

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP  
EXEMPLAR REVISADO  
Data de entrada no Serviço: 14 / 09 / 01  
Ass.: *Guilherme*

# Funções de Lyapunov para a Análise de Estabilidade Transitória em Sistemas de Potência

Flávio Henrique J. Ribeiro da Silva

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

ORIENTADOR: Prof. Newton G. Bretas

DEDALUS - Acervo - EESC



31100036749

São Carlos

2001



asa. TESE- EESC  
ntt. 5531  
ombo T0190/01

st 1199262

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP  
BIBLIOTECA REVISADO

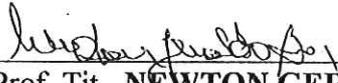
Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento da Informação do Serviço de Biblioteca - EESC/USP

S586f  
Silva, Flávio Henrique J. Ribeiro da  
Funções de Lyapunov para a análise de estabilidade transitória em sistemas de potência / Flávio Henrique J. Ribeiro da Silva. -- São Carlos, 2001.  
Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de São Carlos-Universidade de São Paulo, 2001.  
Área: Engenharia Elétrica.  
Orientador: Prof. Dr. Newton G. Bretas.  
1. Estabilidade transitória. 2. Métodos diretos.  
3. Funções energia. 4. Funções de Lyapunov. I. Título.

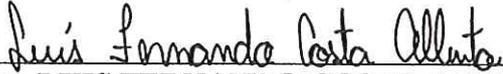
**FOLHA DE JULGAMENTO**

Candidato: Engenheiro **FLÁVIO HENRIQUE JUSTINIANO RIBEIRO DA SILVA**

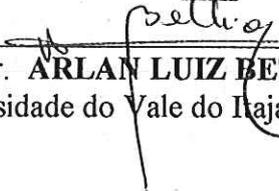
Dissertação defendida e julgada em 06-08-2001 perante a Comissão Julgadora:

  
Prof. Tit. **NEWTON GERALDO BRETAS (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

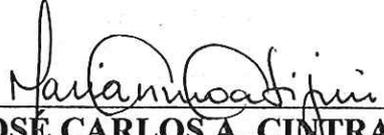
  
Dr. **LUIS FERNANDO COSTA ALBERTO**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

  
Prof. Dr. **ARLAN LUIZ BETTIOL**  
(Universidade do Vale do Itajaí - UNIVALI)

Aprovado

  
Prof. Doutor **MURILO ARAUJO ROMERO**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica

  
p/ **JOSÉ CARLOS A. CINTRA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Dedico este trabalho aos meus avós  
Maria Nonata e Fernando.*

# Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Newton G. Bretas.

Ao Luis Fernando, pelos ensinamentos e sugestões no decorrer do trabalho.

Aos meus colegas do LACO (Laboratório de Análise Computacional em Sistemas de Potência) pelas discussões sobre sistemas de potência e assuntos gerais.

Ao meu pai José Justiniano e aos tios Antônio e Cida, pelo significativo incentivo aos meus estudos.

À Tiemi, por tudo...

À família Mello (Agnaldo, Noeme, Cláudia, Rodrigo e Fabiano) pelos momentos de descontração em São Carlos.

À CAPES pela bolsa concedida.



# Conteúdo

Agradecimentos	iii
Lista de Abreviaturas e Siglas	xiii
Lista de Símbolos	xv
Resumo	xix
Abstract	xxi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Análise de Estabilidade Transitória em Sistemas de Potência . . .	1
1.2 Objetivos e Organização do Trabalho . . . . .	6
<b>2 Modelo Matemático de Sistemas de Potência Multimáquinas</b>	<b>9</b>
2.1 Introdução . . . . .	9
2.2 Modelo Clássico . . . . .	12
2.3 Modelo Preservando a Estrutura da Rede . . . . .	15
2.4 Formulação Uma Máquina como Referência . . . . .	17
2.5 Formulação Centro de Ângulo como Referência . . . . .	20
2.5.1 Modelo Clássico Referido ao COA . . . . .	21
2.5.2 Modelo Preservando a Estrutura Referido ao COA . . . . .	22
<b>3 Análise de Estabilidade em Sistemas Não Lineares</b>	<b>23</b>
3.1 Sistemas Autônomos . . . . .	23

vi **CONTEÚDO**

3.2	Método de Lyapunov . . . . .	24
3.3	Princípio de Invariância de LaSalle . . . . .	27
3.4	Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle . . . . .	29
3.5	Problema de Lure . . . . .	32
3.5.1	CrITÉrio de Popov . . . . .	36
4	<b>Aplicação dos Métodos Diretos na Análise de Estabilidade Tran- sitória em Sistemas de Potência</b>	<b>41</b>
4.1	Introdução . . . . .	42
4.2	Estimativa da Área de Atração . . . . .	43
4.2.1	Método PEBS . . . . .	47
5	<b>Funções de Lyapunov para o Estudo de Estabilidade Transitória em Sistemas de Potência Multimáquinas - Estado da Arte</b>	<b>51</b>
5.1	Cargas como Impedância Constante . . . . .	51
5.1.1	Função de Lyapunov do tipo função energia . . . . .	52
5.1.2	Função de Lyapunov Utilizando o Critério Multivariável de Popov . . . . .	55
5.2	Estrutura da Rede Presevada . . . . .	63
5.2.1	Cargas Dependentes da Tensão . . . . .	64
5.2.2	Cargas Dependentes da Tensão e Frequência . . . . .	66
6	<b>Função de Lyapunov para Sistemas de Potência com Perdas</b>	<b>69</b>
6.1	Cargas como Impedância Constante . . . . .	69
6.1.1	Função de Lyapunov Utilizando a Extensão do Princípio de Invariância . . . . .	70
6.2	Estrutura da Rede Preservada . . . . .	72
7	<b>Testes Realizados e Análise dos Resultados</b>	<b>75</b>
7.1	Resultados obtidos para o sistema 3 barras . . . . .	76
7.2	Resultados obtidos para o sistema teste IEEE-14 . . . . .	81

<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>93</b>
<b>A</b>	<b>Dados dos Sistemas Testes</b>	<b>97</b>
A.1	Topologia do sistema teste 3 barras . . . . .	97
A.2	Sistema 14 barras e 5 geradores . . . . .	97

viii *CONTEÚDO*

# Lista de Figuras

2.1	Representação do sistema multimáquinas . . . . .	11
3.1	Representação geométrica dos conjuntos do Teorema 3.1. . . . .	25
3.2	Curvas de nível da função de Lyapunov . . . . .	27
3.3	Representação geométrica para o Teorema 3.4 . . . . .	29
3.4	Interpretação geométrica da extensão do princípio de invariância .	30
3.5	Região de atração para o Exemplo 3.8 . . . . .	33
3.6	Representação do problema de Lure. . . . .	33
3.7	Condição setorial. . . . .	35
3.8	Diagrama de Popov . . . . .	39
4.1	Região de atração . . . . .	44
4.2	Ilustração da bacia energética. . . . .	45
4.3	PEBS para o sistema 3 máquinas . . . . .	48
6.1	Regiões com $\dot{W} > 0$ , para um sistema $x$ barramento infinito. . . .	71
7.1	$t_{AB} = 0.194$ seg. - Carga como impedância constante. . . . .	77
7.2	$t_{AB} = 0.194$ seg. - Carga como impedância constante. . . . .	77
7.3	$t_{AB} = 0.196$ seg. - Carga como impedância constante. . . . .	78
7.4	$t_{AB} = 0.196$ seg. - Carga como impedância constante. . . . .	78
7.5	$t_{AB} = 0.194$ seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante. . . . .	79
7.6	$t_{AB} = 0.194$ seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante. . . . .	80

7.7	$t_{AB} = 0.196$ seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante. . . . .	81
7.8	$t_{AB} = 0.196$ seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante. . . . .	82
7.9	$t_{AB} = 0.194$ seg. - Carga como impedância constante. . . . .	82
7.10	$t_{AB} = 0.196$ seg. - Carga como impedância constante. . . . .	83
7.11	$t_{AB} = 0.194$ seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante. . . . .	83
7.12	$t_{AB} = 0.196$ seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante. . . . .	84
7.13	$t_{AB} = 0.480$ seg. - Carga como impedância constante. . . . .	85
7.14	$t_{AB} = 0.480$ seg. - Carga como impedância constante. . . . .	85
7.15	$t_{AB} = 0.481$ seg. - Carga como impedância constante. . . . .	86
7.16	$t_{AB} = 0.481$ seg. - Carga como impedância constante. . . . .	86
7.17	$t_{AB} = 0.480$ seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante. . . . .	87
7.18	$t_{AB} = 0.480$ seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante. . . . .	88
7.19	$t_{AB} = 0.481$ seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante. . . . .	89
7.20	$t_{AB} = 0.481$ seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante. . . . .	89
7.21	Simulação considerando tempo de abertura = 0.480 seg. . . . .	90
7.22	Simulação considerando tempo de abertura = 0.481 seg. . . . .	90
7.23	Simulação considerando tempo de abertura = 0.480 seg. . . . .	91
7.24	Simulação considerando tempo de abertura = 0.481 seg. . . . .	91
A.1	Sistema 3 barras e 3 geradores . . . . .	97
A.2	Topologia do sistema teste 14 barras . . . . .	98

## Lista de Tabelas

7.1	Comparação dos $t_{CA}$ - Sistema 3 barras . . . . .	80
7.2	Comparação dos $t_{CA}$ - Sistema IEEE 14 . . . . .	88
A.1	Dados de linhas para o sistema teste 3 barras . . . . .	97
A.2	Dados de barras para o sistema teste 3 barras . . . . .	98
A.3	Dados de linhas para o sistema teste IEEE - 14 barras . . . . .	99
A.4	Dados de barras para o sistema teste IEEE - 14 barras . . . . .	100

---



# Lista de Abreviaturas e Siglas

*COA* - Center of Angle (Centro de Ângulo).

*EP* - Energia potencial.

*f.e.m.* - Força eletro motriz

*PEBS* - Potential Energy Boundary Surface (Superfície Limite de Energia potencial).

*PEE* - Ponto de equilíbrio estável.



## Lista de Símbolos

$\delta$  - Ângulo do rotor dos geradores síncronos.

$\Delta f$  - Variação de frequência elétrica.

$\theta$  - Ângulo do rotor dos geradores síncronos na referência de centro de ângulo.

$\omega(t)$  - Velocidade angular do rotor do gerador síncrono.

$\omega_o$  - Velocidade angular síncrona do sistema.

$\phi_{ij}$  - Ângulo da admitância  $Y_{ij}$ .

$B_{ij}$  - Susceptância, parte real da admitância  $Y_{ij}$ .

$D$  - Coeficiente de amortecimento das máquinas síncronas.

$E$  - Fasor de tensão da fonte de tensão do gerador.

$f_R$  - Frequência angular do rotor.

$f_o$  - Frequência síncrona.

$G_{ij}$  - Condutância, parte real da admitância  $Y_{ij}$ .

$M$  - Coeficiente de inércia das máquinas síncronas.

$m$  - Número de barras de carga.

$n$  - Número de geradores.

$P_c$  - Potência ativa consumida pela carga.

$P_l$  - Fluxo de potência ativa.

$P_L$  - Potência ativa da carga na barra.

$P_m$  - Potência mecânica de entrada do gerador.

$P_G$  - Potência elétrica de saída do gerador.

$Q_c$  - Potência reativa consumida pela carga.

$Q_l$  - Fluxo de potência reativa.

$Q_L$  - Potência reativa da carga na barra.

$t_{CA}$  - Tempo crítico de abertura.

$t_{AB}$  - Tempo de abertura.

$T$  - Coeficiente de amortecimento das máquinas síncronas.

$V$  - Função de Lyapunov ou energia total.

$V_{CA}$  - Energia do sistema no tempo de abertura.

$V_p$  - Energia potencial do sistema.

$x_{CA}$  - Ponto em que a trajetória do sistema em falta abandona a área de atração.

$x_I$  - Ponto de equilíbrio instável.

$x_s$  - Ponto de equilíbrio estável.

$x'_d$  - Reatância transitória de eixo direto.

$y_i$  - Admitância da reatância transitória

$Y_{BUS}$  - Matriz de admitância nodal da rede.

$\tilde{Y}_{BUS}$  - Matriz admitância nodal com as admitâncias das cargas inseridas.

$\hat{Y}_{BUS}$  - Matriz admitância nodal com as admitâncias das reatâncias transitórias inseridas.

$Y_{RED}$  - Matriz  $\tilde{Y}_{BUS}$  do sistema reduzida às "n" barras geradoras do sistema.

$Y_L$  - Matriz admitância de cargas.

$W$  - Função de Lyapunov ou energia total do sistema.



## Resumo

Os métodos diretos são adequados à análise de estabilidade transitória em sistemas de potência, já que não requerem a resolução, integração numérica, do conjunto de equações diferenciais que representam o sistema. Os métodos diretos utilizam as idéias de Lyapunov associadas ao princípio de invariância de LaSalle para estimar a área de atração dos sistemas de potência. A grande dificuldade dos métodos diretos está em encontrar uma função auxiliar  $V$ , denominada função de Lyapunov que satisfaça as condições estabelecidas pelo Teorema de Lyapunov. Neste trabalho é realizada uma revisão bibliográfica das funções de Lyapunov utilizadas para análise de estabilidade transitória em sistemas de potência. Analisa-se o problema da existência de funções de Lyapunov quando as condutâncias de transferência são consideradas. Utilizando-se uma extensão do princípio de Invariância de LaSalle, apresenta-se uma nova função a qual é uma função de Lyapunov no sentido mais geral da extensão do princípio de invariância de LaSalle quando as condutâncias de transferência da matriz admitância da rede reduzida são consideradas. Estudou-se também a existência de funções de Lyapunov no sentido mais geral da extensão do princípio de invariância de LaSalle para modelos que preservam a estrutura da rede. Neste caso, infelizmente não encontramos uma função satisfazendo todas as hipóteses requeridas.

Palavras-Chave: Estabilidade transitória, métodos diretos, funções energia, funções de Lyapunov

XX

# Abstract

The direct methods are well-suited for transient stability analysis to power systems, since they do not require the solution of the set of differential equations of the system model. The direct methods use the Lyapunov's ideas related to the LaSalle's Invariance Principle to estimate the power system attraction area. The great difficulty of the direct methods is to find an auxiliary function  $V$ , called Lyapunov function, which satisfies the conditions of Lyapunov's theorem. In this work, a bibliographic review of the Lyapunov functions used in transient stability analysis of power systems is done. The problem of existence of Lyapunov functions, when the transfer conductances are considered, is analysed. Using LaSalle's invariance principle extension, a Lyapunov function considering the transfer conductances is presented. The existence of Lyapunov functions for models that preserve the network structure was studied using the LaSalle's invariance principle. Unfortunately, in these cases, we did not find a function satisfying all the required hypothesis.

Key-words: Transient stability, direct methods, energy functions, Lyapunov functions



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Análise de Estabilidade Transitória em Sistemas de Potência

Na sociedade moderna deseja-se que as concessionárias garantam a confiabilidade e o fornecimento ininterrupto de energia elétrica. Nos últimos anos, o crescente aumento do carregamento impulsionou a interligação entre os sistemas elétricos e propiciou a transmissão de potência através de linhas longas de alta capacidade, com isto, o equacionamento dos sistemas elétricos de potência tornou-se mais complexo e os estudos sobre estabilidade tornaram-se de suma importância, principalmente na área de operação e planejamento de sistemas elétricos de potência.

Durante a operação dos sistemas elétricos podem ocorrer perturbações de grande e pequeno porte, que são responsáveis por acarretar oscilações nos eixos dos geradores síncronos. Quando o sistema está sujeito a uma perturbação, o seu funcionamento normal fica evidentemente prejudicado, acarretando problemas para a sociedade, podendo até implicar no desligamento de uma parte ou de todo o sistema interligado. Desta forma evidencia-se a importância do estudo de estabilidade do sistema elétrico.

As perturbações em sistemas elétricos de potência são geralmente classificadas em:

- Grandes perturbações.

- Pequenas perturbações.

As grandes perturbações estão em geral associadas a contingências anormais, tais como curto-circuitos e perdas de linha de transmissão. As pequenas perturbações por sua vez estão relacionadas com perturbações corriqueiras que ocorrem a todo instante durante a operação do sistema, tais como a entrada e saída de cargas no sistema.

Os estudos de estabilidade procuram determinar, entre outras coisas, se o sistema retorna a um ponto de operação adequado após uma perturbação, ou ainda, qual a máxima perturbação que o sistema suportaria. Os estudos de estabilidade de ângulo podem ser divididos em:

1. Estabilidade transitória: estuda o comportamento do sistema quando sujeito a grandes perturbações, desta maneira todas as não linearidades do sistema são levadas em consideração. Neste tipo de estudo os engenheiros estão interessados em garantir o sincronismo entre as máquinas do sistema durante poucos segundos após a ocorrência do distúrbio. Devido ao curto tempo de análise, os equipamentos do sistema que possuem dinâmica lenta são em geral omitidos.
2. Estabilidade dinâmica: estuda o comportamento do sistema quando sujeito a pequenas perturbações, ocorridas durante a operação normal do sistema, estabelecendo limites de operação para o mesmo. Como as perturbações são pequenas, o modelo que representa o sistema pode ser linearizado em torno do ponto de operação. O tempo de estudo varia entre alguns segundos até vários minutos, logo deve ser levada em consideração a atuação de equipamentos de dinâmica mais lenta, tais como os reguladores.

Este trabalho tem por objetivo o estudo de estabilidade transitória. Os estudos de estabilidade transitória determinam quão rápida deve ser a atuação da proteção, chamado tempo de abertura, de modo que as máquinas do sistema permaneçam em sincronismo após a eliminação da falta. O máximo tempo de abertura para o qual o sistema ainda permanece em sincronismo é chamado tempo crítico de abertura.

Classicamente as análises de estabilidade transitória são realizadas através de uma série de simulações do sistema de potência nas mais variadas situações. As contingências mais graves são selecionadas e integram-se numericamente as equações diferenciais que representam a dinâmica do sistema de potência para cada uma das contingências. Desta forma percebe-se que esta análise é adequada somente para estudos “off-line”, pois requer um grande esforço computacional.

Grandes esforços por parte de pesquisadores têm sido feitos para que a análise da estabilidade transitória torne-se adequada à aplicações em tempo real. Conforme pode-se encontrar em Pai (1981), Bretas e Alberto (2000b), Fouad e Vittal (1992) e Alberto et al. (2001), os métodos diretos são adequados à aplicação em tempo real, pois fornecem informações a respeito da estabilidade, diretamente, sem o conhecimento das soluções das equações diferenciais.

Os métodos diretos utilizam as idéias de Lyapunov associadas ao Princípio de Invariância de LaSalle para estimar a bacia de atração dos sistemas de potência. De acordo com Willems e Willems (1970), Willems (1971) e Chiang et al. (1987) é possível obter uma estimativa do tempo crítico de abertura a partir do estado inicial pré-falta do sistema, da topologia pós-falta do sistema e de apenas uma simulação dinâmica.

A dificuldade crucial dos métodos diretos consiste em encontrar uma função auxiliar  $V$ , denominada função de Lyapunov, que satisfaça as condições estabelecidas pelo Teorema de Lyapunov, ou seja, tal função deve ser definida positiva e sua derivada ao longo das trajetórias do sistema deve ser pelo menos semi-definida negativa. Esta teoria é baseada na análise de sistemas não lineares e pode ser encontrada em Vidyasagar (1993) e Khalil (1996).

Em 1958, Aylett propôs uma função de Lyapunov do tipo função energia. Cada equação de aceleração relativa para todas as possíveis combinações das máquinas eram multiplicadas por suas correspondentes velocidades relativas, posteriormente eram adicionadas todas as equações e a função energia total era obtida a partir de um processo de integração.

Desde que Aylett propôs esta função energia, diversos pesquisadores, tais co-

mo Ribbens-Pavella (1971) e C. J. Tavora (1971), tem se baseado em suas idéias para obterem funções de Lyapunov. Athay et al. (1979) utilizaram estas idéias e propuseram uma função energia na formulação COA (*do inglês - center of angle*), que é amplamente utilizada por vários pesquisadores que investigam atualmente este tipo de problema. Para encontrá-la foram feitas uma série de exigências e simplificações no modelo as quais, muitas vezes, não são realísticas. Primeiramente, as máquinas são modeladas como sendo f.e.m.'s constantes em série com uma reatância denominada reatância de eixo direto, as cargas são consideradas como sendo impedâncias constantes, e a rede elétrica é reduzida aos nós das forças eletromotrizes correspondentes aos geradores.

As funções energia obtidas por este processo de integração ainda possuem um problema, no que diz respeito a inserção ou não das condutâncias de transferência da matriz admitância nodal, pois elas geram uma integral dependente do caminho na função energia. Com isso, é preciso encontrar uma aproximação para o caminho de integração, que pode ser encontrado em Athay et al. (1979) e Pai et al. (1996) ou desconsiderar as condutâncias de transferência, conforme realizado por Willems (1971) e Chiang (1989). Quando as condutâncias não são desprezadas, a função energia obtida por este procedimento não é uma função de Lyapunov. Por outro lado, as condutâncias de transferência não são pequenas, portanto o seu efeito não pode ser desprezado sem que erros consideráveis sejam introduzidos na análise.

Consideráveis estudos tem-se concentrado na determinação de uma função energia, para sistemas de potência com perdas. No entanto, Pai e Murthy (1973) estabeleceram uma nova função energia, mas válida apenas para sistemas de 2 máquinas, conectadas por uma linha de transmissão com perdas. A inclusão das condutâncias de transferência na função energia possui um sério problema no que diz respeito a violação do Teorema de Lyapunov. Diante deste problema houve um questionamento por parte de Kwanty et al. (1985) e Chiang (1989), sobre a existência de tais funções energias. Kwanty et al. (1985) estabeleceram uma função de Lyapunov local para análise de estabilidade em sistemas de potência,

mas com esta função, nada se pode garantir a respeito da região de atração do sistema de potência. Moon et al. (1999) desenvolveram uma função energia onde há a inclusão das condutâncias de transferência, supondo a razão  $\frac{R}{X}$  uniforme em todas as linhas de transmissão, mas não eliminou o problema de existência de integrais dependentes do caminho.

Preservando a estrutura da rede elétrica, pode-se dar um melhor tratamento aos modelos das cargas, neste caso pode-se considerar os estudos realizados por Bergen e Hill (1981) e Tsolas et al. (1985). Mais recentemente, Alberto e Bretas (1998) apresentaram uma função energia preservando a estrutura da rede, onde a potência ativa da carga foi modelada como um termo constante mais um termo dependente da frequência, e a potência reativa modelada como um polinômio com termos de impedância constante, corrente constante e potência constante. No caso da estrutura preservada, as condutâncias de transferência são razoavelmente pequenas se comparadas com a reatância da linha de transmissão, desta forma não se introduz grandes erros ao desprezá-las. Isto é uma vantagem, já que com a redução da rede aos nós das f.e.m.'s este fato não ocorre.

Uma maneira de se encontrar uma função de Lyapunov para sistemas de potência é modelá-lo como um sistema de Lure (Vidyasagar (1993) e Khalil (1996)), onde se tem um sistema linear realimentado por uma não linearidade. Desta maneira, a função de Lyapunov encontrada é uma função de Lyapunov do tipo de Lure e a análise de estabilidade é realizada através do critério multivariável de Popov. Considerando as cargas como impedância constante e desprezando o efeito das condutâncias de transferência Pai e Murthy (1973), Xiong (1998) apresentaram funções energia, baseadas neste procedimento. Hill e Chong (1989) e Davy e Hiskens (1997), apresentaram funções energia do tipo de Lure, onde a estrutura da rede é preservada.

Mesmo modelando o sistema através do problema de Lure, não se consegue incluir o efeito das condutâncias de transferência, já que a não linearidade viola a condição setorial. Esta violação também é encontrada quando consideram-se as cargas de potência ativa com termos dependentes da tensão, para sistemas onde

se tem a estrutura da rede preservada.

A maior dificuldade em encontrar uma função de Lyapunov para sistemas de potência multimáquinas está em inserir modelos mais detalhados dos elementos que constituem o sistema, tais como modelos de cargas e geradores e a inclusão das condutâncias de transferência.

Do ponto de vista do modelo de carga, ainda existem dois problemas em aberto nos estudos das funções de Lyapunov para sistemas de potência. O primeiro é encontrar uma função de Lyapunov para sistemas com a estrutura preservada, onde as cargas ativas sejam modeladas com termos dependentes da tensão. O segundo problema é encontrar uma função de Lyapunov para o sistema reduzido, considerando as condutâncias de transferência. Esses problemas são semelhantes, pois em ambos as cargas são modeladas como funções da tensão.

Mais recentemente, Rodrigues et al. (2000), desenvolveram uma extensão para o Princípio de Invariância de LaSalle, onde é permitido que a função auxiliar  $V$  possua, em algumas regiões limitadas, a derivada definida positiva. Com isto, torna-se um pouco mais fácil a obtenção de funções de Lyapunov, permitindo o tratamento de um maior número de problemas. Bretas e Alberto (2000a) usam estes resultados para construir uma função energia para um sistema com a rede reduzida, considerando condutâncias de transferência suficientemente pequenas.

## 1.2 Objetivos e Organização do Trabalho

Neste trabalho, o objetivo é apresentar uma função de Lyapunov para sistemas de potência, onde a inclusão das condutâncias de transferência é considerada. Para isto analisam-se os diferentes tipos de funções de Lyapunov, aplicadas para o estudo de estabilidade transitória em sistemas de potência.

O Capítulo 2 apresenta o modelo matemático de sistemas de potência multimáquinas, considerando todas as não linearidades inerentes ao sistema, que é usualmente empregado em estudos de estabilidade transitória.

A análise de estabilidade de sistemas não lineares é apresentada no Capítulo 3, onde são descritos os Teoremas de Lyapunov, o Princípio de Invariância de

LaSalle, a Extensão do Princípio de Invariância e o Critério de Popov para análise de estabilidade absoluta.

O conceito de métodos diretos é apresentado no Capítulo 4, onde define-se a região de atração e o método direto PEBS (*do inglês - Potential Energy Boundary Surface*). No Capítulo 5 são apresentadas as funções de Lyapunov comumente utilizadas para análise de estabilidade transitória. As funções de Lyapunov para sistemas de potência com perdas são apresentadas no Capítulo 6.

No Capítulo 7 são apresentados os resultados obtidos através dos programas implementados e o Capítulo 8 traz as conclusões.



## Capítulo 2

# Modelo Matemático de Sistemas de Potência Multimáquinas

### 2.1 Introdução

A equação de oscilação referente à  $i$ -ésima máquina síncrona, pode ser representada por uma equação diferencial de segunda ordem, que é obtida através do balanço de potência, ou seja, a diferença entre a potência mecânica injetada na máquina e a potência elétrica entregue à rede é igual à potência acelerante adicionada à potência de amortecimentos. Essa idéia fica mais clara com a equação abaixo:

$$M_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} + D_i \frac{d\delta_i}{dt} = P_{mi} - P_{gi} \quad (2.1)$$

onde  $P_{mi}$  é a potência mecânica entregue à máquina,  $P_{gi}$  é a potência elétrica gerada pela máquina,  $D_i$  é o coeficiente de amortecimento da máquina e  $M_i$  é a constante de inércia da máquina.

A potência elétrica  $P_{gi}$  é determinada pelas equações diferenciais não lineares que descrevem o comportamento da máquina síncrona e pelas equações algébricas que representam as máquinas síncronas e a rede de transmissão. Felizmente não se necessita de uma descrição tão detalhada e para efeito de estudos de estabilidade transitória, usualmente fazem-se as seguintes suposições:

1. A máquina síncrona é representada por uma fonte de tensão de magnitude

constante, determinada a priori pelas condições em regime permanente pré-falta, em série com uma reatância, denominada reatância transitória de eixo direto.

2. O ângulo de fase da tensão atrás da reatância transitória coincide com o ângulo do rotor  $\delta_i$ .
3. A potência mecânica de entrada  $P_{mi}$  mantém-se constante e igual ao seu valor pré-falta durante o intervalo de tempo de interesse (1–3 *seg*). Existem reguladores de atuação rápida em que esta suposição já não é mais válida.
4. Admite-se que a rede elétrica esteja em regime permanente senoidal, isto implica que as constantes de tempo do sistema de transmissão são desprezíveis se comparadas à frequência eletromecânica de oscilação. Com isto, pode-se modelar a rede através de equações algébricas utilizando-se a representação fasorial de correntes e tensões.
5. A modelagem da carga é um passo muito importante nos estudos de estabilidade transitória. O que diferenciará um modelo do outro, será a modelagem das cargas elétricas, que influenciará diretamente no termo  $P_{gi}$ . Quando as cargas são modeladas como impedâncias constantes, há a possibilidade de redução da rede aos nós internos dos geradores, esta modelagem do sistema de potência denomina-se modelagem clássica. A não redução da rede, permite a escolha de modelos mais elaborados para a representação das cargas, podendo ser composta por termos dependentes da tensão e ou frequência, para esta modelagem temos a estrutura da rede preservada.

A partir dessas suposições será apresentado o modelo matemático para sistemas multimáquinas. Considere a rede de transmissão do sistema elétrico constituída por  $n + m$  barras, onde os  $n$  primeiros barramentos estão conectados aos geradores e os  $m$  barramentos restantes são barras exclusivamente de carga. A representação do sistema é dada pela Fig 2.1.

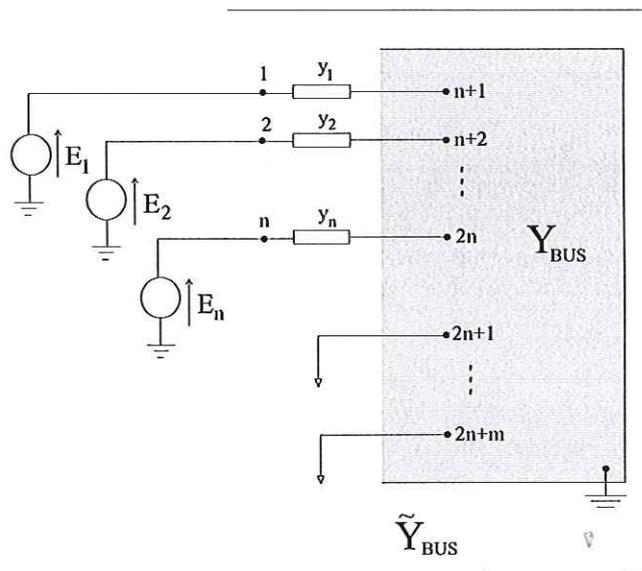


Figura 2.1: Representação do sistema multimáquinas

A matriz admitância nodal para o sistema de transmissão é dada por

$$Y_{Bus} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde as submatrizes possuem as seguintes dimensões:  $Y_1 : (n \times n)$ ,  $Y_2 : (n \times m)$ ,  $Y_3 : (m \times n)$  e  $Y_4 : (m \times m)$ .

Acrescentando à rede de transmissão as reatâncias transitórias e os  $n$  nós fictícios internos aos geradores, teremos uma nova representação da rede elétrica que será composta por  $2n + m$  nós,

$$\tilde{Y}_{Bus} = \begin{bmatrix} Y & -Y & 0 \\ -Y & Y_1 + Y & Y_2 \\ 0 & Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

a submatriz  $Y$  é uma matriz diagonal, de ordem  $(n \times n)$ , cujos elementos da diagonal são compostos pelas admitâncias transitórias de cada gerador.

## 2.2 Modelo Clássico

Para este modelo matemático será utilizado o modelo clássico das máquinas e será feita a seguinte imposição sobre o modelo das cargas:

- As cargas são representadas como impedâncias constantes calculadas na condição pré-falta, ou seja

$$y_{Li} = \frac{P_{Li} - jQ_{Li}}{|V_i|^2}, \quad i = n + 1, \dots, 2n + m \quad (2.4)$$

Quando as cargas são modeladas como impedâncias constantes é possível reduzir a rede aos nós das f.e.m.'s dos geradores de modo a facilitar o equacionamento. Com esta redução encontra-se uma expressão analítica para  $P_{gi}$  em termos de  $\delta_i$ 's e o sistema pode ser descrito apenas por um conjunto de equações diferenciais.

Com o intuito de obter tais equações, insere-se o efeito das cargas na rede elétrica. Para isto define-se a matriz admitância de cargas como sendo

$$Y_{Li} = \begin{bmatrix} Y_{Lg} & 0 \\ 0 & Y_{Ll} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

onde a submatriz diagonal  $Y_{Lg}$ , de ordem  $(n \times n)$ , é composta pelas admitâncias das cargas conectadas aos barramentos terminais dos geradores e  $Y_{Ll}$  é uma matriz diagonal de ordem  $(m \times m)$  composta pelas admitâncias de cargas conectadas aos demais barramentos que não possuem geradores conectados.

Com as admitâncias de carga inseridas na matriz admitância, temos a nova representação para a rede elétrica

$$\hat{Y}_{BUS} = \begin{bmatrix} Y & -Y & 0 \\ -Y & Y_1 + Y + Y_{Lg} & Y_2 \\ 0 & Y_3 & Y_4 + Y_{Ll} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

No estudo de estabilidade transitória está-se interessado primariamente na variação dos ângulos das máquinas como função do tempo e não nas variações das tensões nos barramentos, portanto, pode-se reduzir  $\hat{Y}_{BUS}$  aos  $n$  primeiros nós

da rede, que correspondem aos nós fictícios internos aos geradores e obter-se uma expressão analítica para  $P_{gi}$ . Para isto particiona-se  $\hat{Y}_{BUS}$  da seguinte maneira:

$$\hat{Y}_{BUS} = \begin{bmatrix} Y_A & Y_B \\ Y_C & Y_D \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

onde as submatrizes possuem as seguintes dimensões:  $Y_A : (n \times n)$ ,  $Y_B : (n \times n + m)$ ,  $Y_C : (n + m \times n)$  e  $Y_D : (n + m \times n + m)$ .

Como as cargas foram inseridas como impedâncias constantes na matriz admitância, a injeção de corrente em todas as barras é igual a zero, exceto naquelas barras fictícias que estão conectadas as f.e.m.'s dos geradores, com isso tem-se que

$$\begin{bmatrix} I_g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_A & Y_B \\ Y_C & Y_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_g \\ E \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

De acordo com (2.8) tem-se as seguintes relações

$$I_g = Y_A E_g + Y_B E \quad (2.9)$$

$$0 = Y_C E_g + Y_D E \quad (2.10)$$

De (2.10) pode-se isolar  $E$ :

$$E = -Y_D^{-1} Y_C E_g \quad (2.11)$$

Substituindo (2.11) em (2.9) obtém-se <sup>1</sup>

$$I_g = (Y_A - Y_B Y_D^{-1} Y_C) E_g = Y_{RED} E_g \quad (2.12)$$

A expressão para potência elétrica real injetada no nó " $i$ " pelo respectivo gerador é:

$$P_{gi} = Re [E_i I_i^*], \quad i = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

<sup>1</sup>Do ponto de vista computacional, o cálculo da matriz inversa  $Y_D^{-1}$  pode se tornar inviável em termos de tempo de processamento, portanto para evitar este problema a eliminação de Gauss é bastante eficiente para a determinação da matriz reduzida  $Y_{RED}$  a partir da matriz  $\hat{Y}_{BUS}$ .

Substituindo as seguintes expressões  $E_i = |E_i| \angle \delta_i$  e os elementos da matriz reduzida  $Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij} = |Y_{ij}| \angle \phi_{ij}$  em (2.13), temos que:

$$P_{gi} = \operatorname{Re} \left[ E_i \sum_{j=1}^n Y_{ij}^* E_j^* \right], \quad i = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

Desenvolvendo esta expressão obtém-se

$$P_{gi} = |E_i|^2 G_{ii} + \sum_{j=1; j \neq i}^n |E_i| |E_j| |Y_{ij}| \cos(\phi_{ij} - (\delta_i - \delta_j)) \quad (2.15)$$

$$i = 1, \dots, n$$

A função cosseno pode ser decomposta segundo a identidade trigonométrica  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ . Logo,

$$P_{gi} = |E_i|^2 G_{ii} + \sum_{j=1; j \neq i}^n |E_i| |E_j| |Y_{ij}| [\cos \phi_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + \sin \phi_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)], \quad i = 1, \dots, n \quad (2.16)$$

Define-se

$$|E_i| |E_j| |Y_{ij}| \cos \phi_{ij} = |E_i| |E_j| G_{ij} = D_{ij} \quad (2.17)$$

$$|E_i| |E_j| |Y_{ij}| \sin \phi_{ij} = |E_i| |E_j| B_{ij} = C_{ij} \quad (2.18)$$

Portanto,

$$P_{gi} = |E_i|^2 G_{ii} + \sum_{j=1; j \neq i}^n [C_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + D_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)] \quad (2.19)$$

$$i = 1, \dots, n$$

Para obtermos o modelo matemático clássico de um sistema multimáquinas, basta substituir a expressão do termo  $P_{gi}$  na equação de "swing" dada por (2.1), com isso teremos a seguinte equação dinâmica para um sistema composto por  $n$  geradores.

$$M_i \ddot{\delta}_i + D_i \dot{\delta}_i = P_{m,i} - |E_i|^2 G_{ii} - \sum_{j=1; j \neq i}^n [C_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + D_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)] \quad (2.20)$$

$$i = 1, \dots, n$$

Decompondo-se cada equação diferencial de segunda ordem (2.21) em duas equações de primeira ordem, obtém-se a representação abaixo

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \omega_i \\ M_i \dot{\omega}_i + D_i \omega_i = P_{mi} - |E_i|^2 G_{ii} - \sum_{j=1; j \neq i}^n [C_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + D_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)] \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.21)$$

## 2.3 Modelo Preservando a Estrutura da Rede

Para este modelo matemático não se reduz a matriz  $\tilde{Y}_{Bus}$  aos nós das f.e.m.'s dos geradores, com isso diz-se que a estrutura da rede é preservada. A não redução da rede possibilita a escolha de modelos de cargas mais elaborados, podendo ser composta por termos dependentes da tensão e ou da frequência. Porém, a modelagem matemática para o sistema elétrico, preservando a estrutura da rede, apresenta algumas desvantagens no que diz respeito ao tempo computacional despendido para simulação.

Considere  $E_i \angle \delta_i$  o fasor da f.e.m. do gerador conectado a barra "i" e  $V_i \angle \phi_i$  o fasor de tensão da barra "i", incluindo as barras externas dos geradores. O cálculo dos fasores de tensão  $V_i \angle \phi_i$  é obtido através das equações algébricas do fluxo de carga, e o módulo das tensões internas dos geradores,  $|E_i|$ , é calculado a partir de um fluxo de carga pré-falta e mantido constante durante toda a simulação. Os termos referentes às susceptâncias  $B_{ii}$  e  $B_{ij}$  são dados pelos elementos da matriz admitância nodal  $Y_{BUS}$ .

A potência elétrica gerada nas "n" barras internas dos geradores, que corresponde à potência elétrica fornecida pelo gerador à rede, é dada por:

$$P_{gi} = f_i(\delta, E, \phi, V) \quad (2.22)$$

$$= \text{Re} [E_i I_i^*] = \text{Re} \left[ E_i \angle \delta_i \left( \frac{E_i \angle \delta_i - V_i \angle \phi_i}{j x'_{di}} \right)^* \right] \quad (2.23)$$

$$= \frac{E_i V_i \sin(\delta_i - \phi_i)}{j x'_{di}}$$

$$i = 1, \dots, n$$

No barramento externo ao gerador "i" têm-se as seguintes equações algébricas

que expressam respectivamente o fluxo de potência ativa e reativa na rede

$$P_{li} = g_i(\delta, \phi, V) \quad (2.24)$$

$$= \frac{E_i V_i \sin(\phi_i - \delta_i)}{jx'_{di}} + \sum_{j=n+1}^{2n} B_{ij} V_i V_j \sin(\phi_i - \phi_j) +$$

$$+ \sum_{j=n+1}^{2n} G_{ij} V_i V_j \cos(\phi_i - \phi_j) \quad (2.25)$$

$$Q_{li} = h_i(\delta, \phi, V) \quad (2.26)$$

$$= \frac{V_i^2}{x'_{di}} - \frac{E_i V_i \sin(\delta_i - \phi_i)}{jx'_{di}} - B_{ii} V_i^2 - \sum_{j=n+1}^{2n} B_{ij} V_i V_j \cos(\phi_i - \phi_j) +$$

$$+ \sum_{j=n+1}^{2n} G_{ij} V_i V_j \sin(\phi_i - \phi_j) \quad (2.27)$$

$$i = 1, \dots, n$$

Similarmente, nas barras de carga tem-se respectivamente as injeções de potência ativa e reativa correspondente à carga da barra "i"

$$P_{li} = g_i(\delta, \phi, V) \quad (2.28)$$

$$= \sum_{j=n+1}^{2n+m} B_{ij} V_i V_j \sin(\phi_i - \phi_j) + \sum_{j=n+1}^{2n} G_{ij} V_i V_j \cos(\phi_i - \phi_j) \quad (2.29)$$

$$Q_{li} = h_i(\delta, \phi, V) \quad (2.30)$$

$$= -B_{ii} V_i^2 - \sum_{j=n+1}^{2n+m} B_{ij} V_i V_j \cos(\phi_i - \phi_j) +$$

$$+ \sum_{j=n+1}^{2n+m} G_{ij} V_i V_j \cos(\phi_i - \phi_j) \quad (2.31)$$

$$i = 2n + 1, \dots, 2n + m$$

A partir das expressões encontradas para potências ativa e reativa no modelo preservando a estrutura, pode-se reescrever esse conjunto de equações em uma

forma vetorial mais compacta, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{\delta} = 2\pi(f_R - f_o) = 2\pi\Delta f = \omega \\ M\dot{\omega} = P_m - D\omega - f(\delta, \phi, V) \\ 0 = P_c - g(\delta, \phi, V) \\ 0 = Q_c - h(\delta, \phi, V) \end{cases} \quad (2.32)$$

onde temos que:

$$\begin{aligned} \delta &= [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n]^T \\ f &= [f_1, f_2, \dots, f_n]^T \\ \omega &= [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^T \\ P_m &= [P_{m1}, P_{m2}, \dots, P_{mn}]^T \\ M &= \text{diag} [M_1, M_2, \dots, M_n] \\ D &= \text{diag} [D_1, D_2, \dots, D_n] \\ f(\delta, \phi, V) &= [f_1(\delta, \phi, V), f_2(\delta, \phi, V), \dots, f_n(\delta, \phi, V)]^T \\ g(\delta, \phi, V) &= [g_1(\delta, \phi, V), \dots, g_i(\delta, \phi, V), \dots, g_{n+m}(\delta, \phi, V)]^T \\ h(\delta, \phi, V) &= [h_1(\delta, \phi, V), \dots, h_i(\delta, \phi, V), \dots, h_{n+m}(\delta, \phi, V)]^T \\ P_c &= [P_{c1}, \dots, P_{ci}, \dots, P_{cn+m}]^T \\ Q_c &= [Q_{c1}, \dots, Q_{ci}, \dots, Q_{cn+m}]^T \end{aligned}$$

As expressões algébricas dadas por (2.32) não possuem nenhuma limitação quanto a representação ou cálculo, proporcionando ao modelo total liberdade para a representação das cargas nos barramentos, os termos  $P_{ci}$  e  $Q_{ci}$  são as potências ativas e reativas consumidas pelas cargas na barra "i".

## 2.4 Formulação Uma Máquina como Referência

A análise de estabilidade transitória em sistemas de potência é uma análise de sincronismo entre as máquinas e não de estabilidade do sistema. Situações consideradas como estáveis podem possuir todas as máquinas acelerando conjuntamente

após a eliminação do defeito. Este comportamento indesejável acarreta algumas dificuldades e inconsistências nas análises de estabilidade transitória.

Os modelos de sistemas de potência para estudos de estabilidade transitória de um modo geral, não possuem um ponto de equilíbrio estável após a eliminação do defeito, desta forma as máquinas síncronas podem acelerar continuamente, mesmo após a eliminação de tal distúrbio. Com a não existência de um ponto de equilíbrio na formulação original, há dificuldades de estudar-se o comportamento do sistema a não ser que se formule matematicamente o sistema em termos de sincronismo entre as máquinas.

Nesta formulação, a modelagem do sistema é realizada utilizando-se a máquina “ $n$ ” como referência. Desta forma, considere o sistema de  $n$  máquinas descrito pelo conjunto de equações diferenciais abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\omega}_1 = \frac{P_{m1} - P_{e1}}{M_1} \\ \vdots \\ \dot{\omega}_n = \frac{P_{mn} - P_{en}}{M_n} \\ \dot{\delta}_1 = \omega_1 \\ \vdots \\ \dot{\delta}_n = \omega_n \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Sem perdas de generalidades, a máquina “ $n$ ” será tomada como referência. Para isto, basta subtrair de todas as equações de (2.33) a equação da  $n$ -ésima, máquina tomada como referência, obtendo um novo conjunto de equações que

representará o sistema.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\omega}_{1n} = \omega_1 - \omega_n = \frac{P_{m1} - P_{e1}}{M_1} - \frac{P_{mn} - P_{en}}{M_n} \\ \vdots \\ \dot{\omega}_{(n-1)n} = \omega_{(n-1)} - \omega_n = \frac{P_{m(n-1)} - P_{e(n-1)}}{M_{(n-1)}} - \frac{P_{mn} - P_{en}}{M_n} \\ \dot{\delta}_{1n} = \dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_n = \omega_1 - \omega_n \\ \vdots \\ \dot{\delta}_{(n-1)n} = \dot{\delta}_{(n-1)} - \dot{\delta}_n = \omega_{(n-1)} - \omega_n \end{array} \right. \quad (2.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\omega}_n = \frac{P_{mn} - P_{en}}{M_n} \\ \dot{\delta}_n = \omega_n \end{array} \right.$$

Este novo conjunto de equações representado por (2.34) é composto por  $2(n-1)$  equações mais a equação da máquina utilizada como referência. Para se estudar o sincronismo, observe que as primeiras  $2(n-1)$  equações diferenciais compõem um subsistema que é desacoplado das equações da máquina de referência. Este subsistema é conhecido como a formulação do problema de estabilidade utilizando uma máquina como referência.

O estudo de estabilidade desse novo subsistema é equivalente a estudar o sincronismo das máquinas do sistema original, dado por (2.33), no sentido de que no equilíbrio deste subsistema, todas as máquinas possuem a mesma velocidade e a mesma aceleração. Matematicamente tem-se:

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n \quad (2.35)$$

que é correspondente a

$$\frac{P_{m1} - P_{e1}}{M_1} = \frac{P_{m2} - P_{e2}}{M_2} = \dots = \frac{P_{mn} - P_{en}}{M_n} \quad (2.36)$$

## 2.5 Formulação Centro de Ângulo como Referência

A formulação utilizando o centro de ângulo (COA) como referência, transforma o sistema original de análise de sincronismo entre as máquinas num problema de estabilidade de um novo conjunto de equações diferenciais, que é por sua vez, equivalente ao estudo do sincronismo no sistema original.

A idéia do centro de ângulo se assemelha à idéia do centro de massa na mecânica. Define-se o COA de um sistema como sendo um ângulo formado pela média aritmética dos ângulos de todos os geradores, ponderada pelas constantes de inércia das máquinas.

$$\delta_o = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^n M_i \delta_i \quad (2.37)$$

sendo

$$M_T = \sum_{i=1}^n M_i$$

Derivando-se (2.37) em relação ao tempo, encontra-se a velocidade do COA:

$$\omega_o = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^n M_i \omega_i \quad (2.38)$$

Os ângulos dos rotores das máquinas e os ângulos de fase nos barramentos referidos ao COA são definidos por:

$$\theta_i = \delta_i - \delta_o, \quad \text{para } i = 1, \dots, n+1 \quad (2.39)$$

$$\theta_i = \phi_i - \delta_o, \quad \text{para } i = n+2, \dots, n+m \quad (2.40)$$

Derivando (2.39) em relação ao tempo, temos a velocidade relativa ao COA:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_o = \omega_i - \omega_o \\ \dot{\theta}_i &= \tilde{\omega}_i \end{aligned} \quad (2.41)$$

Note que todos os  $\theta_i$ 's e  $\tilde{\omega}_i$ 's não são linearmente independentes. Da definição de  $\theta_i$  tem-se que

$$\sum_{i=1}^n M_i \theta_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n M_i \dot{\theta}_i = 0$$

portanto, para a resolução do problema é necessário somente a utilização de  $2n - 2$  equações diferenciais.

A partir das variáveis ângulo e velocidade referidos ao COA, pode-se obter o modelo clássico e o modelo preservando a estrutura referidos ao centro de ângulo, desprezando o efeito do amortecimento.

### 2.5.1 Modelo Clássico Referido ao COA

Esta modelagem é obtida derivando (2.38) em relação ao tempo, que nos fornece a seguinte relação:

$$M_T \dot{\omega}_o = \sum_{i=1}^n M_i \dot{\omega}_i$$

substituindo a expressão para  $\dot{\omega}$  dada por (2.21), na equação anterior tem-se

$$M_T \dot{\omega}_o = \sum_{i=1}^n (P_{mi} - P_{gi} - D_i \omega_i) = P_{COA} - \sum_{i=1}^n D_i \omega_i \quad (2.42)$$

$P_{COA}$  é o desbalanço de potência total existente no sistema, já que é o total de potência mecânica injetada na máquina menos o total de potência elétrica injetada no sistema elétrico. A expressão para esse desbalanço de potência é obtida substituindo (2.20) em (2.42), desta forma temos que

$$P_{COA} = \sum_{i=1}^n (P_{mi} - |E_i|^2 G_{ii}) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n D_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) \quad (2.43)$$

A partir da expressão acima pode-se perceber que os termos em seno foram eliminados, pois representam a parcela de potência ativa transmitida de um gerador ao outro e não é absorvida pelas cargas.

O sistema de equações que representa o sistema nesse novo conjunto de variáveis, é dado pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = \tilde{\omega}_i \\ \dot{\tilde{\omega}}_i = \dot{\omega}_i - \dot{\omega}_o, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.44)$$

Substituindo (2.38) e (2.42), na equação anterior tem-se

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = \tilde{\omega}_i \\ \dot{\tilde{\omega}}_i = - \left( D_i - \frac{M_i}{M_T} \sum_{i=1}^n D_i \right) \tilde{\omega} - \left( D_i - \frac{M_i}{M_T} D_T \right) \dot{\delta}_o + \frac{P_{mi} - P_{ei}}{M_i} - \frac{1}{M_T} P_{COA} \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.45)$$

## 2.5.2 Modelo Preservando a Estrutura Referido ao COA

As equações que descrevem o modelo preservando a estrutura referido ao COA, são obtidas similarmente ao modelo da Seção 2.5.1.

Para esta modelagem matemática, (2.42) fica da seguinte forma:

$$M_T \dot{\omega}_o = \sum_{i=1}^n P_{mi} - \sum_{i=n+1}^{2n} P_{ei} = P_{COA}, \quad (2.46)$$

a partir de (2.44) e (2.32) desprezando o efeito de amortecimento, tem-se que

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = \tilde{\omega}_i \\ \dot{\tilde{\omega}}_i = \frac{P_{mi} - \tilde{f}(\delta, \phi, V)}{M_i} - \frac{1}{M_T} P_{COA} \\ 0 = \tilde{P}_c - \tilde{g}(\delta, \phi, V) \\ 0 = \tilde{Q}_c - \tilde{h}(\delta, \phi, V) \end{cases} \quad (2.47)$$

sendo  $\tilde{P}_c$ ,  $\tilde{Q}_c$ ,  $\tilde{f}(\delta, \phi, V)$ ,  $\tilde{g}(\delta, \phi, V)$  e  $\tilde{h}(\delta, \phi, V)$  termos em que todas as variáveis ângulo de fase estão referenciadas ao COA.

## Capítulo 3

# Análise de Estabilidade em Sistemas Não Lineares

O sistema de potência é modelado por um conjunto de equações diferenciais não lineares, conforme pode ser observado no Capítulo 2. Desta forma este capítulo introduzirá algumas definições úteis para a análise de estabilidade em sistemas não lineares, pelo método direto sem que haja a necessidade de integração numérica do conjunto de equações diferenciais, que representa a dinâmica do sistema elétrico.

### 3.1 Sistemas Autônomos

O sistema de potência é um sistema autônomo, ou seja, não depende da variável tempo ( $f(t, x) = f(x)$ ). Nesta seção serão apresentadas algumas considerações sobre tais sistemas.

Seja o sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.1}$$

onde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função continuamente diferenciável em um domínio  $D \subset \mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que  $\bar{x} \in D$  seja um ponto de equilíbrio de (3.1), tal que:

$$f(\bar{x}) = 0$$

Suponha  $\bar{x} \neq 0$  e considere a seguinte mudança de variáveis  $y = x - \bar{x}$ , a derivada de  $y$  é dada por

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} g(y), \text{ onde } g(0) = 0$$

desta forma o sistema  $\dot{y} = g(y)$ , na variável  $y$ , possui o ponto de equilíbrio na origem. Sem perdas de generalidades podemos sempre assumir que  $f(x)$  satisfaz  $f(0) = 0$  e estudar a estabilidade da origem  $x = 0$ .

Por conveniência iremos apresentar os teoremas e definições com o ponto de equilíbrio na origem de  $\mathbb{R}^n$ , ou seja  $\bar{x} = 0$ .

## 3.2 Método de Lyapunov

O estudo da estabilidade através de métodos diretos é vantajoso porque permite analisar a estabilidade sem o conhecimento da solução da equação diferencial. Além de estudar a estabilidade, o método nos fornece um procedimento para estimar a área de atração.

O método de Lyapunov é baseado nas idéias de Lagrange (1800): *“Se uma certa posição de repouso de um sistema mecânico conservativo é um ponto de mínimo da energia potencial, então esta é uma posição de equilíbrio estável. Caso contrário, a posição é instável”*. Lyapunov generalizou as idéias de Lagrange e estabeleceu o seguinte Teorema:

**Teorema 3.1** *Seja  $x = 0$  um ponto de equilíbrio de (3.1) e uma função  $V : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável na vizinhança  $D$  de  $x = 0$ , tal que*

$$V(0) = 0 \text{ e } V(x) > 0 \text{ em } D - \{0\} \tag{3.2}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ em } D \tag{3.3}$$

*então,  $x = 0$  é estável, por outro lado se tivermos*

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ em } D - \{0\}$$

*o ponto  $x = 0$  é assintoticamente estável.*

Este Teorema foi demonstrado por Lyapunov e pode ser encontrado em Vidyasagar (1993) e Khalil (1996). Para efeito de tornar o texto autosuficiente apresenta-se a demonstração a seguir.

**Dem:** Dado  $\epsilon > 0$  precisamos mostrar que existe  $\delta > 0$  tal que  $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t > 0$ . Como  $\epsilon$  é arbitrário escolha-se  $r \in (0, \epsilon]$  tal que

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} \subset D$$

seja  $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$ . Da equação (3.2) conclui-se que  $\alpha > 0$ . Escolha  $\beta \in (0, \alpha)$ , e defina

$$\Omega_\beta = \{x \in B_r \mid V(x) \leq \beta\}$$

$\Omega_\beta$  está no interior de  $B_r$ , conforme a Fig. 3.1. O conjunto  $\Omega_\beta$  tem a propriedade de que qualquer trajetória partindo de dentro de  $\Omega_\beta$ , permanece dentro de  $\Omega_\beta$  para todo  $t \geq 0$ , pois conforme (3.3),

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq \beta, \quad \forall t \geq 0,$$

ou seja  $\Omega_\beta$  é um conjunto positivamente invariante

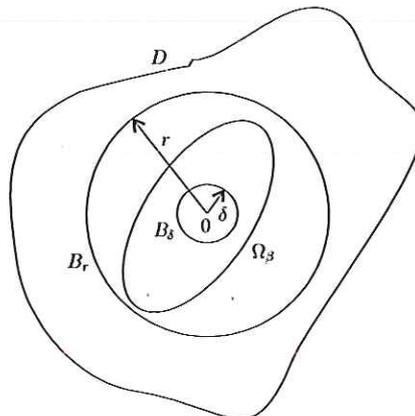


Figura 3.1: Representação geométrica dos conjuntos do Teorema 3.1.

Como  $\Omega_\beta$  é um conjunto compacto, podemos concluir que a equação (3.1) possui uma solução única definida para todo  $t \geq 0$ , onde  $x(0) \in \Omega_\beta$ . Se  $V(x)$  é contínua e  $V(0) = 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) < \beta$$

então

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$$

e

$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_r$$

portanto

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \epsilon, \forall t \geq 0$$

nos mostra que o ponto de equilíbrio  $x = 0$  é estável. Para mostrar a estabilidade assintótica há a necessidade de mostrar que  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , isto é, para todo  $a > 0$  existe  $T > 0$ , tal que  $\|x(t)\| < a$ , para todo  $t > T$ . Sabemos que para todo  $a > 0$ , podemos escolher  $b > 0$  tal que  $\Omega_b \subset B_a$ . O conjunto  $\Omega_b$  é compacto e positivamente invariante, logo, a solução iniciando em  $\Omega_b$  está definida para todo  $t$  dentro de  $\Omega_b$ .  $\dot{V}(x) < 0$  exceto na origem, logo  $V(x(t))$  é monotonicamente decrescente e limitado inferiormente por zero, portanto,

$$V(x(t)) \rightarrow c \geq 0, \text{ para } t \rightarrow \infty$$

Iremos utilizar um argumento de contradição para mostrar que  $c = 0$ . Suponha que  $c > 0$ . Pela continuidade de  $V(x)$ , existe  $d > 0$  tal que  $B_d \subset \Omega_c$ . O limite de  $V(x(t)) \rightarrow c > 0$  implica que a trajetória de  $x(t)$  estará fora da bola  $B_d$  para algum  $t \geq 0$ . Tomando  $-\gamma = \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x)$ , então por (3.3)  $-\gamma < 0$ , desta forma temos:

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau \leq V(x(0)) - \gamma t$$

Portanto o lado direito da equação acima torna-se negativo, desta forma a desigualdade contradiz a suposição  $c > 0$ .  $\square$

A função contínua e diferenciável  $V(x)$  satisfazendo (3.2) e (3.3) é conhecida como função de Lyapunov. A superfície  $V(x) = c$ , para  $c > 0$ , é chamada de curva de nível ou superfície de Lyapunov.

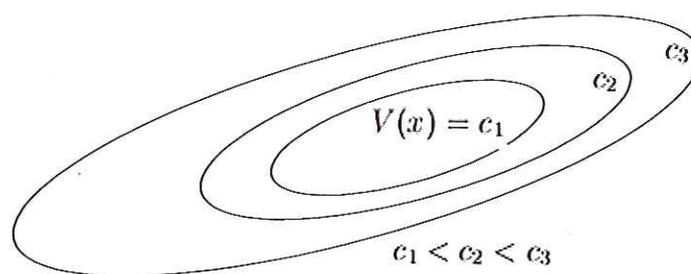


Figura 3.2: Curvas de nível da função de Lyapunov

A condição  $\dot{V} \leq 0$  estabelece que quando a trajetória cruzar a superfície de Lyapunov  $V(x) = c$ , ela irá se mover para dentro do conjunto  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq c\}$  e não sairá. Quando  $\dot{V} < 0$ , a trajetória se movimentará de uma superfície de Lyapunov para uma outra superfície de Lyapunov com o  $c$  menor, como o valor de  $c$  é decrescente isso implicará que a trajetória irá se aproximar da origem para  $t \rightarrow \infty$ . Caso tenhamos  $\dot{V} \leq 0$ , não temos certeza de que a trajetória se aproximará da origem, mas podemos concluir que a origem é estável, desde que a trajetória esteja contida dentro da bola  $B_\epsilon$  para uma dada condição inicial  $x(0)$  permanecendo no interior da superfície de Lyapunov que está contida dentro da bola.

### 3.3 Princípio de Invariância de LaSalle

Para determinados sistemas a função de Lyapunov escolhida pode falhar na análise de estabilidade assintótica de acordo com o Teorema 3.1, onde o maior problema seria encontrar uma função de Lyapunov que possuísse derivada definida negativa ao longo das trajetórias do sistema. Em muitas situações a origem é assintoticamente estável e a função de Lyapunov é apenas semi definida negativa, logo o Teorema 3.1 garante apenas estabilidade e não estabilidade assintótica. Ainda assim, explorando características do campo vetorial, pode-se concluir estabilidade assintótica, para solucionar esse caso temos que estabelecer que nenhuma trajetória poderá permanecer para sempre em pontos onde  $\dot{V} = 0$ , exceto

na origem, portanto a origem é assintoticamente estável. LaSalle estudou e enunciou um teorema tratando deste problema. Antes de enunciarmos o teorema do Princípio de Invariância de LaSalle, será necessário introduzir algumas definições.

**Definição 3.2** *Tomando  $x(t)$  como solução de (3.1). Um ponto  $p$  é denominado ponto limite positivo de  $x(t)$  se existe uma sequência  $t_n$ , com  $t_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , tal que  $x(t_n) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ . O conjunto de todos os pontos limites positivos de  $x(t)$  é denominado conjunto limite positivo de  $x(t)$  ou  $\omega$ -limite de  $x(t)$ .*

**Definição 3.3** *Um conjunto  $M$  é dito ser um conjunto invariante se*

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad t \in \mathbb{R}$$

*isto é, se uma solução pertence ao conjunto  $M$  em um instante de tempo qualquer, então a solução pertencerá a  $M$  para todo tempo passado ou futuro. Um conjunto  $M$  é dito ser positivamente invariante se:*

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad t \geq 0$$

**Teorema 3.4 (Princípio de Invariância de LaSalle)** *Sejam  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções de classe  $C^1$ . Seja  $L$  uma constante real tal que  $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$  seja limitado. Admita que  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in \Omega_L$  e defina  $E := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) = 0\}$ . Seja  $B$  o maior conjunto invariante contido em  $E$ . Então, toda solução de (3.1) iniciando em  $\Omega_L$  converge para  $B$  quando  $t \rightarrow \infty$ .*

Este teorema foi demonstrado por LaSalle, a demonstração não será apresentada e pode ser encontrada em Vidyasagar (1993) e Khalil (1996).

É interessante interpretar geometricamente este teorema. Para isto será utilizada a Figura 3.3 na qual apresenta-se um caso simples da aplicação do Teorema de LaSalle em dimensão 2. Como exigido pelo Teorema 3.4,  $\Omega_L$  é um conjunto limitado. Suponha que o maior conjunto invariante contido em  $E$  seja composto

apenas pelo ponto de equilíbrio estável  $x_s$ . Sabe-se que dentro de  $\Omega_L$ , a derivada de  $V$  é menor ou igual a zero. Desenvolvendo  $\dot{V}$  pela regra da cadeia obtém-se:

$$\dot{V} = \langle \text{grad}(V), \dot{x} \rangle = \langle \text{grad}(V), f \rangle \leq 0$$

A desigualdade anterior mostra que o produto escalar do vetor gradiente  $V$  com o vetor  $f$  deve ser menor ou igual a zero. Isto significa que o ângulo entre estes vetores deve ser maior ou igual a  $90^\circ$ , como mostra a Figura 3.3. Esta relação entre estes vetores existe para todos os pontos da curva de nível  $\Omega_l$  da função  $V$ , logo, todas as soluções entram para dentro da região delimitada pela curva de nível  $\Omega_l$ . Isto vale para todas as curvas de nível internas à  $\Omega_L$ , logo toda solução iniciando em  $\Omega_L$  deverá convergir para o ponto de equilíbrio  $x_s$ .

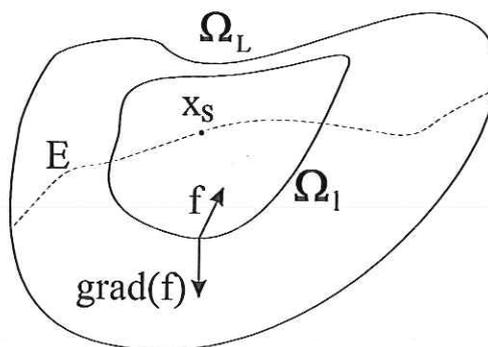


Figura 3.3: Representação geométrica para o Teorema 3.4

### 3.4 Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle

A análise de estabilidade assintótica com o Teorema 3.4, exige que se tenha uma função  $V$  definida positiva, tal que ao longo de suas trajetórias  $\dot{V} \leq 0$ . O grande impecilho é encontrar uma função candidata a função de Lyapunov que satisfaça a segunda condição, a extensão do princípio de invariância proposta por Rodrigues

et al. (2000) requer condições menos restritivas onde permite-se que  $\dot{V}$  seja positiva em algumas regiões, desta forma encontrar uma função de Lyapunov pode ser mais fácil.

**Teorema 3.5 (Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle) :** *Sejam  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções de classe  $C^1$ . Seja  $L \in \mathbb{R}$  uma constante tal que  $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$  seja limitado. Seja  $C := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) > 0\}$ , e admita que  $\sup_{x \in C} V(x) = l < L$ . Defina  $\bar{\Omega}_l = \{x \in \Omega_L : V(x) \leq l\}$  e  $E := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$ . Seja  $B$  o maior conjunto invariante de (3.1) contido em  $E$ . Então, toda solução de (3.1) iniciando em  $\Omega_L$  converge para o conjunto invariante  $B$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Além disto, se  $x_0 \in \bar{\Omega}_l$ , então  $\varphi(t, x_0) \in \bar{\Omega}_l, \forall t \geq 0$  e  $\varphi(t, x_0)$  tende para o maior conjunto invariante de (3.1) contido em  $\bar{\Omega}_l$ .*

A demonstração do Teorema 3.5 pode ser encontrada em Rodrigues et al. (2000). Para o melhor entendimento da extensão do princípio de invariância vamos utilizar a interpretação geométrica ilustrada pela Fig. 3.4.

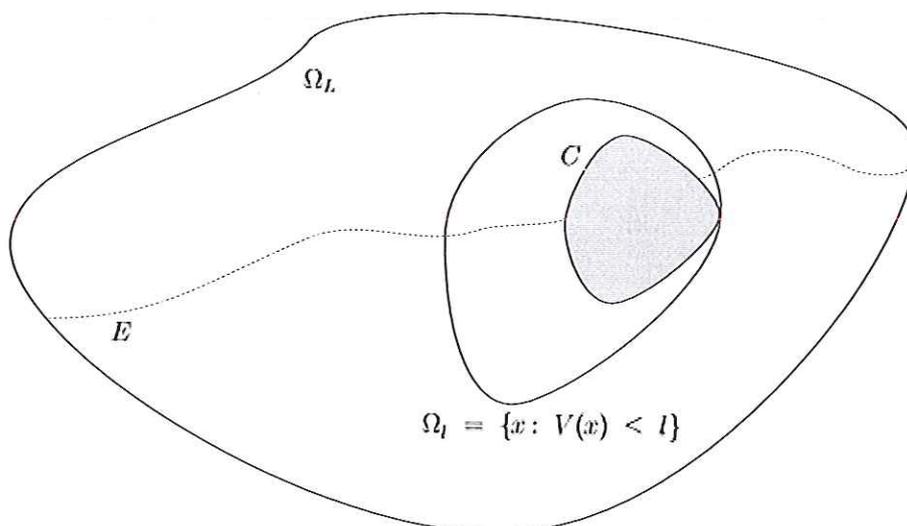


Figura 3.4: Interpretação geométrica da extensão do princípio de invariância

Conforme a hipótese do Teorema 3.5 o conjunto  $\Omega_L$  é limitado. A derivada de  $V$  ao longo das soluções dentro do conjunto  $\Omega_L$  é não positiva, exceto dentro do conjunto  $C$  onde é positiva. Por hipótese o conjunto  $C$  nunca atinge a fronteira de  $\Omega_L$ , uma vez que  $l < L$ . O Teorema 3.5 garante que todas as soluções de (3.1) iniciando dentro de  $\Omega_L$  convergem para o maior conjunto invariante contido em  $E$ . Se em particular, o maior conjunto invariante contido em  $E$  estiver contido em  $\bar{\Omega}_l$ , então todas as soluções com condição inicial em  $\Omega_L$  tendem para o maior conjunto invariante contido em  $\bar{\Omega}_l$ . Uma vez dentro de  $\bar{\Omega}_l$ , as soluções não saem deste conjunto o qual é uma estimativa do atrator. Dentro de  $\bar{\Omega}_l$ , duas coisas podem acontecer, ou as soluções tendem para o conjunto  $x \in \bar{\Omega}_l : \dot{V}(x) = 0$ , ou as soluções permanecem entrando e saindo do conjunto  $C$  indefinidamente.

**Observação 3.6** *O  $\sup_{x \in C} V(x)$  é atingido em  $\partial C$ . Se em particular  $\bar{C}$  for um conjunto convexo e  $V$  uma função convexa, então a técnica de multiplicadores de Lagrange é muito útil para o cálculo deste supremo.*

**Teorema 3.7 (Versão Global da Extensão do Princípio de Invariância)**

*Sejam  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções de classe  $C^1$ . Seja  $C := \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) > 0\}$ . Admita que  $l := \sup_{x \in C} V(x) \in \mathbb{R}$  e que,  $\bar{\Omega} := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq l\}$  seja limitado. Seja  $E := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$  e seja  $B$  o maior conjunto invariante contido em  $E$ . Então toda solução,  $\varphi(t, x_0)$ , de (3.1) que é limitada para  $t \geq 0$ , e tende para o conjunto invariante  $B$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Além disto, se  $x_0 \in \bar{\Omega}_l$  então  $\varphi(t, x_0)$  é definido para todo  $t \geq 0$ , e  $\varphi(t, x_0)$  tende para o maior conjunto invariante de (3.1) contido em  $\bar{\Omega}_l$ .*

O exemplo a seguir ilustra a potencialidade da extensão do princípio de invariância de LaSalle e prepara as idéias para a aplicação em sistemas de potência.

**Exemplo 3.8** *Considere o sistema abaixo*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - f(x_1, x_2)x_2 \end{cases}$$

A função abaixo é uma função de Lyapunov para o sistema

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$$

e sua derivada ao longo das trajetórias é dada por

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2)x_2^2$$

Considerando  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ . O conjunto  $C$  é limitado e é dado por:

$$C := \{(x_1, x_2) \in \omega_L : (x_1^2 + x_2^2 - 1) < 0; x_2 \neq 0\}$$

O conjunto  $C$  é um disco aberto de raio unitário com o centro na origem excluindo o segmento no qual  $x_2 = 0$ . Calculando-se  $l$  obtém-se:

$$l = \sup_{x \in C} V(x_1, x_2) = \sup_{x \in C} \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Então,

$$\bar{\Omega}_l = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} \leq \frac{1}{2}$$

De acordo com a versão global da extensão do Princípio de Invariância, todas as soluções com condição inicial no  $\mathbb{R}^2$  convergem para o maior conjunto invariante contido em  $E$ , o qual é composto pelo disco fechado de raio unitário centrado na origem em união com o eixo  $x_2 = 0$ .

### 3.5 Problema de Lure

O problema de Lure consiste em utilizar a teoria de Lyapunov em uma classe particular de problemas não lineares. Muitos dos sistemas físicos, podem ser

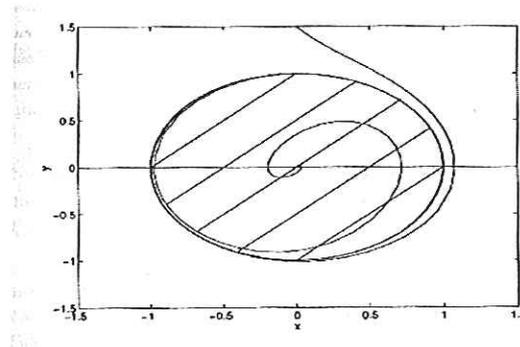


Figura 3.5: Região de atração para o Exemplo 3.8

representados como um sistema dinâmico linear, realimentado por um elemento não linear conforme mostrado na Fig. 3.6. Na Seção 5.1.2 mostraremos que os sistemas de potência podem ser representados nesta forma.

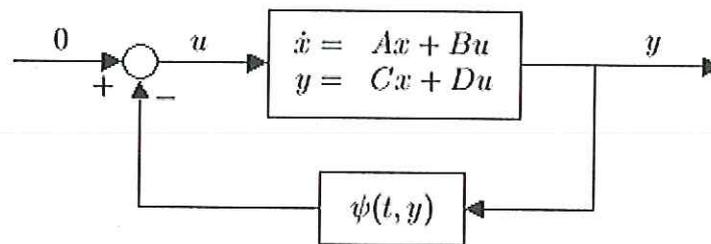


Figura 3.6: Representação do problema de Lure.

A seguir são apresentadas algumas definições úteis para a análise de estabilidade absoluta pelo critério de Popov, que será apresentado na Seção 3.5.1.

**Definição 3.9** Sendo  $n, p, l$  inteiros,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$  e  $D \in \mathbb{R}^{l \times p}$ .

1. Então o par  $(A, B)$  é dito controlável se

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

2. O par  $(C, A)$  é dito observável se

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ AC \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

O par  $(A, B)$  é controlável se e somente se o par  $(B^T, A^T)$  é observável.

**Definição 3.10** Sendo  $G(\cdot)$  matriz racional própria. Então  $(A, B, C, D)$  é dito ser uma realização de  $G(\cdot)$  se

$$G(\cdot) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

A realização é dita ser mínima se em adição o par  $(A, B)$  é controlável e o par  $(C, A)$  é observável.

Nesta seção supondo que a entrada externa seja nula,  $r = 0$ , será estudado o comportamento de um sistema não forçado, representado por

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.4}$$

$$y = Cx + Du \tag{3.5}$$

$$u = -\psi(t, y) \tag{3.6}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u, y \in \mathbb{R}^p$ ,  $(A, B)$  é controlável,  $(A, C)$  é observável e  $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  é uma não linearidade variante no tempo, contínua em  $t$  e localmente Lipschitz em  $y$ . A matriz função de transferência do sistema linear é dada pela realização mínima  $(A, B, C, D)$  e é estritamente própria:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \tag{3.7}$$

A não linearidade  $\psi(t, y)$  deve satisfazer a condição de setor. Para descrever essa condição vamos inicialmente partir do princípio de que  $G(s)$  seja uma função de transferência com entrada/saída simples ( $p = 1$ ), neste caso  $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a condição do setor se existem constantes  $a$  e  $b$  com  $a < b$  tal que

$$[\psi(t, y) - ay]^T [by - \psi(t, y)] \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$

Essa situação é melhor representada pela Fig. 3.7

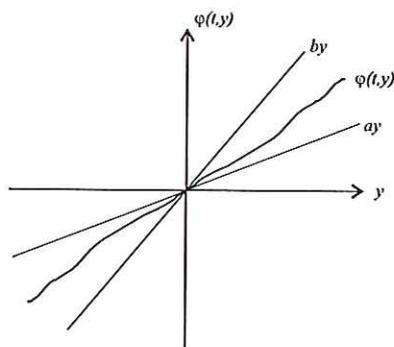


Figura 3.7: Condição setorial.

**Definição 3.11 Estabilidade Absoluta :** *Considere o sistema (3.4)-(3.6), onde  $\psi(t, y)$  satisfaz a condição do setor  $[a, b]$ , então o sistema é absolutamente estável se a origem é globalmente uniformemente assintoticamente estável para qualquer não linearidade pertencente ao setor.*

A estabilidade assintótica da origem será investigada utilizando uma função candidata a função de Lyapunov, conhecida como função de Lyapunov de Lure

$$V(x) = x^T P x + \eta \int_0^y \psi^T(\sigma) K d\sigma; P = P^T > 0, \eta \geq 0.$$

Agora consideraremos de uma maneira mais geral o setor definido por  $[K_{min}, K_{max}]$ , onde  $K = K_{max} - K_{min}$  é uma matriz simétrica definida positiva, sendo  $K_{min} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_p)$  e  $K_{max} = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_p)$ .

Para a função candidata a função de Lyapunov, temos uma matriz  $P$  desconhecida, então estudaremos condições para garantir a existência de  $P$  para que  $\dot{V}$  seja definida negativa ao longo das trajetórias do sistema, para todas as não linearidades que satisfaçam a condição do setor. Na seção 3.5.1 essas condições serão impostas sobre a função de transferência no domínio da frequência.

**Definição 3.12** *A matriz de transferência  $p \times p$  racional própria  $Z(s)$  é dita real positiva se*

- $Z(s)$  possui elementos que são analíticos para  $\text{Re}[s] > 0$ ,
- $Z^*(s) = Z(s^*)$ , para qualquer  $\text{Re}[s] > 0$ , e

- $Z^T(s^*) + Z(s)$  é semidefinida positiva para  $Re[s] > 0$

onde \* significa complexo transposto conjugado. A função de transferência  $Z(s)$  é denominada real e estritamente positiva se  $Z(s - \epsilon)$  for real positiva para algum  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno.

**Lema 3.13** Sendo  $Z(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  uma matriz de transferência  $p \times p$ , onde  $\det D \neq 0$ . Então  $Z(s)$  é real e estritamente própria se e somente se

- $Re[\lambda_i(A)] < 0, \forall i$ , e
- $Z(j\omega) + Z^T(-j\omega) > 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$ .

Quando  $p = 1$  a condição no domínio da frequência de acordo com a Definição anterior se reduz a  $Re[Z(j\omega)] \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$ , que é exatamente a condição de Nyquist para que  $Z(j\omega)$  pertença ao semi plano direito complexo.

As funções de transferência reais e estritamente positivas aparecerão como consequência do Lema abaixo.

**Lema 3.14 (Kalman - Yakubovich - Popov)** Sendo  $Z(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  uma matriz de transferência  $p \times p$ , onde  $A$  é Hurwitz,  $(A, B)$  é controlável e  $(A, C)$  é observável. Então  $Z(\cdot)$  é real e estritamente positiva se e somente se existir uma matriz definida positiva  $P$ , as matrizes  $W$  e  $L$ , e constante positiva  $\epsilon$  tal que

$$PA + A^T P = -L^T L - \epsilon P \quad (3.9)$$

$$PB = C^T - L^T W \quad (3.10)$$

$$W^T W = D + D^T \quad (3.11)$$

### 3.5.1 Critério de Popov

Considere o sistema (3.4)-(3.6), suponha que  $A$  seja Hurwitz e  $\psi(\cdot)$  seja uma não linearidade invariante no tempo que satisfaz a condição do setor  $[K_{min}, K_{max}]$ , com  $K_{min} = 0$ , isto é

$$\psi^T(y)[\psi(y) - Ky] \geq 0, \forall t \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^p$$

onde  $K = \text{diag}[b_1, b_2, \dots, b_p]$  é uma matriz simétrica definida positiva. Considere a função de Lyapunov do tipo de Lure

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T P x + 2\eta \int_0^y \psi^T(\sigma) K d\sigma; \quad P = P^T > 0, \eta \geq 0 \\ &= x^T P x + 2\eta \int_0^y \sum_{i=1}^p \psi_i(\sigma_i) b_i d\sigma_i \end{aligned}$$

A derivada de  $V(x)$  ao longo das trajetórias do sistema (3.4)-(3.6) é dada por

$$\dot{V}(x) = x^T (PA + A^T P)x - 2x^T PB\psi(y) + 2\eta\psi^T(y)KC[Ax - B\psi(y)]$$

Desde que  $-2\psi^T(\psi - Ky) \geq 0$ , podemos adicionar esse termo na igualdade acima e obter um limite superior para  $\dot{V}(t, x)$ . Então

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq x^T (PA + A^T P)x - 2x^T PB\psi(y) + 2\eta\psi^T(y)KC[Ax - B\psi(y)] - \\ &\quad - 2\psi(y)] - 2\psi^T[\psi(y) - Ky] \\ &= x^T (PA + A^T P)x - 2x^T (PB - \eta A^T C^T K - C^T K)\psi(y) - \\ &\quad - \psi^T(y)(2I + \eta KCB + \eta B^T C^T K)\psi(y) \end{aligned}$$

deve-se escolher  $\eta$  tal que

$$2I + \eta KCB + \eta B^T C^T K \geq 0$$

essa escolha pode ser feita fazendo  $\eta$  pequeno, uma vez que  $I$  é definida positiva.

Tomando

$$2I + \eta KCB + \eta B^T C^T K = W^T w$$

e supondo que existem matrizes  $P = P^T > 0$  e  $L$  e a constante  $\epsilon > 0$  tal que

$$PA + A^T = -L^T L - \epsilon P \quad (3.12)$$

$$PB = C^T K + \eta A^T C^T K - L^T W \quad (3.13)$$

então

$$\dot{V}(x) \leq -\epsilon x^T P x - [Lx - W\psi(y)]^T [Lx - W\psi(y)] \quad (3.14)$$

$$\leq -\epsilon x^T P x \quad (3.15)$$

A existência de  $P$ ,  $L$  e  $\epsilon$  satisfazendo (3.12) e (3.13) pode ser estudada com a ajuda do Lema 3.14. Considere a função de transferência

$$Z(s) = I + \eta KCB + (KC + \eta KCA)(sI - A)^{-1}B$$

onde

$$Z(\infty) + Z^T(\infty) = W^T W$$

Supondo que  $\eta$  tenha sido escolhido tal que  $(1 + \eta\lambda_i) \neq 0$  para todos os autovalores de  $A$ , isto significa que  $-\frac{1}{\eta}$  não é um autovalor de  $A$ . Então o par  $(A, KC + \eta KCA)$  é observável se  $(A, C)$  for observável. Portanto todas as condições do Lema 3.14 são satisfeitas, deste modo existem matrizes  $P$ ,  $L$  e  $\epsilon$  satisfazendo (3.12) e (3.13) se e somente se  $Z(s)$  for real e estritamente positiva. A função de transferência  $Z(s)$  pode ser expressa como

$$\begin{aligned} Z(s) &= I + \eta KC(sI - A + A)(sI - A)^{-1}B + KC(sI - A)^{-1}B \\ &= I + (1 + \eta s)KG(s) \end{aligned}$$

Essas idéias anteriormente descritas serão apresentadas no próximo Teorema.

**Teorema 3.15 (Critério de Popov Multivariável)** *Considere o sistema (3.4)-(3.6) onde  $A$  é Hurwitz,  $(A, B)$  é controlável e  $(A, C)$  é observável, e  $\psi(\cdot)$  é uma não linearidade invariante no tempo que satisfaz globalmente a condição do setor (3.8) sendo  $K$  uma matriz simétrica definida positiva. Então o sistema é globalmente estável se existir  $\eta \geq 0$ , com  $-\frac{1}{\eta}$  não sendo autovalor de  $A$ , tal que*

$$Z(s) = I + (1 + \eta s)KG(s)$$

*seja real e estritamente positiva. Se a condição do setor (3.8) é satisfeita somente para  $[a, b]$ , então pode ser assegurado que o sistema é absolutamente estável em um domínio finito.*

Para  $p = 1$ , pode-se verificar se  $Z(s)$  é estritamente positiva, escolhendo  $\eta$  tal que  $Z(\infty) > 0$ . Pelo Lema 3.13,  $Z(s)$  é real e estritamente positiva se e somente se

$$\text{Re}[1 + (1 + \eta\omega)kG(j\omega)] > 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[G(j\omega)] - \eta\omega \operatorname{Im}[G(j\omega)] > 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

onde  $G(j\omega) = \operatorname{Re}[G(j\omega)] + j\operatorname{Im}[G(j\omega)]$ . Plotando  $\operatorname{Re}[G(j\omega)]$  versus  $\omega \operatorname{Im}[G(j\omega)]$ , com  $\omega$  como parâmetro, a condição (3.16) será satisfeita se o gráfico pertencer ao lado direito da reta que intercepta o ponto  $-\frac{1}{k} + j0$  com inclinação  $\frac{1}{\eta}$ , tal gráfico é conhecido como diagrama de Popov e pode ser observado pela Fig. 3.8.

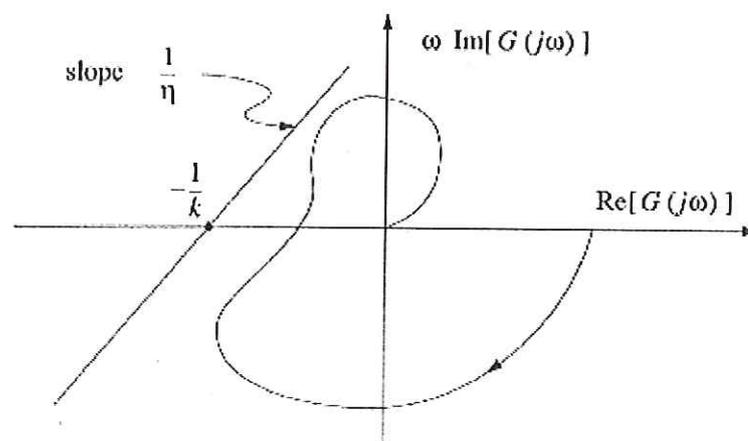


Figura 3.8: Diagrama de Popov



## Capítulo 4

# Aplicação dos Métodos Diretos na Análise de Estabilidade Transitória em Sistemas de Potência

O modelo matemático de um sistema de potência multimáquinas, conforme descrito no Capítulo 2, é composto por um conjunto de equações diferenciais não lineares. Por muitos anos a análise de estabilidade transitória foi realizada pelo método passo a passo, que consiste na integração no domínio do tempo das equações diferenciais que representam o sistema. Este método tornou-se inadequado para estudos em tempo real, uma vez que inúmeras soluções numéricas das equações diferenciais devem ser efetuadas para a determinação do tempo crítico de abertura.

Os métodos diretos são adequados às aplicações em tempo real, pois permitem estudar com boa precisão a estabilidade da primeira oscilação das máquinas do sistema de potência, sem que haja a necessidade do conhecimento da solução numérica das equações diferenciais.

## 4.1 Introdução

O problema de estabilidade transitória consiste em estudar o comportamento da rede elétrica após um grande distúrbio, denominado falta, desta forma temos que considerá-la em três estágios: pré-falta, em falta e pós-falta. A representação matemática para a análise deste problema, pode ser dada por um sistema dinâmico, composto por três equações diferenciais que representam cada estágio do sistema,

$$\dot{x}(t) = f_I(x(t)), \quad -\infty < t < t_F \quad (4.1)$$

$$\dot{x}(t) = f_F(x(t)), \quad t_F \leq t < t_{CA} \quad (4.2)$$

$$\dot{x}(t) = f_{PF}(x(t)), \quad t_{CA} \leq t < \infty \quad (4.3)$$

onde  $x(t)$  é um vetor das variáveis de estado do sistema. A dinâmica do sistema em condição pré-falta é regida pela eq.(4.1), nesta situação o sistema elétrico está operando no ponto de equilíbrio estável,  $x_O$ . No instante de tempo  $t_F$ , ocorre uma grande perturbação e o sistema entra em condição de falta, portanto há uma mudança estrutural na rede elétrica e desta forma, (4.2) passa a reger o comportamento dinâmico do sistema. Esta situação permanece até o instante de tempo  $t_{CA}$ , denominado tempo de abertura, que é o instante de tempo no qual o sistema de proteção atua, eliminando o defeito. Após o instante de tempo  $t_{CA}$  o sistema se encontra em situação pós-falta e a dinâmica do sistema passa a ser regida por (4.3).

No fim do período em falta o estado do sistema é dado por:

$$x_{CA} = \Phi_F(t_{CA}, t_F, x_O) \quad (4.4)$$

onde  $\Phi_F(t_{CA}, t_F, x_O)$  é a solução do sistema em falta com condição inicial  $(t_F, x_O)$  no tempo  $t_{CA}$ .

Assumindo que o sistema no estado pós-falta tenha o ponto de equilíbrio estável  $x_s$ , o problema fundamental no estudo de estabilidade transitória poderá ser resumido na seguinte pergunta:

*“Partindo de um estado inicial pós-falta  $x_{CA} = \Phi_F(t_{CA}, t_F, x_O)$ , o sistema convergirá para o ponto de equilíbrio estável pós-falta  $x_s$  ?”*

A representação matemática desta pergunta, é dada por:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, t_{CA}, x_{CA}) = x_s ? \quad (4.5)$$

onde  $\Phi(t, t_{CA}, x_{CA})$  é a solução do sistema em situação pós-falta com condição inicial  $(t_{CA}, x_{CA})$ .

Como se pode observar, o estudo de estabilidade transitória em sistemas de potência, consiste em estudar se a trajetória do sistema pós falta está contida ou não na região limite de estabilidade do sistema, denominada área de atração. A grande dificuldade da aplicação dos métodos diretos é sem dúvida encontrar uma boa função de Lyapunov, que seja capaz de representar a rede elétrica e que proporcione uma boa estimativa da área de atração.

Atualmente tem-se tido grandes avanços no desenvolvimento dos métodos diretos. Na literatura tais métodos são conhecidos como métodos da função energia transitória, cuja principal vantagem é apresentar uma margem de energia transitória capaz de fornecer informações sobre a área de atração.

## 4.2 Estimativa da Área de Atração

Em sistemas não lineares, a estabilidade global nem sempre ocorre, geralmente apenas um conjunto de condições iniciais, contido no espaço  $\mathbb{R}^n$ , possui trajetórias que convergem para o ponto de equilíbrio  $x_s$ . Em sistemas de potência isto acontece, e a determinação deste conjunto de condições iniciais é o principal objetivo das análises. Matematicamente, este conjunto é denominado de área de atração ou região de estabilidade e é definido por:

$$A(x_s) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(t, t_o, x) \rightarrow x_s, \text{ quando } t \rightarrow \infty\} \quad (4.6)$$

A estimativa da área de atração para o problema de estabilidade transitória pode ser resolvido segundo o esquema a seguir:

1. Constrói-se a função de Lyapunov  $V(x(t))$ , para o sistema pós-falta, e estima-se a área de atração por  $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < V_{CA}\}$  onde  $V_{CA}$  é energia crítica de abertura.

2. Simula-se o sistema em falta no domínio do tempo, até que sua órbita abandone a estimativa da área de atração do sistema pós-falta.
3. O tempo em que a órbita do sistema em falta abandona a estimativa da área de atração do pós-falta ( $V(x(t)) = V_{CA}$ ) é uma aproximação para o tempo crítico de abertura,  $t_{CA}$ .

Pode-se perceber que se o defeito for eliminado antes do tempo crítico de abertura,  $t_{CA}$ , a condição inicial para o estágio pós-falta estará contida na área de atração, portanto o sistema permanecerá estável. A Fig. 4.1 ilustra o problema, onde temos que  $x_s$  é o ponto de equilíbrio estável do pós-falta,  $x_I$  é o ponto de operação do pré-falta.

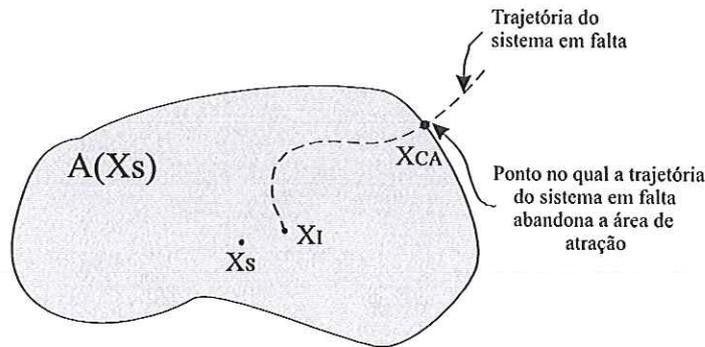


Figura 4.1: Região de atração

Ocorre um defeito no sistema tornando-o instável, de tal forma que este começa a se afastar indefinidamente do ponto de operação devido à aceleração das máquinas. A órbita tracejada ilustra a trajetória do sistema em falta.  $x_{CA}$  é o ponto no qual a trajetória do sistema em falta abandona a área de atração. Caso o defeito seja eliminado antes do tempo crítico de abertura, a condição inicial do pós-falta pertencerá a área de atração, desta forma a órbita correspondente a esta condição inicial convergirá para o ponto de equilíbrio estável  $x_0$ . As órbitas que se iniciam fora da região de atração poderão tender ao infinito ou convergir para outros pontos de equilíbrio, que para sistemas de potência representam pontos de equilíbrio inviáveis do ponto de vista de operação do sistema.

De acordo com Athay et al. (1979), o problema de estabilidade em sistemas multimáquinas, pode ser visualizado como uma bola rolando sobre uma superfície em um espaço multidimensional, também conhecida por bacia energética, onde as coordenadas são os ângulos dos rotores e o ponto de operação estável do sistema pós falta é o ponto de mínimo desta superfície de energia potencial. A falta é equivalente à aplicar na bola uma força, a partir do instante de tempo  $t_F$ , com a intenção de retirá-la da bacia energética. Durante a falta, tanto a energia potencial como a energia cinética aumentam. Quando a força aplicada à bola é eliminada, a bola fica somente sob o efeito da força gravitacional. Para que a bola não saia da bacia, o defeito deve ser eliminado antes que a energia total (cinética + potencial) ultrapasse  $V_{CA}$ , que é a energia potencial máxima da bacia na direção da trajetória da bola. A Figura 4.2 ilustra essa idéia.

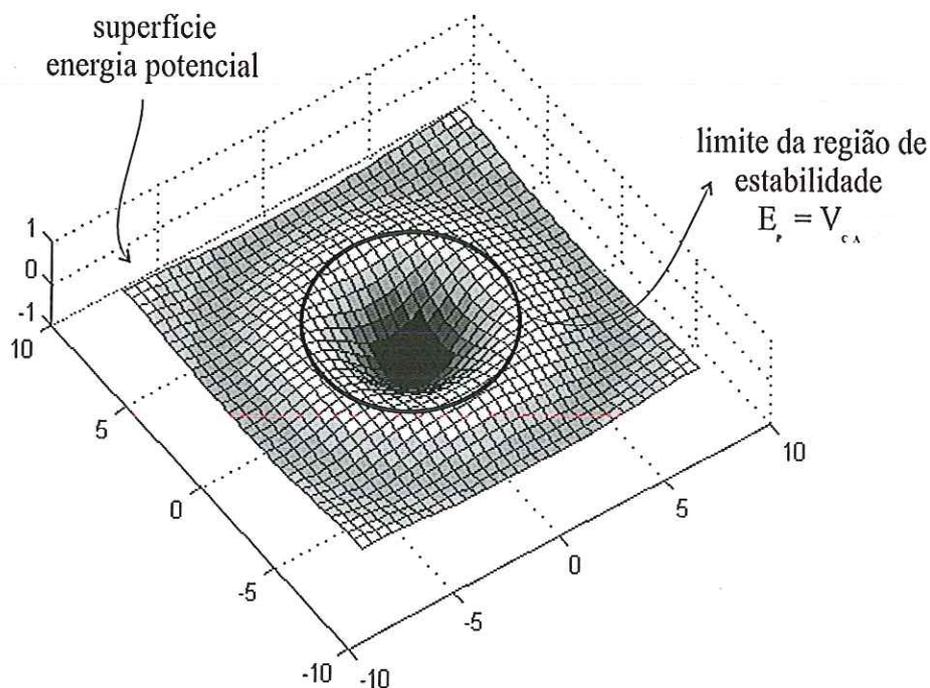


Figura 4.2: Ilustração da bacia energética.

Os pontos de equilíbrio instáveis não pertencem à área de atração do ponto de equilíbrio em estudo. No entanto qualquer vizinhança destes pontos de equilíbrio possui pontos que pertencem à área de atração, portanto, estes devem pertencer à fronteira da área de atração. Os pontos de equilíbrio instáveis pertencentes à fronteira da área de atração serão os responsáveis pela estimativa da região de atração. Em se tratando de sistemas de potência o processo de se estimar todos os pontos de equilíbrio instáveis torna-se inviável do ponto de vista de implementação, devido à dimensão e a complexidade do sistema.

O histórico dos métodos propostos de estimativa da área de atração podem ser encontrados em Pai (1981) e de uma forma mais ampla e atual em Bretas e Alberto (2000b).

A primeira tentativa de se estimar a área de atração, foi desenvolvida em 1966 por El-Abiad e Nagappan, onde se propôs o cálculo de todos os pontos de equilíbrio instáveis ao redor do ponto de equilíbrio estável em estudo. A energia crítica foi definida como sendo a energia de menor valor, dentre a energia de todos os pontos de equilíbrio instáveis. O ponto de equilíbrio instável de menor energia é conhecido na literatura como: 'closest equilibrium point'. Com isto obtém-se uma estimativa da área de atração que está garantidamente contida dentro da área de atração verdadeira. A grande desvantagem desse método é que a estimativa da área de atração gerada pode ser bastante conservadora, pois não leva em consideração a informação da trajetória do sistema durante a falta. Além disso, o cálculo de todos os pontos de equilíbrio de um sistema de potência de grande porte é algo bastante complexo e exige um tempo de processamento elevado, este motivo inviabilizou a utilização prática do método.

O método denominado critério de aceleração foi o primeiro método a levar em consideração a informação do sistema durante o defeito, o objetivo era utilizar o ponto de equilíbrio instável que estivesse na direção ou nas proximidades da trajetória do sistema durante a falta, a idéia desse método consiste em estimar somente uma região da área de atração e não a área de atração por completo. O ponto de equilíbrio utilizado para limitar a área de atração é conhecido como

'ponto de equilíbrio de controle', os métodos que utilizam este conceito não utilizam a idéia de estimativa pelo ponto de equilíbrio de menor energia, justamente para não obter estimativas conservadoras.

#### 4.2.1 Método PEBS

O método PEBS (Potential Energy Boundary Surface) proposto por Kakimoto et al., surgiu com o intuito de eliminar a necessidade de se calcular os pontos de equilíbrio instáveis, Chiang et al. (1988).

A superfície gerada pela função de Lyapunov do tipo função energia, fornece curvas de contorno fechadas e equipotenciais,  $V_p(x) = constante$ , em uma pequena região nas proximidades do ponto de equilíbrio estável, onde se tem um ponto de mínimo da superfície de energia potencial. Os pontos de sela que limitam a área de atração do sistema, são dados pelos pontos de equilíbrio instáveis que nos fornecem os pontos de máximo local da superfície de energia potencial, as curvas de contorno que passam por estes pontos não são curvas fechadas. A curva que une todos os pontos de equilíbrio instáveis é conhecida como fronteira limite da energia potencial, na literatura conhecido como PEBS (Potential Energy Boundary Surface).

No espaço multi-dimensional de ângulos dos geradores referenciados ao COA, a energia potencial ( $V_P$ ) é usualmente vista como uma bacia de  $V_P$ . A Fig. 4.3 ilustra a bacia de energia potencial (EP) para um sistema de três geradores. O ponto de equilíbrio estável do sistema (PEE) está localizado no fundo da bacia de energia potencial. Os pontos de equilíbrio instáveis ( $x^1, x^2, x^3$ ) estão localizados sobre a borda da bacia, que é conhecida como PEBS.

Integra-se numericamente a equação diferencial do sistema em falta até que a projeção da trajetória do sistema em falta no espaço dos ângulos cruze o PEBS. O ponto no qual esta trajetória cruzar a superfície limite de energia potencial é conhecido como 'exit point'.

O algoritmo PEBS foi criado com base em argumentos heurísticos e por este motivo gera resultados muitas vezes não conservadores, entretanto na maioria das

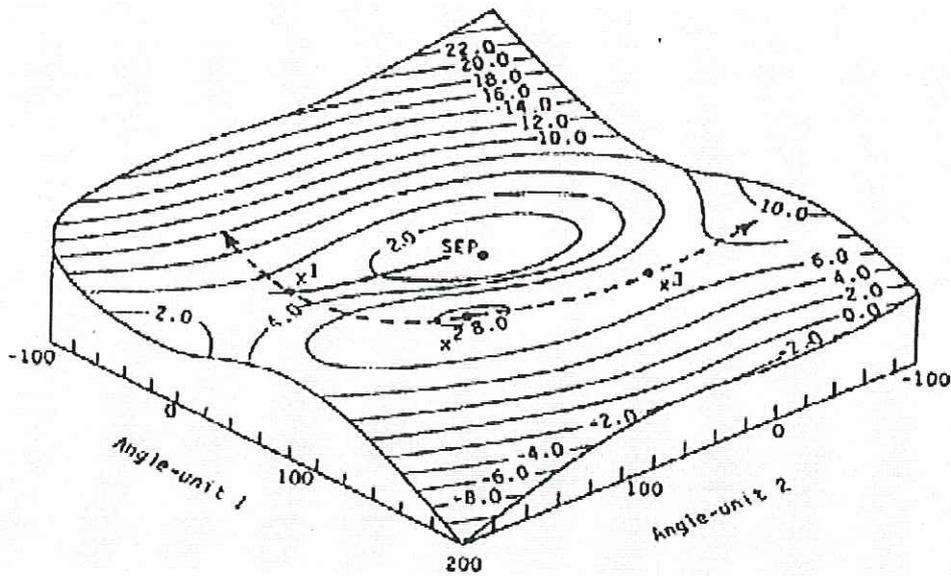


Figura 4.3: PEBS para o sistema 3 máquinas

vezes fornece uma estimativa muito boa do verdadeiro tempo crítico de abertura. Para sistemas de potência mal condicionados e sistemas com problemas de modos de instabilidade inter-área, o PEBS poderá não estar próximo ao ponto de equilíbrio instável de controle, portanto a energia crítica  $V_{CA}$  não terá uma boa precisão para cálculo do tempo crítico de abertura.

Matematicamente, o PEBS é a fronteira da área de atração do sistema gradiente reduzido:

$$\dot{\delta} = -\frac{\partial V_p(\delta)}{\partial \delta} = P_m - P_e \quad (4.7)$$

associado ao modelo original:

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega \\ M\dot{\omega} = -\frac{\partial V_p(\delta)}{\partial \delta} - D\omega = P_m - P_e - D\omega \end{cases} \quad (4.8)$$

Para o melhor entendimento deste método é necessário estudar as relações existentes entre o sistema gradiente reduzido associado (4.7) e o sistema original (4.8) (Chiang et al. (1988) e Bretas e Alberto (2000b)).

Algoritmo

1. Verifica-se o ponto no qual a trajetória do sistema em falta cruza o PEBS (ponto no qual a energia potencial atinge um máximo em cima da trajetória da falta), seja  $\delta^*$  esse ponto.
2. O valor da energia potencial em  $\delta^*$  será a energia crítica  $V_{CA} = V(\delta^*)$ . Se no tempo de abertura  $t_{CA}$ ,  $V(t_{CA}) < V_{CA}$ , o sistema será estável.

$\delta^*$  é denominado 'exit point' e o valor da energia deste ponto é utilizada como a energia crítica para o efeito de estimativa da área de atração.



## Capítulo 5

# Funções de Lyapunov para o Estudo de Estabilidade Transitória em Sistemas de Potência Multimáquinas - Estado da Arte

A partir das modelagens matemáticas do sistema multimáquinas, que foram discutidas no Capítulo 2, serão apresentadas as funções de Lyapunov, que podem ser utilizadas para a análise de estabilidade transitória em sistemas de potência.

Este capítulo está dividido em duas seções, a primeira trata de funções de Lyapunov tendo as cargas modeladas como impedância constante, com isto é possível a redução da rede aos nós internos dos geradores, a segunda seção é dedicada às funções de Lyapunov para modelos com a estrutura da rede preservada, sendo possível um modelo mais elaborado para as cargas.

### 5.1 Cargas como Impedância Constante

Nesta seção iremos tratar da obtenção de funções de Lyapunov para sistemas multimáquinas considerando carga como impedância constante, o que diferencia-

rá um método do outro é basicamente a inclusão ou não das condutâncias de transferência.

O modelo matemático para sistemas de potência multimáquinas com amortecimento nulo e tendo como referência o COA, como pode ser observado na Seção 2.5.1, é dado por:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = \tilde{\omega}_i \\ M_i \dot{\tilde{\omega}}_i = P_{mi} - P_{ei} - \frac{M_i}{M_T} P_{COA} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (5.1)$$

onde o termo da potência elétrica é expresso por:

$$P_{ei} = -|E_i|^2 G_{ii} + \sum_{j=1; j \neq i}^n [C_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) + D_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)]$$

e

$$P_{COA} = \sum_{i=1}^n (P_{mi} - |E_i|^2 G_{ii}) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n D_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j)$$

### 5.1.1 Função de Lyapunov do tipo função energia

Este procedimento foi proposto inicialmente por Aylett (1958), atualmente diversos autores utilizam esta idéia em diferentes formas para obtenção da função de Lyapunov.

Esta função energia é obtida multiplicando a  $i$ -ésima equação de (5.1) por  $\tilde{\omega}_i$ . Este procedimento na mecânica, seria equivalente multiplicar a força aplicada pela velocidade para obter-se potência. Efetuando a soma das equações resultantes, tem-se:

$$\sum_{i=1}^n \left[ M_i \frac{d\tilde{\omega}_i}{dt} - (P_{mi} - |E_i|^2 G_{ii}) + \sum_{j=1; j \neq i}^n [C_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) + D_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)] + \frac{M_i}{M_T} P_{COA} \right] \tilde{\omega}_i = 0 \quad (5.2)$$

Observando-se que  $\tilde{\omega}_i = \frac{d\theta_i}{dt}$ , pode-se reescrever a equação (5.2) da seguinte

maneira:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n M_i \tilde{\omega}_i \frac{d\tilde{\omega}_i}{dt} &- \sum_{i=1}^n (P_{mi} - |E_i|^2 G_{ii}) \frac{d\theta_i}{dt} + \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=i;\neq i}^n [C_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) + D_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)] \frac{d\theta_i}{dt} + \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{M_t} P_{COA} \frac{d\theta_i}{dt} = 0
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Sabendo-se que  $C_{ij} = C_{ji}$  e  $D_{ij} = D_{ji}$ , obtém-se as seguintes igualdades:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1;\neq i}^n C_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) \frac{d\theta_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n C_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) \frac{d(\theta_i - \theta_j)}{dt} \tag{5.4}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1;\neq i}^n D_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) \frac{d\theta_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n D_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) \frac{d(\theta_i + \theta_j)}{dt} \tag{5.5}$$

Devido à própria definição de  $\tilde{\omega}_i$ , tem-se que  $\sum_{i=1}^n M_i \tilde{\omega}_i = 0$ , logo tem-se também a igualdade:

$$\sum_{i=1}^n \frac{M_i}{M_t} P_{COA} \frac{d\theta_i}{dt} = \frac{P_{COA}}{M_t} \sum_{i=1}^n M_i \tilde{\omega}_i = 0 \tag{5.6}$$

Substituindo (5.5) e (5.6) em (5.3) e integrando-se a equação desde o tempo  $t = 0$  até o tempo  $t$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
V(\theta, \tilde{\omega}) &= \int_0^t \sum_{i=1}^n M_i \tilde{\omega}_i \frac{d\tilde{\omega}_i}{dt} - \int_0^t (P_{mi} - |E_i|^2 G_{ii}) \frac{d\theta_i}{dt} dt + \\
&+ \int_0^t \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n C_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) \frac{d(\theta_i - \theta_j)}{dt} dt + \\
&+ \int_0^t \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n D_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) \frac{d(\theta_i + \theta_j)}{dt} dt
\end{aligned} \tag{5.7}$$

A variável tempo de (5.8) pode ser eliminada, admitindo-se que no tempo

$t = 0$  o sistema esteja no ponto de equilíbrio estável  $(\theta^s, 0)$  e que no tempo  $t$  esteja no ponto  $(\theta, \tilde{\omega})$ , com isto obtém-se a seguinte expressão para  $V$ :

$$\begin{aligned}
 V(\theta, \tilde{\omega}) = & \int_0^{\tilde{\omega}} \sum_{i=1}^n M_i \tilde{\omega}_i d\tilde{\omega}_i - \int_{\theta^s}^{\theta} \sum_{i=1}^n (P_{mi} - |E_i|^2 G_{ii}) d\theta_i + \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \int_{\theta_i^s - \theta_j^s}^{\theta_i - \theta_j} C_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) d(\theta_i - \theta_j) + \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \int_{\theta_i^s + \theta_j^s}^{\theta_i + \theta_j} D_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) d(\theta_i + \theta_j) \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Resolvendo as integrais de (5.9), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 V(\theta, \tilde{\omega}) = & \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M_i \tilde{\omega}_i^2 - \sum_{i=1}^n (P_{mi} - |E_i|^2 G_{ii}) (\theta_i - \theta_i^s) - \\
 & - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n C_{ij} [\cos(\theta_i - \theta_j) - \cos(\theta_i^s - \theta_j^s)] + \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \int_{\theta_i^s + \theta_j^s}^{\theta_i + \theta_j} D_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) d(\theta_i + \theta_j) \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

A última parcela de  $V$  que é dada por:

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \int_{\theta_i^s + \theta_j^s}^{\theta_i + \theta_j} D_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) d(\theta_i + \theta_j) \quad (5.11)$$

é uma integral dependente de caminho, portanto o sistema não é conservativo quando as condutâncias de transferência são diferentes de zero. O efeito deste termo não é muito significativo no cálculo da energia, de tal forma que esta função energia  $V$  dada por (5.10) será considerada uma função de Lyapunov aproximada para o sistema de potência.

O termo integral dado por (5.10), pode ser calculado aproximando o caminho de integração por uma reta, Bretas e Alberto (2000b) desta forma tem-se:

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n D_{ij} \frac{\theta_i + \theta_j - \theta_i^s - \theta_j^s}{\theta_i - \theta_j - \theta_i^s + \theta_j^s} [\sin(\theta_i - \theta_j) - \sin(\theta_i^s - \theta_j^s)] \quad (5.12)$$

Esta função de Lyapunov tem sido utilizado com sucesso em várias aplicações utilizando grandes sistemas. Esta foi implementada e alguns resultados são apresentados no Capítulo 7.

### 5.1.2 Função de Lyapunov Utilizando o Critério Multivariável de Popov

Nesta seção, o sistema de potência é reescrito de forma conveniente como uma função de Lyapunov do tipo de Lure, discutido na Seção 3.5. O estudo da estabilidade absoluta, é então realizado através do critério multivariável de Popov, que foi apresentado na Seção 3.5.1.

Estas funções tem a vantagem de permitir que o amortecimento não seja uniforme, entretanto o problema da inclusão da condutância de transferência não é eliminado

O modelo em espaço de estados para o sistema de potência, composto por  $n$  máquinas,  $m$  linhas e desprezando as condutâncias de transferência ( $D_{ij}$ ), é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - Bf(\sigma) \\ \sigma = Cx \end{cases} \quad (5.13)$$

onde as variáveis de estado, tendo a  $n$ -ésima máquina como referência, são definidas da seguinte maneira:

$$x = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \mid \delta_1 - \delta_n, \delta_2 - \delta_n, \dots, \delta_{n-1} - \delta_n]$$

e sendo,

$$A_{(2n-1, 2n-1)} = \begin{bmatrix} -DM^{-1} & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$B_{(2n-1, m)} = \begin{bmatrix} M^{-1}K \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$C_{(m, 2n-1)} = \begin{bmatrix} 0 \vdots S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & J \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

onde tem-se:

$$M = \text{diag} [M_1, M_2, \dots, M_n]$$

$$D = \text{diag} [D_1, D_2, \dots, D_n]$$

A matriz  $K$  é a matriz incidência da rede elétrica, que pode ser particionada da seguinte forma:

$$K = [K_1 \vdots K_2 \vdots \dots \vdots K_{n-1}]$$

As matrizes  $S$  e  $J$  podem ser encontradas a partir das seguintes relações:

$$K = K_1 S^T \text{ e } S^T = [I \vdots J]$$

A não linearidade é dada por:

$$f_k(\sigma_k) = C_{pq} [\sin(\sigma_k + \delta_{pq}^s) - \sin \delta_{pq}^s] \quad (5.17)$$

e satisfaz a condição do setor  $f_k(\sigma_k)\sigma_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , em um intervalo ao redor de  $\sigma_k$  denotado por:

$$l_{k2} < \sigma_k < l_{k1}, \quad l_{k1} > 0, \quad l_{k2} < 0 \quad (5.18)$$

A matriz função de transferência é dada por  $W(s) = C(sI - A)^{-1}B$ , no caso de sistemas de potência considerando efeito de amortecimento não uniforme, tem-se:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{1}{s} [K^T (sI + M^{-1}D)^{-1} M^{-1}K] = \\ &= \frac{1}{s} K^T (sM + D)^{-1} K \end{aligned} \quad (5.19)$$

Para aplicar o critério multivariável de Popov, deve-se encontrar as matrizes diagonais  $N = nI$  e  $Q = qI$ , tal que  $Z(s) = (n + qs)W(s)$  seja real positiva. As condições para que  $Z(s)$  seja real positiva, é dada pela Definição 3.5, onde as duas primeiras condições são claramente satisfeitas. A partir da terceira condição, temos:

$$\begin{aligned} Z^T(s^*) + Z(s) &= Z(s^*) + Z(s) = 2\text{Re}[Z(s)] \\ &= 2K^T \left\{ \text{Re} \left[ \frac{n + qs}{s(sM + D)} \right] \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

para que a desigualdade acima seja satisfeita, deve-se escolher  $n$  e  $q$ , tal que:

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{n + qs}{s(sM + D)} \right] \geq 0 \quad (5.20)$$

Basta substituir  $s = jw$  na expressão acima para encontrar uma relação entre  $n$  e  $q$ , que garanta a terceira condição da Definição 3.5, desta forma tem-se:

$$q \geq n \frac{M_i}{D_i}; \quad i = 1, \dots, n \quad (5.21)$$

Encontrada as matrizes  $N$  e  $Q$ , então pode-se afirmar que existe uma função de Lyapunov do tipo de Lure com a seguinte forma:

$$V(x) = x^T P x + 2 \int_0^{Cx} f^T(\sigma) Q d\sigma$$

onde a matriz  $P$  é definida positiva e satisfaz o Lema 3.14. Em sistemas de potência, temos que  $CB = 0$  e fazendo  $W_o = 0$ , temos as seguintes equações:

$$A^T P + P A = -L L^T \quad (5.22)$$

$$P B = n C^T + q A^T C^T \quad (5.23)$$

Tomando as matrizes  $P$  e  $L$  como sendo dadas por:

$$P_{(2n-1, 2n-1)} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2^T \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}; \quad e \quad L_{(2n-1, 2n-1)} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$$

As equações (5.22) e (5.23), podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$-P_1 M^{-1} D - D M^{-1} P_1 + P_2^T K_1^T + K_1 P_2 = -L_1 L_1^T \quad (5.24)$$

$$-D M^{-1} P_2^T + K_1 P_3^T = -L_1 L_2^T \quad (5.25)$$

$$L_2 L_1^T = -L_2 L_1^T \quad (5.26)$$

$$0 = -L_2 L_2^T \quad (5.27)$$

$$P_1 M^{-1} K = qK \quad (5.28)$$

$$P_2 M^{-1} K = nS^T \quad (5.29)$$

A matriz  $L_2$  é escolhida como sendo uma matriz nula, portanto das equações (5.24) e (5.25), tem-se:

$$-P_1 M^{-1} D - D M^{-1} P_1 + P_2^T K_1^T + K_1 P_2 = -L_1 L_1^T \leq 0 \quad (5.30)$$

$$-D M^{-1} P_2^T + K_1 P_3^T = 0 \quad (5.31)$$

As equações (5.28), (5.29), (5.30) e (5.31) podem ser resolvidas com o intuito de encontrar as matrizes  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ . De (5.31) tem-se:

$$P_2 = P_3 K_1^T D^{-1} M \quad (5.32)$$

A partir de (5.28) encontra-se  $P_1$ , da seguinte forma:

$$(M^{-1} P_1 M^{-1} - qM^{-1}) K = 0 \quad (5.33)$$

A matriz  $K$  tem a estrutura da matriz incidência da rede elétrica e possui somente elementos +1 e -1, então:

$$M^{-1} P_1 M^{-1} - qM^{-1} = rU \quad (5.34)$$

onde  $U$  é a matriz unidade, onde todos os elementos são iguais a 1 e  $r$  é uma constante. Desta forma pode-se encontrar uma expressão para  $P_1$ , que é dada por:

$$P_1 = qM + rMUM \quad (5.35)$$

A expressão para  $P_2$  pode ser encontrada a partir de (5.29) e (5.32), portanto tem-se:

$$K_1 P_3 K_1^T D^{-1} K = nK \quad (5.36)$$

Novamente utilizando a estrutura da matriz  $K$ , a equação anterior passa a ser dada por:

$$K_1 P_3 K_1^T = nD + sDUD \quad (5.37)$$

onde  $s$  é uma constante. A solução de (5.37) em  $P_3$  é dada por:

$$P_3 = nD_{n-1} + sD_{n-1}UD_{n-1} \quad (5.38)$$

sendo  $D_{n-1}$  a matriz  $D$  com a linha e coluna  $n$  deletada, pode-se notar que  $P_3$  é simétrica.

Substituindo  $P_1$  e  $P_2$  na desigualdade matricial dada por (5.30), tem-se:

$$-2qD - r(MUD + DUM) + MD^{-1}K_1 P_3 K_1^T + K_1 P_3 K_1^T D^{-1}M \leq 0 \quad (5.39)$$

Substituindo a expressão de  $K_1 P_3 K_1^T$  dada por (5.37) em (5.39), tem-se:

$$2(-qD + nM) - (r - s)(MUD + DUM) \leq 0 \quad (5.40)$$

dividindo a equação anterior por  $q$  e fazendo  $\mu = \frac{r-s}{q}$ , a desigualdade fica da seguinte forma:

$$2(-D + \frac{n}{q}M) - \mu(MUD + DUM) \leq 0 \quad (5.41)$$

que ainda pode ser representada por:

$$F(\mu) \leq 0$$

O determinante de  $F(\mu)$  é quadrático em  $\mu$ . A matriz  $A^T P + PA$  é semi definida negativa se e somente se  $F(\mu)$  for semi definida negativa. Desta maneira temos:

$$\det(F(\mu)) = a_2 \mu^2 + a_1 \mu + a_0 \quad (5.42)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -2^n \prod_{i=1}^n \left( -D_i + n \frac{M_i}{q} \right) \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{4} \frac{(D_i M_j - D_j M_i)^2}{(-D_i + n \frac{M_i}{q})(-D_j + n \frac{M_j}{q})} \right] \\
 a_1 &= 2^n \sum_{i=1}^n \left( -D_i + n \frac{M_i}{q} \right) \sum_{i=1}^n \frac{-D_i M_i}{(-D_i + n \frac{M_i}{q})} \\
 a_0 &= 2^n \sum_{i=1}^n \left( -D_i + n \frac{M_i}{q} \right)
 \end{aligned}$$

Sendo  $\mu_1$  o maior valor negativo que satisfaz:  $\det(F(\mu)) = 0$ , então a equação (5.41) será satisfeita se  $\mu_1 \leq \mu \leq 0$ , desde que se tenha  $F(0) = 2 \left( -D + n \frac{M}{q} \right)$  definida negativa.

Dividindo (5.42) por  $-2 \left( -D_i + n \frac{M_i}{q} \right)$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
 \mu^2 \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{4} \frac{(D_i M_j - D_j M_i)^2}{(-D_i + n \frac{M_i}{q})(-D_j + n \frac{M_j}{q})} \right] - \\
 -\mu \left[ \sum_{i=1}^n \frac{D_i M_i}{D_i - n \frac{M_i}{q}} \right] - 1 = 0
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

As diferentes escolhas de  $n$  e  $q$  satisfazendo a propriedade real positiva, e as diferentes escolhas de  $\mu$  pertencendo ao intervalo entre 0 e  $\mu_1$ , resultará em diferentes funções de Lyapunov.

A seguir são apresentadas algumas funções de Lyapunov, que podem ser encontradas em Pai (1981).

### Função de Lyapunov de El-Abiad e Nagappan

- Escolha  $n = 0$ ,  $q = 1$ ,  $r = 0$  e  $s = 0$ .
- Com esta escolha tem-se:  $\mu = 0$ ,  $P_1 = M$  e  $P_2 = P_3 = 0$ .

A função de Lyapunov é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= x^T \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + 2 \int_0^\sigma f^T(\sigma) d\sigma \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \omega_i^2 + \sum_{i=1}^m \int_0^{\sigma_i} f_i(u_i) du_i
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

### Função de Lyapunov de Willems

- Escolha  $n = 0$ ,  $q = 1$ ,  $s = 0$  e  $r = \mu_1$ .

onde  $\mu_1$  é a solução negativa da equação quadrática (5.42).

Função de Lyapunov:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= x^T \begin{bmatrix} M + \mu_1 M U M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + 2 \int_0^\sigma f^T(\sigma) d\sigma \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \omega_i^2 + \frac{\mu_1}{2} \omega M U M \omega + \sum_{i=1}^m \int_0^{\sigma_i} f_i(u_i) du_i
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

### Função de Lyapunov de Pai e Murthy

- Escolha  $n = 1$ ,  $q = \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{D_i}$ ,  $r = 0$ ,  $s = -\frac{1}{\sum D_i} = -\frac{1}{D_T}$  e

$$P_1 = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{D_i} \right] M$$

de (5.38) e (5.32) respectivamente tem-se:  $P_3 = D_{n-1} - \frac{1}{D_T} D_{n-1} U D_{n-1}$  e

$$P_2 = P_3 K_1^T D^{-1} M.$$

Neste caso a função de Lyapunov é dada por:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1; j \neq i}^n \left( \frac{M_j}{D_j} M_i \omega_i^2 \right) + \frac{1}{2D_T} \sum_{i=1}^n M_i^2 \omega_i^2 + \\
 &+ \frac{1}{2D_T} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n D_i D_j \left( \delta_i - \delta_j - \delta_i^s + \delta_j^s + \frac{M_i}{D_i} \omega_i - \frac{M_j}{D_j} \omega_j \right)^2 + \\
 &+ \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{D_i} \sum_{i=1}^m \int_0^{\sigma_i} f_i(u_i) du_i
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

### Função de Lyapunov de Mansour

- Escolha  $n = 0$ ,  $q = \frac{1}{2}$ ,  $s = r \geq -\frac{1}{D_T}$ .

Função de Lyapunov:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \omega_i^2 + \frac{r}{2} \left[ \sum_{i=1}^n (M_i \omega_i + D_i (\delta_i - \delta_i^s)) \right]^2 + \\
 &+ \sum_{i=1}^m \int_0^{\sigma_i} f_i^T(u_i) du_i
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

### Função de Lyapunov geral de Willems

- Escolha

$$q \geq n \max_i \left( \frac{M_i}{D_i} \right) \text{ e } r = s \geq -\frac{1}{D_T} n.$$

Função de Lyapunov:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( q - n \frac{M_i}{D_i} \right) M_i \omega_i^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} \left( s + \frac{n}{D_T} \right) \left[ \sum_{i=1}^n (M_i \omega_i + D_i (\delta_i - \delta_i^s)) \right]^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n D_i \sum_{i=1}^n D_i D_j \left( \delta_i - \delta_j - \delta_i^s + \delta_j^s + \frac{M_i}{D_i} \omega_i - \frac{M_j}{D_j} \omega_j \right)^2 + \\
 &+ \sum_{i=1}^m \int_0^{\sigma_i} f_i(u_i) du_i
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

As funções de Lyapunov obtidas a partir do critério multivariável de Popov (Seção 5.1.2), possuem a característica de que não há presença de um barramento infinito e nem a necessidade que os amortecimentos das máquinas ( $D_i$ ) sejam uniforme. Isto é um fato interessante se compararmos tais funções com a função de Lyapunov do tipo função energia, obtida na Seção 5.1.1, onde é exigido amortecimento uniforme para todas as máquinas, caso contrário exige-se a presença de um barramento infinito no sistema.

## 5.2 Estrutura da Rede Presevada

Nas análises efetuadas na Seção 5.1, as cargas foram modeladas como sendo impedâncias constantes calculadas das condições pré-falta. Isto permitia que a rede pudesse ser reduzida aos nós das forças eletromotrizes de tal forma que fosse possível escrever uma expressão algébrica para a potência elétrica em função dos ângulos dos geradores, desta forma o sistema podia ser representado por um conjunto de equações diferenciais.

Em verdade as cargas não se comportam como impedâncias constantes. A irregularidade de consumo das cargas faz com que os diversos tipos de equipamentos conectados em um barramento, tais como indústrias, residências e até mesmo cidades inteiras, possuam variações devido há um distúrbio na tensão e (ou) frequência. A modelagem das cargas é um assunto bastante complexo, atualmente consideram-se os modelos das cargas como sendo de forma polinomial, tendo como variáveis a tensão e a frequência na barra da carga em questão. Desta forma não há a possibilidade de redução da rede aos nós dos geradores, neste caso é necessário trabalhar-se simultaneamente com um conjunto de equações diferenciais que descrevem a dinâmica dos geradores e com um conjunto de equações algébricas de balanço de potência da rede elétrica, equações do fluxo de carga.

As funções de Lyapunov para sistemas de potência com a estrutura preservada, possibilita a inclusão de modelos mais realísticos de cargas.

### 5.2.1 Cargas Dependentes da Tensão

Tsolas et al. (1985) forneceram uma função energia para sistemas de potências com a estrutura da rede preservada. Considere o sistema composto por  $n + m + 1$  nós conectados por linhas de transmissão sem perdas, onde possui  $m$  barras de carga,  $n$  nós correspondentes aos barramentos terminais dos geradores e o nó  $n+1$  representa o barramento infinito. As cargas são modeladas como impedância constante.

Esta função energia provém da observação de que  $P_{li} = \frac{\partial Q_{li}}{\partial \phi_i}$  onde  $P_{li}$  é a expressão de potência ativa consumida pela carga. Espera-se que algo semelhante aconteça com a potência reativa, mas é fácil verificar que não existe uma relação clara entre  $Q_{li}$  e a derivada de  $Q_{li}$  com relação à  $V_i$ . Tal relação somente existirá se definirmos uma nova variável  $\nu_i = \ln(V_i)$ , onde  $\nu_i$  é sempre maior que zero exceto na barra curto circuitada que poderá ser zero. Com esta mudança de variáveis, obtém-se a seguinte função energia.

$$\begin{aligned}
 W = & \sum_{i=1}^n M_i \frac{\omega_i^2}{2} - \sum_{i=1; i \neq n+1}^m (P_{di} \phi_i - Q_{di} \nu_i) - \sum_{i=1}^n \frac{E_i e^{\nu_i} \cos(\delta_i - \phi_i)}{x_{di}} - \\
 & - \sum_{i=1}^n \left( B_{ii} - \frac{1}{x_{di}} \right) \frac{e^{2\nu_i}}{2} - \sum_{i>j}^m B_{ij} e^{\nu_i - \nu_j} \cos(\phi_i - \phi_j) - \\
 & - \sum_{i=n+2}^m B_{ii} \frac{e^{2\nu_i}}{2} \tag{5.49}
 \end{aligned}$$

Para provar que esta função energia é uma função de Lyapunov, precisamos mostrar que a derivada de  $W$  com relação ao tempo é semi definida negativa, ou seja, a energia do sistema decresce com o passar do tempo e portanto o sistema é dissipativo. Utilizando a regra da cadeia para o cálculo da derivada de  $W$  tem-se:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial \omega_i} \frac{d\omega_i}{dt} + \frac{\partial W}{\partial \delta_i} \frac{d\delta_i}{dt} + \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \frac{d\phi_i}{dt} + \frac{\partial W}{\partial \nu_i} \frac{d\nu_i}{dt} \tag{5.50}$$

Calculando cada um dos termos da equação anterior isoladamente obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W}{\partial \omega_i} &= M_i \omega_i \quad i = 1, \dots, n \\
 \frac{\partial W}{\partial \delta_i} &= P_{mi} + \frac{E_i V_i}{x_{di}} \sin(\delta_i - \phi_i) \quad i = 1, \dots, n \\
 \frac{\partial W}{\partial \omega_i} &= \begin{cases} -P_{di} + \frac{E_i V_i}{x_{di}} \sin(\phi_i - \delta_i) + \sum_{j=i;\neq i}^m B_{ij} V_i V_j \sin(\phi_i - \phi_j) \\ i = 1, \dots, n \\ -P_{di} + \sum_{j=i;\neq i}^m B_{ij} V_i V_j \sin(\phi_i - \phi_j) \\ i = n + 2, \dots, m \end{cases} \\
 \frac{\partial W}{\partial \nu_i} &= \begin{cases} -Q_{di} - \frac{E_i V_i}{x_{di}} \cos(\delta_i - \phi_i) - B_{ii} V_i^2 - \sum_{j=i;\neq i}^m B_{ij} V_i V_j \cos(\phi_i - \phi_j) \\ i = 1, \dots, n \\ -Q_{di} - B_{ii} V_i^2 - \sum_{j=i;\neq i}^m B_{ij} V_i V_j \cos(\phi_i - \phi_j) \\ i = n + 2, \dots, m \end{cases}
 \end{aligned}$$

Das equações de balanço de potência nos barramentos fica evidente que  $\frac{\partial W}{\partial \nu_i}$  e que  $\frac{\partial W}{\partial \phi_i}$  são iguais a zero para todo  $i = 1, \dots, n, n + 2, \dots, m$ , logo a derivada da função energia é dada por:

$$\frac{dW}{dt} = - \sum_{i=1}^n D_i \omega_i^2 \quad (5.51)$$

Observe que  $\dot{W} = 0$  sempre que  $\omega_i = 0$  para  $i = 1, \dots, n$ . Para provar que esta função energia é uma função de Lyapunov, falta mostrar que (5.49) é definida positiva e possui valor zero no ponto de equilíbrio estável. A função energia expressa por (5.49) pode satisfazer estes requisitos subtraindo-se desta a energia do ponto de equilíbrio estável ( $\delta^s, \omega^s = 0, \phi^s, \nu^s$ ). Para mostrar que esta função energia é definida positiva, é necessário verificar se a matriz Hessiana da função energia, calculada no ponto de equilíbrio em estudo é definida positiva. Em condições de operação normal, verifica-se para a grande maioria dos casos que a matriz Hessiana é definida positiva.

### 5.2.2 Cargas Dependentes da Tensão e Frequência

As funções energia para sistemas de potência considerando que a modelagem das cargas tenha dependência da tensão e da frequência podem ser encontradas em Bergen e Hill (1981) e em Alberto e Bretas (1998), nestes artigos os autores propõem que a potência elétrica ativa seja modelada como um termo constante adicionado a um termo dependente da frequência, a parte reativa é modelada através de um polinômio onde existem efeitos combinados de potência, corrente e impedância constante.

Alberto e Bretas (1998) propuseram uma extensão da função energia proposta por Tsolas et al. (1985), considerando que as cargas do sistema possuíam a seguinte modelagem matemática:

$$P_{li} = A_{li} + d_i \dot{\phi}_i \quad (5.52)$$

$$Q_{li} = R_{li} (q_{1i} + q_{2i} V_i + q_{3i} V_i^2) \quad (5.53)$$

$$i = 1, \dots, m$$

onde  $A_{li}$  é o termo correspondente à parcela de potência ativa constante da carga conectada à barra  $i$ ,  $R_{li}$  é a potência reativa injetada pela carga conectada à barra  $i$  no pré falta.  $q_{1i}$ ,  $q_{2i}$  e  $q_{3i}$  são coeficientes que ponderam o comportamento da carga respectivamente em parcelas de potência, corrente e impedância constante. Estes coeficientes devem ser escolhidos de tal forma que:

$$q_{1i} + q_{2i} + q_{3i} = 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (5.54)$$

$d_i$  é o coeficiente de dependência da frequência, em geral as cargas dependentes da frequência aumentam o consumo de potência com o aumento da frequência, logo  $d_i < 0$ .

A função energia proposta por Alberto e Bretas (1998) é dada por:

$$\begin{aligned} W = & \sum_{i=1}^n M_i \frac{\omega_i^2}{2} - \sum_{i=1; \neq n+1}^m A_{li} \phi_i - \sum_{i=1; \neq n+1}^m R_{li} \left( q_{1i} + q_{2i} e^{\nu_i} + q_{3i} \frac{e^{2\nu_i}}{2} \right) - \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{E_i e^{\nu_i} \cos(\delta_i - \phi_i)}{x_{di}} - \sum_{i=1}^n \left( B_{ii} - \frac{1}{x_{di}} \right) \frac{e^{2\nu_i}}{2} - \\ & - \sum_{i>j}^m B_{ij} e^{\nu_i - \nu_j} \cos(\phi_i - \phi_j) - \sum_{i=n+2}^m B_{ii} \frac{e^{2\nu_i}}{2} \end{aligned} \quad (5.55)$$

Para mostrar que a expressão acima é uma função de Lyapunov, basta aplicar o mesmo procedimento na análise da função energia proposta por Tsolas et al. (1985), com isso tem-se que:

$$\frac{dW}{dt} = - \sum_{i=1}^n D_i \omega_i^2 + \sum_{i=1; \neq n+1}^m d_i \dot{\phi}_i^2 \leq 0 \quad (5.56)$$

É importante salientar que o modelo da carga reativa dependendo da tensão não impossibilita a obtenção de uma função energia para o sistema, isto acontece porque a energia correspondente aos reativos não é perdida e sim conservada. Encontrar funções de Lyapunov quando a parte ativa da carga é dependente da tensão é um problema em aberto na literatura. Várias tentativas foram realizadas, no decorrer deste trabalho, com o intuito de se encontrar tal função, mas sempre havia violação do Teorema 3.1, onde a derivada da função de Lyapunov ( $\dot{V}$ ) não era garantidamente semidefinida negativa.



## Capítulo 6

# Função de Lyapunov para Sistemas de Potência com Perdas

### 6.1 Cargas como Impedância Constante

Consideráveis estudos tem-se concentrado na determinação de uma função energia, para sistemas de potência com perdas. Pai e Murthy (1973) propuseram uma função energia local para sistemas com duas máquinas, conectadas por uma linha de transmissão com perdas. Diante de tal resultado acreditava-se que tal função energia poderia ser estendida para sistemas multimáquinas, no ano seguinte Hener (1974) mostrou que esta função energia, somente poderia ser aplicada em sistemas com duas máquinas. Narasimhamurthi (1984) mostrou que a função energia para sistemas de potência sem perdas não pode ser transformada em uma função de Lyapunov local, para sistemas onde as perdas são consideradas. Kwany et al. (1985) mostrou a existência de uma função de Lyapunov local para sistemas de potência com perdas. As funções de Lyapunov locais, servem somente para determinar as propriedades dos pontos de equilíbrio, não podem ser aplicadas diretamente para determinação da região de estabilidade. Chiang (1989) mostrou que não existe uma função geral de Lyapunov para sistemas de potência onde as condutâncias de transferência são incluídas. Moon et al. (1999) desenvolveram uma função energia incluindo o efeito das condutâncias de transferência, supondo a razão  $\frac{R}{X}$  uniforme em todas as linhas de transmissão, mas

não eliminou o problema da existência de integrais dependentes do caminho.

### 6.1.1 Função de Lyapunov Utilizando a Extensão do Princípio de Invariância

A maior dificuldade da aplicação dos métodos diretos, sem dúvida é encontrar uma função que satisfaça as condições do Teorema de Lyapunov. No Capítulo 5, diversas simplificações foram feitas para encontrar uma função de Lyapunov. Dentre estas simplificações desprezou-se a condutância de transferência. A extensão do princípio de invariância, proposta por Rodrigues et al. (2000) e apresentada na Seção 3.4, possibilita o tratamento de problemas mais gerais, pois permite que a derivada da função escolhida como função de Lyapunov, seja positiva em algumas regiões. Nesta seção, utiliza-se esta teoria para tratar teoricamente a inclusão das condutâncias de transferência.

Para encontrar a função de Lyapunov considerando as condutâncias de transferência, partiremos do caso em que uma máquina está conectada ao barramento infinito, posteriormente o resultado será estendido para o caso de sistemas multimáquinas.

Considere o sistema de uma máquina contra o barramento infinito. As equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico do sistema são dadas por:

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega \\ M\dot{\omega} = P_m - C \sin \delta - D \cos \delta - T\omega \end{cases} \quad P = (P_m - G E^2) \quad (6.1)$$

Bretas e Alberto (2000a) propuseram a seguinte função de Lyapunov, onde são levadas em consideração as condutâncias de transferência.

$$W(\delta, \omega) = M \frac{\omega^2}{2} - P\delta - C \cos \delta - \beta \omega (P - C \sin \delta + D \cos \delta) + k \quad (6.2)$$

onde  $\beta$  é um parâmetro a ser determinado e  $k$  é uma constante.

A derivada de  $W$  ao longo das órbitas do sistema é dada por:

$$-\dot{W} = \begin{bmatrix} P_l(\delta) \\ \omega \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \beta & -\frac{\beta T}{2} \\ -\frac{\beta T}{2} & T - \beta(C \cos \delta - D \sin \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_l(\delta) \\ \omega \end{bmatrix} + \omega D \cos \delta \quad (6.3)$$

A expressão acima é composta por um termo quadrático mais o termo  $\omega D \cos \delta$ , desta maneira pode-se escolher o parâmetro  $\beta$  afim de que a parte quadrática seja definida positiva. Aplicando o critério de Silvester pode-se facilmente demonstrar que isto é certamente garantido se:

$$\beta < \frac{T}{C + D + \frac{T^2}{4M}} \quad (6.4)$$

Sendo assim, apenas o termo  $\omega D \cos \delta$  será responsável por gerar regiões nas quais a derivada de  $W$  é positiva.

Com a ajuda da Fig. 6.1, correspondente a uma máquina contra barramento infinito, pode-se observar as regiões em que tem-se a derivada da função energia, definida positiva.

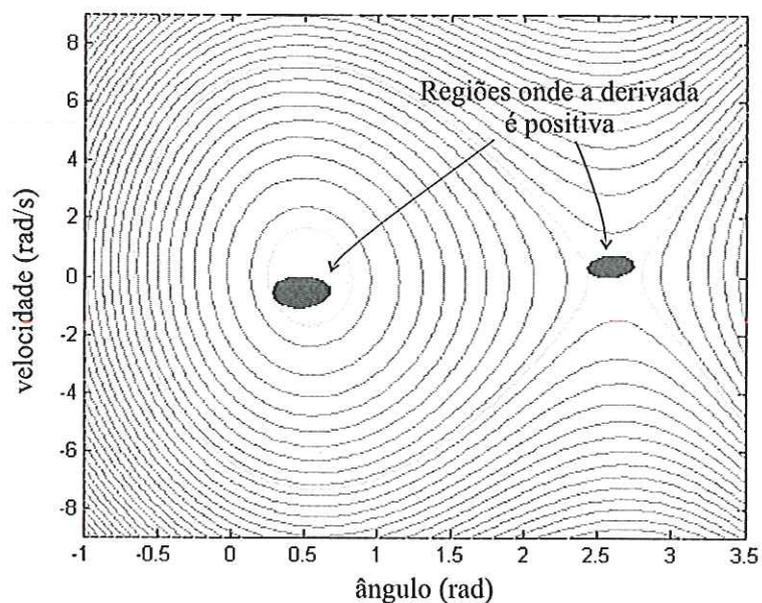


Figura 6.1: Regiões com  $\dot{W} > 0$ , para um sistema  $x$  barramento infinito.

### Sistema Multimáquinas

Considere o sistema composto por  $n$  máquinas onde a  $n$ -ésima máquina é um barramento infinito. A função energia é dada por:

$$\begin{aligned}
 W = & \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ M_i \frac{\omega_i^2}{2} - P_i \delta_i - C_i \cos \delta_i + D_i \sin \delta_i - \beta_i \omega_i [P_i - C_i \sin \delta_i - \right. \\
 & - D_i \cos \delta_i - \left. \sum_{j=i;\neq i}^{n-1} C_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) - \sum_{j=1;\neq i}^{n-1} D_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) \right] - \\
 & \left. \sum_{j=i+1}^{n-1} C_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + cte \right\} \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

A expressão acima é uma função de Lyapunov no senso da extensão do princípio de invariância se as condutâncias de transferência são suficientemente pequenas. Os parâmetros  $\beta_i$  devem ser escolhidos de forma que (6.5) seja definida positiva.

Bretas e Alberto (2000a) apresentaram esta nova função, a qual é uma função de Lyapunov no sentido mais geral da extensão do princípio de invariância, para o sistema de potência reduzido, quando as condutâncias de transferência são suficientemente pequenas. Embora isto tenha sido um grande avanço, o problema continua em aberto, pois somente foi tratada a estimativa da área de atração para um sistema de uma máquina versus barramento infinito, faltando um critério sistemático que possibilite a estimativa da região de atração em um sistema de potência multimáquinas.

## 6.2 Estrutura da Rede Preservada

Quando tem-se a estrutura da rede preservada, pode-se se dar um melhor tratamento aos modelos das cargas, conforme apresentado na Seção 5.2.

Desta forma, diversos pesquisadores tem-se empenhado em encontrar funções energia onde os modelos das cargas são mais realísticos. Tsolas et al. (1985) e Davy e Hiskens (1997) propuseram funções energia onde a carga referente a potência ativa é modelada com termo constante e a parcela de potência reativa é modelada com termos dependentes da tensão. Um grande avanço foram dados por Hill e Bergen (1982) e Alberto e Bretas (1998), que propuseram funções energia

onde a carga de potência ativa é modelada com um termo constante adicionado a um termo com dependência linear da frequência, a carga referente à potência reativa é modelada com termos dependentes da tensão.

Mesmo com tanto empenho por parte dos pesquisadores em encontrar uma função de Lyapunov com modelos de cargas mais detalhados, não houve nenhuma melhora no modelo das cargas no que diz respeito parte de potência ativa.

Este trabalho também teve como objetivo, encontrar uma nova função de Lyapunov no sentido mais geral da extensão do princípio de invariância de LaSalle para modelos que preservam a estrutura da rede. Neste caso, infelizmente não encontramos uma função satisfazendo todas as hipóteses requeridas.

Uma tentativa em estabelecer uma função energia ( $V$ ) onde a parte de potência ativa é modelada com termos dependentes da tensão foi realizada. O procedimento utilizado foi o mesmo apresentado na Seção 6.1.1, isto é, através de um termo cruzado. Neste caso, o termo cruzado relaciona a parte de potência ativa da carga com o termo de potência consumida. O problema encontrado foi em relação a derivada de  $V$ , onde não podia-se afirmar que a região onde a derivada ( $\dot{V}$ ) é positiva é limitada.

Estabelecer uma função de energia, onde se tenha cargas com a parte de potência ativa modeladas com termos dependentes da tensão, ainda é um problema em aberto no campo de funções de Lyapunov para análise de estabilidade transitória, mesmo no sentido da extensão do Princípio de Invariância de LaSalle.



## Capítulo 7

# Testes Realizados e Análise dos Resultados

Neste capítulo são apresentadas as simulações realizadas com os sistemas testes:

- Sistema composto por 3 barras e 3 unidades geradoras.
- Sistema IEEE-14, composto por 14 barras e 5 unidades geradoras.

A topologia e os dados de linha e de barras se encontram no Apêndice A

Os testes são apresentados considerando as cargas como impedância constante, neste caso é implementada a função de Lyapunov apresentada na Seção 5.1.1. Com a estrutura da rede preservada são apresentados os resultados obtidos com a função de Lyapunov proposta por Tsolas et al. (1985) na Seção 5.2.1.

As demais funções energia apresentadas nas Seções 5.1.2 e 6.1.1 não foram implementadas devido à dificuldade encontrada de se ter um sistema elétrico reativo, quando desprezam-se as condutâncias de transferência. A função de Lyapunov apresentada na Seção 5.2.2 também não foi implementada devido à dificuldade de se estimar as frequências de todos os barramentos do sistema, inclusive os barramento de carga.

A simulação das equações que representam a dinâmica do sistema é realizada através do processo de integração numérica no domínio do tempo, conhecido como método “passo a passo”. A obtenção do tempo crítico de abertura é obtido através de sucessivas simulações até que alguma(s) máquina(s) perca(m) o sincronismo

com as demais. Desta maneira, o método “passo a passo” é bastante lento e exige um esforço computacional elevado. Os testes realizados com as funções energia são apresentados para os casos estáveis e instáveis do sistema elétrico.

Considerando as cargas como impedância constante, a topologia do sistema é reduzida aos nós das f.e.m.'s, conforme visto na Seção 2.2. O modelo preservando a estrutura da rede, apresentado na Seção 2.3, também é utilizado para a simulação da dinâmica do sistema elétrico, para efeito de comparação com os resultados obtidos com o sistema reduzido aos nós das f.e.m.'s.

A seguir são apresentados os resultados obtidos a partir dos sistemas testes.

## 7.1 Resultados obtidos para o sistema 3 barras

Os testes com o sistema 3 barras são realizados considerando um curto circuito trifásico sólido na linha de transmissão entre os barramentos 1 – 2, nas proximidades da barra 2.

Utilizando o método “passo a passo”, conclui-se que o  $t_{AB} \in [0.194s, 0.196s]$ , considerando a redução da rede aos nós das f.e.m.'s. As Figs. 7.1 e 7.2 mostram respectivamente o comportamento dos ângulos e das velocidades angulares dos geradores, para um tempo de abertura de 0.194 s. Nesta situação pode-se observar que os geradores do sistema permanecem oscilando em conjunto, isto é, o sistema permanece em sincronismo. Para um  $t_{AB} = 0.196$  s, tem-se uma situação instável em que o gerador número 1 perde o sincronismo com os demais, as Figs. 7.3 e 7.4 ilustram este caso, respectivamente para comportamento dos ângulos e das velocidades angulares dos geradores.

Preservando a estrutura da rede e utilizando o método “passo a passo”, obteve-se  $t_{AB} \in [0.194s, 0.196s]$ . Para um tempo de abertura de 0.194 s, situação em que o sistema permanece em sincronismo, as Figs. 7.5 e 7.6 ilustram o comportamento dos ângulos e das velocidades angulares dos geradores. A situação em que o sistema perde o sincronismo é obtida para um  $t_{AB} = 0.196s$ , as Figs. 7.7 e 7.8 mostram respectivamente o comportamento dos ângulos e das velocidades angulares dos geradores. Nesta situação pode-se observar que o gerador 1 perde

o sincronismo com os demais geradores.

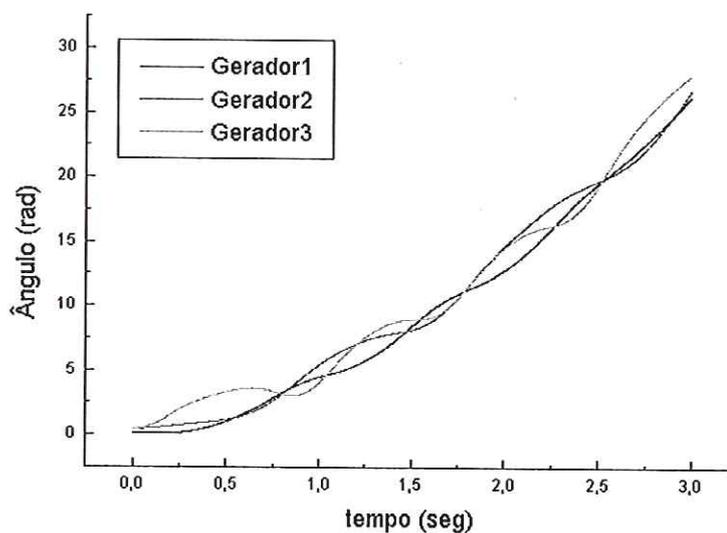


Figura 7.1:  $t_{AB} = 0.194$  seg. - Carga como impedância constante.

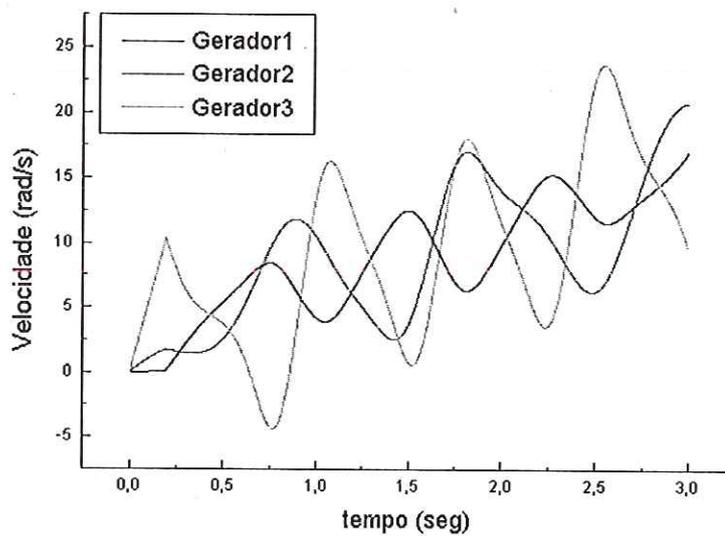


Figura 7.2:  $t_{AB} = 0.194$  seg. - Carga como impedância constante.

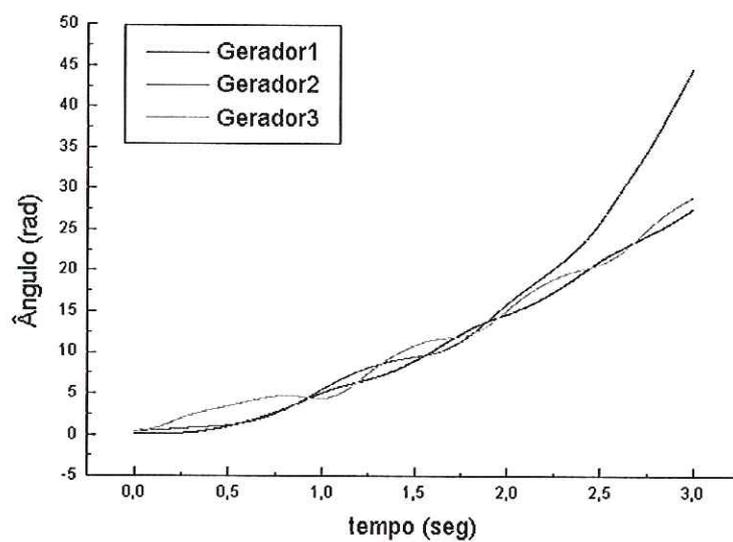


Figura 7.3:  $t_{AB} = 0.196$  seg. - Carga como impedância constante.

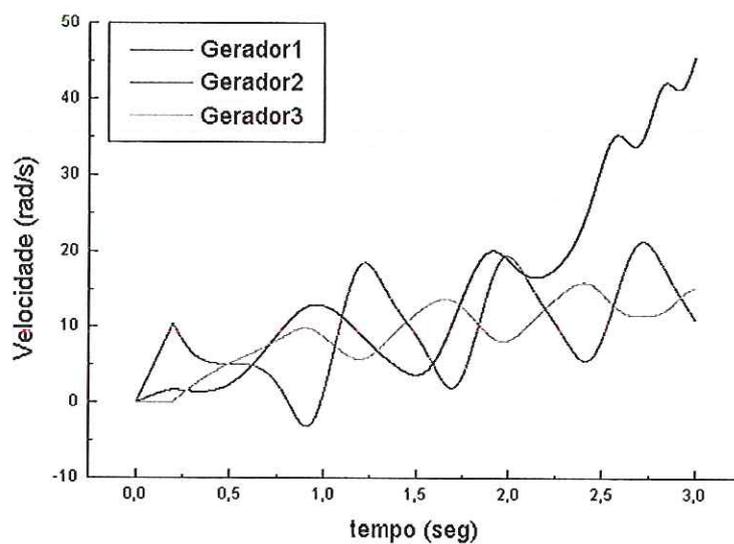


Figura 7.4:  $t_{AB} = 0.196$  seg. - Carga como impedância constante.

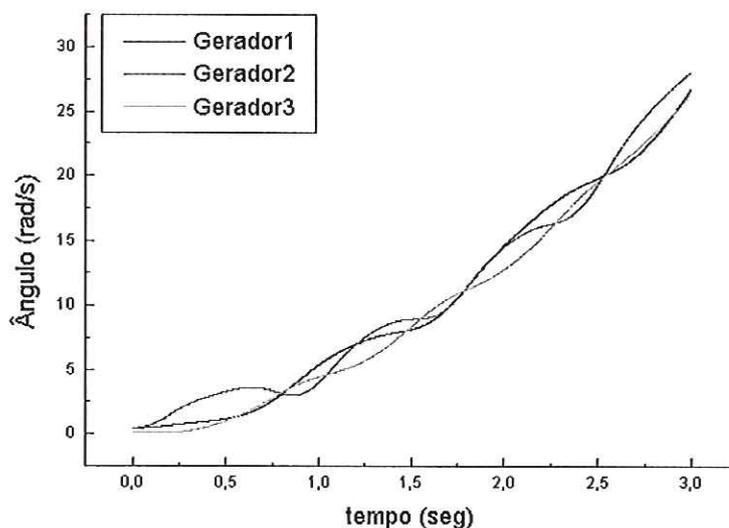


Figura 7.5:  $t_{AB} = 0.194$  seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante.

#### Função de Lyapunov proposta por Aylett

A função de Lyapunov do tipo função energia foi apresentada na Seção 5.1.1 e dada por (5.10). A Fig. 7.9 representa uma situação estável, uma vez que a energia cinética ( $E_{cin}$ ) do sistema manteve-se oscilando com um valor limitado. Uma situação instável é dada pela Fig. 7.10, como se pode observar a energia cinética torna-se ilimitada, esta situação significa que uma das máquinas perde o sincronismo com as demais.

#### Função energia proposta por Tsolas et al.

A função energia proposta por Tsolas et al. (1985) foi apresentada na Seção 5.2.1 e dada por (5.49). A Fig. 7.11 representa uma situação estável, uma vez que a energia cinética ( $E_{cin}$ ) do sistema manteve-se oscilando com valor limitado. Uma situação instável é dada pela Fig. 7.12, como pode-se observar, a energia cinética do sistema torna-se ilimitada.

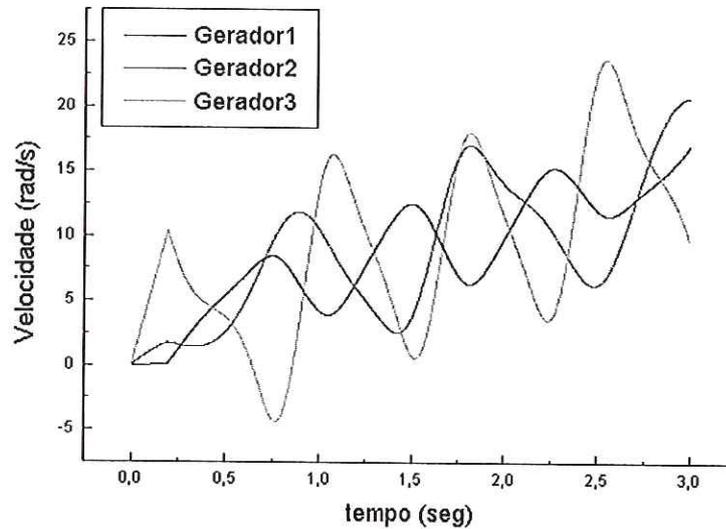


Figura 7.6:  $t_{AB} = 0.194$  seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante.

### Análise dos Resultados

O método "passo a passo" tem a grande vantagem de nos fornecer um valor bastante preciso do tempo crítico de abertura. Desta forma, este resultado será utilizado para efeito de comparação com o valor encontrado para o tempo crítico de abertura pelo método direto PEBS. A tabela abaixo nos fornece os tempos críticos de abertura obtidos com as implementações realizadas.

Sistema	Método "passo a passo"		Método direto PEBS	
	Rede reduzida	Preservando a estrutura	Rede reduzida	Preservando a estrutura
3 barras	[0.194,0.196]	[0.194,0.196]	0.154	0.173

Tabela 7.1: Comparação dos  $t_{CA}$  - Sistema 3 barras

Como se pode observar, o tempo crítico de abertura obtido pelo método PEBS

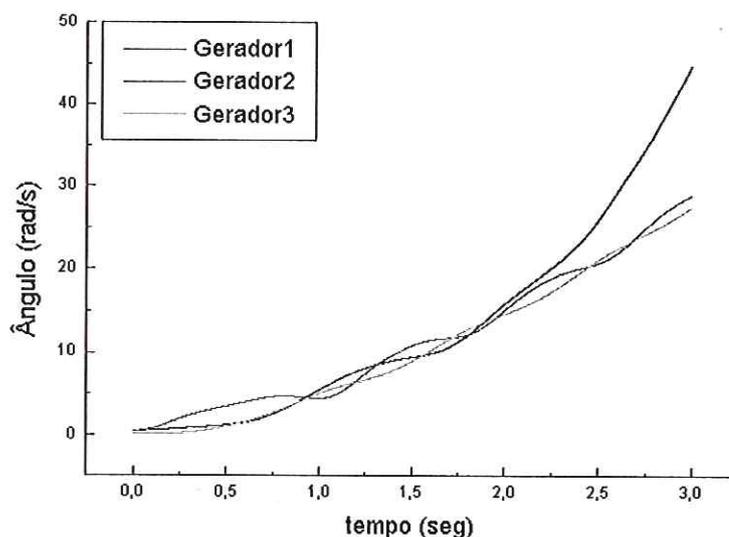


Figura 7.7:  $t_{AB} = 0.196$  seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante.

é inferior aos tempos obtidos pelo método "passo a passo". Este resultado se deve ao fato de que a estimativa da região de atração fornecida pelos métodos diretos está contida dentro da verdadeira área de atração do sistema, daí o porque da estimativa do tempo de abertura ser tão conservador.

## 7.2 Resultados obtidos para o sistema teste IEEE-

### 14

Os testes com o sistema IEEE-14 barras, foram realizados considerando um curto trifásico sólido na barra 7. A topologia da rede pós falta é considerada a mesma topologia do pré-falta.

Reduzindo o sistema elétrico aos nós das f.e.m.'s e simulando as equações dinâmicas do sistemas através do método "passo a passo", conclui-se que o  $t_{AB} \in [0.480s, 0.481s]$ . As Figs. 7.13 e 7.14 mostram respectivamente o compor-

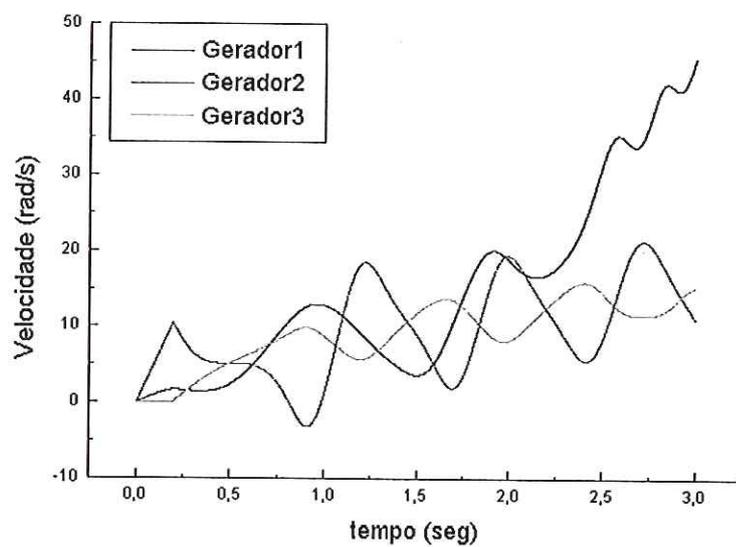


Figura 7.8:  $t_{AB} = 0.196$  seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante.

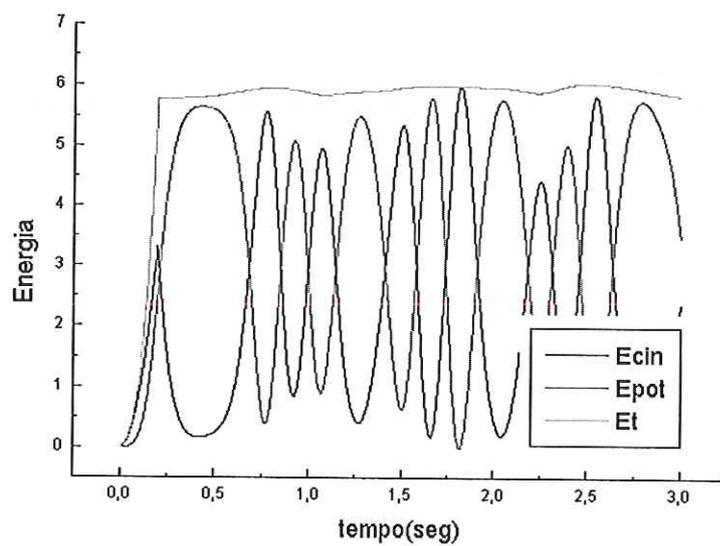


Figura 7.9:  $t_{AB} = 0.194$  seg. - Carga como impedância constante.

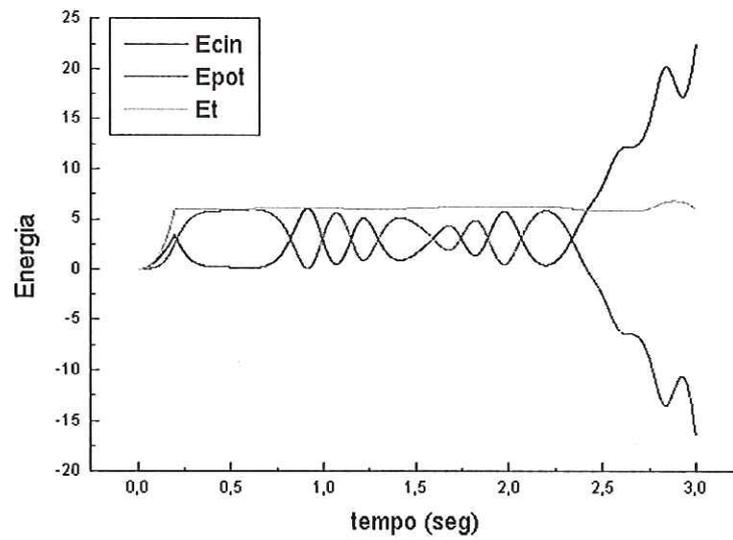


Figura 7.10:  $t_{AB} = 0.196$  seg. - Carga como impedância constante.

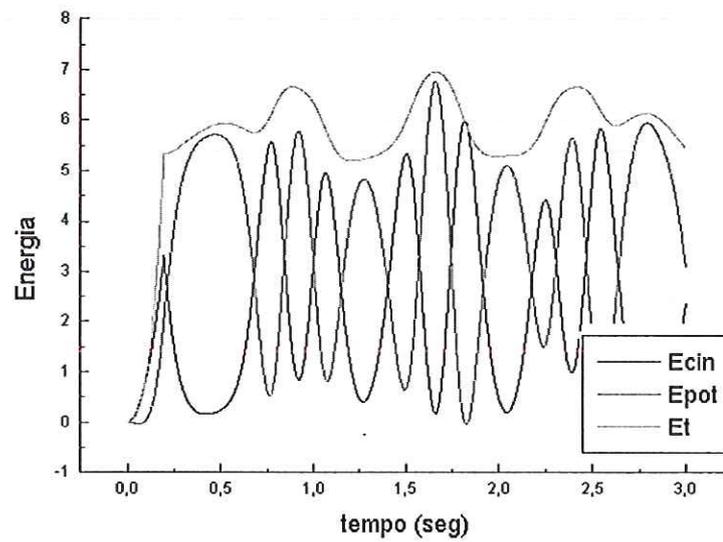


Figura 7.11:  $t_{AB} = 0.194$  seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante.

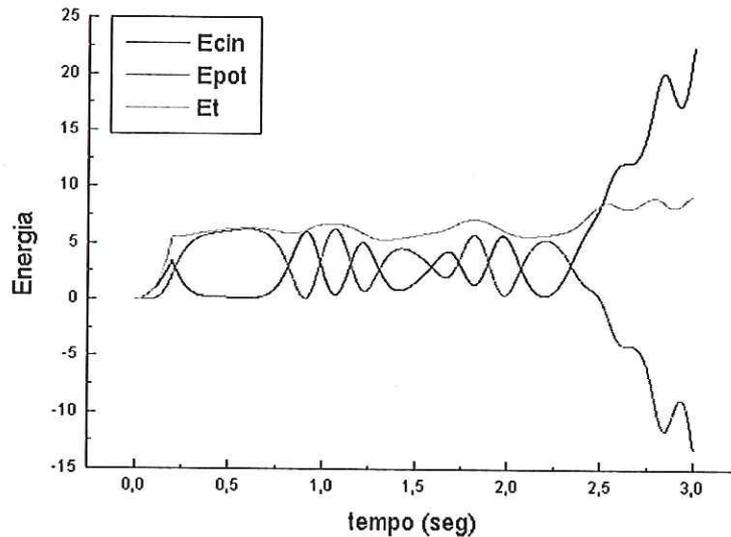


Figura 7.12:  $t_{AB} = 0.196$  seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante.

tamento dos ângulos e das velocidades angulares dos geradores, para um tempo de abertura de 0.480 s. Nesta situação pode-se observar que os geradores do sistema permanecem em sincronismo. Para um  $t_{AB} = 0.481s$ , tem-se uma situação instável em que o gerador número 5 perde o sincronismo com os demais, as Figs. 7.3 e 7.4 ilustram este caso, respectivamente para comportamento dos ângulos e das velocidades angulares dos geradores.

Preservando a estrutura da rede e utilizando o método “passo a passo”, obteve-se  $t_{AB} \in [0.480s, 0.481s]$ . Para um tempo de abertura de 0.194 s, situação em que o sistema permanece em sincronismo, as Figs. 7.15 e 7.16 ilustram o comportamento dos ângulos e das velocidades angulares dos geradores. A situação em que o sistema perde o sincronismo é obtida para um  $t_{AB} = 0.481s$ , as Figs. 7.19 e 7.20 mostram respectivamente o comportamento dos ângulos e das velocidades angulares dos geradores. Nesta situação pode-se observar que o gerador 5 perde o sincronismo com os demais geradores.

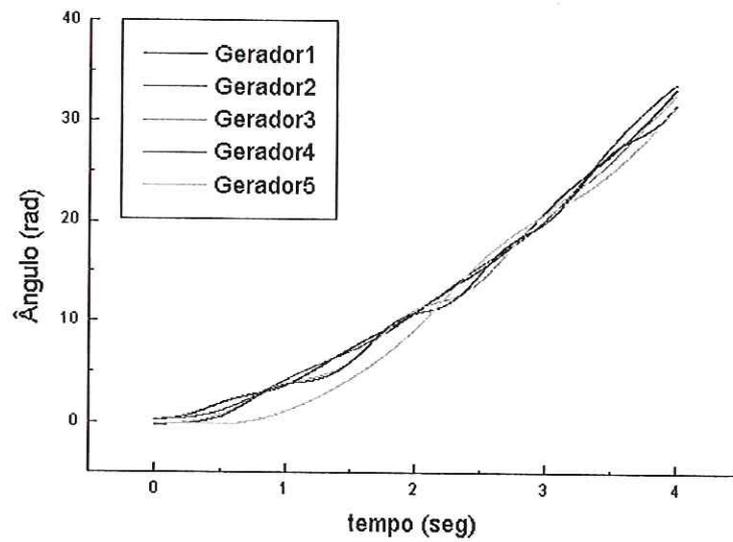


Figura 7.13:  $t_{AB} = 0.480$  seg. - Carga como impedância constante.

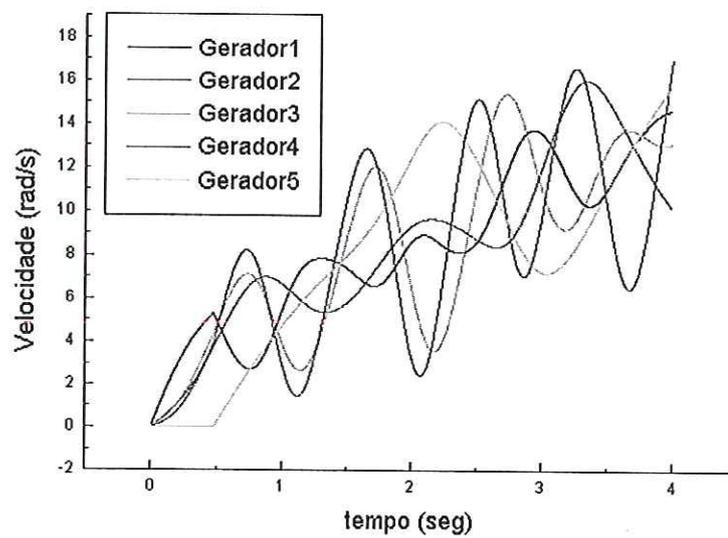


Figura 7.14:  $t_{AB} = 0.480$  seg. - Carga como impedância constante.

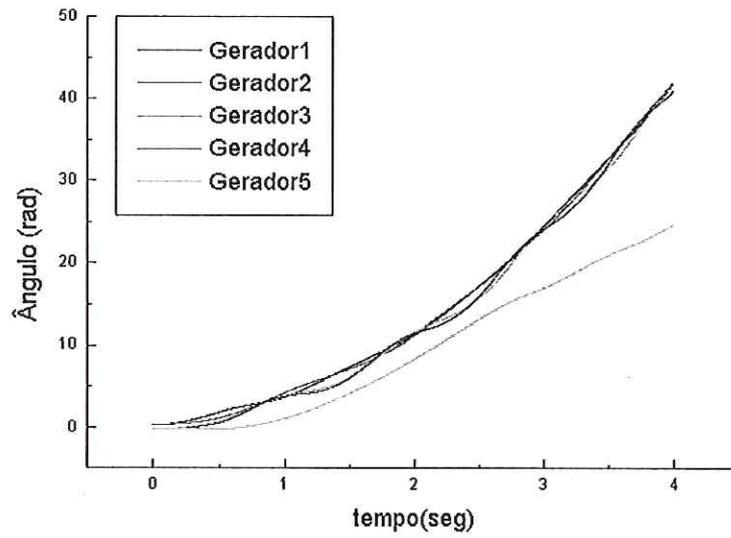


Figura 7.15:  $t_{AB} = 0.481$  seg. - Carga como impedância constante.

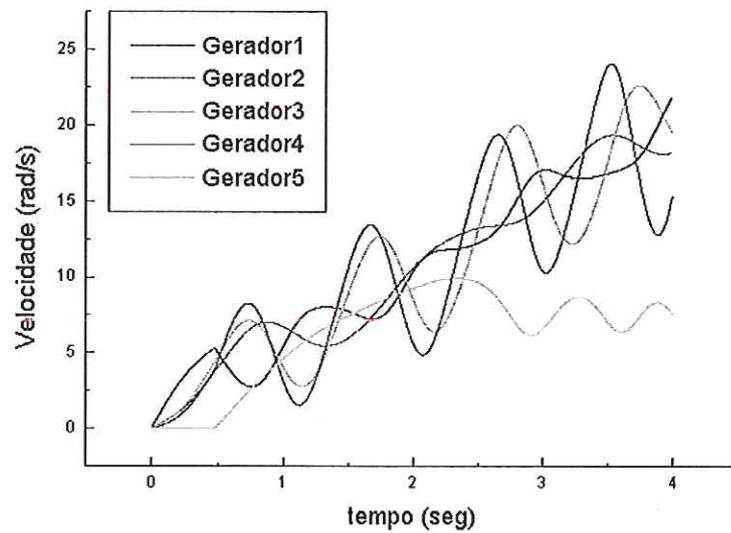


Figura 7.16:  $t_{AB} = 0.481$  seg. - Carga como impedância constante.

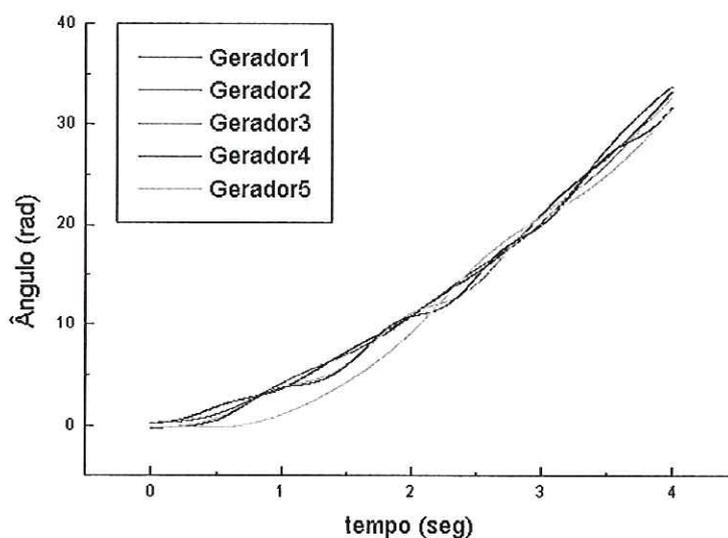


Figura 7.17:  $t_{AB} = 0.480$  seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante.

#### Função de Lyapunov proposta por Aylett

As Fig. 7.21 e 7.22 ilustram respectivamente os casos estáveis e instáveis.

#### Função de Lyapunov proposta por Tsolas et al.

As Fig. 7.23 e 7.24 ilustram respectivamente os casos estáveis e instáveis.

#### Análise dos Resultados

A tabela abaixo nos fornece os tempos críticos de abertura obtidos com as implementações realizadas.

Como era de se esperar, o tempo crítico de abertura obtido pelo método PEBS é inferior aos tempos obtidos pelo método “passo a passo”.

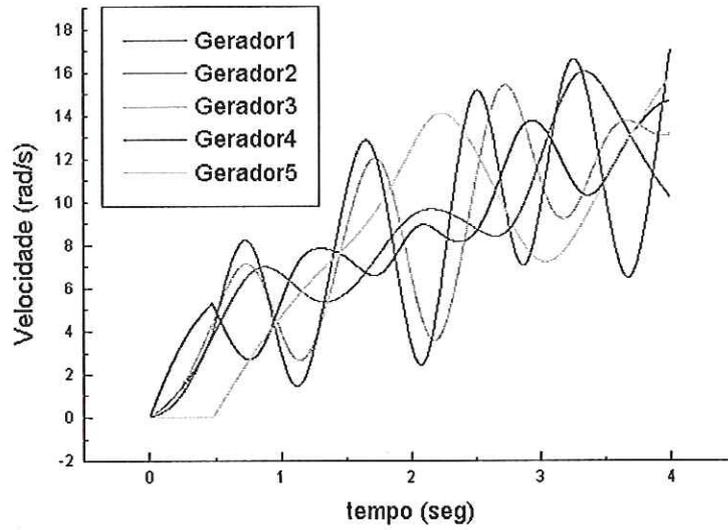


Figura 7.18:  $t_{AB} = 0.480$  seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante.

Sistema	Método "passo a passo"		Método direto PEBS	
	Rede reduzida	Preservando a estrutura	Rede reduzida	Preservando a estrutura
IEEE - 14	[0.480,0.481]	[0.480,0.481]	0.380	0.409

Tabela 7.2: Comparação dos  $t_{CA}$  - Sistema IEEE 14

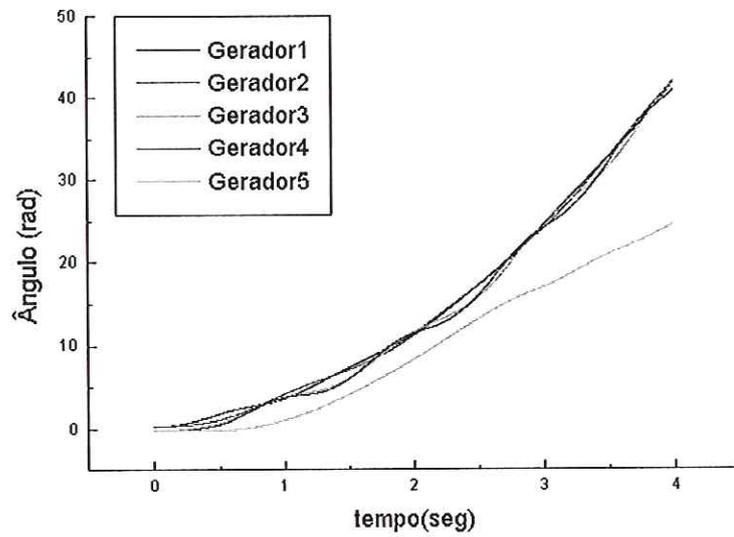


Figura 7.19:  $t_{AB} = 0.481$  seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante.

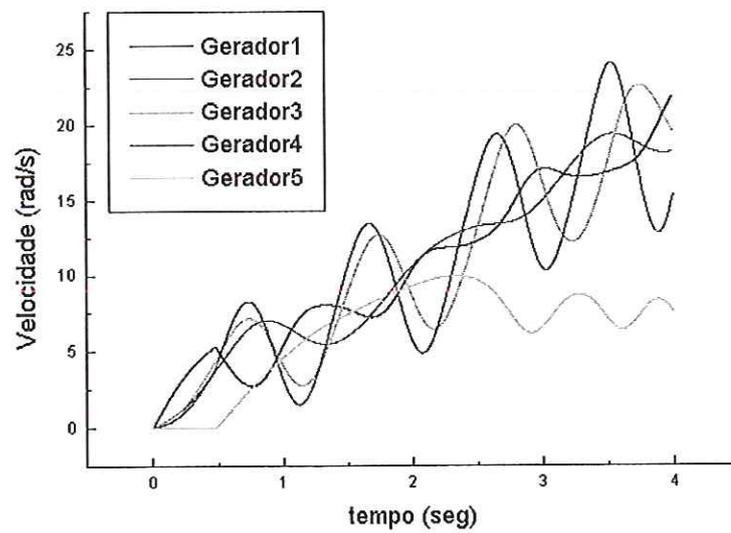


Figura 7.20:  $t_{AB} = 0.481$  seg. - Preservando a estrutura da rede, carga PQ constante.

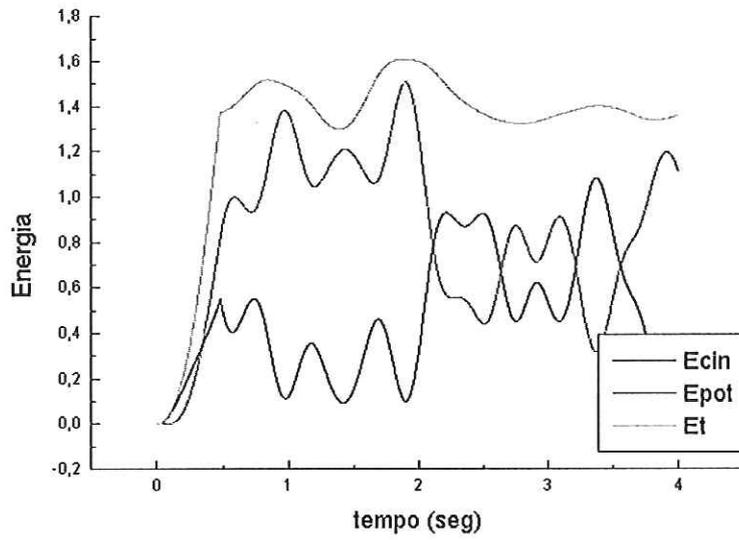


Figura 7.21: Simulação considerando tempo de abertura = 0.480 seg.

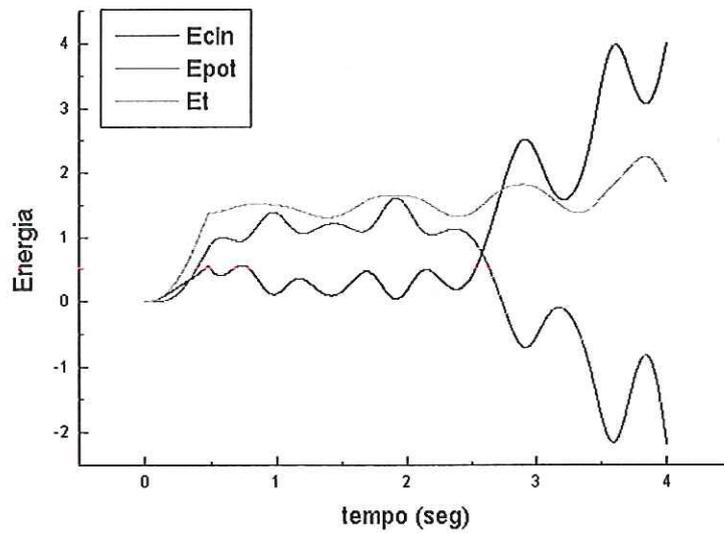


Figura 7.22: Simulação considerando tempo de abertura = 0.481 seg.

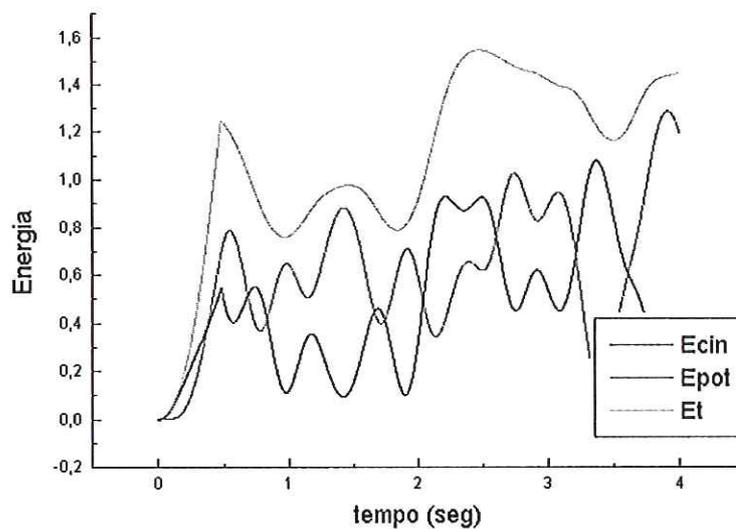


Figura 7.23: Simulação considerando tempo de abertura = 0.480 seg.

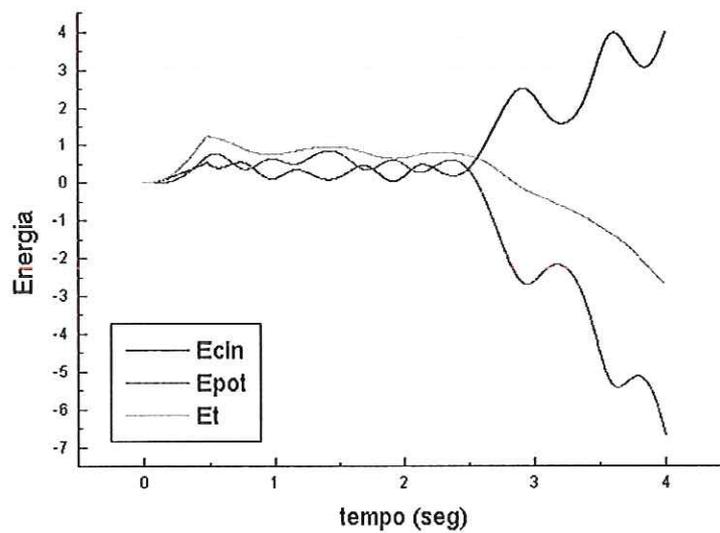


Figura 7.24: Simulação considerando tempo de abertura = 0.481 seg.

11

7

8

9

10

11

12

# Capítulo 8

## Conclusões

O trabalho apresentado se trata de um estudo sobre as diversas funções de Lyapunov utilizadas para a análise de estabilidade transitória em sistemas de potência. A análise de estabilidade pelo método de Lyapunov é eficiente, já que não requer a resolução do conjunto de equações diferenciais no domínio do tempo, denominado método "passo a passo". A desvantagem da utilização dos métodos diretos de análise de estabilidade transitória, está em encontrar uma função que satisfaça as condições do Teorema de Lyapunov.

Os estudos de funções de Lyapunov, para sistemas de potência, podem ser divididos em duas linhas de pesquisa, de acordo com a estrutura da rede:

- Rede reduzida aos nós das f.e.m.'s.
- Preservando a estrutura da rede.

Quando se considera o estudo com a redução da rede aos nós da f.e.m.'s, obrigatoriamente as cargas são modeladas como impedância constante. A maior dificuldade encontrada nesta análise, se diz respeito à inclusão ou não dos termos de condutância de transferência na função energia. Estes termos são responsáveis por gerarem uma integral dependente do caminho. Para a resolução destas integrais, pode-se realizar uma aproximação do caminho de integração por uma reta ou simplesmente desprezá-las, conforme a grande maioria dos pesquisadores. A inclusão das condutâncias de transferência na função energia acarreta a violação

do Teorema de Lyapunov.

A modelagem do sistema elétrico preservando a estrutura da rede permite que se tenha uma melhor representação das cargas, podendo estas serem modeladas com termos dependentes da tensão e (ou) frequência.

Um procedimento bastante utilizado para se obter as funções de Lyapunov, consiste em modelar o sistema através do problema de Lure, onde tem-se um sistema linear realimentado por uma não linearidade. Neste caso a análise da estabilidade é realizada através do critério multivariável de Popov. Contudo este procedimento não elimina o problema da inclusão das condutâncias de transferência e nem da modelagem da carga de potência ativa com termos dependentes da tensão.

Os gráficos obtidos através da integração numérica das equações dinâmicas do sistema, apresentam o mesmo comportamento e o intervalo calculado para o tempo crítico de abertura são idênticos, tanto para o sistema com a rede reduzida quanto para a estrutura preservada. O valor do tempo crítico de abertura encontrado pelo método direto PEBS é inferior ao tempo crítico determinado pelo método "passo a passo", isto se deve ao fato que a região de atração encontrada pelo PEBS está contida na verdadeira área de atração do sistema.

O principal objetivo do trabalho foi apresentar uma função de Lyapunov, com a estrutura da rede reduzida, onde as condutâncias de transferência são suficientemente pequenas. Para isto, utiliza-se a extensão do princípio de invariância de LaSalle, proposta por Rodrigues et al. (2000), que requer condições menos restritivas onde permite-se que  $\dot{V}$  seja positiva em algumas regiões, desta forma encontrar uma função de Lyapunov pode ser mais fácil, permitindo que um maior número de casos possam ser tratados.

Como se pode observar, ainda existem muitos problemas em aberto, cujo

principal objetivo está em se encontrar funções de Lyapunov com modelos mais detalhados de sistemas de potência.



# Apêndice A

## Dados dos Sistemas Testes

### A.1 Topologia do sistema teste 3 barras

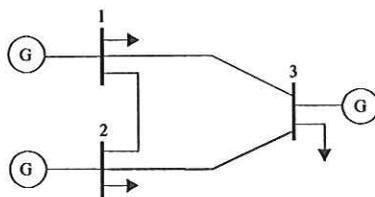


Figura A.1: Sistema 3 barras e 3 geradores

Linha Nf - Nt	Resistência	Reatância	Susceptância
1 - 2	0.000	0.4600	0.000
1 - 3	0.000	0.2600	0.000
2 - 3	0.000	0.0806	0.000

Tabela A.1: Dados de linhas para o sistema teste 3 barras

### A.2 Sistema 14 barras e 5 geradores

Barra	Tensão (pu)	Ângulo (graus)	Potência		Reatância Transitória (pu)	Momento de Inércia
			MW	MVAR		
1	1.00	15.00	150.00	45.00	0.088	0.053
2	1.00	15.00	100.00	30.00	0.050	0.079
3	1.00	0.00	1240.00	250.00	0.015	0.318

Tabela A.2: Dados de barras para o sistema teste 3 barras

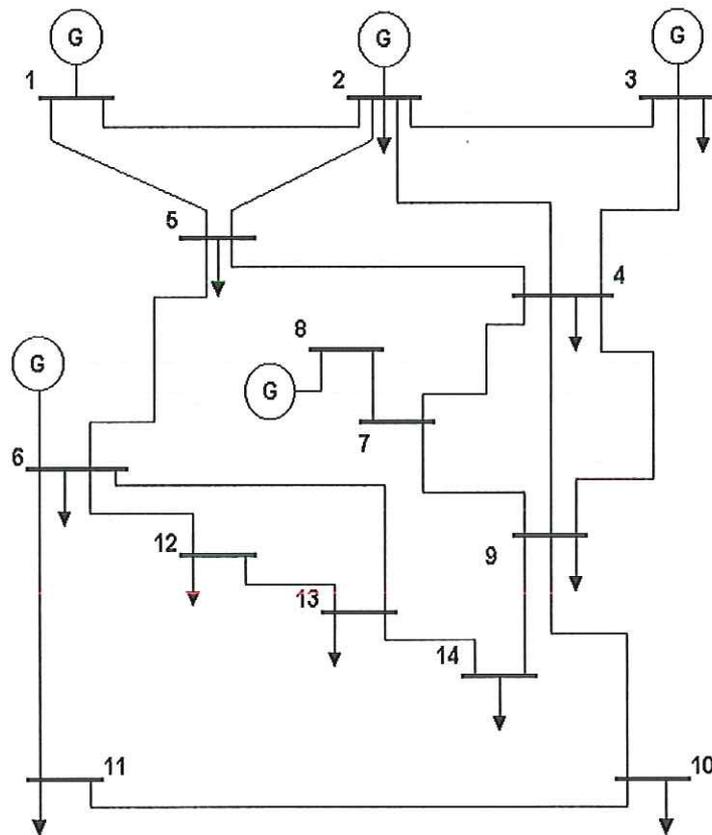


Figura A.2: Topologia do sistema teste 14 barras

Linha Nf - Nt	Resistência	Reatância	Susceptância
1 - 2	0.01938	0.05917	0.05280
1 - 5	0.05403	0.22304	0.04920
2 - 3	0.04699	0.19797	0.04380
2 - 4	0.05811	0.17632	0.03740
2 - 5	0.05695	0.17388	0.03400
3 - 4	0.06701	0.17103	0.03460
4 - 5	0.01335	0.04211	0.01280
4 - 7	0.00000	0.20912	0.00000
4 - 9	0.00000	0.55618	0.00000
5 - 6	0.00000	0.25202	0.00000
6 - 11	0.09498	0.19890	0.00000
6 - 12	0.12291	0.25581	0.00000
6 - 13	0.06615	0.13027	0.00000
7 - 8	0.00000	0.17615	0.00000
7 - 9	0.00000	0.11001	0.00000
9 - 10	0.03181	0.08450	0.00000
9 - 14	0.12711	0.27038	0.00000
10 - 11	0.08205	0.19207	0.00000
12 - 13	0.22092	0.19988	0.00000
13 - 14	0.17093	0.34802	0.00000

Tabela A.3: Dados de linhas para o sistema teste IEEE - 14 barras

Barra	Tensão (pu)	Ângulo (graus)	Potência		Reatância Transitória (pu)	Momento de Inércia
			MW	MVAR		
1	1.06	0.0	0	0	0.100	0.079
2	1.045	-4.9	21.7	12.7	1.250	0.053
3	1.010	-12.6	94.2	19.0	0.750	0.026
4	1.031	-10.4	47.8	-3.9		
5	1.036	-8.9	7.6	1.6		
6	1.070	-14.6	11.2	7.5	1.500	0.014
7	1.056	-13.5	0	0		
8	1.090	-13.5	0	0	1.200	0.067
9	1.050	-15.1	29.5	16.6		
10	1.046	-15.3	9.0	5.8		
11	1.054	-15.1	3.5	1.8		
12	1.055	-15.4	6.1	1.6		
13	1.049	-15.5	13.5	5.8		
14	1.039	-16.3	14.9	5.0		

Tabela A.4: Dados de barras para o sistema teste IEEE - 14 barras



# Bibliografia

- Alberto, L. F. C. e Bretas, N. G. (1998). Função energia para sistemas de potência com cargas dependentes da frequência, *Anais do XII Congresso Brasileiro de Automática* 2: 703–708.
- Alberto, L. F. C., Silva, F. H. J. R. e Bretas, N. G. (2001). Direct methods for transient stability analysis in power systems: state of art and future perspectives, *Proc. of Powertech2001 - Portugal (aceito para apresentação)*
- Athay, T., Podmore, R. e Virmani, S. (1979). A practical method for the direct analysis of transient stability, *IEEE Trans on Power Apparatus and Systems PAS-98, No.2*: 573–584.
- Aylett, P. D. (1958). The energy-integral criterion of transient stability limits of power systems, *Proc. IEE* vol. 105c: 527–536.
- Bergen, A. R. e Hill, D. J. (1981). A structure preserving model for power system stability analysis, *IEEE Trans on Power Apparatus and Systems PAS-100, No. 1*: 25–35.
- Bretas, N. G. e Alberto, L. F. C. (2000a). Energy function for power systems with transmission losses: extension of the invariance principle, *Proc. International Conference on Power System Technology* vol. 1: 145–150.
- Bretas, N. G. e Alberto, L. F. C. (2000b). *Estabilidade transitória em sistemas eletroenergéticos*, EESC/USP.

- C. J. Tavora, O. J. M. S. (1971). Stability analysis of power systems, *IEEE Trans. on Power Apparatus and System PAS-72*: 1138–1144.
- Chiang, H. D. (1989). Study of the existence of energy functions for power systems with losses, *IEEE Trans on Circuits and Systems CAS-36*, No. 11: 1423–1429.
- Chiang, H. D., Wu, F. F. e Varaiya, P. P. (1987). Foundations of direct methods for power system transient stability analysis, *IEEE Trans on Circuits and Systems CAS-34*, No. 2: 160–173.
- Chiang, H. D., Wu, F. F. e Varaiya, P. P. (1988). Foundations of the potential energy boundary surface method for power system transient analysis, *IEEE Trans on Circuits and Systems CAS-35*, No. 6: 712–728.
- Davy, R. J. e Hiskens, I. A. (1997). Lyapunov functions for multimachine power systems with dynamic loads, *IEEE Trans on Circuits and Systems CAS-44*, No. 9: 796–812.
- Fouad, A. A. e Vittal, V. (1992). *Power system transient stability using the transient energy function method*, Prentice Hall, New Jersey.
- Henner, V. E. (1974). Comments on "on lyapunov functions for power systems with transfer conductances", *IEEE Trans on Automatic Control* pp. 621–623.
- Hill, D. J. e Bergen, A. R. (1982). Stability analysis of multimachine power networks with linear frequency dependent loads, *IEEE Trans on Circuits and Systems CAS-29*, No.12: 840–848.
- Hill, D. J. e Chong, C. N. (1989). Lyapunov functions of lur'e-postnikov form for structure preserving models of power systems, *Automatica* 25-3: 453–460.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, New Jersey.
- Kwenty, H. G., Bahar, L. Y. e Pasrija, A. K. (1985). Energy-like lyapunov functions for power system stability analysis, *IEEE Trans on Circuits and Systems* 32-11: 1140–1148.

- Moon, Y.-H., Cho, B.-H., Rho, T.-H. e Choi, B.-K. (1999). The development of equivalent system technique for deriving an energy function reflecting transfer conductances, *IEEE Trans on Power Systems* 14-4: 1335-1341.
- Narasimhamurthi, N. (1984). On the existence of energy function for power systems with transmission losses, *IEEE Trans on Circuits and Systems CAS-31*, No. 2: 199-203.
- Pai, M. A. (1981). *Power system stability (Analysis by the direct method of Lyapunov)*, North-Holland publishing company.
- Pai, M. A., Laufenberg, M. e Sauer, P. W. (1996). Some clarifications in the transient energy function method, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems* 18-1: 65-72.
- Pai, M. A. e Murthy, P. G. (1973). On lyapunov functions for power systems with transfer conductances, *IEEE Trans on Automatic Control* pp. 181-183.
- Ribbens-Pavella, M. (1971). Transient stability of multimachine power systems by lyapunov's direct method, *IEEE Winter Power Meeting, New York Paper 71-CP17-PWR*.
- Rodrigues, H. M., Alberto, L. F. C. e Bretas, N. G. (2000). On the invariance principle: generalizations and applications to synchronization, *IEEE Trans on Circuits and Systems* 47-5: 730-739.
- Tsolas, N. A., Arapostathis, A. e Varaiya, P. P. (1985). A structure preserving energy function for power system transient stability analysis, *IEEE Trans on Circuits and Systems CAS-32*, No. 10: 1041-1049.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice Hall, New Jersey.
- Willems, J. L. (1971). Direct methods for transient stability studies in power system analysis, *IEEE Trans on Automatic Control* 16-4: 332-341.

- Willems, J. L. e Willems, J. C. (1970). The application of lyapunov methods to the computation of transient stability regions for multimachine power systems, *IEEE Trans on Power Apparatus and Systems PAS-89*, No. 5/6: 795-801.
- Xiong, K. (1998). An approach of a lurie-type lyapunov function for multi-machine power systems with tranfer conductances, *Int. Journal of Control* 70-3: 469-479.