Um Princípio de Invariância para Sistemas Dinâmicos Discretos

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP

EXEMPLAR REVISADO

Data de entrada no Serviço. 12, 02, 02.

Taís Ruoso Calliero

Dissertação de Mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Luís Fernando Costa Alberto

São Carlos 2005





Chass. TESE V
Cutt. 1111
Fombo T249/05
Sysno 146466

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

C198p

Calliero, Taís Ruoso Um princípio de invariância para sistemas dinâmicos discretos / Taís Ruoso Calliero. -- São Carlos, 2005.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de São Carlos-Universidade de São Paulo, 2005.

Área: Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Luís Fernando Costa Alberto.

1. Estabilidade. 2. sistemas dinâmicos discretos. 3. Princípio de invariância de LaSalle. 4. Conjuntos limites. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel TAÍS RUOSO CALLIERO

Dissertação defendida e julgada em 19-07-2005 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Titular NEWTON GERALDO BRETAS (Orientador) (SUBSTITUTO)

(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Prof. Fitular JOSÉ CLÁUDIO GEROMEL

(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Prof. Dr. ADALBERTO PANOBIANCO BERGAMASCO (Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/USP)

Prof. Associado HOMERO SCHIABEL

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Prof. Associado EVALDO

Decano da Comissão de Pós-Graduação,

Aos meus pais, Selestino e Vera e ao Eduardo.

Não somos o que devíamos ser,
não somos o que desejamos ser,
não somos o que iremos ser.
Mas, graças a Deus, não somos o que éramos!
(Martin Luther King)

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Luís Fernando C. Alberto por ter me concedido a oportunidade de realizar este trabalho, pelos valiosos ensinamentos, pela paciência e amizade.

Ao Prof. Newton G. Bretas, pela amizade e apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais pela compreensão e carinho e pela fantástica capacidade de estarem tão presentes mesmo tão distantes.

Ao Eduardo, pelo incentivo e pelo companheirismo até mesmo nos momentos de estudo.

Ao André, pelas discussões que contribuíram para melhorar este trabalho e pela amizade.

Aos professores e funcionários da USP pela oportunidade de aprendizado, em especial aos professores João Bosco, Rodrigo e Vilma pelos ensinamentos durante as disciplinas e as funcionárias Denise e Marisa pela amizade e presteza dos serviços.

À todos os amigos, que tornam o caminho mais alegre.

Aos colegas do LACO pela convivência.

Ao CNPq, pela bolsa concedida que possibilitou a realização deste trabalho.

Resumo

Calliero, Taís Ruoso (2005). Um Princípio de Invariância para Sistemas Dinâmicos Discretos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

Muitos sistemas físicos são modelados por sistemas dinâmicos discretos. Com o advento da tecnologia digital os sistemas discretos tornaram-se ainda mais importantes, sendo assim, o desenvolvimento de ferramentas analíticas para este tipo de sistema é de grande importância. Neste trabalho, estudam-se alguns dos principais resultados relacionados à estabilidade de sistemas dinâmicos discretos, e alguns novos são propostos. É bem conhecido na literatura que a estabilidade de um ponto de equilíbrio pode ser caracterizada pelo Método Direto de Lyapunov, via uma função auxiliar denominada função de Lyapunov. LaSalle, ao estudar a teoria de Lyapunov, estabeleceu uma importante relação entre função de Lyapunov e conjuntos limites de Birkhoff, que deu origem ao Princípio de Invariância de LaSalle. Este, entre outras coisas, permite a análise de estabilidade assintótica. Tanto o Método Direto de Lyapunov quanto o Princípio de Invariância requerem que a variação da função de Lyapunov seja não positiva ao longo das trajetórias do sistema. Em sistemas com comportamentos mais complexos, dificilmente encontra-se uma função com esta propriedade. Neste trabalho, propõe-se uma versão mais geral do Princípio de Invariância para sistemas discretos, a qual não exige que a variação da função de Lyapunov seja sempre não positiva. Com isto, a obtenção de funções deste tipo torna-se mais simples e muitos problemas, que antes não poderiam ser tratados com a teoria convencional, passam a ser tratados através deste novo resultado. Os resultados desenvolvidos, neste trabalho, são úteis para encontrar estimativas de atratores de sistemas não-lineares discretos.

Palavras-Chave: Estabilidade, Sistemas Dinâmicos Discretos, Princípio de Invariância de LaSalle, Conjuntos limites

Abstract

Calliero, Taís Ruoso (2005). An Invariance Principle for Discrete Dynamic Systems. Dissertation (Master) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

Many physical systems are modeled by discrete dynamic systems. With the evolution digital technology, the discrete systems became still more important, so the development of analytic tools for this type of system has high importance nowadays. In this work, some of the main results in stability of discrete dynamic systems are studied and some new ones are proposed. It is well known in the literature that the stability of an equilibrium point may be characterized by the Lyapunov's Direct Method, with a function known as Lyapunov auxiliary function. LaSalle, when studying the Lyapunov theory, established an important relationship between Lyapunov function and Birkhoff limit sets. Then, he created the Lasalle's Invariance Principle. This, among other features, allows the analysis of asymptotically stability. Both the Lyapunov's Direct Method and the Invariance Principle request the variation of the Lyapunov function to be negative semidefinite along the system trajectory. In systems with more complex behaviors, a function is hardly found with this property. This work developed a more general version of the Invariance Principle for discrete systems, which does not require the variation of the Lyapunov function to be always negative semidefinite. This new theory enables to find these functions easily and many insoluble problems, which could not be treated with the conventional theory before, become treatable by this new result. The results of this work are useful to find estimates of discrete nonlinear systems atractors.

Key-words: Stability, Discrete Dynamic Systems, Lasalle's Invariance Principle, Limit Sets.

Lista de Figuras

2.1	Interpretação geométrica do Princípio de Invariância de LaSalle .	7
2.2	Interpretação geométrica da Extensão do Princípio de Invariância	8
3.1	Estabilidade assintótica do sistema (3.3): (a) $0 < \lambda < 1$; (b) $-1 <$	
	$\lambda < 0$	13
3.2	Diagrama teia de aranha	15
3.3	Função característica do sistema (3.5)	15
3.4	Função $T^2(x)$ e suas raízes para $\mu=3,2$	17
797175	7. (4.0)	27
4.1	Pontos fixos do sistema (4.3)	
4.2	(a)Função de Lyapunov do sistema (4.3) (b) Função (4.5)	28
4.3	Estimativa da área de atração do sistema (4.3)	29
4.4	Pontos fixos do sistema (4.6)	31
4.5	Função de Lyapunov do sistema (4.6)	32
4.6	Função de Lyapunov do sistema (4.9)	33
4.7	Estimativa da área de atração do sistema (4.9)	34
4.8	Estimativa do Atrator para condição inicial dentro da área da atração $$	37
4.9	Estimativa do Atrator para condição inicial fora da área da atração	37
4.10	Órbita estável	38
4.11	Sistema de Lorenz discretizado	40
4.12	Estimativa do atrator	40
4.13	Estimativa do atrator para $h=0,01$	41
4.14	Trajetórias do sistema (4.19)	44
4 15	Funções $a(x(n)), V(x(n), \lambda), b(x(n)), \dots$	45

4.16 Estimativa da área de atração do sistema (4.19) 4	1.16	Estimativa	da área	de atração	do sistema	(4.19)	•	٠					ě	ě	•		4'	7
--	------	------------	---------	------------	------------	--------	---	---	--	--	--	--	---	---	---	--	----	---

Lista de Símbolos

- Λ Conjunto no qual variam os parâmetros do sistema.
- λ Vetor de parâmetros do sistema.
- Ω_L Estimativa da região de atração no Princípio de Invariância original e na extensão do Princípio de Invariância.
- $\widetilde{\Omega}_{l+s}$ Parte da estimativa do atrator na extensão do Princípio de Invariância.
- a Estimativa uniforme inferior da função de Lyapunov.
- ${\cal A}_L$ Conjunto que contém a estimativa da área de atração no Princípio de Invariância Uniforme.
- A_{l+s} Componente da estimativa do atrator do Princípio de Invariância Uniforme.
- b Estimativa uniforme superior da função de Lyapunov.
- ${\cal B}_L$ Conjunto auxiliar no Princípio de Invariância Uniforme.
- B_{l+s} Conjunto auxiliar no Princípio de Invariância Uniforme.
- c Estimativa uniforme da derivada da função de Lyapunov.
- C Conjunto no qual a derivada da função de Lyapunov é maior que zero, ou conjunto no qual a função c é menor que zero.
- \mathbb{C}^1 Conjunto das funções contínuas cujas derivadas primeiras também são contínuas.
- E Estimativa do atrator no Princípio de Invariância original e na extensão do Princípio de Invariância.

- ${\cal E}_L$ Estimativa do atrator no Princípio de Invariância Uniforme.
- f Campo Vetorial.
- G Conjunto auxiliar.
- H Conjunto auxiliar.
- L Valor da função de Lyapunov que define os conjuntos $\Omega_L,\,A_L\,$ e $\,B_L.$
- l Valor da função de Lyapunov que define os conjuntos $\Omega_{l+s},\,A_{l+s}$ e $B_{l+s}.$
- M Maior conjunto invariante contido em E.
- R Espaço dos números reais.
- \mathbb{Z}_+ Espaço dos números inteiros não negativos.
- s Valor da variação da função de Lyapunov que define os conjuntos $\Omega_{l+s},\,A_{l+s}$ e $B_{l+s}.$
- V Função de Lyapunov.
- ΔV Variação da Função de Lyapunov.
- x Vetor de variáveis de estado.
- x^* Ponto fixo, ou ponto de equilíbrio.
- x_s Ponto de equilíbrio estável.

Conteúdo

Ag	grade	cimentos	iii
Re	sum		iv
Αŀ	ostra	ct	vi
Li	sta d	e Figuras	vi
Li	sta d	e Símbolos	ix
1	Intr	odução	1
	1.1	Apresentação	1
	1.2	Organização do Trabalho	3
2	Mét	odo Direto de Lyapunov para Sistemas Dinâmicos Contínuos	4
	2.1	Introdução	4
	2.2	Princípio de Invariância de LaSalle	5
3	Equ	ações de Diferenças e Sistemas Dinâmicos Discretos	10
	3.1	Introdução	10
	3.2	Estabilidade de Sistemas Não-Lineares Discretos	11
	3.3	Sistemas Dinâmicos Discretos	18
	3.4	Propriedades Básicas de Conjuntos Limites	21
4	Um	a extensão do Método Direto de Lyapunov para Sistemas	3
	Dir	âmicos Discretos	23
	11	Introducão	23

5	Cor	nclusões	48
	4.4	Princípio de Invariância Uniforme	41
	4.3	Princípio de Invariância	26
	4.2	Método Direto de Lyapunov	24

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação

A teoria de estabilidade possui um papel central em diversas áreas da engenharia e está fortemente presente na teoria de controle com aplicações em biologia, engenharia química, economia, sistemas elétricos de potência entre outros.

Um dos resultados mais importantes e conhecidos na teoria geral de estabilidade é devido a A.M. Lyapunov, que no final do século XIX, concebeu o chamado Método Direto de Lyapunov.

O Método Direto de Lyapunov fornece uma condição suficiente para a estabilidade de um ponto de equilíbrio, Hahn (1963). Para isto supõe a existência de uma função escalar auxiliar denominada Função de Lyapunov. Com o auxílio desta função, é possível concluir sobre a estabilidade sem calcular as soluções analiticamente.

Em 1959, J.P. LaSalle estabeleceu uma importante relação entre funções de Lyapunov e conjuntos limites de Birkhoff. Baseado nesta relação LaSalle publicou o Princípio de Invariância de LaSalle, que, entre outras coisas, permite determinar uma estimativa da região de atração.

Rodrigues, Alberto e Bretas(2000) apresentaram uma Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle que possui o original como caso particular. Nesta extensão, exigem-se condições menos restritivas sobre a Função auxiliar que o Princípio de Invariância original. Desta forma, problemas que do ponto de vista

prático são difíceis de serem analisados pelo Princípio de Invariância, agora podem ser tratados com esta nova teoria.

Algumas aplicações da Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle já foram relatadas na literatura, por exemplo, sincronização de sistemas caóticos (Rodrigues et al., 2001), estabilidade de atratores caótico (Alberto, 2000), aplicações em sistemas de potência (Bretas e Alberto, 2003). Um procedimento sistemático para encontrar uma função de Lyapunov Estendida para uma determinada classe de sistemas dinâmicos foi apresentada em (Bretas et al., 2004).

Bons resultados na aplicação da Extensão do Princípio de Invariância em sistemas dinâmicos contínuos motivaram o estudo do mesmo em sistemas dinâmicos discretos.

A história da engenharia sempre foi marcada pelo paradigma dos sistemas contínuos. Contudo, as equações diferenciais se mostraram insuficientes para a modelagem de certos problemas, por exemplo, sistemas mecânicos com controle de impulso e sistemas que contém dispositivos digitais. Tradicionalmente estes problemas foram tratados através de heurísticas e simulações. Nas últimas décadas, a importância destes problemas aumentou devido ao progresso tecnológico, exigindo assim, um maior esforço para o desenvolvimento de ferramentas formais adequadas a este tipo de sistema.

As equações de diferenças, são úteis no estudo de sistemas contínuos, já que sistemas contínuos podem ser convertidos em sistemas discretos, usando-se um artifício elaborado por Poincaré (Monteiro, 2002). Além disso, a integração numérica de equações diferenciais envolve a transformação dessas em equações de diferenças, procedimento largamente utilizado nas simulações por computado-res digitais.

Sistemas discretos podem exibir uma diversidade de comportamentos dinâmicos, como oscilações periódicas e caos, mesmo quando são constituídos por apenas uma única equação de diferença autônoma de primeira ordem, não-linear. Em sistemas autônomos contínuos, movimentos oscilatórios só poderão ocorrer se houver pelo menos um par de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem,

e movimento caótico só aparece se houverem pelo menos três equações desse tipo.

Sistemas discretos são mais complexos, pois apresentam maior riqueza de comportamentos. Por esta razão torna-se importante o estudo da teoria de estabilidade para sistemas discretos.

O objetivo deste trabalho é investigar o Princípio de Invariância para sistemas discretos.

1.2 Organização do Trabalho

O Capítulo 2 apresenta o Teorema de Lyapunov, o Princípio de Invariância de LaSalle e a Extensão do Princípio de Invariância, para sistemas dinâmicos contínuos.

Definições básicas para o estudo de estabilidade de sistemas discretos são apresentadas no Capítulo 3, juntamente com a caracterização de conjuntos limites.

O Capítulo 4 apresenta o Método Direto de Lyapunov, Princípio de Invariância de LaSalle e uma Extensão do Princípio de Invariância, para sistemas dinâmicos discretos.

O Capítulo 5 traz as conclusões.

Capítulo 2

Método Direto de Lyapunov para Sistemas Dinâmicos Contínuos

2.1 Introdução

O Princípio de Invariância de LaSalle é uma das ferramentas mais importantes para estudar o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais. O primeiro resultado foi provado para equações diferenciais autônomas definidas em espaços de dimensão finita por LaSalle (1960a; 1960b). Depois disto, foi estendido para equações diferenciais definidas em espaços de dimensão infinita por Hale (1969), Slemrod (1970) incluindo equações funcionais, Hale e Lunel (1993). Também foi estendido para equações não autônomas periódicas por LaSalle (1962), quase-periódicas por Miller (1965) e para equações diferenciais ordinárias mais gerais por Sell (1967). Rodrigues (1970) obteve uma extensão para equações não autônomas retardadas e LaSalle (1977) para equações de diferenças.

A grande vantagem do Princípio de Invariância é permitir o estudo de estabilidade de um sistema sem o conhecimento das soluções das equações diferenciais. Para isto, utiliza uma função auxiliar denominada Função de Lyapunov. Apesar de estar sendo utilizado com sucesso em inúmeras aplicações, o Princípio de Invariância de LaSalle apresenta algumas dificuldades, a maior delas é que não fornece nenhuma maneira sistemática de encontrar a Função de Lyapunov. A principal condição que restringe a busca por tal função é que se exige que a

derivada da Função de Lyapunov, ao longo das trajetórias do sistema, seja semidefinida negativa. Em sistemas complexos, como por exemplo sistemas caóticos, dificilmente encontram-se Funções de Lyapunov satisfazendo estas condições. A Extensão do Princípio da Invariância de LaSalle provado por Rodrigues, Alberto e Bretas (2000) requer condições menos restritivas sobre a derivada da Função de Lyapunov, desta forma encontrar uma Função de Lyapunov pode ser uma tarefa um pouco mais fácil.

Este capítulo tem por objetivo apresentar o Princípio de Invariância de LaSalle (1960a; 1960b) e a Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle, Rodrigues, Alberto e Bretas (2000). Ambos provados para aplicação em sistemas dinâmicos contínuos.

2.2 Princípio de Invariância de LaSalle

Considere a seguinte equação diferencial autônoma:

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Um ponto $y \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio de (2.1) se f(y) = 0. Denota-se por $\varphi(t, x_0)$ a solução de (2.1) com condição inicial em x_0 , ou seja, $\varphi(t_0, x_0) = x_0$.

Definição 2.1: Um ponto de equilíbrio x_s é um ponto de equilíbrio estável no sentido de Lyapunov se dado $\varepsilon > 0$ (suficientemente pequeno), existir $\delta > 0$ tal que $\|\varphi(t,x_0) - x_s\| \le \varepsilon$ para $t \ge 0$ sempre que $\|x_0 - x_s\| \le \delta$.

Definição 2.2 Um ponto de equilíbrio x_s é assintoticamente estável se for estável e $\varphi(t, x_0) \to x_s$ quando $t \to \infty$ sempre que $||x_0 - x_s|| \le \delta$.

Definição 2.3 Um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é invariante com relação à (2.1) se, para todo $x_0 \in B$, $\varphi(t, x_0) \in B$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Um ponto de equílibrio é um conjunto invariante, órbitas periódicas também são exemplos de conjuntos invariantes.

Utilizando o Método Direto de Lyapunov pode-se determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio sem conhecer a solução do sistema, através da análise de uma função escalar auxiliar e de sua variação ao longo do tempo.

Teorema 2.4 Seja x=0 um ponto de equilíbrio de (2.1) e $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio contendo x=0. Seja uma função $V:D\to\mathbb{R}$ contínua e diferenciável, tal que

$$V(0) = 0 \ e \ V(x) > 0 \ em \ D - \{0\}$$
 (2.2)

$$\dot{V}(x) \le 0 \ em \ D \tag{2.3}$$

então, x = 0 é estável. Além disso, se

$$\dot{V}(x) < 0 \ em \ D - \{0\}$$
 (2.4)

o ponto x=0 é assintoticamente estável.

A função contínua e diferenciável V(x) satisfazendo (2.2) e (2.3) é conhecida como função de Lyapunov. A demonstração deste Teorema encontra-se em (Khalil,1996).

Em determinados sistemas, uma função candidata a função de Lyapunov pode falhar na análise de estabilidade assintótica conforme o Teorema (2.4) por não atender a condição (2.4). Entretanto, essa função ainda pode ser usada para determinar a estabilidade assintótica, utilizando a relação entre esta função e os conjuntos limites de Birkhoff, estabelecida por LaSalle (1959).

Teorema 2.5 (Princípio de Invariância de LaSalle): Sejam $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $e \ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funções C^1 . Seja L uma constante real tal que o conjunto $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$ seja limitado. Admita que $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega_L$ e defina $E := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) = 0\}$. Seja B o maior conjunto invariante contido em E. Então, toda solução de (2.1) iniciando em Ω_L converge para B quando $t \to \infty$.

A demonstração do Teorema (2.5) pode ser encontrada em LaSalle (1960b). É interessante interpretar geometricamente este teorema. Para isto será utili-

zada a Figura (2.1) na qual se apresenta um caso simples da aplicação do Teorema

de LaSalle em dimensão 2. Como exigido pelo Teorema (2.5), Ω_L é um conjunto limitado. Suponha que o maior conjunto invariante contido em E seja composto apenas pelo ponto de equilíbrio estável x_s . Sabe-se que dentro de Ω_L , a derivada de V é menor ou igual a zero.

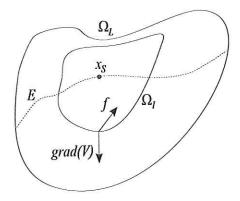


Figura 2.1: Interpretação geométrica do Princípio de Invariância de LaSalle

Desenvolvendo \dot{V} pela regra da cadeia obtém-se:

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} = \langle grad(V), \dot{x} \rangle = \langle grad(V), f \rangle \leq 0$$

Desta desigualdade verifica-se que o produto escalar do vetor gradiente V com o vetor do campo vetorial deve ser menor ou igual a zero. Isto significa que o ângulo entre estes vetores deve ser maior ou igual a 90°, como mostra a Figura 2.1. Esta relação entre estes vetores se mantém para todos os pontos da curva de nível Ω_l da função V, logo as soluções entram na região delimitada pela curva de nível Ω_l , ou ficam sobre a curva de nível. Além disto, se o conjunto E não contiver nenhum outro conjunto invariante além do equilíbrio x_s , isto implica que nenhuma curva de nível de V pode estar contida inteiramente em E. Isto vale para todas as curvas de níveis internas à Ω_L , logo toda solução iniciando em Ω_L deverá convergir para o ponto de equilíbrio x_s . Esta observação geométrica do Princípio de Invariância de LaSalle dá origem aos métodos de estimativa da área de atração de pontos de equilíbrio estáveis de sistemas não-lineares.

Apresenta-se agora a Extensão do Princípio da Invariância provada por Rodrigues, Alberto e Bretas (2000). Este teorema permite que a derivada temporal

de V seja positiva em algumas regiões, possibilitando o tratamento de problemas mais gerais e facilitando a tarefa de encontrar uma função de Lyapunov, agora chamada de Função de Lyapunov Estendida.

Teorema 2.6 (Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle) : Sejam $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funções C^1 . Seja $L \in \mathbb{R}$ uma constante tal que o conjunto $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$ seja limitado. Seja $C := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) > 0\}$, e admita que $\sup_{x \in C} V(x) = l < L$. Defina $\bar{\Omega}_l = \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) \leq l\}$ e $E := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$. Seja B o maior conjunto invariante de (2.1) contido em E. Então, toda solução de (2.1) iniciando em Ω_L converge para o conjunto invariante B quando $t \to \infty$.

Além disto, se $x_0 \in \bar{\Omega}_l$, então $\varphi(t, x_0) \in \bar{\Omega}_l$, $\forall t \geq 0$ e $\varphi(t, x_0)$ tende para o maior conjunto invariante de (2.1) contido em $\bar{\Omega}_l$.

A demonstração pode ser encontrada em Alberto (2000).

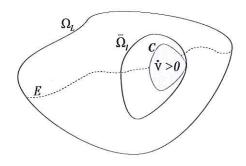


Figura 2.2: Interpretação geométrica da Extensão do Princípio de Invariância

Para um melhor entendimento do Teorema acima utiliza-se a interpretação geométrica ilustrada pela Figura 2.2. Conforme a hipótese do Teorema 2.6 o conjunto Ω_L é limitado. Dentro de Ω_L a derivada de V, ao longo das soluções, é não positiva, exceto dentro do conjunto C onde ela é positiva. Por hipótese o conjunto C nunca atinge a fronteira de Ω_L , uma vez que l < L. O Teorema 2.6 garante que todas as soluções de (2.1) iniciando dentro de Ω_L convergem para o maior conjunto invariante contido em E. Se, em particular, o maior conjunto invariante contido em E estiver contido em Ω_l , então todas as soluções

com condição inicial em Ω_L tendem para o maior conjunto invariante contido em $\bar{\Omega}_l$. Uma vez dentro de $\bar{\Omega}_l$, as soluções não saem deste conjunto o qual é uma estimativa do atrator. Dentro de $\bar{\Omega}_l$, duas coisas podem acontecer, ou as soluções tendem para o conjunto $\{x \in \bar{\Omega}_l : \dot{V}(x) = 0\}$, ou as soluções permanecem entrando e saindo do conjunto C indefinidamente.

Observação 2.7 O Teorema (2.5) é um caso particular do Teorema (2.6).

Capítulo 3

Equações de Diferenças e Sistemas Dinâmicos Discretos

O presente Capítulo apresenta as condições de estabilidade das soluções de equilíbrio para sistemas discretos, que podem ser pontos fixos ou órbitas periódicas. Apresenta-se a versão discreta do Teorema de Hartmann-Grobman. Definições elementares de equações de diferenças são apresentadas, juntamente com algumas propriedades de interesse para o trabalho como propriedades de conjuntos limites, LaSalle (1976).

3.1 Introdução

Suponha que em qualquer tempo, um sistema possa ser caracterizado por um vetor finito dimensional $x \in \mathbb{R}^m$ onde x é o vetor de espaço de estados e \mathbb{R}^m é o espaço Euclidiano real m-dimensional, então

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

As componentes x_1, \ldots, x_m são as variáveis de estado do sistema.

A diferença de primeira ordem Δx de uma função $x: \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}^m$, onde \mathbb{Z}_+ é o

conjunto dos números inteiros não negativos, é definida por

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

Suponha que o sistema a ser estudado seja representado por uma equação de diferença. Isto é, existe uma aplicação $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ contínua tal que

$$x(n+1) = T(x(n)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{+}$$
(3.1)

A solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x(n+1) = T(x(n)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

é $x(n) = T^n(x_0)$, onde T^n é a n-ésima iteração de T, e $T^0 = I$, é a função identidade. A solução está definida em \mathbb{Z}_+ . A equação (3.1) é uma lei(algoritmo) para definir a função x.

Em sistemas discretos, diferentemente de sistemas contínuos, não há problema quanto a existência e unicidade das soluções de equações de diferenças, pois para tempo futuro a aplicação T está bem definida.

3.2 Estabilidade de Sistemas Não-Lineares Discretos

Definição 3.1 : Uma órbita (ou trajetória) de (3.1) consiste na sequência de pontos gerada pelas sucessivas aplicações de T, a partir de uma condição inicial x_0 .

Definição 3.2 : Um ponto fixo x^* de (3.1) é um ponto tal que $T(x^*) = x^*$, também conhecido como estado de equilíbrio do sistema (3.1).

Estuda-se a estabilidade do ponto fixo x^* através da análise do comportamento das sucessivas iterações que partem de um ponto x(n) nas vizinhanças de x^* .

O ponto fixo x^* pode ser assintoticamente estável ou instável, dependendo da seqüência x(n+1), x(n+2), x(n+3)... Se essa seqüência aproxima-se de x^* , o ponto fixo será estável, caso contrário será instável.

Seja $\delta > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ então $B_{\delta}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : ||x - x_0|| < \delta\}$ é a bola de centro x_0 e raio δ .

Definição 3.3 : Diz-se que x^* é uma solução de equilíbrio estável ou ponto fixo estável, se para todo $\varepsilon > 0$ (arbitrariamente pequeno) existe um $\delta > 0$ tal que $T^n(B_\delta(x^*)) \subset B_\varepsilon(x^*)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ isto é, $||x-x^*|| < \delta$ implica em $||T^n(x)-x^*|| < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Se x^* não é estável, então é chamada de instável.

Seja x^* um ponto fixo de um sistema não-linear e \mathcal{A} a matriz jacobiana, do sistema linear associado, calculada em x^* . Se os autovalores de \mathcal{A} têm módulo diferente de 1, então o ponto de equilíbrio x^* é um ponto de equilíbrio hiperbólico.

O teorema de Hartman-Grobman (versão discreta) garante que a estabilidade de um ponto fixo x^* hiperbólico pode ser determinada analisando-se a versão linearizada do sistema. (Pugh, 1969).

Se $|\lambda|=1$, os autovalores de $\mathcal A$ não fornecem informação sobre a estabilidade do sistema. Neste caso, pode se tentar determinar a estabilidade através da Teoria de Lyapunov e do Teorema Proposto neste trabalho que serão apresentados no Capítulo 4.

Para estudar melhor o significado e a aplicação do Teorema de Hartman-Grobman, considere o sistema unidimensional

$$x(n+1) = T(x(n))$$

Para determinar a estabilidade de x^* , analisa-se o sistema linear associado. Para isto, considere uma órbita na vizinhança de x^*

$$x(n) = x^* + \eta(n), \text{ então}$$
(3.2)

$$x^* + \eta(n+1) = x\left(n+1\right) = T\left(x^* + \eta\left(n\right)\right) \cong T\left(x^*\right) + \frac{dT}{dx}\Big|_{x=x^*} \eta\left(n\right) + \mathcal{O}\left(\eta\left(n\right)\right)^2$$

Lembrando que $T(x^*) = x^*$ e desconsiderando os termos de ordem maior que 2, o sistema linearizado é dado por

$$\eta(n+1) = \frac{dT}{dx}\Big|_{x=x^*} \eta(n), \qquad (3.3)$$

Seja λ o autovalor do sistema linearizado, isto é,

$$\lambda = \frac{dT}{dx}\Big|_{x=x^*} = \frac{dT(x^*)}{dx} \tag{3.4}$$

Portanto, a solução do sistema (3.3) é: $\eta_1 = \lambda \eta_0$, $\eta_2 = \lambda \eta_1 = \lambda^2 \eta_0$, logo $\eta_n = \lambda^n \eta_0$. Se $|\lambda| = \frac{dT(x^*)}{dx} < 1$ então $\eta_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e o ponto fixo x^* é estável, caso contrário, se $\frac{dT(x^*)}{dx} > 1$, o ponto fixo x^* é instável.

No caso estável, se $0 < \lambda < 1$, a distância entre as sucessivas iterações $(x(n+1), x(n+2), x(n+3), \ldots)$ e x^* diminui monotonicamente, Figura (3.1) (a). Por outro lado, se $-1 < \lambda < 0$, essa distância diminui de maneira oscilatória, Figura (3.1) (b).

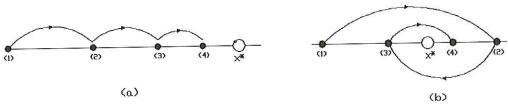


Figura 3.1: Estabilidade assintótica do sistema (3.3): (a) $0 \cdot \cdot \cdot 1$; (b) $-1 \cdot \cdot \cdot 0$

Obs.: Para o caso n-dimensional o procedimento consiste em analisar os autovalores da matriz jacobiana. (Strogatz, 1994)

Definição 3.4: Um movimento $T^n(x)$ é dito periódico (ou cíclico) se para algum k > 0, $T^k(x) = x$. O menor valor de k em que isto acontece é chamado de período do movimento ou a ordem do ciclo.

Matematicamente, os pontos que formam um movimento periódico (ou órbita periódica) obedecem a:

$$x(2) = T(x(1))$$

$$x(3) = T(x(2)) = T(T(x(1))) = T^{2}(x(1))$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x(k) = T(x(k-1)) = T(T(x(k-2))) = \dots = T^{k-1}(x(1))$$

$$x(k+1) = T(x(k)) = T(T(x(k-1))) = \dots = T^{k}(x(1)) = x(1)$$

Exemplo 3.5 : Considere o sistema unidimensional

$$x(n+1) = 4x(n)(1-x(n))$$

Pela definição de ponto fixo tem-se que:

$$x=4x(1-x)=4x-4x^2$$
 então
$$4x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(4x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\frac{3}{4}.$$

Logo, 0 e 3/4 são os únicos pontos fixos. A imagem inversa do ponto fixo 0 é $\{x \in \mathbb{R} : T(x) = 0\}$ então $0 = 4x(1-x) \Rightarrow x = 0$ e x = 1. Logo, a solução iniciando em x(0) = 1 implica x(1) = 0 e, portanto, $x(n) = 0 \,\forall\, n \geq 1$, ou seja, o ponto fixo é atingido em tempo finito. Este tipo de comportamento pode ser muito comum em equações de diferenças, mas não pode ocorrer em equações diferenciais ordinárias.

Para equações unidimensionais, que é o caso do exemplo (3.5), pode-se determinar as sucessivas iterações de uma equação de diferença e determinar seus pontos fixos graficamente, através do seguinte procedimento:

Traça-se a diagonal x(n+1) = x(n). Dado $x_0 = 0, 1$, a partir da intersecção de x_0 com T, traça-se uma linha horizontal até encontrar a diagonal. A abscissa e a ordenada desse ponto valem $x_1 = 4x_0 - 4x_0^2 = 0, 36$. A partir daí traça-se uma linha vertical até interceptar a função T. Esse ponto de intersecção possui x_1 como abscissa e $x_2 = 4x_1 - 4x_1^2 = 0, 92$ como ordenada. Repetindo esse processo, geram-se as n-primeiras iterações.

A figura (3.2) mostra como esse procedimento, chamado de teia de aranha (cobweb), é realizado. Pode ser observado que os únicos pontos fixos da função são 0 e 3/4, que são resultantes da intersecção entre a função T e a linha diagonal, pois esses pontos satisfazem, simultaneamente, as relações x(n+1) = T(x(n)) e x(n+1) = x(n).

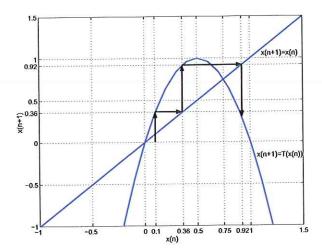


Figura 3.2: Diagrama teia de aranha

Exemplo 3.6 : Considere a versão discreta do modelo populacional de Verhulst, (Koçak e Hale, (1991)), dado por:

$$x(n+1) = T(x(n)) = \mu x(n)(1-x(n))$$

$$\mu \text{ \'e o parâmetro de controle}$$

$$(3.5)$$

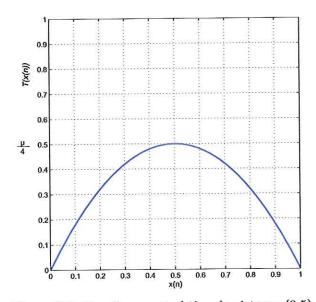


Figura 3.3: Função característica do sistema (3.5)

Se o parâmetro μ estiver no intervalo $0 \le \mu \le 4$ e $x_0 \in [0,1]$, então $x(n) \in [0,1]$ para $n=1,2,3\ldots$ assim qualquer ponto x(n) contido neste intervalo gera, após uma iteração, o ponto x(n+1) que pertence a esse mesmo intervalo. Portanto, o intervalo [0,1] é invariante.

O intervalo $0 < \mu \le 4$ é onde comportamentos interessantes ocorrem, pois para $\mu > 4$, em alguma iteração, obtem-se um valor negativo de x e a partir daí $x(n) \to -\infty$ quando $n \to \infty$.

Os pontos fixos do sistema (3.5) são:

$$x_1=0$$
 e $x_2=1-\left(rac{1}{\mu}
ight)$

Para analisar a estabilidade dos pontos fixos calcula-se,

$$\frac{dT}{dx} = \mu \left(-2x + 1 \right)$$

Assim, os autovalores associados a x_1 e x_2 são $\lambda_1 = \mu$ e $\lambda_2 = 2 - \mu$. Portanto, a origem (x_1) é assintoticamente estável para $0 \le \mu < 1$ e instável para $\mu > 1$, e o outro ponto fixo é instável para $1 > \mu$ ou $\mu > 3$ e assintoticamente estável para $1 < \mu < 3$.

Os pontos fixos x_1 e x_2 trocam de estabilidade em $\mu = 1$.

Para $\mu > 3$, surgem órbitas de período 2 formada por dois pontos, x_3 e x_4 tais que:

$$\begin{cases} x_3 = T(x_4) \\ x_4 = T(x_3) \end{cases} \implies \begin{cases} T(T(x_3)) = T^{(2)}(x_3) \\ T(T(x_4)) = T^{(2)}(x_4) \end{cases}$$

Os pontos x_3 e x_4 são pontos fixos de $T^{(2)}$, então são raízes do polinômio:

$$x^* = T^{(2)}(x^*) = \mu T(1 - T) = \mu^2 x^* (1 - x^*) [1 - \mu x^* (1 - x^*)]$$

As raízes deste polinômio são:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1 - \left(\frac{1}{\mu}\right) \quad e \quad x_{3,4} = \frac{(\mu + 1) \pm \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}}{2\mu}$$
 (3.6)

Observe que as raízes (reais) x_3 e x_4 existem para $\mu \geq 3$. Na Figura (3.4) mostram-se as raízes para $\mu = 3, 2$.

Em $\mu=3,\,\lambda_2=-1,\,$ então x_2 sofre uma bifurcação de duplicação de período.

O estudo da estabilidade da órbita de período 2 reduz-se ao estudo da estabilidade dos pontos fixos de $T^{(2)}$, essa órbita é assintoticamente estável se x_3 e x_4 são pontos fixos assintoticamente estáveis de $T^{(2)}$.

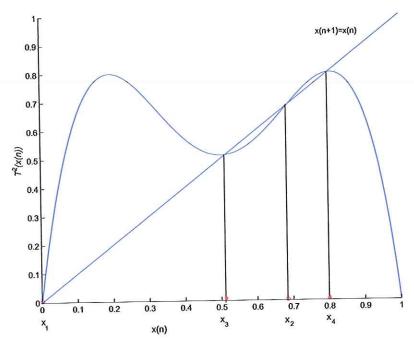


Figura 3.4: Função • 2 (•) e suas raízes para • = $3 \cdot 2$

Através da regra da cadeia, calcula-se:

$$\frac{dT^{(2)}(x(n))}{dx} = \mu (1 - 2T(x(n))) \Big|_{x_3} \mu (1 - 2x(n)) \Big|_{x_3}$$

$$\frac{dT^{(2)}(x(n))}{dx} = \mu (1 - 2x_4) \mu (1 - 2x_3)$$
(3.7)

Substituindo os pontos fixos x_3 e x_4 em (3.7), obtêm-se o seguinte autovalor associado a x_3 :

$$\lambda_3 = -\mu^2 + 2\mu + 4 \tag{3.8}$$

O autovalor λ_4 associado ao ponto fixo x_4 é obtido através desta mesma expressão. Portanto, a órbita de período 2 é assintoticamente estável quando $-1 < |-\mu^2 + 2\mu + 4| < 1$, ou seja, para $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$. Para $\mu = 1 + \sqrt{6}$, têm-se que $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$. E a órbita de período 2 sofre uma bifurcação de duplicação de período. Para $\mu > 1 + \sqrt{6}$ os pontos fixos de $T^{(2)}$ tornam-se instáveis e se bifurcam, gerando órbitas de período 4 assintoticamente estáveis, cujos pontos fixos são obtidos a partir de $x^* = T^{(4)}(x^*)$. Conforme aumenta o valor do parâmetro de controle μ , ocorrem sucessivas bifurcações, gerando órbitas de período 8, 16, 32, 64, etc.

3.3 Sistemas Dinâmicos Discretos

Definição 3.7 : Um sistema dinâmico discreto em \mathbb{R}^m é uma aplicação $\Pi: \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, que $\forall n, k \in \mathbb{Z}_+$ e $\forall x \in \mathbb{R}^m$ satisfaz:

$$i)\Pi(0,x)=x$$
 $ii)\Pi(n,\Pi(k,x))=\Pi(n+k,x)$
 $iii)\Pi$ é contínua

Observe que estamos considerando o caso mais geral de sistemas dinâmicos discretos, no qual a aplicação II não necessariamente possui inversa, ou seja, as trajetórias estão definidas de maneira única para tempo futuro. Alguns autores, (LaSalle, 1977), (Koçak e Hale, 1991), denominam esta classe mais geral, de sistemas semi dinâmicos discretos.

Toda equação de diferença x(n+1) = T(x(n)) define um sistema semi dinâmico e reciprocamente, todo sistema semi dinâmico discreto possui uma equação de diferença associada.

Ao analisar a estabilidade de um ponto de equilíbrio (x^*) , o interesse é estudar se as soluções iniciando próximas a este ponto, aproximam-se de (x^*) , para isto é usual definir distância pela norma, $||x|| = (x_1^2 + \ldots + x_m^2)^{1/2}$. No caso de comportamentos mais complexos, onde o atrator é um conjunto, por exemplo ciclos limites e atratores estranhos, torna-se necessário definir a distância de um ponto ao conjunto.

Definição 3.8 : Seja $x \in \mathbb{R}^m$ e S um conjunto qualquer não vazio em R^m , a distância de x a S é $\rho(x,S) = \inf_{y \in S} \{ \|y - x\| \}$.

Utilizando a definição de distância (3.8) pode-se definir o fecho de um conjunto.

Definição 3.9 : O fecho de S é $\bar{S} = \{x; \rho(x, S) = 0\}.$

Quando se diz que $T^n(x) \to S$ quando $n \to \infty$ significa que $\rho(T^n(x), S) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Nos estudos de estabilidade, geralmente, tem-se interesse em estudar o comportamento das soluções de (3.1) quando o tempo cresce, neste sentido os conceitos de ponto limite e conjunto limite são importantes.

Definição 3.10: Um ponto y é um ponto limite de $T^n(x)$ se existe uma sequência de inteiros n_i tal que $T^{n_i}(x) \to y$ e $n_i \to \infty$ quando $i \to \infty$. O conjunto $\Omega(x)$ limite do movimento $T^n(x)$ de x é o conjunto de todos os pontos limites de $T^n(x)$.

Teorema 3.11 : Uma definição alternativa para $\Omega(x)$ é $\Omega(x) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(x)}$.

Demonstração: Seja $y \in \Omega(x)$, então existe uma sequência de inteiros n_i tal que $T^{n_i}(x) \to y \in n_i \to \infty$ quando $i \to \infty$. Para cada $j \in \mathbb{Z}_+$, existe k tal que $T^{n_i}(x) \in \bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(x), \ \forall \ i \geq k$. Como $T^{n_i}(x) \to y \in n_i \to \infty$ quando $i \to \infty$ então $T^{n_{k+j}}(x) \to y, n_{k+j} \to \infty$ quando $j \to \infty$. Portanto, $y \in \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(x)}$. Como j é arbitrário então $y \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(x)}$.

Reciprocamente, seja $y \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(x)}$. Para cada $j \in \mathbb{Z}_+$, $y \in B_j = \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(x)}$. Suponha que y é um ponto de acumulação de B_j , logo existe $l_j \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\rho\left(T^{l_j}(x),y\right) < 1/j$. Sem perda de generalidade, podese escolher a sequência l_j estritamente crescente em \mathbb{R}_+ , tal que $T^{l_j}(x) \to y$ e $l_j \to \infty$ quando $j \to \infty$. Portanto $y \in \Omega(x)$. Suponha que y é um ponto isolado de B_j , então existe i > j tal que $T^{l_i}(x) = y$. Escolha $T^{l_j}(x)$ crescente tal que $T^{l_j}(x) = y \ \forall j$. Portanto $y \in \Omega(x)$.

Definição 3.12: Um conjunto H é dito positivamente invariante em relação a (3.1), ou a T, se $T(H) \subset H$. H é dito invariante se T(H) = H.

Para sistemas dinâmicos contínuos, todo conjunto Ω limite invariante e limitado é conexo, o que não ocorre no caso de sistemas dinâmicos discretos. Entretanto, pode-se definir um conceito diferente de conexidade via invariância.

Definição 3.13: Um conjunto fechado invariante H, é dito conexamente invariante se ele não é a união de 2 conjuntos invariantes fechados disjuntos e não vazios.

Definição 3.14 : $T_n(x)$ (definido para todo $n \in \mathbb{Z}$) é chamado de extensão do movimento $T^n(x)$ se $T_0(x) = x$ e $T(T_n(x)) = T_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 3.15 : Tem-se que $T_n(x) = T^n(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ e, se $x \in H$ invariante, o movimento $T^n(x)$ sempre tem uma extensão, que pode ou não ser única.

Teorema 3.16 Um conjunto H é invariante, se e somente se, todo movimento iniciando em H tem uma extensão em H para todo n.

Demonstração: Se H é invariante, então T(H) = H. Seja $x_0 \in H$ e $T^n(x_0)$ o correspondente movimento. Como T(H) = H, existe $x_{-1} \in H$ tal que $T(x_{-1}) = x_0$. Por indução, dado $x_{-n} \in H$, existe $x_{-n-1} \in H$ tal que $T(x_{-n-1}) = x_n$ e portanto tem-se que $\{..., x_{-n-1}, x_{-n}, ..., x_{-1}, x_0, x_1, ..., x_n\}$ é uma extensão em H para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Reciprocamente, se todo movimento iniciando em H possui uma extensão em H para todo n. Então, para cada $x \in H$, existe $y \in H$ tal que T(y) = x e além disso $T(x) \in H$. Logo T(H) = H.

Teorema 3.17 O fecho de um conjunto H positivamente invariante é positivamente invariante.

Demonstração: H é positivamente invariante, ou seja, $T(H) \subset H$. Seja $p \in \overline{H}$, então existe $p_i \to p$ quando $i \to \infty$ com $p_i \in H \ \forall i$. Como $p_i \in H \ e$ H é positivamente invariante $T(p_i) \in H$. Da continuidade do operador T temos que $T(p_i) \to T(p)$. Logo, $T(p) \in \overline{H}$ e, como p foi escolhido arbitrariamente $T(\overline{H}) \subset \overline{H}$.

Teorema 3.18 O fecho de um conjunto H limitado invariante é invariante.

Demonstração: Pelo Teorema (3.17) tem-se que $T(\overline{H}) \subset \overline{H}$. Falta provar que $\overline{H} \subset T(\overline{H})$. Seja $p \in \overline{H}$. Existe $p_i \to p$ quando $i \to \infty$ com $p_i \in H \ \forall i$. H é invariante, logo existe $q_i \in H$ tal que $Tq_i = p_i$, mas $p_i \to p$, então $Tq_i \to p$. Como $q_i \subset \overline{H}$ é compacto, então existe subsequência convergente $q_{i_n} \to q$



com $q \in \overline{H}$. Como o operador T é contínuo, tem-se $Tq_{i_n} \to T(q)$, mas $Tq_{i_n} \to p$. Logo, existe $q \in \overline{H}$ tal que T(q) = p. Portanto, $\overline{H} \subset T(\overline{H})$ e $T(\overline{H}) = \overline{H}$.

No decorrer do estudo de invariância, LaSalle (1976) sugere que em geral, o fecho de um conjunto invariante não é invariante.

Não conseguimos encontrar um contra-exemplo.

3.4 Propriedades Básicas de Conjuntos Limites

Teorema 3.19 : Todo conjunto limite $\Omega(x)$ é fechado e positivamente invariante.

Demonstração: Pelo Teorema (3.11) tem-se que $\Omega(x) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty}} T^n(x)$. Como a intersecção infinita de conjuntos fechados é um conjunto fechado (Lima, 1977, página 76), então segue que $\Omega(x)$ é fechado.

Suponhamos que $y \in \Omega(x)$. Então existe uma sequência de inteiros n_i tal que $n_i \to \infty$ e $T^{n_i}(x) \to y$ quando $i \to \infty$. Pela continuidade da T, $T(T^{n_i}(x)) = T^{n_i+1}(x) \to T(y)$ logo $T(y) \in \Omega(x)$. Portanto $T(\Omega(x)) \subset \Omega(x)$.

Teorema 3.20 Se $T^n(x)$ é limitada para $n \in \mathbb{Z}_+$, então $\Omega(x)$ é não vazio, compacto, invariante, conexamente invariante, e é o menor conjunto fechado do qual $T^n(x)$ se aproxima quando $n \to \infty$.

Demonstração: Da limitação de $T^n(x)$ tem-se que $\Omega(x)$ é não vazio e limitado. Pelo Teorema (3.19) tem-se que $\Omega(x)$ é fechado, logo $\Omega(x)$ é compacto.

Seja $y \in \Omega(x)$. Então existe uma sequência de inteiros n_i tal que $n_i \to \infty$ e $T^{n_i}(x) \to y$ quando $i \to \infty$. Pela limitação de $T^n(x)$ podemos assumir que $T^{n_i-1}(x)$ é convergente. Caso não seja, basta escolher uma subsequência $T^{n_{ij}-1}(x)$ convergente. Suponha $T^{n_{ij}-1}(x) \to z$, então $z \in \Omega(x)$. Resta mostrar que T(z) = y, como a aplicação T é contínua e $T(T^{n_{ij}-1}(x)) = T^{n_{ij}}(x)$, então T(z) = y. Portanto $\Omega(x) \subset T(\Omega(x))$ e pelo Teorema (3.19) tem-se que $T(\Omega(x)) \subset \Omega(x)$, logo $\Omega(x)$ é invariante.

Mostremos que $T^n(x) \to \Omega(x)$ quando $n \to \infty$. Suponha, por contradição, que isto não é verdade. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer N > 0,

existe n > N tal que $\rho(T^n(x), \Omega(x)) > \varepsilon$. Considere uma sequência $N_i \in \mathbb{Z}$, com $N_i \to \infty$ quando $i \to \infty$. Então existe sequência n_i , com $n_i \to \infty$ quando $i \to \infty$, $n_i > N_i$, tal que $\rho(T^{n_i}(x), \Omega(x)) > \varepsilon$, $\forall i$.

Como $T^{n_i}(x)$ é uma sequência limitada, possui subsequência convergente $T^{n_{ij}}(x) \to y$. Por definição, $y \in \Omega(x)$, logo, $\rho(T^{n_{ij}}(x), \Omega(x)) = 0$ quando $i_j \to \infty$, o que nos leva a uma contradição.

Seja E um conjunto fechado tal que $T^n(x) \to E$ quando $n \to \infty$. Suponha, por contradição que $\Omega(x)$ não está contido em E. Seja $y \in \Omega(x), y \notin E$, então $y \in E^c$. Como E^c é um conjunto aberto. Existe uma bola aberta de raio $\varepsilon > 0$ e centro y $B_{\varepsilon}(y) \subset E^c$. Portanto $\rho(y, E) \geq \varepsilon > 0$. Como $y \in \Omega(x)$, existe uma sequência n_i tal que $n_i \to \infty$ e $T^{n_i}(x) \to y$ quando $i \to \infty$. Além disso, existe N > 0, tal que $n_i > N$ implica $\rho(T^{n_i}(x), y) < \varepsilon/2$. Da desigualdade triangular, $\rho(y, E) \leq \rho(T^{n_i}(x), y) + \rho(T^{n_i}(x), E)$, o que implica em $\rho(y, E) - \rho(T^{n_i}(x), y) < \rho(T^{n_i}(x), E)$. Portanto $\rho(T^{n_i}(x), E) > \varepsilon/2$ para $n_i > N$, o que é uma contradição, portanto $\Omega(x) \subset E$. Logo $\Omega(x)$ é o menor conjunto fechado do qual $T^n(x)$ se aproxima quando $n \to \infty$.

Mostremos que $\Omega(x)$ é conexamente invariante. Suponha, por contradição, que $\Omega(x)$ é a união de 2 conjuntos invariantes, disjuntos, fechados e não vazios, Ω_1 e Ω_2 . Como $\Omega(x)$ é compacto, Ω_1 e Ω_2 também são compactos. Existem então, 2 conjuntos abertos e disjuntos U_1 e U_2 tais que $\Omega_1 \subset U_1$ e $\Omega_2 \subset U_2$. T é contínua, então é uniformemente contínua em \bar{U}_1 , logo existe um conjunto aberto V_1 tal que $\Omega_1 \subset V_1$ e $T(V_1) \subset U_1$. Como $T^n(x) \to \Omega(x) = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset V_1 \cup U_2$, então existe n_0 tal que $T^n(x) \in V_1 \cup U_2$, $\forall n \geq n_0$. Repartindo a sequência $(T^n(x_0))_{n\geq n_0}$ em duas: $(x_{n_i}) \subset V_1$ e $(x_{m_i}) \subset U_2$, temos $\{n_0, n_0 + 1, \ldots\} = \{n_1, n_2, \ldots\} \cup \{m_1, m_2, \ldots\}$. Tomando o menor dos índices n_1, m_1 , digamos, sem perda de generalidade, que seja n_1 , então $n_1 = n_0$. Então, $x(n_1) \in V_1$. Por construção $T^{n_1+1}(x) \in U_1$, com $n_1 + 1 > n_1 \geq n_0$ tem-se que $T^{n_1+1}(x) \in V_1$. Por indução $\forall n \geq n_1$, tem-se $T^n(x_0) \in V_1$. Portanto $\Omega_2 = \emptyset$, o que é uma contradição. Portanto, $\Omega(x)$ é conexamente invariante.

Capítulo 4

Uma extensão do Método Direto de Lyapunov para Sistemas Dinâmicos Discretos

4.1 Introdução

A teoria de estabilidade é um assunto importante em diversas áreas. Assunto este, bem explorado e com ampla literatura para estudos de sistemas dinâmicos contínuos.

Os sistemas discretos também têm a sua importância, e têm sido aplicados em diversas áreas, por exemplo, para modelar o processo de dinâmica de população, macroeconomia, dinâmica caótica de sistemas econômicos, para modelagem de redes neurais, na investigação da dinâmica de processos discretos de Markov, para projetar controladores digitais. Enfim, existe uma vasta área de aplicação para sistemas discretos.

Sistemas discretos podem exibir uma diversidade de comportamentos dinâmicos, como oscilações periódicas e caos, mesmo quando são constituídos por apenas uma única equação de diferença autônoma de primeira ordem não linear.

O Princípio de Invariância de LaSalle proposto em 1960, é uma ferramenta básica para o estudo de estabilidade assintótica para sistemas dinâmicos contínuos.

No âmbito de sistemas dinâmicos discretos seu uso é mais recente. Além do Princípio de Invariância proposto pelo próprio LaSalle (1976), podemos destacar o estudo feito por Bensoubaya e Iggidr (1998) o qual propõe que a Função de Lyapunov seja semi-definida positiva, e com essa nova condição reescreve o Teorema de Lyapunov e o Princípio de Invariância de LaSalle para sistema discretos. T.Nesemann (2001) propôs uma Generalização do Princípio de Invariância de LaSalle para sistemas discretos, que na verdade não chega a ser um Princípio de Invariância, embora seja útil para delimitar a localização do conjunto limite; tem-se também uma versão do Princípio de Invariância discreto especializado para sistemas de controle discreto proposta por V. Sundarapandian (2003).

Neste capítulo, apresenta-se a caracterização de estabilidade no sentido de Lyapunov e o Princípio de Invariância de LaSalle para sistemas dinâmicos discretos. Propõe-se uma versão mais geral do Princípio de Invariância e uma versão da Extensão do Princípio de Invariância, ambos para sistemas dinâmicos discretos.

4.2 Método Direto de Lyapunov

Nesta seção introduz-se o conceito de função de Lyapunov para equação de diferença e apresenta-se o Teorema de Lyapunov.

Considere a equação de diferença

$$x(n+1) = T(x(n)) e x(0) = x_0$$
 (4.1)

onde $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é contínua.

Seja $V: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Com relação a (4.1), ou a T, defina:

$$\Delta V(x) = V(T(x)) - V(x) \tag{4.2}$$

Se x(n) é uma solução de (4.1), então

$$\Delta V(x(n)) = V(x(n+1)) - V(x(n))$$

e $\Delta V(x) \leq 0$, significa que V não é crescente, em n, ao longo das soluções.

Definição 4.1 : Seja G um conjunto qualquer em \mathbb{R}^m . Dizemos que V é uma função de Lyapunov de (4.1) em G se satisfaz:

- i) V é contínua em \mathbb{R}^m .
- ii) $\Delta V(x) \leq 0$ para todo $x \in G$.

Observação $4.2: N\~ao$ exige-se que V>0 para que seja uma função de Lyapunov.

Embora na definição (4.1) não se exija que V seja definida positiva. O Teorema seguinte (4.3), faz-se essa exigência. Na realidade não é necessário que V > 0, desde que se tenha garantia que V forneça curvas de níveis em forma de bacia em torno de x^* . Nos resultados propostos neste trabalho garante-se isso exigindo que o conjunto Ω_L seja limitado.

Teorema 4.3 Seja V uma função de Lyapunov para T em alguma vizinhança de x^* tal que

$$V(x^*) = 0$$
 e existe $\delta > 0$ tal que

$$V(x) > V(x^*)$$
 para qualquer $x \in B_{\delta}(x^*), x \neq x^*$

então, x* é um equilíbrio estável. Além disso, se

$$\Delta V(x) < 0$$
 para qualquer $x \in B_{\delta}(x^*), x \neq x^*$

a solução de equilíbrio x* é assintoticamente estável.

Este teorema é conhecido como Método Direto de Lyapunov, pois permite caracterizar a estabilidade dos pontos de equilíbrio sem o conhecimento das soluções do sistema. A demonstração do Teorema (4.3) pode ser encontrada em LaSalle (1986).

Definição 4.4 : Para V uma função de Lyapunov de (4.1) em G, define-se $E = \{x \in \overline{G}; \Delta V(x) = 0\}.$

Observação 4.5 : E é fechado. De fato, como as funções V : $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e T : $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, são contínuas e estão bem definidas em \mathbb{R}^m , então ΔV é contínua e está bem definida para todo \mathbb{R}^m . Como $\{0\} \subset \mathbb{R}$ é fechado e ΔV é contínua, então a imagem inversa de ΔV , ou seja $\Delta V^{-1}(\{0\})$, é fechado. Logo $E = \overline{G} \cap \Delta V^{-1}(\{0\})$ é fechado.

Definição 4.6 : Seja uma curva de nível da função V o conjunto $V^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^m; V(x) = c\}.$

4.3 Princípio de Invariância

O Teorema que será apresentado a seguir, juntamente com a demonstração, foi retirado de LaSalle (1976).

Teorema 4.7 (Princípio de Invariância de LaSalle): Seja V uma função de Lyapunov de (4.1) em G e x(n) uma solução de (4.1) limitada em G para todo $n \geq 0$. Seja M o maior conjunto invariante contido em E. Então existe um número c tal que $x(n) \to M \cap V^{-1}(c)$ quando $n \to \infty$.

Demonstração: Seja $x_0 = x(0)$ e $x(n) = T^n(x_0)$ a solução com condição inicial x_0 . As hipóteses do teorema implicam que V(x(n)) é não crescente quando $n \to \infty$. Por hipótese, V é contínua e x(n) é limitada, então V(x(n)) é limitada, em particular, V(x(n)) é limitada inferiormente, logo $V(x(n)) \to c$ quando $n \to \infty$. Pelo Teorema (3.20) tem-se que $\Omega(x)$ é não vazio. Seja $y \in \Omega(x_0)$ um ponto arbitrário. Então existe uma sequência n_i tal que $n_i \to \infty$ e $x(n_i) \to y$. Então $V(x(n_i)) \to c$. Mas $x(n_i) \to y$ então, como V é uma função contínua, $V(x(n_i)) \to V(y) = c$, isto é $y \in V^{-1}(c)$, logo $\Omega(x_0) \subset V^{-1}(c)$. Como $\Omega(x_0)$ é invariante, $T(y) \in \Omega(x_0)$ o que implica V(T(y)) = c, portanto $\Delta V(y) = V(T(y)) - V(y) = 0$, logo $\Omega(x_0) \subset E \cap V^{-1}(c)$. Como $\Omega(x_0)$ é invariante e está contido em E, conclui-se que $\Omega(x_0) \subset M \cap V^{-1}(c)$, portanto $x(n) \to M \cap V^{-1}(c)$.

Neste trabalho propõe-se uma alternativa para o Teorema acima apresentado. A qual consiste em escolher o conjunto G positivamente invariante e limitado ao invés de impor limitação à solução em G.

Lema 4.8 : Sejam $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e $V: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ contínuas. Seja $L \in \mathbb{R}$ tal que $\Omega_L := \{x \in \mathbb{R}^m : V(x) < L\}$. Suponha que $\Delta V(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega_L$. Então Ω_L é positivamente invariante.

Demonstração: Por definição, basta mostrar que $T(\Omega_L) \subset \Omega_L$. Seja $x_0 \in \Omega_L$, então $\Delta V(x) = V(T(x)) - V(x) \le 0$, logo $V(T(x)) \le V(x) < L$. Portanto, $T(x) \in \Omega_L$.

Corolário 4.9 : Sejam $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e $V: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ contínuas. Seja $L \in \mathbb{R}$ tal que $\Omega_L := \{x \in \mathbb{R}^m : V(x) < L\}$ é limitado. Suponha que $\Delta V(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega_L$. Defina $E := \{x \in \Omega_L : \Delta V(x) = 0\}$. Seja M o maior conjunto invariante contido em E. Então toda solução iniciando em Ω_L converge para M quando $n \to \infty$.

Demonstração: Seja $x_0 \in \Omega_L$, $x_0 = x(0)$ e $x_n = T^n(x)$. Pelo lema (4.8), tem-se que $x(n) \in \Omega_L$. Como Ω_L é limitado, tem-se que x(n) é limitada. Por hipótese, V é uma função de Lyapunov em Ω_L . Logo do Teorema (4.7) tem-se que toda solução x(n) iniciando em Ω_L converge para M quando $n \to \infty$.

Exemplo 4.10 : Considere o sistema unidimensional não-linear descrito pela seguinte equação de diferença:

$$x(n+1) = x(n)(x(n) + 1/4)$$
(4.3)

Neste caso, como o sistema é unidimensional, pode-se determinar os pontos fixos através da análise da Figura (4.1).

Os únicos pontos fixos do sistema (4.3) são 0 e 3/4.

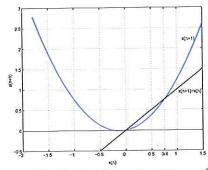


Figura 4.1: Pontos fixos do sistema (4.3)

Seja

$$V(x(n)) = x^2(n) \tag{4.4}$$

uma candidata a função de Lyapunov associada ao sistema (4.3). Desejamos provar estabilidade assintótica da origem utilizando esta função. Calculando a variação de (4.4) ao longo das soluções do sistema tem-se que:

$$\Delta V(x(n)) = x^4(n) + \frac{1}{2}x^3(n) - \frac{15}{16}x^2(n)$$
(4.5)

Observe na Figura (4.2) (b) que na região $-5/4 \le x \le 3/4$ temos $\Delta V \le 0$, portanto (4.4) é decrescente ao longo das soluções dentro deste intervalo, exceto na origem, a qual é um ponto de equilíbrio do sistema.

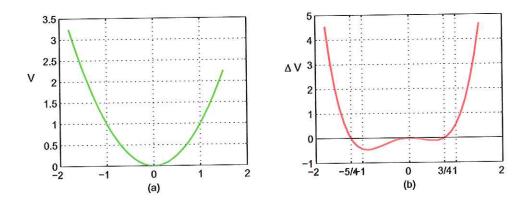


Figura 4.2: (a)Função de Lyapunov do sistema (4.3) (b) Função (4.5)

Seja L um nível da função V, tal que ΔV em $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R} : V(x) < L\}$ seja sempre menor e igual a zero. Seja $L = \frac{9}{16}$, então $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R} : -0.75 < x < 0.75\}$ é o conjunto dos pontos com cota menor que L, conforme mostra a Figura (4.3). Pelo Teorema (4.9) conclui-se que todas as soluções iniciando em Ω_L convergem para o maior conjunto invariante contido em E, quando $n \to \infty$. Neste caso, tem-se que $E = \{x \in \Omega_L : \Delta V(x) = 0\} = \{0\}$, portanto o maior conjunto invariante contido em E é o próprio ponto fixo x = 0, além disso, pelo teorema de Lyapunov conclui-se que a origem é assintoticamente estável.

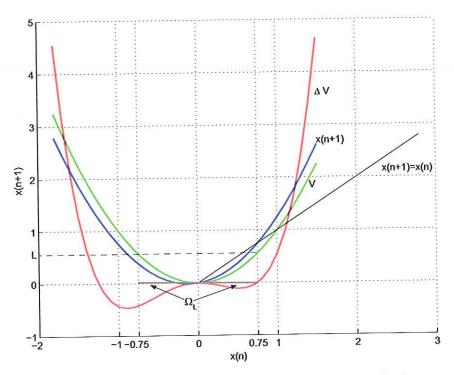


Figura 4.3: Estimativa da área de atração do sistema (4.3)

Outro resultado proposto neste trabalho é o teorema abaixo.

Teorema 4.11 (Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle) : Sejam $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e $V: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Seja $L \in \mathbb{R}$ uma constante tal que $\Omega_L := \{x \in \mathbb{R}^m : V(x) < L\}$ seja limitado. Seja $C:= \{x \in \Omega_L : \Delta V(x) > 0\}$, e admita que $\sup_{x \in C} V(x) \leq l$ e $\sup_{x \in C} \Delta V(x) \leq s$. Suponha que l+s < L. Defina $\widetilde{\Omega}_{l+s} = \{x \in \Omega_L : V(x) \leq l+s\}$ e $E:= \{x \in \overline{\Omega}_L : \Delta V(x) = 0\} \cup \widetilde{\Omega}_{l+s}$. Seja M o maior conjunto invariante de (4.1) contido em E.

Então:

- i) Toda solução de (4.1) iniciando em Ω_L converge para o conjunto invariante M quando $n \to \infty$.
- ii) As soluções que entram em $\widetilde{\Omega}_{l+s}$ convergem para o maior conjunto invariante contido em $\widetilde{\Omega}_{l+s}$.

Demonstração:

ii) Primeiramente, mostremos que $\widetilde{\Omega}_{l+s}$ é positivamente invariante.

Seja $x \in (\widetilde{\Omega}_{l+s} - C)$ um ponto arbitrário, então $V(x) \leq l+s$ e $\Delta V(x) \leq 0$, logo $V(T(x)) = V(x) + \Delta V(x) \leq l+s$, assim $T(x) \in \widetilde{\Omega}_{l+s}$. Como x é arbitrário em $(\widetilde{\Omega}_{l+s} - C)$ tem-se que $T(\widetilde{\Omega}_{l+s} - C) \subset \widetilde{\Omega}_{l+s}$.

Seja $x \in C$ um ponto arbitrário, então $V(x) \leq l$ e $\Delta V(x) \leq s$, logo $V(T(x)) = V(x) + \Delta V(x) \leq l + s$, assim $T(x) \in \widetilde{\Omega}_{l+s}$. Como x é arbitrário em C, segue que $T(C) \subset \widetilde{\Omega}_{l+s}$. Portanto $T(\widetilde{\Omega}_{l+s}) = T((\widetilde{\Omega}_{l+s} - C) \cup C) \subset \widetilde{\Omega}_{l+s}$.

Seja $x_0\in\widetilde{\Omega}_{l+s}, x_0=x(0)$ e $x_n=T^n(x_0)$ a solução de (4.1) com condição inicial x_0 .

Tem-se que $\widetilde{\Omega}_{l+s}$ é positivamente invariante. Então $T^n(x_0)$ permanece em $\widetilde{\Omega}_{l+s}$, e é limitada, logo $\Omega(x_0)$ é não vazio.

Como $\Omega(x_0)$ é invariante e $\Omega(x_0) \subset \widetilde{\Omega}_{l+s}$, então as soluções iniciando em $\widetilde{\Omega}_{l+s}$ convergem para o maior conjunto invariante contido em $\widetilde{\Omega}_{l+s}$, quando $n \to \infty$.

i) Mostremos que Ω_L é positivamente invariante.

Seja $x \in (\Omega_L - C)$ um ponto arbitrário, então, $V(x) \le L$ e $\Delta V(x) \le 0$, logo $V(T(x)) = V(x) + \Delta V(x) \le V(x) < L$.

Portanto, $T(x) \in \Omega_L$, como x é um ponto arbitrário em $(\Omega_L - C)$, temos que $T(\Omega_L - C) \subset \Omega_L$.

Seja $x \in C$ um ponto arbitrário, então, $V(T(x)) = V(x) + \Delta V(x) \le l + s < L$, assim $T(x) \in \Omega_L$. Portanto, $T(C) \subset \Omega_L$.

Conclui-se que $T(\Omega_L) = T((\Omega_L - C) \cup C) \subset \Omega_L$, ou seja, as soluções iniciando em Ω_L não saem de Ω_L e, portanto, são limitadas.

Seja $x_0 \in \Omega_L$, $x_0 = x(0)$ e $x_n = T^n(x_0)$ a solução de (4.1) com condição inicial x_0 .

Da análise anterior a solução x_n é limitada.

Suponhamos ainda, que $x_n \notin C \,\forall n \in \mathbb{Z}_+$. Então $\Delta V(x_n) \leq 0 \,\forall n \in \mathbb{Z}_+$, logo a sequência de números reais $V(x_n)$ é não crescente (monótona). Observe que V é uma função contínua e Ω_L é limitado, então a sequência $V(x_n)$ é limitada inferiormente, logo $V(x_n) \to p$ quando $n \to \infty$.

Como a solução x_n é limitada, $\Omega(x_0)$ é não vazio.

Seja $y \in \Omega(x_0)$, então \exists subsequência x_{n_j} tal que $x_{n_j} \to y, n_j \to \infty$ quando $j \to \infty$. Como, em particular, $V(x_{n_j}) \to p$, então da continuidade da V, V(y) = p. Como $\Omega(x_0)$ é um conjunto invariante, $T(y) \in \Omega(x)$.

Portanto V(T(y)) = p. Então $\Delta V(y) = 0, \forall y \in \Omega(x_0)$.

Assim $\Omega(x_0) \subset \{x \in \bar{\Omega}_L : \Delta V(x) = 0\} \subset E$. Como $\Omega(x_0)$ é invariante, temos $\Omega(x_0) \subset M$. Portanto $x_n \to M$ quando $n \to \infty$.

Suponhamos agora que $x_k = T^k(x_0) \in C \subset \widetilde{\Omega}_{l+s},$ para algum $k \geq 0$.

Como $x_k \in C$ para algum k > 0, então como foi visto na página anterior, $x_n \in \widetilde{\Omega}_{l+s}$ para todo $n \geq k$. Segue da demonstração do item ii) que $\Omega(x_0) \subset \widetilde{\Omega}_{l+s}$. Portanto $\Omega(x_0) \subset M$, então $x_n \to M$ quando $n \to \infty$.

Exemplo 4.12 : Considere o sistema unidimensional não-linear descrito pela seguinte equação de diferença:

$$x(n+1) = \frac{x^3(n)}{3} - 2x(n) \tag{4.6}$$

O sistema possui 3 pontos fixos, são eles: -3, 0 e 3 conforme a Figura (4.4).

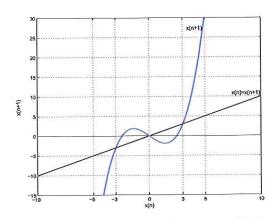


Figura 4.4: Pontos fixos do sistema (4.6)

Seja

$$V(x(n)) = 2x^{2}(n) (4.7)$$

uma função de Lyapunov para este sistema, Figura 4.5 (a). A variação de V é dada por:

$$\Delta V(x(n)) = 2x^{2}(n) \left(\frac{x^{4}(n)}{9} - \frac{4}{3}x^{2}(n) + 3 \right)$$
(4.8)

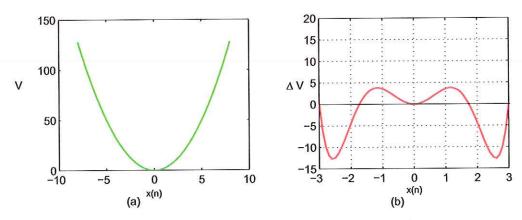


Figura 4.5: Função de Lyapunov do sistema (4.6)

Observe por intermédio da Figura 4.5 (b) que $\Delta V(x(n))$ não é mais sempre decrescente. Nos intervalos $(-\sqrt{3},0)$ e $(0,\sqrt{3})$ tem-se que $\Delta V>0$. Portanto, esta não é uma função de Lyapunov no sentido usual e o Princípio de Invariância de LaSalle não pode ser utilizado para estudar a estabilidade deste sistema com esta função auxiliar V(x).

Embora esta função não seja uma função de Lyapunov para este sistema, pode-se utilizar a extensão do Princípio de Invariância, proposta neste trabalho, para extrair alguma informação a respeito da estabilidade do sistema (4.6).

Seja
$$\Omega_L := \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 3\}$$
 limitado.

O conjunto C, onde ΔV é maior que zero, é dado por:

$$C := \left\{ x \in \Omega_L \colon 2x^2 \left(\frac{x^4}{9} - \frac{4}{3}x^2 + 3 \right) > 0 \right\} = \left\{ x \in \Omega_L \colon -\sqrt{3} < x < 0 \ \text{ e } 0 < x < \sqrt{3} \right\}$$

Calculando-se o sup de V e o sup de ΔV em C, obtém-se:

$$l = \sup_{x \in C} V(x) = V(\pm \sqrt{3}) = 6 \text{ e } s = 3.78 \ge \sup_{x \in C} \Delta V(x)$$

 $l + s = 9.78 < L = 18$

Seja o conjunto $\widetilde{\Omega}_{l+s} = \{x \in \Omega_L : -2.21 \leq 2.21\}$. O conjunto de pontos onde $\Delta V(x) = 0$ é $\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$, então $E = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\} \cup \widetilde{\Omega}_{l+s}$. Pelo Teorema (4.11), conclui-se que toda solução de (4.6) converge para o maior conjunto invariante contido em E, quando $n \to \infty$, logo obtém-se uma estimativa do atrator que é o

intervalo [-2.21, 2.21]. Observe que, neste caso, o maior conjunto invariante não é formado somente pela origem, pois a trajetória 2-periódica $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ também é um conjunto invariante contido em E, e não temos garantia de que não existam outros conjuntos invariantes.

Exemplo 4.13 : Considere a versão discreta do modelo populacional de Verhulst, dado por:

$$x(n+1) = T(x(n)) = \mu x(n)(1-x(n))$$

$$\mu \text{ \'e o parâmetro de controle}$$

$$(4.9)$$

No exemplo (3.6) fez-se a análise da estabilidade do sistema (3.5) através do estudo da estabilidade dos pontos fixos do sistema utilizando o Teorema de Hartman-Grobman, conforme variou-se o parâmetro de controle. Agora, faz-se a análise da estabilidade do sistema através do Teorema (4.11) proposto neste trabalho, escolhendo $\mu = 3, 6$.

Seja

$$V(x(n)) = (x(n) - 0.5)^{2}$$
(4.10)

uma candidata a função de Lyapunov, Figura 4.6 (a).

A variação de V é dada por:

$$\Delta V(x(n)) = (\mu x(n) - \mu x^{2}(n) - 0.5)^{2} - (x(n) - 0.5)^{2}$$
(4.11)

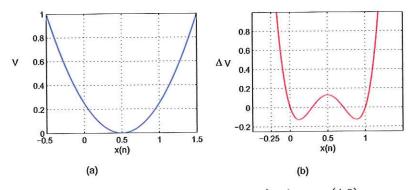


Figura 4.6: Função de Lyapunov do sistema (4.9)

Observe através da Figura 4.6 (b) que ΔV possui regiões nas quais $\Delta V\left(x\left(n\right)\right)>0$, portanto V não é uma Função de Lyapunov no sentido usual.

Seja L=0,25 um nível da função V(x), então $\Omega_L:=\{x\in\mathbb{R}:0< x<1\}$ é limitado.

O conjunto no qual a variação de V é maior que zero, é dado por:

$$C := \{ x \in \Omega_L : 0,2778 < x < 0,7222 \}$$

Calculando-se o sup de V e o sup de ΔV em C, obtêm-se:

$$l = \sup_{x \in C} V(x(n)) = V(0, 2778) = 0,05$$
 e $s = \sup_{x \in C} \Delta V(x(n)) = \frac{4}{25}$
 $l + s < L = 0,25$

Seja o conjunto $\widetilde{\Omega}_{l+s} := \{x \in \Omega_L : 0, 04 \le x \le 0, 96\}$. Pelo Teorema (4.11), conclui-se que toda solução iniciando em Ω_L converge para o maior conjunto invariante contido em $E := \{x \in \overline{\Omega}_L : \Delta V(x(n)) > 0\} \cup \widetilde{\Omega}_{l+s}$ quando $n \to \infty$, portanto uma estimativa do atrator é o intervalo [0,04;0,96]. Através das simulações e dos cálculos, observou-se que uma órbita de período 2, possui um dos pontos no conjunto C e o outro ponto não.

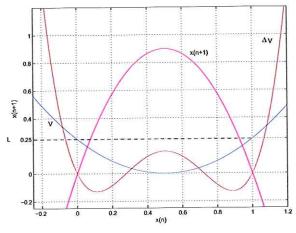


Figura 4.7: Estimativa da área de atração do sistema (4.9)

Exemplo 4.14 : Considere o seguinte sistema discreto:

$$\begin{cases} x(n+1) = a\left(1 - \frac{1}{x^2(n) + y^2(n) + b}\right)y(n) \\ y(n+1) = -a\left(1 - \frac{1}{x^2(n) + y^2(n) + b}\right)x(n) \end{cases}$$

no qual
$$a = \frac{1}{2}$$
 e $b = \frac{1}{10}$

Seja

$$V(x(n), y(n)) = x^{2}(n) + y^{2}(n)$$
(4.12)

uma candidata a função de Lyapunov associada ao sistema. A variação de V é dada por:

$$\Delta V(x(n), y(n)) = \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2(n) + y^2(n) + 0, 1}\right) y(n)\right]^2 + \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2(n) + y^2(n) + 0, 1}\right) x(n)\right]^2 - x^2(n) - y^2(n)$$

A região onde a variação de V é positiva, é definida pelo conjunto $C = \{(x,y) \in \Omega_L : \Delta V(x,y) > 0\}$. Para calcular o \sup de V no conjunto C, resolve-se o seguinte problema de maximização:

$$max \quad V(x,y)$$

s.a. $\Delta V(x,y) \ge 0$

Como V(x,y) é uma função convexa, o \sup de V ocorre na fronteira de C (Luenberger), então o problema de maximização a ser resolvido é equivalente a:

$$max \quad V(x,y)$$

s.a. $\Delta V(x,y) = 0$

A técnica de multiplicadores de Lagrange será utilizada para resolver este problema. A função $\Delta V\left(x,y\right)$ é a equação de restrição, e a função Lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L}(x,y) = V(x,y) - \lambda \Delta V(x,y)$$

As condições de extremo são:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x \left(1 + \lambda\right) - \lambda x \left(\frac{x^2 + y^2 - 0.9}{x^2 + y^2 + 0.1}\right) \left[\frac{y^2}{(x^2 + y^2 + 0.1)^2} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + 0.1)^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(x^2 + y^2 + 0.1)}\right)\right] = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y \left(1 + \lambda\right) - \lambda y \left(\frac{x^2 + y^2 - 0.9}{x^2 + y^2 + 0.1}\right) \left[\frac{y^2}{(x^2 + y^2 + 0.1)^2} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + 0.1)^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(x^2 + y^2 + 0.1)}\right)\right] = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2(n) + y^2(n) + 0.1}\right) y \left(n\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2(n) + y^2(n) + 0.1}\right) x \left(n\right)\right]^2 + x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior obtêm-se infinitos pontos de máximos dados por $x=0,483\cos\varphi$ e $y=0,483\sin\varphi$, com $\varphi\in[0,2\Pi]$. Substituindo estes valores na função $V\left(x,y\right)$, tem-se que:

$$l = \sup_{(x,y) \in C} V(x,y) = 0,233$$

Para calcular o sup de $\Delta V(x,y)$ em C, basta encontrar os pontos onde $qrad(\Delta V(x,y)) = 0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta V}{\partial x} = -2x + x \left(\frac{x^2 + y^2 - 0.9}{x^2 + y^2 + 0.1} \right) \left[\frac{y^2}{(x^2 + y^2 + 0.1)^2} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + 0.1)^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(x^2 + y^2 + 0.1)} \right) \right] = 0 \\ \frac{\partial \Delta V}{\partial y} = -2y + y \left(\frac{x^2 + y^2 - 0.9}{x^2 + y^2 + 0.1} \right) \left[\frac{y^2}{(x^2 + y^2 + 0.1)^2} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + 0.1)^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(x^2 + y^2 + 0.1)} \right) \right] = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima obtêm-se infinitos pontos de máximo dados por $x=0,239\cos\varphi$ e $y=0,239\sin\varphi$, com $\varphi\in[0,2\Pi]$. Substituindo estes valores em $\Delta V\left(x\left(n\right),y\left(n\right)\right)$, tem-se que:

$$s = \sup_{(x,y) \in C} \Delta V = 0,354$$

O conjunto $\widetilde{\Omega}_{l+s}$ é dado por $\{(x,y) \in \Omega_L : V(x,y) : x^2 + y^2 \le l + s = 0,587\}$. Seja o conjunto $E = \{(x,y) \in \overline{\Omega}_L : \Delta V(x,y) = 0\} \cup \widetilde{\Omega}_{l+s}$.

Como V(x,y) é uma função radialmente ilimitada, isto é, $V(x,y) \to \infty$ quando $\|(x,y)\| \to \infty$, qualquer nível L define uma região limitada, então $\Omega_L := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) < L\}$ satisfaz as hipóteses do Teorema (4.11) para qualquer L > l + s. Pelo Teorema (4.11), conclui-se que todas as soluções com condição inicial em \mathbb{R}^2 convergem para o maior conjunto invariante contido em E, quando $n \to \infty$, conforme observa-se nas Figuras (4.8) e (4.9). Neste caso, é possível obter mais informações a respeito do atrator.

A origem está contida em E, e além disso é ponto fixo, então está contida em M, para obter maior informação sobre a estabilidade deste ponto, utiliza-se a técnica de linearização.

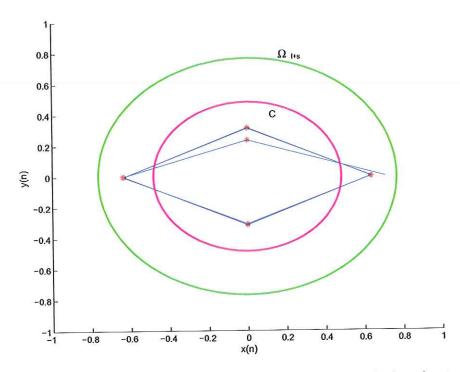


Figura 4.8: Estimativa do Atrator para condição inicial dentro da área da atração

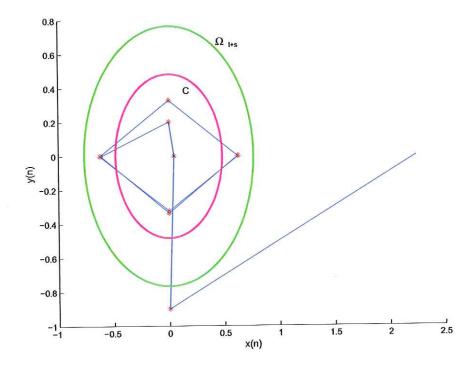


Figura 4.9: Estimativa do Atrator para condição inicial fora da área da atração

Calcula-se a matriz Jacobiana do sistema,

$$\mathbb{J} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x(n+1)}{\partial x} & \frac{\partial x(n+1)}{\partial y} \\ \frac{\partial y(n+1)}{\partial x} & \frac{\partial y(n+1)}{\partial y} \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{xy}{(x^2+y^2+0.1)^2} & \frac{y^2}{(x^2+y^2+0.1)^2} - \frac{1}{2(x^2+y^2+0.1)} + \frac{1}{2} \\ \frac{x^2}{(x^2+y^2+0.1)^2} - \frac{1}{2(x^2+y^2+0.1)} + \frac{1}{2} & \frac{xy}{(x^2+y^2+0.1)^2} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{9}{2} \\ -\frac{9}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de $\mathbb{J}\Big|_{(0,0)}$ é:

$$det(sI - \mathbb{J}) = s^2 + \frac{81}{4} \tag{4.13}$$

As raízes do polinômio (4.13) são $\lambda_1 = \frac{9}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{9}{2}$, portanto a origem é um ponto fixo instável do sistema.

Observa-se, através das simulações que existem órbitas periódicas estáveis na região de atração, conforme Figura (4.10).

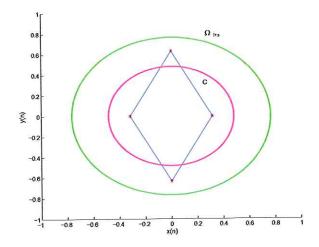


Figura 4.10: Órbita estável

Exemplo 4.15 : Considere o sistema de Lorenz contínuo:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = -y - xz + rx \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

no qual, $\sigma=10,\,r=28$ e $b=\frac{8}{3}.$ Estes valores foram escolhidos de forma que o sistema possua um atrator estranho.

Para obter o sistema de Lorenz discretizado, utiliza-se o Método de Integração de Euler, o qual é um método iterativo, de primeira ordem, que gera uma seqüência de pontos a partir da condição inicial, que se aproxima da solução do sistema, isto é, $x(n+1) \approx \varphi(n\Delta t, x_0)$, no qual, $x(n+1) = x(n) + \Delta t T(x(n))$.

Discretizando o sistema de Lorenz, através do Método de Euler, obtêm-se:

$$x(n+1) = x(n) + \Delta t (-\sigma x(n) + \sigma y(n))$$

$$y(n+1) = y(n) + \Delta t (-y(n) - x(n)z(n) + rx(n))$$

$$z(n+1) = z(n) + \Delta t (-bz(n) + x(n)y(n))$$

no qual Δt , é o passo de integração. A Figura (4.11) mostra uma trajetória do sistema discretizado com condição inicial (x, y, z) = (30, 0, 80).

Seja

$$V(x, y, z) = rx^{2} + 4\sigma y^{2} + 4\sigma \left(z - \frac{5}{4}\right)^{2}$$
(4.14)

uma candidata a função de Lyapunov do sistema de Lorenz. Esta função foi proposta pelo autor do trabalho Alberto(2000), neste trabalho esta função mostrou-se satisfatória para estimar o atrator do sistema de Lorenz contínuo.

A variação de V é dada por:

$$\Delta V\left(x,y,z\right) = V\left(x\left(n+1\right)\right) - V\left(x\left(n\right)\right) \tag{4.15}$$

$$\Delta V(x, y, z) = r(x - \sigma hx + \sigma hy)^{2} - rx^{2} + 4\sigma(y - hy - hxz + rhx)^{2} - 4\sigma y^{2} + 4\sigma \left[\left(z - hbz + hxy - \frac{5}{4}r \right)^{2} - \left(z - \frac{5}{4}r \right)^{2} \right]$$
(4.16)

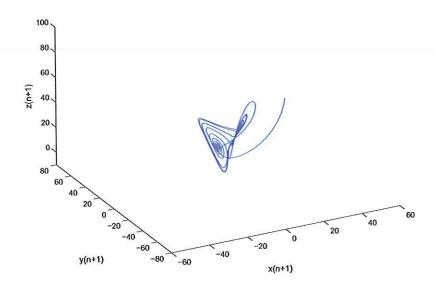


Figura 4.11: Sistema de Lorenz discretizado

Pelo fato do sistema ser discretizado, a variação de V resulta em uma equação complexa (4.16) que depende do passo de integração $\Delta t = h$, encontrou-se dificuldade em obter a estimativa do conjunto $\widetilde{\Omega}_{l+s}$ analiticamente, entretanto, através de simulação obtêm-se a estimativa do atrator (região verde), Figura (4.12), para um passo de integração pequeno h=0,001. A região em vermelho é a região na qual $\Delta V(x,y,z) \geq 0$.

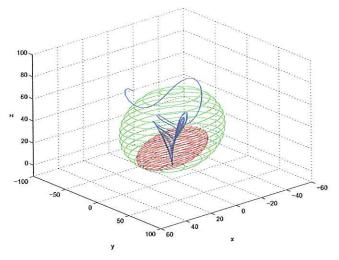


Figura 4.12: Estimativa do atrator

Observa-se que para um passo de integração maior $h=0,01\,$ Figura (4.13), a região C torna-se ilimitada, de modo que não é possível utilizar essa função V para estimar o atrator.

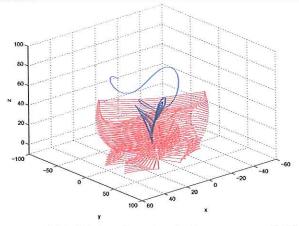


Figura 4.13: Estimativa do atrator para $\bullet = 0 \cdot 01$

4.4 Princípio de Invariância Uniforme

Nesta seção apresenta-se um resultado mais geral do que aquele da seção anterior. Propõe-se uma Extensão do Princípio de Invariância na qual consideram-se incertezas na determinação dos parâmetros do sistema. Esta Extensão será denominada Princípio de Invariância Uniforme, pois é útil para a obtenção de estimativas uniformes, com relação aos parâmetros, do atrator e da área de atração de sistemas dinâmicos discretos.

Considere a seguinte equação de diferença:

$$x(n+1) = T(x(n), \lambda) \tag{4.17}$$

onde $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^p$ é um vetor de parâmetros da equação e $x \in \mathbb{R}^m$. Para um λ fixo, defina:

$$x(n+1) = T_{\lambda}(x(n)) \tag{4.18}$$

Teorema 4.16 (Princípio de Invariância Uniforme) : Suponha que $T: \mathbb{R}^m \times \Lambda \to \mathbb{R}^m$ e $V: \mathbb{R}^m \times \Lambda \to \mathbb{R}$ sejam funções contínuas. Admita existirem funções contínuas $a, b, c: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que para qualquer $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \Lambda$, tem-se que:

$$a(x) \le V(x,\lambda) \le b(x)$$
, $-\Delta V(x,\lambda) \ge c(x)$

Para L > 0 seja $A_L := \{x \in \mathbb{R}^m : a(x) < L\}$. Admita que A_L seja não vazio e limitado.

Considere os conjuntos

$$B_L := \{x \in \mathbb{R}^m : b(x) < L\} \quad , \quad C := \{x \in A_L : c(x) < 0\}$$
$$E_L := \{x \in A_L : c(x) = 0\}$$

Suponha agora que $\sup_{x \in C} b(x) \le l$, $\inf_{x \in C} c(x) \ge -s$ e l+s < L e defina os conjuntos

$$A_{l+s} := \{ x \in \mathbb{R}^m : a(x) \le l+s \} \ e \ B_{l+s} := \{ x \in \mathbb{R}^m : b(x) \le l+s \}$$

Se λ é um parâmetro fixo em Λ e todas as condições anteriores são satisfeitas, então para $x_0 \in B_L$, as seguintes conclusões são obtidas:

- i) Se $x_0 \in \mathcal{B}_{l+s}$ então $x_n = T_{\lambda}^n(x_0) \in \mathcal{A}_{l+s}$, para todo $n \geq 0$ e x_n tende para o maior conjunto invariante de (4.17) contido em \mathcal{A}_{1+1} quando $n \to \infty$.
- ii) Se $x_0 \in (B_L \mathcal{B}_{l+s})$, então x_n tende para o maior conjunto invariante de (4.17) contido em $\mathcal{A}_{l+s} \cup E_L$.

Demonstração:

i) Para $\lambda \in \Lambda$, um parâmetro fixo, defina $\Omega_{l+s} := \{x \in \mathbb{R}^m : V(x,\lambda) \leq l+s\}$. Então, $\mathcal{B}_{l+s} \subset \Omega_{l+s} \subset \mathcal{A}_{l+s}$.

Seja $x \in (\Omega_{l+s} - C)$ um ponto qualquer, então $V(x, \lambda) \leq l + s$ e $\Delta V(x, \lambda) \leq -c(x) \leq 0$ pois $c(x) \geq 0$, logo $V(T_{\lambda}(x), \lambda) = V(x, \lambda) + \Delta V(x, \lambda) \leq l + s$. Portanto, $T(\Omega_{l+s} - C) \subset \Omega_{l+s}$.

Seja $x \in C$ um ponto qualquer, então $V(x,\lambda) \leq b(x) \leq \sup_{x \in C} b(x) \leq l$ e $\Delta V(x,\lambda) \leq -c(x) \leq \sup(-c(x)) \leq s$ logo $V(T_{\lambda}(x,\lambda)) = V(x,\lambda) + \Delta V(x,\lambda) \leq l+s$. Logo, $T(C) \subset \Omega_{l+s}$. Como $T(\Omega_{l+s}) = T((\Omega_{l+s} - C) \cup C)$ então $T(\Omega_{l+s}) \subset \Omega_{l+s} \subset A_{l+s}$, ou seja Ω_{l+s} é positivamente invariante para cada λ fixo. Seja $x_0 \in \mathcal{B}_{l+s}, x_0 = x(0)$ e $x_n = T_{\lambda}^n(x_0)$ a solução de (4.17) com condição inicial x_0 . Esta solução não sai de A_{l+s} , pois $x_0 \in \mathcal{B}_{l+s} \subset \Omega_{l+s} \subset A_{l+s}$ é positivamente invariante.

O conjunto A_{l+s} está estritamente contido em A_L , e portanto é limitado, logo a solução x_n é limitada e assim $\Omega(x_0)$ é não vazio, conforme Teorema (3.20).

O conjunto $\Omega(x_0)$ é invariante e $\Omega(x_0) \subset \mathcal{A}_{l+s}$. Logo $\Omega(x_0)$ está contido no maior conjunto invariante contido em \mathcal{A}_{l+s} e, portanto x_n tende para o maior conjunto invariante de (4.17) contido em \mathcal{A}_{l+s} quando $n \to \infty$.

ii) Para $\lambda \in \Lambda$ fixo, defina $\Omega_L := \{x \in \mathbb{R}^m : V(x,\lambda) \leq L\}$. Então $B_L \subset \Omega_L \subset A_L$.

Seja $x \in (\Omega_L - C)$ um ponto qualquer, então $V(x, \lambda) \leq L$ e $\Delta V(x, \lambda) \leq -c(x) \leq 0$ pois $c(x) \geq 0$, logo $V(T_{\lambda}(x), \lambda) = V(x, \lambda) + \Delta V(x, \lambda) \leq V(x, \lambda) \leq L$. Assim, $T_{\lambda}(x) \in \Omega_L$. Como $x \in (\Omega_L - C)$ é arbitrário, tem-se que $T(\Omega_L - C) \subset \Omega_L \subset A_L$.

Seja $x \in C$ um ponto qualquer, então $V(x,\lambda) \leq b(x) \leq \sup_{x \in C} b(x) \leq l$ e $\Delta V(x,\lambda) \leq -c(x) \leq \sup_{x \in C} -c(x) \leq s$, logo $V(T_{\lambda}(x),\lambda) = V(x,\lambda) + \Delta V(x,\lambda) \leq l + s < L$. Portanto $T_{\lambda}(x) \in \Omega_L$, como x é um ponto arbitrário em C, $T(C) \subset \Omega_L \subset A_L$.

Conclui-se que $T((\Omega_L - C) \cup (C)) = T(\Omega_L) \subset \Omega_L \subset A_L$. Seja $x_0 \in (B_L - B_{l+s}), x_0 = x(0)$ e $x_n = T_\lambda^n(x_0, \lambda)$ a solução de (4.17) com condição inicial x_0 , a solução x_n não sai de Ω_L , logo a solução é limitada em A_L . Portanto $\Omega(x_0)$ é não vazio.

Suponhamos que $x_n \notin C \ \forall \ n \in \mathbb{Z}_+$. Então $\Delta V(x_n, \lambda) \leq -c(x) \leq 0 \ \forall \ n \in \mathbb{Z}_+$, logo a sequência de números reais $V(x_n, \lambda)$ é não crescente (monótona). Observe que V é uma função contínua e A_L é limitado, então $V(x_n, \lambda)$ é limitada inferiormente em A_L , logo $V(x_n, \lambda) \to p$ quando $n \to \infty$.

Seja $y \in \Omega(x_0)$, então \exists subsequência x_{n_j} tal que $x_{n_j} \to y, n_j \to \infty$ quando $j \to \infty$. Como, em particular, $V(x_{n_j}) \to p$, então da continuidade da $V, V(y, \lambda) = p$. Da invariância de $\Omega(x_0)$ temos que $T(y) \in \Omega(x_0)$ e portanto $\exists x_{n_{j+1}} = T(x_{n_j})$ tal que $x_{n_{j+1}} \to T(y)$, $n_{j+1} \to \infty$ quando $j \to \infty$.

Portanto $V(T(y), \lambda) = p$. Então $\Delta V(y, \lambda) = 0$, $\forall y \in \Omega(x_0)$. Como $y \notin C$, então $-\Delta V(y, \lambda) \geq c(y) \geq 0$. Logo c(y) = 0 $\forall y \in \Omega(x_0)$. Então $\Omega(x_0) \subset E_L$.

Se, para algum $k>0,\,x_k=T_\lambda^k(x_0)\in C\subset\mathcal{B}_{l+s},$ a demonstração segue do item

i). Portanto x_n tende para o maior conjunto invariante contido em $\mathcal{A}_{l+s} \cup E_L$.

Exemplo 4.17: Considere o seguinte sistema discreto

$$T_{\lambda}\left(x\left(n\right)\right) = \frac{x^{3}\left(n\right)}{\lambda} - 2x\left(n\right) \tag{4.19}$$

O valor nominal do parâmetro é $\lambda=3$. Admite-se que existe uma incerteza de 7% na determinação do parâmetro. Seja $\lambda_{min}=2,79$ e $\lambda_{max}=3,21$. Portanto λ pertence ao seguinte subconjunto de \mathbb{R} :

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \lambda_{min} \le \lambda \le \lambda_{max} \right\}.$$

Os pontos fixos do sistema variam conforme o parâmetro, com exceção da origem, Figura (4.14).

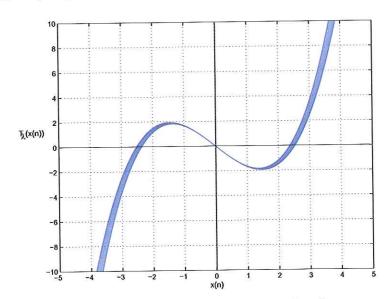


Figura 4.14: Trajetórias do sistema (4.19)

Seja

$$V(x(n),\lambda) = \lambda x^{2}(n) \tag{4.20}$$

uma candidata a função de Lyapunov para o sistema (4.19). Neste caso é simples escolher funções a e b, independente do parâmetro tal que

$$a(x(n)) \le V(x(n), \lambda) \le b(x(n))$$

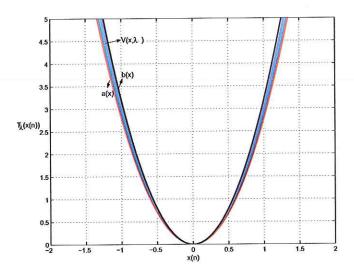


Figura 4.15: Funções $a(x(n)), V(x(n), \lambda), b(x(n))$.

Basta tomar $a(x(n)) = \lambda_{min}x^2(n)$ e $b(x(n)) = \lambda_{max}x^2(n)$, conforme a Figura (4.15).

Falta encontrar uma função c independente do parâmetro tal que

$$\Delta V\left(x\left(n\right),\lambda\right) \le -c\left(x\left(n\right)\right). \tag{4.21}$$

A variação da função V ao longo das soluções do sistema (4.19) é dada por:

$$\Delta V(x(n), \lambda) = V(T_{\lambda}(x)) - V(x(n), \lambda) = \frac{x^{6}(n)}{\lambda} - 4x^{4}(n) + 3\lambda x^{2}(n)$$
 (4.22)

Para construirmos a função c tal que satisfaça a desigualdade (4.21), partimos da função ΔV já conhecida. Então, $-c(x(n)) = \frac{x^6(n)}{\beta} - 4x^4(n) + 3\alpha x^2(n)$, resta determinar os coeficientes α e β tais que, $\forall \lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}], -\Delta V < C$:

$$\frac{x^{6}(n)}{\lambda} - 4x^{4}(n) + 3\lambda x^{2}(n) \leq \frac{x^{6}(n)}{\beta} - 4x^{4}(n) + 3\alpha x^{2}(n)$$
$$\frac{x^{6}(n)}{\lambda} + 3\lambda x^{2}(n) \leq \frac{x^{6}(n)}{\beta} + 3\alpha x^{2}(n)$$
$$x^{2}\left(\frac{x^{4}(n)}{\beta} - \frac{x^{4}(n)}{\lambda} + 3\alpha - 3\lambda\right) \geq 0$$

Portanto, $-c(x(n)) = \frac{x^6(n)}{\beta} - 4x^4(n) + 3\alpha x^2(n)$, na qual $0 < \beta \le \lambda_{min}$ e $\alpha \ge \lambda_{max}$, neste caso, foi escolhido $\beta = \lambda_{min}$ e $\alpha = \lambda_{max}$.

Observe que $V(x, \lambda)$, a(x) e b(x) são funções quadráticas, então qualquer nível L > 0 define uma região limitada A_L . Além disto, é necessário atender as seguintes hipóteses:

$$\sup_{x \in C} b(x) \le l; \ \sup_{x \in C} -c(x) \le s$$
$$l + s < L$$

no qual $C:=\left\{x\in A_L:-\frac{x^6}{\lambda_{min}}+4x^4-3\lambda_{max}x^2<0\right\}$. Portanto o maior nível L possível é L=21,3326.

A região determinada pelo conjunto C, neste exemplo, é um intervalo. A função b(x) é uma função convexa. Então, para calcular o $\sup_{x \in C} b(x)$, basta identificar os vértices do conjunto C, que são os pontos nos quais -c(x) = 0, as raízes de -c(x) são $\{-2,7652; -1,8745; 0; 1,8745; 2,7652\}$, portanto,

$$\sup_{x \in C} b(x) = 3,21(1.8745)^2 = 11,2797.$$

Para o cálculo de $\sup_{x \in C} -c(x)$, temos que -c(x) é uma função analítica, os pontos de máximo desta função ocorrem quando $\frac{-dc(x)}{dx} = 0$. A derivada de -c(x) é $\frac{-dc(x)}{dx} = \frac{6x^5(n)}{\beta} - 16x^3(n) + 6\alpha x(n)$, calculando as raízes temos $\{-2, 4351; -1, 2290; 0; 1, 2290; 2, 4351\}$, substituindo a raiz que pertence ao conjunto C na função -c(x) conclui-se que

$$\sup_{x \in C} -c(x) = 6,6549.$$

Portanto l + s < L.

Os demais conjuntos são:

$$A_L := \{x \in \mathbb{R} : a(x(n)) = \lambda_{min}x^2(n) \le 21, 33\} = \{x \in \mathbb{R} : -2, 7652 < x < 2, 7652\}$$

$$B_L := \{x \in \mathbb{R} : -2, 5779 < x < 2, 5779\}, A_{l+s} := \{x \in \mathbb{R} : -2, 5353 < x < 2, 5353\}$$
e $E = \{-1, 8745, 0, 1, 8745\}$. Conforme a Figura (4.16).

Pelo Teorema do Princípio de Invariância Uniforme, conclui-se que toda solução de (4.19) com condição inicial pertencente ao conjunto B_L converge para o maior conjunto invariante contido em $A_{l+s} \cup E_L$ quando $n \to \infty$, portanto o conjunto A_{l+s} é uma estimativa do atrator para a equação (4.19).

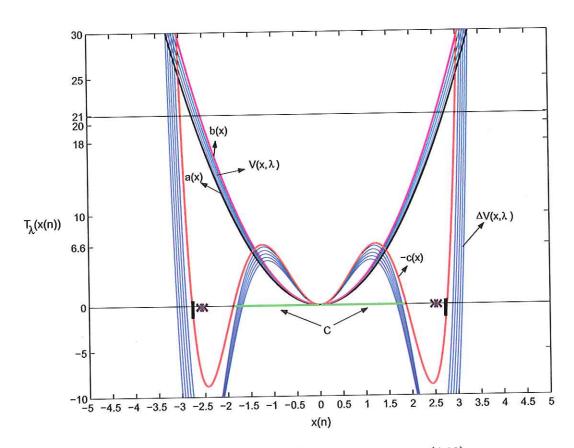


Figura 4.16: Estimativa da área de atração do sistema (4.19)

Capítulo 5

Conclusões

Os resultados teóricos propostos neste trabalho são importantes no estudo de estabilidade de sistemas dinâmicos discretos, pois na literatura existem somente estudos de estabilidade utilizando o Método Direto de Lyapunov e o Princípio de Invariância de LaSalle. A desvantagem destes métodos é a dificuldade de encontrar uma função de Lyapunov tal que sua derivada seja menor ou igual a zero ao longo das soluções do sistema.

A Extensão do Princípio de Invariância proposta neste trabalho, permite encontrar uma função de Lyapunov tal que sua variação seja positiva em regiões limitadas no espaço de estados, assim, construir tal função pode ser mais fácil, possibilitando a análise de uma classe maior de sistemas.

Em sistemas dinâmicos discretos comportamentos complicados, como órbitas periódicas e caos, ocorrem com maior frequência do que em sistemas dinâmicos contínuos. Nestes casos, uma estimativa da região de atração e até mesmo do atrator, poderá ser feita utilizando a Extensão do Princípio de Invariância.

Bibliografia

- Alberto, L. F. C. (2000). O Princípio de Invariância de LaSalle estendido aplicado ao estudo de coerência de geradores e à análise de estabilidade transitória multi-'swing', Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos Universidade de São Paulo.
- Bensoubaya, M. e Iggidr, A. (1998). New results on the stability of discretetimes systems and applications to control problems, *Journal of Mathematical* analysis and applications 219: 392–414.
- Bretas, N. G. e Alberto, L. F. C. (2003). Lyapunov function for power systems with transfer conductances: Extension of the invariance principle, *IEEE Transactions on Power Systems* 18, n.2: 769–777.
- Bretas, N. G., Alberto, L. F. C. e Martins, A. C. P. (2004). Estimativa de conjuntos atratores de sistemas não-lineares e de suas áreas de atração utilizando lmi, Congresso Brasileiro de Automática, 2004.
- Chiang, H. D., Wu, F. F. e Varaya, P. P. (1987). Foundation of direct methods for power system transient stability analysis, *IEEE Transactions on Circuit* and Systems CAS-34, n.2.
- Hahn, W. (1963). Theory and Application of Liapunov's Direct Method, Prentice-Hall.
- Hale, J. K. (1969). Dynamical systems and stability, J. Math. Anal. and Appl. 26: 39–59.

- Hale, J. K. e Lunel, S. V. (1993). Introduction to functional differential equations, Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences Vol.99.
- Khalil, H. K. (1996). Nonlinear Systems, Prentice Hall, New Jersey.
- Koçak, H. e Hale, J. (1991). Dynamics and bifurcations, Springer-Verlag.
- LaSalle, J. P. (1960a). The extent of asymptotic stability, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 46(3): 363–365.
- LaSalle, J. P. (1960b). Some extensions of liapunov's second method, *IRE Trans.* on Circuit Theory CT-7: 520–527.
- LaSalle, J. P. (1962). Asymptotic stability criteria, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Hydrodynamic Instability, AMS 13: 299–307.
- LaSalle, J. P. (1976). The Stability of Dynamical Systems, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- LaSalle, J. P. (1977). Stability theory for difference equations. studies in ordinary differencial equation, Studies in ordinary differencial equations, Studies in Math., Math. Assoc. of America, Washington, D.C (Reviewer G.R. Sell) 14: 1–31.
- LaSalle, J. P. (1986). The stability and Control of Discrete Processes, Springer-Verlag New York Inc.
- Lima, E. L. (1976). Curso de Análise, Vol. 1, Projeto Euclides Editora Edgard Blücher.
- Lima, E. L. (1977). Espaços Métricos, Projeto Euclides Editora Edgard Blücher.
- Luenberger, D. G. (1989). Linear and nonlinear programming, 2 ed., Addison-Wesley.
- Martynyuk, A. A. (2002). Qualitative Methods in Nonlinear Dynamics, Marcel Dekker Inc., New York.



- Miller, R. K. (1965). Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations, *Transactions of the American Mathematical Society* **115(3)**: 400–416.
- Monteiro, L. H. A. (2002). Sistemas Dinâmicos, Editora Livraria da Física.
- Nesemann, T. (2001). Invariants and liapunov functions for nonautonomous systems, *Journall computers and mathematics with applications* **42**: 385–392.
- Pugh, C. C. (1969). On a theorem of p. hartman, American Journal Mathematics Vol.91: 363–367.
- Rodrigues, H. M. (1970). Invariança para sistemas não autônomos de equações diferenciais com retardamento e aplicações, Tese de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos Universidade de São Paulo.
- Rodrigues, H. M., Alberto, L. F. C. e Bretas, N. G. (2000). On the invariance principle: generalizations and applications to synchronization, *IEEE Trans on Circuits and Systems* 47-5: 730–739.
- Rodrigues, H. M., Alberto, L. F. C. e Bretas, N. G. (2001). Uniform invariace principle and synchronization with respect to parameter variation, *Journall of Differential Equations* **169**: 228–254.
- Sell, G. (1967). Nonautonomous differential equations and topological dynamics i, ii, *Trans. Amer. Math. Soc.* **127**: (I)241–262 (II)263–283.
- Slemrod, M. (1970). Asymptotic behavior of a class of abstract dynamical systems, J. Diff. Equations 7(3): 584–600.
- Strogatz, S. H. (1994). Nonlinear Dynamics and Chaos, Addison Wesley.
- Sundarapandian, V. (2003). An invariance principle for discrete-time nonlinear systems, Applied Mathematics Letters 16: 85–91.