

*Universidade de São Paulo*  
*Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas*  
*Departamento de Astronomia*

Marcio Guilherme Bronzato de Avellar

**Soluções semi-analíticas para objetos  
astrofísicos compactos**

São Paulo

2008



Marcio Guilherme Bronzato de Avellar

# Soluções semi-analíticas para objetos astrofísicos compactos

Dissertação apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Astronomia

Orientador: Prof. Dr. Jorge Ernesto Horvath

São Paulo

2008



*Dedico esta dissertação à Rosi, meu grande amor, por seu amor infinito...*



# Agradecimentos

À minha família, pelo suporte constante;

À Rosi, por me auxiliar em tudo na vida;

Ao meu orientador, por acreditar;

Ao professor José Ademir Sales de Lima, relator deste projeto;

Aos professores que ministraram cursos;

Aos colegas: ao velho grupo dos takions, aos velhos amigos do CCM e aos novos amigos do IAG;

À CAPES, pelo apoio financeiro;

Ao IAG-USP pela infra-estrutura adequada.





*“In the deathless boredom of the sideral calm we cry with regret for a lost sun...”*

Jean de la Ville de Mirmont, L’Horizon Chimérique

*“Nunca ande pelo caminho traçado, pois ele conduz somente até onde os outros foram.”*

Alexander Graham Bell



# Resumo

Nesta dissertação, estuda-se estrelas compactas constituídas por uma forma estável do plasma ultra-relativístico de *quarks* e glúons, a *strange quark matter* ou matéria estranha, com pequena fração de elétrons para manter a neutralidade de carga. São abordadas, aqui, soluções matemáticas razoáveis que descrevem com simplicidade e agilidade certas propriedades dessas estrelas, a começar pela importantíssima relação massa-raio.

Um perfil gaussiano para a densidade de energia foi escolhido como ponto de partida para contruir uma solução matemática para o problema e são apresentadas as motivações para tal escolha. Prova-se que o perfil escolhido não soluciona as Equações de Einstein exatamente e uma solução aproximada é fornecida. A seguir, as conhecidas soluções Tolman IV e Buchdahl I foram utilizadas para modelar uma estrela estranha com base no estudo de Alcock, Farhi e Olinto. Discute-se, ainda, como foi redescoberta a solução exata de Finch e Skea e discute-se, também, a solução exata para uma estrela de *quarks* de Komathiraj e Maharaj, construída para um problema ligeiramente diferente, que incluía a existência de um campo elétrico.

Conclui-se o trabalho comparando os resultados numéricos de Alcock, Farhi e Olinto com a solução aproximada aqui desenvolvida, apresentando o intervalo de validade desta solução. Além disso, são feitas comparações entre as diferentes soluções exatas e as características que cada uma delas exhibe, e discute-se qual delas deve-se utilizar, tendo em mente que característica da estrela estranha se quer estudar. Os caminhos existentes para solucionar as Equações de Einstein, quando se quer modelar um objeto compacto, são discutidos e apontam-se quais os problemas que alguém encontrará ao seguir cada caminho. Por fim, relaciona-se a construção da relação massa-raio com a diferenciação dos tipos de objetos compactos que podem, em princípio, existir.



# Abstract

In this dissertation we study compact stars constituted by a stable form of ultra-relativistic quark-gluon plasma, the strange matter, with a small fraction of electrons to keep the neutrality of charge. We address here reasonable mathematical solutions that describe with simplicity and agility some properties of these stars, beginning by the important mass-radius relationship.

A gaussian energy density profile was chosen as the starting point for the construction of a mathematical solution for this problem and the motivations for this choice was presented. We prove that this profile is not an exact solution for the Einstein Field Equations and an approximated solution is presented. Following, the previous known solutions of Tolman IV and Buchdahl I were used to model a strange star, based on the work of Alcock, Farhi and Olinto. We discuss the rediscovery of the exact solution of Finch and Skea and also the exact solution for a quark star by Komathiraj and Maharaj, constructed to a problem slightly different, that includes the existence of an electric field.

We conclude this work comparing the numerical results of Alcock, Farhi and Olinto with the approximated solution here developed, presenting the range of validity of this solution. Furthermore, comparisons were made between the different exact solutions and the features displayed by each one and we discuss which solution must be used when one have in mind which features of the strange star one wants to study. The existent ways for solving the Einstein Equations when we want to model a compact star are discussed and we point out the problems that one will find in following each way. At last, we make a relation between the mass-radius relationship and the differentiation of the many types of compact objects that could, in principle, exist.



# Lista de Figuras

1.1	Representação dos hádrons em <i>quarks</i> . . . . .	30
1.2	Ingredientes de uma teoria completa . . . . .	32
1.3	Relação massa-raio . . . . .	38
2.1	Representação da “sacola” . . . . .	41
2.2	Relação massa-densidade central . . . . .	42
2.3	Relação massa-raio . . . . .	42
2.4	Perfis de densidade . . . . .	43
2.5	Estrela de nêutrons seriam estrelas estranhas . . . . .	44
2.6	Relação massa-raio para $r_o$ independente de $\rho_c$ . . . . .	52
2.7	Relação massa-densidade central para $r_o$ independente de $\rho_c$ . . . . .	52
2.8	Relação massa-raio para $r_o$ dependente de $\rho_c$ . . . . .	53
2.9	Mesma forma funcional, constantes diferentes . . . . .	62





## Lista de Tabelas

2.1	$r_o$ e $a$ obtidos forçando a igualdade com a massa AFO . . . . .	55
2.2	Raio do objeto obtido com $r_o$ e $a$ da tabela acima . . . . .	57
2.3	Comparação das massas obtidas por ajuste de expressões para $r_o$ e $a$ . . . . .	58
2.4	$A$ , $R$ e $\rho_c$ obtidos ajustando a massa e o raio AFO . . . . .	61
2.5	$C$ , $B$ , $A$ e $\rho_c$ obtidos ajustando o raio e a massa AFO . . . . .	64
2.6	$C$ , $B$ , $A$ e $R$ obtidos ajustando a densidade central e a massa AFO . . . . .	65
2.7	$C$ , $a$ , $M$ e $R$ obtidos com a solução de Komathiraj, dado $\rho_c$ . . . . .	70



# Sumário

1. <i>Introdução</i> . . . . .	19
1.1 Apresentação . . . . .	19
1.2 História: 80 anos de Objetos Compactos . . . . .	20
1.3 Uma revisão clássica sobre Objetos Compactos . . . . .	27
1.4 A problemática e a abordagem . . . . .	30
1.4.1 Formulação da Astrofísica dos Objetos Compactos . . . . .	30
1.4.2 Por que a Relatividade Geral? . . . . .	31
1.4.3 Equações de Einstein . . . . .	33
1.4.4 Identidades contraídas de Bianchi . . . . .	36
1.4.5 As equações TOV . . . . .	37
1.4.6 A equação de estado como ingrediente fundamental . . . . .	37
1.4.7 Relação massa-raio: importância e vínculos . . . . .	38
2. <i>Desenvolvimento: em busca de soluções</i> . . . . .	41
2.1 O <i>ansatz</i> gaussiano: motivações . . . . .	41
2.2 Propriedades desejáveis de uma solução exata . . . . .	44
2.3 Função gaussiana: solução exata? . . . . .	45
2.4 Cálculos numéricos: inconsistência da equação de estado resultante . . . . .	47
2.5 Função gaussiana como solução aproximada . . . . .	53
2.6 Soluções exatas na descrição de estrelas estranhas . . . . .	59
2.6.1 Soluções de Tolman (IV) e Buchdahl (I) . . . . .	59
2.6.2 Solução de Finch e Skea . . . . .	63

2.6.3	Solução de Komathiraj . . . . .	67
2.7	Algoritmo de Lake . . . . .	69
2.8	Método de Chavanis . . . . .	72
3.	<i>Comparações</i> . . . . .	75
4.	<i>Conclusões</i> . . . . .	79
	<i>Referências</i> . . . . .	83
	<i>Apêndice</i>	87
A.	<i>Derivação da métrica esfericamente simétrica</i> . . . . .	89

## Introdução

### 1.1 Apresentação

Estrelas compactas, isto é, anãs brancas e estrelas de nêutrons, são os estágios finais da vida das estrelas. Uma ou outra é o destino reservado para os núcleos das estrelas após uma longa vida de milhões a bilhões de anos. O estudo sistemático desses objetos iniciou-se na década de 1930 após as observações da anã branca *Sirius B* e o desenvolvimento da física estatística dos gases degenerados. Dentre os muitos motivos para estudá-los, destaca-se que são os objetos cuja matéria está em seu estado mais denso na natureza, sendo, por isso, o melhor laboratório para a física de partículas no universo. Atualmente, é impossível atingir tais densidades e temperaturas em laboratório. Acredita-se que todos os elementos químicos venham a se formar nos progenitores das estrelas compactas, depois expulsos pelas nebulosas planetárias e explosões de supernova. Além disso, no próprio processo de explosão de supernova há nucleossíntese adicional, e também a teoria atual diz que é possível que haja, no interior dessas estrelas, tipos exóticos ou mais fundamentais da matéria que conhecemos. É um grande desafio para as teorias físicas o estudo desses objetos. Há muitas esperanças em se conhecer melhor os constituintes do átomo. Ou melhor, da matéria mesmo, independentemente do estado em que se encontra.

Nesta dissertação, estuda-se estrelas compactas constituídas por uma forma estável do plasma ultra-relativístico de *quarks* e glúons, a *strange quark matter* (doravante, SQM) ou matéria estranha, com pequena fração de elétrons para manter a neutralidade de carga. Tem-se que, se este tipo exótico de matéria existir no universo, ele seria mais estável que a matéria hadrônica (comum) que constitui tudo o que conhecemos. Abordam-se, aqui, soluções matemáticas razoáveis que descrevem com simplicidade e agilidade certas

propriedade dessas estrelas, a começar pela importantíssima relação massa-raio.

## 1.2 História: 80 anos de Objetos Compactos

O início do século XX foi marcante para a história da física moderna, pois novos paradigmas estavam surgindo. Paradigmas que mudariam drástica e radicalmente a visão de realidade que se tinha na época. O crescente poder dos telescópios revelou uma nova dimensão do céu, sua profundidade, ou seja, que os objetos celestes estão a uma distância muito maior da Terra do que se poderia imaginar na época. Além disso, surgiu no início do século XIX o espectroscópio, aparelho capaz de separar a luz em vários comprimentos de onda. Em 1861, Kirchhoff, trabalhando com o espectroscópio, conseguiu revelar os elementos químicos presentes no Sol. Nascia assim a Astrofísica. Entretanto, “o que é luz, o que é calor e qual é a relação entre eles?”, “por que objetos quentes emitem luz?”, “por que elementos químicos diferentes têm espectros diferentes?” são questões que careciam de resposta. Fornecer respostas a esse tipo de pergunta teve conseqüências fundamentais na visão de realidade dos cientistas do início do século XX.

Dentre tantas questões, dois problemas tiveram importância fundamental: o da radiação de corpo negro e a existência do éter.

O primeiro começou a ser respondido por Planck, que deu como solução a quantização de energia. Radiação térmica é a radiação emitida por um corpo devido a sua temperatura. Apesar de o espectro da radiação térmica depender da composição do corpo, existe um tipo de objeto que emite uma radiação térmica de caráter universal, é o corpo negro. O corpo negro absorve toda a radiação incidente sobre ele e um corpo negro de grande importância é uma cavidade com um pequeno orifício. A radiação que entra pelo orifício é refletida várias vezes e absorvida pelas paredes internas da cavidade, exceto por uma fração desprezível é refletida para fora. Quando essa cavidade se encontra em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T$ , a pequena fração de radiação que escapa pelo orifício tem as propriedades e o espectro da radiação emitida por um corpo negro. Um resultado da teoria cinética clássica é que a densidade de energia desse espectro era uma função da frequência da radiação que divergia para altas frequências. Isso estava em completo desacordo com a experiência que indicava que

$$\bar{E} \rightarrow kT \text{ se } \nu \rightarrow 0$$

e

$$\bar{E} \rightarrow 0 \text{ se } \nu \rightarrow \infty.$$

Planck descobriu que poderia obter essas propriedades se assumisse que a energia era uma variável discreta em vez de contínua, como era na teoria clássica, e dependesse da frequência  $\nu$  da radiação. A modificação necessária na teoria clássica foi a seguinte troca:

$$\bar{E} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} EP(E)dE}{\int_0^{\infty} P(E)dE} \rightarrow \bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} EP(E)}{\sum_0^{\infty} P(E)},$$

com  $E = nh\nu$ , com  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Então, energia deveria ser quantizada e só poderia assumir valores múltiplos de  $h\nu$ .<sup>1</sup>

Pensando sobre a existência do éter e sobre os resultados de Michelson e Morley sobre a constância da velocidade da luz, Albert Einstein, em 1905, publicou a Teoria da Relatividade Especial, unificando espaço e tempo num espaço-tempo equivalente a uma arena onde ocorrem todos os eventos do Universo. Nesse mesmo ano, publicou também sua explicação sobre o efeito fotoelétrico, revelando a natureza dual da luz e plantando definitivamente as sementes da física quântica. Dez anos depois, em 1915, Einstein publicaria suas famosas Equações de Campo (doravante, EFE - *Einstein Field Equations*), produto de uma nova teoria de gravitação: a Relatividade Geral.

Paralelamente, em 1911, Ernest Rutherford descobriu a estrutura atômica. Em 1915, astrônomos deduziram que a estrela *Sirius B*, companheira da estrela *Sirius* num sistema binário, era uma estrela anã branca, muito pequena e densa (um objeto muito compacto), um enigma do ponto de vista físico. O raio pôde ser estimado utilizando a física dos corpos negros: da temperatura e da luminosidade é possível estimar o raio.

A Astronomia, por sua vez, se desenvolvia a passos largos, com novas técnicas conceituais e observacionais. Físicos do mundo todo tentavam explicar as recentes observações com as mais novas ferramentas da física teórica. A espectroscopia se tornou ferramenta necessária e extremamente útil no estudo de estrelas, planetas e outros objetos astrofísicos,

---

<sup>1</sup> Esta dedução deve-se a Lorentz.

já que era possível analisar precisamente como os diferentes elementos químicos absorvem ou emitem a luz.

A história dos objetos compactos começa, de fato, em 1926, quando Paul Dirac formulou o que conhecemos como estatística de Fermi-Dirac, dando conta da descrição dos gases degenerados. Estando a par dessa formulação, R. H. Fowler, pioneiro no estudo desses objetos compactos, propôs, nesse mesmo ano, que deveria ser a pressão dos elétrons degenerados no interior da anã branca que evitava seu colapso gravitacional (Shapiro e Teukolsky, 1983).

Em 1932, Chadwick detectou o nêutron e alguns meses mais tarde Landau hipotetiza a existência de uma estrela de nêutrons (um fluido incompressível de nêutrons), numa carta que nunca foi publicada. Baade e Zwicky (1934) sugerem que uma estrela de nêutrons (degenerados) poderia se formar durante os eventos de supernovas.

O cálculo da estrutura dessas estrelas “exóticas” foi uma tarefa complicada para os cientistas da década de 1930, pois havia muitas dificuldades matemáticas e físicas: as equações tinham difícil solução e sabia-se pouco sobre as partículas atômicas.

Em 1930, Chandrasekhar formulou de maneira rigorosa a estrutura das anãs brancas e deduziu que elas poderiam ter uma massa máxima de  $1,4 M_{\odot}^2$ . Esta foi a primeira manifestação macroscópica da mecânica quântica na Astronomia.

Cerca de nove anos depois, Tolman, Oppenheimer e Volkoff desenvolveram modelos analíticos no arcabouço da Relatividade Geral para estudar as estrelas de nêutrons e objetos desse tipo, resultantes das explosões de supernova. Em *Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid*, (Tolman, 1939), Tolman utilizou as EFE's para desenvolver um método que fornecesse meios de obter soluções exatas que poderiam servir para descrever esses objetos, e Oppenheimer e Volkoff, no artigo *On Massive Neutron Cores* (Oppenheimer e Volkoff, 1939) publicado na mesma revista, tentaram utilizar algumas dessas soluções para extrair propriedades dos núcleos massivos de nêutrons. Devido ao caráter não-linear das EFE's, é muito difícil obter tais soluções exatas e a grande maioria das soluções encontradas até hoje não fornece uma descrição física razoável desses objetos.

Outra grande dificuldade existente é que não se conhece precisamente o comportamento

---

<sup>2</sup> Esse símbolo denota “massa solar” e é utilizado com freqüência em astrofísica como unidade de massa;  $1,0 M_{\odot}$  é equivalente a  $1,989 \times 10^{33}$  gramas.



da matéria superdensa, e é muito difícil fornecer para o problema uma equação de estado (doravante, EOS - *Equation of State*)  $P = P(\rho)$ , onde  $P$  é a pressão e  $\rho$  é a densidade de energia. Uma equação de estado é uma relação que descreve o estado da matéria sob um conjunto de condições físicas. Ela relaciona matematicamente funções de estado associadas à matéria, como pressão, volume, energia interna etc. Isso porque, para estudar a estrutura do núcleo e as partículas elementares, são necessários aceleradores de partículas muito potentes e atingir a potência necessária é tecnologicamente inviável atualmente. Ainda, existem muitas suposições acerca dos constituintes da matéria no interior dos objetos compactos, que poderia ser desde simples nêutrons, como sugerido no passado, até matéria mais exótica como híperons, *quarks* ou matéria estranha, conforme as suposições atuais. Resumindo, não se conhece precisamente o diagrama de fases da matéria hadrônica “fria”.<sup>3</sup>

Com isso quer-se dizer que são razoavelmente bem conhecidas as propriedades da matéria, ou seja, sua equação de estado, para o regime de densidades que estão no intervalo  $\rho_{drip} < \rho < \rho_{nuc}$ , onde  $\rho_{drip} \sim 10^{11} \text{ g/cm}^3$  é a densidade para a qual acontece a coexistência entre nêutrons livres, núcleos e elétrons e  $\rho_{nuc} \sim 10^{14} \text{ g/cm}^3$  é a densidade de saturação nuclear na qual os núcleos começam a se dissolver.

Para densidades acima de  $\rho_{nuc}$ , as propriedades físicas da matéria são ainda muito incertas. Muito desse desconhecimento deve-se às incertezas sobre a interação núcleon-núcleon. Na verdade, sobre a dependência dessa interação em relação à separação (distância) entre os núcleons.

Dados experimentais mostram que, à parte as interações coulombianas e efeitos de superfície, a energia e o volume dos núcleos aumentam com o número atômico  $A$ .

Entretanto, cálculos primeiros feitos com potenciais atrativos simples resultam em uma energia de ligação  $E_b \equiv -E_{min} \sim A^2$ , em contradição com os experimentos que mostravam que  $E_b \sim A$ . A propriedade das forças nucleares de fornecer  $E_b \sim A$  é chamada de “saturação”.

O potencial deve ser, então, atrativo para um número pequeno de núcleons, mas deve ser repulsivo para um grande número deles. Isso está relacionado com a densidade, o que implica na separação espacial entre eles.

---

<sup>3</sup> Chamamos de matéria fria a matéria que tem temperatura  $T$  muito menor que a correspondente temperatura de Fermi  $T_f$  do sistema, de tal modo que podemos dizer que essa matéria tem temperatura  $T=0$ .

Então, como as forças nucleares devem ser repulsivas para pequenas distâncias, deve haver uma zona proibida em volta de cada núcleon (um caroço repulsivo).

Um dos potenciais de maior sucesso é o potencial de Reid (1968). Esse potencial é uma superposição de termos do tipo de Yukawa (logo será definido) e leva a uma equação de estado relativamente mole.<sup>4</sup>

Alguns estudos posteriores, como Bethe e Johnson (1974), sugeriram uma equação de estado mais dura, devido a um potencial atrativo para densidades nucleares e repulsivo para densidades  $\sim 10^{15} \text{ g/cm}^3$ .

Essas equações de estado mais duras têm grande influência na estrutura e na massa das estrelas de nêutrons. Por exemplo, a força repulsiva para densidades  $\gtrsim 10^{15} \text{ g/cm}^3$  dá origem a pressões internas muito maiores, de modo a suportar melhor a estrela contra o colapso gravitacional. Logo, a massa máxima dessas estrelas é maior que aquelas fornecidas por uma equação de estado mais mole.

A origem do curto alcance das forças nucleares está na suposição de Yukawa (1935) de que, de modo análogo à troca de fótons virtuais nas interações eletromagnéticas, as forças nucleares aparecem por causa da troca de mésons, que deveriam ter massa não-zero para explicar devidamente o curto alcance dessas forças. O potencial de Yukawa tem a forma

$$\varphi_y = \pm g \frac{e^{-\mu r}}{r},$$

onde  $g$  é a “carga” e  $\mu$  é o inverso do comprimento de onda Compton do campo dos quanta.

Bethe e Johnson (1974) calcularam a equação de estado para a matéria pura de nêutrons, entre outras. Especificando melhor, a troca de mésons vetoriais induz forças repulsivas, enquanto a troca de mésons escalares induz forças atrativas. As três menores massas de mésons vetoriais são  $\rho$  (769 MeV),  $\omega$  (783 MeV) e  $\phi$  (1019 MeV). Dessas, a de maior “força” é a massa  $\omega$ . Uma das maiores diferenças entre essa aproximação e a de Reid foi a incorporação do núcleo repulsivo via troca de mésons  $\omega$ .

A equação de estado de Bethe e Johnson pode ser sumarizada:

---

<sup>4</sup> Estrelas com EoS's duras têm massas máximas maiores que as estrelas de EoS moles; estrelas com EoS duras têm densidades centrais menores, raios maiores e crostas mais grossas que as estrelas com EoS's moles.

$$\frac{\epsilon}{n} \equiv W(k, 0) + mc^2 \quad W(k, 0) = n^a \frac{MeV}{particle},$$

$$p = n^2 \frac{d(\epsilon/n)}{dn} = 364n^{a+1} \frac{MeV}{fm^3} = 5,83 \times 10^{35} n^{a+1} \frac{dyne}{cm^2},$$

$$c_s^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{n^a}{1,01 + 0,648n^a} c^2,$$

onde  $a = 1,54$ , com  $0,1 \lesssim n \lesssim 3 [fm^{-3}]$  ou  $1,7 \times 10^{14} \lesssim \rho \lesssim 1,1 \times 10^{16} [g/cm^3]$ .

Por causa de um caroço repulsivo mais detalhado, a equação de estado de Bethe e Johnson é mais realística que a de Reid, e a maior dureza dessa equação de estado em relação à de Reid fornece uma seqüência de estrelas de nêutrons com  $[M_{max} = 1,9 M_\odot, R \sim 10 km]$ , enquanto a de Reid fornece  $[M_{max} = 1,6 M_\odot, R \sim 8 km]$ .

As estrelas de *quarks*, por sua vez, foram primeiramente hipotetizadas por Itoh por volta de 1970. Em Itoh (1970), foi estudado o equilíbrio hidrostático numa estrela de *quarks*, fazendo apenas estimativas gerais, utilizando o método de Oppenheimer e Volkoff. Para as propriedades estatísticas dos *quarks*, ele considerou duas alternativas possíveis: a estatística para-fermi de ordem  $q = 3$  e a estatística fermi. Considerou, ainda, uma estrela de *quarks* consistindo da mesma quantidade de *u-quarks*, *d-quarks* e *s-quarks*. As expressões para a pressão e densidade de energia são:

$$p_q = 3q \frac{\pi m_q^4 c^5}{3h^3} f(x_q)$$

e

$$\rho_q = \frac{3N_b}{V} m_q c^2 + 3q \frac{\pi m_q^4 c^5}{3h^3} g(x_q),$$

onde  $f(x) = x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \sinh^{-1} x$ ,  $g(x) = 8x^3 \{(x^2 + 1)^{1/2} - 1\} - f(x)$  e  $\frac{N_b}{V} = q \frac{8\pi m_q^3 c^3}{3h^3} x_q^3$  e  $h$  é a constante de Planck.

Em ambos os casos, a ordem de magnitude da massa dessas estrelas foi de  $10^{-3} M_\odot$ .

Por esses motivos, esse tópico da Astrofísica, o estudo dos objetos compactos, não teve avanços reais até por volta de 1980, quando ganhou novo ânimo com os trabalhos de Witten (1984). Ele trabalhou na hipótese, muito arrojada para a época, de que o verdadeiro estado fundamental da matéria hadrônica poderia ser a matéria estranha, composta por

*quarks up, down e strange*, com uma pequena fração de elétrons para garantir a neutralidade. Isso porque, por ter uma energia por bárion menor que os núcleons comuns, ela seria absolutamente estável, desde que satisfeitas algumas condições físicas a respeito do vácuo. Além disso, a massa dos *quarks* não parecia estar longe das expectativas. Witten também discutiu que haveria grande possibilidade de que uma estrela de nêutrons se convertesse, por algum mecanismo, em estrelas estranhas. Eis o porquê: se a matéria de *quarks* com estranheza é ligada, então, energeticamente, ela poderia crescer indefinidamente absorvendo núcleons. O potencial eletrostático em torno de um *nugget* de matéria “quarkônica”, no entanto, o previne de absorver núcleons positivamente carregados. Mas não o previne de absorver nêutrons. Nesse caso, seria necessário assumir que as estrelas de nêutrons seriam, na verdade, estrelas de *quarks* (estranhas). Simplificando o tratamento, assumindo que a massa dos *quarks* poderia ser ignorada, Witten, com a equação de estado  $p = (\rho - 4B)/3$ , encontrou

$$\bar{M} = 2,00M_{\odot} \left[ \frac{B_0}{B} \right]^{1/2}, \quad R = 11,1km \left[ \frac{B_0}{B} \right]^{1/2} \quad e \quad \rho(0) = 19,1 \times 10^{14} \frac{g}{cm^3} \left[ \frac{B}{B_0} \right]$$

para uma estrela de *quarks* de massa máxima. Um típico valor para  $B$  era  $B = B_0 = 56 \text{ MeV}/cm^3$ .

Alcock, Farhi e Olinto (1986), baseados na hipótese de Witten, dedicaram muito trabalho estudando as propriedades de uma estrela estranha. Não só calcularam numericamente os perfis de densidade e a relação massa-raio, mas também calcularam momento de inércia vs massa e potencial eletrostático em função da altura em relação à superfície da estrela. Estudaram a fenomenologia das estrelas estranhas, seu resfriamento via emissão de neutrinos e a conversão estrela de nêutrons  $\rightarrow$  estrelas estranhas.

As expectativas de detecção aumentaram com as promessas dos aceleradores de partículas e dos novos satélites de raios-X e gamma, de modo que os tempos atuais são muito propícios para o estudo desses objetos.

Os objetos compactos têm sido observados em todas as bandas do espectro eletromagnético, desde frequências de rádio até raios gama e provavelmente serão detectados em ondas gravitacionais na próxima década. Do ponto de vista da física fundamental, eles também são muito importantes, já que envolvem muitas áreas da física. Por possuírem forte gravidade, forte campo magnético e grandes densidades, são talvez o único meio de

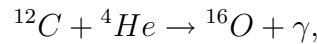
se estudar física sob essas condições extremas. Além disso, esses objetos podem ser usados para testar as propriedades do meio interestelar e também podem fornecer informações sobre a expansão do universo.

### 1.3 Uma revisão clássica sobre Objetos Compactos

Conforme já foi mencionado, estrelas compactas, isto é, anãs brancas e estrelas de nêutrons, são os estágios finais das estrelas normais<sup>5</sup>. Durante suas vidas na Sequência Principal, as estrelas comuns transformam (diz-se, queimam) hidrogênio em hélio por meio da reação de fusão nuclear. A certa altura, quando cerca de 10% do hidrogênio é convertido em hélio (esse limite é conhecido como limite de Schenberg-Chandrasekhar), a pressão do núcleo (isotérmico) não pode mais ser mantida e a estrela sai da condição de equilíbrio hidrostático e se contrai. Quando isso acontece, a pressão no núcleo aumenta até que uma nova condição de equilíbrio se estabeleça. Esse novo estado de equilíbrio consiste num caroço no qual acontecem reações triplo-alfa que convertem hélio em carbono



e capturas de partículas alfa pelo carbono que produzem o oxigênio



com um envelope externo predominantemente de hidrogênio.

Se a massa inicial da estrela (massa de Sequência Principal) for menor que aproximadamente oito massas solares, então a temperatura não será suficiente para fundir o carbono e o oxigênio. A rigor, quando se fala “massa inicial menor que oito massas solares” assumimos que não há perda de massa ao longo da evolução da estrela; caso haja perda, esse limite pode mudar um pouco (Carroll e Ostlie, 1996). Porém, devido à alta temperatura do núcleo, as camadas exteriores são expelidas em forma de ventos e o que sobra é um caroço de carbono e oxigênio. Assim nasce uma estrela anã branca, um caroço de carbono e

---

<sup>5</sup> Ao longo do texto, estrelas normais ou luminosas designarão estrelas compostas basicamente de hidrogênio que ainda estão na fase de fusão do hidrogênio em hélio, ou seja, ainda estão na Sequência Principal.

oxigênio com elétrons altamente degenerados responsáveis por uma grande pressão interna, que suportam, assim, a estrela contra novo colapso gravitacional.

A origem dessa alta pressão é explicada pelo princípio de exclusão de Pauli, que diz que dois férmions não podem ocupar o mesmo estado quântico. Assim, conforme a densidade aumenta, os elétrons vão preenchendo todo o espaço de fase, desde o estado de mais baixa energia (momento). Os elétrons restantes ocupam estados de momentos crescentes e a alta velocidade por eles adquirida leva a um grande aumento na pressão até que a gravidade seja balanceada e o colapso pare. É possível visualizar quando se torna importante o Princípio de Exclusão de Pauli, o instante em que se torna evidente a necessidade da Estatística de Fermi-Dirac, do seguinte modo: a diferença de momento típica entre elétrons num gás de Maxwell-Boltzmann é

$$\Delta p_e \sim (6m_e k \bar{T})^{1/2} \sim \left( \frac{12m_e G M m_u \mu}{7R} \right)^{1/2}$$

e a separação típica entre os elétrons é

$$\Delta q_e \sim \left( \frac{\mu_e m_u}{\rho_0} \right)^{1/3} \sim \left( \frac{4\mu_e m_u R^3}{M} \right)^{1/3}.$$

Então, o volume ocupado pelo elétron no espaço de fase é

$$(\Delta p_e \Delta q_e)^3 \sim 4\mu_e \left( \frac{12\mu}{7} \right)^{3/2} [(Gm_e R)^{1/2} m_u^{5/6} M^{1/6}]^3 \sim 180h^3 \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left( \frac{R}{R_\odot} \right)^{3/2},$$

onde  $\mu$  é o peso molecular médio e  $m_\mu$  é a unidade de massa atômica.

Desse modo, quando uma estrela de  $1 M_\odot$  se contrai até  $3 \times 10^{-2} R_\odot$ , o volume ocupado é  $\sim h^3$ . Nesse ponto, o Princípio de Exclusão torna-se importante. Esta é precisamente a escala do raio de uma anã branca (Shapiro e Teukolsky, 1983).

Existe, porém, uma massa limite para as anãs brancas a partir da qual nem mesmo a pressão dos elétrons degenerados é capaz de suportar a estrela contra o colapso gravitacional. Esse limite é conhecido como “massa de Chandrasekhar” e é por volta de  $1,4 M_\odot$ . Se a massa do núcleo da estrela for maior que esse valor nos momentos finais de sua evolução, então ela colapsará em uma estrela de nêutrons. Em geral, o raio das anãs brancas é da ordem de dez mil quilômetros.

Por outro lado, se a massa de Sequência Principal de uma estrela for maior que oito massas solares, então, em seus estágios finais de evolução, a temperatura do núcleo é alta o suficiente para começar a queima do carbono e do oxigênio no núcleo. Enquanto houver energia térmica suficiente, o núcleo continuará com o processo de fusão até chegar no limite do pico do ferro. A partir daí, qualquer reação de fusão será endotérmica e por isso não acontecerá, pelo menos espontaneamente. As fusões seguintes ocorrem com certa probabilidade, é claro. Desse modo, a massa do núcleo de ferro cresce, enquanto seu raio diminui.

Em algum momento, ao atingir uma massa crítica, o próprio núcleo de ferro colapsa, pois não há pressão suficiente para suportá-lo. A densidade do núcleo aumenta tanto que os elétrons são capturados pelos prótons formando nêutrons. A configuração final é um caroço incompressível de nêutrons com uma pequena fração de prótons e elétrons. Agora os nêutrons estão degenerados e é a pressão desses nêutrons degenerados que suporta a estrela contra novo colapso.

É durante o colapso do núcleo de ferro que acontece a famosa explosão de supernova. Essa explosão se deve à liberação rápida da energia gravitacional da estrela e é extremamente energética e luminosa, com brilho superior ao brilho de uma galáxia inteira, podendo ser visível por vários dias no céu. O raio típico de uma estrela de nêutrons é de dez quilômetros.

Por fim, um terceiro destino para as estrelas muito massivas é o buraco negro. A formação de buracos negros, e também das estrelas de nêutrons, depende da massa de Sequência Principal e da metalicidade das estrelas (Heger et al., 2003). Então, é possível que estrelas com  $M \sim 30 M_{\odot}$  ou mais na Sequência Principal formem estrelas de nêutrons se a metalicidade for da ordem da metalicidade solar. Existem dois tipos de formação de buracos negros: por *fallback* e diretamente. No primeiro caso, a matéria expelida por uma explosão cai sobre o remanescente, transformando-o em um buraco negro. No segundo caso, o núcleo colapsa tão violentamente que há a formação direta de um buraco negro, sem explosão.

Da composição interna, pode-se dizer que a densidade é extremamente elevada para padrões de laboratório. Mas sabe-se que os graus de liberdade dos hádrons são os *quarks* (figura 1.1) e foi demonstrado que, se a densidade for muito alta, o plasma de *quark*-glúon

é o estado fundamental. O que motiva muito da discussão sobre o interior dos objetos compactos é a incerteza sobre qual é a densidade de deconfinamento, já que depois de deconfinado o plasma, as interações fracas se encarregam de formar a SQM.

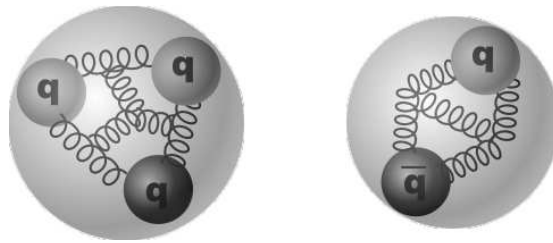


Figura 1.1: Representação dos hádrons em *quarks*

A possibilidade da existência de estrelas estranhas suscitou perguntas fundamentais da física de partículas e da física de altas energias. Se, de fato, a matéria estranha é o estado fundamental da matéria, então o estudo de modelos analíticos completos para esses objetos torna-se indispensável. Soluções desse tipo permitirão que se prevejam algumas propriedades dessas estrelas, levando a um entendimento maior da física da matéria em si, com conseqüências para a evolução estelar e até mesmo para a cosmologia, nos instantes iniciais do Universo.

## 1.4 A problemática e a abordagem

### 1.4.1 Formulação da Astrofísica dos Objetos Compactos

Objetos compactos - sejam estrelas de nêutrons (NS) ou sejam anãs brancas (WD) - são as cinzas das estrelas normais. Uma ou outra é o destino reservado para os núcleos das estrelas após uma longa vida de milhões a bilhões de anos. Depois de formados, esses exóticos objetos permanecem praticamente imutáveis.

As NS são as menores e mais densas ( $M \sim 1,5 M_{\odot}$  e  $R \sim 10 \text{ km}$ ) estrelas conhecidas e estão associadas a duas grandes classes de objetos astrofísicos identificadas:

- pulsares: NS que giram rapidamente (p.e. CRAB e VELA);
- fontes compactas de raios-X: NS numa órbita fechada num sistema binário com uma estrela comum.



Entretanto, associa-se NS também a outros objetos como os RRAT's (*Rotating RAdio Transients*, objetos que emitem pulsos em frequência de rádio [Rubio-Herrera et al. (2007)]) e os magnetares (NS com um campo magnético superforte, responsáveis pelos *soft gamma radiation* e *anomalous X-ray* observados [Woods e Thompson (2006)]).

Muitos elementos são necessários para descrever essas estrelas. A seguir, é apresentado um quadro sinótico de como construir uma teoria das estrelas compactas.

Primeiramente, a Relatividade Geral (RG) é absolutamente adequada para a descrição macroscópica desses objetos e dessa teoria é possível deduzir a equação do equilíbrio hidrostático (estrutura) para eles, as equações TOV (Tolman-Oppenheimer-Volkoff). Essas equações são as análogas relativísticas das equações de estruturas das estrelas comuns, descritas no contexto da física newtoniana.

Por outro lado, do que é feita uma NS? Quais tipos de partículas e interações existem em seu interior? Existem muitas de possibilidades e esse é um grande desafio para as teorias de campo relativísticas.

Na figura 1.2, são apresentados os ramos da física envolvidos na formulação de uma teoria completa sobre objetos compactos (Weber, 1999).

Embora seja possível obter grande volume de informação acerca da estrutura das estrelas de nêutrons e da equação de estado enquanto elas nascem (Lattimer, 1988), e de sua dinâmica em estágios posteriores, estuda-se aqui um aspecto mais teórico relacionado com a estrutura estática no arcabouço da teoria da gravitação de Einstein.

#### 1.4.2 Por que a Relatividade Geral?

Por que utilizar a RG? Com massas de  $1,5 M_{\odot}$  e raio  $10 \text{ km}$ , podemos estimar a força do potencial gravitacional e seus efeitos no espaço-tempo:

$$2\frac{GM}{c^2R} \approx 0,3 - 0,4$$

para NS, enquanto para o Sol a razão é  $10^{-6}$  e para a Terra é  $10^{-9}$ .

Para valores tão grandes da razão  $2GM/c^2R$ , a curvatura do espaço-tempo muda consideravelmente daquela do espaço-tempo plano. Nesse caso, a massa do objeto compacto age como fonte que curva o espaço-tempo dentro e fora da estrela, daí o fato que só a Relatividade Geral, a teoria de gravitação em espaços-tempo curvos, pode ser usada na

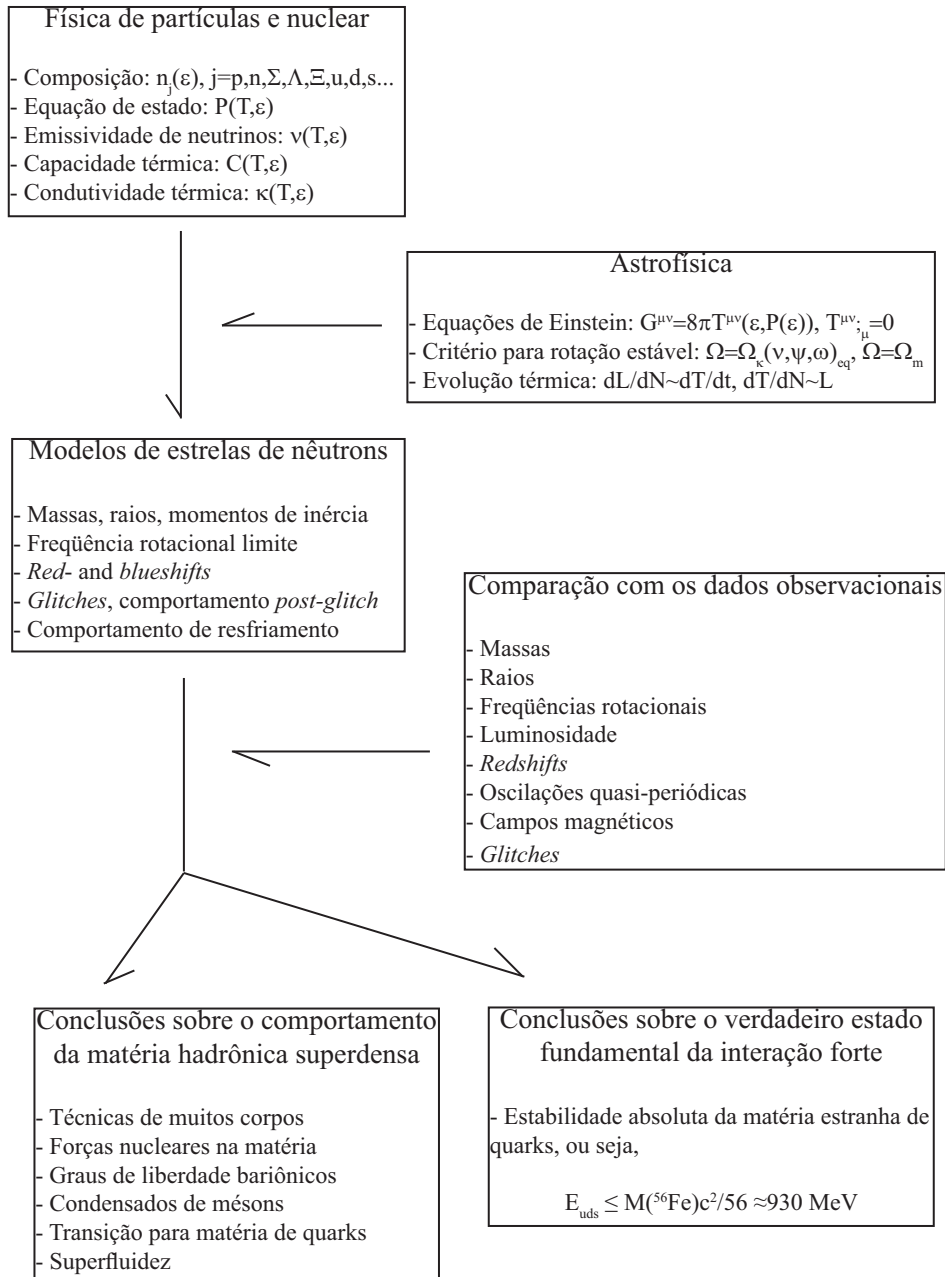


Figura 1.2: Ingredientes de uma teoria completa

descrição.

### 1.4.3 Equações de Einstein

Uma forma qualitativa de descrever o efeito da matéria na teoria da Relatividade Geral de Einstein está na afirmação contundente *Geometry tells matter how to move and matter tells geometry how to curve* - John A. Wheeler, citada em Misner et al. (1973).

As equações de Einstein são escritas como

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R.$$

$G_{\mu\nu}$  é o termo que descreve a geometria do espaço-tempo, ou seja, como a matéria deve se mover, sendo  $R_{\mu\nu}$  o tensor de Ricci e  $R$  a curvatura escalar. Por outro lado,  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia-momento que descreve as propriedades dos corpos massivos. Esse tensor age como fonte de gravitação e diz para o espaço-tempo como se curvar.

Einstein foi motivado a encontrar um tensor que não contivesse diferenciais em  $g_{\mu\nu}$  (os potenciais gravitacionais) acima de segunda ordem, em analogia com a equação de Poisson, e também, um tensor que seguisse uma lei de conservação, a saber, a conservação de energia-momento. Para isso, o tensor de Einstein precisa ter divergência (covariante) nula.

A seguir, ilustra-se como isso é feito. A derivada covariante de um vetor (contravariante) é

$$A^\mu{}_{;\nu} \equiv \frac{A^\mu}{dx^\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} A^\sigma,$$

onde  $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$  é a conexão afim.  $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$  fornece informações sobre o desvio da trajetória de uma partícula da trajetória retilínea que ela teria se o espaço-tempo fosse plano.

Contraindo os índices chegamos a um escalar, ou divergente covariante:

$$A^\mu{}_{;\mu} = A^\mu{}_{,\mu} + \Gamma^\mu_{\sigma\mu} A^\sigma.$$

Daí é possível mostrar que  $\sqrt{-g}A^\mu{}_{;\mu} = (\sqrt{-g}A^\mu)_{,\mu}$ . Ora, se  $A^\mu{}_{;\mu} = 0$  chegamos a uma lei de conservação, pois  $(\sqrt{-g}A^\mu)_{,\mu} = 0$ .

Sem mais delongas, o tensor de Einstein é construído com o tensor de curvatura de Riemann,  $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ , o único tensor que pode ser construído a partir do tensor métrico e suas derivadas primeira e segunda:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} \equiv \Gamma^\rho_{\sigma\nu,\mu} - \Gamma^\rho_{\sigma\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\rho_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\rho_{\alpha\nu},$$

sendo

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}).$$

Entre outras simetrias e propriedades, o tensor de Riemann obedece à seguinte relação:

$$R^\alpha_{\mu\nu\rho;\sigma} + R^\alpha_{\mu\sigma\nu;\rho} + R^\alpha_{\mu\rho\sigma;\nu} = 0.$$

Essa relação é chamada Identidades de Bianchi e é importante porque permite provar que o tensor de Einstein tem divergência nula. De fato, o tensor de Einstein é construído com ela (contração das Identidades de Bianchi):

$$g^{\mu\nu}(R^\alpha_{\mu\nu\rho;\sigma} + R^\alpha_{\mu\sigma\nu;\rho} + R^\alpha_{\mu\rho\sigma;\nu}) = 0$$

$$\Rightarrow 2R^\alpha_{\rho;\alpha} - R_{;\rho} = 0 \Rightarrow \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\nu} = 0.$$

Por um lado,  $G_{\mu\nu}$  pode ser escrito em termos dos elementos da métrica (esféricamente simétrica)  $g_{\mu\nu}$  [ver apêndice]. Usando a relação  $g^{\mu\sigma}G_{\sigma\nu} = G^\mu_\nu$  pode-se deixar esses elementos numa forma mais compacta e fácil:

$$G^0_0 = e^{-\lambda} \left[ \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right] + \frac{1}{r^2},$$

$$G^1_1 = -e^{-\lambda} \left[ \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] + \frac{1}{r^2},$$

$$G^2_2 = G^3_3 = -e^{-\lambda} \left[ \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right].$$

onde os apóstrofes indicam derivada em relação a  $r$ .

Por outro lado, resta especificar quem é o tensor  $T^{\mu\nu}$ . Na física de partículas e nuclear, geralmente pensa-se que a lagrangeana da matéria e suas equações de campo não dependem da métrica, pois desconsidera-se a gravidade (há um desacoplamento entre matéria e gravidade). Ou seja, trabalha-se no espaço-tempo de Minkowski.

Porém, os referenciais inerciais dentro do forte campo gravitacional das NS são suficientemente extensos para que a matéria que as constitui possa ser descrita por teorias no espaço-tempo de Minkowski? Para uma estrela perto do limiar do colapso gravitacional (Glendenning, 2000):

$$\frac{g_{11}(R)}{g_{11}(0)} = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{6}{10}\right)^{-1} = 2,5.$$

Isso significa que a métrica muda por um fator de 2,5 ao longo da dimensão da estrela.

Mas a mudança relativa da métrica sobre o espaçamento entre os núcleons é da ordem de  $2r_0/R = 2A^{-1/3} \approx 10^{-19}$ . Ou seja, para  $10^{10}$  “em fila”, a métrica muda 1 parte em  $10^9$ .

A pergunta que se faz agora é: essas pequenas regiões são localmente inerciais, de tal modo que valem as leis da relatividade especial e de tal forma que seja possível definir uma equação de estado? A resposta foi dada por Wheeler e colaboradores. De fato, essas regiões são grandes o suficientes para que a densidade seja uniforme dentro dela de tal maneira que podemos definir uma equação de estado para a matéria. Desse modo, utiliza-se a EOS construída no espaço-tempo de Minkowski mesmo em ambientes onde a gravitação curva o espaço-tempo consideravelmente na escala macroscópica.

Resta saber, por fim, qual fluido caracteriza a matéria no interior de uma NS. Como o interesse versa sobre as propriedades estruturais globais da NS, pode-se aproximar a matéria estelar por um fluido perfeito, ou seja, um fluido de pressão isotrópica (no referencial de repouso de cada elemento de fluido) e sem viscosidade nem condução de calor. Portanto:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - pg^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow T_0^0 = c^2 \rho, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p.$$

Finalmente, com essa descrição, as equações de Einstein podem ser escritas como (Tolman, 1934):

$$\frac{8\pi G}{c^2}\rho(r) = \frac{\lambda'e^{-\lambda}}{r} + \frac{1 - e^{-\lambda(r)}}{r^2}, \quad (1.1)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4}p(r) = \frac{\nu'e^{-\lambda}}{r} - \frac{1 - e^{-\lambda(r)}}{r^2}, \quad (1.2)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4}p(r) = e^{-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r}\right]. \quad (1.3)$$

#### 1.4.4 Identidades contraídas de Bianchi

As equações não-lineares que determinam a estrutura da esfera autogravitante (equações 1.1, 1.2, 1.3) envolvem derivadas segundas dos potenciais e são, por isso, muito complicadas. Para simplificar o problema, toma-se o divergente do tensor  $T_{\nu}^{\mu}$ . Obtém-se a relação:

$$G_{\nu;\mu}^{\mu} = 0 \Rightarrow T_{\nu;\mu}^{\mu} \equiv \nabla_{\mu}T_{\nu}^{\mu} = \partial_{\mu}T_{\nu}^{\mu} + \Gamma_{\delta\mu}^{\mu}T_{\nu}^{\delta} - \Gamma_{\nu\mu}^{\delta}T_{\delta}^{\mu} = 0.$$

Da relação acima, a seguinte equação resultante deve ser satisfeita:

$$p'(r) + \frac{1}{2}(c^2\rho(r) + p(r))\nu'(r) = 0.$$

Pode-se substituir a terceira equação de Einstein pela equação acima, uma vez que é consequência da lei de conservação (Schutz, 1985). Assim sendo, o novo conjunto de equações a se resolver é:

$$\frac{8\pi G}{c^2}\rho(r) = \frac{\lambda'e^{-\lambda}}{r} + \frac{1 - e^{-\lambda(r)}}{r^2}, \quad (1.4)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4}p(r) = \frac{\nu'e^{-\lambda}}{r} - \frac{1 - e^{-\lambda(r)}}{r^2}, \quad (1.5)$$

$$p'(r) + \frac{1}{2}(c^2\rho(r) + p(r))\nu'(r) = 0. \quad (1.6)$$

### 1.4.5 As equações TOV

Ainda não está muito evidente que o conjunto de equações acima descreve uma estrela. Ficaria mais claro se tivéssemos uma forma para a equação de estrutura, uma equação que fornecesse o equilíbrio entre a pressão e a gravidade dentro de uma estrela relativística, como na teoria não relativística.

Da última equação obtém-se  $\nu' = \frac{-2p'}{c^2\rho+p}$ .

Substituindo na segunda:

$$p'(r) = -\frac{r}{2e^{-\lambda}} \left[ \frac{8\pi G}{c^4} p(r) + \frac{1 - e^{-\lambda}}{r^2} \right] [c^2\rho(r) + p(r)].$$

Da primeira equação, observa-se que  $\frac{8\pi Gr^2}{c^2}\rho(r) = \frac{d}{dr}(r(1 - e^{-\lambda}))$ , o que implica que  $m(r) = \frac{c^2}{2G}[r(1 - e^{-\lambda})]$ .

Eliminando o termo métrico, chega-se às equações do equilíbrio hidrostático da relatividade geral, ou equações TOV:

$$p'(r) = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \left(1 + \frac{p(r)}{c^2\rho(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{c^2 m(r)}\right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-1},$$

$$m'(r) = 4\pi r^2 \rho(r).$$

São estas as equações procuradas. São elas que fornecem o equilíbrio hidrostático da estrela. Mas é importante perceber que essa equação só foi possível de ser obtida porque foi assumido que a NS é estática e que cada elemento de fluido dentro dela está em repouso.

### 1.4.6 A equação de estado como ingrediente fundamental

A densidade  $\rho(r)$  é uma função que decresce monotonicamente com  $r$ , uma vez que se observa, pelas TOV, que a pressão é uma função monotonicamente decrescente com  $r$ . É uma propriedade da matéria que se a densidade aumenta, a pressão também aumenta, e vice-versa.

A equação de estado é a maneira pela qual as propriedades da matéria densa entram nas equações de estrutura estelar. Portanto, é a equação de estado que relaciona a microfísica dos constituintes dessas estrelas com a macrofísica relativística delas.

Desse modo, para resolver as TOV, deve-se fornecer uma equação de estado  $p(\rho)$  e as condições iniciais, em  $r = 0$ :

$$m(0) = 0, \quad \rho(0) = \rho_c \Leftrightarrow p(0) = p_c.$$

A integração é feita até que a pressão se anule para algum  $r = R$ . Esse ponto é identificado como o raio da estrela e a massa gravitacional é  $M = m(R)$ .

#### 1.4.7 Relação massa-raio: importância e vínculos

Para uma dada equação de estado, existe uma única relação entre a massa estelar e a densidade central, uma vez que as TOV são de primeira ordem. Então, para cada equação de estado possível, há uma seqüência única de estrelas parametrizadas por  $\rho_c$  (ou  $p_c$ ).

Assim sendo, é possível obter, para cada densidade central permitida, uma única massa  $M$  e um único raio  $R$ .

Varrendo o intervalo de densidades centrais permitidas pela equação de estado, obtemos a relação massa-raio. Na figura 1.3 (Weber, Negreiros e Rosenfield, 2007) são apresentadas algumas seqüências para várias equações de estado.

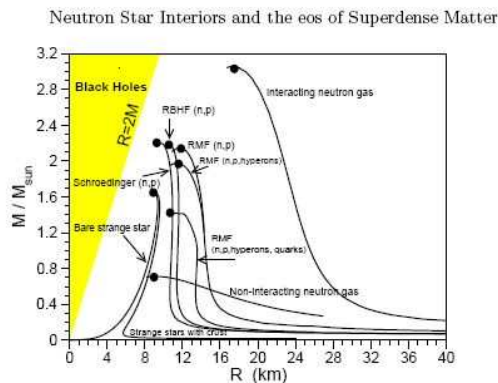


Figura 1.3: Relação massa-raio

Por outro lado, se for possível obter observacionalmente razões  $M/R$  para muitos objetos que se julgue pertencer a uma mesma classe, pode-se montar um diagrama massa-raio, vincular uma equação de estado e determinar a estrutura interna desses objetos.

Entretanto, obter as massas e, especialmente, os raios pode ser uma tarefa muito complicada. O método mais seguro de medir massas é por meio das Leis de Kepler quando a



NS estiver em um sistema binário. Quando não, são necessários outros métodos indiretos. Já o raio, não há método direto de determinação. Os métodos indiretos mais comuns são a análise das linhas de absorção, análise da emissão térmica e *redshift* gravitacional.

### *Redshift gravitacional*

Uma das maneiras observacionais para se obter a razão  $M/R$  para um objeto é por meio do *redshift* gravitacional:

$$\omega_0 = e^{\nu(R)}\omega_e = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2R}}\omega_e,$$

onde  $\omega_o$  é a frequência observada e  $\omega_e$  é a frequência emitida.

$$\Rightarrow z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2R}\right)^{-1/2} - 1.$$

Há muito sabe-se que os *redshifts* gravitacionais dependem da equação de estado da matéria nuclear que compõe as estrelas de nêutrons. Em Lindblom (1984) foram calculados limites superiores e inferiores que se pode esperar ao observar as linhas de emissão que se originam na superfície das estrelas de nêutrons para um vasto conjunto desses objetos. A dependência com a equação de estado se manifesta na expressão  $z = z(m_c, r_c, \rho_c)$ , onde esses parâmetros são relativos ao núcleo.

Em trabalho recente (Bejger e Haensel, 2004), foram estudados limites para a gravidade superficial de estrelas de nêutrons e estrelas estranhas. A relação entre a gravidade superficial e o *redshift* gravitacional é (Shapiro e Teukolsky, 1983):

$$g_s = \frac{GM}{R^2 \sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}}.$$

Nesse trabalho, Bejger e Haensel utilizaram uma EOS do tipo  $P = ac^2(\rho - \rho_s)$ , podendo variar o parâmetro  $a$ :  $0, 30 < a < 0, 46$ . O limite superior obtido foi

$$g_{s,max} = (3 - 6) \times 10^{14} cm/s^2.$$

Isso leva a um limite sobre  $z$  e, portanto, ao deslocamento esperado das linhas de emissão.



## Desenvolvimento: em busca de soluções

### 2.1 O *ansatz* gaussiano: motivações

Pouco tempo depois da hipótese de Witten que as estrelas de nêutrons poderiam ser, na verdade, estrelas estranhas, Alcock, Farhi e Olinto (1986) (doravante, AFO), no artigo *Strange Stars*, estudaram as propriedades que essas estrelas deveriam exibir. Utilizando a equação de estado do *MIT Bag Model*,  $p = (\rho - 4B)/3$ , eles integraram as equações TOV e obtiveram a relação massa *vs* densidade central, a relação massa *vs* raio e os perfis locais de densidade, para alguns valores da densidade central. Nessa equação de estado,  $B$  é a constante da “sacola”, ou densidade de energia do vácuo. O valor moderno para essa constante é  $57,5 \text{ MeV}/\text{fm}^3$  [em unidades nucleares]. Uma ilustração simples desse modelo é imaginar que os *quarks* estão dentro de uma bolha (sacola) imersa no vácuo exercendo uma pressão total  $P$  sobre a bolha, de dentro para fora. A densidade de energia do vácuo (pressão do vácuo), então, contrabalança a pressão dos *quarks* dentro da sacola (figura 2.1).

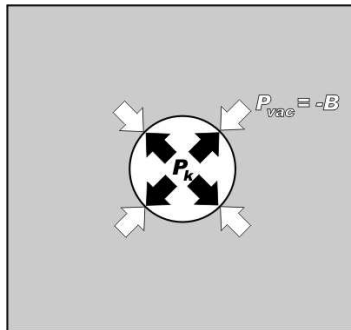


Figura 2.1: Representação da “sacola”

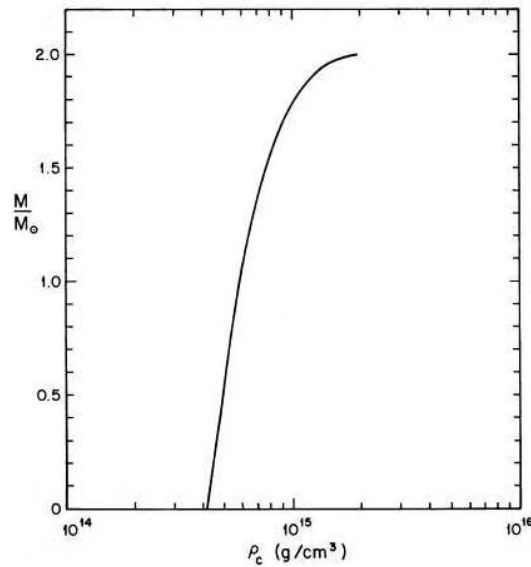


Figura 2.2: Relação massa-densidade central

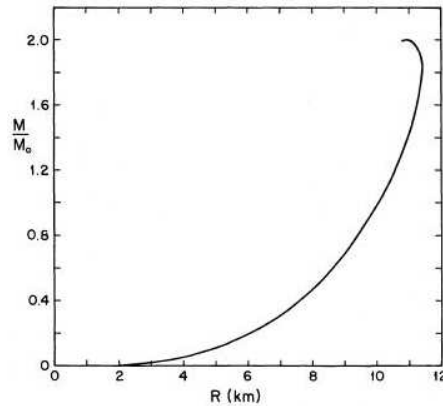


Figura 2.3: Relação massa-raio

Para a densidade central  $\rho_c \sim 4B$  (ver figura 2.2), a gravidade é essencialmente irrelevante (esferas muito pouco massivas; de fato, a pressão central é  $p_c \sim 0$ ), mas existe um ponto máximo,  $\rho_c \sim 4,8 \times 4B$ , para o qual a massa é máxima e representa o último modelo estável da seqüência. Densidades maiores levariam a estrela a colapsar num buraco negro.

Da relação massa-raio (figura 2.3), percebe-se que a massa máxima  $\sim 2,0 M_\odot$  ocorre a um raio que não corresponde ao raio máximo da seqüência. O raio máximo é  $\sim 11 \text{ km}$ .

Por fim, dos perfis de densidade (figura 2.4), percebe-se que a densidade diminui monotonicamente desde a origem,  $r = 0$ , até a borda da estrela,  $r = R$ . Observa-se ainda que as curvas se interceptam em algum momento e que a escala espacial de variação das

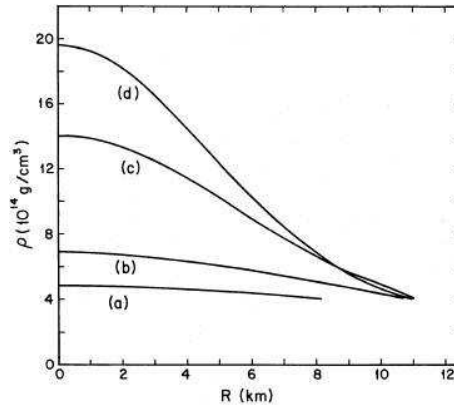


Figura 2.4: Perfis de densidade

curvas é diferente para cada valor da densidade central.

Os perfis de densidade são muito sugestivos. Além disso, sabe-se que existem soluções para as quais a densidade tem comportamento parabólico decrescente, como a solução Tolman VII [ $\rho(r) = a - br^2$ , (Tolman, 1939)].

Nesse trabalho sugeriu-se, então, que um perfil de densidade que seguisse um padrão gaussiano poderia ser matematicamente tratável, pois o comportamento decrescente é evidente, e procurou-se resolver o problema de maneira analítica partindo dessa idéia. Para simular a variação espacial da dependência com a coordenada  $r$ , sugeriu-se o seguinte tipo de perfil:

$$\frac{\rho(r)}{\rho_c} \sim e^{-r^2/r_o^2},$$

onde  $r_o = r_o(\rho_c)$ .

Desse modo, para cada densidade central escolhida, ter-se-ia um ponto da seqüência (uma estrela) e conseguir-se-ia reproduzir de maneira analítica os resultados obtidos numericamente em *Strange Stars*.

Sendo a matéria estranha mais estável que a matéria comum ou que a matéria de *quarks ud*, qualquer semente de matéria estranha no interior superdenso da estrela de nêutrons a converteria, por algum mecanismo<sup>1</sup>, numa estrela estranha. Logo, a hipótese é que todas as estrelas de nêutrons seriam, na verdade, estrelas estranhas. Ou viriam a ser (figura 2.5).

<sup>1</sup> Poderia ser uma detonação ou uma deflagração, analogamente a uma chama que se propagaria consumindo a matéria comum e convertendo-a em matéria estranha.

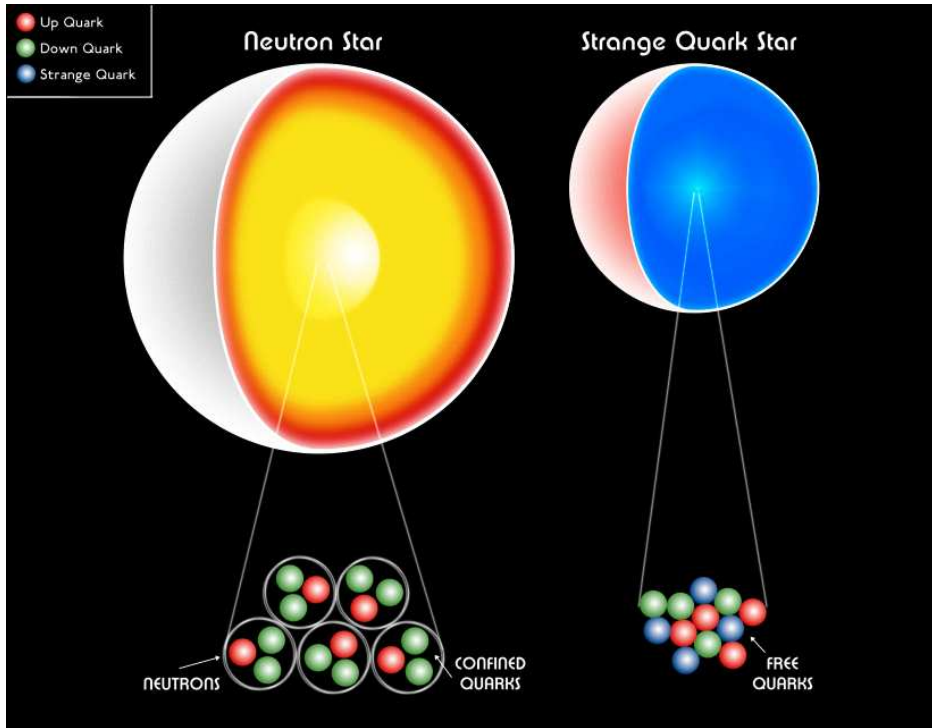


Figura 2.5: Estrela de nêutrons seriam estrelas estranhas

Por isso a importância de se encontrar uma solução exata para esse problema: com ela seria possível de estudar e prever as propriedades desses objetos.

## 2.2 Propriedades desejáveis de uma solução exata

Uma solução exata que descreva uma estrela, seja compacta ou seja normal, deve obedecer certas condições de regularidade e aceitabilidade das propriedades físicas. Em Delgaty e Lake (1998) são apresentadas todas as soluções exatas que satisfazem tais propriedades. São propriedades desejáveis:

- $e^{\lambda(0)} = 1$  [Para integrar as TOV, são necessárias duas condições iniciais:  $m(r = 0)$  e  $p(r = 0)$ , por isso esta condição tem grande importância na definição de um caroço central. Uma pequenina esfera de raio  $r = \epsilon$  tem circunferência  $2\pi\epsilon$  e raio próprio  $e^{\lambda/2}\epsilon$ . Então, um pequeno círculo em torno de  $r = 0$  tem razão circunferência para raio de  $2\pi e^{-\lambda/2}$ . Mas como o espaço-tempo é localmente plano, essa razão deve ser, para este pequeno círculo em torno de  $r = 0$ , igual a  $2\pi$ . Logo,  $e^{\lambda(0)} = 1$  e se  $r \rightarrow 0$ , então também  $m(r) \rightarrow 0$ , cf. Schutz (1985)];

- $e^{\nu(0)} = \text{constante} < 1$  [Uma partícula cuja geodésica é caracterizada pela constante  $\mathcal{E}$  tem energia  $e^{-\nu/2}\mathcal{E}$  relativa a um observador localmente inercial em repouso no espaço-tempo. Como  $e^{-\nu/2} = 1$  muito longe do objeto, já que o espaço-tempo deve ser plano nesse caso,  $\mathcal{E}$  é a energia que um observador distante mediria se a partícula estivesse muito distante (é a energia no infinito). Como  $e^{-\nu/2} > 1$  para todas as outras regiões que não estão no infinito<sup>2</sup>, o observador medirá uma energia maior que  $\mathcal{E}$  nessas regiões. Essa energia extra é a energia que a partícula ganha ao cair no campo gravitacional do objeto. Logo,  $e^{-\nu/2} > 1 \Rightarrow e^{\nu(0)/2} < 1$ , cf. Schutz (1985)];
- $\rho(r)$  regular na origem e positiva definida [define-se uma região no entorno da coordenada  $r = 0$ , pequena o suficiente para ser chamada “centro da estrela” e grande o suficiente para manter a caracterização física do fluido para a qual a densidade é uniforme (ou constante) e tenha valor positivo (fluido real)];
- $p(r)$  regular na origem e positiva definida [a pressão num caroço central para o qual pode-se assumir uma densidade uniforme deve ter um valor constante e positivo, expressando a propriedade da matéria, já comentada];
- $\frac{dp}{d\rho} \leq c^2$  [a velocidade do som no meio deve ser inferior à velocidade da luz].

A construção de uma solução que descreva um objeto compacto deve ser feita seguindo essas propriedades.

### 2.3 Função gaussiana: solução exata?

Com a motivação do *ansatz* gaussiano para o perfil de densidade, procurou-se integrar as equações de Einstein de forma exata. Porém, e contrariamente a outros trabalhos com equações de estado lineares mais gerais, a descrição microfísica foi fixada para descrever a matéria estranha, ou seja, utilizou-se como vínculo uma equação de estado com coeficientes fixos  $p = (c^2\rho - 4B)/3$  (*MIT Bag Model*). Uma inspeção no conjunto de equações formado pelas equações 1.4, 1.5 e 1.6, com o *ansatz* gaussiano e a equação de estado escolhida,

<sup>2</sup> Da condição de continuidade na fronteira do objeto,  $e^{\nu(r=R)} = 1 - \frac{2GM}{c^2 R} < 1$ . Mas  $e^{\nu(r>R)} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \rightarrow 1$  se  $r \rightarrow \infty$ .

mostra que o problema estava, de início, sobredeterminado, ou seja, havia muitos vínculos para poucas variáveis.

Existem casos similares na literatura e, em *Relativistic static fluid spheres with a linear equation of state* (Ivanov, 2001), foi desenvolvida uma maneira unificada para obter soluções para esses objetos quando um *ansatz* é imposto sobre a métrica.

A idéia é que quando o problema está sobredeterminado, existem duas soluções para a mesma variável, seja  $p(r)$  ou  $\nu(r)$ . O método de Ivanov consiste em compatibilizar essas equações de modo a tornar o problema consistente. A EOS e o *ansatz* para um dos elementos métricos utilizadas foram

$$\rho = np + \rho_0 \quad e^{-\lambda} = a + br^2.$$

Da equação 1.4 obtém-se, então,  $\rho = -3b + (1 - a)/r^2$ . Da equação 1.6 obtém-se  $p = p_1 e^{-(n+1)\nu/2} - p_0$ , sendo  $p_0 = \rho_0/(n+1)$  e  $p_1$  uma constante de integração. Substituindo esse  $p$  na EOS obtém-se

$$np_1 e^{-(n+1)\nu/2} - np_0 + \rho_0 = -3b + \frac{1 - a}{r^2} \quad (2.1)$$

e, substituindo esse mesmo  $p$  na equação 1.5, obtém-se

$$p_1 e^{-(n+1)\nu/2} - p_0 = \frac{\nu' e^{-\lambda}}{r} - \frac{1 - e^{-\lambda(r)}}{r^2}. \quad (2.2)$$

As duas equações determinam  $\nu(r)$ . Fazendo a substituição  $y \equiv e^{(n+1)\nu/2}$ , a equação 2.2 pode ser escrita

$$\frac{2}{n+1} r(a + br^2)y' = [1 - a - (p_0 + b)r^2]y + p_1 r^2. \quad (2.3)$$

Por outro lado, a equação 2.1 pode ser escrita

$$\frac{1}{y} = A + \frac{B}{r^2}, \quad (2.4)$$

sendo  $A = -[\rho_0 + 3(n+1)b]/[n(n+1)p_1]$  e  $B = (1 - a)/(np_1)$  constantes.

Quando a equação 2.4 é substituída em 2.3, um polinômio de segundo grau em  $r^2$  aparece. Haverá compatibilidade se existir relações tais que esse polinômio se anule identicamente.



Diferentemente de Ivanov (2001), os seguintes perfis de densidade foram utilizados como *ansatz*:

$$\rho(r) = \rho_0 \exp(-r^2/r_o^2), \quad (2.5)$$

$$\rho(r) = \eta \exp(-r^2/r_o^2) + \frac{B}{c^2}, \quad (2.6)$$

$$\rho(r) = \rho_0 \left( \exp(-r^2/r_o^2) - \frac{\exp(-r^2/r_o^2)}{r^2/r_o^2} + \frac{1}{r^2/r_o^2} \right), \quad (2.7)$$

$$\rho(r) = \eta \left( \exp(-r^2/r_o^2) - \frac{\exp(-r^2/r_o^2)}{r^2/r_o^2} + \frac{1}{r^2/r_o^2} \right) + \frac{B}{c^2}. \quad (2.8)$$

Embora essas escolhas para  $\rho$  forneçam o elemento  $e^\lambda$  por meio de uma integração elementar, em nenhum dos casos acima foi possível obter a compatibilização desejada, porque a aplicação do método de Ivanov aos casos não fornece um polinômio de segundo grau em  $r^2$ . A gaussiana é uma função matemática muito especial e complicada que, no fim, produz uma equação não-polinomial com termos mistos do tipo  $\exp(-r^2/r_o^2) \times r$  e  $\operatorname{erf}(r/r_o) \times r$ . Não foi possível anular os coeficientes, a não ser nos casos triviais.

Conclui-se que nenhum dos perfis de densidade postulados é solução exata do problema proposto.

## 2.4 Cálculos numéricos: inconsistência da equação de estado resultante

Com a forma funcional de  $\rho(r)$ , é possível obter sem grandes dificuldades o primeiro potencial,  $\exp(-\lambda(r))$ , resolvendo a primeira equação.

São duas as equações que estão acopladas:

$$\frac{8\pi G}{c^4} p(r) = \frac{\nu'(r)e^{-\lambda(r)}}{r} - \frac{1 - e^{-\lambda(r)}}{r^2} \quad (2.9)$$

e

$$p'(r) + \frac{1}{2}(c^2\rho(r) + p(r))\nu'(r) = 0, \quad (2.10)$$

onde se conhece a forma de  $e^{-\lambda(r)}$  e de  $\rho(r)$  e o apóstrofo significa a derivada com relação a  $r$ .

Desse modo:

$$p'(r) = -\frac{4\pi Gr}{c^4 e^{-\lambda(r)}} p^2(r) - \left( \frac{4\pi Gr \rho(r)}{c^2 e^{-\lambda(r)}} + \frac{1 - e^{-\lambda(r)}}{2r e^{-\lambda(r)}} \right) p(r) - \frac{(1 - e^{-\lambda(r)}) c^2 \rho(r)}{2r e^{-\lambda(r)}}.$$

Para resolver numericamente esse problema, é conveniente adimensionalizar essas equações porque desse modo obtém-se uma solução universal. Os modelos particulares são obtidos atribuindo-se valores numéricos diferentes às constantes definidas.

Foi utilizado o seguinte perfil para a densidade de matéria do objeto, no qual inseriu-se a constante aditiva representando a densidade de energia do vácuo,  $B$ :

$$\rho(x) = \eta e^{-x^2} + \frac{B}{c^2}, \quad (2.11)$$

onde  $x = \frac{r}{r_o}$ .

Note que a densidade central é, por definição,  $\rho_c = \lim_{x \rightarrow 0} \rho(x) = \eta + \frac{B}{c^2}$ ,

$$\Rightarrow \rho(x) = \left( \rho_c - \frac{B}{c^2} \right) e^{-x^2} + \frac{B}{c^2}. \quad (2.12)$$

No processo de adimensionalização, começou-se com a adimensionalização da densidade. Para tal, nos baseamos no artigo *Compact star made of fermionic dark matter* (Narain, Schaffner-Bielich e Mishustin, 2006). Neste artigo, a adimensionalização é feita dividindo a densidade e a pressão por escalas. No caso do *MIT Bag Model*, cuja equação de estado é  $p = \frac{1}{3} c^2 \rho - \frac{4B}{3}$ , a densidade foi dividida pela escala  $\frac{4B}{c^2}$  e a pressão pela escala  $4B$ .

Os modelos estelares parametrizados pela densidade central podem ser gerados definindo-se  $\rho_c = \rho_{c0} \left( 1 + \frac{i}{100} \right)$ , de modo que a densidade adimensional é

$$\rho^*(x) \equiv \frac{\rho(x)}{\rho_{c0}} = \left( 1 + \frac{i}{100} \right) \left( 1 - \frac{B}{c^2 \rho_{c0} \left( 1 + \frac{i}{100} \right)} \right) e^{-x^2} + \frac{B}{c^2 \rho_{c0}},$$

onde  $i$  é um índice que carrega a informação sobre o aumento percentual da densidade central.

Em seguida, as equações de Einstein foram adimensionalizadas.

$$\frac{8\pi G}{c^2}\rho(r) = \frac{\lambda' e^{-\lambda}}{r} + \frac{1 - e^{-\lambda}}{r^2} \Rightarrow \rho_{c0} \frac{8\pi G}{c^2} r_o^2 \rho^*(x) = \frac{r_o \lambda' e^{-\lambda}}{x} + \frac{1 - e^{-\lambda}}{x^2}.$$

Definiu-se  $A \equiv \rho_{c0} \frac{8\pi G}{c^2} r_o^2$ ,  $r_o \lambda' = r_o \frac{d\lambda}{dr} = r_o \frac{d\lambda}{r_o dx} \equiv \Lambda'(x)$  o que implica  $e^{-\lambda} \rightarrow e^{-\Lambda}$ . Desse modo:

$$A\rho^*(x) = \frac{\Lambda' e^{-\Lambda}}{x} + \frac{1 - e^{-\Lambda}}{x^2},$$

$\Lambda = \Lambda(x)$ .

Do mesmo modo, a segunda equação fica:

$$\frac{8\pi G}{c^4} p(r) = \frac{\nu' e^{-\lambda}}{r} - \frac{1 - e^{-\lambda}}{r^2}.$$

$$p^*(x) \equiv \frac{p(x)}{p_{c0}},$$

onde  $p_{c0} = 4B$  é a escala da pressão. Desse modo,

$$p_{c0} r_o^2 \frac{8\pi G}{c^4} p^*(x) = \frac{r_o \nu' e^{-\lambda}}{x} - \frac{1 - e^{-\lambda}}{x^2}.$$

Definiu-se  $D \equiv p_{c0} r_o^2 \frac{8\pi G}{c^4}$ , conforme feito anteriormente para a constante  $A$ .

Novamente,  $r_o \nu' \equiv N'$  e  $e^{-\lambda} \rightarrow e^{-\Lambda}$ ,  $N = N(x)$ . Finalmente:

$$Dp^*(x) = \frac{N' e^{-\Lambda}}{x} - \frac{1 - e^{-\Lambda}}{x^2}. \quad (2.13)$$

A última equação é a contraída de Bianchi.

$$p'(r) + \frac{1}{2}(c^2 \rho(r) + p(r))\nu' = 0. \quad (2.14)$$

Antes de mais nada, multiplica-se a expressão por  $r_o$  para fazer a substituição por  $N'$ .

$$r_o p'(r) + \frac{1}{2}(c^2 \rho(r) + p(r))N' = 0.$$

Note que  $N'$  é adimensional, mas  $\rho(r)$  e  $p(r)$  são dimensionais e é necessário substituí-los pelas grandezas adimensionais acima definidas:

$$r_o p' + \frac{1}{2}(c^2 \rho_{c0} \rho^*(x) + p_{c0} p^*(x))\Lambda' = 0.$$

A equação como um todo possui dimensões, mas se o primeiro termo for multiplicado por  $1 = \frac{p_{c0}}{p_{c0}}$  obtém-se:

$$r_o p_{c0} \frac{p'}{p_{c0}} + \frac{1}{2} (c^2 \rho_{c0} \rho^*(x) + p_{c0} p^*(x)) N' = 0.$$

Notando que  $r_o \frac{p'}{p_{c0}} \rightarrow p^{*'}(x)$  e colocando  $p_{c0}$  em evidência:

$$p_{c0} p^{*'}(x) + \frac{p_{c0}}{2} \left( \frac{c^2 \rho_{c0}}{p_{c0}} \rho^*(x) + p^*(x) \right) N' = 0.$$

Ora, com a definição de uma nova constante  $E \equiv \frac{p_{c0} c^2}{p_{c0}}$  obtém-se a equação completamente adimensional:

$$p^{*'}(x) + \frac{1}{2} (E \rho^*(x) + p^*(x)) N' = 0.$$

Resumindo, as equações adimensionalizadas são:

$$\begin{aligned} A \rho^*(x) &= \frac{\Lambda' e^{-\Lambda}}{x} + \frac{1 - e^{-\Lambda}}{x^2}, \\ D p^*(x) &= \frac{N' e^{-\Lambda}}{x} - \frac{1 - e^{-\Lambda}}{x^2}, \\ p^{*'}(x) + \frac{1}{2} (E \rho^*(x) + p^*(x)) N' &= 0. \end{aligned}$$

Após esse procedimento, obtém-se uma equação não-linear do tipo Riccati para a pressão adimensional:

$$p^{*'}(x) = -\frac{x}{2e^{-\Lambda}} \left( D p^{*2}(x) + \left[ DE \rho^*(x) + \frac{1 - e^{-\Lambda}}{x^2} \right] p(x) + E \frac{1 - e^{-\Lambda}}{x^2} \rho^*(x) \right). \quad (2.15)$$

Para resolver numericamente esta equação deve-se fornecer os valores numéricos das constante  $A$ ,  $D$  e  $E$ .

Definindo  $A = 1$  obtém-se as seguintes relações:

$$D = 1, \quad r_o^2 = \frac{c^2}{8\pi G \rho_{c0}}, \quad E = 1.$$

É preciso ainda fornecer um valor numérico para a pressão central adimensional. Com todos esses valores numéricos, pode-se resolver a pressão e obter o valor  $x = X_1$  para o

qual a pressão se torna zero. Ou seja, obtém-se uma relação entre  $R$  (o raio estelar) e  $r_o$ . E note que com o valor de  $\rho_{c0}$ , obtém-se automaticamente o valor de  $r_o$ , dada pela relação na definição da constante  $A$ . Desse modo, uma vez fornecido um valor para a pressão central adimensional, essa estrela particular estará resolvida. E assim para qualquer outro valor da pressão central.

Uma inspeção simples na figura 2.4 sugere que o parâmetro  $r_o$  controla o decaimento espacial da densidade desde seu valor central até a borda e que ele é diferente para cada modelo, para cada densidade central. Nada mais natural que imaginar que  $r_o = r_o(\rho_c)$ , contrariamente ao que surgiu como consequência do processo de adimensionalização  $r_o^2 = \frac{c^2}{8\pi G \rho_{c0}}$ ,  $\rho_{c0} = \text{constante}$ .

A resolução numérica da equação de Riccati passa pela condição inicial  $p^*(x = 0)$ . Perto da origem, sempre é possível tomar uma equação de estado linear. Então, utilizando a equação de estado do *Mit Bag Model*, válida em princípio apenas na origem, obtém-se um valor para a pressão central adimensional:

$$p^*(x = 0) = \frac{i}{300}.$$

Para cada valor da densidade central tem-se uma pressão central e um  $X_1$  onde a pressão se anula, definindo a borda da estrela. Com cada  $X_1$  obtém-se um raio físico da estrela,  $R$ . Com cada  $R$ , uma massa total. Graficando essa relação massa-raio, foi obtido um modelo de massa máxima, compatível com o que existe na literatura (figura 2.6). Na figura 2.7 está a relação massa-densidade central, também compatível com a literatura.

Observe que  $M_{max} \approx 1,7 M_{\odot}$  com raio  $R \approx 11,3 \text{ km}$ .

Nos cálculos numéricos acima,  $r_o$  era absolutamente constante para qualquer modelo (densidade central). Adimensionalizando as equações da densidade e da pressão não por escalas, mas pelos próprios valores centrais obtém-se:

$$\rho^*(x) \equiv \frac{\rho(x)}{\rho_c} \quad p^*(x) \equiv \frac{p(x)}{p_c}.$$

Isso implica que:

$$r_o^2 = \frac{c^2}{8\pi G \rho_c}.$$

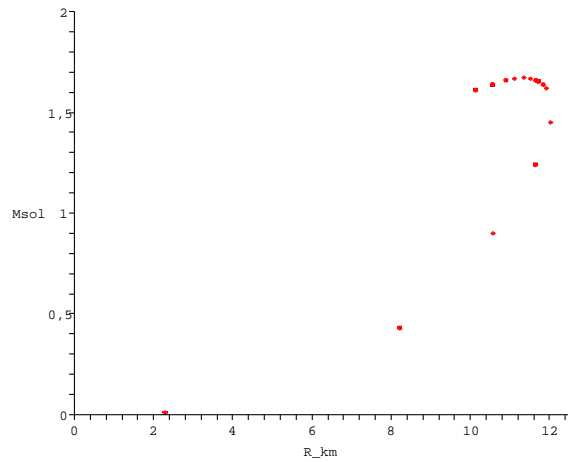


Figura 2.6: Relação massa-raio para  $r_o$  independente de  $\rho_c$

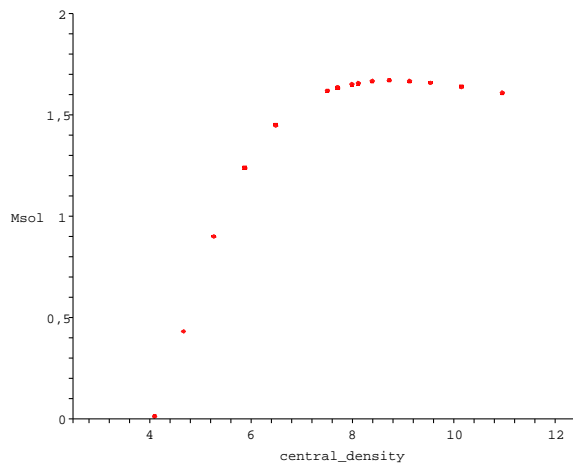


Figura 2.7: Relação massa-densidade central para  $r_o$  independente de  $\rho_c$

Agora, o comportamento de  $r_o$  parece lógico: uma densidade central maior implica em um  $r_o$  menor, ou seja, um decaimento espacial mais rápido. Desse modo, a densidade central adimensional e a pressão central adimensional são sempre 1. Isso elimina o problema de encontrar uma pressão central adimensional para resolver Riccati.

A relação massa-raio assim obtida, no entanto, não tem o comportamento esperado: não existe a massa máxima, conforme pode ser visto na figura 2.8.

No caso em que a relação massa-raio era a esperada, além do fato de  $r_o$  ser uma constante, um *plot* da pressão contra a densidade indicava uma equação de estado linear (mas não igual à do *MIT*) ao longo das dimensões da estrela, exceto nas regiões centrais,

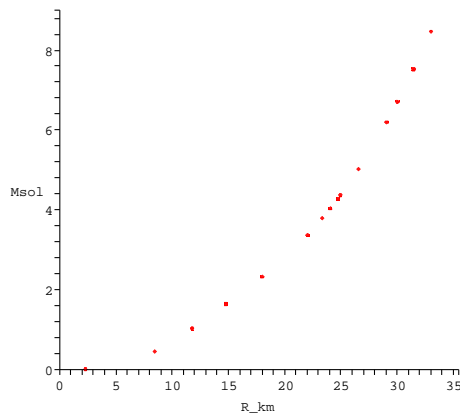


Figura 2.8: Relação massa-raio para  $r_o$  dependente de  $\rho_c$

onde a energia do vácuo,  $B$ , domina. Entretanto, a inclinação da equação de estado varia conforme  $\rho_c$  varia, ou seja, levanta a questão de que se a matéria descrita por uma equação de estado “variável” (mas com a mesma forma funcional) descreve o mesmo tipo de matéria ou não. Em caso afirmativo, então a aproximação é razoável para o problema. Em caso negativo, nem mesmo essa aproximação é válida.

## 2.5 Função gaussiana como solução aproximada

Era o objetivo resolver o problema das equações de Einstein exatamente para uma estrela estranha. Para tal, era preciso utilizar a equação de estado para este tipo de matéria, uma vez que a física da questão é sintetizada pela equação de estado. Mas observando o perfil de densidade de AFO, parecia claro que o *ansatz* gaussiano era apropriado. O problema foi, então, propositalmente sobredeterminado utilizando-se simultaneamente uma equação de estado linear (tipo matéria estranha) e um perfil de densidade gaussiano. Pois bem, substituindo a equação de estado na equação de Bianchi (a terceira de Einstein) obteve-se o seguinte elemento da métrica:

$$\nu(r) = \frac{r^2}{2r_o^2} + a. \quad (2.16)$$

O problema, posto dessa maneira, introduz uma ambigüidade no segundo elemento da métrica,  $\exp(\lambda(r))$ , ou seja, duas expressões para esse mesmo termo. No entanto, essas duas expressões são muito diferentes? Ou melhor, qual é o erro introduzido na geometria

com essa abordagem?

É possível comparar o modelo aproximado proposto com os cálculos numéricos exatos de AFO, adotados como referência. Para efeito de cálculo inicial, foram utilizados os mesmos 4 perfis de densidades daquele trabalho, correspondentes às massas  $M = 1,99 M_{\odot}$ ,  $M = 1,95 M_{\odot}$ ,  $M = 1,4 M_{\odot}$  e  $M = 0,53 M_{\odot}$ .

A idéia era ajustar uma expressão para  $a$  e outra  $r_o$  em função da densidade central  $\rho_c$  de modo a reproduzir a massa e o raio de AFO. Com essa expressão seria possível, dado  $\rho_c$ , obter qualquer objeto estelar pertencente a esta classe, pois seria fácil obter a massa total, o raio físico, os elementos da métrica e os perfis de densidade e pressão.

Mas não é possível ajustar todos os parâmetros simultaneamente, pois as equações se tornam inconsistentes. Entretanto, deixando o raio variar (quer dizer que não se exige que esses raios sejam os mesmos de AFO) e fixando a massa e a densidade central (quer dizer que exige-se que sejam iguais aos de AFO), o raio  $R$  da estrela, o parâmetro  $a$  e o parâmetro  $r_o$  podem ser obtidos. Uma observação importante: fixar a massa significa que a massa dada pela integral da densidade e dada pela condição de fronteira utilizando a métrica  $\nu(r)$  são iguais, com valor fixado pelos dados do AFO.

O ajuste conseguido utilizando somente os 4 perfis de AFO, não possibilita ajustar  $a$  e  $r_o$  com precisão. Assim, a grade de modelos foi estendida para 20 perfis (20 densidades centrais) que cobrissem um maior intervalo de massas e, conseqüentemente, de raios, e os valores para  $r_o$  e  $a$  estão na tabela 2.1.

Com 20 pontos para  $a$  e 20 para  $r_o$ , foi possível ajustar expressões para esses dois parâmetros:

$$a(w) = -2,39942 + 9,95781e^{(-\frac{w}{0,19177})} + 2,41926e^{(-\frac{w}{0,58707})} + 1,92035e^{(-\frac{w}{3,4459})} \quad (2.17)$$

$$r_o(w) = 5,56479 + 22,45821e^{(-\frac{w}{0,50159})} + 10,35217e^{(-\frac{w}{2,4256})} + 169,46229e^{(-\frac{w}{0,16616})} [km], \quad (2.18)$$

onde  $w \equiv \frac{8\pi G}{2} l^2 \rho_c$ ,  $l \equiv 10 km$ , é um número adimensional da ordem da unidade e envolve constantes físicas do problema, como a velocidade da luz, a constante da gravitação e a escala de tamanho desse tipo de objeto, da ordem de dez quilômetros.



$\rho_c[10^{14}g/cm^3]$	$M/M_\odot[AFO]$	$r_o[km]$	$a$
21	2,014042750	7,631010387	-1,780521357
20,5	2,014801608	7,714337813	-1,762999185
20	2,015326779	7,801045927	-1,744982347
19,6	2,015436678	7,872850429	-1,730140677
18	2,013326957	8,185473708	-1,666867564
16	2,002284428	8,646108988	-1,577075908
14	1,975792515	9,212929519	-1,47142208
12	1,921914333	9,936363686	-1,343215145
11	1,877755062	10,38285995	-1,267268177
10	1,815572219	10,90882098	-1,180584905
9	1,726746594	11,54174779	-1,079793495
8	1,597234612	12,32531382	-0,959831395
7,5	1,510155564	12,79466558	-0,890275006
7	1,402444810	13,33296263	-0,81247546
6,5	1,267766569	13,95933096	-0,724422383
6	1,097507111	14,70148514	-0,62334087
5,7	0,973622557	15,21887892	-0,554849121
5,2	0,721604642	16,24225101	-0,423820856
4,885	0,529204878	17,02459731	-0,327483126
4,6	0,333488500	17,85691977	-0,228380811

Tabela 2.1 -  $r_o$  e  $a$  obtidos forçando a igualdade com a massa AFO

O método fornece os raios físicos ( $R$ ) da estrela no momento em que se calcula os valores de  $a$  e  $r_o$ . Uma comparação com os raios AFO é apresentada na tabela 2.2.

Com valores obtidos para  $r_o$  e  $a$ , cabe perguntar pelo erro cometido no elemento  $e^{\lambda(r)}$  da métrica. Pois existem agora duas expressões para ele, a que vem da primeira equação de Einstein e a que vem da segunda. Graficando as duas, quão diferentes elas são? É notável que existe boa concordância entre as duas para as densidades mais baixas, mas há divergências para as mais altas. Isso acontece porque para densidades mais baixas o regime é quase newtoniano, ou melhor, a gravitação é quase newtoniana.

Resumindo, com a densidade central é possível calcular  $a$ ,  $r_o$  e depois os perfis de densidade e pressão e, com eles, o raio físico  $R$  da estrela. Por fim, a massa pode ser calculada pela integral da densidade e pela condição de fronteira, fornecendo valores idênticos. Mas as expressões de  $a$  e  $r_o$  têm barras de erro (não há ajuste sem barras de incerteza), de modo que o último passo, o cálculo das massas, fornece massas ligeiramente diferentes. Estas diferenças estão sumarizadas na tabela 2.3.

Esses desvios na massa, embora muito pequenos, acontecem porque os raios físicos obtidos utilizando as expressões ajustadas como ponto de partida são ligeiramente diferentes daqueles obtidos antes do processo de ajuste, quando forçou-se a igualdade das massas. Caso o ajuste fosse perfeito, os raios, nos dois casos, seriam iguais e as massas seriam iguais.

Concluindo essa parte do trabalho, observa-se claramente que é possível obter expressões para  $r_o$  e  $a$  que fornecem raios físicos e massas para objetos compactos feitos de matéria estranha. Duas observações:

- a gaussiana e a equação de estado linear não formam uma solução exata para o problema; de fato, temos um erro na geometria, pois temos duas expressões diferentes para  $\exp \lambda(r)$ ; essas expressões são quase coincidentes para as densidades centrais menores e divergem bastante para as densidades centrais mais altas.
- as divergências encontradas nas massas, conforme apresentadas acima, tendem a desaparecer quanto maior o número de pontos utilizados; 20 pontos foram utilizados e o ajuste foi bom, fornecendo massas com erros menores que 0,1%.

$\rho_c[10^{14}g/cm^3]$	$R_{obtido}[km]$	$R_{AFO}$
21	10,46401739	10,90491
20,5	10,50676401	10,93401
20	10,55014329	10,96371
19,6	10,58508516	10,98751
18	10,72785348	11,08501
16	10,91046321	11,20921
14	11,09042050	11,32891
12	11,24973417	11,42691
11	11,30907714	11,45561
10	11,34113787	11,45751
9	11,32517367	11,41231
8	11,22215218	11,28181
7,5	11,11530217	11,16221
7	10,94982941	10,98491
6,5	10,69699968	10,72141
6	10,30790774	10,32311
5,7	9,974181968	9,98471
5,2	9,139612534	9,14401
4,885	8,311842381	8,31361
4,6	7,183835266	7,18411

Tabela 2.2 - Raio do objeto obtido com  $r_o$  e  $a$  da tabela acima

$\rho_c [10^{14} g/cm^3]$	$M/M_{\odot AFO}$	$M/M_{\odot int.dens.}$	$M/M_{\odot cond.front.}$
21	2,014042750	2,014754850	2,014147622
20,5	2,014801608	2,014903865	2,014844343
20	2,015326779	2,014959008	2,015263265
19,6	2,015436678	2,014891639	2,015370751
18	2,013326957	2,012826253	2,013247390
16	2,002284428	2,002616503	2,002271652
14	1,975792515	1,976451538	1,975869470
12	1,921914333	1,921919055	1,921972787
11	1,877755062	1,877437821	1,877800169
10	1,815572219	1,815172107	1,815553115
9	1,726746594	1,726634859	1,726697344
8	1,597234612	1,597441164	1,597154000
7,5	1,510155564	1,510398765	1,510103816
7	1,402444810	1,402577403	1,402447802
6,5	1,267766569	1,267715299	1,267861445
6	1,097507111	1,097330280	1,097655843
5,7	0,973622557	0,9734605678	0,9737287626
5,2	0,721604642	0,7216530843	0,7215156241
4,885	0,529204878	0,5292992437	0,5290117362
4,6	0,333488500	0,3334536190	0,3336380699

Tabela 2.3 - Comparação das massas obtidas por ajuste de expressões para  $r_o$  e  $a$

## 2.6 Soluções exatas na descrição de estrelas estranhas

### 2.6.1 Soluções de Tolman (IV) e Buchdahl (I)

Tolman IV e Buchdahl I são duas conhecidas e matematicamente simples soluções para esferas estáticas de fluido perfeito descritas pela RG. Nesse trabalho, ambas foram utilizadas para entender não só o comportamento das soluções para esse problema como também para testar a aplicabilidade dessas soluções ao problema da estrela estranha, forçando a concordância com AFO. A seguir, as duas soluções são detalhadas.

#### Tolman IV

Essa solução foi encontrada por Tolman e publicada em 1934. Para resolver as equações de Einstein, foi assumido o *ansatz*  $e^\nu \nu' / 2r = \text{const.}$  As funções obtidas foram:

$$e^\lambda = \frac{1 + 2r^2/A^2}{(1 - r^2/R^2)(1 + r^2/A^2)},$$

$$e^\nu = Q^2 \left(1 + \frac{r^2}{A^2}\right),$$

$$\frac{8\pi G}{c^2} \rho(r) = \frac{1}{A^2} \frac{1 + 3A^2/R^2 + 3r^2/R^2}{1 + 2r^2/A^2} + \frac{2}{A^2} \frac{1 - r^2/R^2}{(1 + 2r^2/A^2)^2}$$

e

$$\frac{8\pi G}{c^4} p(r) = \frac{1}{A^2} \frac{1 - A^2/R^2 - 3r^2/R^2}{1 + 2r^2/A^2}.$$

Dessas soluções, obtém-se a equação de estado, o raio físico (fronteira), a constante  $Q$  e a massa da esfera, respectivamente, a seguir:

$$\rho(p) = \rho_c - 5\frac{p_c}{c^2} + 5\frac{p}{c^2} + 8\frac{\left(\frac{p_c}{c^2} - \frac{p}{c^2}\right)^2}{\frac{p_c}{c^2} + \rho_c},$$

$$r_b = \frac{R}{3^{1/2}} \left(1 - \frac{A^2}{R^2}\right)^{1/2},$$

$$Q^2 = \frac{1 - r_b^2/R^2}{1 + 2r_b^2/A^2},$$

$$M_{cond.front.} = \frac{c^2 r_b}{2G} \left( 1 - \frac{(1 - r_b^2/R^2)(1 + r_b^2/A^2)}{1 + 2r_b^2/A^2} \right),$$

sendo

$$\frac{8\pi G}{c^2} \rho_c = 3 \frac{R^2 + A^2}{R^2 A^2}, \quad \frac{8\pi G}{c^4} p_c = \frac{R^2 - A^2}{A^2 R^2}$$

e  $A$ ,  $R$  e  $Q$  constantes arbitrárias.

Para modelar AFO com Tolman IV, impôs-se reproduzir a massa e o raio, ou seja, determinar  $A$ ,  $R$  e  $Q$  tais que a massa e o raio de AFO fossem exatamente reproduzidos. Como consequência do número de vínculos e de variáveis independentes, não foi possível ajustar também a densidade central [a densidade central depende de  $A$  e  $R$ , determinados pela massa e pelo raio].

Assim, a relação massa-raio de AFO foi exatamente reproduzida, mas a grande questão ainda é se a equação de estado resultante pode ser utilizada como aproximação para a equação de estado do *MIT Bag Model*. Imediatamente, vê-se que a equação de estado de Tolman IV não é adequada, em primeiro lugar porque não é linear e, mais importante, ela depende das constantes  $A$  e  $R$  dos elementos métricos. Mas  $A$  e  $R$  foram ajustados caso a caso para reproduzir exatamente as massas e os raios de AFO, de modo que eles estão vinculados também às densidades centrais obtidas (tabela 2.4). Desse modo, a equação de estado é variável, embora mantenha sempre a mesma forma funcional, como ilustrado na figura 2.9.

Cabe perguntar até que ponto uma equação de estado que varia de modelo para modelo é útil para descrever um objeto compacto, uma vez que a caracterização de uma forma da matéria é feita por apenas uma equação de estado.

### *Buchdahl I*

Do mesmo modo que foi feito para Tolman IV, foi feito para Buchdahl I (Buchdahl, 1959). As soluções encontradas são:

$$e^\lambda = \frac{2(1 + Cr^2)}{2 - Cr^2},$$

$$e^\nu = A \left[ (1 + Cr^2)^{3/2} + B \sqrt{2 - Cr^2} (5 + 2Cr^2) \right]^2,$$

$M/M_{\odot}AFO$	$A[10^6]$	$R[10^6]$	$\rho_c[10^{14}g/cm^3]$
0,333488500	2,445584039	2,743943219	4,823604412
0,529204878	2,297693063	2,711618842	5,232008652
0,721604642	2,160238307	2,678622241	5,686096046
0,973622557	1,983104249	2,631261195	6,410452724
1,097507111	1,894971955	2,605363067	6,845968668
1,267766569	1,770483818	2,565749777	7,571442847
1,402444810	1,667477793	2,529926802	8,294359924
1,510155564	1,580713123	2,497298929	9,012636228
1,597234612	1,506550818	2,467401968	9,724589525
1,726746594	1,386330520	2,414360556	11,12374517
1,815572219	1,292999713	2,368561656	12,48270675
1,877755062	1,218472539	2,328434096	13,79472961
1,921914333	1,157624220	2,292885082	15,05575129
1,975792515	1,064510550	2,232377379	17,41445028
2,002284428	0,9969687376	2,182507349	19,55111718
2,013326957	0,9461290904	2,140440061	21,47019216
2,015436678	0,9139040782	2,111156542	22,85718365
2,015326779	0,9067718817	2,104358181	23,18453852
2,014801608	0,8983319451	2,096086239	23,58239870
2,014042750	0,8903491765	2,088117218	23,96923941

Tabela 2.4 -  $A$ ,  $R$  e  $\rho_c$  obtidos ajustando a massa e o raio AFO

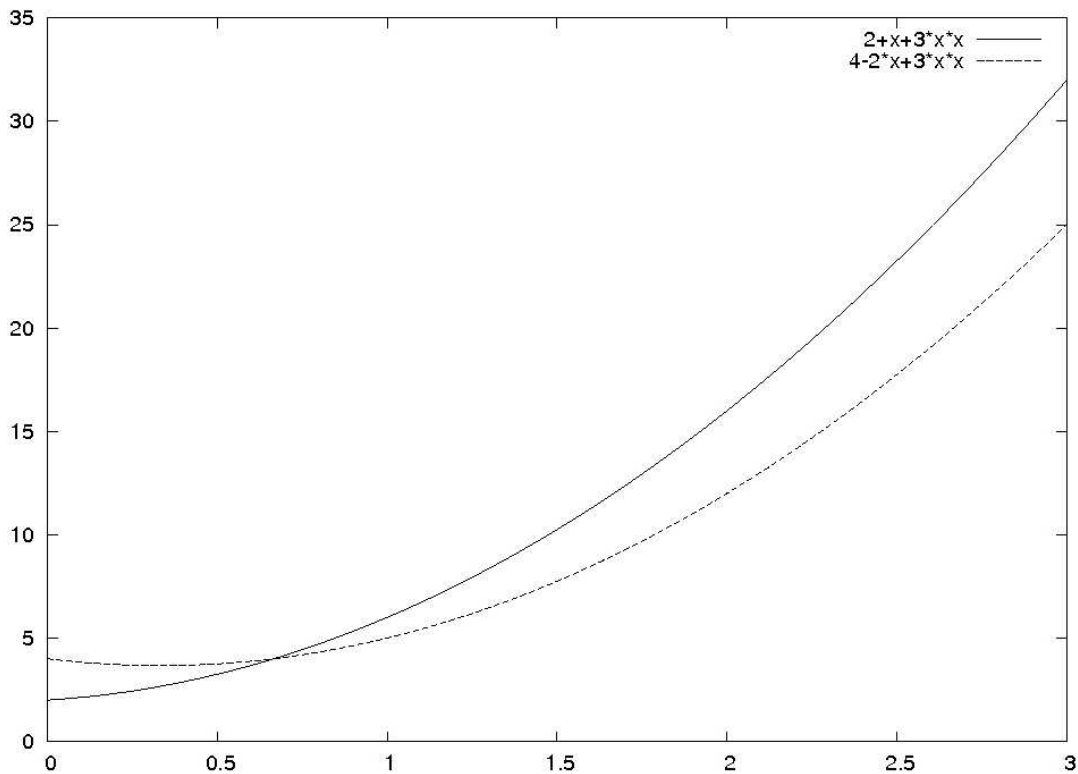


Figura 2.9: Mesma forma funcional, constantes diferentes

$$\frac{8\pi G}{c^2}\rho(r) = -\frac{-\frac{2Cr}{2+2Cr^2} - \frac{4Cr(2-Cr^2)}{(2+2Cr^2)^2}}{r} + \frac{1 - \frac{2-Cr^2}{2+2Cr^2}}{r^2},$$

$$\frac{8\pi G}{c^4}p(r) = \frac{2\left[3Cr\sqrt{1+Cr^2} - \frac{BCr(5+2Cr^2)}{\sqrt{2-Cr^2}} + 4BCr\sqrt{2-Cr^2}\right](2-Cr^2)}{[(1+Cr^2)^{3/2} + B\sqrt{2-Cr^2}(5+2Cr^2)](2+2Cr^2)r} - \frac{1 - \frac{2-Cr^2}{2+2Cr^2}}{r^2},$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes arbitrárias.

Dois tipos de ajustes foram possíveis: no primeiro, foram ajustados a massa e o raio de AFO ( $\rho_c \neq \rho_{cAFO}$ ). No segundo, foram ajustadas a massa e a densidade central de AFO (o raio  $R$  é diferente de  $R_{AFO}$ ). Na tabela 2.5 estão os resultados do primeiro ajuste. Na tabela 2.6 estão os resultados do segundo ajuste.

O mesmo que aconteceu com a Tolman IV aconteceu com Buchdahl I. A equação de estado é não-linear, não servindo, assim, para a matéria estranha. Novamente a equação de estado depende de parâmetros variáveis.

Desse segundo resultado, começa-se a perceber que é um defeito congênito das soluções obtidas quando se faz um *ansatz* para algum dos elementos da métrica ou para o perfil



de densidade ou para o perfil de pressão: todas elas fornecerão equações de estado que dependem das constantes envolvidas nas escolhas, constantes que, por sua vez, são parametrizadas<sup>3</sup> seja pela massa, seja pelo raio ou seja pela densidade central. De todas as soluções estudadas, nenhuma é viável na aplicação do problema da matéria estranha, exatamente por causa da equação de estado resultante.

### *Evitando o problema da equação de estado*

Existe um método para evitar esse problema da equação de estado “variável”. Basta encontrar uma solução analítica para uma escolha apropriada da equação de estado em si. São três equações de Einstein [com quatro variáveis] e se for imposta uma equação de estado, sem nenhuma outra suposição, o problema estará fechado. No entanto, não foi possível, neste trabalho, encontrar uma solução analítica das equações de Einstein com a equação de estado do *MIT Bag Model*.

### 2.6.2 *Solução de Finch e Skea*

As formas dos perfis de densidade das estrelas estranhas calculados de forma exata em AFO são muito sugestivas. Um exame mais acurado de funções matemáticas que tivessem comportamento semelhante àqueles acabou por levar à proposição de perfis que levassem a cálculos viáveis dos potenciais métricos. Para mimetizar a gaussiana, o seguinte perfil foi escolhido:

$$\rho(x) = \frac{\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow e^{-\lambda(x)} = \frac{1}{1+x^2}, \quad (2.19)$$

onde  $x \equiv r/r_o$ .

Esse perfil, quando inserido nas equações de Einstein, leva a uma solução relativamente simples dos elementos da métrica e a uma solução *exata* da equação de Riccati para a pressão. Entretanto, logo se percebeu que essa mesma solução tinha sido encontrada por Finch e Skea no fim da década de 80, constando, desse modo, no catálogo de Delgaty e

---

<sup>3</sup> Observe que o que se diz não é que as constantes “variam”, mas que dado um valor paramétrico, seja a massa ou o raio ou a densidade central, essas constantes assumem um valor fixo a fim de produzir uma única estrela. Para outro valor paramétrico, as constantes assumem outro valor, para fornecer uma outra estrela.

$M/M_{\odot}[AFO]$	$C[10^{-13}]$	$B$	$A$	$\rho_c[10^{14}g/cm^3]$
0,333488500	1,949012307	0,5699698127	0,03142330445	4,700393327
0,529204878	2,073184901	0,5225198420	0,03265671768	4,999857845
0,721604642	2,200155328	0,4816763687	0,03366981042	5,306069839
0,973622557	2,383388392	0,4330727100	0,03477888169	5,747969293
1,097507111	2,484304458	0,4104045282	0,03524665652	5,991346514
1,267766569	2,640042634	0,3799360746	0,03581180206	6,366937108
1,402444810	2,782635999	0,3560047286	0,03619526588	6,710826625
1,510155564	2,914239356	0,3366924730	0,03645997665	7,028211760
1,597234612	3,036503032	0,3207716514	0,03664484028	7,323072582
1,726746594	3,257918519	0,2960766753	0,03686589197	7,857055807
1,815572219	3,454448746	0,2778370306	0,03697329260	8,331023754
1,877755062	3,631221824	0,2638648291	0,03702098866	8,757343792
1,921914333	3,791830368	0,2528566320	0,03703634814	9,144680148
1,975792515	4,074664887	0,2367634579	0,03702201635	9,826786406
2,002284428	4,317714988	0,2257291490	0,03698602790	10,41294539
2,013326957	4,530343226	0,2178539769	0,03694694371	10,92573658
2,015436678	4,682782033	0,2130942672	0,03691781448	11,29337015
2,015326779	4,718732530	0,2120677813	0,03691098343	11,38007124
2,014801608	4,762681774	0,2108734150	0,03690278889	11,48606273
2,014042750	4,805371505	0,2097551798	0,03689487593	11,58901669

Tabela 2.5 -  $C$ ,  $B$ ,  $A$  e  $\rho_c$  obtidos ajustando o raio e a massa AFO

$M/M_{\odot}[AFO]$	$C[10^{-13}]$	$B$	$A$	$R[km]$
0,333488500	1,907384337	0,5708719126	0,03139947783	7,234314866
0,529204878	2,025559236	0,5237912675	0,03262431785	8,375317103
0,721604642	2,156173599	0,4829968878	0,03363803215	9,202198536
0,973622557	2,363497983	0,4337246288	0,03476490388	10,01059163
1,097507111	2,487892614	0,4102839662	0,03524904389	10,31854744
1,267766569	2,695216998	0,3780473930	0,03584412647	10,65451599
1,402444810	2,902541383	0,3518891125	0,03625520261	10,84697443
1,510155564	3,109865767	0,3300172576	0,03654131715	10,94894335
1,597234612	3,317190152	0,3112966683	0,03673946552	10,99168471
1,726746594	3,731838921	0,2805354610	0,03696055955	10,97009132
1,815572219	4,146487690	0,2558799354	0,03703412714	10,87041378
1,877755062	4,561136459	0,2353442175	0,03701859838	10,73322973
1,921914333	4,975785228	0,2177393662	0,03694629131	10,57917479
1,975792515	5,805082766	0,1886018483	0,03670075933	10,25827606
2,002284428	6,634380304	0,1649084955	0,03638100053	9,947489553
2,013326957	7,463677842	0,1448443984	0,03602409819	9,658006841
2,015436678	8,127115872	0,1306759550	0,03572430578	9,443423737
2,015326779	8,292975380	0,1273421161	0,03564804265	9,392151108
2,014801608	8,500299764	0,1232949296	0,03555254698	9,329144298
2,014042750	8,707624149	0,1193471955	0,03545632983	9,267662954

Tabela 2.6 -  $C$ ,  $B$ ,  $A$  e  $R$  obtidos ajustando a densidade central e a massa AFO

Lake (1998) das soluções exatas para o problema. Os resultados deles fornecem dados interessantes (Finch e Skea, 1989), mas não modelam a matéria estranha (sua equação de estado), pois a equação de estado obtida por Skea não é linear, conforme se pode intuir pela forma da pressão, a seguir.

$$p(x) = \frac{x^8 + 8x^6 + 24x^4 + 32x^2 + 16}{(1+x^2)(2+x^2)^4} \times \frac{UT + WR}{T^2 + R^2}, \quad (2.20)$$

$$U = \frac{A+2}{2} \left[ \cos\left(-2 + \frac{A+2}{2}\right) - \cos\left(\frac{A+2}{2}\right) \right]$$

$$+ \sin\left(-2 + \frac{A+2}{2}\right) - \sin\left(\frac{A+2}{2}\right),$$

$$T = -\frac{A+2}{2} \left[ \cos\left(-2 + \frac{A+2}{2}\right) - \cos\left(\frac{A+2}{2}\right) \right]$$

$$+ \sin\left(-2 + \frac{A+2}{2}\right) - \sin\left(\frac{A+2}{2}\right),$$

$$W = \frac{A+2}{2} \left[ -\sin\left(-2 + \frac{A+2}{2}\right) - \sin\left(\frac{A+2}{2}\right) \right]$$

$$+ \cos\left(-2 + \frac{A+2}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+2}{2}\right),$$

$$R = -\frac{A+2}{2} \left[ -\sin\left(-2 + \frac{A+2}{2}\right) - \sin\left(\frac{A+2}{2}\right) \right]$$

$$+ \cos\left(-2 + \frac{A+2}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+2}{2}\right),$$

$$N(x) = \ln \left[ 1 + \frac{(A+2)^2}{4} - \frac{(A+2)^2}{4} \cos(A) \right] \quad (2.21)$$

$$+ \cos(A) + (A+2) \sin(A) \Big] - 2.637,$$

sendo

$$A \equiv -2 + 2\sqrt{1+x^2}.$$

Em resumo, a redescoberta da solução de Finch e Skea não representou nenhum avanço para a descrição das estrelas estranhas, pelas razões acima apontadas.

### 2.6.3 Solução de Komathiraj

Em dezembro de 2007, K. Komathiraj e S. D. Maharaj publicaram (Komathiraj e Maharaj, 2007) um modelo analítico para as estrelas de *quarks*. O problema que eles resolveram, em si, é diferente do modelo estudado aqui, pois naquele trabalho, eles resolveram as equações de Einstein-Maxwell para uma estrela de *quarks* com carga, supondo a existência de um campo elétrico e supondo a equação de estado do *MIT Bag Model*. Assim, o sistema de equações a se resolver continha cinco incógnitas independentes e quatro equações independentes. O sistema segue abaixo, adaptado com as constantes astrofísicas:

$$\frac{1}{r^2}(1 - e^{2\lambda}) + \frac{2\lambda'}{r}e^{-2\lambda} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(c^2\rho + \frac{1}{2}E^2\right),$$

$$-\frac{1}{r^2}(1 - e^{2\lambda}) + \frac{2\nu'}{r}e^{-2\lambda} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(p - \frac{1}{2}E^2\right),$$

$$e^{-2\lambda}\left(\nu'' + \nu'^2 + \frac{\nu'}{r} - \nu'\lambda' - \frac{\lambda'}{r}\right) = \frac{8\pi G}{c^4}\left(p + \frac{1}{2}E^2\right),$$

$$\sigma = \frac{1}{r^2}e^{-\lambda}(r^2E)',$$

$$c^2\rho = 3p + 4B.$$

Ora, para fechar o sistema só é preciso um *ansatz* para uma das incógnitas. Com o *ansatz*

$$e^{2\nu(r)} \equiv y(x)^2 = [(a+x)^2]^2, \quad x \equiv Cr^2,$$

esses autores obtiveram soluções analíticas para cada uma das variáveis. O conjunto das soluções tem a propriedade desejável de não possuir singularidades em  $r = 0$ .

$$e^{2\lambda} = \frac{315(a+x)^2(a+3x)}{9(35a^3 + 35a^2x + 21ax^2 + 5a^3) - \frac{2Bk}{C}x(35x^3 + 135x^2a + 189a^2x + 105a^3)},$$

$$p = - \left[ \frac{[2(-675Cx^3a + 1575x^5kB + 8390x^3kBa^2 + 5562x^2kBa^3 + 1491xkBa^4 + 5885x^4kBa)]}{315(a+3x)^2(a+x)^3k} + \frac{[2(-1431Cx^2a^2 - 1953Cxa^3 + 105kB a^5 - 135Cx^4 - 630Ca^4)]}{315(a+3x)^2(a+x)^3k} \right], \quad (2.22)$$

$$\rho = \left[ \frac{[2(675Cx^3a + 315x^5kB + 1270x^3kBa^2 + 738x^2kBa^3 + 399xkBa^4 + 1045x^4kBa)]}{105(a+3x)^2(a+x)^3c^2k} + \frac{[2(1431Cx^2a^2 + 1953Cxa^3 + 105kB a^5 + 135Cx^4 + 630Ca^4)]}{105(a+3x)^2(a+x)^3c^2k} \right], \quad (2.23)$$

$$E^2 = - \left[ \frac{140}{11025} \frac{[x(630x^4kB - 3051Cx^2a + 324xkBa^3 + 42kB a^4 + 1820x^3kBa)]}{(a+3x)^2(a+x)^3k} + \frac{140}{11025} \frac{[x(1632x^2kBa^2 - 3267Cxa^2 - 441Ca^3 - 945Cx^3)]}{(a+3x)^2(a+x)^3k} \right], \quad (2.24)$$

onde  $k \equiv 8\pi G/c^4$ .

Utilizando essa solução, o trabalho seguiu com a construção de uma seqüência de estrelas estranhas, variando a densidade central de  $4.885 \times 10^{14} g/cm^3$  até  $25 \times 10^{14} g/cm^3$ . Do mesmo modo que foi feito com a solução Tolman IV e Buchdahl I, foram ajustadas expressões para os parâmetros  $a$  e  $C$  em relação a  $w$  ( $\Leftrightarrow \rho_c$ ). Abaixo, as expressões ajustadas:

$$a(w) = 0,36297 + 0,60908e^{-\frac{w}{0,7161}} + 0,45332e^{-\frac{w}{3,3642}} + 1,8068e^{-\frac{w}{0,2248}} \quad (2.25)$$

e

$$C(w) = \left[ -2,64854 + 4,51764 \left(1 - e^{-\frac{w}{0,70599}}\right) + 49,70345 \left(1 - e^{-\frac{w}{12,80513}}\right) \right] \times 10^{-14}. \quad (2.26)$$

Com essas duas expressões, basta que se forneça um valor para a densidade central dentro do intervalo permitido pela equação de estado do *MIT* para que se construa uma estrela, com sua massa e raio. Basta substituir  $a$  e  $C$ , dados pelo valor da densidade central escolhida, nas equações 2.22, 2.23 e 2.24.

Conforme se esperava, a relação massa-raio obedece o comportamento de massa máxima como em AFO. A diferença é que o campo elétrico faz com que haja um aumento nos raios e massas, dada uma densidade central, em relação ao AFO. Para esse caso, tem-se  $M_{max} \simeq 2,9624 M_{\odot}$  com raio  $R \simeq 12,2274 km$  (ver tabela 2.7). Esse comportamento já era conhecido, ou seja, a solução analítica encontrada por Komathiraj reproduz de maneira bem razoável o comportamento que se esperava desses objetos compactos carregados.

Não deixa de ser irônico, no entanto, que o sistema de Einstein-Maxwell com o campo elétrico seja mais fácil de se resolver do que o problema da estrela estranha sem o campo elétrico...

## 2.7 Algoritmo de Lake

Lake (2003) desenvolveu um algoritmo baseado na escolha de uma única função monotônica, sujeita a condições de fronteira, que gera todas as soluções das *EFE's* que são estáticas, regulares e esfericamente simétricas que representam um fluido perfeito.

Seja um espaço-tempo esfericamente simétrico  $\mathcal{M}$  com

$$ds_{\mathcal{M}}^2 = ds_{\Sigma}^2 + R^2 d\Omega^2,$$

onde  $d\Omega^2$  é a métrica de uma esfera unitária e  $R = R(x^1, x^2)$ , sendo  $(x^1, x^2)$  as coordenadas sobre o 2-espaço Lorentziano  $\Sigma$ . Considere um fluxo (uma congruência de vetores unitários  $u^\alpha$  tipo tempo) sobre uma região aberta de  $\Sigma$  e seja  $n^\alpha$  normal a  $u^\alpha$  no espaço tangente de  $\Sigma$ . Ambos,  $u^\alpha$  e  $n^\alpha$ , estão unicamente determinados. Se o espaço-tempo  $\mathcal{M}$  for gerado por um fluido sujeito às condições  $G^\beta_\alpha u^\alpha n_\beta = 0$ , então, no caso estático, o fluido será sem viscosidade e representará um fluido perfeito se a condição (necessária e suficiente)

$$G + G1 = 3G2 \tag{2.27}$$

for satisfeita, sendo  $G^\beta_\alpha$  o tensor de Einstein,  $G \equiv G^\alpha_\alpha$ ,  $G1 \equiv G^\beta_\alpha u^\alpha u_\beta$  e  $G2 \equiv G^\beta_\alpha n^\alpha n_\beta$ .

$\rho_c[10^{14}g/cm^3]$	$C[10^{-14}]$	$a$	$M/M_\odot$	$R[km]$
25	17,04046382	0,4771457235	2,955595290	12,03450929
24	16,52956528	0,4839092441	2,959351330	12,09768016
23	16,01162934	0,4911020516	2,961730593	12,16201230
22	15,48620448	0,4987741004	2,962441024	12,22736961
21	14,95277700	0,5069837718	2,961122966	12,29355129
20,5	14,68288176	0,5113112216	2,959567810	12,32683501
20	14,41075864	0,5157997747	2,957330103	12,36026741
19,6	14,19139736	0,5195137063	2,954999386	12,38701599
18,7	13,69216298	0,5283029730	2,947763482	12,44709639
18	13,29812695	0,5355927704	2,939938181	12,49347336
16,9	12,66792736	0,5479592231	2,922913486	12,56493220
16	12,14141270	0,5590242757	2,903718174	12,62110801
15	11,54365523	0,5724882566	2,875370261	12,67945753
14,2	11,05478482	0,5842891851	2,846066301	12,72144509
13,5	10,61844326	0,5954844632	2,814457464	12,75324828
13	10,30143938	0,6040434011	2,787812746	12,77220682
12	9,652714965	0,6227877521	2,722033714	12,79715904
11	8,981833568	0,6441235207	2,634914253	12,79697404
10	8,285011829	0,6687210478	2,518583356	12,75703645
9	7,557308037	0,6975285845	2,361194472	12,65224596
8	6,792093552	0,7319481726	2,144238299	12,43643369
7	5,980171099	0,7741782357	1,837616960	12,01601138
6	5,108189957	0,8279602714	1,391009909	11,17061712
5,5	4,643652822	0,8611890362	1,091582729	10,42062299
5	4,155473525	0,9004911091	0,7275745165	9,216748018
4,885	4,039363606	0,9106161986	0,6344828065	8,832530132

Tabela 2.7 -  $C$ ,  $a$ ,  $M$  e  $R$  obtidos com a solução de Komathiraj, dado  $\rho_c$



O caso interessante para esta dissertação é se  $\mathcal{M}$  estiver escrito em coordenadas de curvatura:

$$ds_{\mathcal{M}}^2 = \frac{dr^2}{1 - 2m(r)/r} + r^2 d\Omega^2 - e^{2\Phi(r)} dt^2. \quad (2.28)$$

Escrevendo 2.27, obtém-se uma expressão envolvendo  $\Phi(r)$  e  $m(r)$  com derivadas de segunda ordem em  $\Phi(r)$  e de primeira ordem em  $m(r)$ . Vendo 2.27 como uma diferencial em  $\Phi(r)$ , dado  $m(r)$ , obtém-se uma equação de Riccati para a primeira derivada em  $\Phi(r)$ . Vendo 2.27 como uma diferencial em  $m(r)$ , dado  $\Phi(r)$ , obtém-se um equação linear de primeira ordem para  $m(r)$ .

O algoritmo é obtido quando  $\Phi(r)$ , sujeito às condições de fronteira (a serem explicadas adiante), for dado. Nesse caso,

$$m(r) = \frac{\int b(r) \exp\left(\int a(r) dr\right) dr + \mathcal{C}}{\exp\left(\int a(r) dr\right)}, \quad (2.29)$$

onde

$$a(r) \equiv \frac{2r^2[\Phi'' + \Phi'^2] - 3r\Phi' - 3}{r[r\Phi' + 1]} \quad (2.30)$$

e

$$b(r) \equiv \frac{r\{[\Phi'' + \Phi'^2] - \Phi'\}}{r\Phi' + 1}, \quad (2.31)$$

sendo o apóstrofo derivada em relação a  $r$  e  $\mathcal{C}$  uma constante.

As condições de fronteira sobre  $\Phi(r)$  são expressas em termos de variáveis físicas:

$$\rho = \frac{G1}{8\pi} = \frac{m'(r)}{4\pi r^2} \geq 0, \quad (2.32)$$

e

$$p = \frac{G2}{8\pi} = \frac{r\Phi'[r - 2m(r)] - m(r)}{4\pi r^3} \geq 0. \quad (2.33)$$

Sumarizando as condições necessárias,  $\rho(0)$  e  $p(0)$  finitos garantem a regularidade de todos os invariantes de Riemann no centro de simetria.  $\Phi(0)$  é uma constante finita e segue da equação 2.33 que  $\Phi'(0) = 0$  e  $\Phi''(0) = (4\pi/3)[3p(0) + \rho(0)] > 0$ . Sendo  $\rho \geq 0$  e

contínua, e sendo  $p(0) > 0$  e finita, segue da equação 2.27 que  $r > 2m(r)$ . Com  $r > 2m(r)$  para  $r > 0$ , também segue da equação 2.33 para  $p(r) > 0$  que  $\Phi'(r) \neq 0$  se  $r > 0$ . Como resultado, a função  $\Phi(r)$  deve ser monotonicamente crescente com um mínimo regular em  $r = 0$ . A condição necessária e suficiente para que  $\mathcal{M}$  tenha uma superfície de fronteira regular conectada com o *vacuum* de Schwarzschild exterior em  $r = R > 0$  é dada por  $p(r = R) = 0$ . Sendo  $m(r = R) = M$ , segue que  $\Phi'(r = R)M/R(R - 2M)$ .

O algoritmo é demonstrado com a construção de um número infinito de soluções exatas anteriormente desconhecidas, porém fisicamente interessantes. Seja

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}N \ln\left(1 + \frac{r^2}{\alpha}\right), \quad (2.34)$$

onde  $N \geq 1$  é um inteiro e  $\alpha > 0$  é uma constante.

Embora a equação 2.34 gere uma classe de soluções, a métrica e, em especial,  $m(r)$ , possuem formas funcionais e propriedades físicas que podem ser muito diferentes para cada valor de  $N$ . As soluções com  $N = 1, \dots, 5$  são conhecidas e constituem mais da metade de todas as soluções fisicamente interessantes em coordenadas de curvatura. Para  $N > 5$ , as soluções são aceitáveis e exibem ainda, velocidade do som subluminal e monotonicamente decrescente.

Embora tenha se tentado utilizar este algoritmo, não foi possível obter soluções que descrevessem bem uma estrela estranha, basicamente porque a equação de estado resulta ser extremamente complicada em seu caráter não-linear.

Entretanto, é possível que exista tal solução, pois ela deve também seguir todas as condições previstas. Ademais, o mesmo problema de vínculos sobre as equações está presente aqui também, uma vez que o ponto de partida são as *EFE's* como já apresentadas.

## 2.8 Método de Chavanis

Chavanis (2007) realizou um estudo sobre estrelas relativísticas com equação de estado linear. Nesse trabalho, considerando uma equação de estado  $p = q\rho$ ,  $q = \gamma - 1$ , ele introduziu as variáveis adimensionais  $\psi$ ,  $\xi$  e  $M(\xi)$  tais que

$$\rho = \rho_0 e^{-\psi}, \quad r = \left\{ \frac{c^4 q}{4\pi G \rho_0 (1 + q)} \right\}^{1/2} \xi$$

e

$$M(r) = \frac{4\pi\rho_0}{c^2} \left\{ \frac{c^4 q}{4\pi G \rho_0 (1+q)} \right\}^{3/2} M(\xi).$$

Em termos dessas variáveis, as equações TOV puderam ser escritas como

$$\left\{ 1 - \frac{2q}{1+q} \frac{M(\xi)}{\xi} \right\} \frac{d\psi}{d\xi} = \frac{M(\xi)}{\xi^2} + q\xi e^{-\psi}$$

e

$$\frac{dM}{d\xi} = \xi^2 e^{-\psi}.$$

As equações acima representam o análogo relativístico das equações de Emden. Soluções analíticas para essas equações são semelhantes àsquelas das esferas isotérmicas clássicas e o perfil de densidade de energia é  $\sim r^{-2}$ , sendo, portanto, singular na origem. No entanto, com as condições de fronteira  $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ , essas equações podem ser resolvidas numericamente.

Apesar disso, a densidade de energia decresce como  $r^{-2}$  se  $r \rightarrow \infty$ . Esse fato implica numa massa infinita, como o análogo newtoniano. Para contornar essa dificuldade, o sistema foi enclausurado numa caixa de raio  $R$ , sendo a integração terminada em

$$\alpha = \left\{ \frac{4\pi G \rho_0 (1+q)}{c^4 q} \right\}^{1/2} R,$$

que pode ser uma medida de  $R$ , dado  $\rho_0$ , ou uma medida de  $\rho_0$ , dado  $R$ .

Embora os resultados numéricos demonstrem que a estrutura das estrelas relativísticas com equação de estado linear do tipo  $p = q\rho$  é muito semelhante à estrutura das esferas isotérmicas na gravidade newtoniana, o método não é muito útil para modelar as estrelas estranhas como proposto nesta dissertação, pois além de a equação de estado das estrelas estranhas possuir uma constante (a constante  $B$ , densidade de energia do vácuo), a solução analítica não satisfaz as condições de regularidade apresentadas anteriormente. Ainda, é necessária uma caixa artificial para limitar a estrela. Por fim, parece não haver soluções simples da equação que forneçam uma densidade finita no ponto onde a pressão se anula, como requerem as estrelas estranhas.

Novos estudos estão sendo feitos sobre o método, na tentativa de generalizá-lo para uma equação de estado do tipo  $p = q\rho + a$ ,  $q$  e  $a$  constantes.



## Comparações

Na seção 2.1 foram explicitadas as motivações que conduziram à escolha de um perfil gaussiano para a densidade. Daí em diante, foram estudadas oito abordagens diferentes para o problema de se resolver as equações de Einstein para um objeto estático e esfericamente simétrico, composto por um fluido perfeito. Agora, pode-se comparar esses diferentes resultados do problema.

Em 2.2 mostrou-se que toda solução que descreva fisicamente uma estrela deve possuir algumas propriedades de regularidade. São preceitos lógicos vindos da física fundamental. Qualquer solução que não as satisfaça, deve ser tratada como inviável ou, ao menos, como solução aproximada para certas regiões dentro da estrela.

Em 2.3 mostrou-se que o *ansatz* gaussiano não era solução exata para as equações de Einstein, ao menos da forma assumida, quando também se impõe uma equação de estado linear. Assim sendo, as soluções encontradas nesse trabalho, com os *ansatz* utilizados, são aproximações para descrever os objetos compactos, pois o preço que se paga por essa escolha é admitir um erro, ou melhor, uma ambigüidade na geometria do objeto, conforme foi discutido. Deve ser admitido, entretanto, que sem o vínculo da equação de estado linear pode ser que exista uma solução exata para o perfil gaussiano, que foi procurada intensamente, mas que esbarrou na dificuldade de integração das equações. É óbvio, porém, que mesmo que houvesse uma solução exata com o perfil gaussiano, a equação de estado resultante estaria longe de ser linear no sentido estrito. Quer dizer, é claro que por ser a gaussiana monotonicamente decrescente<sup>1</sup> e por ser a pressão também monotonicamente decrescente<sup>2</sup>, a equação de estado deve ser aproximadamente linear, ao menos em alguma

---

<sup>1</sup> Considerando apenas a região à direita do ponto de simetria, do ponto máximo.

<sup>2</sup> A análise da equação de Riccati para a pressão mostra que ela começa com derivada nula e a função

região. Pensando nisso, fez-se uma integração numérica utilizando os perfis gaussianos apresentados em 2.4. Em um dos casos, os resultados da relação massa-raio são muito compatíveis com os resultados AFO, exceto que a equação de estado resultante possuía o “defeito” de ter inclinação diferente para cada pressão central (obtida por meio da densidade central) utilizada na integração. Vê-se que, apesar de tudo, a equação de estado possuía comportamento quase linear e que o perfil gaussiano não está muito longe da verdade, ou seja, o perfil de densidade tem um comportamento semelhante ao de uma gaussiana.

Sendo o perfil de densidade aproximadamente gaussiano, em 2.5 resolveu-se impô-lo juntamente com a equação de estado linear do *MIT* e estudar o quão grande é o erro na geometria. Ora, quanto menor o erro, melhor a aproximação da solução, ou seja, melhor pode-se utilizá-la para descrever as estrelas de nêutrons. Os perfis gaussianos para a pressão e para a densidade foram obtidos utilizando o *ansatz*  $\nu(r) = \frac{r^2}{2r_0^2} + a$  e a equação de estado do *MIT*. Da equação 1.6 obteve-se a pressão, com a equação de estado obteve-se a densidade e com as equações 1.4 e 1.5, duas expressões para o termo  $e^{\lambda(r)}$ . Embora as duas expressões sejam diferentes, elas satisfazem as condições de regularidade, ou seja,  $e^{\lambda(0)} = 1$ . Assim, foi possível mimetizar exatamente a massa e a densidade central de AFO, mas não o raio. Mesmo assim, a diferença nos raios não é superior a  $\sim 0,5 \text{ km}$  em relação aos raios reais, sendo, portanto, uma boa aproximação. Mas deve-se observar que a diferença na geometria é pequena para densidades  $\sim 10 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$  correspondente a  $\sim 1,82 M_\odot$ . A partir daí, a diferença na geometria é significativa e a solução deixa de ser boa aproximação.

A pergunta que se fez a seguir é se existe outra curva que mimetize o comportamento do perfil de densidade AFO. A curva encontrada foi construída a partir das propriedades que deveria ter: ser monotonicamente decrescente e positiva definida, que não contivesse um zero num ponto  $x$  antes do ponto em que a pressão se anule e que fornecesse um elemento  $e^\lambda$  tratável e com as propriedades desejadas, conforme a seção 2.6.2. O perfil foi, de fato, obtido. Entretanto, foi uma redescoberta independente de uma solução já existente. O interessante dessa solução é que ela fornece uma relação massa-raio semelhante à do AFO, para um objeto autoligado, com uma equação de estado não-linear, mas que é sempre decrescente.

aproximadamente linear em certo intervalo. Não foram feitos estudos adicionais com essa solução.

Seguiu-se o trabalho com a utilização de duas soluções exatas catalogadas (Tolman IV e Buchdahl I) e que satisfaziam todas as condições de regularidade e de aceitabilidade de propriedades físicas. Ambas foram adaptadas para mimetizar o máximo de parâmetros possíveis do trabalho AFO. Em 2.6.1 (Tolman IV), foi muito mais intuitivo e fácil mimetizar a massa e o raio. Claro que a relação massa-raio foi idêntica, mas o preço pago foi que a densidade central era diferente da de AFO para cada ponto do diagrama  $[M,R]$ . Além disso, foi detectado o problema da equação de estado resultante. Já em 2.6.1 (Buchdahl I), duas parametrizações foram possíveis: massa-raio e massa-densidade central. Uma análise desses dois ajustes demonstra que, para fins práticos, a parametrização pela massa e pela densidade central fornece resultados mais consistentes com AFO, pois a diferença no raio em relação ao AFO é menor que a diferença na densidade central em relação à densidade central de AFO obtida do ajuste pela massa-raio. Ver tabelas 2.5 e 2.6.





## Conclusões

Concluimos este trabalho entendendo que para se resolver as equações de Einstein, tendo em vista modelar um objeto compacto, o melhor caminho não é fornecer o perfil de densidade (ou de pressão ou de um dos elementos da métrica) como determinante do tipo de matéria. Apesar dos perfis do AFO parecerem gaussianos (provavelmente não são) podem ser algo muito mais complicado. Mesmo porque, resolver exatamente as equações de Einstein é realmente difícil. Então, existem 3 caminhos:

- se fornecermos a densidade (ou pressão ou um dos elementos da métrica), então que as equações sejam resolvidas exatamente com cálculo numérico ou que se obtenha uma solução exata. O tipo de matéria será determinado pela equação de estado resultante. As propriedades do objeto devem ser estudadas com essa equação de estado.
- se fornecermos a equação de estado, já estamos dizendo qual é o tipo de matéria. Os cálculos (em geral numéricos) fornecerão os perfis de densidade e de pressão. As propriedades do objeto constituído por esse tipo de matéria podem ser estudadas de maneira mais previsível.
- se fornecermos a equação de estado e a densidade (ou pressão ou um dos elementos da métrica), então é preciso compatibilizar as equações, pois o problema estará sobredeterminado. Se as equações forem compatíveis, as propriedades podem ser estudadas.

Outro caminho nos levará, ao menos em princípio, a soluções incompletas ou inconsistentes.

Das abordagens seguidas aqui, nota-se que existem muitas aproximações que são válidas, dependendo do tipo de parâmetro que se quer mimetizar com uma solução analítica (aproximada). A solução apresentada em 2.5 é ideal quando se tem em mente a equação de estado do *MIT* e fornece-se a densidade central como parâmetro, pois o *output* será a massa AFO e um raio não muito diferente do raio AFO. Se o interesse versa sobre a relação exata massa-raio, então Tolman IV ou um dos ajustes de Buchdahl I são muito bons, mas perde-se a informação da equação de estado, conforme mostrado na seção 2.6.1.

Mas onde reside a dificuldade central desse projeto? Qual é o ponto chave? O ponto chave é uma dificuldade matemática por ora intransponível: existem poucas equações para muitos vínculos. Temos apenas três equações para quatro variáveis. Impondo-se a forma de uma das variáveis, o que é desejável quando se observa AFO, fecha-se o problema. Mas, ainda, a idéia é modelar uma estrela estranha, fato que impele a imposição da equação de estado. Isso sobredetermina o problema e não foi possível compatibilizar as equações resultantes. A imposição de dois vínculos (a forma de um perfil e a equação de estado) é demais para os *ansatz* escolhidos, dada suas formas funcionais complicadas.

Foi nesse contexto que surgiu a solução exata de Komathiraj. Supôs-se a existência de um campo elétrico e o problema adquiriu duas variáveis a mais ( $E$  e  $\sigma$ ) e uma equação também a mais (a de  $\sigma$ ). Nesse caso, pode-se forçar dois vínculos (a equação de estado e a forma de um dos perfis) devido ao maior número de equações e de variáveis. Agora o problema se fecha e soluções podem ser encontradas. Apesar da solução para uma estrela estranha ter sido encontrada dessa maneira, existe mesmo esse campo elétrico ou ele é apenas um ente matemático, um artifício para se resolver o problema? É preciso se estudar mais as propriedades da matéria estranha para responder a essa questão.

Por fim, pouco adianta existirem essas soluções se não houver o respaldo das observações. Por esse lado, e como perspectivas para o futuro próximo, a construção de um diagrama massa-raio a partir das observações dos satélites espaciais é absolutamente necessária. Se não para se determinar a equação de estado, ao menos para se excluir as que não servem. É preciso lembrar que a relação massa-raio está intimamente relacionada com a equação de estado (ver figura 1.3). Por outro lado, não é possível dizer que todas as estrelas com massas de Sequência Principal acima de oito massas solares fornecerão, no final, o mesmo tipo de objeto. Quer dizer, pode haver uma grande diversidade de objetos

---

compactos: estrelas estranhas, estrelas de híperons, de *quarks ud*, ou até mesmo híbridas. Cada qual tem uma equação de estado diferente, mas apresentam propriedades e características semelhantes. Como diferenciar cada objeto? A diferenciação é imprescindível para a construção correta da relação massa-raio, sem colocar no mesmo patamar (na linguagem coloquial, no mesmo saco) objetos diferentes. Para o futuro, deve-se aprofundar os estudos sobre quais possíveis assinaturas teriam esses diferentes objetos e quais os vínculos observacionais à equação de estado das estrelas de nêutrons.



## Referências Bibliográficas

Alcock C., Farhi E., Olinto A., Strange stars, *ApJ*, 1986, vol. 310, p. 261

Baade W., Zwicky F., Cosmic Rays from Super-novae, *Proceedings of the National Academy of Science*, 1934, vol. 20, p. 259

Bejger M., Haensel P., Surface gravity of neutron stars and strange stars, *A&A*, 2004, vol. 420, p. 987

Buchdahl H. A., General Relativistic Fluid Spheres, *Physical Review*, 1959, vol. 116, p. 1027

Carroll B. W., Ostlie D. A., *An introduction to modern astrophysics*. Reading, MA: Addison-Wesley, —c1996, 1996

Chavanis P.-H., Relativistic stars with a linear equation of state: analogy with classical isothermal spheres and black holes, *ArXiv e-prints*, 2007, vol. 707

Delgaty M. S. R., Lake K., Physical acceptability of isolated, static, spherically symmetric, perfect fluid solutions of Einstein's equations, *Computer Physics Communications*, 1998, vol. 115, p. 395

D'Inverno R., *Introducing Einstein's relativity*. Introducing Einstein's relativity, Oxford: Clarendon Press: Oxford University Press, 1992

Finch M. R., Skea J. E. F., A realistic stellar model based on an ansatz of Duorah and Ray, *Classical and Quantum Gravity*, 1989, vol. 6, p. 467

- Glendenning N. K., Compact stars : nuclear physics, particle physics, and general relativity. Compact stars : nuclear physics, particle physics, and general relativity / Norman K. Glendenning. New York : Springer, (Astronomy and astrophysics library), 2000
- Heger A., Fryer C. L., Woosley S. E., Langer N., Hartmann D. H., How Massive Single Stars End Their Life, *ApJ*, 2003, vol. 591, p. 288
- Itoh N., Hydrostatic Equilibrium of Hypothetical Quark Stars, *Progress of Theoretical Physics*, 1970, vol. 44, p. 291
- Ivanov B. V., Relativistic static fluid spheres with a linear equation of state, *ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints*, 2001
- Komathiraj K., Maharaj S. D., Analytical models for quark stars, *ArXiv e-prints*, 2007, vol. 712
- Lake K., All static spherically symmetric perfect-fluid solutions of Einstein's equations, *Phys. Rev. D*, 2003, vol. 67, p. 104015
- Lattimer J. M., Supernova theory and the neutrinos from SN1987A., *Nuclear Physics A*, 1988, vol. 478, p. 199
- Lindblom L., Limits on the gravitational redshift from neutron stars, *ApJ*, 1984, vol. 278, p. 364
- Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A., *Gravitation*. San Francisco: W.H. Freeman and Co., 1973, 1973
- Narain G., Schaffner-Bielich J., Mishustin I. N., Compact stars made of fermionic dark matter, *Phys. Rev. D*, 2006, vol. 74, p. 063003
- Oppenheimer J. R., Volkoff G. M., On Massive Neutron Cores, *Physical Review*, 1939, vol. 55, p. 374
- Rubio-Herrera E., Braun R., Janssen G., van Leeuwen J., Stappers B. W., The 8gr8 Cygnus survey for new pulsars and RRATs, *ArXiv Astrophysics e-prints*, 2007

- Schutz B. F., *A First Course in General Relativity*. A First Course in General Relativity, by Bernard F. Schutz, pp. 392. ISBN 0521277035. Cambridge, UK: Cambridge University Press, February 1985., 1985
- Shapiro S. L., Teukolsky S. A., *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. Research supported by the National Science Foundation. New York, Wiley-Interscience, 663 p., 1983
- Tolman R. C., *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*. Relativity, Thermodynamics, and Cosmology, Oxford: Clarendon Press, 1934
- Tolman R. C., *Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid*, *Physical Review*, 1939, vol. 55, p. 364
- Weber F., *Pulsars as astrophysical laboratories for nuclear and particle physics*. Pulsars as astrophysical laboratories for nuclear and particle physics /F. Weber. Bristol, U.K. : Institute of Physics, 682 p., 1999
- Weber F., Negreiros R., Rosenfield P., *Neutron Star Interiors and the Equation of State of Superdense Matter*, *ArXiv e-prints*, 2007, vol. 705
- Witten E., *Cosmic separation of phases*, *Phys. Rev. D*, 1984, vol. 30, p. 272
- Woods P. M., Thompson C., , 2006 *Soft gamma repeaters and anomalous X-ray pulsars: magnetar candidates*. *Compact stellar X-ray sources* pp 547–586





# Apêndice



## Derivação da métrica esfericamente simétrica

Primeiro devemos escrever o elemento de linha, lembrando que queremos descrever um objeto que tenha simetria esférica.

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \vec{w}}{\partial x^\nu} \Rightarrow ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

onde  $\vec{w}$  é o vetor que localiza o ponto e  $x^\mu$  são as coordenadas da base escolhida.

Por exemplo, uma esfera 3-D euclidiana, em coordenadas cartesianas [ $\vec{w} = (x, y, z)$  e  $x^\mu = (x, y, z)$ ], tem métrica

$$\mathbf{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e em coordenadas esféricas [ $\vec{w} = (a \sin(\theta) \cos(\varphi), a \sin(\theta) \sin(\varphi), a \cos(\theta))$  e  $x^\mu = (a, \theta, \varphi)$ ], tem métrica

$$\mathbf{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}.$$

Mas na RG temos um espaço-tempo 4-D, de modo que  $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$ . Manter a simetria esférica significa que  $ds^2$  não pode variar quando  $\theta$  e  $\varphi$  variam. Ou seja,  $\theta$  e  $\varphi$  só podem aparecer em  $ds^2$  sob a forma  $d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$  porque essa forma descreve a localização de um ponto sobre uma casca esférica a um dado raio  $r$ . Logo, não podemos ter termos como  $dt d\theta$ ,  $dr d\theta$ , etc.

Dito de outra maneira, a métrica deve ser invariante sob reflexões:  $\theta \rightarrow \theta' = \pi - \theta$  e  $\varphi \rightarrow \varphi' = -\varphi$ . Então, em princípio:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 - 2g_{01}dtdr - g_{11}dr^2 - g_{22}d\theta^2 - g_{33}d\varphi^2.$$

Dessas considerações podemos escrever (D'Inverno, 1992):

$$ds^2 = Adt^2 - 2Bdtdr - Cdr^2 - D(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2),$$

onde  $A, B, C$  e  $D$  são funções de  $t$  e  $r$ .

Vamos introduzir uma nova coordenada radial  $r \rightarrow r' = D^{1/2}$ .

$$ds^2 = A'dt^2 - 2B'dtdr' - Cdr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2).$$

Consideremos a diferencial inexata  $A'dt - B'dr'$ . Podemos torná-la exata se a multiplicarmos por um fator integrante  $I(t, r')$ :

$$dt' \equiv I(t, r')[A'dt - B'dr']$$

que, elevando ao quadrado, obtém-se

$$A'dt^2 - 2B'dtdr' = I^{-2}A'^{-1}dt'^2 - A'^{-1}B'^2dr'^2.$$

Logo,

$$ds^2 = I^{-2}A'^{-1}dt'^2 - (A'^{-1}B'^{-2} + C)dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2).$$

Definem-se:

$$e^{\nu(t', r')} \equiv I^{-2}A'^{-1}$$

e

$$e^{\lambda(t', r')} \equiv A'^{-1}B'^{-2} + C.$$

Por fim, a métrica que descreve um objeto esfericamente simétrico, isotrópico e estático (não pulsante e não rotante) é:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2).$$

Daí, sendo

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2 e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix},$$

calcula-se  $G_{\mu\nu}$ .

$$G_{00} = c^2 \frac{\lambda' e^\nu}{r e^\lambda} - c^2 \frac{e^\nu}{r^2 e^\lambda} + c^2 \frac{e^\nu}{r^2},$$

$$G_{11} = \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{e^\lambda}{r^2},$$

$$G_{22} = \frac{\nu'' r^2}{2e^\lambda} + \frac{\nu'^2 r^2}{4e^\lambda} - \frac{\nu' \lambda' r^2}{4e^\lambda} + \frac{\nu' r}{2e^\lambda} - \frac{\lambda' r}{2e^\lambda},$$

$$G_{33} = \frac{\nu'' r^2 \sin^2(\theta)}{2e^\lambda} + \frac{\nu'^2 r^2 \sin^2(\theta)}{4e^\lambda} - \frac{\nu' \lambda' r^2 \sin^2(\theta)}{4e^\lambda} + \frac{\nu' r \sin^2(\theta)}{2e^\lambda} - \frac{\lambda' r \sin^2(\theta)}{2e^\lambda}.$$