro de Hubble. A matéria luminosa é dada por $0.002 \leq \Omega_{lum} \leq 0.006$; a banda horizontal é a componente do halo galáctico, $0.03 \leq \Omega_{halo} \leq 0.05$, cruzando com a componente bariônica dada pela NP, $\Omega_b = 0.0224 \pm 0.0024$; a faixa de cima é a componente dinâmica medida através da análise de estruturas em largas escalas $\Omega_M = 0.3 \pm 0.1$.

Da figura (2.1) é observado claramente três problemas da matéria escura: o primeiro, se refere a quantidade de bárions prevista pela nucleossíntese primordial (NP) que não é observada sob forma de matéria luminosa. A hipótese solucionadora é de que estes bárions estejam sob a forma de nuvens de hidrogênio que não começaram as reações termonucleares e estariam no halo das galáxias espirais. A segunda, se refere ao fato da massa bariônica prevista pela NP não corresponder a massa dinâmica. Este é o problema

padrão da matéria escura [63]. A detecção em laboratório de partículas massivas de fraca interação poderá resolver este problema. A terceira, vem das observações da CMB, onde temos que $\Omega_{tot} \approx 1$, de forma que o restante do conteúdo, aproximadamente 70 %, seria uma energia desconhecida que preenche todo o Universo e é responsável pelo seu atual estado de aceleração, uma vez que os dados independentes nos fornecem $\Omega_M \approx 0.3$. A atual fase de aceleração do Universo será o tema do próximo tópico.

2.3 A aceleração do Universo e a Energia Escura

Em 1998, alguns resultados baseados em SNe Ia publicados por dois grupos independentes [10] mudaram drasticamente a nossa visão do estado presente do Universo. O diagrama de Hubble-Sandage, que descreve o brilho observado destes objetos como função do redshift, mostrou uma conclusão surpreendente: a expansão do Universo está acelerando e não desacelerando como pensado durante décadas. A conexão entre as observações de SNe Ia em altos redshifts e os parâmetros cosmológicos é feita através da relação de distância-luminosidade para estes objetos. Esta distância é definida como a distância d_L na qual uma fonte de luminosidade absoluta L (energia por unidade de tempo) fornece um fluxo (energia por unidade de tempo e unidade de área medida no detector) igual a $F = \frac{L}{4\pi d_L^2}$. Em termos dos parâmetros cosmológicos e do red-shift a distância luminosidade é escrita como¹:

$$H_0 d_L(z) = \frac{(1+z)}{|\Omega_k|^{\frac{1}{2}}} \text{senn} \left[\int_0^z \frac{|\Omega_k|^{\frac{1}{2}} dz'}{\sqrt{(1+z')^2(1+z'\Omega_M) - z'(2+z')\Omega_\Lambda}} \right] \quad (2.1)$$

onde $\text{senn}(x) = x$ se $k = 0$; $\text{sen}(x)$ se $k = 1$ e $\text{senh}(x)$ se $k = -1$.

¹Para chegar a esta expressão é usado o fato de $\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$.

Freqüentemente, a luminosidade de um objeto distante é medida em termos da sua magnitude efetiva, definida como:

$$m(z) = M + \log_{10} \left[\frac{d_L(z)}{Mpc} \right] + 25 = M^- + 5 \log_{10} [H_0 d_L(z)] \quad (2.2)$$

No gráfico (2.2), temos o resultado do grupo *Supernova Cosmology Project* [64] onde as supernovas em altos redshifts aparecem mais fracas que o esperado para um Universo aberto ($\Omega_M < 1$) ou Einstein-de Sitter ($\Omega_M = 1$).

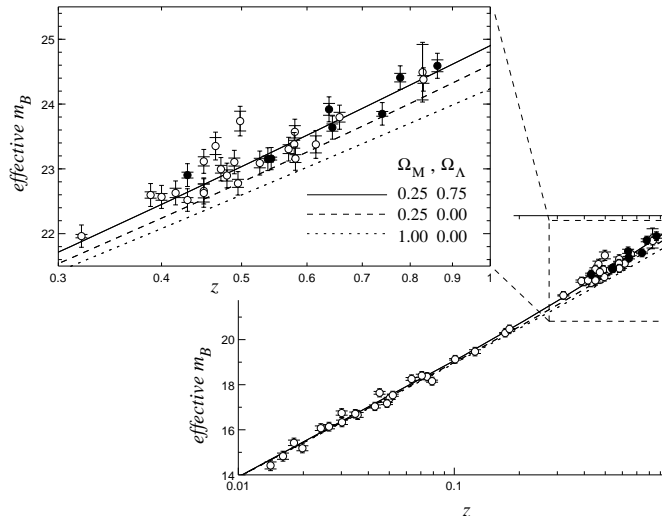


Figura 2.2: Diagrama de Hubble para diversas cosmologias.

Assim, temos que: (i) medidas precisas dos primeiros picos acústicos no espectro anisotrópico da CMB indicam que vivemos em um Universo espacialmente plano $\Omega_{tot} \approx 1$ [52], fato também previsto pela inflação [58, 60]; (ii) ao mesmo tempo, diferentes técnicas (Lentes gravitacionais fracas, Função de massa de aglomerados, Espectro de potência, Distância de diâmetro angular, etc) indicam uma quantidade de matéria da ordem de $\Omega_M \approx 0.3$; (iii) estimativas de idades de aglomerados globulares ou objetos em altos red-shifts fornecem um limite inferior para a idade do Universo de cerca de 13-14 bilhões de anos²; (iv) os dados de SNe Ia indicam que o Universo passa por um estágio de expansão acelerada.

²O modelo Einstein-de Sitter fornece uma idade para o Universo de aproximadamente 9 bilhões de anos.

Todos essas evidências indicam a existência de uma componente escura responsável por 70% do conteúdo de matéria-energia do Universo e pelo atual estado de aceleração do Universo.

Na figura (2.5) temos uma genealogia da energia escura[16]:

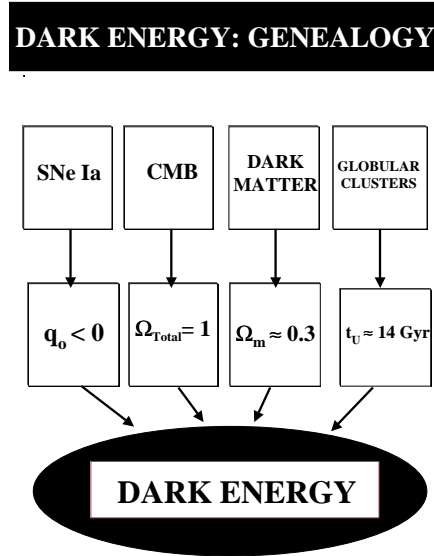


Figura 2.3: Genealogia: Energia Escura.

A seguir, discutiremos os principais candidatos a energia escura existentes na literatura (uma boa revisão pode ser encontrada em [16]), entre eles: a constante cosmológica (Λ), um termo $\Lambda(t)$, matéria-x (uma componente extra caracterizada por uma equação de estado $p = \omega_x \rho$, $-1 \leq \omega_x \leq 0$), um gás tipo Chaplygin cuja a equação de estado é dado por $p = -\frac{A}{\rho^\alpha}$ (A é uma constante positiva e $0 \leq \alpha \leq 1$) e, por último, uma componente extra com uma equação de estado onde $\omega = \omega(z)$. Discutiremos, também, modelos em D-dimensões espaciais.

2.3.1 A constante cosmológica

A constante cosmológica é a mais velha e mais natural candidata. É a forma mais simples do ponto de vista matemático. É uma componente escura espacialmente uniforme e independente do tempo.

Na Relatividade Restrita, todas as propriedades do vácuo e, portanto, as componentes do seu tensor de energia-momento, devem ser invariantes com respeito a transformações de Lorentz arbitrárias $L_{\mu}^{\mu'}$ (ver [65] ou Apêndice A de [57]). Desta maneira, $T^{\mu\nu} = T'^{\mu'\nu'} = L_{\alpha}^{\mu'} L_{\beta}^{\nu'} T^{\alpha\beta}$. É possível mostrar que tal propriedade determina univocamente as próprias componentes de $T^{\mu\nu}$ do vácuo. Todas as componentes são determinadas pela densidade de energia do vácuo $T^{00} = \langle \rho_V \rangle$. Um tensor invariante de Lorentz, assume a forma $T^{\mu\nu} = T^{00} \eta^{\mu\nu}$, onde $\eta^{\mu\nu}$ são as componentes do tensor de Minkowski. Finalmente, considerando o Princípio da Covariância Geral temos que $\eta^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu}$, portanto, em um sistema de coordenadas gerais,

$$T^{\mu\nu} = \langle \rho_V \rangle g^{\mu\nu} \quad . \quad (2.3)$$

Comparando esta equação com a expressão para o tensor de energia-momento do fluido perfeito (1.5), notamos que o vácuo tem uma equação de estado dada por $p_v = - \langle \rho_V \rangle$, a qual equivale a um espaço-tempo de de Sitter ³ com um termo cosmológico do tipo

$$\Lambda = 8\pi G \langle \rho_V \rangle \quad (2.4)$$

Do ponto de vista da teoria quântica de campos, a presença do termo Λ é devido a energia de ponto zero de todas as partículas e campos que

³Em 1917 W. de Sitter propôs um modelo de Universo onde o espaço é essencialmente dominado pelo vácuo e plano, com densidade de energia da matéria e pressão nulas ($k = p = \rho = 0$ e Λ positivo). Ele obteve as soluções:

$$R \propto \exp(Ht)$$

e

$$H = \left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2} \quad .$$

preenchem o Universo [66, 67] e se manifesta em vários fenômenos quânticos como o efeito Casimir [68] e o deslocamento das linhas do espectro do átomo de hidrogênio (Lamb Shift) [70]. Fisicamente, podemos dizer que isto ocorre devido às relações de incerteza, que obrigam estes campos a flutuarem em torno do valor zero, mesmo na ausência de partículas.

Formalmente, o vácuo de um campo quântico pode ser tratado como um conjunto de osciladores harmônicos quânticos independentes, cada um deles no estado fundamental, contribuindo com suas próprias oscilações de ponto zero. Neste estado, cada modo de vibração de um dado campo (com frequência ω) contribui com $\frac{1}{2}\hbar^2\omega$ para energia total. Isto significa que podemos definir um termo cosmológico efetivo resultante das contribuições das densidades de energia dos vácuos associados com os vários campos quânticos e, eventualmente, de uma constante cosmológica "gravitacional", como a introduzida por Einstein: $\Lambda_{ef} = 8\pi G \langle \rho \rangle + \Lambda$. Teoricamente, é possível calcular a soma das energias de ponto zero de todos os modos normais dos osciladores quânticos até um dado número de onda k limite. Em princípio $k \mapsto \infty$, de modo que a densidade de energia do vácuo diverge, para evitar este fato, usa-se o limite de energia em que é possível manter a confiança no formalismo da TRG, que é $k_{lim} = M_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 1.2209 \times 10^{19} \frac{GeV}{c^2}$. Portanto, temos que:

$$\rho_V^{th} = \sum_i \int_0^{M_{pl}} \frac{d^2k}{(2\pi^2)^3} \frac{1}{2} \hbar \omega_i(k) = \frac{\hbar M_{pl}^4}{16\pi^2} \sum_i (-1)^F N_i + O(m_i^2 M_{pl}^2) \quad (2.5)$$

assim, $\rho_V^{th} \approx 1.4 \times 10^{74} \text{GeV}^4$. O valor empírico é: $\rho_{V_{ef}}^{obs} \approx 0.7\rho_c \approx 2.9 \times 10^{-11} \text{eV}^4$. Este desencontro entre teoria e observação, cerca de 120 ordens de magnitudes, é o pior de toda a física [69]. Este problema é conhecido como **O problema da constante Cosmológica**. Não existe uma solução de primeiros princípios satisfatória para este problema, as mais interessantes tentativas envolvem Teorias de Supersimetria (SUSI),

Teoria de cordas, "whormholes", etc[70].

Diante disto, algumas tentativas fenomenológicas com o termo cosmológico variando com o tempo cósmico têm sido propostas na literatura. Outra alternativa é a inclusão de fluidos onde o parâmetro barotrópico ω seja função do redshif $\omega = \omega(z)$. A descrição destes trabalhos serão analisadas ainda neste capítulo.

2.3.2 Modelos com $\Lambda(t)$

Cosmologias $\Lambda(t)$ são definidas a partir de uma dependência fenomenológica (direta ou indireta) de Λ com o tempo, onde os parâmetros livres são limitados pelos testes cosmológicos. Historicamente, a primeira abordagem de um modelo cosmológico com um termo $\Lambda(t)$ ⁴ foi feita em um artigo de Bronstein [71] que, ao contrário da constante cosmológica proposta por Einstein, passou despercebida na literatura por várias décadas, não tendo, provavelmente, influenciado a linha de desenvolvimento iniciada por Ozer e Taha na década de oitenta[72].

Modelos com $\Lambda(t)$ ou modelos de decaimento do vácuo [72, 73, 74, 11, 12, 14, 75] são descritos em termos de uma mistura de dois fluidos: uma densidade de vácuo efetiva ($\Lambda(t)/8\pi G, p_V = -\rho_V$) mais uma componente do fluido ("os produtos do decaimento"), o qual é caracterizado por sua densidade de energia ρ e pressão p . Tais modelos implicam numa troca contínua de energia entre as duas componentes, e portanto, são dotados de criação de matéria e/ou radiação, às custas do decaimento da energia do vácuo. Numa cosmologia qualquer, a divergência nula do tensor de energia-momento total implica numa troca de energia entre o vácuo e a matéria $u_\mu T_{;\nu}^{\mu\nu} = \frac{u_\mu \Lambda_{;\mu}}{8\pi G}$, onde a presença do termo de fonte é proporcional a taxa de variação de Λ . O principal objetivo destes modelos é determinar como a energia que dirigiu a inflação nos estágios iniciais, e atualmente acelera

⁴A partir de agora ao mencionarmos Λ estaremos designando Λ_{ef} , salvo menção prévia.

o Universo, está relacionada com o pequeno valor de Λ_0 . Entretanto, todos estes modelos têm o mesmo problema: não existe uma lagrangiana incluindo os termos de acoplamento governando as trocas de energia entre o decaimento do vácuo e os outros campos de matéria.

As equações de Friedmann e a lei de conservação de energia (LCE) são escritas como [76]:

$$8\pi G\left(\sum_i \rho_i + \frac{\Lambda(t)}{8\pi G}\right) = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2} \quad (2.6)$$

$$8\pi G\left(\sum_i p_i - \frac{\Lambda(t)}{8\pi G}\right) = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} \quad (2.7)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = -\frac{\dot{\Lambda}}{8\pi G} \quad (2.8)$$

A equação (2.8) pode ser escrita de forma a expressar a taxa de produção de entropia do fluido $T\frac{dS}{dt} = -\frac{\dot{\Lambda}a^3}{8\pi G}$, mostrando que $\Lambda(t)$ efetivamente decresce com o tempo, enquanto a energia é transferida do vácuo para a componente material (mais detalhes em [77]).

Na maioria dos artigos, $\Lambda(t)$ é uma função implícita do tempo, a qual depende o fator de escala ($\Lambda \approx a^{-2}$) ou do parâmetro de Hubble ($\Lambda \approx H^2$), ou de uma combinação destes [78]. Uma das possibilidades mais simples para o decaimento do vácuo é $\rho_V = \frac{\Lambda(t)}{8\pi G} = \beta\rho_T$, onde ρ_V é a densidade de energia do vácuo, $\rho_T = \rho_V + \rho$ é a densidade de energia total e $\beta \in [0, 1]$ é um parâmetro adimensional da ordem da unidade [74, 12]. Combinando esta condição com (2.6) obtém-se uma lei de decaimento do tipo $\Lambda \approx H^2$. Neste cenário, a expansão pode ser acelerada como requer os dados de supernovas, e, diferente dos modelos de Chen & Wu⁵ [11] e Ozer e Taha, onde $\Lambda \approx a^{-2}$, resolve o problema da idade em $z=0$ [12]. A diferença entre estes dois últimos modelos é o fato de, no modelo de Ozer e Taha, a densidade é restringida à densidade crítica, enquanto no modelo de Chen

⁵Recentemente J.A.S. Lima e J.F. Jesus [29] analisaram uma generalização do modelo de Chen & Wu, considerando um decaimento do tipo $\Lambda \approx a^{-n}$.

e Wu não há esta restrição. Em um recente artigo, Wang & Meng [30] propuseram uma nova lei de decaimento do vácuo, onde o produto do decaimento era a matéria, de forma que durante a evolução a densidade de matéria seguia a seguinte equação: $\rho_M = \rho_{Mo}(a^{-3+\epsilon})$, onde $\epsilon > 0$. Aqui, será feito uma rápida abordagem da descrição dinâmica do modelo de Chen & Wu generalizado e, em seguida, do modelo de Wang & Meng.

Modelo Chen-Wu generalizado:

No modelo de Chen-Wu generalizado o termo cosmológico decai segundo $\Lambda = \alpha/a^n$, de forma que para $n=1$ recuperamos o modelos original de Chen-Wu e para $n = 0$, o modelo ΛCDM . Tomando $t = t_0$ obtemos $\alpha = \Lambda_0 a_0^n$, de forma que $\Lambda = \Lambda_0 (\frac{a_0}{a})^n$.

As equações (2.6) e (2.7) com $p = 0$, pois estamos interessados na era da matéria, para o modelo Chen-Wu generalizado nos fornecem:

$$a\ddot{a} - \dot{a}^2 - k = -\frac{4\pi G\rho_{0m}a_0^3}{a} + \frac{n\Lambda_0 a_0^3}{2(3-n)a} - \frac{n\Lambda_0 a_0^n}{2(3-n)a^{n-2}} \quad (2.9)$$

da equação de conservação de energia total (2.8), temos que:

$$\frac{d\rho a^3}{da} = -3pa^2 - a^3 \frac{d\rho_\Lambda}{da} \quad (2.10)$$

para $p=0$, $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda_0}{8\pi G} (\frac{a_0}{a})^n$ e $n \neq 3$, obtemos:

$$\rho = \rho_m = \rho_{m0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - \frac{n\Lambda_0}{8\pi G(3-n)} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \frac{n\Lambda_0}{8\pi G(3-n)} \left(\frac{a_0}{a}\right)^n \quad (2.11)$$

no caso de $n = 3$

$$\rho = \rho_m = \rho_{m0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - \frac{3\Lambda_0 a_0^n \ln a_0}{8\pi G a^3} + \frac{3\Lambda_0 a_0^n \ln a}{8\pi G a^3} \quad (2.12)$$

A integral primeira de (2.9) é, com $n \neq 3$:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{a} - \frac{n\Lambda_0 a_0^3}{3(3-n)a} + \frac{\Lambda_0 a_0^n}{(3-n)a^{n-2}} - k \quad (2.13)$$

Recentemente, limites sobre os possíveis valores de n ⁶ foram obtidos com o uso combinado do teste da idade total e idade-redshift utilizando o quasar APM 08279 + 5255 com idade estimada entre 2-3Gy [29]. A figura abaixo mostra estes limites:

Ω_{Λ}	$T_0 \cap T_z$	
	n_{min}	n_{max}
0,53	1,11	1,29
0,57	0,96	1,12
0,61	0,8	0,94
0,65	0,65	0,77
0,69	0,5	0,59
0,73	0,35	0,41
0,77	0,2	0,23
0,81	-	-

Figura 2.4: Os intervalos de valores permitidos de n .

Como podemos ver nesta tabela, os intervalos de valores permitidos de n é maior para os menores valores da densidade de constante cosmológica e diminuem para os maiores valores da densidade até tenderem a zero para $\Omega_{\Lambda 0}$ aproximadamente igual a 0,79. De forma que para o modelo Λ CDM conter o quasar, a densidade de energia do vácuo tem que ser maior que o previsto pelas observações. Apesar dos intervalos serem maiores para os menores valores de $\Omega_{\Lambda 0}$, eles estão numa região bastante improvável, com $\Omega_{\Lambda 0}$ assumindo valores de até 5 desvios padrões abaixo da média dada pelo WMAP[52].

⁶Os intervalos encontrados para n não são exatos, uma vez que estes autores não levaram em conta a imprecisão da medida da constante de Hubble. Um cálculo rápido, porém, mostra que eles não variam muito levando isso em consideração.

Modelo Wang & Meng:

Recentemente, Wang & Meng [30] propuseram um novo cenário de decaimento do vácuo. Diferente do que é proposto em geral na literatura, não é assumido uma forma funcional para $\Lambda(t)$. Neste modelo, a lei de decaimento do vácuo é deduzida do seu efeito sobre a evolução da CDM, a qual tem uma evolução com o fator de escala dada por:

$$\rho_m = \rho_{m0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3+\epsilon} \quad (2.14)$$

onde ϵ é uma constante positiva.

A lei de conservação de energia (2.8) implica que:

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} + \frac{\epsilon \rho_{m0}}{3 - \epsilon} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3+\epsilon} \quad (2.15)$$

onde $\rho_{\Lambda 0}$ é uma constante de integração que pode ser associada ao estado fundamental do vácuo. Neste modelo a densidade atual de energia do vácuo é $\rho_{\Lambda 0} = \rho_{\Lambda 0} + \epsilon \rho_{m0} / (3 - \epsilon)$. Combinando (2.6) e (2.7) para este modelo e usando $p = 0$, obtém-se:

$$a\ddot{a} - \dot{a}^2 - k = -\frac{4\pi G \rho_{m0} a^{\epsilon-1}}{a_0^{\epsilon-3}} \quad (2.16)$$

Alcaniz & Lima [79] interpretaram termodinamicamente o processo de decaimento como dado por este modelo, pois no artigo original [30] não foi abordado explicitamente onde a energia do vácuo estava sendo armazenada. Alcaniz & Lima encontraram que existiam duas possibilidades: a primeira seria um processo contínuo de criação de partículas de CDM (neste caso ϵ é necessariamente positivo); a segunda, nenhuma partícula era criada, mas ocorreria um aumento da massa das partículas dada por $m(t) = m_0 a(t)^\epsilon$.

Outro importante resultado encontrado por Lima & Alcaniz foi o fato

da adição dos bárions ao modelo de Wang & Meng alterar o valor do *redshift* de transição (z_t) deste para valores compatíveis com os dados de SnIA ($0.2 \leq z_t \leq 0.7$). Limites sobre o parâmetro ϵ foram encontrados por análises estatísticas combinadas de dados de SnIA, fração da massa do gás e CMB. Com 95% c.l. foi encontrado $\epsilon = 0.11 \pm 0.12$. Os autores também exploraram a consequência do vácuo decair em radiação, desta forma, mostraram que a lei de evolução de temperatura da radiação com o *redshift* (ver (1.16)), $T = T_0(1 + z)$, sofre uma ligeira modificação, $T = T_0(1 + z)^{1 - \frac{\epsilon}{4}}$.

2.3.3 Gás Chaplygin (GC)

É largamente conhecido que a principal distinção entre a matéria escura fria ($p=0$) e a energia escura é que a primeira se aglomera em pequenas escalas (o que permite formar galáxias e outras estruturas), enquanto a energia escura é uma componente extremamente homogênea.

A idéia de uma descrição unificada envolvendo o setor escuro da cosmologia (matéria e energia escura) numa única componente, tem recebido uma considerável atenção na literatura. Uma tentativa interessante foi sugerida por Kamenshick *et al.* [17] e desenvolvida por Bilic *et al.* [18] e Bento *et al.* [19]. Esta possibilidade está associada com um fluido exótico, denominado de gás de Chaplygin, cuja equação de estado é dada por:

$$p_C = -A/\rho^\alpha \tag{2.17}$$

onde A é uma constante positiva (um parâmetro muito utilizado é o $A_s = A/\rho_{C0}^{1+\alpha}$, quantidade relacionada com o valor atual da velocidade do som no gás, $v_s = \alpha A/\rho_{C0}^{1+\alpha}$) e $0 \leq \alpha \leq 1$. Esta equação para $\alpha \neq 1$ constitui uma generalização da equação de estado original do gás de Chaplygin proposta por Bento *et al.* [19], enquanto que para $\alpha = 0$, o modelo conduz

ao cenário Λ CDM. A idéia de uma unificação do setor escuro, inspirada na equação de estado (2.17), é bastante natural porque este tipo de gás pode interpolar entre dois regimes da dinâmica cósmica: o primeiro, sendo gerado pela matéria não relativista e o segundo, por uma energia escura com pressão negativa e densidade constante. Uma vez que neste modelo só existe uma componente escura, além dos bárions, fótons e neutrinos, alguns autores têm denominado este tipo de cenário como Quartessência cosmológica (nestas cosmologias $\Omega_M = \Omega_b$). Motivados por estas possibilidades, muitos trabalhos vêm sendo desenvolvidos sobre as consequências teóricas e observacionais do gás de Chaplygin, não somente como uma possibilidade de unificação do setor escuro, mas também como um candidato para Quintessência.

As previsões deste modelo já foram confrontadas com muitos resultados observacionais, tendo sido os dois parâmetros livres, α e A , vinculados por muitos autores. Por exemplo, algumas consequências deste cenário usando os dados de Supernovas tipo Ia foram analisadas por Fabris *et al.* [20]. Tais resultados indicaram que uma cosmologia completamente dirigida por um gás Chaplygin é favorecida em comparação com os modelos Λ CDM. Mais recentemente, Avelino *et al.* [80] consideraram uma amostra maior de SNe Ia e a forma do espectro de potência da matéria para chegar a uma conclusão oposta, mostrando que estes dados são mais restritivos para o gás de Chaplygin do que para modelos Λ CDM. Bento *et al.* [81, 82] estudaram os vínculos provenientes da localização dos picos da CMB, enquanto Dev *et al.* [33] e Alcaniz *et al.* [34] investigaram vínculos na equação de estado do gás de Chaplygin via estatística de lentes gravitacionais e estimativas de idade de objetos em altos- z , respectivamente. Outros vínculos envolvendo a radiação cósmica de fundo (CMB), rádio galáxias do tipo Fanaroff-Ryley IIb e dados de raio-X em aglomerados de Galáxias, foram extensivamente discutidos por muitos autores, tanto para cenários com energia escura como também no esquema unificado.

Recentemente, Lima *et al.* [83] propuseram uma ligeira modificação para o modelo Gás de Chaplygin, uma versão simplificada onde, através de argumentos de causalidade sobre a velocidade do som no gás, o parâmetro A_s é função de α (por simplicidade adotaram $A_s = \alpha$), de forma que há apenas um parâmetro livre neste modelo. Faremos agora uma breve descrição dinâmica do modelo GC.

A equação de conservação de energia (1.8) aplicada a uma equação de estado do tipo (2.17) fornece:

$$\rho_{GC} = \left[A + B \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+\alpha)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (2.18)$$

ou

$$\rho_{GC} = \rho_{GC0} \left[A_s + (1 - A_s) \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+\alpha)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (2.19)$$

onde ρ_{C0} é a densidade de energia atual, $\rho_{C0}^{1+\alpha} = B + A$ é uma constante e $A_s = A/\rho_{C0}^{1+\alpha}$ é uma quantidade relacionada com o valor atual da velocidade do som no gás, $v_s = \alpha A/\rho_{C0}^{1+\alpha}$. De (2.18) é possível ver a interpolação do gás de Chaplygin entre dois regimes: matéria escura ($\rho_C(a \rightarrow 0) \approx \sqrt{B}/a^3$) e energia escura com pressão negativa e densidade constante ($\rho_C(a \rightarrow \infty) \approx \sqrt{A}$). Resolvendo (1.6) e (1.7), com $\Lambda = 0$, obtém-se:

$$a\ddot{a} + \left(\frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{k}{2} \right) (1 - \zeta) = -\frac{\dot{a}^2}{2} \Omega_j \zeta \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \quad (2.20)$$

onde $\zeta = \frac{3A_s}{[A_s + (1 - A_s)(a_0/a)^{3(1+\alpha)}]}$ e Ω_j depende do cenário considerado. Nos modelos de quintessência (gás de Chaplygin + matéria escura) temos $\Omega_j = \Omega_M + \Omega_b \approx \Omega_M$, enquanto que nos modelos unificados, para os quais não existe matéria escura separada, temos que $\Omega_j = \Omega_b$.

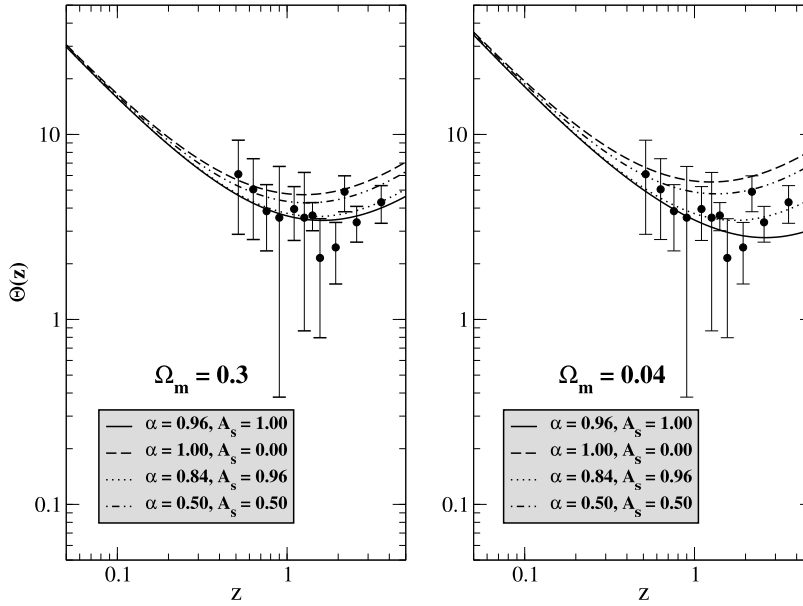


Figura 2.5: Diâmetro angular versus redshift para algumas combinações dos parâmetros A_s . O primeiro gráfico corresponde ao cenário de Quintessência e o segundo ao modelo unificado ($\Omega_M = \Omega_b$). Os dados e as barras de erro fazem parte da amostra de 145 fontes de rádio compactas distribuídas em 12 feixes atualizadas por Gurvits *et al.*

2.3.4 A Matéria-X e parametrizações

Neste cenário, a fonte de curvatura é uma soma de dois fluidos perfeitos, separadamente conservados, a componente dominante (matéria-x) e um fluido ordinário (matéria ou radiação), cuja natureza depende da fase cósmica considerada. A matéria-x é uma extensão da equação de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ introduzida inicialmente por Turner e White [84] e é atualmente bastante discutida na literatura. Tal matéria é descrita pela equação de estado $p_x = \omega\rho_x$ com $\omega < 0$ como exigido pela aceleração do Universo.

Na relatividade geral existem algumas condições de energia (a fraca (WEC), forte (SEC), a dominante (DEC) e a nula (NEC)) que devem ser respeitadas afim de limitar a arbitrariedade do tensor de energia-momento, segundo as quais, a equação de estado de um fluido perfeito deve obedecer as seguintes restrições:

$$\mathbf{WEC} \implies \rho \geq 0 \quad \text{and} \quad \rho + p \geq 0 ,$$

$$\mathbf{SEC} \implies \rho + 3p \geq 0 \quad \text{and} \quad \rho + p \geq 0 ,$$

$$\mathbf{DEC} \implies \rho \geq 0 \quad \text{and} \quad -\rho \leq p \leq \rho ,$$

Diante disto, alguns autores subdividiram a matéria-x em duas classe distintas: a XCDM padrão ($-1 \leq \omega \leq 0$) e o cenário XCDM estendido (também denominada cosmologia Phantom, $\omega \leq -1$), no qual várias das condições de energia são violadas. Os dados de SNe Ia favorecem modelos com $\omega < -1$ em detrimento a $\omega = -1$ (Λ CDM). Caldwell [85] foi o primeiro a propor uma energia escura com $\omega < -1$ para acomodar melhor os dados de supernovas. Esta propriedade ainda é prevista em diferentes contextos como, por exemplo, cosmologias com membranas e modelos com campos escalares.

Entretanto, um Universo preenchido por energia fantasma possui algumas propriedades bizarras, como a velocidade do som no meio maior que a velocidade da luz e o fato de num futuro finito o Universo alcançar uma expansão infinitamente rápida, onde todas as estruturas conhecidas seriam quebradas culminando numa singularidade da curvatura no futuro. Desta forma, um grande esforço teórico tem sido feito para explicar a possibilidade de campos que permitam a quebra de condição de energia.

Um resumo de limites recentes sobre o parâmetro ω está listado na tabela abaixo (2.1) [16]. Em geral, análises conjuntas envolvendo dados de raios-x, lentes gravitacionais, OHRG's, SnIa, CMB, e outros diferentes métodos são de extrema importância. Primeiro, em virtude do ganho na precisão quando comparado a estudos envolvendo apenas um conjunto específico de dados; a Segunda, é que a maioria dos testes cosmológicos são altamente degenerados, limitando apenas certas combinações de parâmetros,

mas não cada parâmetro individualmente.

Tabela 2.1: Limits to Ω_m and ω

Method	Reference	Ω_m	ω
CMB + SNe Ia:.....	[86]	$\simeq 0.3$	$\simeq -0.6$
	[87]	\sim	< -0.6
SNe Ia + LSS.....	[88]	\sim	< -0.6
GL.....	[89]	\sim	-0.55
X-ray GC.....	[90]	$\simeq 0.32$	-1
X-ray GC ^a	[90]	$\simeq 0.31$	-1.32
SNe Ia.....	[91]	\sim	< -0.55
SNe + X-ray GC ^a ..	[92]	$\simeq 0.29$	$-0.95^{+0.30}_{-0.35}$
SNe Ia + GL.....	[13]	0.24	< -0.7
OHRO's.....	[93]	0.3	≤ -0.27
Various.....	[94]	$0.2 - 0.5$	< -0.6
$\theta(z)$	[95]	0.2	$\simeq -1.0$
	[96]	\sim	< -0.96
$\Delta\theta$	[97]	$0.2-0.4$	≤ -0.5
CMB.....	[98]	0.3	< -0.5
CMB + SNe + LSS.	[99]	0.3	< -0.85
CMB + SNe + LSS.	[100]	\sim	< -0.71
CMB + SNe + LSS.	[100]	\sim	> -2.68

Para um cenário de matéria-x + matéria escura fria (XCDM), as equações (1.6) e (1.7), nos fornecem (com $\Lambda = 0$):

$$a\ddot{a} + \left(\frac{3\omega + 1}{2}\right) (\dot{a}^2 + k) = \frac{4\pi G\omega\rho_{m0}a_0^3}{a} \quad (2.21)$$

com a primeira integral igual a:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_{x0}a_0^{3(\omega+1)}}{3a^{3\omega+1}} + \frac{8\pi G\rho_{m0}a_0^3}{3a} - k \quad (2.22)$$

Uma outra alternativa está relacionada com o fato do parâmetro ω ser função do tempo ou, equivalentemente, do redshift, de forma que $\omega = \omega(z)$ (X(z)CDM). Nestes casos a função $\omega = \omega(z)$ é fornecida a priori, ao contrário do que acontece nos modelos motivados por campos escalares, onde $\omega(z)$ é derivado das descrições de campo [16, 101]. Frequentemente, o parâmetro varia com alguma potência do redshift. Entretanto, modelos com ω constante são os mais simples e seus parâmetros livres (Ω_x, ω) são

mais facilmente limitados por testes cosmológicos.

Neste caso, as equações (1.6) e (1.7) nos fornecem (2.21), mas com $\omega = \omega(z)$. De forma que a primeira integral é:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_{x0}a_0^{3(\omega+1)}}{3a \exp\left[\int_{a_0}^a 3\omega/a'da'\right]} + \frac{8\pi G\rho_{m0}a^3}{3a} - k \quad (2.23)$$

Vamos explorar rapidamente algumas características de expressões para $\omega(z)$ dadas a priori muito simples e bastante discutidas na literatura. O modelo mais trivial é a parametrização linear [102, 84] $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 z$. Esta proposta é uma boa aproximação para a maioria dos modelos de quintessência em baixos redshifts e é exata para modelos onde a equação de estado é uma constante ou muda lentamente. Entretanto, tem sérios problemas em redshifts $z \gg 1$, onde cresce indesejavelmente. Para resolver este problema Linder, Padmanabhan & Choudhury [103, 104, 105] propuseram uma outra forma simples (Linder ansatz, (LA)) com a vantagem de assumir valores finitos de $\omega(z)$ para todo z . A equação de estado é $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z}$ (LA). Em ambos os casos ω_0 dá o valor atual do parâmetro da equação de estado e ω_1 sua razão de mudança em z na época presente ($z = 0$). Tomando $\omega_1 = 0$ nestas parametrizações recuperamos o modelo de matéria-x. Inúmeros trabalhos existem na literatura com o objetivo de limitar estes parâmetros. Lazkoz, Nesseris & Perivolaropoulos exploraram estes modelos dentre outros com os dados da SNe Ia Gold Sample [106]. Os melhores ajustes encontrados para o parâmetro ω_0 foram: $\omega_0 = -1.02 \pm 0.11$ para o XCDM, $\omega_0 = -1.40 \pm 0.25$ e $\omega_1 = 1.66 \pm 0.92$ para a parametrização linear e $\omega_0 = -1.58 \pm 0.33$ e $\omega_1 = 3.29 \pm 1.76$ para a parametrização LA. Nestes ajustes foram assumidos a priori um Universo plano e o valor de $\Omega_m = 0.3$.

2.3.5 Cosmologia em D-dimensões espaciais

As leis da física são geralmente descritas em três dimensões espaciais e o número de dimensões não aparece nas leis explicitamente. A idéia de generalizar as leis da física para dimensões arbitrárias é antiga na literatura. Ehrenfest (1920) e, de forma independente, Whitronw resolveram o problema Kepleriano em dimensões arbitrárias⁷[107]. Kaluza e Klein propuseram um espaço-tempo de cinco dimensões afim de unificar força eletromagnética e gravidade[108]. Nas últimas décadas, vários modelos, que são baseados na idéia original de Kaluza-Klein, foram desenvolvidos com o objetivo de unificar em um espaço-tempo com o número de dimensões maiores todas as interações conhecidas. De acordo com estes modelos as quatro dimensões de nosso espaço-tempo surgem como resultado da compactação de um espaço-tempo multidimensional em um certo momento no Universo primordial. Desenvolvimentos recentes na teoria de String e sua extensão, a M-Theory, sugerem uma nova abordagem sobre a compactação das dimensões espaciais extras. Nesta abordagem, as dimensões extras podem ser grandes, mas as partículas do modelo padrão estão confinadas em uma hipersuperfície (chamada brana) embutida em um espaço de dimensão mais alta (chamado na literatura de *bulk*). Apenas a gravidade e outra matéria exótica poderiam se propagar neste *bulk*. Nosso próprio Universo seria uma brana. Esta idéia foi motivada originalmente de forma fenomenológica[109] e revivida posteriormente na teoria de String. Entretanto, existem dificuldades em impor limites sobre o tamanho dessas dimensões extras uma vez que as partículas do modelo padrão propagam-se apenas em 3 dimensões espaciais.

⁷Mostraram que órbitas estáveis e fechadas são possíveis apenas em espaços com três dimensões espaciais.

Afim de descrever modelos cosmológicos em D dimensões espaciais utilizamos a métrica padrão de FRW generalizada como dada por Tangherlini [28].

A métrica neste caso é :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^{-1} \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (2.24)$$

onde $r^2 = \sum_i x_i^2$ e $i, j=1, 2, 3 \dots D$.

As equações de Friedmann (1.6) e (1.7) tornam-se, nesta métrica:

$$\frac{D(D-1)}{2} \left[\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right] = 8\pi G_D \rho + \Lambda \quad (2.25)$$

$$\frac{(D-1)\ddot{a}}{a} + \frac{(D-1)(D-2)}{2} \left[\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right] = -8\pi G_D p + \Lambda \quad (2.26)$$

A equação de conservação de energia torna-se:

$$\dot{\rho} + D(\rho + p)H = 0 \quad (2.27)$$

Para fluidos barotrópicos com as equações de estado $p = \omega\rho$ e $\Lambda = 0$, $p = \omega\rho$ e $\Lambda \neq 0$, e $p = \omega_x(\rho_{x0} + \rho_{m0})$, as equações (2.25) e (2.26) nos fornecem :

$$p = \omega\rho \text{ e } \Lambda = 0$$

$$a\ddot{a} + \left(\frac{D(\omega+1)-2}{2} \right) (\dot{a}^2 + k) = 0 \quad (2.28)$$

com integral primeira igual a

$$\dot{a}^2 = \frac{16\pi G_D \rho_0}{D(D-1)} \frac{a_0^{D(\omega+1)}}{a^{D(\omega+1)-2}} - k \quad (2.29)$$

$p = \omega\rho$ e $\Lambda \neq 0$:

$$a\ddot{a} + \left[\frac{D(\omega + 1) - 2}{2} \right] (\dot{a}^2 + k) = \frac{\Lambda(\omega + 1)a^2}{D - 1} \quad (2.30)$$

com integral primeira igual a

$$\dot{a}^2 = \frac{16\pi G_D \rho_0}{D(D - 1)} \frac{a_0^{D(\omega+1)}}{a^{D(\omega+1)-2}} + \frac{2\Lambda a^2}{D(D - 1)} - k \quad (2.31)$$

$p = \omega_x \rho_{x0}$ + **CDM (XCDM)**:

$$a\ddot{a} + \left(\frac{D(\omega + 1) - 2}{2} \right) (\dot{a}^2 + k) = \frac{8\pi G_D \rho_{m0} \omega a_0^D}{a^{D-2}} \quad (2.32)$$

com integral primeira igual a

$$\dot{a}^2 = \frac{16\pi G_D \rho_{x0}}{D(D - 1)} \frac{a_0^{D(\omega+1)}}{a^{D(\omega+1)-2}} + \frac{16\pi G_D \rho_{m0}}{D(D - 1)} \frac{a_0^D}{a^{D-2}} - k \quad (2.33)$$

2.3.6 Considerações finais do capítulo

Neste capítulo, descrevemos o Universo escuro, composto pela matéria escura e a energia escura. Estas duas componentes juntas são responsáveis por 95% do conteúdo de matéria e energia que preenche o Universo. Entretanto, diferente da matéria escura, a componente de energia escura extra é intrinsecamente relativística e sua pressão negativa é requerida pelo presente estado acelerado do Universo. Mesmo considerando que estamos atravessando um período extraordinário na Cosmologia Observacional, os dados existentes ainda são insuficientes para determinar qual o melhor dentre os vários candidatos a energia escura. Em particular, isto significa que a determinação de parâmetros cosmológicos continuará a ser a meta central das investigações no futuro próximo. Nesse contexto, o propósito fundamental da pesquisa atual em cosmologia é descobrir a natureza da energia

escura, uma vez que esta componente é responsável pela gravidade repulsiva, e potencialmente pode alterar a visão tradicional de espaço, tempo e matéria.

CAPÍTULO 3

COSMOLOGIA NEWTONIANA

Neste capítulo, em uma primeira parte, mostraremos as hipóteses básicas sobre as quais uma cosmologia newtoniana, baseada na formulação da hidrodinâmica clássica, pode ser construída. Apresentamos os principais resultados e as limitações desta abordagem. Na segunda parte, abordaremos a descrição lagrangiana como proposta em 1998 por Lima, Moreira & Santos [26] para modelos de fluido simples do tipo FRW.

3.1 A Formulação Hidrodinâmica

A formulação Hidrodinâmica foi inicialmente proposta por Milne (1934)[21] e Milne & McCrea (1934) [22], na qual, por meio da gravitação newtoniana e com as equações da hidrodinâmica clássica, reproduziram as equações (não perturbadas) da cosmologia relativística. Contudo, a formulação proposta por eles mostrou-se consistente apenas para universos preenchidos por um fluido sem pressão (poeira). Esta dificuldade básica possui uma razão muito simples, diferentemente do que ocorre na TRG, uma pressão uniforme na hidrodinâmica clássica não desempenha qualquer papel dinâmico, uma vez que as equações desta dependem apenas do gradiente da pressão e não do seu valor absoluto. Para contornar este problema, McCrea (1951) [23] e Harrison (1965)[24] propuseram formulações

semi-clássicas incorporando alguns aspectos relativísticos (como, por exemplo, a relação massa-energia) e assim, obtiveram análogos neoclássicos (neonewtonianos) aos modelos relativísticos do tipo FRW com pressão.

Na descrição hidrodinâmica, o substrato cosmológico é pensado como um fluido autogravitante em expansão formado por uma grande nuvem esférica gasosa homogênea onde as galáxias são as partículas deste gás ou condensações localizadas do gás intergalático, condensações essas que indicam o movimento médio do gás na sua vizinhança. Esta nuvem gasosa homogênea é considerada finita, entretanto, para não violar o princípio cosmológico (uma vez que a finitude da nuvem leva naturalmente a idéia de um ponto especial, isto é, seu centro) é considerada maior que qualquer distância astronômica já medida. Dessa forma, qualquer partícula deste gás veria ao redor de si mesma um universo homogêneo e isotrópico com uma precisão arbitrariamente alta.

A impossibilidade de considerar a nuvem infinita decorre da dificuldade que existe na gravitação newtoniana em lidar com sistemas cujo o espaço se estende ao infinito, pois o potencial gravitacional nesta teoria para uma superfície esférica \mathbf{A} , $\Phi(x, t) = -\frac{4}{3}\pi G\rho(t)x^2$, diverge quando $x \rightarrow \infty$ e a força gravitacional em \mathbf{A} também torna-se infinita[110, 112, 111, 114].

Vamos agora apresentar a descrição hidrodinâmica de Milne & McCrea [22].

3.1.1 Modelos do tipo FRW sem pressão, $p = 0$

A abordagem de Milne & McCrea (1934)

Nesta abordagem é considerada apenas a cinemática da nuvem do gás cosmológico e o movimento das partículas do gás é estritamente radial.

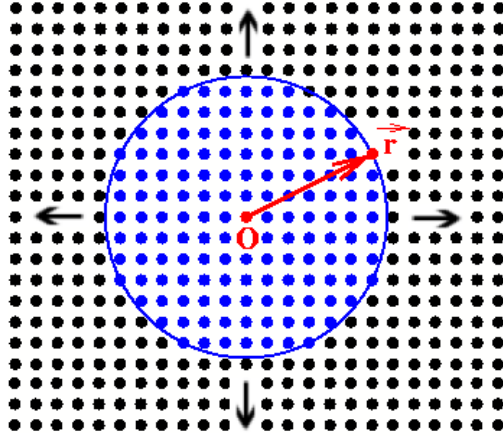


Figura 3.1: Esfera de massa distribuída uniformemente.

Consideremos $v = |\vec{v}|$ a velocidade de uma partícula a uma distância $r = |\vec{r}|$ de um observador no tempo t . A equação de movimento $\frac{dv}{dt} = -\frac{GM(r)}{r^2}$ pode ser escrita como

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{4}{3}\pi G \rho r, \quad (3.1)$$

onde ρ é função apenas do tempo t , satisfazendo o princípio cosmológico. A equação da continuidade em coordenadas esféricas é

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v)}{\partial r} = 0, \quad (3.2)$$

Aqui, $\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v)}{\partial r}$ é uma função independente de r . Pode-se então supor

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -3H(t), \quad (3.3)$$

então

$$\frac{\partial(r^2 v)}{r^2 \partial r} = 3H(t), \quad (3.4)$$

Integrando (3.4)

$$v = rH(t) + \frac{G(t)}{r^2}, \quad (3.5)$$

inserindo em (3.1) e lembrando que ρ é função apenas de t , a expressão

resultante

$$\frac{1}{r} \left[r\dot{H}(t) + \frac{\dot{G}(t)}{r^2} + \left(rH(t) + \frac{G(t)}{r^2} \right) \left(H(t) - \frac{2G(t)}{r^3} \right) \right] \quad (3.6)$$

deve ser apenas função de t também, de forma que devemos ter $G(t) = 0$.

Assim

$$v = rH(t). \quad (3.7)$$

Sustituindo (3.7) em (3.1), a equação de movimento torna-se

$$\dot{H}(t) + H(t)^2 = -\frac{4}{3}\pi G\rho \quad (3.8)$$

Escrevendo (3.7) como $\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = H(t)$ e integrando na linha do movimento, obtém-se

$$r = fa(t), \quad (3.9)$$

onde f define a partícula considerada e $a(t)$ é uma função universal de t satisfazendo

$$H(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = -\frac{1}{3\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad (3.10)$$

Assim

$$\rho(t) = \frac{\rho_0 a_0^3}{a^3}. \quad (3.11)$$

Introduzindo a expressão de $H(t)$ (3.10) e (3.11) em (3.8), chega-se a

$$2\ddot{a} = -\frac{\frac{8}{3}\pi G a_0^3 \rho_0}{a^2}, \quad (3.12)$$

multiplicando por \dot{a} e integrando

$$\frac{\dot{a}^2}{2} = \frac{\frac{4}{3}\pi G a_0^3 \rho_0}{a} + E, \quad (3.13)$$

onde E é uma constante de integração. Dividindo (3.12) por a , (3.13) por a^2 e somando as equações resultantes, temos:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2E}{a^2} = 0 \quad (3.14)$$

que é uma equação análoga a de Friedmann para um universo com $P = 0$ e $\Lambda = 0$ (ver eq. (1.7)) se indentificarmos $E = -k/2$. É freqüentemente considerado na descrição hidrodinâmica que a equação (3.13) representa a energia total de uma partícula de massa unitária do fluido em expansão, uma vez que resulta da integração primeira da equação de movimento (3.12). Assim, com $A^2 = \frac{8}{3}\pi G a_0^3 \rho_0$, (3.13) torna-se

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{A^2}{2a} = E \quad (3.15)$$

de forma que $\dot{a}/2$ representa uma medida de sua energia cinética, $-A^2/2a$ como uma medida de sua energia potencial e E como medida de sua energia total. Comparando com a equação de Friedmann para $p = 0$, identificamos $E = -\frac{mk}{2}$. Se $k = -1$, a energia total é positiva e a partícula possui velocidade maior que a velocidade de escape da massa contida no "raio" a (quando $t \rightarrow \infty$ temos $a \rightarrow \infty$ e $\dot{a} \rightarrow 1$). Se $k = 0$, a energia total é zero e o universo se comporta como uma partícula com velocidade igual a de escape (quando $t \rightarrow \infty$ temos $a \rightarrow \infty$ e $\dot{a} \rightarrow 0$). Se $k = 1$, a energia total é negativa e o universo se comporta como uma partícula com velocidade menor que a de escape, a expansão ocorrerá até $\dot{a} = 0$ (quando $a = A^2$), contraindo em seguida.

Para descrever modelos com $P = 0$ e $\Lambda \neq 0$, devemos incorporar na gravitação newtoniana um termo adicional, uma força repulsiva proporcional à distância. O que implica uma modificação da equação de movimento para $\frac{dv}{dt} = -\frac{GM(r)}{r^2} + \frac{1}{3}\Lambda r$. Pelos mesmos passos anteriores chega-se a:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \Lambda \quad (3.16)$$

3.1.2 Modelos do tipo FRW com pressão, $p \neq 0$

Modelos com $p \neq 0$ foram tratados inicialmente por McCrea [23] em 1951 e, posteriormente, por Harrison[24] em 1965. Vamos inicialmente descrever a abordagem de McCrea para, em seguida, descrevermos a realizada por Harrison.

A abordagem de McCrea (1951)

Na abordagem de McCrea [23], a analogia hidrodinâmica é estendida a fluidos com $p \neq 0$ com a adoção, na descrição anterior de Milne & McCrea, de dois conceitos da teoria da relatividade. São eles:

a) a equivalência entre massa e energia: uma vez que o fluido expande com uma pressão uniforme p , realiza um trabalho na taxa $4\pi r^2 p \frac{dr}{dt}$ e, assim, perde energia interna. Pela adoção da idéia de equivalência massa-energia, o fluido perde massa ($4/3\pi\rho r^3$) nessa mesma taxa. Assim:

$$\frac{d}{dt}(4/3\pi\rho r^3) = -4\pi r^2 p \frac{dr}{dt} \quad (3.17)$$

por (3.7) e (3.10), chega-se a:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (3.18)$$

b) a distinção entre massa gravitacional e massa inercial¹, onde a densidade σ de **massa gravitacional efetiva** de um sistema é dada por,

$$\sigma = \rho + 3p \quad (3.19)$$

onde ρ é a densidade de massa inercial e p é a pressão.

¹Lei de Tolman.

Pela utilização de (a), (b) e da lei de velocidade (3.7) obtida por Milne & McCrea, descreveremos o procedimento para a obtenção da analogia completa via hidrodinâmica clássica.

Substituindo ρ por σ na equação (3.8) e utilizando as definições de $H(t)$ (3.10) e da densidade da massa gravitacional (3.19), a equação (3.8) pode ser reescrita como:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4/3\pi G\sigma = -4/3\pi G(\rho + 3p) \quad (3.20)$$

Isolando p em (3.18) e substituindo em (3.20),

$$\dot{a}\ddot{a} = 4/3\pi G(\dot{\rho}a^2 + 2\rho a\dot{a}) \quad (3.21)$$

esta equação é integrável, fornecendo:

$$8\pi G\rho = 3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \quad (3.22)$$

onde k é uma constante de integração. Substituindo $8\pi G\rho$ em (3.20):

$$8\pi Gp = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \quad (3.23)$$

As equações (3.22) e (3.23) são idênticas as equações de Friedmann para $p \neq 0$ e $\Lambda = 0$ (ver eq. (1.6) e eq. (1.7)).

Vimos anteriormente que no caso de $p = 0$ o sinal da curvatura correspondia ao fato do fluido em qualquer ponto ter velocidade maior, igual ou menor que a velocidade de escape, pois a equação (3.22) era interpretada newtonianamente como a equação de energia total de uma partícula do fluido. O termo $\dot{a}^2/2$ correspondia a energia cinética, o termo $-4\pi G\rho a^2$ como sendo sua energia potencial e $-k/2$ como a energia total. Este análogo não é estendido ao caso $p \neq 0$. Da equação (3.22) esta analogia só se aplica se ρ for a densidade de massa gravitacional, isto é, apenas se $p = 0$ (ver (3.19)).

A abordagem de Harrison (1965)

Em 1965, Harrison [24] generaliza a descrição clássica para modelos com $p \neq 0$ com uso das equações da hidrodinâmicas clássicas, da teoria da relatividade restrita e da primeira lei da termodinâmica, isto é, sem o uso de qualquer conceito da relatividade geral.

Em sua formulação é proposto um universo particionado em microcosmos, ou seja, várias células isoladas e esfericamente simétricas de volume V . Em cada instante cósmico as células possuem conteúdo em estados idênticos, isto é, se em um certo momento todas as partições são retiradas exceto a de uma célula, um observador dentro desta ver condições idênticas com aquelas vistas por um observador externo. Sendo o estado interno da célula independente do volume escolhido é possível considerar a célula infinitesimal, desta forma, a métrica no interior da célula é plana e descrita pela relatividade especial. Este é o modelo denominado microcosmos.

Pelo teorema do virial relativístico

$$\sum (\vec{p}^2 m^{-1} + \vec{r} \cdot \vec{F}) = \int p r d\sigma \quad (3.24)$$

onde o somatório é sobre todas as partículas em V , de momento \vec{p} e massa m interagindo uma com as outras através de uma força \vec{F} . A integral de superfície, igual a $3pV$, é a energia correspondendo a um "stress" de fronteira.

Do lado de fora deste microcosmos a pressão é nula e a fronteira esférica deve exercer pressão para que a densidade e a pressão interna permaneçam uniforme, pois no interior da célula é considerado um fluido não ligado gravitacionalmente. Na ausência desta pressão, o fluido se dispersaria devido ao movimento rândomico das partículas. Desta forma, pelo teorema do virial relativístico, há um adicional na energia da célula em $3pV$ ou $3pV$ em sua massa.

Assim, a equação de Poisson, $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$, e da continuidade, $\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho\vec{v})$, são modificadas, tornando-se²:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G(\rho + 3p/c^2) \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho + p/c^2)\vec{v} \quad (3.26)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla\phi \quad (3.27)$$

Como anteriormente, $\vec{r} = s(t)\vec{r}_0$, de forma que, $\vec{v} = \dot{s}\vec{r}_0$. ϕ é o potencial gravitacional e $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla\phi$ é a equação de movimento. É interessante observar que as equações clássicas são retomadas no limite $c \mapsto \infty$.

Não há troca de calor entre as células e sendo ϵ a densidade de energia do fluido, com a primeira lei da termodinâmica, $dE + pdV = 0$, e $V \propto s^3$, obtém-se:

$$\frac{d(\epsilon s^3)}{dt} + p\frac{ds^3}{dt} = 0 \quad (3.28)$$

Sabendo que $\nabla\cdot\vec{v} = 3\dot{s}$, tomando o divergente de (3.27) e com o uso de (3.25), a equação de movimento (3.27) torna-se:

$$\ddot{s} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)s = \frac{4\pi G}{3}\frac{d}{ds}(\rho s^2) \quad (3.29)$$

com integral primeira

$$\dot{s}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho s^2 - C \quad (3.30)$$

onde C é uma contante arbitrária para todos os elementos do fluido. Re-definindo s como $s(t) = a(t)|C|^{1/2}$, $s(t_0) = |C|^{1/2}$, (3.30) torna-se:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - k \quad (3.31)$$

onde $k = 0, \pm 1$.

²Explicitaremos c.

Desta forma, as equações relativísticas são reproduzidas sem qualquer uso da relatividade geral. Nesta abordagem, a interpretação newtoniana da equação (3.31) como uma equação de energia para uma partícula de massa m no fluido, sendo a energia total da partícula igual $-mk/2$, pode ser retomada.

Lima, Zanchin & Brandenberger (1997)

Em 1997, a questão dos análogos clássicos via hidrodinâmica clássica foi rediscutida por Lima, Zanchin & Brandenberger [25]. Estes autores generalizaram a descrição newtoniana para as equações perturbadas através de uma modificação na equação da continuidade (3.26), pois, apesar das equações dinâmicas derivadas por McCrea (1951) e Harrison (1965) corresponderem as equações de campo de Friedmann, as soluções das equações perturbadas correspondiam as relativísticas apenas no caso $p = 0$. A raiz deste problema estava relacionada com a equação (3.26), o gradiente de pressão gerava termos extras quando inomogeneidades eram consideradas, levando a resultados que não concordavam com a teoria relativística.

Uma nova equação da continuidade foi obtida via primeira lei da termodinâmica ($dE + pdV = 0$) e por considerar que a energia contida dentro de um volume V com raio $r \approx a(t)$ é $E \approx \rho a^3$.

Uma vez que o volume está mudando, com a primeira lei da termodinâmica chega-se a:

$$\frac{d\rho}{dt} + (\rho + p)\frac{1}{a^3}\frac{da^3}{dt} = 0 \quad (3.32)$$

por $\vec{v}(t) = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r}$ temos $\nabla \cdot \vec{v} = \frac{3\dot{a}}{a}$, e então:

$$\frac{d\rho}{dt} + (\rho + p)\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.33)$$

por expandir a derivada total,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + p \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.34)$$

Esta é a equação correta da continuidade para a aproximação newtoniana quando efeitos da pressão são incluídos. É direto mostrar que o último termo da equação acima está relacionado ao trabalho $dW = p dV$ necessária para expandir o fluido de um volume V para $V+dV$,

$$\frac{1}{V} \frac{dW}{dt} = p \frac{4\pi a^2 da}{4/3\pi a^3 dt} = 3 \frac{\dot{a}}{a} p = p \nabla \cdot \vec{v} \quad (3.35)$$

3.2 Propagação da luz na Cosmologia newtoniana

Na cosmologia newtoniana, a propagação cosmológica da luz é estudada via adoção de hipóteses *ad hoc* devido a dificuldade da dinâmica newtoniana em lidar com a luz. A equação³ que descreve a propagação dos raios de luz que se afastam ou se aproximam de um observador é dada por [112, 113, 114]:

$$\frac{dr}{dt} = r \frac{\dot{a}}{a} \pm c \quad \text{ou} \quad r \frac{d}{dt} \left(\frac{r}{a} \right) = \pm c \quad (3.36)$$

Considerando um raio de luz emitido por uma fonte em um tempo t_1 e captado por um observador em t_2 , com $r(t_2) = 0$, a equação (3.36) fica:

$$\frac{r(t_1)}{a(t_1)} = c \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.37)$$

Para diferentes instantes t_1 a razão $\frac{r(t_1)}{a(t_1)}$ é constante. Assim, considerando a emissão de um pulso no tempo $t_1 + \Delta t_1$ e captado no tempo $t_2 + \Delta t_2$, podemos escrever

³Aqui vamos explicitar c .

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.38)$$

Após uma manipulação dos limites das integrais

$$\int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_2} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.39)$$

supondo que num tempo Δt temos $a(t + \Delta t) \approx a(t)$ podemos integrar

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \quad (3.40)$$

Se Δt_1 representar o período da emissão da onda pela galáxia, e Δt_2 for o período na recepção dessa onda, a variação será justamente o efeito Doppler, de forma que

$$1 + z = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \quad (3.41)$$

outra equação relativística, obtida na cosmologia newtoniana via uma hipótese *ad doc*.

3.3 Limites da cosmologia newtoniana

Nas seções precedentes, com o uso da equação de Poisson, das equações clássicas da hidrodinâmica, do tempo absoluto, do espaço estático, da lei de gravitação universal e de algumas hipóteses como o princípio cosmológico, a expansão do universo e a própria aproximação hidrodinâmica, que tornaram-se claras apenas após o advento da cosmologia relativística, mostramos como as equações de Friedmann são obtidas no caso de modelos com $p = 0$. Discutimos, também, como a adoção de conceitos da teoria da relatividade especial (relação massa-energia), permitiu estender o tratamento newtoniano para modelos com $p \neq 0$.

Entretanto, é importante citar que equivalência algébrica não implica em equivalência conceitual. No caso newtoniano, o símbolo t que aparece nas equações e nas integrais é o tempo newtoniano, esse tempo é o mesmo para qualquer observador no fluido. No caso relativístico, t é o tempo medido por um relógio comóvel com a expansão, não sendo o mesmo para observadores que não estejam comóveis com o fluido. Esta diferença decorre do fato da definição de simultaneidade ser diferente nas duas teorias. Com respeito ao termo k , ele é uma constante que aparece nas integrais na aproximação hidrodinâmica e é associada a energia total das partículas do sistema, enquanto que no tratamento relativístico representa a curvatura do espaço na métrica homogênea e isotrópica de FRW (ver (1.4)).

Outro apontamento importante é a lei da velocidade-distância derivada para o caso newtoniano, esta lei só é válida para pequenas velocidades comparadas com as da luz, ou seja ($z \ll 1$), de forma que a cosmologia newtoniana deve ser vista com uma aproximação local da relativística. Verificou-se que na mais simples abordagem newtoniana da cosmologia homogênea e isotrópica é inevitável a conclusão de que o universo precisa ser finito, porém sua extensão pode ser arbitrariamente alta. Vimos também que o tratamento da luz nos modelos clássicos só foi possível via adoção de uma hipótese *ad hoc* cuja única justificativa é de que ela é capaz de reproduzir os resultados obtidos através de um tratamento relativístico.

Não foi mostrado nesta dissertação, mas é valioso citar que McVittie [115], por meio de um método no qual a cosmologia newtoniana é obtida da relativística no limite $c \rightarrow \infty$, mostrou a importante conclusão de que a constante cosmológica relativista não gera uma força proporcional à distância como postulado anteriormente para o limite newtoniano, mas, que nesse limite, ela se manifesta como uma constante positiva à pressão.

Entretanto, diante de todas essas limitações, a cosmologia newtoniana funciona como uma excelente ferramenta teórica, como por exemplo: Landsberg & Evans [116] discutiram um modelo cosmológico estacionário

com criação de matéria no contexto newtoniano, a teoria de formação de estruturas via evolução de homogeneidades em um universo em expansão também pode ser discutido neste contexto [25, 117], etc.

3.4 A Formulação lagrangiana para modelos de fluido simples do tipo FRW

Nas derivações anteriores para os casos de $p = 0$ foi obtida uma equação de energia para uma distribuição de massa esférica, onde as galáxias estão organizadas de forma a fornecer uma densidade de massa que é espacialmente homogênea em qualquer tempo [118]. Neste caso, uma partícula teste de massa m está movendo sob a ação de um campo atrativo variando inversamente com a distância, $V(r) = -GMm/r$, onde M é a massa constante dentro do volume comóvel. Diante deste fato, é possível argumentar que o comportamento dinâmico de um universo FRW com $p = 0$ é equivalente ao de uma partícula sob a ação de um potencial homogêneo unidimensional $V(q) = \alpha q^n$, onde $n = -1$, e α é uma constante negativa.

Em 1998, afim de evitar as dificuldades da descrição Euleriana (hidrodinâmica) para universos FRW com $p \neq 0$, Lima *et al.* [26], por meio do formalismo Lagrangeano clássico, propuseram uma descrição tipo partícula para os modelos cosmológicos de fluido simples do tipo FRW com a equação de estado geral $p = (\gamma - 1)\rho$. Eles mostraram que o comportamento dinâmico do fator de escala $a(t)$ é equivalente ao de uma partícula sob a ação de um potencial homogêneo $V(q) = \alpha q^n$, onde α e n são constante e q é a coordenada generalizada unidimensional da partícula, que desempenha o "papel" do fator de escala. Neste cenário, a equação dinâmica de $a(t)$, para cada valor da pressão, pode ser associada com o índice "n" presente no potencial.

O parâmetro γ assume valores no intervalo $[0,2]$, os quais são:

- Vácuo ($p = -\rho$, $\gamma = 0$)
- strings ($p = -\frac{1}{3}\rho$, $\gamma = \frac{2}{3}$)
- poeira ($p = 0$, $\gamma = 1$)
- radiação ($p = \frac{1}{3}\rho$, $\gamma = \frac{4}{3}$)
- Zeldovich's stiff matter ($p = \rho$, $\gamma = 2$)

As equações de campo de Einstein para um fluido com equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$ nos fornece⁴:

$$a\ddot{a} + \left(\frac{3\gamma - 2}{2}\right)\dot{a}^2 + \left(\frac{3\gamma - 2}{2}\right)k = 0 \quad , \quad (3.42)$$

Vamos abordar agora a descrição tipo-partícula para a classe de cosmologia fornecidas por (3.42).

3.4.1 Metodologia e Discussões

A lagrangiana clássica para uma partícula sob a ação de um potencial unidimensional $V(q) = \alpha q^n$:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \alpha q^n \quad , \quad (3.43)$$

onde α é uma constante arbitrária negativa, uma vez que a força gravitacional é atrativa, m e q são, respectivamente, a massa e a coordenada linear da partícula teste.

A equação de movimento (Euler-Lagrange) para a lagrangiana (3.43) é:

$$m\ddot{q} + n\alpha q^{n-1} = 0 \quad , \quad (3.44)$$

⁴A redução desta equação a forma de um oscilador foi feita por Lima [119]. Apresentamos este método no anexo A-parte 1.

A energia total conservada da partícula é:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \alpha q^n . \quad (3.45)$$

Multiplicando (3.44) por q e inserindo a lei de conservação de energia na equação resultante obtem-se:

$$q\ddot{q} - \frac{n}{2} \dot{q}^2 + \frac{nE}{m} = 0 . \quad (3.46)$$

Comparando esta equação com (3.42) e idetificando o fator de escala a com a coordenada generalizada q , as equações (3.44) e (3.46) descreverão o mesmo comportamento dinâmico apenas se duas condições são satisfeitas:

$$n = 2 - 3\gamma \quad , \quad (3.47)$$

e

$$E = -\frac{mk}{2} . \quad (3.48)$$

A primeira relação implica que a potência n está diretamente relacionada com a natureza da matéria que preenche o modelo relativístico (ver tabela abaixo).

γ	0 (vacuum)	2/3 (strings)	1 (dust)	4/3 (radiation)	2 (stiff matter)
n	2	0	-1	-2	-4
$V(q)$	αq^2	α	αq^{-1}	αq^{-2}	αq^{-4}

Tabela 3.1: Relações entre a γ -lei e o potencial homogêneo

Da segunda relação, nós vemos que a curvatura do espaço não depende do valor de n . Está associada com a energia da partícula teste, e , mais precisamente, com seu sinal. Modelos relativísticos aberto ($k=-1$), fechados ($k=1$) ou plano ($k=0$) são descritos apenas se a energia total da partícula é maior, menor ou igual a zero, respectivamente.

Modelos relativísticos fechados são cíclicos. Se $\gamma > 2/3$, o universo expande de um *big bang* , alcança o tamanho máximo e contrai para um *big*

crunch em um tempo finito. Entretanto, se $\gamma < 2/3$ o modelo apresenta um *bounce* (um valor mínimo para o fator de escala). Neste caso, o universo está contraindo em $t < 0$, alcança o tamanho mínimo em $t = 0$, e expande quando $t > 0$. Na descrição tipo partícula tais características são perfeitamente descritas e estão relacionadas com a existência de um ponto de retorno no potencial homogêneo. Este ponto é definido por tomar a energia cinética nula, ou equivalentemente, $E = \alpha q^n$. Uma vez que α é negativo e $q \geq 0$ vemos que apenas modelos com $E < 0$ terão ponto de retorno, definido por $q_{max} = (E/\alpha)^{1/n}$. O ponto de retorno será um *big-bounce* ou não dependendo apenas do sinal do índice n . Para o caso $E = 0$ é fácil ver de (3.45) que $q(t) \approx t^{2/(2-n)}$, ou $q(t) \approx t^{2/3\alpha}$, que é o comportamento dinâmico de um modelo FRW plano. Assim, o comportamento dinâmico de qualquer universo fechado ou aberto é facilmente recuperado pela escolha conveniente dos valores dos parâmetros n e E .

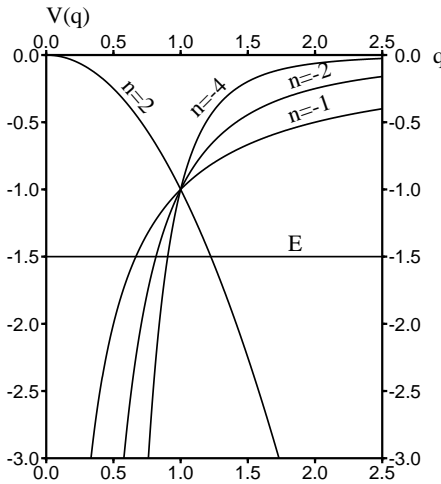


Figura 3.2: As curvas são: vácuo ($n=2$), poeira ($n=1$), radiação ($n=-2$), stiff matter ($n=-4$). Modelos fechados ($E < 0$) possui um ponto de retorno que é um Big-Bounce para n positivo. Para valores negativos de n o modelo expande de um big bang, alcança o tamanho máximo e contrai para um big crunch em um tempo finito. Para $E \geq 0$ não existe ponto de retorno.

Modelos com constante cosmológica não nula podem ser incorporados. A equação (3.42), na presença de um termo cosmológico não nulo torna-se:

$$a\ddot{a} + \left(\frac{3\gamma - 2}{2}\right)\dot{a}^2 + \left(\frac{3\gamma - 2}{2}\right)\epsilon - \frac{\gamma}{2}\Lambda a^2 = 0 \quad . \quad (3.49)$$

Considerando um potencial da forma $V(q) = \alpha q^n - \frac{1}{6}\Lambda q^2$ e repetindo os mesmo passos anteriores, chega-se a:

$$q\ddot{q} - \frac{n}{2}\dot{q}^2 + \frac{nE}{m} + \frac{(n-2)}{6}\Lambda q^2 = 0 \quad . \quad (3.50)$$

Novamente, desde que identifiquemos n como em (3.47) e E como em (3.48), a equação relativística do movimento (3.49) é obtida. Lima *et al.* também aplicaram o tratamento lagrangiano para cosmologias deflacionárias [27] (ver mais em [26]).

No próximo capítulo, nós generalizamos para o caso de mistura de fluidos o formalismo lagrangiano. Dessa forma, poderemos discutir os análogos lagrangianos para modelos cosmológicos mais realistas.

CAPÍTULO 4

A FORMULAÇÃO LAGRANGIANA PARA MODELOS DO TIPO FRW COM MISTURAS DE FLUIDOS

4.1 Introdução

Neste capítulo, nós generalizamos para o caso de mistura de fluidos o formalismo lagrangiano (análogo do fluido simples) proposto originalmente por Lima *et al.*(1998). Dessa forma, podemos discutir os análogos lagrangianos para modelos cosmológicos mais realistas contendo as componentes de bárions, matéria escura, energia escura, ou mesmo qualquer forma de interação entre elas [31, 32]. O tratamento é estendido para os seguintes cenários cosmológicos acelerados: matéria-x + CDM (XCDM), matéria-x com equação de estado dinâmica + CDM (X(z)CDM), modelos com Λ -variável (modelo de Chen-Wu generalizado e o modelo de Wang-Meng), o chamado gás de Chaplygin e é obtida, também, a descrição tipo partícula para algumas cosmologias multidimensionais. Por fim, apresentamos como o potencial da partícula teste pode ser obtido por meio das observações de SNe Ia e comparamos nosso método com alguns trabalhos recentes presentes na literatura que buscam uma descrição similar.

4.2 Metodologia e Discussões

Nesta seção, obteremos os potenciais que nos fornece uma descrição tipo partícula para diversos modelos cosmológicos com energia escura. Afim de minimizar constantes faremos a massa da partícula igual a unidade e a coordenada linear generalizada será a coordenada x .

4.2.1 Matéria-X ($p = \omega_x \rho_x$) + CDM

A equação diferencial relativística para o caso de uma cosmologia com energia escura tipo matéria-x e matéria escura fria (CDM) já foi obtida no capítulo dois (ver 2.20 e 2.21):

$$a\ddot{a} + \left(\frac{3\omega + 1}{2}\right) (\dot{a}^2 + k) = \frac{4\pi G\omega\rho_{m0}a_0^3}{a} \quad (4.1)$$

com integral primeira:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_{x0}a_0^{3(\omega+1)}}{3a^{3\omega+1}} + \frac{8\pi G\rho_{m0}a_0^3}{3a} - k \quad (4.2)$$

Substituindo (4.2) em (4.1):

$$a\ddot{a} + (3\omega + 1)\frac{4\pi G\rho_{x0}a_0^{3(\omega+1)}}{3a^{3\omega+1}} + \frac{4\pi G\rho_{m0}a_0^3}{3a} = 0 \quad (4.3)$$

A lagrangiana clássica da partícula é $L(x, \dot{x}) = \dot{x}^2/2 - V(x)$. A equação de movimento de Euler-Lagrange é obtido por: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, a qual nos fornece

$$x\ddot{x} + x\frac{dV}{dx} = 0 \quad (4.4)$$

Identificando a coordenada linear x com o fator de escala a , igualando (4.3) com (4.4) e integrando a equação resultante via integral definida de $V_0 \rightarrow V$ e $x_0 \rightarrow x$ (o índice 0 indicando a época atual), obtemos:

$$V(x) = -\frac{4\pi G\rho_{x0}x_0^{3(\omega+1)}}{3x^{3\omega+1}} - \frac{4\pi G\rho_{m0}x_0^3}{3x} \quad (4.5)$$

e

$$V(x_0) = V_0 = -\frac{4\pi G\rho_{x0}x_0^2}{3} - \frac{4\pi G\rho_{m0}x_0^3}{3} \quad (4.6)$$

Assim, obtemos um potencial $V(x)$ sob o qual a partícula descreve o mesmo comportamento dinâmico que o fator de escala na equação (4.3). Resolvendo (4.4) com (4.5):

$$x\ddot{x} + (3\omega + 1)\frac{4\pi G\rho_{x0}x_0^{3(\omega+1)}}{3x^{3\omega+1}} + \frac{4\pi G\rho_{m0}x_0^3}{3x} = 0 \quad (4.7)$$

Entretanto, esta equação não contém o termo de curvatura, para uma descrição tipo partícula completa devemos também obter um análogo da equação geral relativística (4.1).

Para isto, isolamos o termo $\frac{4\pi G\rho_{x0}x_0^{3(\omega+1)}}{3x^{3(\omega+1)}}$ em (4.5), substituímos em (4.7) e usando a equação de conservação de energia $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$, obtemos:

$$x\ddot{x} + (3\omega + 1)\left(\frac{\dot{x}^2}{2} - E\right) = \frac{4\pi G\omega\rho_{m0}x_0^3}{x} \quad (4.8)$$

De forma que (4.8) nos fornecerá (4.1), se $E = \frac{-k}{2}$, como obtido por Lima *et al.*[26] para o caso de fluido simples.

4.2.2 Matéria-X com equação de estado dinâmica ($p = \omega_x(z)\rho_x$) + CDM

As equações relativísticas para este modelo já foram obtidas (ver 2.20 e 2.22):

$$a\ddot{a} + \left(\frac{3\omega + 1}{2}\right)(\dot{a}^2 + k) = \frac{4\pi G\omega\rho_{m0}a_0^3}{a} \quad (4.9)$$

onde $\omega = \omega(z)$.

A primeira integral é:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_{x0}a_0^3}{3a \exp\left[\int_{a_0}^a 3\omega/a' da'\right]} + \frac{8\pi G\rho_{m0}a^3}{3a} - k \quad (4.10)$$

Substituindo (4.10) em (4.9):

$$a\ddot{a} + (3\omega + 1)\frac{4\pi G\rho_{x0}a_0^3}{3a \exp\left[\int_{a_0}^a 3\omega/a' da'\right]} + \frac{4\pi G\rho_{m0}a^3}{a} = 0 \quad (4.11)$$

Identificando a coordenada linear x com o fator de escala a , igualando (4.11) com (4.4) e integrando a equação resultante via integral definida de $V_0 \rightarrow V$ e $x_0 \rightarrow x$ (o índice 0 indicando a época atual), obtemos:

$$V(x) = -\frac{4\pi G\rho_{x0}x_0^2}{3 \exp\left[\int_{x_0}^x \frac{(3\omega+1)}{x'} dx'\right]} - \frac{4\pi G\rho_{m0}x_0^3}{3x} \quad (4.12)$$

e

$$V(x_0) = V_0 = -\frac{4\pi G\rho_{x0}x_0^2}{3} - \frac{4\pi G\rho_{m0}x_0^3}{3} \quad (4.13)$$

Resolvendo (4.4) com (4.12), obtemos:

$$x\ddot{x} + (3\omega + 1)\frac{4\pi G\rho_{x0}x_0^3}{3x \exp\left[\int_{x_0}^x 3\omega/x' dx'\right]} + \frac{4\pi G\rho_{m0}x_0^3}{x} = 0 \quad (4.14)$$

Isolando $\frac{4\pi G\rho_{x0}x_0^3}{3x \exp\left[\int_{x_0}^x 3\omega/x' dx'\right]}$ em (4.12), substituindo em (4.14) e usando a equação de conservação de energia $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$, chegamos a:

$$x\ddot{x} + (3\omega + 1)\left(\frac{\dot{x}^2}{2} - E\right) = \frac{4\pi G\rho_{m0}x_0^3}{a} \quad (4.15)$$

de forma que devemos identificar $E = -k/2$ para recuperar a equação relativística.

Vamos explicitar o potencial para alguns casos de $P = \omega(z) + \text{CDM}$:

- $p = (\omega_0 + \omega_1 z)\rho + \text{CDM}$

$$V(x) = -\frac{4\pi G\rho_{x0}x_0^2}{3} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3(\omega_0-\omega_1)+1} e^{3\omega_1(\frac{x_0}{x}-1)} - \frac{4\pi G\rho_{m0}x_0^2}{3} \left(\frac{x_0}{x}\right) \quad (4.16)$$

- $P = (\omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z})\rho_x + \text{CDM}$

$$V(x) = -\frac{4\pi G\rho_{x0}x_0^2}{3} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3(\omega_0+\omega_1)+1} e^{3\omega_1(\frac{x_0}{x}-1)} - \frac{4\pi G\rho_{m0}x_0^2}{3} \left(\frac{x_0}{x}\right) \quad (4.17)$$

Em todos os casos:

$$V(x_0) = V_0 = -\frac{4\pi G\rho_{x0}x_0^2}{3} - \frac{4\pi G\rho_{m0}x_0^2}{3} \quad (4.18)$$

Neste ponto é interessante reescrever o potencial de uma forma adimensional, colocando em termos de parâmetros medidos na cosmologia observacional. Isto pode ser feito lembrando que $\Omega_{0m} = 8\pi G\rho_{m0}/3H_0^2$ e $\Omega_{0x} = 8\pi G\rho_{x0}/3H_0^2$, então:

- $p = \omega_x \rho_x + \text{CDM}$

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{0x}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3\omega+1} - \frac{\Omega_{0m}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right) \quad (4.19)$$

- $p = (\omega_0 + \omega_1 z)\rho_x + \text{CDM}$

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{0x}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3(\omega_0-\omega_1)+1} e^{3\omega_1(\frac{x_0}{x}-1)} - \frac{\Omega_{0m}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right) \quad (4.20)$$

- $P = (\omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z})\rho_x + \text{CDM}$

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{0x}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3(\omega_0+\omega_1)+1} e^{3\omega_1(\frac{x_0}{x}-1)} - \frac{\Omega_{0m}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right) \quad (4.21)$$

Desta forma

$$\frac{V_0}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{x0}}{2} - \frac{\Omega_{m0}}{2} = -0.5\Omega_{total} \quad (4.22)$$

A linha de raciocínio utilizada é a mesma para o Gás de Chaplygin, modelo de Wang-Meng e Chen-Wu generalizado, os detalhes dos cálculos estão apresentados em detalhes no apêndice B. É direto mostrar que com os potências abaixo a energia total da partícula é identificada com a curvatura ($E = -k/2$), como feito anteriormente. Assim:

4.2.3 Gás de Chaplygin: $p = -\frac{A}{\rho_{GC}^\alpha}$

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{g0}}{2} \left[A_s + (1 - A_s) \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{(1+\alpha)}} \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 - \frac{\Omega_{j0}}{2} \left(\frac{x_0}{x} \right) \quad (4.23)$$

4.2.4 Chen-Wu generalizado: $\Lambda(t) = \frac{\Lambda_0}{a^n}$

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{0m}}{2} \left(\frac{x_0}{x} \right) + \frac{n\Omega_{\Lambda 0}}{2(3-n)} \left(\frac{x_0}{x} \right) - \frac{3\Omega_{\Lambda 0}}{2(3-n)} \left(\frac{x_0}{x} \right)^{n-2} \quad (4.24)$$

4.2.5 Wang-Meng: $\rho_m = \rho_{m0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3+\epsilon}$

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 - \frac{3\Omega_{0m}}{2(3-\epsilon)} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\epsilon-1} \quad (4.25)$$

Na figura (4.1) apresentamos o gráfico dos potenciais adimensionais para os cenários de Gás de Chaplygin, poeira e vácuo. É possível observar, através do comportamento do potencial, a propriedade do gás de Chaplygin de interpolar entre poeira ($x \ll x_0$) e vácuo ($x \gg x_0$) (ver seção 2.3.3). Neste gráfico, utilizamos os valores dos parâmetros do gás de Chaplygin como $A_s = 0.84$ e $\alpha = 1$ (fornecidos por [120], onde assumem universo plano e $\Omega_b = 0.04$), para os potenciais do vácuo e poeira, $\Omega_{poeira} = 0.3$ e $\Omega_{v\u00e1cuo} = 0.7$, respectivamente.

Na figura (4.2) temos o gráfico do potencial como função do redshift para outros cenários cosmol\u00f3gicos com energia escura. Para isto, utilizamos a rela\u00e7\u00e3o $x_0/x = 1 + z$ e valores dos *best fits* para os par\u00e2metros ω_0 , ω_1 , Ω_{Lambda} , Ω_m fornecidos por [121] (s\u00e3o assumidos a priori um universo plano e $\Omega_m = 0.3$). As diferentes curvas dos potenciais possuem um m\u00e1ximo, indicando uma regi\u00e3o de transi\u00e7\u00e3o (*redshift* de transi\u00e7\u00e3o) entre o movimento desacelerado e o acelerado da part\u00edcula, entretanto, para os diferentes modelos esta transi\u00e7\u00e3o ocorre em diferentes valores de z . O *redshift* de transi\u00e7\u00e3o para cada potencial ocorre para o valor de z em que

$$\frac{d \frac{V(x)}{x_0^2 H_0^2}}{dz} = 0$$

Na figura (4.3) est\u00e3o plotados os potenciais para o modelos Wang & Meng com e sem b\u00e1rions. Os valores dos par\u00e2metros utilizados foram [79]: $\Omega_m = 0.27$, $\Omega_b = 0.04$ (no caso em que \u00e9 considerado essa componente) e $\epsilon = 0.11$. \u00c9 poss\u00edvel observar claramente a modifica\u00e7\u00e3o no *redshift* de transi\u00e7\u00e3o ap\u00f3s a adi\u00e7\u00e3o de b\u00e1rions, comportamento descrito anteriormente por Lima & Alcaniz (ver se\u00e7\u00e3o 2.3.2).

Em (4.4), a t\u00edtulo de compara\u00e7\u00e3o, temos a adi\u00e7\u00e3o do modelo Λ CDM, com $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_m = 0.3$.

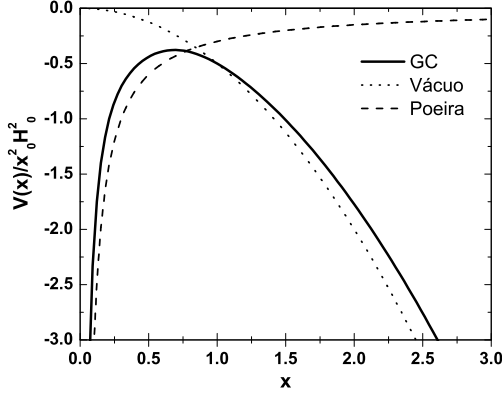


Figura 4.1: Potenciais para os cenários gás de Chaplygin, poeira e vácuo.

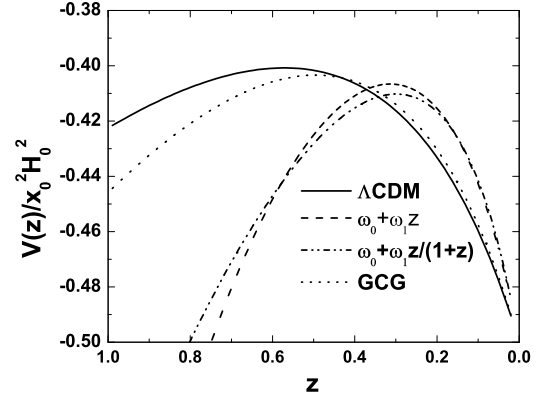


Figura 4.2: $V(z)$ para diferentes modelos de energia escura.

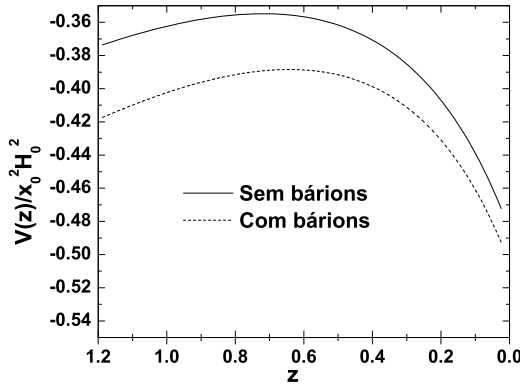


Figura 4.3: Potenciais para o modelo de Wang & Meng com e sem a presença dos bárions. Notar as diferentes épocas de transição.

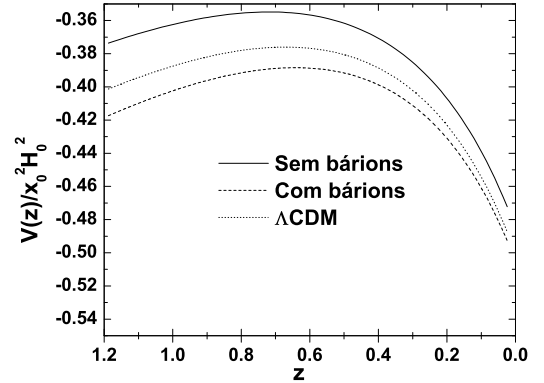


Figura 4.4: Gráficos de Wang & Meng (com e sem bárions) e Λ CDM.

Por completeza, apresentaremos na próxima seção a descrição tipo partícula para algumas cosmologia em D-dimensões espaciais. Por simplicidade, explicitaremos os cálculos para o modelo $p = \omega\rho$ em D-dimensões espaciais, entretanto, todos os outros casos estão apresentados em detalhes no apêndice B.

4.2.6 Modelos multidimensionais:

- $p = \omega\rho$ em D-dimensões espaciais:

Utilizando (2.28) e (2.29):

$$a\ddot{a} + \frac{16\pi G_D \rho_{\omega 0} a_0^{D(\omega+1)}}{D(D-1)a^{D(\omega+1)-2}} \left(\frac{D(\omega+1)-2}{2} \right) = 0 \quad (4.26)$$

Identificando a coordenada linear x com o fator de escala a , igualando (4.26) com (4.4) e integrando a equação resultante via integral definida de $V_0 \rightarrow V$ e $x_0 \rightarrow x$ (o índice 0 indicando a época atual), obtemos:

$$V(x) = -\frac{16\pi G_D \rho_{\omega 0} x_0^{D(\omega+1)}}{2D(D-1)x^{D(\omega+1)-2}} \quad (4.27)$$

e

$$V(x_0) = V_0 = -\frac{16\pi G_D \rho_{\omega 0} x_0^2}{2D(D-1)} \quad (4.28)$$

De forma que ficamos com uma equação dinâmica idêntica a (4.26) para a partícula após resolver (4.4) com (4.27):

$$x\ddot{x} + \frac{16\pi G_D \rho_{\omega 0} x_0^{D(\omega+1)}}{D(D-1)x^{D(\omega+1)-2}} \left(\frac{D(\omega+1)-2}{2} \right) = 0 \quad (4.29)$$

Para obter a equação relativística com curvatura ¹ (2.28):

$$a\ddot{a} + \left(\frac{D(\omega+1)-2}{2} \right) (\dot{a}^2 + k) = 0 \quad (4.30)$$

isolamos $-\frac{16\pi G_D \rho_{\omega 0} x_0^{D(\omega+1)}}{D(D-1)x^{D(\omega+1)-2}}$ em (4.27), substituímos em (4.29) e utilizamos a lei de conservação de energia $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$. Assim:

$$x\ddot{x} + (D(\omega+1)-2) \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - E \right) = 0 \quad (4.31)$$

e novamente $E = -k/2$.

¹No apêndice A-parte 2, nós generalizamos para esta equação (com e sem o termo Λ) o método de redução a forma de um oscilador.

- $p = \omega\rho + \Lambda$ em D-dimensões espaciais:

$$V(x) = -\frac{\Lambda x^2}{D(D-1)} - \frac{16\pi G_D \rho_{\omega 0} x_0^{D(\omega+1)}}{2D(D-1)x^{D(\omega+1)-2}} \quad (4.32)$$

e

$$V(x = x_0) = V_0 = -\frac{\Lambda x_0^2}{D(D-1)} - \frac{16\pi G_D \rho_{\omega 0} x_0^2}{2D(D-1)} \quad (4.33)$$

- $p = \omega_x \rho_x + \text{CDM}$ em D-dimensões espaciais:

$$V(x) = -\frac{8\pi G_D \rho_{0m} x_0^D}{D(D-1)x^{D-2}} - \frac{16\pi G_D \rho_{x0} x_0^{D(\omega+1)}}{2D(D-1)x^{D(\omega+1)-2}} \quad (4.34)$$

e

$$V_0 = -\frac{8\pi G_D \rho_{0m} x_0^2}{D(D-1)} - \frac{16\pi G_D \rho_{x0} x_0^2}{2D(D-1)} \quad (4.35)$$

Generalizando a expressão para o parâmetro de densidade Ω_{0j} como $\Omega_{0j} = \frac{16\pi\rho_{0j}}{D(D-1)H_0^2}$ (ver(2.25)), obtém-se:

- **$p = \omega\rho$ em D-dimensões espaciais:**

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{\omega 0}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{D(\omega+1)-2} \quad (4.36)$$

- **$p = \omega\rho + \Lambda$ em D-dimensões espaciais:**

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{\omega 0}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{D(\omega+1)-2} - \frac{\Omega_{0\Lambda}}{2} \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \quad (4.37)$$

onde $\Omega_{\Lambda} = \frac{2\Lambda}{D(D-1)H_0^2}$

- **$p = \omega_x \rho_x + \text{CDM}$ em D-dimensões espaciais:**

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{0x}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{D(\omega+1)-2} - \frac{\Omega_{0m}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{D-2} \quad (4.38)$$

No caso de $D \rightarrow 3$, os potenciais (4.36), (4.37) e (4.38) naturalmente se reduzem aos casos tridimensionais descritos anteriormente (ver (4.19) com $\Omega_m = 0$, com $\omega = -1$ e $\Omega_m \neq 0$ e a própria (4.19), respectivamente.)

4.3 A Reconstrução do Potencial

4.3.1 A relação Distância-Luminosidade

O parâmetro de desaceleração é definido por [122, 123]:

$$q(z) \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{dH^{-1}(z)}{dt} - 1 \quad (4.39)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala cósmico (normalizado para ser unitário hoje), $H(z) = \dot{a}/a$ é a taxa de expansão e $q_0 = q(z=0)$. Para um universo plano dominado por matéria $q = 0.5$ e para um universo plano dominado por energia do vácuo $q = -1$.

Em um universo plano a distância de luminosidade d_L é:

$$d_L = (1+z) \int_0^z \frac{du}{H(u)} \quad (4.40)$$

e em termos do parâmetro de desaceleração é escrita como[86]:

$$d_L = (1+z)H_0^{-1} \int_0^z du \exp \left[- \int_0^u [1+q(v)] d \ln(1+v) \right] \quad (4.41)$$

É importante perceber aqui que a equação (4.41) depende apenas da validade da métrica de FRW, em outras palavras, a desaceleração-aceleração pode ser examinada sem qualquer suposição a respeito da validade da relatividade geral nem a cerca do conteúdo de matéria-energia do universo. Desta forma, a relação distância-*redshift* de SNe Ia é considerada como um registro puramente cinemático da história da expansão do universo e este modelo cinemático é utilizado com representações paramétricas para $q(z)$ [106]. Uma das parametrizações utilizadas é a expansão de $q(z)$ da

forma $q(z) = q_0 + z \frac{dq}{dz}$, onde $\frac{dq}{dz}$ é definida para ser calculada em $z = 0$. Os valores encontrados por Riess *et al.* ([106]) para estes dois parâmetros, via estatística de χ^2 são: $q_0 = -0.75 \pm 0.285$ e $dq/dz = q_1 = 1.7 \pm 1$.

4.3.2 O potencial como função do parâmetro de desaceleração, $q(z)$

O potencial da partícula pode ser obtido empiricamente por meio dos dados de distância-luminosidade das SnIa. Vejamos como é possível:

Identificando o fator de escala $a(t)$ com a coordenada unidimensional da partícula $x(t)$:

$$q = -\frac{x\ddot{x}}{\dot{x}^2} \quad (4.42)$$

Da dinâmica Newtoniana $x\ddot{x} = -x \frac{dV}{dx}$ e da equação de energia $E = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x)$. Assim, é direto de (4.42) que:

$$q = \frac{x}{(2E - 2V)} \frac{dV}{dx} = \frac{x}{(-k - 2V)} \frac{dV}{dx} \quad (4.43)$$

uma vez que $E = -k/2$ para uma partícula de massa unitária. Considerando que vivemos em universo muito próximo de plano [41, 38, 37] tomaremos $k = 0$ e, por meio da equação $1/x = 1 + z$, tomando $x_0 = 1$, chega-se a:

$$q = \frac{(1+z)}{2V} \frac{dV}{dz} \quad (4.44)$$

Utilizando a expansão para o $q(z)$ e resolvendo (4.44) chega-se a:

$$\frac{V(x)}{x_0^2 H_0^2} = \frac{V_0}{x_0^2 H_0^2} \exp[2q_1 z] (1+z)^{2(q_0 - q_1)} \quad (4.45)$$

com $\frac{V_0}{x_0^2 H_0^2} = -0.5$, uma vez que em todos os casos $\frac{V_0}{x_0^2 H_0^2} = -0.5 \Omega_{total}$ e $\Omega_{total} \approx 1$.

Abaixo, temos o gráfico do potencial reconstruído pela utilização dos valores dos parâmetros q_0 e q_1 . As curvas acima e abaixo correspondem ao valor de 1σ .

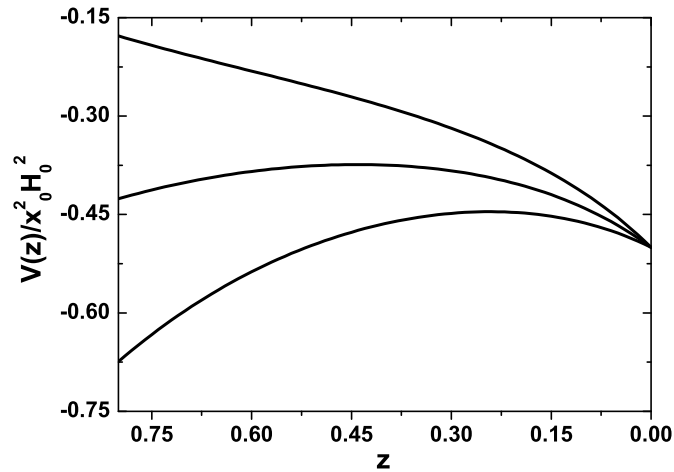


Figura 4.5: Reconstrução do potencial da partícula via distância-luminosidade de SnIa. A região permitida é a hachurada em 1σ .

Temos agora o potencial reconstruído juntamente com os potenciais de diversos modelos. Observamos que todos caem dentro do nível de confiança estatístico de 1σ .

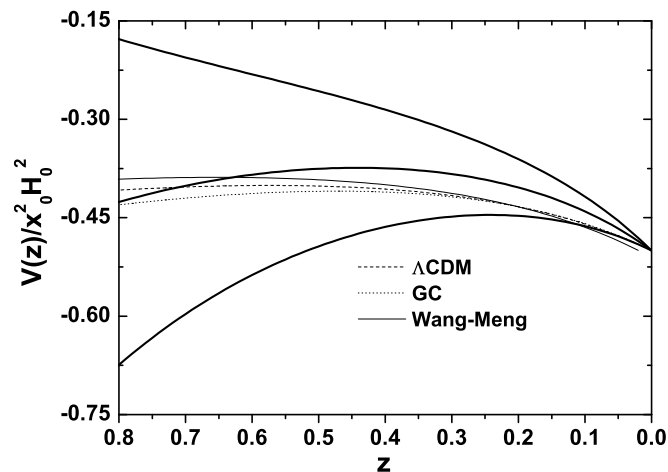


Figura 4.6: Reconstrução do potencial da partícula via distância-luminosidade de SnIa juntamente com os potenciais de outros modelos.

4.4 A descrição Hamiltoniana de Szydlowski & Czaja

Em 2004, Szydlowski & Czaja [124] propuseram uma descrição Hamiltoniana para as cosmologias FRW com quintessência, onde a equação de estado da componente escura é caracterizada por $p = \omega(a)\rho$. O método utilizado será analisado a seguir.

O Hamiltoniano clássico de uma partícula sob a ação de um potencial unidimensional $V(a)$ é:

$$H(a, \dot{a}) = \frac{\dot{a}^2}{2} + V(a) \quad (4.46)$$

Supondo que ρ obedece "a equação da continuidade", a partícula realiza um movimento tal que as trajetórias no espaço de fase (a, \dot{a}) permanecem ao nível de energia $H = E = const$.

Como vimos, uma das equações de Friedmann é (ver (1.6)):

$$\rho = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2} - \Lambda \quad (4.47)$$

Szydlowski & Czaja identificaram as expressões (4.46) e (4.47):

$$\frac{\dot{a}^2}{2} + V(a) = \frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{k}{2} - \frac{\rho a^2}{6} - \frac{\Lambda a^2}{6} \quad (4.48)$$

de forma que o potencial para (4.46) tornou-se:

$$V(a) = -\frac{\rho_{eff}(a)}{6}a^2 \quad ; \quad \rho_{eff} = \left(-\frac{3k}{a^2} + \rho + \Lambda\right) \quad (4.49)$$

Assim, a curvatura e o termo Λ são inclusos dentro da densidade efetiva, ou seja, no potencial. De forma que as trajetórias no espaço de fase (a, \dot{a}) estão no nível de energia zero, $H = E \equiv 0$.

Para o caso de um fluido com equação de estado $p = \omega\rho$, com $\omega(a) = \omega$, esta descrição nos fornece o seguinte potencial:

$$V(a) = \frac{k}{2} - \frac{\Lambda}{6}a^2 + \frac{\rho_0}{a^{1+3\omega}} \quad (4.50)$$

ou seja, este potencial difere do que seria encontrado pelo método de Lima *et al.*:

$$V(q) = \alpha q^{-(1+3\omega)} - \frac{1}{6}\Lambda q^2$$

pelo fator $k/2$.

Diante desta descrição, é importante compararmos os dois métodos:

- Nenhuma suposição ou limite a priori com respeito a energia da partícula é feita na descrição tipo-partícula proposta por Lima *et al.*, pelo contrário, foi possível em todos os casos analisados identificar a energia da partícula teste com a curvatura apenas por comparar as equações de movimento adivindas da cosmologia relativística com a equação de movimento de Euler-Lagrange da partícula. Nós encontramos que $E = -k/2$. É interessante ressaltar que esta mesma relação é encontrada na descrição hidrodinâmica (ver seção 3.1), onde o universo é comparado a uma partícula com velocidade $v \geq v_{escape}$ se $k \leq 0$, respectivamente;
- a densidade efetiva (ρ_{eff}) definida por eles é uma variável de fluido e não de partícula;
- por fim, nos modelos de FRW, a matéria, por exemplo, evolui segundo $\rho_m \propto a^{-3}$ para **todos os valores da curvatura k** . Portanto, não faz sentido introduzir um ρ_{eff} que dependa da curvatura.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

Ao longo desta dissertação foi apresentada uma ampla discussão sobre a cosmologia moderna (seu status teórico e observacional), bem como a apresentação de duas diferentes abordagens clássicas (hidrodinâmica e lagrangiana) para a dinâmica dos modelos relativísticos do tipo FRW.

Nosso trabalho foi desenvolvido em 4 etapas. Nos **capítulos 1 e 2**, discutimos as bases observacionais e teóricas que dão suporte a cosmologia moderna. Tratamos da matéria escura e energia escura discutindo as necessidades teóricas e observacionais para a existência destas componentes dentro do cenário expansionista. Em particular, mostramos como a aceleração cósmica, nos modelos tipo FRW, só pode ser explicada pela existência da energia escura. Discutimos algumas explicações para a sua origem e os mais importantes candidatos, tais como: a constante cosmológica Λ , modelos com decaimento do vácuo $\Lambda(t)$ (Chen-Wu e Wang-Meng), matéria-x (XCDM), uma componente de matéria-x dinâmica (X(z)CDM), gás de Chaplygin e modelos multidimensionais.

No capítulo 3, fizemos uma revisão bibliográfica da histórica abordagem dos modelos relativísticas do tipo FRW via uma descrição hidrodinâmica clássica, baseada nas equações de Poisson, da gravitação Newtoniana e das próprias equações básicas da hidrodinâmica. Vimos que para descrever modelos com pressão nula nenhum conhecimento relativística é necessário, mesmo para os diferentes valores possíveis da curvatura espacial. Nesta

descrição, a curvatura foi associada a energia total das partículas do gás, sendo ($k = 0, 1$ e -1) identificados com, respectivamente, $E_T = 0$, $E_T < 0$ e $E_T > 0$, ou seja, as velocidades das partículas do fluido são igual, menor e maior, respectivamente, que a velocidade de escape do sistema. Vimos que para modelos com $p \neq 0$ a descrição hidrodinâmica requer conhecimentos de relatividade, no caso da descrição de McCrea (1951), hipóteses da relatividade geral foram adotadas, no caso de Harrison (1965), da relatividade especial. Na abordagem de McCrea vimos que não foi possível identificar a curvatura com a energia das partículas do gás. Mostramos, também, a dificuldade da cosmologia Newtoniana em lidar com a luz, uma vez que hipóteses *ad doc* devem ser assumidas afim de fornecer os resultados relativísticos do *redshift* cosmológico. Por fim, vimos como Lima, Zanchin & Brandenberger [25] modificaram a equação da continuidade (3.26) afim de obter não só as equações de Friedmann (1.6 e 1.7) de *background*, mas também as equações perturbadas, o que não ocorria nas abordagens de Milne & McCrea (1934) [22], McCrea (1951) [23] e Harisson (1965) [24].

Saindo da descrição hidrodinâmica para a lagrangiana, apresentamos o método originalmente proposto em 1998 por Lima, Moreira & Santos [26] que contorna o problema da descrição hidrodinâmica de cosmologias com $p \neq 0$. Nesta abordagem, o comportamento dinâmico do fator de escala para modelos FRW onde a fonte de curvatura é um fluido simples com equação geral $p = (\gamma - 1)\rho$ foi substituído pelo movimento de uma partícula teste sob a ação de um potencial homogêneo unidimensional $V(q) = \alpha q^n$. Vimos que o índice \mathbf{n} foi associado com o parâmetro da equação de estado ($n = 2 - 3\gamma$), enquanto que a energia total da partícula foi associada ao parâmetro de curvatura ($E = -mk/2$).

No **capítulo 4**, generalizamos a descrição lagrangiana para modelos com misturas de fluidos, ou seja, mais realistas, contendo as componentes de matéria escura e energia escura, ou mesmo qualquer forma de interação entre elas. O tratamento foi estendido para diversos candidatos a ener-

gia escura, incluindo matéria-x, modelos com Λ -variável, o chamado gás de Chaplygin e foi obtida, também, a descrição para cosmologias multi-dimensionais. Vimos que propriedades dinâmicas, como a desaceleração e aceleração do universo, puderam ser descritas apenas em termos da função potencial do sistema e que a curvatura foi novamente associada a energia total da partícula teste por ($E = -mk/2$). Abaixo apresentamos um resumo dos potenciais adimensionais em termos dos parâmetros cosmológicos:

- $p = \omega_x \rho_x + \text{CDM}$

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{0x}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3\omega+1} - \frac{\Omega_{0m}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right) \quad (5.1)$$

- $p = (\omega_0 + \omega_1 z) \rho_x + \text{CDM}$

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{0x}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3(\omega_0-\omega_1)+1} e^{3\omega_1(\frac{x_0}{x}-1)} - \frac{\Omega_{0m}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right) \quad (5.2)$$

- $P = (\omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z}) \rho_x + \text{CDM}$

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{0x}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3(\omega_0+\omega_1)+1} e^{3\omega_1(\frac{x_0}{x}-1)} - \frac{\Omega_{0m}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right) \quad (5.3)$$

- Chen-Wu generalizado $\Lambda(t) = \frac{\Lambda_0}{a^n}$

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{0m}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right) + \frac{n\Omega_{\Lambda 0}}{2(3-n)} \left(\frac{x_0}{x}\right) - \frac{3\Omega_{\Lambda 0}}{2(3-n)} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{n-2} \quad (5.4)$$

- Wang-Meng $\rho_m = \rho_{m0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3+\epsilon}$

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{2} \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \frac{3\Omega_{0m}}{2(3-\epsilon)} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\epsilon-1} \quad (5.5)$$

- Gás de Chaplygin

$$p = -\frac{A}{\rho_{GC}^\alpha} \quad ; \quad \rho_{GC} = \rho_{GC0} \left[A_s + (1 - A_s) \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+\alpha)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{g0}}{2} \left[A_s + (1 - A_s) \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{(1+\alpha)}} \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 - \frac{\Omega_{j0}}{2} \left(\frac{x_0}{x} \right) \quad (5.6)$$

- $p = \omega\rho$ em D-dimensões espaciais:

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_0}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{D(\omega+1)-2} \quad (5.7)$$

- $p = \omega\rho + \Lambda$ em D-dimensões espaciais:

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_0}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{D(\omega+1)-2} - \frac{\Omega_{0\Lambda}}{2} \quad (5.8)$$

onde $\Omega_{\Lambda} = \frac{2\Lambda}{D(D-1)H_0^2}$

- $p = \omega_x \rho_x + \text{CDM}$ em D-dimensões espaciais:

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{0x}}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{D(\omega+1)-2} - \frac{\Omega_{0m}}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{D-2} \quad (5.9)$$

Ainda no capítulo 4, comparamos nosso trabalho com um existente na literatura [124] que busca uma descrição similar tipo partícula. No caso, é apresentado uma descrição Hamiltoniana de modelos relativísticos do tipo FRW. Mostramos as diferenças entre as duas abordagens. Por fim, detalhamos o procedimento no qual o potencial da partícula pôde ser reconstruído via dados de distância-luminosidade de SNe Ia por relacionar o potencial da partícula com uma das possíveis parametrizações do parâmetro de desaceleração utilizada na literatura [106], $q(z) = q_0 + z \frac{dq}{dz}$, e obtemos

$$\frac{V(x)}{x_0^2 H_0^2} = \frac{V_0}{x_0^2 H_0^2} \exp[2q_1 z] (1+z)^{2(q_0 - q_1)}.$$

Apêndice A

Equação do tipo FRW para um fluido simples: redução a forma de um oscilador

Neste apêndice, discutimos como a equação de movimento para modelos (fluido simples) do tipo FRW com equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$ pode ser reduzida a forma de um oscilador.

A.1 Parte 1 - O caso em 3 dimensões espaciais.

As equações de Friedmann com $\Lambda = 0$ fornecem para este cenário (ver 3.37)

$$a\ddot{a} + \Delta\dot{a}^2 + \Delta k = 0 \quad ; \quad \Delta = \left(\frac{3\gamma - 2}{2}\right) \quad (\text{A.1})$$

As soluções desta equação dependem fortemente do par de parâmetros (γ, k) , os dois parâmetros livres. No tempo conforme, $d\eta$ ($dt = a(\eta)d\eta$), (A.1) torna-se:

$$aa'' + (\Delta - 1)a'^2 + \Delta ka^2 = 0 \quad (\text{A.2})$$

Então, utilizando as seguintes mudanças de variáveis:

$$Z(\eta) = \ln a \quad \text{se } \Delta = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$Z(\eta) = a^\Delta \quad \text{se } \Delta \neq 0 \quad (\text{A.4})$$

Obtem-se, respectivamente:

$$Z'' = 0 \quad \text{se } \Delta = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$Z'' + k\Delta^2 Z = 0 \quad \text{se } \Delta \neq 0 \quad (\text{A.6})$$

O significado físico de (A.6) é claro: descreve o movimento clássico de uma partícula sujeita a uma força linear. Esta força é restauradora ou repulsiva dependendo do sinal do parâmetro de curvatura. Modelos fechados ($k=1$) são, para qualquer valor de $\Delta \neq 0$, análogo ao de um oscilador harmônico simples. Portanto, a dinâmica cósmica neste caso é similar a um sistema massa mola onde a constante da mola é determinada pelo parâmetro γ , presente na equação de estado do fluido. É importante observar que se o universo é espacialmente plano ($k=0$), a equação (A.5) implica que o sistema comporta-se como uma partícula livre, o mesmo acontecendo se $\Delta = 0$ em (A.6). Para curvatura negativa ($k=-1$), o sistema comporta-se com um antioscilador, isto é, uma partícula sujeita a uma força repulsiva proporcional a distância.

Para modelos do tipo FRW com um termo cosmológico, Λ (ver 3.49), a equação para o fator de escala toma a seguinte forma:

$$a\ddot{a} + \left(\frac{3\gamma - 2}{2}\right)\dot{a}^2 + \left(\frac{3\gamma - 2}{2}\right)\epsilon - \frac{\gamma}{2}\Lambda a^2 = 0 \quad (\text{A.7})$$

Por meio da mesma troca de variáveis (A.3 e A.4) é possível estender o método para a equação acima. Em particular, universos fechados com um termo cosmológico evoluem como um oscilador não linear ou anarmônico.

A equação na variável Z pode ser escrita como:

$$Z'' + k\Delta^2 Z = \frac{1}{3}\Delta(\Delta + 1)\Lambda Z^{(\Delta+2)/\Delta} \quad (\text{A.8})$$

Portanto, vemos que a equação com o termo cosmológico também é reduzível a forma de um oscilador, com a contribuição anarmônica sendo proporcional ao termo cosmológico e a potência dependendo unicamente do parâmetro γ .

A.2 Parte 2 - O caso em D-dimensões espaciais

As equações de Friedmann com $\Lambda = 0$ para um fluido simples com $p = \omega\rho$ em D-dimensões espaciais fornecem¹ (ver 2.28)

$$a\ddot{a} + \Delta_D \dot{a}^2 + \Delta_D k = 0 \quad ; \quad \Delta_D = \left(\frac{D(\omega + 1) - 2}{2} \right) \quad (\text{A.9})$$

É possível estender o método de solução proposto por Lima [119] para o caso de D-dimensões espaciais. As mesmas substituições de variáveis são feitas em (A.9) para reescrevê-la em termos do tempo conforme:

$$aa'' + (\Delta_D - 1)a'^2 + \Delta_D ka^2 = 0 \quad (\text{A.10})$$

Introduzindo o parâmetro auxiliar

$$Z(\eta) = \ln a \quad \text{se } \Delta_D = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$Z(\eta) = a^{\Delta_D} \quad \text{se } \Delta_D \neq 0 \quad (\text{A.12})$$

encontramos:

$$Z'' = 0 \quad \text{se } \Delta_D = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$Z'' + k\Delta_D^2 Z = 0 \quad \text{se } \Delta_D \neq 0 \quad (\text{A.14})$$

Para um fluido com equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$ em D-dimensões espaciais, é direto mostrar que $\Delta_D = \frac{D\gamma - 2}{2}$. Assim, no caso de D-dimensões espaciais, a única diferença do caso usual é a dimensão do espaço multiplicando o termo γ da equação de estado.

Com o termo Λ , a equação de movimento toma a seguinte forma:

$$a\ddot{a} + \Delta_D \dot{a}^2 + \Delta_D k = \frac{\Lambda(\omega + 1)a^2}{D - 1} \quad (\text{A.15})$$

¹A equação de estado de um fluido simples pode ser apresentada tanto com $p = (\gamma - 1)\rho$ como $p = \omega\rho$, uma vez que podemos tomar $\omega = \gamma - 1$.

onde

$$\Delta_D = \left[\frac{D(\omega + 1) - 2}{2} \right]$$

Neste caso, as substituições de variáveis para o parâmetro $Z(\eta)$, (A.11 e A.12) fornece

$$Z'' + \Delta_D^2 k Z = \frac{2\Delta_D(\Delta_D + 1)\Lambda Z^{\frac{\Delta_D+2}{\Delta_D}}}{D(D-1)} \quad (\text{A.16})$$

Para $D \mapsto 3$ todos os resultados da primeira parte deste apêndice são recuperados.

Apêndice B

Detalhes da descrição lagrangiana para os modelos discutidos nesta dissertação

Neste apêndice, apresentamos os detalhes do cálculo para a obtenção dos potenciais dos seguintes modelos: gás de Chaplygin, Chen-Wu generalizado, Wang-Meng e modelos em D-dimensões espaciais.

B.1 Gás de Chaplygin

A densidade de energia e a equação de estado neste modelo são dadas por

$$\rho_{GC} = \rho_{GC0} \left[A_s + (1 - A_s) \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+\alpha)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad ; \quad p = -\frac{A}{\rho_{GC}^\alpha}$$

Vamos obter a descrição lagrangiana para a versão geral do Gás de Chaplygin, onde $\rho_{0j} = \rho_{m0}$ quando tivermos tratando do caráter quintessencial do GC e $\rho_{0j} = \rho_{0b}$, quando tivermos tratando do caráter quartessencial. A equação geral relativística é:

$$a\ddot{a} + \left(\frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{k}{2} \right) (1 - \zeta) = -\frac{\dot{a}^2}{2} \Omega_j \zeta \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \quad (\text{B.1})$$

onde $\zeta = \frac{3A_s}{[A_s+(1-A_s)(a_0/a)^{3(1+\alpha)}]}$. A integral primeira desta equação é:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} = \frac{4\pi G\rho_{0g}a^2}{3} \left[A_s + (1 - A_s)\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{(1+\alpha)}} + \frac{4\pi G\rho_{0j}a_0^3}{3a} - \frac{k}{2} \quad (\text{B.2})$$

Substituindo (B.2) em (B.1):

$$a\ddot{a} + \frac{4\pi G\rho_{0g}a^2}{3} \left[A_s + (1 - A_s)\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{(1+\alpha)}} (1 - \zeta) + \frac{4\pi G\rho_{0j}a_0^3}{3a} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Identificando a coordenada linear x com o fator de escala a , igualando (B.3) com (4.4) e integrando a equação resultante via integral definida de $V_0 \rightarrow V$ e $x_0 \rightarrow x$ (o índice 0 indicando a época atual), obtemos:

$$V(x) = -\frac{4\pi G\rho_{0g}a^2}{3} \left[A_s + (1 - A_s)\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{(1+\alpha)}} - \frac{4\pi G\rho_{0j}a_0^3}{3a} \quad (\text{B.4})$$

e

$$V(x = x_0) = V_0 = -\frac{4\pi G\rho_{0g}a_0^2}{3} - \frac{4\pi G\rho_{0j}a_0^3}{3} \quad (\text{B.5})$$

Resolvendo (4.4) com (B.4) obtemos:

$$x\ddot{x} + \frac{4\pi G\rho_{0g}x^2}{3} \left[A_s + (1 - A_s)\left(\frac{x_0}{x}\right)^{3(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{(1+\alpha)}} (1 - \zeta) + \frac{4\pi G\rho_{0j}x_0^3}{3x} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Isolando $\frac{4\pi G\rho_{0g}x^2}{3} \left[A_s + (1 - A_s)\left(\frac{x_0}{x}\right)^{3(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{(1+\alpha)}}$ em (B.4), substituindo em (B.6) e usando a equação de conservação de energia, $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$, chegamos a:

$$x\ddot{x} + \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - E\right) \left(1 - \frac{3A_s}{A_s + (1 - A_s)(x_0/x)^{3(\alpha+1)}}\right) = -\frac{4\pi G\rho_0 x_0^3 A_s}{x[A_s + (1 - A_s)(x_0/x)^{3(\alpha+1)}]} \quad (\text{B.7})$$

ou, após trabalhar um pouco com os termos

$$x\ddot{x} + \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - E\right) (1 - \zeta) = -\frac{\dot{x}^2}{2} \Omega_j \zeta \left(\frac{x_0}{x}\right)^3 \quad (\text{B.8})$$

Comparando (B.8) com (B.1) vemos que se a energia total da partícula for identificada com a curvatura por $E = -k/2$, as duas equações descreverão o mesmo comportamento dinâmico.

Em termos dos parâmetros adimensionais, o potencial pode ser reescrito como:

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{g0}}{2} \left[A_s + (1 - A_s) \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3(\alpha+1)}\right]^{\frac{1}{(1+\alpha)}} \left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \frac{\Omega_{j0}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right) \quad (\text{B.9})$$

B.2 Chen-Wu generalizado

Neste modelo, o termo $\Lambda(t)$ decai obedecendo a lei fenomenológica [11]

$$\Lambda(t) = \frac{\Lambda_0}{a^n}$$

Combinando (2.9) e (2.13):

$$a\ddot{a} + \frac{4\pi G\rho_{0m} a_0^3}{3a} - \frac{n\Lambda_0 a_0^3}{6(3-n)a} + \frac{\Lambda_0 a_0^n (n-2)}{2a^{n-2}(3-n)} = 0 \quad (\text{B.10})$$

Identificando a coordenada linear x com o fator de escala a , igualando

(B.10) com (4.4) e integrando a equação resultante via integral definida de $V_0 \longrightarrow V$ e $x_0 \longrightarrow x$ (o índice 0 indicando a época atual), obtemos:

$$V(x) = -\frac{4\pi G\rho_{0m}x_0^3}{3x} + \frac{n\Lambda_0x_0^3}{6(3-n)x} - \frac{\Lambda_0x_0^n}{2(3-n)x^{n-2}} \quad (\text{B.11})$$

e

$$V(x = x_0) = -\frac{4\pi G\rho_{0m}x_0^2}{3} + \frac{n\Lambda_0x_0^2}{6(3-n)} - \frac{\Lambda_0x_0^n}{2(3-n)} \quad (\text{B.12})$$

Com (B.11) em (4.4) obtemos:

$$x\ddot{x} + \frac{4\pi G\rho_{0m}x_0^3}{3x} - \frac{n\Lambda_0x_0^3}{6(3-n)x} + \frac{\Lambda_0x_0^n(n-2)}{2x^{n-2}(3-n)} = 0 \quad (\text{B.13})$$

Isolando $-\frac{\Lambda_0x_0^n}{(3-n)x^{n-2}}$ em (B.11), substituindo em (B.13) e usando a equação de conservação de energia, $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$, chegamos a:

$$x\ddot{x} - \dot{x}^2 + 2E = -\frac{4\pi G\rho_{0m}x_0^3}{x} + \frac{n\Lambda_0x_0^3}{2(3-n)x} - \frac{n\Lambda_0x_0^n}{2(3-n)x^{n-2}} \quad (\text{B.14})$$

Comparando com (2.9) vemos que devemos ter $E = -k/2$.

Em termos dos parâmetros adimensionais, a energia potencial é dada por:

$$\frac{V(x)}{H_0^2x_0^2} = -\frac{\Omega_{0m}}{2}\left(\frac{x_0}{x}\right) + \frac{n\Omega_{\Lambda 0}}{2(3-n)}\left(\frac{x_0}{x}\right) - \frac{3\Omega_{\Lambda 0}}{2(3-n)}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{n-2} \quad (\text{B.15})$$

B.3 Wang-Meng

Neste modelo, o termo de matéria satisfazendo a equação abaixo:

$$\rho_m = \rho_{m0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3+\epsilon}$$

As equações de Friedmann nos fornecem para este modelo (ver 2.16)

$$a\ddot{a} - \dot{a}^2 - k = -\frac{4\pi G\rho_{m0}a^{\epsilon-1}}{a_0^{\epsilon-3}} \quad (\text{B.16})$$

A integral primeira da equação acima é:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_{m0}a^{\epsilon-1}}{3a^{\epsilon-3}} + \frac{8\pi Ga^2\rho_{\Lambda 0}}{3} + \frac{8\pi Ga^2\epsilon\rho_{m0}a^{\epsilon-1}}{3(3-\epsilon)a_0^{\epsilon-3}} - k \quad (\text{B.17})$$

portanto

$$a\ddot{a} = \frac{8\pi Ga^2\rho_{\Lambda 0}}{3} + \frac{8\pi G\epsilon\rho_{m0}a^{\epsilon-1}}{3(3-\epsilon)a_0^{\epsilon-3}} - \frac{4\pi G\rho_{m0}a^{\epsilon-1}}{3x_0^{\epsilon-3}} \quad (\text{B.18})$$

Novamente, identificando a coordenada linear x com o fator de escala a , igualando (B.18) com (4.4) e integrando a equação resultante via integral definida de $V_0 \rightarrow V$ e $x_0 \rightarrow x$ (o índice 0 indicando a época atual), obtemos:

$$V(x) = -\frac{4\pi G\rho_{\Lambda 0}x^2}{3} - \frac{4\pi G\rho_{m0}x^{\epsilon-1}}{(3-\epsilon)x_0^{\epsilon-3}} \quad (\text{B.19})$$

e

$$V(x_0) = V_0 = -\frac{4\pi G\rho_{\Lambda 0}x_0^2}{3} - \frac{4\pi G\rho_{m0}x_0^2}{(3-\epsilon)} \quad (\text{B.20})$$

Resolvendo (4.4) com (B.19) obtemos

$$x\ddot{x} = \frac{8\pi Gx^2\rho_{\Lambda 0}}{3} + \frac{8\pi G\epsilon\rho_{m0}x^{\epsilon-1}}{3(3-\epsilon)x_0^{\epsilon-3}} - \frac{4\pi G\rho_{m0}x^{\epsilon-1}}{3x_0^{\epsilon-3}} \quad (\text{B.21})$$

Multiplicando (B.19) por 2, isolando o termo $\frac{8\pi G\rho_{\Lambda 0}x^2}{3}$, substituindo em (B.21) e usando a equação de conservação de energia $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$, chega-se a:

$$x\ddot{x} - \dot{x}^2 + 2E = -\frac{4\pi G\rho_{m0}a^{\epsilon-1}}{a_0^{\epsilon-3}} \quad (\text{B.22})$$

Comparando (B.22) com (B.16) vemos que $E = -k/2$.

Em termos dos parâmetros adimensionais, a partícula se move sob a

ação do potencial:

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{2} \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \frac{3\Omega_{0m}}{2(3-\epsilon)} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\epsilon-1} \quad (\text{B.23})$$

B.4 $p = \omega\rho + \Lambda$ em D-dimensões espaciais:

Utilizando 2.30 e 2.31

$$a\ddot{a} + \frac{16\pi G_D \rho_{\omega 0}}{D(D-1)} \frac{a_0^{D(\omega+1)}}{a^{D(\omega+1)-2}} \left(\frac{D(\omega+1)-2}{2}\right) - \frac{2\Lambda a^2}{D(D-1)} = 0 \quad (\text{B.24})$$

Igualando (4.4) com (B.24), obtemos o potencial:

$$V(x) = -\frac{\Lambda x^2}{D(D-1)} - \frac{16\pi G_D \rho_{\omega 0} x_0^{D(\omega+1)}}{2D(D-1)x^{D(\omega+1)-2}} \quad (\text{B.25})$$

e

$$V(x = x_0) = V_0 = -\frac{\Lambda x_0^2}{D(D-1)} - \frac{16\pi G_D \rho_{\omega 0} x_0^2}{2D(D-1)} \quad (\text{B.26})$$

Com o potencial B.25, nós obtemos B.24 após resolver 4.4:

$$x\ddot{x} + \frac{16\pi G_D \rho_{\omega 0}}{D(D-1)} \frac{x_0^{D(\omega+1)}}{x^{D(\omega+1)-2}} \left(\frac{D(\omega+1)-2}{2}\right) - \frac{2\Lambda x^2}{D(D-1)} = 0 \quad (\text{B.27})$$

Devemos obter a equação geral com curvatura (2.30)

$$a\ddot{a} + \left[\frac{D(\omega+1)-2}{2}\right] (\dot{a}^2 + k) = \frac{\Lambda(\omega+1)a^2}{D-1} \quad (\text{B.28})$$

Isolando $\frac{16\pi G_D \rho_{\omega 0} x_0^{D(\omega+1)}}{2D(D-1)x^{D(\omega+1)-2}}$ em B.25, substituindo em B.27 e utilizando a lei de conservação de energia $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$, chega-se a:

$$x\ddot{x} + [D(\omega + 1) - 2] \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - E \right) = \frac{\Lambda(\omega + 1)a^2}{D - 1} \quad (\text{B.29})$$

e novamente $E = -k/2$.

Em termos dos parâmetros adimensionais, podemos escrever o potencial como:

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{\omega 0}}{2} \left(\frac{x_0}{x} \right)^{D(\omega+1)-2} - \frac{\Omega_{0\Lambda}}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \quad (\text{B.30})$$

onde $\Omega_{\Lambda} = \frac{2\Lambda}{D(D-1)H_0^2}$

B.5 $p = \omega_x \rho_x + \text{CDM}$ em D-dimensões espaciais:

Com (2.32) e (2.33) obtém-se:

$$a\ddot{a} + \left[\frac{D(\omega + 1)}{2} \right] \frac{16\pi G_D \rho_{x0} a_0^{D(\omega+1)}}{D(D-1)a^{D(\omega+1)-2}} = \frac{8\pi G_D \rho_0 a_0^D}{(D-1)a^{(D-2)}} \quad (\text{B.31})$$

Igualando (4.4) com (B.31) e identificando o fator de escala a com a coordenada linear x da partícula, temos:

$$V(x) = -\frac{8\pi G_D \rho_{0m} x_0^D}{D(D-1)x^{D-2}} - \frac{16\pi G_D \rho_{x0} x_0^{D(\omega+1)}}{2D(D-1)x^{D(\omega+1)-2}} \quad (\text{B.32})$$

e

$$V_0 = -\frac{8\pi G_D \rho_{0m} x_0^2}{D(D-1)} - \frac{16\pi G_D \rho_{x0} x_0^2}{2D(D-1)} \quad (\text{B.33})$$

Resolvendo a (4.4) com (B.32) encontramos

$$x\ddot{x} + \left[\frac{D(\omega + 1)}{2} \right] \frac{16\pi G_D \rho_{x0} x_0^{D(\omega+1)}}{D(D-1)x^{D(\omega+1)-2}} = \frac{8\pi G_D \rho_0 x_0^D}{(D-1)x^{(D-2)}} \quad (\text{B.34})$$

A equação relativística com curvatura é (2.32):

$$a\ddot{a} + \left(\frac{D(\omega + 1) - 2}{2} \right) (\dot{a}^2 + k) = \frac{8\pi G_D \rho_{m0} \omega a_0^D}{a^{D-2}} \quad (\text{B.35})$$

Isolando $\frac{16\pi G_D \rho_0 x_0^{D(\omega+1)}}{D(D-1)x^{D(\omega+1)-2}}$ em (B.32), substituindo em (B.34) e utilizando a lei de conservação de energia $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$, obtém-se:

$$x\ddot{x} + (D(\omega + 1) - 2) \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - E \right) = \frac{8\pi G_D \rho_{m0} \omega a_0^D}{a^{D-2}} \quad (\text{B.36})$$

e a energia total da partícula é: $E = -k/2$.

Em termos dos parâmetros adimensionais, o potencial pode ser escrito como:

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{0x}}{2} \left(\frac{x_0}{x} \right)^{D(\omega+1)-2} - \frac{\Omega_{0m}}{2} \left(\frac{x_0}{x} \right)^{D-2} \quad (\text{B.37})$$

Referências Bibliográficas

- [1] Einstein, A., 1917, Preuss Akad. Wiss. Berlin Sitzber. 142; Impresso em português pela Fundação Calouste Gulbenkian - Coleção de Textos Especias da Física Moderna, Vol. I, 1980, 234
- [2] de Sitter, W., 1917, MNRAS, 78, 3-28
- [3] Friedmann, A., 1922, Zeitschrift für Physik 10, 377; 1924, Zeitschrift für Physik 21, 326
- [4] Lemaître, G., 1931, MNRAS, 91, 483
- [5] Slipher, V. M., 1924, - Tabela com Resultados até 1922 em Eddington, A. S. - The Mathematical Theory of Relativity, 2nd ed., Chelsea, New York, p. 162
- [6] Hubble, E., 1929, Proceedings of the Royal Academy of Science, 15, 168
- [7] Einstein, A. e de Sitter, W., 1932, Proc. Nat. Acad. Sci. USA
- [8] Alpher, R. A.; Bethe, H.; Gamow, G., 1948, Phys. Rev., 73, 803
Alpher, R. A.; Herman, R. C., 1949, Phys. Rev., 75, 1089
Gamow, G., 1946, Phys. Rev., 70, 572
Gamow, G., 1948, Phys. Rev., 74, 505
Gamow, G., - The Creation of the Universe, 1952, New York
Gamow G., 1948, Nature 162, 680
- [9] Penzias, A. A.; Wilson, R. W., 1965, ApJ, 142, 419

- [10] Riess, A. G. *et al.*, 1998, *Astronomical J.*, 116, 1009
 Perlmutter, S. J. *et al.*, 1998, *Nature*, 391,51
- [11] Chen, W. e Wu, Y-S., 1990, *Phys. Rev. D*, 41, 695
- [12] Carvalho, J.C.; Lima, J.A.S. e Waga, I., 1992, *Phys. Rev. D*, 46, 2404
- [13] Waga, I. e Miceli, A. P. M. R., 1999, *Phys. Rev.*, 59, 103507
- [14] Abdel-Rahman, A.-M. M., 1992, *Phys. Rev. D*, 45, 3497
 Waga, I., 1993, *ApJ*, 414, 436
 Maia, J. M. F. e Lima, J.A.S., 1993, *Mod. Phys. Lett. A*, 8, 591
 Beesham, A., 1993, *Phys. Rev.*, D48, 3539
 Lima, J. A.S. e Maia, J.M.F., 1994, *Phys. Rev.D*, 49, 5597
 Arbab, A. I. e Abdel-Rahman, A.M.M., 1994, *Phys. Rev. D*, 50, 7725
 Matygasek, J., 1994, *Phys. Rev. D*, 51, 4154
- [15] Lima, J.A.S. e Alcaniz, J.S., 2004, *PLB*, 600, 191
- [16] Lima, J. A. S., 2004, *Braz. J. Phys.* 34, 194
- [17] Kamenshchik, A.; Moschella, U. e Pasquier,V.,2001, *Phys. Lett. B*,
 511, 265
- [18] Bilic, N.; Tupper, G. B. e Violler, R. D., 2002, *Phys. Lett.*, B, 535, 17
- [19] Bento, M. C.; Bertolami, O. e Sen, A. A., 2002, *Phys. Rev. D*, 66,
 043507
- [20] Fabris, J. C.; Gonçalves, S. V. B. e de Souza, P. E., astro-ph/0207430
- [21] Milne, E. A., 1934, *Quart. J. Math.*, 5 , 64
- [22] McCrea, W. H. e Milne, E. A., 1934, *Quart. J. Math.* 5 , 73
- [23] McCrea, W. H., 1951, *Proc . Roy. Soc. Lond. A* 206 , 562
- [24] Harrison, E. R., 1965, *Ann. Phys. (NY)* 35 , 437

- [25] Lima, J.A.S.; Zanchin, V. e Brandenberger, R., 1997, MNRAS, 291, L1-L4
- [26] Lima, J.A.S.; Moreira, J.A.M. e Santos, J., 1998, Gen. Relativity and Grav., 30, 425
- [27] Murphy, G. L., 1973, Phys. Rev. D, 48, 4231
 Barrow, J . D., 1986, Phys. Lett. B, 1, 80, 335
 Lima, J. A. S. e Germano, A. M. S., 1992, Phys. Lett. A, 170, 373
 Lima, J . A. S. e Maia, J. M. F., 1994, Phys. Rev. D, 49 , 5597
 Lima, J . A. S. e Trodden, M., 1996, Phys. Rev. D, 53, 4280
- [28] Tangherline, F.R., 1986, N. Cim. 91B, 209; idem, 1991, 106B, 123
- [29] Jesus, J.F., Cosmologias com decaimento do vácuo: aspectos conceituais e testes observacionais, 2004, Trabalho de graduação, USP
- [30] Wang, P. e Meng X.H., 2005, Class. Quantum Grav., 22, 283
- [31] Holanda, R.F.L e Lima, J.A.S., International Workshop on Astronomy and Relativistic Astrophysics, 2005, Natal, Brasil.
- [32] Holanda, R.F.L e Lima, J.A.S. 2007, em preparação.
- [33] Dev, A.; Alcaniz, J.S. e Jain, D. 2003, Phys. Rev D, 67, 023515
- [34] Alcaniz, J. S.; Jain, D. e Dev, A., 2003, Phys. Rev. D, 67, 043514
- [35] Weinberg, S. - Cosmology and Gravitation, 1972, John Wiley, NY
- [36] Robertson, H.P., 1936, ApJ, 83, 185
 Walker, A.G., 1944, J. Lond. Math. Soc., 19, 219
- [37] de Bernardis *et al.*, 2000, Nature, 404, 955, astro-ph/0004404
- [38] Hanany, S. *et al.*, 2000, Astrophys. J., 545, L5, astro-ph/0005123
 Balbi, A. *et al.*, 2000, Astrophys. J, 545, L1L4, astro-ph/0005124

- [39] Peebles, P. J. E. - Principles of Physical Cosmological, 1991, Princeton
- [40] Peebles, P.J.E., 1966, ApJ, 146, 542
- [41] Spergel, D.N. *et al.*, 2003, astro-ph/0302209 WMAP Collaboration
2003 (<http://map.gsfc.nasa.gov>)
- [42] Silk, J., 1967, Nature, 215, 1155
Silk, J., 1968, ApJ, 151, 459
- [43] Peebles, P.J.E. ; Dicke, R.H., 1968, ApJ 154, 891
- [44] Bahcall, J.N. e Wolf, R.A., 1968, ApJ, 152, 701
- [45] Fixsen, D. J. *et al.*, 1996, ApJ 473, 576
- [46] Levshakov, S.A.; Molaro, P.; Dessauges-Zavadsky, M.; Odorico S.,
2002, astro-ph/0201043
- [47] Smoot, G.F.; Gorenstein, M.V.; Muller, R.A., 1977, Phys. Rev. Lett.,
39, 898
- [48] Smoot, G.F. *et al.*, 1992, ApJ Lett., 396, L1
- [49] Harrison, E. R., 1970, Phys. Rev., D1 , 2726
Peebles, P. J. E.; Yu,J. T.; 1970, ApJ, 162, 815
Zel'dovich, Ya. B., 1972, MNRAS, 160
- [50] Sunyaev, R. A., "Fluctuations of the microwave background radiation," em *Large Scale Structure of the Universe*, ed. M. S. Longair e J. Einasto, 393. Dordrecht: Reidel 1978
- [51] Miller, A. D. *et al.*, 1999, ApJ, 524, L1-L4.
Lange, A. E. *et al.*, 2001, Phys. Rev. D, 63, 042001 de Bernardis, P.
et al., 2000, Nature, 404, 955
Hanany, S. *et al.*, 2000, ApJ, 545, L5L9
- [52] Spergel, D.N. *et al.*, 2006, Submetido ao Apj, astro-ph/0603449

- [53] Spergel, D.N. *et al.*, 2006, astro-ph/0603449, WMAP Collaboration 2003 (<http://map.gsfc.nasa.gov>)
- [54] Harrison, E.R., 1970, Phys. Rev. D, 1, 2726
Zeldovich, Ya. B., 1970, A&A, 5, 84
- [55] Tegmark M.; Blanton M.R.; Strauss M.A.; *et al.*, 2004, ApJ, 606, 702 (astro-ph/0310725)
- [56] Kolb, E. W. e Turner M. S. - The Early Universe, 1990, Redwood City
- [57] Germano, J. S. M., Um Estudo do Processo de Matéria em Modelos Cosmológicos, 1993, Tese de Mestrado, UFRN
- [58] Guth, A. H., 1981, PRD 23, 347
- [59] Linde, A., 1982, Phys. Lett. B 108, 389
- [60] Albrecht, A. e Steinhardt, P. J., 1982, Phys. Rev. Lett., 48, 1220
- [61] Garcia-Bellido, J. [astro-ph/0502139]
- [62] Peebles, P.J.E. [astro-ph/0410284]
- [63] Zwicky F., 1933, Helv. Phys. Acta, 6, 110
- [64] Perlmutter, S. J. *et al.*, 1999, ApJ, 517, 565
- [65] Gron, O., 1986, Am. J. Phys., 54, 46
- [66] Zel'dovich, Ya. B., 1967, JETP Lett., 6, 316
- [67] Zel'dovich, Ya. B., 1968, Sov. Phys. Uspekhi, 11, 381
- [68] Bordag, M.; Mohideen, U.; Mostepanenko, V.M.; 2001, Phys. Rep., 353, 1
- [69] Zeldovich, Ya. B., 1968, Sov. Phys. Usp., 11, 381
Weinberg, S., 1989, Rev. Mod. Phys., 61, 1

- [70] Weinberg, S., 1989, Rev. Mod. Phys., 61, 1
- [71] Bronstein, M., 1933, Phys. Z. Sowjetunion, 3
- [72] Ozer, M. e Taha, M.O., 1986, Phys. Lett. B, 171, 363
Ozer, M. e Taha, M.O.,1987, Nucl.Phys. B, 287, 776
- [73] Bronstein, M., 1933, Phys. Z. Sowjetunion 3, 73
- [74] Freese, K. *et al.* , 1987, Nuc.Phys. B, 287, 797
Berman, M. S.,1991, Phys. Rev., 43, 1075
Pavón, D., 1991, Phys. Rev. D, 43, 375;
Calvão, M.O.*et al.*, 1992, Phys. Rev. D,45, 3869
- [75] Lima, J.A.S. e Trodden, M., 1996, Phys. Rev. D, 53, 4280
Lima, J.A.S., 1996, Phys. Rev. D, 54, 2571
- [76] Lima, J. A. S., 1996, Phys.Rev.D, 54, 2571-2577
- [77] Lima, J.A.S.; Silva, A. I. e Viegas, S. M., 2000, MNRAS, 312,747
- [78] Overduin, J. M. e Cooperstock, F. I., 1998, Phys. Rev. D, 58, 043506
- [79] Alcaniz, J.S. e Lima, J.A.S., 2005, PRD, 72, 063516
- [80] Avelino, P. P.; Beça, L. M. G.; de Carvalho, J. P. M.; Martins, C. J. A. P. e Pinto,P. , 2003, Phys. Rev. D, 67, 023511
- [81] Bento, M. C.; Bertolami, O. e Sen, A.A., 2003, Phys. Rev.D, 67, 063003
- [82] Bento, M. C.; Bertolami, O. e Sen, A.A., 2003, Phys. Lett. B, 575, 172
- [83] Lima, J. A. S.; Cunha, J. V. e Alcaniz, J. S., astro-ph/0611007
- [84] Turner, M. S. e White, M., 1997, PRD, 56, R4439
- [85] Caldwell,R. R., 2002, Phys. Lett. B, 545, 23
- [86] Turner, M. e Riess, A. G., 2001, ApJ, 569, 18

- [87] Efstathiou, G, 1999, MNRAS, 310, 842
- [88] Perlmutter, S. *et al.*, 1998, Nature, 391, 51
- [89] Chae, K.H. *et al.*, 2002, Phys. Rev. Lett., 89, 151301
- [90] Lima, J. A. S. e Alcaniz, J. S., 2000, MNRAS, 317, 893
Lima, J. A. S.; Cunha, J. V. e Alcaniz, J. S., 2003, Phys. Rev. D, 68,
023510
- [91] Garnavich, P. M. *et al.*, 1998, ApJ, 509, 74
- [92] Schuecker, P.; Caldwell, R. R.; Bohringer, H.; Collins, C. A. e
Guzzo,L., 2003, A&A, 402, 53
- [93] Alcaniz, J. S.; Lima, J. A. S. e Cunha, J. V., 2003, MNRAS, 340, L39
- [94] Wang, L. M.; Caldwell, R. R.; Ostriker, J. P. e Steinhardt, P. J., 2000,
ApJ, 530, 17
- [95] Lima, J. A. S. e Alcaniz, J. S., 2002, ApJ, 566, 15
- [96] Corasaniti, P. S. e Copeland, E. J., 2002, Phys. Rev. D, 65, 043004
- [97] Jain, D. e Dev, A., Panchapakesan, N., Mahajan, S., Bhatia, V. B.,
2003 Int. J. Mod.Phys., D12, 953
- [98] Balbi, A.; Baccigalupi, C.; Matarrese, S.; Perrota, F. e Vittorio,N.,
2001, ApJ, 547, L89
- [99] Bean, R. e Melchiorri, A., Phys. Rev., 2000, D65, 041302
- [100] Hannestad, S. e Mortsell, E., 2002, Phys. Rev D 66, 063508
- [101] Erickson, J. K. *et al.*, 2002, PRL, 88, 121301
- [102] Cooray, A. R. e Huterer, D., 1999, ApJ, 513, L95
- [103] Linder, E. V., 2003, PRL 90, 091301

- [104] Padmanabhan, T.; Choudhury, T. R., 2003, MNRAS, 344, 823
- [105] Chevallier, M. e Polarski, D., 2001, Int. J. Mod. Phys. D, 10, 213
- [106] Riess, A.G. *et al.*, 2004, Astrophys. J., 607, 665
- [107] Ehrenfest, P., 1917, Proc. Amst. Acad. 20, 200
 Ehrenfest, P., 1920, Ann. Phys, 61, 440
 Whitrow, G.J., 1955, Br. J. Phil. Sci., 6, 13
- [108] Kaluza, T., 1921, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., Berlin 966
 Klein, O., 1926, Z. Phys., 37, 895
 Akama, K., 1982, Lecture Notes in Physics, 176, 267 (Berlin: Springer)
- [109] Rubakov, V. A. e Shaposhnikov, M. E., 1983, Phys. Lett. B, 125, 136
 Visser, M., 1985, Phys. Lett. B, 159, 22
 Squires, E. J., 1986, Phys. Lett. B, 167, 286
 Gibbons, G. W., e Wiltshire, D. L., 1987, Nucl. Phys. B, 717
- [110] McCrea, W. H., 1955a , Nature, 175, 466
 McCrea, W. H., 1955b, Astron. J., 60, 271
 McCrea, W. H., 1955c, Math. Gazette, 39, 287
- [111] Layzer, D., 1954, Astron. J., 59, 268
- [112] Bondi, H., 1960: "Cosmology", 2nd edition, (Cambridge University Press)
- [113] Ribeiro, M.B. , 1994, Boletim da Soc. Astronômica Brasileira, 14, 2, 34-63
- [114] Harrison, E.R., 1981, "Cosmology, the science of the universe", Cambridge University Press
- [115] McVittie, G.C., 1954, Astron. J. 59, 173
- [116] Landsberg, P.T. e Evans, D. A., 1977: "mathematical cosmology" (Oxford: Clarendon Press)

- [117] Ellis, G.F.R., 1990, MNRAS, 243, 509
- [118] Landsberg, P.T., 1973, Nature Phys. Sci., 242, 104
- [119] Lima, J.A.S., 2001, Am.J.Phys., 69, 1245-1247
- [120] Alcaniz, J.S. e Lima, J.A.S., 2005, ApJ, 618, 16
- [121] Lazkoza, R.; Nesserisb, S. e Perivolaropoulos, L., 2005, JCAP, 11, 010
- [122] Robertson, H. P., 1955, PASP, 67, 82
- [123] Hoyle, F. e Sandage, A., 1956, PASP, 68, 301
- [124] Szydlowski, M. e Czaja, W., 2004, PRD, 69, 083518