Serviço de Pós-Graduação EESC/USP

EXEMPLAR REVISADO

Data de entrada no Serviço: 25/07/01

Ass.: Guilherme

MÉTODO DA FUNÇÃO LAGRANGIANA AUMENTADA-BARREIRA LOGARÍTMICA PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO

EESC - USP Biblioteca Campus de S. Carlos

Edméa Cássia Baptista

DEDALUS - Acervo - EESC

31100036697

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Geraldo R. M. da Costa

São Carlos
2001

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Licenciada **EDMÉA CÁSSIA BAPTISTA**

Tese defendida e julgada em 07-06-2001 perante a Comissão Julgadora:

APROVADO

Prof. Associado **GERALDO R. M. DA COSTA (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

Prof. Associado **MARCOS NEREU ARENALES**
(Instituto de Ciências Matemáticas e Computação/USP)

Aprovado

Prof. Titular **SECUNDINO SOARES FILHO**
(Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP)

Aprovado

Prof. Adjunto **RUBÉN AUGUSTO ROMERO LÁZARO**
(UNESP/Campus de Ilha Solteira)

APROVADA

Prof. Doutor **ANTONIO ROBERTO BALBO**
(UNESP/Campus de Bauru)

Profa. Associada **VILMA ALVES DE OLIVEIRA**
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

JOSÉ CARLOS A CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

"Para tudo há um tempo, para cada coisa há um momento debaixo dos céus...todas as coisas que DEUS fez são boas a seu tempo."

Ecle 3, 1;10.

"À minha mãe,

pelo dom da vida!!!!!!"

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Geraldo Roberto Martins da Costa, por sua valiosa orientação, compreensão, disponibilidade e paciência durante a elaboração desse trabalho.

Ao Departamento de Matemática da Unesp-Bauru, pelos afastamentos concedidos e colaboração.

Ao engenheiro Edmarcio Antonio Belati, pelo "apoio computacional", pela disponibilidade, amizade e pelo bom humor nos momentos necessários.

Às professoras Ana Lúcia, Andréa e Vanilda, pelas correções e sugestões.

Aos amigos do LOSE: Alessandra, Biagi, Claudinho, Cristiano, João, Leandro, Márcia, Sandra, Thales, e Vanusa; e aos do Departamento de Engenharia Elétrica, pela troca de idéias e valiosa convivência.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica da EESC-USP-São Carlos e das bibliotecas , pela colaboração e atenção.

Às "meninas das repúblicas", flutuantes ou não, pela convivência e amizade.

A Edna, Érica e Eli, pelo incentivo, carinho e torcida.

A "**TODOS**" os que conviveram comigo durante esse período, torcendo, apoiando, "rezando" e me compreendendo, muito **obrigada**!!!!

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS ix

LISTA DE TABELAS xi

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS xii

LISTA DE SÍMBOLOS xv

RESUMO xxi

ABSTRACT xxii

1 INTRODUÇÃO 1

2 HISTÓRICO 7

2.1 Apresentação do problema 7

2.2 Histórico do método da função barreira 8

2.3 Histórico do método da função Lagrangiana aumentada 17

2.4 Histórico do problema de fluxo de potência ótimo 54

3 REVISÃO DE MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO 62

3.1 Apresentação do problema 62

3.2 O método dual-Lagrangiano 63

3.2.1 Algoritmo 64

3.2.2 Interpretação geométrica 65

3.2.3 Dificuldades computacionais 68

3.3 O método de penalidade 68

3.3.1 Algoritmo 70

3.3.2 Interpretação geométrica 71

3.3.3 Dificuldades computacionais 74

3.4 O método de barreira 74

3.4.1 Algoritmo 76

3.4.2 Interpretação geométrica 77

3.4.3 Dificuldades computacionais 79

3.5 O método da função Lagrangiana aumentada 79

3.5.1 Algoritmo 87

3.5.2 Interpretação geométrica 88

3.5.3 Dificuldades computacionais 93

3.6 O método de Newton-Lagrangiano 93

3.6.1 Algoritmo 96

3.6.2 Dificuldades computacionais 97

4 MÉTODO DA FUNÇÃO LAGRANGIANA AUMENTADA- BARREIRA LOGARÍTMICA 98

4.1 Apresentação do problema 98

4.2 Função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica 100

4.3 Método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica 103

4.4 Algoritmo 108

5 O PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO 110

5.1 Formulação básica do fluxo de potência 110

5.2 O problema de fluxo de potência ótimo 115

5.3 A função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica associada ao problema de fluxo de potência ótimo 117

5.4 O método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica aplicado ao problema de fluxo de potência ótimo 118

5.5 Implementação computacional do algoritmo 123

6 RESULTADOS NUMÉRICOS 128

6.1 Exemplo 1 128

6.2 Exemplo 2: TESTE 133

6.3 Exemplo 3: AEP 14 141

6.4 Exemplo 4: AEP 30 145

6.5 Exemplo 5: AEP 57 149

6.6 Exemplo 6: IEEE 118 153

7 CONCLUSÕES 158

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 161

APÊNDICE 1 – BANCO DE DADOS DOS SISTEMAS ELÉTRICOS

APÊNDICE 2 – ESTADO FINAL DOS SISTEMAS ELÉTRICOS

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 3.1 - Representação geométrica da função Lagrangiana 67

FIGURA 3.2 - Representação geométrica da função Lagrangiana para o caso não convexo 68

FIGURA 3.3 - Representação geométrica da função penalidade 72

FIGURA 3.4 - Representação geométrica da atualização dos fatores de penalidade 73

FIGURA 3.5 - Representação geométrica da função penalidade para o caso não convexo 73

FIGURA 3.6 - Comportamento da função barreira 78

FIGURA 3.7 - Resolução através da função barreira 79

FIGURA 3.8 - Processo de minimização da função Lagrangiana aumentada 90

FIGURA 3.9 - Atualização dos multiplicadores de Lagrange 92

FIGURA 3.10 - Atualização dos fatores de penalidade 93

FIGURA 5.1 - Módulos do programa do método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica aplicado ao problema de FPO 125

FIGURA 6.1 - Convergência referente à Tabela 6.1 132

FIGURA 6.2 - Convergência referente à Tabela 6.2 133

FIGURA 6.3 - Sistema TESTE 134

FIGURA 6.4 - Convergência da função objetivo para o sistema TESTE 140

FIGURA 6.5 - Máximo erro de potência para o sistema TESTE 140

FIGURA 6.6 - Sistema AEP 14 141

FIGURA 6.7 - Convergência da função objetivo para o teste 1 do sistema AEP 14 143

FIGURA 6.8 - Máximo erro de potência para o teste1 do sistema AEP 14 144

FIGURA 6.9 - Sistema AEP 30 145

FIGURA 6.10 - Convergência da função objetivo para o teste 1 do sistema AEP 30 147

FIGURA 6.11 - Máximo erro de potência para o teste1 do sistema AEP 30 148

FIGURA 6.12 - Sistema AEP 57 149

FIGURA 6.13 - Convergência da função objetivo para o teste 1 do sistema AEP 57 151

FIGURA 6.14 - Máximo erro de potência para o teste 1 do sistema AEP 57 152

FIGURA 6.15 - Sistema IEEE 118 153

FIGURA 6.16 - Convergência da função objetivo para o teste 1 do sistema IEEE 118 155

FIGURA 6.17 - Máximo erro de potência para o teste 1 do sistema IEEE 118 156

LISTA DE TABELAS

TABELA 6.1 - Método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica aplicada ao exemplo 1, com c = 1 e δ = 1 131

TABELA 6.2 - Método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica aplicada ao exemplo 1, com c = 3 e δ = 1,5 131

TABELA 6.3 - Estado inicial do sistema TESTE 136

TABELA 6.4 - Limites para o nível de tensão 136

TABELA 6.5 - Comportamento das variáveis do sistema TESTE na iteração externa 1 137

TABELA 6.6 - Comportamento das variáveis do sistema TESTE na iteração externa 2 138

TABELA 6.7 - Comportamento das variáveis do sistema TESTE na iteração externa 3 138

TABELA 6.8 - Comportamento das variáveis do sistema TESTE na iteração externa 4 139

TABELA 6.9 - Testes para o sistema AEP 14 142

TABELA 6.10 - Testes para o sistema AEP 30 146

TABELA 6.11 - Testes para o sistema AEP 57 150

TABELA 6.12 - Testes para o sistema IEEE 118 154

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PL - programação linear;

PNL - programação não-linear

FPO - fluxo de potência ótimo;

DE - despacho econômico;

SEP - sistema elétrico de potência;

AEP - American Electrical Power;

KKT - Karush-Kuhn-Tucker;

SUMT - Sequential Unconstrained Minimization Technique;

MM-2 - método dos multiplicadores modificado 2;

MM-3 - método dos multiplicadores modificado 3;

BFGS - Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno;

NPSOL - Nonlinear Programming of Systems Optimization Laboratory (Haward);

EESOR - Engineering Economic Systems and Operations Research;

PBM - método dos multiplicadores barreira/penalidade;

LANCELOTI - software de Lagrangiana aumentada;

PCA - método de penalidade e conjunto ativo;

PD - método primal-dual;

BLPD	- método da função barreira logarítmica primal-dual;
IEEE	- Institute of Electrical and Electronics Engineers;
MVA	- Mega Volts Ampere;
MW	- Mega Watts;
CHESF	- Companhia Energética do São Francisco;
FP	- fluxo de potência;
NB	- número de barras da rede elétrica;
NBC	- número de barras de carga;
NBCR	- número de barras de controle reativo;
NT	- número de transformadores;
MVAr	- Mega Volt Ampère Reativo;
p.u.	- por unidade;
SL	- barra de geração (*slack*);
CR	- barra de controle reativo;
CG	- barra de carga;
LOSE	- Laboratório de Otimização de Sistemas Elétricos;
EESC	- Escola de Engenharia de São Carlos;
USP	- Universidade de São Paulo;
It.	- iteração;
It. Ext.	- iteração externa;
F. Ob.	- função objetivo;
Ang_k	- ângulo da barra k;
Pot.	- potência;
P	- potência ativa;

Q	- potência reativa;
V	- magnitude da tensão.

LISTA DE SÍMBOLOS

$f(x)$ - função objetivo;

$g(x)$ - vetor das restrições de igualdade;

$h(x)$ - vetor das restrições de desigualdade do tipo "menor ou igual";

x - vetor das variáveis primais;

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - vetor coluna;

$x^t = (x_1, \ldots, x_n)$ - vetor linha;

R - conjunto dos números reais;

$\in$ - pertence a;

λ - vetor dos multiplicadores de Lagrange associados às igualdades;

c - fator de penalidade;

La - função Lagrangiana aumentada;

∇_x - vetor gradiente com relação à x;

γ - parâmetro escalar entre 0 e 1;

r^{max} - resíduo máximo das equações de igualdade;

i, j, k, l - número inteiro;

m, n, r - número inteiro;

$P(x)$ - erro nas restrições;

$Q(x,\lambda)$ - erro na condição de ótimo;

$R(x,\lambda)$ - critério de parada;

μ - vetor multiplicador de Lagrange associado às restrições de desigualdade;

$[\,]^+$ - operador de máximo valor;

∇^2_{xx}, H - matriz Hessiana;

M(x) - matriz peso;

∂ - operador derivada;

W(x) - matriz simétrica ,semidefinida positiva e duas vezes continuamente diferenciável;

d - parâmetro positivo;

η - parâmetro positivo;

δ - fator de barreira;

b_i, d_i, w_i, q - funções auxiliares;

S - matriz diagonal com elementos positivos;

s_{ii} - escalares positivos;

$\Psi(t)$ - função exponencial $e^t - 1$;

c(x) - vetor das restrições de desigualdade do tipo "maior ou igual";

Δ - direção;

$\Phi(h_i(x))$ - função barreira-penalidade;

Labp - função Lagrangiana aumentada barreira-penalidade;

s - vetor das variáveis de folga;

Lbl - função barreira Lagrangiana;

Labl - função Lagrangiana aumentada/barreira Lagrangiana;

Γ_k - conjunto;

Labm - funcão Lagrangiana aumentada-barrreira modificada;

$\phi(x)$ - função barreira;

ϖ - função de atualização dos fatores de penalidade não decrescente e sublinear;

$\varphi(x)$ - função barreira/penalidade;

t - - vetor de variáveis;

ε - perturbação;

$\mu(\varepsilon)$ - problema primal de minimização com restrições de desigualdade e perturbado;

L - função Lagrangiana;

S - conjunto;

$\theta(\mu)$ - problema Lagrangiano;

X - conjunto;

A - vetor de variáveis;

$\Theta(x)$ - função penalidade associada às restrições de igualdade;

$\Lambda(x)$ - função penalidade associada às restrições de desigualdade;

ξ - tolerância de convergência;

p - inteiro positivo;

β - parâmetro de penalidade;

ρ - parâmetro de barreira;

$V(\varepsilon)$ - problema primal de minimização com restrições de igualdade e perturbado;

B(x)	- função barreira associada ao problema primal;
P(x)	- função penalidade associada ao problema primal;
z,si,su	- vetores de variáveis auxiliares;
Viola(x)	- variável que indica a violação das restrições;
J	- matriz Jacobiana;
$\pi u, \pi i$	- vetores dos multiplicadores de Lagrange associado às variáveis canalizadas, já na forma de igualdade;
W	- matriz Lagrangiana;
Su, Si	- matrizes diagonais com elementos positivos;
α	- passo;
α_p	- passo primal;
α_d	- passo dual;
σ	- multiplicador preestabelecido para os passos primais e duais.
P_k	- potência ativa na barra k;
Q_k	- potência reativa líquida injetada na barra k;
V_k	- magnitude da tensão na barra k;
θ_k	- ângulo de fase da tensão na barra k;
θV	- barra de referência;
PV	- barra de tensão controlada;
PQ	- barra de carga;
ΔP_k	- variação da potência ativa na barra k;
ΔQ_k	- variação da potência reativa na barra k;
P_k^{esp}	- potência ativa especificada na barra k;

Q_k^{esp} - potência reativa especificada na barra k;

P_k^G - potência ativa gerada na barra k;

P_k^C - potência ativa consumida na barra k;

Q_k^G - potência reativa gerada na barra k;

P_k^C - potência reativa consumida na barra k;

$\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$ - ângulo da tensão nas barras k e m, respectivamente;

$Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$ - admitância da linha entre as barras k e m;

Ω_k - conjunto de todas as barras vizinhas a barra k, mais a própria barra k;

V_k^{min} - limite inferior da tensão na barra k;

V_k^{max} - limite superior da tensão na barra k;

Q_k^{min} - limite inferior da potência reativa na barra k;

Q_k^{max} - limite superior da potência reativa na barra k;

siV_k - variável auxiliar inferior associada à V_k;

suV_k - variável auxiliar superior associada à V_k;

sit_l - variável auxiliar inferior associada à t_l;

sut_l - variável auxiliar superior associada à t_l;

λP_i - multiplicador de Lagrange associado à equação ΔP_i;

λQ_j - multiplicador de Lagrange associado à equação ΔQ_j;

πu_{v_k} - multiplicador de Lagrange associado à equação superior de V_k;

πi_{v_k} - multiplicador de Lagrange associado à equação inferior de V_k;

πu_{t_l} - multiplicador de Lagrange associado à equação superior de t_l;

πi_{t_l} - multiplicador de Lagrange associado à equação inferior de t_l;

μ_m - multiplicador de Lagrange associado à equação da variável Q_m;

I_t, I_v - matrizes identidades;

BI - matriz em bloco;

DI - matriz diagonal-identidade;

Si - matriz diagonal cujos elementos são positivos;

SiV - matriz diagonal com elementos $\left(\frac{\delta}{(siV_k)^2}\right)$;

Sit - matriz diagonal com elementos $\left(\frac{\delta}{(sit_1)^2}\right)$;

Su - matriz diagonal cujos elementos são positivos;

SuV - matriz diagonal com elementos $\left(\frac{\delta}{(suV_k)^2}\right)$;

Sut - matriz diagonal com elementos $\left(\frac{\delta}{(sut_1)^2}\right)$;

n - ordem da matriz W;

nz - número de elementos diferentes de zero da matriz W;

a - vetor contendo os elementos diferentes de zero da matriz Lagrangiana;

irn - vetor contendo a posição da linha dos elementos diferentes de zero da matriz W;

lirn - tamanho do vetor irn;

icn - vetor contendo a posição da coluna dos elementos diferentes de zero;

licn - tamanho de a e icn.

RESUMO

BAPTISTA, E.C. (2001). *Método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica para a solução do problema de fluxo de potência ótimo.* São Carlos, 2001. 175p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Neste trabalho propomos uma abordagem para a resolução do problema de fluxo de potência ótimo. Para isso, foram obtidos dados teóricos, a partir de um levantamento bibliográfico, que explicitaram os métodos de penalidade, de barreira, de Newton-Lagrangiano, da função Lagrangiana aumentada e dual-Lagrangiano. Nesta abordagem, as restrições de igualdade são tratadas pelo método de Newton, as restrições canalizadas, de tensão e *tap*, pelo método da função barreira logarítmica, e as restrições de desigualdade e demais restrições canalizadas, pelo método da função Lagrangiana aumentada. A motivação para este estudo foi a necessidade de manter as variáveis – tensão e *tap* – dentro de seus limites. Os resultados numéricos apresentados evidenciam o potencial desta metodologia para a resolução de problemas de programação não-linear e, em particular, do problema de fluxo de potência ótimo.

Palavras-chave: Programação Não-Linear; Função Lagrangiana Aumentada; Fluxo de Potência Ótimo.

ABSTRACT

BAPTISTA, E.C. (2001). *Method of logarithmic barrier-augmented Lagrangian function for solution of the optimal power flow problem.* São Carlos, 2001. 175p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

A new approach to solving the optimal power flow problem is proposed in this study. The first step in developing this method was to obtain theoretical material from bibliographic survey, which described in detail the penalty method, the barrier method, Newton's method, the augmented Lagrangian method end the dual-Lagrangian method. In the new approach, equality constraints are handled by Newton's method, the voltage end tap box inequality constraints by the logarithmic barrier method and the inequality constraints and the other box inequality constraints by the augmented Lagrangian method. The motivation for this research was the necessity to keep the voltage and tap variables within their limits. The numerical results demonstrate the potential of this methodology for the solution of nonlinear problems and, in particular, of the optimal power flow problem.

Keywords: Nonlinear Programming; Augmented Lagrangian Function; Optimal Power Flow.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

As aplicações da otimização estendem-se a problemas de previsão e planejamento, programação de produção e estoque, automação, otimização de processos, entre outros. Antes de 1940, relativamente, muito pouco tinha sido desenvolvido sobre métodos para otimização numérica de funções de muitas variáveis. Vários métodos de otimização foram desenvolvidos após o surgimento do computador. Em programação linear (PL) destacamos o método simplex, desenvolvido na década de 40, por Dantzig, com o objetivo de alocar recursos durante a Segunda Grande Guerra Mundial. Em programação não-linear (PNL), os primeiros métodos eram bastante restritos. Tornaram-se significativos no final da década de 50 com a introdução dos métodos de métrica variável, por Davidon, capazes de solucionar problemas de muitas variáveis.

A PNL não possui um método geral de resolução dos seus problemas. Suas técnicas, para resolver um problema restrito podem ser classificadas, basicamente, pelo tipo de problema que será abordado:

a) função objetivo não-linear e restrições lineares;

b) função objetivo linear e restrições não-lineares;

c) função objetivo não-linear e restrições não-lineares.

Os problemas do tipo "a" são freqüentemente resolvidos pela aproximação da função objetivo não-linear. Se a função objetivo não-linear é de uma forma definida, então, técnicas especializadas podem ser utilizadas. Para a função objetivo quadrática, a programação quadrática é apropriada. Para a função objetivo linear por partes, uma função separável é indicada. Características de convexidade podem simplificar a técnica e acelerar o processo de convergência para uma solução ótima. O método do gradiente reduzido tem um bom desempenho para problemas desse tipo.

Nos problemas do tipo "b", uma técnica possível de ser utilizada é a linearização das restrições. Porém, também o método simplex convexo é eficiente para esse tipo de problema.

Os problemas do tipo "c" são os mais difíceis de serem resolvidos. A menos que a função objetivo demonstre características de simplicidade, estes são aproximados por uma seqüência de problemas e, então, resolvidos. Assume-se que os problemas aproximados possuam a mesma solução do problema original. A programação quadrática sucessiva pode ser aplicada nesses casos. Podemos utilizar, também, os métodos de penalidade, os Lagrangianos e os de barreira. Esses métodos apresentam algumas vantagens e desvantagens. Em geral, os métodos de penalidade

trabalham muito bem com problemas não convexos quando há ocorrência de *gap* na solução, porém, apresentam problemas de mal condicionamento, em razão do crescimento excessivo do fator de penalidade. Os métodos Lagrangianos determinam a solução de problemas convexos de modo efetivo, mas podemos citar como algumas de suas dificuldades: a ocorrência do *gap* de dualidade, no caso não convexo; o aumento do número de variáveis; e a necessidade da garantia da existência do multiplicador. Para os de barreira, temos sempre disponível uma solução factível para o problema, no entanto, o processo de otimização pode ser comprometido pela escolha do ponto inicial; pelo mal condicionamento quando solução aproxima-se do ótimo em virtude de o fator barreira estar muito próximo de zero; pelo uso de um algoritmo de busca linear; e pela escolha do parâmetro de barreira.

No final da década de 60, pesquisadores preocupados em solucionar problemas do tipo "c", evitando algumas das dificuldades citadas, apresentaram um novo grupo de funções auxiliares denominado, a princípio, de função penalidade aumentada e, mais tarde, de função Lagrangiana aumentada. Introduzida por HESTENES (1969) e POWELL (1969), ela é uma combinação dos métodos de penalidade e dual-Lagrangianos. Desde a apresentação dessa função, muitos trabalhos foram desenvolvidos com o objetivo de melhorar o desempenho do método.

Nosso objetivo, neste trabalho, é propor uma solução para o problema de fluxo de potência ótimo (FPO) por meio do desenvolvimento de uma nova abordagem da função Lagrangiana aumentada, denominada método da função

Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica. Nesse método, adicionamos à função Lagrangiana aumentada um termo de barreira, com a finalidade de melhorar seu desempenho em relação à convergência.

O FPO é um problema não-linear, restrito, não convexo e de grande porte. É utilizado como ferramenta para determinar o melhor ponto de operação de um sistema elétrico de potência (SEP), contribuindo para um melhor desempenho deste.

O modelo geral para o problema de FPO foi proposto por Carpentier, em 1962, baseado no problema de despacho econômico (DE) e foi resolvido utilizando o teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Após essa modelagem, várias técnicas de otimização passaram a ser estudadas para resolvê-lo. Foram utilizados os métodos do Gradiente, de penalidade, das restrições ativas, de barreira, da função Lagrangiana aumentada e dual-Newton. O problema de FPO foi apresentado por STOTT et al. (1980) como um desafio matemático.

O método proposto neste trabalho trata as restrições de igualdade pelo método de Newton, as restrições canalizadas da tensão e do *tap* dos transformadores pelo método de barreira logarítmica, e as demais restrições – canalizadas e desigualdade – pelo método da função Lagrangiana aumentada. Essa abordagem explora algumas pesquisas recentes, particularmente na área de métodos primal-dual para programação convexa.

O problema de FPO possui variáveis de controle, tensão e *tap*, extremamente sensíveis a grandes ajustes. Caso essas variáveis violem seus limites, normalmente, o problema diverge, pois não conseguimos fazê-las retornar ao interior de seus limites. Nossa experiência tem mostrado que, enquanto essas variáveis permanecem dentro de seus limites, o processo de otimização tem bom desempenho. Desse fato, surgiu a idéia de tratá-las através da função barreira logarítmica. Ao associarmos, a função barreira à função Lagrangiana aumentada, amenizamos as dificuldades na determinação da solução do problema de FPO, que podem ser encontradas nos trabalhos de SANTOS et al. (1988) e COSTA et al. (1996).

Este trabalho é dividido em 7 capítulos.

No capítulo 1, apresentamos a motivação para o trabalho, definimos o objetivo dele e sua organização.

No capítulo 2, com o objetivo de posicionar o trabalho cronologicamente, apresentamos um histórico do método de barreira, do método da função Lagrangiana aumentada e do problema de fluxo de potência ótimo.

No capítulo 3, apresentamos uma revisão dos métodos – dual-Lagrangiano, de penalidade, de barreira, da função Lagrangiana aumentada e Newton-Lagrangiano – a fim de fornecer suporte teórico para o desenvolvimento do novo método.

No capítulo 4, construímos a função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica e estabelecemos as regras para atualização das variáveis e o algoritmo do novo método.

No capítulo 5, apresentamos a formulação dos problemas de fluxo de potência (FP) e FPO, aplicamos o método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica ao problema de FPO e discutimos a implementação computacional do método.

No capítulo 6, apresentamos os resultados numéricos do método para um problema matemático, e para os sistemas elétricos TESTE, AEP 14, AEP 30, AEP 57 e IEEE 118.

Finalmente, no capítulo 7, apresentamos as conclusões do nosso trabalho e as perspectivas de continuidade deste.

CAPÍTULO 2

HISTÓRICO

Neste capítulo apresentamos um levantamento bibliográfico sobre os métodos de barreira e da função Lagrangiana aumentada e sobre o problema de fluxo de potência ótimo. Fornecemos, desse modo, uma ampla visão do desenvolvimento teórico e um posicionamento histórico para a apresentação da abordagem proposta neste trabalho, pois, essa abordagem é uma forma mista desses dois métodos e será utilizada na resolução do problema de fluxo de potência ótimo.

2.1 Apresentação do problema

Este trabalho tem por interesse a resolução de problemas de programação não-linear restritos, da forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a: } g(x) = 0 \\ &\qquad\qquad h(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde: $x \in R^n$, $g(x) \in R^m$, $h(x) \in R^r$ e as funções são de classe C_2.

Uma das estratégias utilizadas na resolução de (2.1) é a de transformá-lo em um problema irrestrito equivalente (ou uma seqüência de problemas irrestritos equivalentes) em que utilizamos uma função objetivo auxiliar.

Pelo fato de a nossa abordagem seguir essa estratégia, utilizar de forma mista o método de barreira e o da função Lagrangiana aumentada e ser aplicada na resolução do problema de fluxo de potência ótimo (FPO), apresentaremos o desenvolvimento histórico de ambos os métodos e do problema citado.

2.2 Histórico do método da função barreira

O método da função barreira, ou método de barreira, é utilizado para a resolução de problemas com restrições de desigualdade, cujo interior é não vazio. Pode ser visto como um caso particular do método das penalidades, mas diferencia-se deste por exigir uma penalização interna, ou seja, por trabalhar no interior da região factível, utilizando uma função auxiliar que cresce indefinidamente próxima à fronteira e uma seqüência decrescente de fatores de barreira.

A função barreira logarítmica, foi estudada por FRISCH (1955) para problemas de programação convexa. Outra função barreira, denominada função barreira inversa foi proposta por CARROL (1961), sob o nome de *Created Response*

Surface Technique. O método de barreira foi realmente popularizado por FIACCO & McCORMICK (1968), que realizaram um estudo teórico mais detalhado do método e desenvolveram um novo; "misturando" a função barreira e a função penalidade em uma mesma função auxiliar. Uma versão revisada desse trabalho pode ser encontrada em FIACCO & McCORMICK (1990).

MURRAY (1971) apresentou um estudo sobre expressões analíticas para autovetores e autovalores de funções barreira em um mínimo intermediário; justificou que o objetivo desse desenvolvimento é a análise do comportamento da função na "vizinhança" do ponto ótimo. Também citou que, na resolução de métodos da função barreira, os de Newton e quase-Newton são os mais utilizados – necessitam de uma estimativa da inversa da Hessiana, a qual pode ser determinada analiticamente por esse estudo.

No trabalho apresentado em 1979, por Fiacco, podemos encontrar uma breve descrição de um algoritmo que utiliza funções auxiliares, ou seja, a função barreira e a função penalidade. Para o método da função barreira foram apresentados teoremas básicos de convergência, tipo de funções barreira, condições de otimalidade, análise de perturbação, métodos de barreira para programação convexa, algoritmos básicos da função barreira com considerações computacionais e, finalmente, algumas extensões do método.

Muitos outros autores que trabalharam com o método da função barreira perceberam que ele apresenta alguns problemas, tais como: o mal condicionamento

da matriz Hessiana quando seu fator de barreira tende a zero; a dificuldade na escolha do fator de barreira e na escolha de uma solução inicial; a não-existência da derivada na solução e o aumento ilimitado da função barreira na vizinhança da fronteira. Em virtude desses problemas, na década de 70, o entusiasmo no uso da função barreira diminuiu sensivelmente.

O interesse pelo método da função barreira reapareceu somente após a apresentação feita por Karmarkar, em 1984, de seu método projetivo para programação linear, cujo maior mérito, como o citado em GONZAGA (1989), foi o de ter mostrado que o problema de programação linear é, de fato, um caso particular da programação não-linear e é tratável por técnicas da mesma área. Seu método dependia da utilização de uma transformação não-linear conhecida como Transformação Projetiva, e seu objetivo era "caminhar" pelo interior da região factível. O sucesso de tal método deu-se por dois motivos: à sua complexidade polinomial (em comparação com a complexidade exponencial do método simplex) e, ao seu sucesso computacional para problemas de grande porte. Esse método também ficou conhecido como método de pontos interiores.

Muito se fez após a introdução, por Karmarkar, dos métodos de pontos interiores. Ao seguir essa linha, os pesquisadores observaram que tal método era complexo e apresentaram maneiras mais simples de enunciá-lo. Como pode ser visto em BOUKARI (1995), vários algoritmos de ponto interior são propostos e classificados em quatro categorias: os projetivos, os afins-escala , os de trajetória central e os primais-duais. Os algoritmos afins-escala são vistos como uma

simplificação do algoritmo de Karmarkar, mas já haviam sido estudados por DIKIN (1967).

Tanto nos algoritmos afins-escala quanto nos algoritmos de trajetória central utiliza-se a função barreira logarítmica, como pode ser visto em FANG & PUTHENPURA (1993) e BOUKARI (1995).

GILL et al. (1986) utilizaram o método de Karmarkar para desenvolver o método de barreira projetada de Newton; apresentaram uma descrição completa do novo método; mostraram que, para determinados tipos de problemas de programação linear e para uma dada escolha do fator de barreira e do tamanho do passo, o método apresentado por eles e o de Karmarkar possuem a mesma trajetória de otimalidade quando partem do mesmo ponto inicial. De acordo com os autores, os resultados computacionais apresentados mostram a eficiência desse método.

GONZAGA (1989,1991,1992,entre outros trabalhos), KARMARKAR (1984), KARMARKAR et al. (1991), MONTEIRO & ADLER (1989ab), MONTEIRO (1992) e outros autores, que podem ser encontrados no trabalho de BOUKARI (1995) e GONZAGA (1989) e no livro FANG & PUTHENPURA (1993), foram os grandes responsáveis pelo desenvolvimento, na década de 80 e início da década de 90, dos métodos de pontos interiores.

Em virtude do interesse despertado por Karmarkar e seus seguidores na década de 80, a função barreira logarítmica passou novamente a ser usada como uma

ferramenta alternativa de trabalho, surgindo novos tipos de função barreira.

POLYAK (1992) desenvolveu uma teoria de métodos da função barreira modificada para resolver problemas de otimização restrita. Tais métodos combinam as melhores propriedades da função Lagrangiana clássica e da função barreira clássica, evitando os problemas que ambas enfrentam. Por exemplo, em contraste com a função barreira clássica, as funções barreira modificadas são definidas na solução; estas são suaves na vizinhança do ótimo e não vão para infinito quando o ótimo se aproxima. Já em contraste com a Lagrangiana clássica, é fortemente convexa na vizinhança da solução para problemas de programação não convexos, se as condições de segunda ordem são satisfeitas. As funções duais, nas quais são baseadas as funções barreira modificadas, são tão suaves quanto as funções do problema primal. O problema dual é sempre convexo, independentemente de o problema primal ser ou não convexo, e tem importantes propriedades locais próximas à solução.

Segundo Polyak, a finalidade que o método da função barreira modificada tem para os métodos de pontos interiores é a mesma que o método da função Lagrangiana aumentada tem para os métodos de penalidade: ajudá-los a "driblar" suas dificuldades. Por esse motivo, o autor considera a função barreira modificada como uma Lagrangiana aumentada interior. Apresenta duas funções barreiras modificadas: uma para a função de FRISCH (1955) e outra para a função de CARROL (1961), além de diferentes versões do método para o problema de programação convexa e não convexa. Tais versões consistem no trabalho com um

fator de penalidade fixo, na alteração desse fator de penalidade em um determinado nível e na alteração contínua, fornecendo convergência linear e superlinear.

WRIGHT (1994), em seu trabalho, cita MURRAY (1971), o qual afirma que as matrizes Hessianas da função barreira logarítmica ficam mal condicionadas nos pontos sobre a trajetória de convergência quando o processo se aproxima da solução. Wright dedicou seu trabalho à exploração do comportamento da matriz Hessiana associada ao problema de barreira. Mostrou o fato de a Hessiana da função barreira ser mal condicionada na região próxima à solução, a não ser no caso de o número de restrições ativas ser nulo ou igual ao número de variáveis. Também discutiu uma fatorização de Cholesky para a matriz com posto deficiente.

Em BOUKARI (1995), encontramos um levantamento cronológico, para o período de 1969 a 1993, de trabalhos que têm por objetivo evitar problemas com o método da função barreira. Uma parte de seu trabalho é dedicada também ao aparecimento e desenvolvimento dos métodos de pontos interiores.

WRIGHT (1995) estudou a aplicação do método de Newton ao método da função barreira, ressaltando o fato de esta ser problemática em razão do mal condicionamento da matriz Hessiana; classificou como passo puro de Newton, o passo igual a 1. Definiu métodos de passo curto, nos quais são exigidas poucas minimizações (ou apenas uma) do fator de barreira, e métodos de passo longo, nos quais são exigidas várias minimizações do fator de barreira. O principal resultado desse estudo de Wright foi a demonstração de que um passo puro de Newton, em um

método de passo longo, pode não ter sucesso.

EL-BARKY et al. (1996) tiveram como objetivo principal apresentar uma formulação viável de métodos de pontos interiores para problemas de programação não-linear, a partir da formulação já existente para programação linear; iniciaram o trabalho caracterizando, para o caso linear, condições de KKT perturbadas. Mostraram que a trajetória do método de Newton, ao serem resolvidas as condições de KKT perturbadas associadas a um problema de programação linear, e a trajetória do mesmo método, ao serem resolvidas as condições de KKT para o problema da função barreira logarítmica, não coincidem, mas determinam a mesma solução para o problema de programação linear, concluindo que condições perturbadas de KKT não são as condições de KKT para o problema da função barreira logarítmica. Os autores compararam o uso das condições de KKT perturbadas no método da função barreira logarítmica ao uso do método dos multiplicadores no método da função penalidade – tanto as condições de KKT perturbadas quanto o método dos multiplicadores são utilizados para melhorar o condicionamento da matriz Hessiana; apresentaram uma formulação para programação não-linear denominada método de ponto interior primal-dual Newton, propriedades de convergência local e global e alguns experimentos computacionais.

BREITFELD & SHANNO (1996), baseados no trabalho de POLYAK (1992), apresentaram o método de barreira-penalidade para problemas de programação não-linear. Tiveram como objetivo o desenvolvimento, a partir dos métodos da função barreira logarítmica modificada, de um novo método, no qual os termos logarítmicos

são extrapolados por aproximações quadráticas. Também foi apresentada, por eles, uma implementação detalhada desse método, incluindo a formulação da nova função, a inicialização das variáveis e o critério de convergência. Para a otimização irrestrita, os autores apresentaram um método de Newton modificado, em que é usada uma Hessiana modificada, para uma busca linear, e critérios de convergência. Breitfeld & Shanno, nesse estudo, destacam que os resultados computacionais são promissores.

SHANNO et al. (1996) iniciaram seu trabalho revisando o método de barreira clássica de FRISCH (1955) e apresentaram seus principais problemas no processo de otimização, tais como a escolha do fator inicial e o mal condicionamento da Hessiana. Os autores também revisaram os métodos de barreira modificados vistos em POLYAK (1992), ressaltando que alguns dos problemas desses métodos são o ajuste dos fatores de barreira e o uso do algoritmo de busca linear; apresentaram, a função barreira-penalidade vista em BRIETFELD & SHANNO (1996), destacando a não-necessidade de um ponto inicial factível – porém, ainda podem ocorrer mal condicionamento no problema e dificuldades no uso do algoritmo de busca linear. Shanno et al. sugeriram a utilização de um método misto – encontrado no trabalho dos mesmos autores, no ano de 1995, sobre função Lagrangiana aumentada – na presença de restrições de igualdade. Nesse método, as restrições de igualdade são tratadas pela função Lagrangiana aumentada e as restrições de desigualdade, através da função barreira-penalidade. Apresentaram o método da variável de folga alternativa, no qual as restrições de desigualdade são transformadas em de igualdade com a utilização de uma variável de folga. Como visto em EL-BARKY (1996), essa variável folga é controlada pela função barreira, por meio de um método de ponto

interior. Afirmaram que há ainda muito a ser feito com relação ao estudo de métodos de barreira para programação não-linear.

MELMAN (1996) propôs um procedimento de busca linear em métodos da função barreira para problemas de programação quadrática, com restrições quadráticas e convexas. Apresentou a aplicação desse procedimento de busca linear aos seguintes métodos de pontos interiores: método de trajetória central, método da função barreira de CARROL (1961) e método da função barreira modificada, vista em POLYAK (1992).

WRIGHT & JARRE (1999) apresentaram o método de barreira logarítmica-Newton para a resolução de problemas não-lineares com restrições de desigualdade. O objetivo dos autores foi mostrar que, para a função objetivo linear, um passo efetivo pode ser tomado na direção de Newton, depois de cada redução no fator de barreira, obtendo um bom comportamento do método próximo à solução. Isso contrasta com o caso da função objetivo não-linear, em que o método de Newton pode falhar quando o fator de barreira vai para zero. Forneceram o algoritmo em que o método da função barreira logarítmica utiliza o método de Newton clássico, empregando a regra de Armijo de busca linear. Por fim, aplicaram esse algoritmo a um exemplo numérico para verificar seu comportamento.

Finalmente, QUINTANA et al. (2000) contribuíram com uma revisão e classificação de publicações sobre a teoria de métodos de pontos interiores, a implementação desses métodos e as aplicações desses métodos a problemas de

otimização em sistemas de energia elétrica. Os autores apresentaram uma lista com vários *softwares* de pontos interiores e alguns endereços na *internet* para pesquisa sobre o assunto.

2.3 Histórico do método da função Lagrangiana aumentada

O método da função Lagrangiana aumentada pode ser visto como uma combinação dos métodos da função penalidade e o Lagrangiano, sendo aproveitadas as melhores qualidades de ambos.

O método Lagrangiano, foi proposto, em 1760, pelo matemático Francês Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), e consiste em uma técnica de solução para problemas de otimização com restrições de igualdade. O autor ponderou o efeito das restrições na função objetivo; para tanto, utilizou uma função auxiliar denominada função Lagrangiana, tornando o problema irrestrito. A idéia de transformar o problema restrito em irrestrito deve-se à existência de técnicas muito eficientes, na época, para resolver problemas irrestritos. Essa técnica ficou conhecida como método da função Lagrangiana ou método dos multiplicadores de Lagrange. Os métodos que utilizam a mesma "filosofia" de Lagrange foram denominados métodos Lagrangianos. São usados até hoje e podem ser encontrados em BAZARAA et al. (1993), LUENBERGER (1984), FLETCHER (1985), entre outros.

COURANT (1943) usou pela primeira vez uma função penalidade para resolver problemas restritos de igualdade; essa função penalizava a soma dos

quadrados das restrições violadas, com o uso de um fator de penalidade. No entanto, o método popularizou-se pelo trabalho clássico de FIACCO & McCORMICK (1968) – publicado com o título de *Sequential Unconstrained Minimization Technique (SUMT)* – que era voltado para a resolução de problemas práticos por meio da utilização de funções penalidades. Podemos citar também ZANGWILL (1967), HIMENBLAU (1972), BAZARAA et al. (1993), FLETCHER (1985) e LUENBREGER (1984), para um estudo mais detalhado de tal função.

Os métodos Lagrangianos e o método de penalidade apresentam alguns problemas. Nos métodos Lagrangianos, o processo de otimização pode ser comprometido: pela ocorrência do *gap* de dualidade na solução, no caso não convexo; pelo aumento do número de variáveis; e pela exigência de garantia da existência do multiplicador. Nos métodos de penalidade, normalmente, ocorrem problemas de mal condicionamento da matriz Hessiana em razão do crescimento excessivo do fator de penalidade.

Com o objetivo de solucionar tais problemas, iniciou-se, no final da década de 60, o estudo de um novo grupo de funções auxiliares denominadas, em princípio, de função penalidade aumentada e, mais tarde, de função Lagrangiana aumentada ou de método dos multiplicadores. Neste trabalho adotaremos as terminologias função Lagrangiana aumentada e método dos multiplicadores.

Em 1969, Hestenes apresentou um novo método para a resolução do problema (2.1), considerando uma única restrição de igualdade. Verificou que o

método de penalidade apresentava problemas numéricos, como, por exemplo, o mal condicionamento da matriz Hessiana, quando o fator de penalidade tendia a infinito, e sugeriu uma mudança no método da função penalidade, o qual denominou método dos multiplicadores. Em seu método dos multiplicadores, Hestenes utilizou uma nova função auxiliar, denominada função Lagrangiana aumentada, a qual "incorpora" a função Lagrangiana clássica e um termo de penalidade quadrática, isto é:

$$La(x,\lambda) = f(x) + \lambda\, g(x) + \frac{1}{2}\, c\, g^2(x), \qquad (2.2)$$

onde $c > 0$ é o fator de penalidade que assume valores suficientemente grandes, e λ é o multiplicador de Lagrange. Para garantir o uso de sua função Lagrangiana aumentada, Hestenes fez uma relação entre o mínimo restrito e o irrestrito, mostrando a validade do seguinte resultado:

"Se x_0 é um ponto de mínimo não singular de f sujeito a $g = 0$, existe um multiplicador λ e uma constante c tal que x_0 é um mínimo local irrestrito para a função:

$$La = f + \lambda g + \frac{1}{2} c g^2.$$

Reciprocamente, se $g(x_0)=0$ e x_0 é um mínimo para função La, então x_0 é um mínimo para f, sujeito a $g = 0$."

Ao minimizar (2.2) em relação a x, para λ e c dados, Hestenes verificou que

a seguinte condição necessária deveria ser válida:

$$\nabla_x La(x, \lambda) = \nabla_x f(x) + \lambda \nabla_x g(x) + c \nabla_x g(x) g(x) = 0, \quad (2.3)$$

a qual é equivalente à:

$$\nabla_x La(x, \lambda) = \nabla_x f(x) + \nabla_x g(x)[\lambda + c\, g(x)] = 0. \quad (2.4)$$

Sugeriu que o novo multiplicador fosse atualizado por meio da seguinte regra:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + c^k g(x^k), \quad (2.5)$$

onde $0 < c^k \leq c$. Existem várias regras para selecionar c^k, como:

$$c^k = \gamma c, \text{ onde } 0 \leq \gamma \leq 1; \quad (2.6)$$

ou

$$c^k, \text{ tal que } g(x^k).g(x^{k+1}) > 0. \quad (2.7)$$

A proposta de Hestenes pode ser apresentada pelo seguinte algoritmo:

P1) Considere o problema (2.1), com uma única restrição de igualdade, e transforme-o em uma seqüência de problemas irrestritos, cuja função objetivo é dada por (2.2), a qual deve ser minimizada em relação a x, para λ e c fixos.

P2) Selecione um fator c, suficientemente grande, e uma estimativa inicial para o multiplicador λ.

P3) Minimize (2.2) em x, usando um método irrestrito, e verifique se a "condição de ótimo" é satisfeita. Caso afirmativo, **PARE**. Caso contrário vá para **P4)**.

P4) Atualize o multiplicador de Lagrange, utilizando (2.5) e vá para **P3)**.

Ressaltamos que Hestenes se preocupou em apresentar a "idéia" da função Lagrangiana aumentada e da atualização dos multiplicadores, porém, não forneceu um algoritmo para o método.

Uma das grandes vantagens desse método, quando comparado ao da função penalidade, é a que o fator de penalidade em (2.2) não precisa ser muito grande, pois o método converge para valores moderados de c. Uma das dificuldades encontradas é a necessidade de uma estimativa inicial do multiplicador λ. Hestenes sugere uma combinação entre o método das penalidades e o método dos multiplicadores para determinar uma estimativa inicial de λ. Fazendo $\lambda = 0$ na primeira iteração, trabalhamos com o método de penalidade e determinamos uma estimativa inicial para λ e, a partir da segunda iteração, passamos a aplicar o método dos multiplicadores.

Durante o mesmo período, POWELL (1969) trabalhou com o problema (2.1), considerando apenas as restrições de igualdade e apresentou uma forma equivalente do método dos multiplicadores, independentemente de HESTENES (1969). A seguinte função Lagrangiana aumentada foi utilizada:

$$La(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} c_i[g_i(x)+\lambda_i]^2 , \qquad (2.8)$$

onde $c > 0$ é um vetor constante de fatores de penalidade, que assume valores suficientemente grandes, λ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange, e a regra de atualização para os multiplicadores de Lagrange em relação à função (2.8) é dada por:

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + g_i(x^k),\ i = 1, ..., m. \qquad (2.9)$$

O autor forneceu um algoritmo detalhado para seu método, que funciona nos moldes do apresentado anteriormente. Utilizou (2.8) e (2.9) no lugar de (2.2) e (2.3), diferenciando-se por adotar uma regra para aumentar o valor de c, com o objetivo de melhorar a convergência e garantir sempre que o resíduo máximo das equações de igualdade diminua a cada iteração. Impôs:

$$r^{max} = \max_i \left\| g_i(x^k) \right\|, \qquad (2.10)$$

onde:

$$r^{max} \to 0,\ k \to \infty . \qquad (2.11)$$

Powell preocupou-se em apresentar alguns teoremas e provas, os quais garantem que o algoritmo apresentado é finito e converge para a solução ótima do problema, justificam a utilização da atualização (2.9) e mostram que a taxa de convergência do método, quando este utiliza (2.9) é linear se as coordenadas de c são

escolhidas suficientemente grandes. Ao final de seu artigo, citou a possibilidade de aplicar seu método a problemas com restrições de desigualdade.

Ao compararmos os dois trabalhos anteriores percebemos que HESTENES (1969) propôs somente a função Lagrangiana aumentada e uma técnica de atualização dos multiplicadores; já o trabalho de POWELL (1969) é muito mais completo. Este autor, apresentou um algoritmo que utilizava uma regra para aumentar o fator de penalidade, permitindo fatores de penalidade separados para cada restrição, e demonstrou que, se as condições suficientes de segunda ordem para a otimalidade são satisfeitas, o algoritmo converge localmente com uma taxa linear, sem que o fator de penalidade precise tender ao infinito.

Após a apresentação da função Lagrangiana aumentada por Hestenes e Powell, que demonstrou ser mais eficiente que os método de penalidade e Lagrangianos usados separadamente, muitos pesquisadores passaram a trabalhar nessa área, a fim de aprimorá-la.

MIELE et al. (1972), com o objetivo de acelerar a convergência do método dos multiplicadores proposto por HESTENES (1969), apresentaram o método dos multiplicadores modificado em duas versões e utilizaram os seguintes algoritmos de primeira ordem: algoritmo do gradiente ordinário, algoritmo da quase-linearização modificado e algoritmo do gradiente conjugado; trabalharam com o problema (2.1) considerando apenas as restrições de igualdade. Usaram como critério de parada:

$$R(x,\lambda) = P(x) + Q(x, \lambda) \leq \xi, \qquad (2.12)$$

onde $\xi > 0$ é suficientemente pequeno, $P(x) = g^t(x)\, g(x)$ é denominado erro nas restrições, e $Q(x, \lambda) = \nabla_x^t La(x,\lambda)\ \nabla_x La(x,\lambda)$ é denominado erro na condição de ótimo, com $La(x, \lambda)$ dada por (2.2).

As modificações feitas por Miele et el., no método apresentado em HESTENES (1969) foram:

(i) *diminuição do número de iterações*: ao se resolver cada subproblema irrestrito, isto é, para cada λ e c constantes, determina-se x que minimiza $La(x, \lambda)$ – o método proposto em HESTENES (1969) requer um número grande de iterações. MIELE et al. (1972) propõem que esse número de iterações seja considerado igual a um, quando utilizamos o algoritmo do gradiente ordinário e o algoritmo da quase-linearização modificado, e igual a n (número predeterminado), quando utilizamos o algoritmo do gradiente conjugado;

(ii) *mudança na regra de atualização dos multiplicadores* (2.5): com a finalidade de diminuir o erro na condição de ótimo, foram sugeridas três novas regras interligadas para a atualização dos multiplicadores. Na primeira, os autores sugerem que seja feita a atualização do multiplicador de Lagrange, usando (2.5) somente quando o erro na condição de ótimo da iteração atual seja menor que o erro na condição de ótimo da iteração anterior; caso contrário,

não se atualiza o multiplicador. Na segunda, com o objetivo de melhorar ainda mais a primeira atualização, é sugerida, ao atualizarmos os multiplicadores usando (2.5), a substituição do fator de penalidade c por um parâmetro escalar β, o qual fornece o menor valor para o erro na condição de ótimo $Q(x, \lambda)$ para x e λ fixos. Finalmente, na terceira, com o mesmo objetivo das atualizações anteriores, sugere-se, ao utilizar a regra (2.5), a minimização do erro na condição de ótimo $Q(x,\lambda)$ com relação a λ, para x fixo.

Os autores denominaram o método dos multiplicadores com as modificações (i) e (ii) de método dos multiplicadores modificado 2 (MM-2). Nesse método, o valor do fator de penalidade não é alterado durante todo o processo. Comparando as estimativas dos multiplicadores, percebemos que a melhor é a terceira, pois minimiza o próprio multiplicador. Contudo, a escolha da atualização deve ser baseada na particularidade de cada algoritmo. Por meio de exemplos numéricos, concluíram que o método apresentado converge mais rápido, isto é, em um número menor de iterações, que o método de Hestenes. Tanto no método de Hestenes quanto no método de Miele et al., o número de iterações mínimo está diretamente ligado à escolha do fator de penalidade c.

Para acelerar a convergência do método MM-2, Miele et al. sugeriram a inclusão de mais uma modificação e denominaram o novo método de método dos multiplicadores modificado 3 (MM-3). A modificação consiste:

(iii) *na seleção de um fator de penalidade de modo apropriado:* são apresentados dois tipos de seleção. A primeira, para o método do gradiente ordinário, no qual, aproveitando a característica de descida no erro das restrições P(x), é estabelecida uma regra de atualização para o fator de penalidade de modo que ele varie suavemente e tenha convergência finita. A segunda, para o algoritmo do gradiente conjugado e algoritmo da quase-linearização modificado, prevê que o valor do fator de penalidade deve ser suficientemente grande; mas não tão grande quanto o requerido pela função penalidade. Para tanto, determinam-se regras de atualização para o fator de penalidade, de modo que seja suficientemente grande, a fim de atingir a solução ótima e, ainda, tenta reduzir-se o erro nas restrições e na condição de ótimo com a mesma taxa. Aumenta-se, então, o fator de penalidade se o erro na restrição é diminuído, e diminui-se o fator se o erro na restrição é relativamente grande.

Observando as duas versões apresentadas do método dos multiplicadores modificado, os autores destacam que o método MM-3 mostrou-se mais eficiente em termos de convergência que o MM-2, sendo ambos mais rápidos do que o apresentado em HESTENES (1969).

ROCKAFELLAR (1973a) desenvolveu seu trabalho a partir do trabalho de HESTENES (1969), apresentando uma função Lagrangiana aumentada para problemas convexos com restrições de desigualdade e a relação dessa função com a teoria da dualidade. Considerou o problema (2.1) apenas com restrições de desigualdade, transformou-as em de igualdade, incluindo uma variável de folga positiva, e construiu a Lagrangiana aumentada vista em HESTENES (1969)

associada ao novo problema; minimizou-a em função da variável de folga positiva, obtendo, então, a nova função Lagrangiana aumentada:

$$La(x,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{r} \begin{cases} c(h_i(x))^2 + \mu_i h_i(x), \text{se } h_i(x) \geq -\dfrac{\mu_i}{2c} \\ -\dfrac{\mu_i^2}{4c}, \text{ se } h_i(x) \leq -\dfrac{\mu_i}{2c} \end{cases}, \qquad (2.13)$$

onde $c > 0$ é o fator de penalidade, e μ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

O autor não se preocupou, nesse trabalho, em fornecer um algoritmo particular, mas sim em dar uma forma geral de funcionamento do método. Definiu o problema dual usando a Lagrangiana aumentada (2.13) e demonstrou que, para o problema somente com restrições de desigualdade, substituído pela seqüência de problemas irrestritos cuja função objetivo é a nova Lagrangiana aumentada (2.13), é gerada uma seqüência de minimização assintótica, com propriedades de convergência razoáveis para c fixo; a nova Lagrangiana aumentada é convexa; o problema dual que utiliza a função Lagrangiana clássica e o problema dual que utiliza a função Lagrangiana aumentada (2.13) têm a mesma solução. Ressaltou, ainda, que a função (2.13) tem um número de propriedades fortes não possuídas pela Lagrangiana clássica e caracterizou o ponto de sela para o novo problema.

A contribuição de ARROW et al. (1973) foi a apresentação de uma teoria de ponto de sela para problemas não convexos. Essa nova teoria é aplicada a uma classe de funções denominadas funções Lagrangianas modificadas, em que se inclui a função Lagrangiana aumentada apresentada em HESTENES (1969) e a proposta por

ROCKAFELLAR (1973a). Anteriormente a contribuição de ARROW et al.(1973), somente caracterizava-se ponto de sela para problemas convexos e função Lagrangiana clássica.

Dando continuidade ao seu trabalho, ROCKAFELLAR (1973b), para o caso de restrições de desigualdade e problema convexo, forneceu a generalização do algoritmo apresentado simultaneamente por HESTENES (1969) e POWELL (1969) usando a Lagrangiana aumentada (2.13). Garantiu, também, a convergência global de seu algoritmo para c fixo, ressaltando o fato de que a minimização é aproximada, a menos que a condição Slater seja satisfeita. Também observou que a seqüência de multiplicadores converge, mas pode existir mais de um limite, dependendo da escolha inicial do multiplicador, e deduziu algumas conseqüências das propriedades vistas em seu trabalho anterior para o método dos multiplicadores de Hestenes e Powell.

Seguindo a mesma linha, em 1974, Rockafellar preocupou-se com problemas não convexos. Chamou a atenção para o caso do *gap* de dualidade que normalmente ocorre em problemas não convexos quando utilizamos a função Lagrangiana clássica. Trabalhando com o problema (2.1), somente com restrições de desigualdade, ele usou a sua função Lagrangiana aumentada (2.13) para remover o *gap*. Centrou-se no desenvolvimento de propriedades gerais da nova função Lagrangiana aumentada para o caso não convexo, especialmente em relação à dualidade. Baseando-se nos resultados de ARROW et al. (1973) sobre ponto de sela para problemas não convexos, estendeu esses resultados e, introduzindo perturbações

ao problema original, forneceu condições necessárias e suficientes (em termos da estabilidade) para a existência de um ponto de sela global da Lagrangiana aumentada (2.13).

FLETCHER (1975) retomou o trabalho de POWELL (1969) e apresentou uma função Lagrangiana aumentada para o problema (2.1), considerando somente as restrições de desigualdade da seguinte forma:

$$La(x,\mu) = f(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} c_i\{[h_i(x)+\mu_i]^+\}^2, \qquad (2.14)$$

onde $[\ ]^+ = \max_i \{ h_i(x) + \mu_i, 0\}$, c_i é o fator de penalidade, e μ_i é o multiplicador de Lagrange, $i = 1, ..., r$.

Provou que, na ausência da condição de complementaridade estrita, o algoritmo converge para um ótimo, quando c é suficientemente grande e apresentou vários testes numéricos.

BERTSEKAS (1976a) optou por fazer uma interpretação do método dos multiplicadores para a resolução de problemas não-lineares e não convexos usando o ponto de vista da função penalidade, ao invés de encará-lo como um método primal-dual. Ele desenvolveu o que denominou de algoritmo da função penalidade generalizado, no qual englobou o método da função penalidade e o método dos multiplicadores. Em seu algoritmo, a Lagrangiana aumentada fornecida em HESTENES (1969) é minimizada para uma seqüência de escalares $\{c^k\}$ e vetores

$\{\lambda^k\}$, com a imposição de que a seqüência $\{\lambda^k\}$ deva permanecer dentro de um conjunto arbitrário S limitado; caso não permaneça, λ não é atualizado. Os resultados de convergência com relação ao método dos multiplicadores são globais e significam uma melhoria substancial para os resultados locais existentes, ressaltando-se o fato de que o método dos multiplicadores converge mais rapidamente que o método das penalidades. Construiu uma teoria de dualidade muito parecida com a proposta em ROCKAFELLAR (1974), diferenciando-a, entretanto, pela construção da função objetivo dual, a qual é definida a partir de um problema primal perturbado. A função dual é continuamente diferenciável, e o gradiente pode ser calculado por minimização irrestrita da função Lagrangiana aumentada, do mesmo modo como é feito para problemas de programação convexa. A construção dessa teoria é adequada para análise de algoritmo, em virtude da diferenciabilidade da função dual. Estabeleceu um índice k, para c^k (fator de penalidade), suficientemente grande (sem precisar ser infinito), a partir do qual garantiu a convergência do método dos multiplicadores. No caso de restrições de desigualdade, ele trabalhou com a mesma função Lagrangiana aumentada vista em ROCKAFELLAR (1974) e mostrou que o procedimento é similar ao desenvolvido para igualdade. Ressaltou que o processo de otimização não é exato e forneceu alguns critérios de parada.

No mesmo ano, BERTSEKAS (1976b) apresentou um estudo sobre as propriedades de convergência do método dos multiplicadores cujo objetivo foi de demonstrar a superioridade deste sobre os métodos de penalidade clássicos. Citou trabalhos de vários autores, enfocando os seguintes tópicos: a visão do método dos multiplicadores como um método de penalidade generalizado; a

atualização dos multiplicadores de Lagrange como uma iteração do método do gradiente para resolver um problema dual; a forma do método dos multiplicadores para resolver problemas com restrições de desigualdade, dando destaque ao problema com restrições canalizadas e apresentando um método próprio, em que associa apenas um multiplicador a cada restrição canalizada; a análise da convergência e da taxa de convergência para programação convexa; a verificação de que a escolha da função penalidade pode afetar significativamente o desempenho do método dos multiplicadores; as modificações no método dos multiplicadores; a apresentação de um novo resultado de convergência global utilizando o método de Newton; a citação de métodos relacionados com métodos de Lagrangiana aumentada e, finalmente, um levantamento a respeito da aplicação do método dos multiplicadores em problemas com dimensão infinita. Apresentou alguns exemplos para comprovar a superioridade do método dos multiplicadores sobre os métodos de penalidade clássicos.

GLAD (1979) forneceu um algoritmo para a minimização de uma função Lagrangiana aumentada usando o método quase-Newton Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). Examinou as propriedades de convergência do seu método dos multiplicadores para três técnicas distintas de atualização dos multiplicadores de Lagrange, utilizando a seguinte função Lagrangiana aumentada associada ao problema (2.1):

$$La(x,\lambda,\mu)=f(x)+\lambda^t g(x)+\frac{c}{2}g(x)^t g(x)+\frac{1}{2c}\{[ch(x)+\mu]^+\}^t[ch(x)+\mu]^+-\frac{1}{2c}\mu^t\mu, \quad (2.15)$$

onde λ e μ são os vetores dos multiplicadores de Lagrange para as restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente, $c > 0$ é o fator de penalidade, e $[]^+ = \max_i \{ch_i(x)+\mu_i, 0\}$, $i = 1, \ldots, r$. Essa função é análoga à apresentada por ROCKAFELLAR (1973a),

Apresentou propriedades e teoremas de convergência local para o problema (2.1), somente com restrições de igualdade. Estendeu essas propriedades e teoremas para problemas com restrições de desigualdade. Garantiu para os métodos de atualização dos multiplicadores:

$$\mu^{k+1} = -[\nabla_x g(x^k)\, \nabla_x g(x^k)^t]^{-1} \quad \nabla_x g(x^k)\, \nabla_x f(x^k)^t, \quad (2.16)$$

e os utilizados por HESTENES (1969) e POWELL (1969) a convergência linear; e para:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2_{xx} L_a(x^k,\lambda^k) & \nabla_x g(x^k)^t \\ \nabla_x g(x^k) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{k+1}-x^k \\ \lambda^{k+1}-\lambda^k \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \nabla_x L(x^k,\lambda^k)^t \\ g(x^k) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

a convergência superlinear.

Forneceu, também, um algoritmo para garantir a convergência global. Observou que a técnica de função penalidade é usada como um último recurso para garantir a convergência, isto é, a atualização do fator de penalidade só é feita para garantir a convergência. Apresentou a aplicação das modificações a alguns exemplos numéricos.

HAN (1979) estudou o método dos multiplicadores baseando-se nos trabalhos de HESTENES (1969), POWELL (1969) e ROCKAFELLAR (1973a) e utilizou uma função Lagrangiana aumentada semelhante à apresentada por GLAD (1979). Verificou que, quando o fator de penalidade tende ao infinito, o método dos multiplicadores tem uma taxa de convergência superlinear, mas podem ocorrer instabilidades numéricas. Com o objetivo de evitar tal dificuldade e, ao mesmo tempo, encontrar uma taxa superlinear de convergência, propôs a determinação dos multiplicadores por meio da solução de subproblemas de programação quadrática restrita não-negativa e utilizou para atualização dos fatores de penalidade a estratégia desenvolvida por POWELL (1969) e FLETCHER (1975). Para garantir a convergência rápida, utilizou o método quase-Newton BFGS, para aproximar a inversa da Hessiana. Provou que o método possui propriedades de convergência superlinear e local, e que o fator de penalidade permanece limitado. Mostrou que os resultados valem quando a minimização da função Lagrangiana aumentada é inexata, isto é, não estão garantidas as condições de KKT.

DI PILLO & GRIPPO (1979) introduziram uma nova classe de função Lagrangiana aumentada para a resolução do problema (2.1) somente com restrições de igualdade. A nova classe é obtida ao adicionar-se à função Lagrangiana aumentada proposta por HESTENES (1969) um fator de penalidade sobre a condição necessária de primeira ordem aplicada à função Lagrangiana clássica, da seguinte forma:

$$La(x,\lambda) = f(x) + \lambda^t g(x) + c\,\|g(x)\|^2 + \left\| M(x)\left(\nabla_x f(x) + \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^t \lambda\right)\right\|^2, \qquad (2.18)$$

onde $c > 0$ é o fator de penalidade, λ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange, e $M(x)$ é uma matriz "peso" com elementos duas vezes continuamente diferenciáveis.

Motivados pelo método dos multiplicadores, que resolve uma seqüência de problemas de minimização irrestrita, os autores mostraram que, usando a sua Lagrangiana aumentada e hipóteses adequadas, uma solução local do problema restrito e os valores correspondentes dos multiplicadores de Lagrange podem ser encontrados, fazendo-se uma única minimização local irrestrita de (2.18) em relação às variáveis x e λ, para valores finitos do fator de penalidade, não sendo utilizada a inversão de matrizes. Usaram uma função penalidade exata. Forneceram algumas escolhas para a matriz $M(x)$. Verificaram que, para o caso quadrático linear, existe um valor de c para o qual (2.18) é uma função quadrática definida positiva de x e λ, e que a solução do problema de programação quadrática com restrições de igualdade pode ser obtida em um número finito de iterações do algoritmo de direções conjugadas. Aplicaram o seu método aos exemplos de MIELE et al. (1972). Ressaltaram algumas desvantagens, como o aumento da dimensão do problema e a presença de derivadas de primeira ordem na função Lagrangiana aumentada (2.18).

BOGGS & TOLLE (1980) introduziram uma nova classe de função Lagrangiana aumentada – relacionada à proposta por DI PILLO & GRIPPO (1979) – para o problema (2.1) somente com restrições de igualdade. O objetivo dos autores era evitar as deficiências que ocorrem na função Lagrangiana clássica e nas funções Lagrangianas aumentadas até então estudadas. A nova função Lagrangiana aumentada incorpora as propriedades da função estudada por HESTENES (1969),

tem um comportamento melhor com respeito ao vetor multiplicador e é dada por:

$$La(x,\lambda)=f(x)+\lambda^t g(x)+\frac{1}{2}cg(x)^t g(x)-\frac{1}{2}d\,(\nabla_x L(x,\lambda)^t\ W(x)\nabla_x L(x,\lambda)\ ),\quad (2.19)$$

onde λ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange, $c \geq 0$ é o fator de penalidade, $d>0$ é um parâmetro que assume valores suficientemente pequenos, $L(x, \lambda)$ é a função Lagrangiana clássica e $W(x)$ é uma matriz simétrica, semidefinida positiva e duas vezes continuamente diferenciável.

Boggs & Tolle ressaltaram que, em alguns resultados apresentados, o valor de c é irrelevante, e o parâmetro d assume valores suficientemente pequenos; desenvolveram uma teoria de dualidade que utilizava a nova função Lagrangiana aumentada (2.19); estabeleceram relação entre os passos de Newton para a Lagrangiana clássica e para a nova Lagrangiana aumentada e forneceram algumas escolhas para W(x).

DI PILLO & GRIPPO (1982) apresentaram uma nova função Lagrangiana aumentada, desenvolvida de maneira análoga à apresentada em seu trabalho de 1979, considerando o problema (2.1) apenas com restrições de desigualdade, da seguinte forma:

$$La(x,\mu)=f(x)+\frac{1}{\delta}\left\|h(x)\right\|^2+\mu^t h(x)+\eta\left\|\nabla_x h(x)\nabla L(x,\mu)\right\|^2+\sum_{i=1}^{r}\left\{\frac{[\min(0,w_i(x,\mu;\delta))]^2}{\left[\delta\left(1+16\delta\eta\mu_i^2\right)\right]}\right\},\quad (2.20)$$

onde $\frac{1}{\delta}$ é o fator de penalidade para $\delta > 0$, $\eta > 0$, μ é o vetor dos multiplicadores de

Lagrange, $L(x,\mu) = f(x) + \mu^t h(x)$, e $w_i(x,\mu,\delta) = \frac{2h_i(x) + \delta(\mu_i + 8\eta\mu_i a_i(x)\nabla_x L(x,\mu)}{2}$,

para i = 1, ... , r, sendo a_i a i-ésima linha de $\nabla_x h(x)$. As restrições de desigualdade foram convertidas em de igualdade pela introdução de variáveis de folga quadráticas.

Os autores ressaltaram a possibilidade de se construir a função Lagrangiana aumentada (2.20) continuamente diferenciável e de seu mínimo irrestrito, para um valor finito do fator de penalidade $\frac{1}{\delta}$, produzir a solução para o problema restrito, e os multiplicadores associados de KKT. A partir disso, podem ser usadas técnicas de minimização irrestrita clássica, e o mínimo é encontrado por meio de uma única minimização irrestrita. Dedicaram seu trabalho a resultados teóricos sobre as propriedades da função Lagrangiana aumentada (2.20), fazendo uma pequena discussão de alguns aspectos computacionais da sua resolução, ressaltando que: existe dificuldade na escolha dos parâmetros δ e η; a função Lagrangiana aumentada pode ser ilimitada com respeito a λ; e é difícil a escolha de um algoritmo de minimização irrestrita para resolução do problema.

LUCIDI (1988) introduziu uma nova classe de funções Lagrangianas aumentadas exatas e continuamente diferenciáveis para o problema (2.1), em que considerou apenas as restrições de desigualdade, inspirando-se nos trabalhos de DI PILLO & GRIPPO (1979,1982). Essa nova classe de funções pode ser representada por:

$$La(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{r} \{ \mu_i h_i(x) + \frac{1}{\delta}\left[\frac{h_i^2(x)}{b_i(x)}\right] - \left[\frac{1}{\delta b_i(x)}\right][\min(0, d_i(x))]^2 \} + \eta\|Z\|^2 , \quad (2.21)$$

onde $b_i(x) = \varepsilon_i - h_i(x)$, $\varepsilon_i \geq 0$, $d_i(x) = h_i(x) + \delta b_i(x)\frac{\mu_i}{2}$, $i = 1, \ldots, r$,

$Z = \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right)\nabla f(x) + M(x)\lambda$, $\frac{1}{\delta} > 0$ é o fator de penalidade, $\mu > 0$ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange e $\eta > 0$ é uma constante.

Estabeleceu a equivalência entre o problema restrito e a forma irrestrita de (2.21), fornecendo equivalência entre os mínimos locais e globais de ambos os problemas. Apresentou um algoritmo com convergência global e determinou que o objetivo de seu trabalho era o de estabelecer resultados similares entre a função Lagrangiana aumentada (2.21) e a sua função penalidade exata.

CONN et al. (1991), preocupados com a resolução de problemas de grande porte e em sanar as dificuldades encontradas nesta área, deram continuidade ao trabalho, no qual desenvolveram um algoritmo de programação restrita para problemas de grande porte, utilizando uma função Lagrangiana clássica. Foi utilizado o algoritmo dentro de uma estrutura de Lagrangiana aumentada a fim de encontrar uma aproximação para minimizar a função Lagrangiana aumentada:

$$La(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x) + \frac{1}{2c}s_{ii}g_i^2(x), \qquad (2.22)$$

onde λ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange, $s_{ii} > 0$ são escalares positivos da diagonal de uma matriz diagonal *S*, e c é um fator de penalidade.

Esses autores afirmam que a função Lagrangiana aumentada é atrativa para problemas de grande porte, para os quais as estratégias do conjunto ativo não são apropriadas. Trabalharam, inicialmente, com uma função Lagrangiana aumentada associada ao problema (2.1) somente com restrições de igualdade; a seguir, estenderam o resultado para o caso de variáveis canalizadas. Apresentaram dois algoritmos para resolver o problema (2.1). Utilizaram, no primeiro, a seguinte atualização dos multiplicadores:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + S\,\frac{g(x^k)}{c^k} \qquad (2.23)$$

e no segundo, a (2.5), ou qualquer outra forma de atualização, desde que o número de cálculos não fosse muito grande, pois o problema é de grande porte. Por último, estabeleceram a convergência global para seu algoritmo.

HAGER (1993) trabalhou com o problema (2.1) apenas com restrições de igualdade. Apresentou um algoritmo de otimização irrestrita, que combina, em um esquema de otimização irrestrita, o método do gradiente conjugado, a função Lagrangiana aumentada vista em HESTENES (1969) e uma atualização do multiplicador para obter convergência quadrática global. Definiu o erro nas restrições e o erro nas condições de KKT, tentando "balancear" esses erros durante o processo, regulando o aumento ou não do fator de penalidade e não os utilizando como um critério de parada. Tal algoritmo é baseado em uma técnica de Lagrangiana aumentada e é composto por três passos. No primeiro passo, aplica-se um método iterativo para a equação de igualdade, que é interrompido quando o erro na restrição

é menor que o erro na condição de KKT. No segundo passo, aplica-se um método iterativo para minimizar o erro na condição de KKT, até que esse erro seja suficientemente menor que o erro na restrição. Caso nos dois primeiros passos o erro total (a soma do erro nas restrições e o erro nas condições de KKT) não diminua, executa-se o terceiro passo. Neste, aumenta-se o fator de penalidade e aplica-se uma técnica iterativa pré-condicionada ao problema de minimizar a Lagrangiana aumentada em x, finalizando o processo quando o erro de KKT é menor que o erro na restrição. O pré-condicionador tem como objetivo reduzir o mal condicionamento causado pelo fator de penalidade. Apresenta propriedades de convergência global, uma sub-rotina para os passos do algoritmo e exemplos numéricos.

ROCKAFELLAR (1993) apresentou uma teoria sobre multiplicadores de Lagrange, dedicando uma parte de seu artigo à função Lagrangiana aumentada. Essa função Lagrangiana aumentada tem como base a apresentada pelo autor em 1973 e é estendida para problemas com restrições de igualdade e desigualdade, como segue:

$$La(x,\lambda,\mu)=f(x)+\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j g_j(x)+\frac{c}{2}g_j^2(x))+\sum_{i=1}^{r}\begin{cases}\frac{c}{2}(h_i(x))^2+\mu_i h_i(x), \text{se } h_i(x)\geq-\frac{\mu_i}{c}\\ -\frac{\mu_i^2}{2c}, \text{ se } h_i(x)\leq-\frac{\mu_i}{c}\end{cases}, \quad (2.24)$$

onde λ e μ são os vetores dos multiplicadores de Lagrange associados com as restrições de igualdades e de desigualdade, respectivamente, e $c > 0$ é o fator de penalidade.

Rockafellar definiu e demonstrou um teorema de ponto de sela para (2.24), o

qual é muito mais poderoso que o definido para a Lagrangiana clássica, devido ao fato de ser válido na ausência de convexidade no problema original. O valor $c > 0$ controla a curvatura da superfície parabólica que representa La, possibilitando a "entrada" desta em alguma concavidade da função objetivo. Definiu o problema dual e demonstrou vários teoremas em relação à convexidade de (2.24), à concavidade da função objetivo dual e às propriedades de diferenciabilidade e apresentou uma condição suficiente para a otimalidade de (2.1), que não requer convexidade para $x \in X$, onde X é um conjunto poliedral. Ressaltou, ainda, que, apesar de todas as vantagens da Lagrangiana aumentada, ela não possui a separabilidade da Lagrangiana clássica com respeito a x, a qual é extremamente importante na resolução de problemas de grande porte.

BERTSEKAS & TSENG (1993) analisaram o método dos multiplicadores exponencial para problemas de minimização restrita convexa, os quais trabalham com o método da Lagrangiana aumentada, utilizando uma função penalidade exponencial. A função Lagrangiana aumentada empregada por eles para a resolução de (2.1) somente com restrições de desigualdade é dada por:

$$La(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\mu_j}{c_j} \Psi(c_j h_j(x)), \qquad (2.25)$$

onde $c_j > 0$ é o fator de penalidade, μ_j é o multiplicador de Lagrange associado à restrição j, j = 1, ... , r e $\psi(t) = e^t - 1$ é a função penalidade exponencial. A regra de atualização dos multiplicadores é dada por:

$$\mu_j^{k+1} = \mu_j^k \nabla\Psi(c_j^k h_j(x^k)) = \mu_j^k e^{c_j^k h_j(x^k)}, \; j = 1, \ldots, r. \qquad (2.26)$$

A principal motivação para se usar a Lagrangiana aumentada dada por (2.25) é o fato de ela ser duas vezes diferenciável se as funções f e h também o são, podendo ser utilizado o método de Newton de modo mais eficiente e com garantia de convergência superlinear. O método de Bertsekas & Tseng também tem sido usado para resolver muitos problemas de programação linear encontrados na programação da produção de energia em sistemas de potência; um exemplo dessa utilização é encontrado em BERTSEKAS et al. (1982) e LAUER et al. (1981). Uma das contribuições desse método é que a seqüência $\{\mu^k\}$ converge para a solução ótima do problema dual sem assumir a suposição de convexidade de acordo com uma regra de seleção de c_j^k, j = 1, ... r. Bertsekas & Tseng forneceram também uma análise da taxa de convergência do método quando ele é aplicado a problemas lineares.

BOUKARI & FIACCO (1995) apresentaram um levantamento histórico dos métodos de programação não-linear (métodos de penalidade, métodos de pontos interiores e métodos da função Lagrangiana aumentada) e uma lista de programas existentes que utilizam tais métodos. O objetivo desses autores foi, somente, o de relatar, de maneira sucinta, o que cada um dos autores citados por eles fez no período de 1968 a 1993. Boukari & Fiacco citam, em seu estudo, muitos artigos que tratam do assunto função Lagrangiana aumentada – alguns já vistos em nosso trabalho; logo, esse estudo pode servir como uma fonte de consulta sobre o assunto no período mencionado. Ressaltamos uma consideração feita pelos autores, na qual dizem ter sido feito muito pouco na área de função Lagrangiana aumentada, no período de

1988 a 1993, em virtude da atenção despertada pelos métodos de pontos interiores.

PSIAKI (1995), com a finalidade de obter uma convergência global robusta e uma convergência local rápida, propôs um novo algoritmo para programação não-linear, utilizando a função Lagrangiana aumentada, proposta por POWELL (1969) para problemas com restrições de igualdade, e estendida por FLETCHER (1975) para problemas com restrições de desigualdade. Essa função é dada por:

$$La(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{2}[g_i(x)+\frac{\lambda_i}{c_i}]^2+\sum_{i=1}^{r}\frac{c_i}{2}\{[h_i(x)+\frac{\lambda_i}{c_i}]^+\}^2, \qquad (2.27)$$

onde $\lambda \geq 0$ é o vetor multiplicador de Lagrange, $c > 0$ é o vetor dos fatores de penalidade e $[\ ]^+=\max_i \{ h_i(x) + \frac{\lambda_i}{c_i},0\}$ é o operador de máximo valor.

Psiaki caracterizou seu algoritmo como uma variação do algoritmo proposto por HESTENES (1969) e por POWELL (1969); seu algoritmo é apresentado em três ciclos, denominados exterior, médio e interior. O ciclo exterior é o algoritmo da Lagrangiana aumentada com atualização dos multiplicadores de primeira ordem e taxa de convergência linear. Diferencia-se do algoritmo encontrado em POWELL (1969) e FLETCHER (1985) por aumentar o fator de atualização do multiplicador mais rapidamente. O algoritmo do ciclo médio consiste na minimização da função Lagrangiana aumentada com multiplicadores fixos, utilizando-se uma técnica de programação quadrática seqüencial. O algoritmo do ciclo interno resolve o programa quadrático, as restrições quadráticas e as variáveis canalizadas do ciclo médio,

usando um método do tipo Newton. O autor verificou que seu algoritmo tem convergência mais robusta que a do Nonlinear Programming of Systems Optimization Laboratory (NPSOL) – programa desenvolvido no Department of EESOR/ Stanford University – e velocidade similar à deste.

Observamos que, a partir dos próximos trabalhos, começaremos a encontrar métodos mistos, isto é, métodos que passam a utilizar o método da função barreira e o método da função Lagrangiana aumentada associados.

SHANNO et al. (1996) sugeriram, em seu trabalho, o uso de uma função mista para resolver o problema (2.1); nessa função mista as restrições de igualdade são tratadas por uma função Lagrangiana aumentada e as de desigualdade por uma função barreira-penalidade – que foi estudada em BREITFELD & SHANNO (1996) – da seguinte forma:

$$\text{Labp} = f(x) - \delta\sum_{i=1}^{r}\mu_i\Phi(h_i(x)) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x) + \frac{1}{2\delta}\sum_{i=1}^{m}(g_i(x))^2, \qquad (2.28)$$

onde:

$$\Phi(h_i(x)) = \ln\left(s_i + \frac{h_i(x)}{\delta}\right), \text{ se } h_i(x) \geq -\beta\delta s_i;$$

$$\Phi(h_i(x)) = \frac{1}{2}q_i^a(h_i(x))^2 + q_i^b h_i(x) + q_i^c, \text{ se } h_i(x) \leq -\beta\delta s_i;$$

$$q_i^a = \frac{-1}{(s_i\delta(1-\beta))^2};\ q_i^b = \frac{1-2\beta}{s_i\delta(1-\beta)^2};\ q_i^c = \frac{\beta(2-3\beta)}{2(1-\beta)^2} + \ln(s_i(1-\beta));$$

δ é o fator de barreira; μ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade, λ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade; s é um vetor de variáveis de folga, e $0 < \beta < 1$ é um escalar.

Os multiplicadores de Lagrange são atualizados de acordo com as seguintes regras:

$$\mu_i^k = \frac{\delta^k \mu_i^k}{\delta^k s_i + h_i(x^k)}, i = 1,...,r$$
$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k - \frac{g_i(x^k)}{\delta^k}, \; i = 1,...,m \qquad (2.29)$$

CONN et al. (1997) apresentaram uma classe de métodos denominados métodos de barreira Lagrangianos. Trabalharam com o problema (2.1) somente com restrições de desigualdade do tipo maior ou igual e, ainda, acrescentaram a ele a canalização da variável primal x. Também nesse estudo, a preocupação dos autores era resolver problemas de grande porte. A função auxiliar é denominada função barreira Lagrangiana e é dada por:

$$Lbl(x, \mu) = f(x) - \sum_{i=1}^{r} \mu_i s_i \log(c_i(x) + s_i), \qquad (2.30)$$

onde $\mu > 0$ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange, $s_i > 0$ são denominadas perturbações e $c_i(x) \geq 0$, são as restrições de desigualdade, para $i = 1, \ldots, r$. Em

princípio, não é considerada a variável canalizada, com a intenção de a minimização seqüencial irrestrita garantir a satisfação dos limites. A função barreira modificada usada em (2.30) é a mesma estudada em POLYAK (1992). Conn et al. utilizaram uma função barreira Lagrangiana baseados nos seguintes motivos: funções barreira determinam restrições ativas na solução de um modo mais eficiente que os métodos do conjunto ativo, sendo isto válido, também, para a função barreira Lagrangiana; os métodos de pontos interiores para programação não-linear são menos sensíveis à degeneração que os métodos de restrições ativas. Os autores verificaram que a função apresentada é menos degenerada para o problema não-linear que a função Lagrangiana aumentada apresentada em 1991, por eles. Experimentos numéricos indicam que esse método é superior ao da barreira clássica, evita o mal condicionamento que ocorre neste, impedindo dificuldades numéricas. Os métodos de barreira Lagrangianos são usados na resolução de problemas de grande porte, com a vantagem de evitar variáveis de folga.

Esse trabalho foi desenvolvido de modo similar ao trabalho publicado em 1991, pelos mesmos autores, com o objetivo de enfatizar a unicidade entre as duas abordagens, que são a penalidade interior e a exterior (penalidade quadrática e barreira logarítmica). Os autores forneceram um algoritmo, o qual converge para um ponto em que as condições de KKT são satisfeitas. A atualização dos multiplicadores de Lagrange é dada por:

$$\mu_i^{k+1} = \frac{\mu_i^k s_i^k}{c_i^k(x) + s_i^k}, \; i = 1, \ldots, r, \qquad (2.31)$$

sendo associado a este multiplicador um fator de penalidade c, o qual dirige a convergência do método, e s_i é dado por:

$$s_i^{k+1} = c_i^k \mu_i^k \ , \ i = 1, \ldots, r. \qquad (2.32)$$

O algoritmo é denominado localmente convergente se o fator de penalidade é fixado em um valor suficientemente pequeno. Os autores apresentaram uma análise da convergência global e da convergência assintótica e incluíram em seu algoritmo um tratamento para variáveis canalizadas. Também formularam uma nova função auxiliar para o problema (2.1) com restrições de igualdade e de desigualdade do tipo maior ou igual. Essa função é denominada função Lagrangiana aumentada/barreira Lagrangiana. Nela, as restrições de desigualdade e igualdade são tratadas pela função barreira e função Lagrangiana aumentada, respectivamente:

$$\text{Labl}(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{r} \mu_i s_i \log(c_i(x)+s_i) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x), \ (2.33).$$

Nessa função foi utilizado o mesmo algoritmo, e a atualização dos multiplicadores de Lagrange para as restrições de igualdade, é dada por:

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \frac{g_i^k(x)}{c}, \ i = 1, \ldots, m. \qquad (2.34)$$

Conn et al. destacaram que seu método de barreira Lagrangiano resolveu noventa por cento dos problemas-testes e, na maioria das vezes, foi considerado mais eficiente que o da função Lagrangiana aumentada.

BEN-TAL & ZIBULEVSKY (1997) estudaram uma classe de métodos para resolver problemas convexos, baseados em uma função Lagrangiana aumentada não quadrática, para a qual os fatores de penalidade são funções dos multiplicadores. Esses métodos foram denominados métodos dos multiplicadores barreira/penalidade (PBM). Eles são especificados por uma função barreira /penalidade φ e uma função de atualização do fator de penalidade ϖ(função sublinear dos multiplicadores). Trabalharam com o problema (2.1), considerando apenas as restrições de desigualdade. A função Lagrangiana aumentada associada a tal método é dada por:

$$La(x,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i c_i \varphi\left(\frac{h_i(x)}{c_i}\right), \qquad (2.35)$$

onde $c_i > 0$ é o fator de penalidade associado à restrição i, $\mu_i \geq 0$ são os multiplicadores de Lagrange, e φ é a função barreira/penalidade.

Para determinar a solução x que minimiza a função Lagrangiana aumentada (2.35) utilizaram o método de Newton. As atualizações dos multiplicadores de Lagrange e dos fatores de penalidade são apresentadas, respectivamente, por:

$$\mu_i^{k+1} = \mu_i^k \varphi'\left(\frac{h_i(x^k)}{c_i^k}\right), i = 1, \ldots, r, \qquad (2.36)$$

$$c_i^{k+1} = \varpi^k(\mu_i^k), i = 1, \ldots, r, \qquad (2.37)$$

onde ϖ^k é uma função de atualização dos fatores de penalidade não decrescente e sublinear (isto é, $\forall\ t > 0 : \varpi^k(t) \leq ct$, para algum $c > 0$). Ben-tal & Zibulevsky citam três exemplos de métodos do tipo PBM:

- a função Lagrangiana aumentada vista em ROCKAFELLAR (1973a):

$$\varphi(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{2}t^2, & \text{se } t \geq -1 \\ -\frac{1}{2}, & \text{se } t < -1 \end{cases}; \qquad (2.38)$$

- o método dos multiplicadores exponencial visto em BERTSEKAS (1993):

$$\varphi(t) = e^t - 1; \qquad (2.39)$$

- o método de barreira modificado que utiliza uma função logarítmica perturbada:

$$\varphi(t) = -\log(1-t),\ -\infty < t < 1. \qquad (2.40)$$

Porém, para desenvolver seu trabalho, utilizaram as funções que seguem:

- a função penalidade logarítmica-quadrática:

$$\varphi(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{2}t^2, \text{ se } t \geq -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\log(-2t) - \frac{3}{8}, \text{se } t < -\frac{1}{2} \end{cases}; \qquad (2.41)$$

- a função penalidade *reciprocal*-quadrática:

$$\varphi(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{2}t^2, \text{ se } t \geq -\frac{1}{3} \\ \frac{32}{27}\left(\frac{1}{1-t}\right) - \frac{7}{5}, \text{se } t < -\frac{1}{3} \end{cases}. \qquad (2.42)$$

Observaram que, se $\varpi^k(t) = c_k\, t$, a Lagrangiana aumentada (2.35) corresponde à apresentada em ROCKAFELLAR (1973a).

Ben-tal & Zibulevsky apresentaram uma interpretação dual do método e as propriedades de convergência. Descreveram a implementação, ressaltando que foram usadas as seguintes funções de atualização dos fatores de penalidade:

$$\varpi^k(t) = \varpi_0(\lambda)^k\, t \quad \text{e} \quad \varpi^k(t) = \varpi_0(\lambda)^k\,. \qquad (2.43)$$

O método foi aplicado em dois problemas de grande porte. Os autores destacaram que, a melhor das implementações foi a que utilizou a função definida em (2.41); porém observaram que apesar de ser considerada levemente inferior, a

função vista em (2.42) também obteve sucesso. Comparado com a função penalidade logarítmica perturbada clássica, verificaram que o número de passos do método de Newton para a penalidade quadrática logarítmica foi reduzido de 2 a 3 vezes, particularmente, para problemas de grande porte. O desenvolvimento do algoritmo não foi afetado pela escolha dos fatores, e o número de passos de Newton aumenta lentamente em relação ao aumento da dimensão do problema.

DUSSAULT (1998), com o objetivo de analisar a taxa de convergência, trabalhou com a mesma função Lagrangiana aumentada apresentada em HESTENES (1969). Utilizou o problema (2.1) considerando apenas as restrições de igualdade. Analisou a taxa de convergência local para as variáveis primais e duais, utilizando o método com as três regras de atualização dos multiplicadores de Lagrange que seguem:

- algoritmo da penalidade simples onde o multiplicador λ é constante;

- regra de atualização de primeira ordem:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \frac{g(x^k)}{c^k}; \qquad (2.44)$$

- regra de atualização de segunda ordem:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + (\nabla_x^2 La(x^k, \lambda^k))^{-1} \nabla_x La(x^k, \lambda^k). \qquad (2.45)$$

EESC - USP Biblioteca São Carlos

O autor apresentou um algoritmo e garantiu sua convergência global. Apresentou, também, alguns exemplos, em que aplicou as seguintes regras para a atualização do fatores de penalidade:

- método de penalidade simples (isto é, $\lambda = 0$) e $c_{k+1} = \min\left(\frac{c_k}{10}, (c_k)^{1.5}\right)$;
- regra de atualização de primeira ordem (2.44) e $c_{k+1} = \min\left(\frac{c_k}{5}, (c_k)^{1.1}\right)$;
- regra de atualização de primeira ordem (2.44) e $c_{k+1} = \min\left(\frac{c_k}{10}, (c_k)^{1.5}\right)$;
- regra de atualização de primeira ordem (2.44) e c tão grande quanto possível.

Concluiu seu trabalho com a observação de que o método da Lagrangiana aumentada pode ter uma convergência rápida por meio de uma cuidadosa atualização dos fatores de penalidade.

DOSTÁL et al. (1999) introduziram um algoritmo que trabalha com problemas de programação quadrática estritamente convexa com restrições de igualdade, esse algoritmo é uma modificação do visto em HESTENES (1969). Os autores utilizaram, em seu algoritmo, um controle de precisão da solução dos problemas auxiliares, ou seja, dos problema de minimizar a Lagrangiana aumentada com relação à variável primal x. Esse controle de precisão é caracterizado pelos autores como a principal melhora do método de HESTENES (1969) e exige que o erro do gradiente da função Lagrangiana aumentada seja menor que um escalar positivo multiplicado pelo erro nas restrições. Tal controle, bem como o algoritmo, é

muito semelhante ao visto em HAGER (1993), diferenciando-se deste por ser usado como critério de parada, ao invés de indicar quando o fator de penalidade deve ser aumentado. O principal interesse na elaboração desse método é a resolução de problemas de grande porte. O fator de penalidade é aumentado como em CONN et al. (1991) e BERTSEKAS (1982). São fornecidos resultados sobre convergência global e um experimento numérico. Os autores finalizaram esse trabalho com o esclarecimento de que a extensão para o caso não convexo está sendo estudado.

GOLDFARB et al. (1999) apresentaram um método, denominado método da Lagrangiana aumentada-barreira modificada, para resolver o problema (2.1) com restrições de igualdade e desigualdade do tipo maior ou igual. Tal método é a combinação dos métodos da Lagrangiana aumentada de HESTENES (1969) e POWELL (1969) e o da função barreira modificada de POLYAK (1992). Pode ser considerado um método de Lagrangiana aumentada interior-exterior. Utiliza uma função Lagrangiana barreira modificada, na qual as restrições de desigualdade são tratadas por meio de um termo de barreira modificada, e as restrições de igualdade, por um termo de Lagrangiana aumentada, da seguinte forma:

$$\text{Labm}(x,\lambda,\mu,c)=\begin{cases} f(x)-\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{r}\mu_i \ln(c(-h_i(x))+1)-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j(x)+\frac{c}{2}\sum_{j=1}^{m} g_j^2(x), \text{se } x\in \text{int}\,\Gamma_k \\ \infty, \text{ se } x\notin \text{int}\,\Gamma_k \end{cases} \quad (2.46)$$

onde: $\Gamma_k=\{x: f_i(x)\geq -\frac{1}{c}, i=1,\ldots\}$, c é o fator de barreira-penalidade, λ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange associado às restrições de igualdade, e μ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange associado às restrições de desigualdade.

Os multiplicadores de Lagrange são atualizados por meio da seguinte regra:

$$\mu_i^{k+1} = \frac{\mu_i^k}{c^k(-h_i(x^k))+1}, \; i = 1, \ldots, r, \qquad (2.47)$$

$$\lambda_j^{k+1} = \lambda_j^k - c^k \, g_j(x^{k+1}), \; j = 1, \ldots, m. \qquad (2.48)$$

A função, vista em (2.46), é usada com o objetivo de eliminar os problemas que ocorrem com a função barreira-penalidade – apresentada por FIACCO & McCORMICK (1990) –, pois (2.46) existe na solução e mantém a suavidade da função objetivo e das restrições na vizinhança da solução. Sob as condições de otimalidade de segunda ordem, a função tem um mínimo global para algum $\mu \geq 0$ e λ, quando o fator de barreira-penalidade é suficientemente grande. A função dual baseada em (2.46) é suave no caso não convexo, e o teorema básico da dualidade é válido se as condições suficientes de segunda ordem são satisfeitas.

KREJIC et al. (2000) introduziram um algoritmo da função Lagrangiana aumentada, estudada em HESTENES (1969), que utilizava aproximações Gauss-Newton, da matriz Hessiana, nas iterações internas. Por meio do modelo Gauss-Newton, as aproximações quadráticas da função Lagrangiana aumentada tornam-se convexas. Krejic et al. consideraram que o uso de aproximações da Hessiana, ao invés da Hessiana clássica, torna seu método mais eficiente. Apresentaram estudos comparativos utilizando o software LANCELOT.

MIJANGOS & NABONA (2001) apresentaram um novo método para resolução de problemas de minimização com função objetivo não-linear, restrições lineares e não-lineares, e variáveis canalizadas. Nesse método, o problema original é resolvido por meio de sucessivas minimizações de um problema auxiliar. O problema auxiliar minimiza uma função Lagrangiana aumentada que inclui somente as restrições não-lineares; esse problema está sujeito às restrições de igualdade e variáveis canalizadas. Os autores utilizaram a função Lagrangiana aumentada encontrada em HESTENES (1969) e POWELL (1969). O método é particularmente interessante quando as restrições lineares são equações de conservação de fluxo, pois existem técnicas eficientes para resolver problemas de rede não-linear. Analisaram a viabilidade de estimar os multiplicadores das restrições não-lineares pela aplicação das condições de KKT e utilizaram técnicas de redução de variáveis durante a otimização. Compararam o desempenho computacional dessa estimativa com a atualização dos multiplicadores, proposta por Hestenes e Powell.

2.4 Histórico do problema de fluxo de potência ótimo

Historicamente o FPO foi originado por uma nova formulação para o problema de despacho econômico (DE). Um sistema elétrico de potência (SEP) deve ser planejado para fornecer energia elétrica, respeitando os padrões de qualidade para esse fornecimento e garantindo a continuidade do serviço.

No início da década de 60, surgiram os primeiros trabalhos sobre FPO. Nesse

período, destacamos CARPENTIER (1962), o qual propôs um modelo geral para o problema de FPO, por meio da incorporação das equações de fluxo de potência ao problema de DE, e utilizou o teorema de KKT para resolvê-lo. Seu modelo é um problema de otimização restrita, não-linear, não convexo e de grande porte, cujo desenvolvimento acompanha os avanços das técnicas de otimização. Tem por objetivo determinar o ponto ótimo de operação de um sistema elétrico de potência. Pode ser caracterizado como um problema de otimizar uma função objetivo, a qual representa um desempenho do sistema, sujeito a restrições de igualdade, que representam as equações do fluxo de potência, e de desigualdade, que representam as restrições funcionais e as variáveis de estado. Sua formulação matemática é dada pelo problema (2.1).

Carpentier resolveu (2.1) transformando-o em um problema irrestrito que utiliza a função Lagrangiana clássica. O mínimo desse problema é alcançado aplicando-se as condições de otimalidade, o que resulta em um sistema não-linear. Esse sistema é resolvido pelo método de Gauss-Seidel, obtendo-se, assim, a solução do problema.

Após a modelagem matemática do FPO por Carpentier, técnicas de otimização passaram a ser estudadas com o objetivo de resolvê-lo. As primeiras abordagens utilizavam o gradiente da função Lagrangiana.

DOMMEL & TINNEY (1968) propuseram o método do gradiente reduzido, que consistia em um algoritmo de passo descendente aplicado ao subespaço tangente

das equações não-lineares do fluxo de potência. Nesse método, após mudanças nas variáveis de controle, as equações do fluxo de potência são resolvidas pelo método de Newton. As restrições de desigualdade associadas às variáveis de controle são tratadas por projeção, e as variáveis dependentes ou funcionais, por métodos da função penalidade. Tem uma eficiência de primeira ordem para a minimização da função objetivo. Apesar do seu rigor matemático, essa abordagem apresenta convergência lenta, "ziguezagueando" próxima à solução ótima. Há, ainda, limitações na determinação do passo nas variáveis de controle e sensibilidade quanto ao tamanho do passo do gradiente – elementos capazes de comprometer o processo de convergência.

O método de penalidade, apresentado por SASSON et al. (1973), surgiu com o objetivo principal de acelerar a convergência do método utilizado por DOMMEL & TYNNEY (1968), o qual era muito lento, pelo fato de ser de primeira ordem. A idéia desse método consiste em transformar o problema restrito em irrestrito, minimizando, assim, uma função auxiliar formada pela função objetivo e pela função penalidade (que consiste nas restrições de igualdade e desigualdade penalizadas). A cada iteração são aumentados os fatores de penalidade; a matriz Hessiana da função auxiliar é calculada; e as variáveis são atualizadas. O processo é repetido até que todas as restrições estejam satisfeitas. A matriz Hessiana recebe influência direta dos fatores de penalidade; logo, para valores elevados dos fatores de penalidade, ela pode se tornar mal condicionada.

RASHED & KELLY (1974) introduziram um método que utilizava

multiplicadores de Lagrange, método de Newton e método de penalidade. Em seu método, as restrições de igualdade, representadas pelas equações do fluxo de potência, são incorporadas à função objetivo por meio de multiplicadores de Lagrange, enquanto as restrições de desigualdade são incorporadas por meio de fatores de penalidade, resultando em uma função auxiliar. Os fatores de penalidade são atualizados por um parâmetro positivo, e as variáveis, pelo método de Newton, no qual o passo é calculado utilizando-se a matriz Hessiana.

SUN et al. (1984) apresentaram uma nova abordagem na qual utilizaram uma formulação do método de Newton e o desacoplamento do problema em dois subproblemas, denominados subproblema de potência ativa e subproblema de potência reativa. As restrições de igualdade são incorporadas à função objetivo por meio da utilização dos multiplicadores de Lagrange, e as restrições de desigualdade por meio de multiplicadores de Lagrange e fatores de penalidade, originando uma função auxiliar. As restrições de desigualdade são divididas em dois grupos: o grupo das restrições penalizadas e o grupo das restrições consideradas ativas na solução. As restrições ativas são incorporadas à função objetivo por meio de multiplicadores de Lagrange. O ponto ótimo do problema ocorre quando as condições de otimalidade de KKT estiverem satisfeitas, e as equações do fluxo de potência tradicional estiverem dentro de uma determinada tolerância. O método de Sun et al. apresenta convergência de segunda ordem e tem como deficiência a necessidade de identificar as restrições de desigualdade ativas na solução.

SANTOS et al. (1988) aplicaram o método da função Lagrangiana

aumentada. Nesse método, as restrições de igualdade e desigualdade estão associadas a multiplicadores de Lagrange e fatores de penalidade quadráticos, como pode ser visto em ROCKAFELLAR (1974). A trajetória de convergência do método ocorre pela região infactível do problema. Esse método pode ser considerado um aperfeiçoamento do método proposto por SASSON et al. (1973) e SUN et al. (1984), pois, nele, não há a necessidade de fatores de penalidade muito elevados, o problema de mal condicionamento da matriz Hessiana é evitado, e não é necessário identificar as restrições de desigualdade ativas na solução. A solução é obtida quando todas as restrições de igualdade e desigualdade são satisfeitas dentro de uma tolerância especificada.

COSTA et al. (1990) apresentaram uma nova abordagem resultante da associação dos métodos propostos por SUN et al. (1984) e SANTOS et al. (1988). Trabalharam com o método de Newton e com uma abordagem da função Lagrangiana aumentada, em que as restrições de igualdade não são penalizadas. Nesse método não há a necessidade de identificar as restrições de desigualdade ativas na solução, eliminando-se, assim, a deficiência do algoritmo de SUN et al. (1984). As restrições de igualdade são tratadas pelo método de Newton.

Em HUNEAULT & GALIANA (1991) encontramos um amplo estudo das metodologias aplicadas na resolução do FPO desde sua formulação por Carpentier.

MONTICELLI & LIU (1992) propuseram uma nova abordagem do método de Newton. Combinaram os métodos dos multiplicadores de Lagrange e da função

penalidade. Sua proposta é muito semelhante à de SUN et al. (1984); diferencia-se desta por utilizar um movimento adaptativo do fator de penalidade, e assegurar que a matriz Hessiana seja definida positiva ao longo da solução do problema, sem afetar o processo de convergência.

Em 1994, Granville utilizou, pela primeira vez, um método de pontos interiores denominado método primal-dual barreira logarítmica. Este método utiliza multiplicadores de Lagrange para as restrições de igualdade e transforma as desigualdades em igualdades utilizando variáveis de folga. Essas variáveis são incorporadas à função objetivo por meio da função barreira logarítmica e penalizadas com um fator de barreira, o qual tenderá a zero. Este algoritmo apresenta muita sensibilidade quanto à escolha do fator de barreira, podendo até mesmo divergir, em alguns casos. A solução é encontrada quando todas as restrições do problema original forem satisfeitas.

Nos estudos na área de pontos interiores, destacam-se, ainda, WU et al. (1994), os quais sugerem uma extensão do método primal-dual. O algoritmo é denominado método predictor-corretor, diferenciando-se do método primal-dual pela introdução de termos não-lineares nas condições de otimalidade.

QUINTANA et al. (1995) trabalharam com o método primal-dual barreira logarítmica e apresentaram um algoritmo que resolve diretamente a minimização de perdas na transmissão (funções não-lineares).

TORRES et al. (1998) propuseram a resolução do problema de fluxo de potência ótimo na forma retangular e não polar; dessa forma, justificaram que, tanto a função objetivo quanto as restrições são quadráticas. Aplicaram o método visto em GRANVILLE (1994) e apresentaram técnicas para a escolha do passo, para a redução do fator de barreira e para o uso de um predictor-corretor.

MOMOH et al. (1999a,b) apresentaram uma ampla revisão sobre técnicas para resolução do problema de FPO. Dividiram as técnicas em seis categorias: programação não-linear, em que citam as técnicas de minimização sequencial irrestritas, o método de Lagrange e o método da Lagrangiana aumentada; programação quadrática, referindo-se aos métodos quase-Newton e de sensibilidade; solução das condições de otimalidade baseadas em Newton, em que são obtidas as condições de KKT; programação linear, onde comentam sobre a utilização do método simplex e do método simplex revisado; versão híbrida de programação inteira, em que apresentaram uma mistura de técnicas de programação linear e inteira; e, finalmente, os métodos de pontos interiores, no qual encontramos a aplicação das técnicas que surgiram após a introdução do método de Karmarkar.

Em NEJDAWI et al. (2000) é proposto um algoritmo de programação quadrática seqüencial para resolver o problema de FPO. O algoritmo é formado por um ciclo de linearização externo e um ciclo de otimização interno. O ciclo interno resolve um problema de programação quadrática reduzido e relaxado. Como a relaxação das restrições mantém o problema com uma dimensão pequena, o algoritmo é considerado, pelos autores, muito eficiente. As iterações do ciclo externo

podem ser comparadas ao fluxo de potência ótimo de Newton, e as do ciclo interno, como eficientes iterações de pontos interiores. São apresentados testes computacionais para os sistemas IEEE de 30, 57, 118 e 300 barras. Os autores observaram que o número de iterações internas e externas não sofreu grandes alterações para as diferentes dimensões dos problemas.

COSTA et al. (2000) apresentaram um estudo comparativo de três abordagens, para resolver o problema de FPO, baseadas no método de Newton. São elas: penalidade e conjunto ativo (PCA); primal-dual (PD); e barreira logarítmica primal-dual (BLPD). Compararam as principais características dos métodos e fizeram uma revisão de suas metodologias. Apresentaram também testes computacionais para os sistemas IEEE 30, 57 e 118 barras.

COSTA & COSTA (2000) desenvolveram uma nova abordagem com o objetivo de melhorar o desempenho do método de Newton para o problema de FPO. Nela, os multiplicadores de Lagrange são calculados diretamente do sistema linearizado, e a fatoração ocorre por elementos e não na forma da estrutura em blocos. Essa abordagem apresenta como vantagens: a diminuição do tempo de processamento e a economia de memória. Os autores apresentaram uma comparação entre o novo método e o método tradicional de Newton, proposto por SUN et al. (1984), e resultados computacionais para os sistemas elétricos: IEEE de 14,30 e 118 barras e BRASIL 810 barras.

CAPÍTULO 3

REVISÃO DE MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

Neste capítulo apresentamos uma revisão de métodos de otimização restrita, os quais fornecem suporte teórico para a apresentação da nova abordagem do método da função Lagrangiana aumentada. Serão vistos: o método dual-Lagrangiano, o método de penalidade, o método de barreira, o método da função Lagrangiana aumentada e o método de Newton-Lagrangiano.

3.1 Apresentação do problema

Todos os métodos apresentados a seguir têm por objetivo resolver problemas de programação não-linear restritos da forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a: } g(x) = 0 \\ &\qquad\quad h(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde: $x \in R^n$, $g(x) \in R^m$, $h(x) \in R^r$, e as funções são de classe C_2.

3.2 O método dual-Lagrangiano

O método dual-Lagrangiano foi desenvolvido para resolver problemas convexos. Sua estratégia é a de associar ao problema (3.1) uma função auxiliar, que incorpora uma combinação das restrições à função objetivo. A função auxiliar é denominada função Lagrangiana e é apresentada da seguinte forma:

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \lambda^t g(x) + \mu^t h(x), \qquad (3.2)$$

onde λ é vetor dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade, e μ é vetor dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade.

Se o problema (3.1) é convexo, existem multiplicadores λ^* e μ^* que, aplicados ao problema irrestrito,

$$\underset{x}{\text{Minimizar}}\ L(x,\lambda^*,\mu^*), \qquad (3.3)$$

fazem com que a solução de (3.3) coincida com a solução de (3.1). A solução ótima é encontrada quando as condições de KKT forem satisfeitas. O problema (3.3) é denominado problema Lagrangiano.

3.2.1 Algoritmo

Passo inicial

Dado o problema (3.1), construa a função Lagrangiana (3.2).

Faça $k = 0$.

Escolha um ponto inicial $x^0 \in E_n$, um vetor multiplicador de Lagrange λ^0 associado às restrições de igualdade e um vetor multiplicador de Lagrange μ^0 associado às restrições de desigualdade.

Passo iterativo

PI1) Resolva o seguinte problema Lagrangiano utilizando um método de otimização restrita para λ^k e μ^k, fixos

$$\underset{x}{\text{Minimizar}}\ f(x) + (\lambda^k)^t g(x) + (\mu^k)^t h(x)$$

Admita x^{k+1} como uma solução e vá para **PI2)**;

PI2) Se x^{k+1} satisfaz KKT, **PARE**. Caso contrário, atualize os multiplicadores utilizando uma heurística, determinando $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \Delta\lambda^k$, $\mu^{k+1} = \mu^k + \Delta\mu^k$, e volte para **PI1)**.

Observamos que, para gerar os multiplicadores, podemos utilizar vários algoritmos. Uma escolha é o algoritmo do gradiente, que gera uma subseqüência de multiplicadores atualizando-os em cada passo pela expressão:

$$\begin{bmatrix}\lambda^{k+1}\\ \mu^{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^{k}\\ \mu^{k}\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}g(x)\\ s\end{bmatrix}, \qquad (3.4)$$

onde $s_j=\begin{cases} h_j(x), se \mu_j^k>0 \\ \max\{0,h_j(x)\}, se \mu_j^k=0\end{cases}$, e α é estimado para garantir a busca da variável dual, podendo-se fazer uma busca unidimensional.

3.2.2 Interpretação geométrica

Seja o seguinte problema perturbado, somente com uma restrição de desigualdade, denominado problema primal:

$$\mu(\varepsilon)=\text{Minimizar}\{f(x): h(x)\le\varepsilon, x\in E_n\}. \qquad (3.5)$$

Definimos um conjunto S , tal que:

$$S=\{(y,z)/y=h(x), z=f(x), x\in E_n\}, \qquad (3.6)$$

representado em um plano Oyz. O problema primal tem por objetivo determinar um ponto em S, que é um mínimo, com $y \leq 0$. Seja, então, (y^*, z^*) a solução ótima do problema primal, a qual pode ser vista na Figura 3.1.

Para $\mu \geq 0$, temos o seguinte problema Lagrangiano:

$$\begin{aligned} \theta(\mu) = &\text{ Minimizar } L(x, \mu) \\ &\text{sujeito a: } x \in X \end{aligned} \quad , \qquad (3.7)$$

onde $L(x, \mu) = f(x) + \mu h(x)$.

Determinar $\theta(\mu)$ significa minimizar $z + \mu y$ sobre S. Assim, temos as retas:

$$z + \mu y = a_i, \; i = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (3.8)$$

onde $-\mu$ é a inclinação (coeficiente angular) da reta, e a_i é a intersecção desta com o eixo z (coeficiente linear).

Para minimizarmos a função Lagrangiana do problema (3.7), movemos as retas dadas em (3.8) sobre S, a partir de um a_i pertencente à região factível, na direção contrária ao gradiente destas, através de retas paralelas, até que elas tangenciem a fronteira de S, como o visto na Figura 3.1. Observamos que $\theta(\mu)$ é o valor no qual a reta corta o eixo z, determinando o hiperplano suporte.

Para que a solução do problema irrestrito aproxime-se da solução do problema (3.1), redefinimos o novo multiplicador, fazendo:

$$\mu^{k+1} = \mu^k + \Delta\mu^k, \tag{3.9}$$

e determinamos novamente $\theta(\mu)$. Isso corresponde a uma nova família de retas, onde será realizado o mesmo processo anterior. À medida que o multiplicador de Lagrange aproxima-se do valor ótimo μ^*, as soluções de $\theta(\mu)$ aproximam-se da solução de (3.1), como pode ser visto na Figura 3.1.

A solução ótima dual é μ^*, o valor objetivo ótimo é z^*, e a solução ótima primal é x^*.

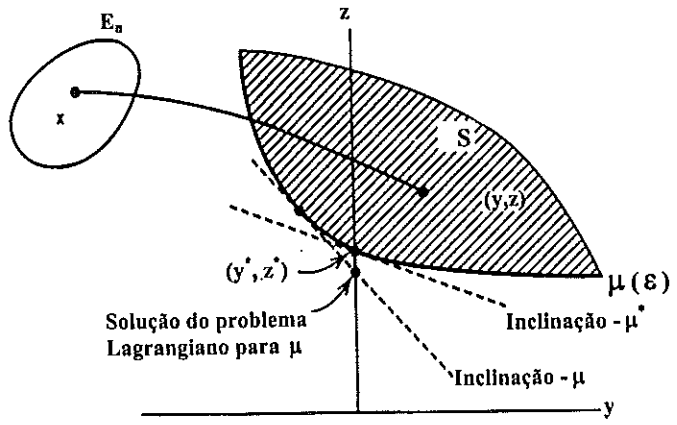

FIGURA 3.1 - Representação geométrica da função Lagrangiana

No caso de problemas não convexos em torno da solução, o método dual-Lagrangiano pode falhar no encontro da solução ótima do problema (2.1) em razão da presença do *gap* de dualidade (ver Figura 3.2).

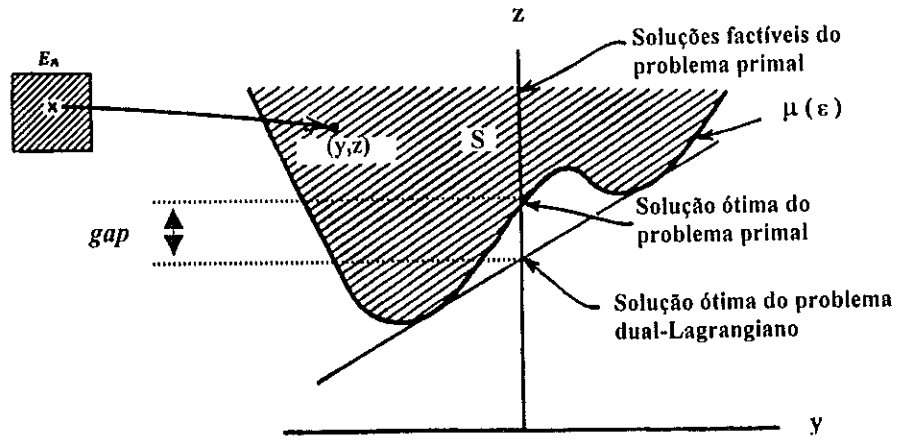

FIGURA 3.2 - Representação geométrica da função Lagrangiana para o caso não convexo

3.2.3 Dificuldades computacionais

Como pôde ser visto na interpretação geométrica, representada pela Figura 3.2, para problemas não convexos em torno da solução, pode ocorrer a existência do *gap* de dualidade e, portanto, o método dual-Lagrangiano não obtém a solução ótima do problema. Uma outra desvantagem do método é o aumento do número de variáveis do problema.

3.3 O método de penalidade

Seguindo a "idéia" de associar ao problema (3.1) uma seqüência de problemas irrestritos, a estratégia do método da função penalidade é a utilização de

uma função auxiliar onde as restrições são introduzidas na função objetivo através de um fator de penalidade, o qual penaliza alguma violação destas. Esse método gera uma seqüência de pontos infactíveis, cujo limite é a solução ótima do problema original.

A função auxiliar tem a forma f(x) + c P(x), sendo c denominado fator de penalidade, e P(x), função penalidade associada a (3.1), dada por:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \Theta(g_i(x)) + \sum_{j=1}^{r} \Lambda(h_j(x)), \tag{3.10}$$

onde Θ *e* Λ são funções contínuas de uma variável y, tais que:

$$\Theta(y) = 0, \text{ se } y = 0 \quad e \quad \Theta(y) > 0, \text{ se } y \neq 0; \tag{3.11}$$

$$\Lambda(y) = 0, \text{ se } y \leq 0 \quad e \quad \Lambda(y) > 0, \text{ se } y > 0. \tag{3.12}$$

As funções (3.11) e (3.12) podem assumir as seguintes formas:

$$\Theta(y) = |y|^p, \tag{3.13}$$

$$\Lambda(y) = [\max \{0, y\}]^p \tag{3.14}$$

onde p é um inteiro positivo. Para p = 2, em (3.13) e (3.14) a função P(x) é denominada função penalidade quadrática.

O problema penalizado consiste em:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}}\ f(x) + c\,P(x) \qquad (3.15)$$

para $c \geq 0$. Temos que, à medida que $c \to \infty$ e $P(x) \to 0$, a solução do problema penalizado converge para a solução do problema original.

3.3.1 Algoritmo

Passo inicial

Dado o problema (3.1), construa a função penalidade P(x) dada em (3.10).

Faça k = 0.

Escolha uma solução inicial $x^0 \in E_n$, um fator de penalidade $c^0 \geq 0$, um parâmetro de penalidade $\beta > 1$ e uma tolerância de convergência $\xi > 0$.

Passo iterativo:

PI1) Resolva o seguinte problema, utilizando um método de minimização irrestrita, para c^k fixo:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}}\ f(x) + c^k P(x)$$

Admita x^{k+1} como uma solução e vá para **PI2)**.

PI2) Se $c^k P(x^{k+1}) < \xi$, **PARE**. Caso contrário, atualize $c^{k+1} = \beta\, c^k$. faça k=k+1 e volte a **PI1)**

3.3.2 Interpretação geométrica

Seja o seguinte problema perturbado, somente com uma restrição de igualdade:

$$V(\varepsilon) = \text{Minimizar}\{f(x) : g(x) = \varepsilon, x \in E_n\}. \qquad (3.16)$$

Definimos um conjunto S representado em um plano Oyz, tal que:

$$S = \{(y,z)/y = g(x), z = f(x), x \in E_n\}. \qquad (3.17)$$

Tomamos $V(\varepsilon)$ como o contorno inferior deste conjunto, como pode ser visto na Figura 3.3.

Para $c > 0$ fixo, temos o seguinte problema penalizado:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}}\ f(x) + cg^2(x). \qquad (3.18)$$

Determinar o mínimo de (3.18) significa minimizar $z + c\,y^2$ sobre S. Assim, temos as parábolas:

$$z + cy^2 = a_i,\ i = 1,2,... \qquad (3.19)$$

onde $a_i \in R$ é a intersecção da parábola com o eixo z (ver Figura 3.3).

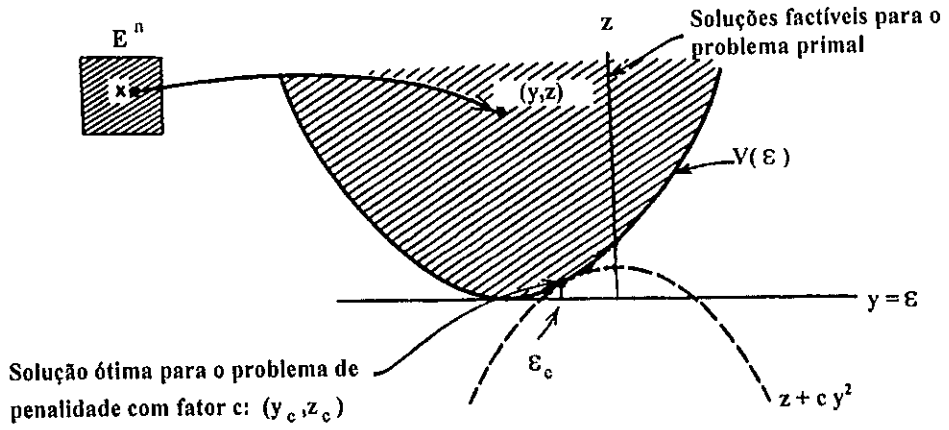

FIGURA 3.3 - Representação geométrica da função penalidade

No processo de minimização de (3.19), começamos com um valor a_i pertencente ao interior da região factível. A determinação da solução ótima de (3.18) consiste em mover as curvas de nível, isto é, as parábolas, na direção contrária à do gradiente, até o ponto onde a curva tangencia o conjunto S, como vemos na Figura 3.3. Observamos que a solução para o problema penalizado não é a mesma do problema original, pois $h \neq 0$ nesse ponto de tangência.

Na Figura 3.4 pode ser visto que, para aproximar tal solução, aumenta-se o fator de penalidade $c' = \beta c$, diminuindo-se a abertura da parábola, representada por (3.19); assim o ponto de tangência dessas parábolas torna-se mais próximo da solução ótima do problema original. À medida que $c \to \infty$, o ponto de tangência aproxima-se do ótimo, ou seja, da solução do problema (3.1).

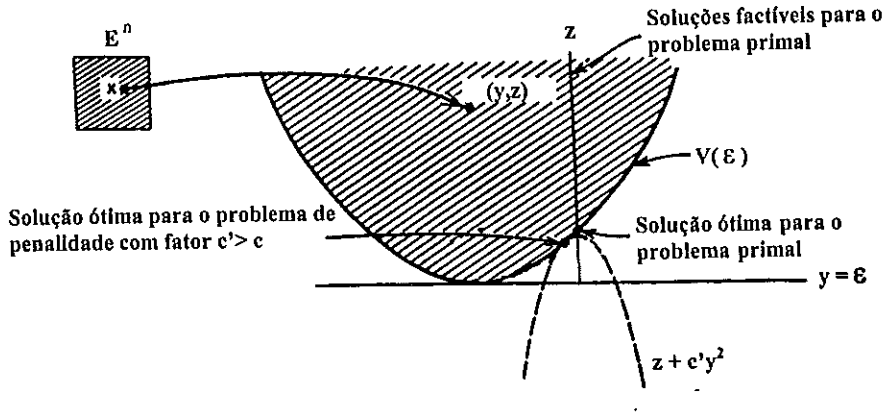

FIGURA 3.4 - Represenção geométrica da atualização dos fatores de penalidade

No caso não convexo em torno da solução, como mostra a Figura 3.5, podemos atingir a solução contrariamente ao método dual-Lagrangiano.

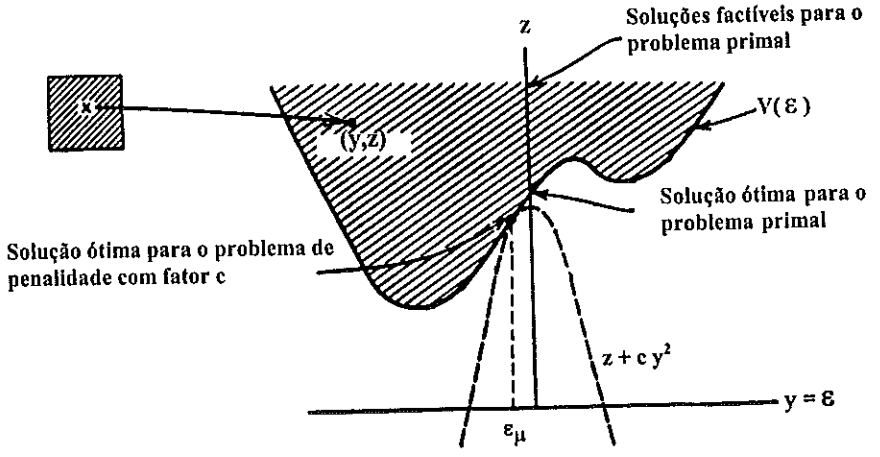

FIGURA 3.5 - Representação geométrica da função penalidade para o caso não convexo

3.3.3 Dificuldades computacionais

Escolhendo-se c suficientemente grande, a solução do problema penalizado será próxima à solução do problema (3.1); porém, para valores muito grandes do fator de penalidade, teremos algumas problemas de mal condicionamento. Para valores grandes de c, há uma maior ênfase sobre a factibilidade; e a maioria dos métodos de otimização irrestrita move-se rapidamente na direção de um ponto factível. Esse ponto pode estar longe do ótimo, causando um término prematuro do método. Um outro problema é o mal condicionamento da matriz Hessiana devido à sua dependência de c. Assim, a análise de convergência do método pode ficar prejudicada. Ressaltamos que a escolha inicial do fator de penalidade e do parâmetro de penalidade afeta a convergência do método.

3.4 O método de barreira

Da mesma forma que os métodos de penalidade, os métodos de barreira transformam o problema restrito em um problema irrestrito. Eles introduzem as restrições na função objetivo através de um fator de barreira, que penaliza a aproximação de um ponto factível à fronteira da região factível. Trabalhando no interior dessa região, tais fatores geram barreiras que impedem os pontos de sair dela. Logo, parte-se de um ponto factível e geram-se novos pontos factíveis. Uma das vantagens desse método é a obtenção de, pelo menos, uma solução factível, caso ocorra uma parada prematura dele. Ele trabalha somente com problemas de

desigualdade cujo interior é não-vazio. Assim, assume-se o problema (3.1) obedecendo a essa condição.

Com o objetivo de garantir a permanência no interior da região factível, podemos gerar o seguinte problema de barreira:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \{ f(x) + \delta B(x): h(x) < 0\}, \qquad (3.20)$$

onde $\delta \geq 0$ é denominado fator de barreira, e B(x) é uma função barreira não-negativa e contínua no interior da região factível $\{x; h(x) < 0\}$ e tende ao infinito à medida que a solução se aproxima da fronteira, a partir do interior. Definimos, então:

$$B(x) = \sum_{i=1}^{r} \phi[h_i(x)], \qquad (3.21)$$

onde ϕ é uma função de uma variável y, contínua sobre $\{y; y < 0\}$, e satisfaz

$$\phi(y) \geq 0 \text{ se } y < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \to 0^-} \phi(y) = \infty . \qquad (3.22)$$

A função $f(x) + \delta B(x)$ é denominada função auxiliar; a função barreira pode assumir várias formas, como:

$$B(x) = \sum_{i=1}^{r} -\frac{1}{h_i(x)}; \qquad (3.23)$$

$$B(x) = -\sum_{i=1}^{r} \ln[-h_i(x)]. \qquad (3.24)$$

A função (3.23) é denominada barreira clássica ou inversa e foi estudada por CARROL (1961); (3.24) é denominada função barreira logarítmica e foi estudada por FRISCH (1955).

Quando $\delta \to 0$ e $B(x) \to \infty$, temos que $\delta B(x)$ se aproxima da função barreira ideal, descrita anteriormente em (3.20), e a solução do problema de barreira converge para a solução do problema (3.1).

Observamos que (3.20) é um problema restrito e pode ser tão complexo quanto (3.1). Como exigimos uma solução inicial interior à região factível e o método trabalha com pontos interiores a essa região, ao penalizar os pontos que se aproximam da fronteira impedimos que eles saiam da região e a restrição pode ser ignorada. Teremos, realmente, um problema irrestrito, para o qual poderá ser utilizada uma técnica de otimização irrestrita.

3.4.1 Algoritmo

Passo inicial

Dado o problema (3.1), somente com restrições de desigualdade, construa a função (3.21).

Faça $k = 0$.

Escolha uma solução inicial factível $x^0 \in E_n$, um fator de barreira $\delta^0 > 0$, um parâmetro de barreira ρ, tal que $0 < \rho < 1$ e uma tolerância de convergência $\xi > 0$.

Passo iterativo:

PI1) Resolva o seguinte problema utilizando um método de minimização irrestrita, para δ^k fixo:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \{f(x) + \delta^k B(x): h(x) < 0\}.$$

Admita x^{k+1} como uma solução e vá para **PI2)** ;

PI2) Se $\delta^k B(x^{k+1}) < \xi$, **PARE.** Caso contrário, faça $\delta^{k+1} = \rho\, \delta^k$, $k=k+1$ e vá para **PI1.**

3.4.2 Interpretação geométrica

Seja o problema de barreira visto em (3.20) tal que as funções barreiras são definidas em (3.23).

Analisemos, primeiramente, o comportamento da função barreira. A Figura 3.6 mostra $\delta B(x)$ para valores decrescentes de δ.

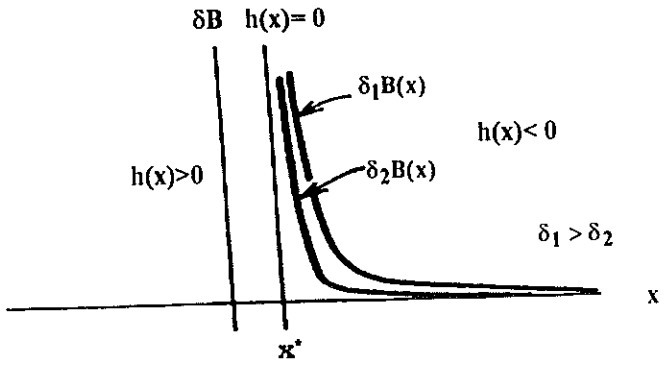

FIGURA 3.6 - Comportamento da função barreira

Note que, à medida que δ decresce, $\delta B(x)$ se aproxima de uma função que tem valor zero para $h(x) < 0$ e infinito para $h(x) = 0$.

Ao resolvermos o problema (3.20) utilizando a função (3.23), iniciamos o processo de solução com um ponto interior à região factível. Para cada valor de δ, temos uma solução que será o ponto inicial para o processo iterativo. À medida que δ decresce, aproximamo-nos da solução do problema original, ou seja, $\delta \rightarrow 0$, $x^k \rightarrow x^*$ e $f(x^k) + \delta B(x^k) \rightarrow f(x^*)$, como pode ser visto na Figura 3.7.

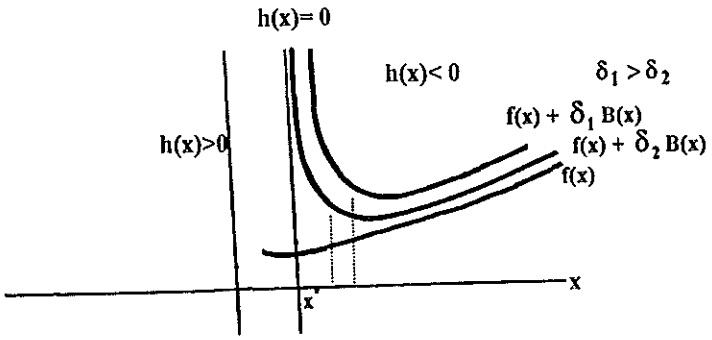

FIGURA 3.7 - Resolução através da função barreira

3.4.3 Dificuldades computacionais

Uma das dificuldades encontradas no método de barreira é a seleção de um ponto inicial factível. Em muitos problemas, isso pode ser trabalhoso. Vários métodos podem ser utilizados para a determinação de um ponto inicial factível, quando este não é conhecido. Também, em virtude da estrutura da função barreira, para valores pequenos de δ, muitas técnicas têm sérios problemas de mal condicionamento e erros de arredondamento, quando o ótimo se aproxima. As escolhas do fator de barreira e do parâmetro de barreira podem comprometer o processo de otimização.

3.5 O método da função Lagrangiana aumentada

O método da função Lagrangiana aumentada, ou método dos multiplicadores, foi introduzido por HESTENES (1969) e POWELL (1969) para problemas do tipo

(3.1) somente com restrições de igualdade, independentemente. Em 1973, Rockafellar introduziu um método para tratar as restrições de desigualdade. O método dos multiplicadores foi desenvolvido com o objetivo de amenizar os problemas de mal condicionamento que ocorrem com a função penalidade.

Iniciamos a apresentação de tal método utilizando o problema (3.1) somente com restrições de igualdade; apresentaremos, a seguir, a estratégia de ROCKAFELLAR (1973a) para restrições de desigualdade e uma modificação dela que pode ser encontrada em COSTA (1990).

Seja o problema (3.1) somente com restrições de igualdade. Associado a ele temos o problema de penalidade quadrática

$$\text{Minimizar } f(x) + c \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x) \qquad (3.25)$$

onde $c \geq 0$, e necessitamos $c \to \infty$ e $g_i(x) \to 0$ para obter o ótimo restrito do problema original. Com o objetivo de determinar o mínimo do problema inicial para um valor finito de c, POWELL (1969) trabalhou com o seguinte problema perturbado

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a: } g_i(x) = \varepsilon, \quad i = 1, \ldots m \end{aligned} \qquad (3.26)$$

e apresentou a seguinte função auxiliar

$$La(x,c)=f(x)+c\sum_{i=1}^{m}(g_i(x)-\varepsilon_i)^2 \ , \qquad (3.27)$$

a qual denominou função Lagrangiana aumentada, onde $c \geq 0$ é um fator de penalidade e ε é um vetor de perturbações.

Expandimos (3.27) e obtemos:

$$La(x,c)=f(x)+c\sum_{i=1}^{m}g_i^2(x)-2c\sum_{i=1}^{m}g_i(x)\varepsilon_i+c\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i^2 \ . \qquad (3.28)$$

Denotamos $\lambda_i=-2c\varepsilon_i$ e desprezamos o termo constante $c\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i^2$, reescrevendo (3.28) da seguinte forma:

$$La(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)+c\sum_{i=1}^{m}g_i^2(x) \ , \qquad (3.29)$$

a qual é a forma da Lagrangiana aumentada apresentada em HESTENES (1969), onde λ_i, i = 1, ..., m, são os multiplicadores de Lagrange e c é o fator de penalidade.

Em seu artigo, Hestenes sugere que o valor de c escolhido seja suficientemente grande, e, para uma estimativa λ^k de λ e x^k, minimizando $La(x,\lambda)$, temos que:

$$\nabla_x La(x^k,\lambda^k)=\nabla_x f(x^k)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla_x g_i(x^k)+2c\sum_{i=1}^{m}g_i(x^k)\nabla_x g_i(x^k)=0, \quad (3.30)$$

ou

$$\nabla_x La(x^k,\lambda^k) = \nabla_x f(x^k)+\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i+2c\,g_i(x^k))\ \nabla_x g_i(x^k) = 0\ . \quad (3.31)$$

Assim, Hestenes propõe que a atualização dos multiplicadores seja feita por

$$\lambda_i^{k+1}=\lambda_i^k+2c\,g_i(x^k),\ i=1,\ ...,\ m. \quad (3.32)$$

Já POWELL (1969), apesar de apresentar uma regra de atualização semelhante, acrescenta em seu trabalho a exigência da diminuição do resíduo máximo (visto em (2.10)) por um fator de quatro em cada iteração.

A função Lagrangiana aumentada pode ser vista de duas formas:

- como a função penalidade quadrática associada ao problema

$$\text{Minimizar } \{\ f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x) : g_i(x)=0\}; \quad (3.33)$$

ou

- como a função Lagrangiana associada ao problema

$$\text{Minimizar } \{ f(x) + c \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x) : g_i(x) = 0\}. \qquad (3.34)$$

Seja o problema (3.1), somente com restrições de desigualdade,

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } \; h_j(x) \leq 0, \; j = 1..., r. \end{aligned} \qquad (3.35)$$

Transformamos as restrições de desigualdade em igualdade utilizando a estratégia apresentada por ROCKAFELLAR (1973a), com o uso de uma variável de folga z_j da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a: } \; h_j(x) + z_j = 0, \; j = 1..., r. \\ &\qquad\qquad z_j \geq 0, \; j = 1..., r. \end{aligned} \qquad (3.36)$$

O problema (3.36) pode ser transformado no seguinte problema equivalente

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) + \frac{1}{2} c \sum_{j=1}^{r} (h_j(x) + z_j)^2 \\ &\text{sujeito a : } \; h_j(x) + z_j = 0, \; j = 1..., r, \\ &\qquad\qquad z_j \geq 0, \; j = 1..., r. \end{aligned} \qquad (3.37)$$

onde $c \geq 0$ é o fator de penalidade.

A função Lagrangiana associada a (3.37) é definida por:

$$La(x,\mu,z)=f(x)+\sum_{j=1}^{r}\mu_j(h_j(x)+z_j)+\frac{c}{2}\sum_{j=1}^{r}(h_j(x)+z_j)^2 \quad , (3.38)$$

onde μ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

Minimizamos (3.38) com relação a z_j, j = 1..., r., e aplicamos as condições necessárias de otimalidade:

$$\nabla_{z_j} La(x,\mu,z) = 0, j = 1..., r, \qquad (3.39)$$

isto é,

$$\mu_j + c(h_j(x)+z_j) = 0, \; j = 1..., r, \qquad (3.40)$$

resultando em,

$$z_j = -\frac{\mu_j}{c} - h_j(x), j = 1..., r. \qquad (3.41)$$

Como $z_j \geq 0, j = 1, \ldots, r,$ então

$$z_j = \begin{cases} -\frac{\mu_j}{c} - h_j(x), \text{ se } -\frac{\mu_j}{c} - h_j(x) \geq 0 \\ 0, \text{ se } -\frac{\mu_j}{c} - h_j(x) \leq 0 \end{cases}, j = 1..., r. \quad (3.42)$$

Substituímos (3.42) em (3.38) e obtemos a função Lagrangiana aumentada:

$$La(x,\mu)=f(x)+\sum_{j=1}^{r}\begin{cases}\mu_j h_j(x)+\dfrac{c}{2}h_j^2(x), \text{ se } h_j(x)\geq -\dfrac{\mu_j}{c}\\ -\dfrac{\mu_j^2}{2c}, \text{ se } h_j(x)\leq -\dfrac{\mu_j}{c}\end{cases}, \qquad (3.43)$$

apresentada por ROCKAFELLAR (1973a).

O Método da função Lagrangiana aumentada consiste em resolver uma seqüência de problemas irrestritos, com $\bar{\mu}$ fixo, dados por

$$\underset{x}{\text{Minimizar}}\ La(x,\bar{\mu}). \qquad (3.44)$$

Para isso, adota-se uma seqüência de valores para $(\bar{\mu},\bar{c})$, minimizando-se (3.43), isto é:

$$\nabla_x La = \nabla_x f(x) +\sum_{j=1}^{r}\begin{cases}\mu_j\nabla_x h_j(x)+c\,h_j(x)\nabla_x h_j(x), \text{ se } h_j(x)\geq -\dfrac{\mu_j}{c}\\ 0, \text{ se } h_j(x)\leq -\dfrac{\mu_j}{c}\end{cases} = 0, \qquad (3.45)$$

ou seja,

$$\nabla_x f(x) +\sum_{j=1}^{r}\begin{cases}(\mu_j+c\,h_j(x))\nabla_x h_j(x), \text{ se } h_j(x)\geq -\dfrac{\mu_j}{c}\\ 0, \text{ se } h_j(x)\leq -\dfrac{\mu_j}{c}\end{cases} = 0, \qquad (3.46)$$

sugerindo-se a seguinte atualização dos multiplicadores:

$$\mu_j^{k+1} = \begin{cases} \mu_j^k + c^k h_j(x^k), \text{se } h_j(x^k) \geq -\dfrac{\mu_j^k}{c^k} \\ 0, \text{se } h_j(x^k) \leq -\dfrac{\mu_j^k}{c^k} \end{cases}, j = 1, .., r. \quad (3.47)$$

Rockafellar também apresentou a função Lagrangiana aumentada para o problema (3.1) com restrições de igualdade e desigualdade da seguinte forma:

$$La(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + c\sum_{i=1}^{m} g_i^2(x) + \sum_{j=1}^{r} \begin{cases} \mu_j h_j(x) + \dfrac{c}{2} h_j^2(x), \text{ se } h_j(x) \geq -\dfrac{\mu_j}{c} \\ -\dfrac{\mu_j^2}{2c}, \text{se } h_j(x) \leq -\dfrac{\mu_j}{c} \end{cases}, (3.48)$$

onde λ e μ são os vetores dos multiplicadores de Lagrange associados à igualdade e à desigualdade, respectivamente, e c é o fator de penalidade. Em ambos os métodos o fator de penalidade é atualizado por um parâmetro $\beta > 1$.

Em COSTA (1990) encontramos um outro método da função Lagrangiana aumentada, no qual somente as restrições de desigualdade são tratadas através da função Lagrangiana aumentada de Rockafellar. O autor não utilizou penalidade quadrática nas restrições de igualdade, as quais são tratadas pelo método de Newton. A função é apresentada da seguinte forma:

$$La(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{r} \begin{cases} \mu_j h_j(x) + \dfrac{c}{2} h_j^2(x), \text{ se } h_j(x) \geq -\dfrac{\mu_j}{c} \\ -\dfrac{\mu_j^2}{2c}, \text{ se } h_j(x) \leq -\dfrac{\mu_j}{c} \end{cases}, (3.49)$$

onde λ e μ são os vetores dos multiplicadores de Lagrange associados à igualdade e à desigualdade, respectivamente, e c é o fator de penalidade.

Em seu método, Costa atualiza os multiplicadores de Lagrange, μ, utilizando a regra vista em (3.47); determina os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade, λ_i, i = 1, ... , m, utilizando o método de Newton; e atualiza os fatores de penalidade através de um parâmetro $\beta > 1$. Essa abordagem foi aplicada, com sucesso, a um sistema não-linear, não convexo e de grande porte.

3.5.1 Algoritmo

Apresentamos o algoritmo para o método da função Lagrangiana aumentada proposto por POWELL (1969).

Passo inicial:

Dado o problema (3.1), somente com restrições de igualdade, construa (3.29).

Faça k = 0.

Escolha os multiplicadores de Lagrange λ_i^0, i = 1,...,m, um fator de penalidade c^0, uma solução inicial $x^0 = 0$ e um parâmetro de penalidade $\beta > 1$.

Defina VIOLA(x^0) = ∞, onde VIOLA(x) = $\max\{|g_i(x)|, i = 1,...,m\}$ é denominada violação das restrições.

Passo iterativo:

PI1) Resolva o seguinte problema utilizando um método de minimização irrestrita, com $\bar{\lambda}$ fixo:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}}\ La(x,\bar{\lambda})$$

Admita x^{k+1} como uma solução ;

Se $VIOLA(x^{k+1}) = 0$, então, **PARE.**

Caso contário,

Se $VIOLA(x^{k+1}) \leq \frac{1}{4} VIOLA(x^k)$, vá para **PI2).**

Se $VIOLA(x^{k+1}) > \frac{1}{4} VIOLA(x^k)$, atualize o fator de penalidade $c^{k+1} = \beta\, c^k$ e vá para **PI1).**

PI2) Atualize os multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + c^k g_i(x^k).$$

Vá para **PI1).**

3.5.2 Interpretação geométrica

Considere o seguinte problema perturbado, somente com restrições de igualdade:

$$V(\varepsilon)=\text{Minimizar}\{f(x):g(x)=\varepsilon, x\in E_n\}, \qquad (3.50)$$

onde o mínimo é alcançado localmente próximo a x^*. Temos que $V(0) = f(x^*)$ e $\nabla V(0)=-\lambda^*$. O mínimo da função Lagrangiana aumentada, associada à (3.50), no passo k pode ser expresso em termos da função primal como segue:

$$\begin{aligned}\min_x La(x,\lambda^k) &= \min_x\{f(x)+(\lambda^k)^t g(x)+\frac{1}{2}c|g(x)|^2\}=\\ &=\min_{x,\varepsilon}\{f(x)+(\lambda^k)^t\varepsilon+\frac{1}{2}c|\varepsilon|^2; g(x)=\varepsilon\}=\\ &=\min_{\varepsilon}\{V(\varepsilon)+(\lambda^k)^t\varepsilon+\frac{1}{2}c|\varepsilon|^2\}, \qquad (3.51)\end{aligned}$$

onde a minimização com respeito a ε é local em $\varepsilon=0$. Tal minimização pode ser vista na Figura 3.8. O mínimo é determinado no ponto $\varepsilon(\lambda,c)$, para o qual o gradiente de

$$V(\varepsilon)+(\lambda^k)^t\varepsilon+\frac{1}{2}c|\varepsilon|^2, \qquad (3.52)$$

é nulo, isto é:

$$\nabla\{V(\varepsilon)+\frac{1}{2}c|\varepsilon|^2\}_{\varepsilon=\varepsilon(\lambda,c)}=-\lambda^k. \qquad (3.53)$$

O ponto de mínimo $\varepsilon(\lambda, c)$ é obtido como na Figura 3.8.

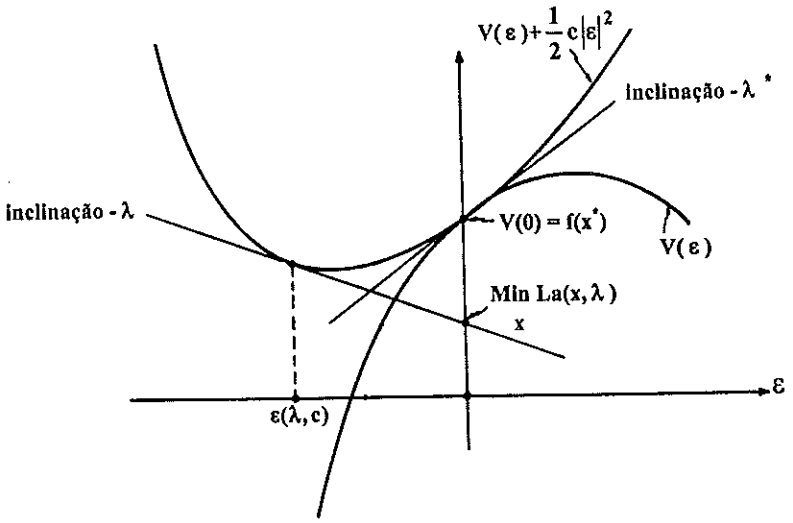

FIGURA 3.8 - Processo de minimização da função Lagrangiana aumentada

Temos, também:

$$\min_x La(x,\lambda^k) = V(\varepsilon(\lambda,c)) + \lambda^k \varepsilon(\lambda,c) + \frac{1}{2}c|\varepsilon(\lambda,c)|^2, \qquad (3.54)$$

ou

$$\min_x La(x,\lambda^k) - \lambda^k \varepsilon(\lambda,c) = V(\varepsilon(\lambda,c)) + \frac{1}{2}c|\varepsilon(\lambda,c)|^2. \qquad (3.55)$$

Então, o hiperplano tangente à curva $V(\varepsilon) + \frac{1}{2}c|\varepsilon|^2$, em $\varepsilon(\lambda,c)$, o qual tem inclinação $-\lambda$, intercepta o eixo vertical no valor $\underset{x}{\text{Min}}\, La(x,\lambda^k)$, como se observa na Figura 3.8. Podemos ver que, para c suficientemente grande, $V(\varepsilon) + \lambda^k\varepsilon + \frac{1}{2}c|\varepsilon|^2$ é convexo na vizinhança de $\varepsilon = 0$. Além disso, o valor $\underset{x}{\text{Min}}\, La(x,\lambda^k)$ é próximo de $V(0) = f(x^*)$, para valores de λ próximos a λ^* e valores suficientemente grandes de c.

Na Figura 3.9, encontramos a atualização do multiplicador λ^k. Se x^k minimiza $La(x,\lambda^k)$, então, $\varepsilon^k = g(x^k)$ é ponto de mínimo de $V(\varepsilon) + \lambda^k\varepsilon + \frac{1}{2}c|\varepsilon|^2$. Logo

$$\nabla\{V(\varepsilon)+\frac{1}{2}c^k|\varepsilon|^2\}_{\varepsilon=\varepsilon_k} = -\lambda^k, \tag{3.56}$$

e

$$\nabla V(\varepsilon^k) = -(\lambda^k + c^k\varepsilon^k) = -(\lambda^k + c^k g(x^k)). \tag{3.57}$$

Portanto, o próximo multiplicador λ^{k+1} é:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + c^k g(x^k) = -\nabla V(\varepsilon^k), \tag{3.58}$$

como se vê na Figura 3.9. A figura mostra que, se λ^k é suficientemente próximo de

λ^* e/ou c^k é suficientemente grande, o próximo multiplicador λ^{k+1} estará mais próximo de λ^* que λ^k.

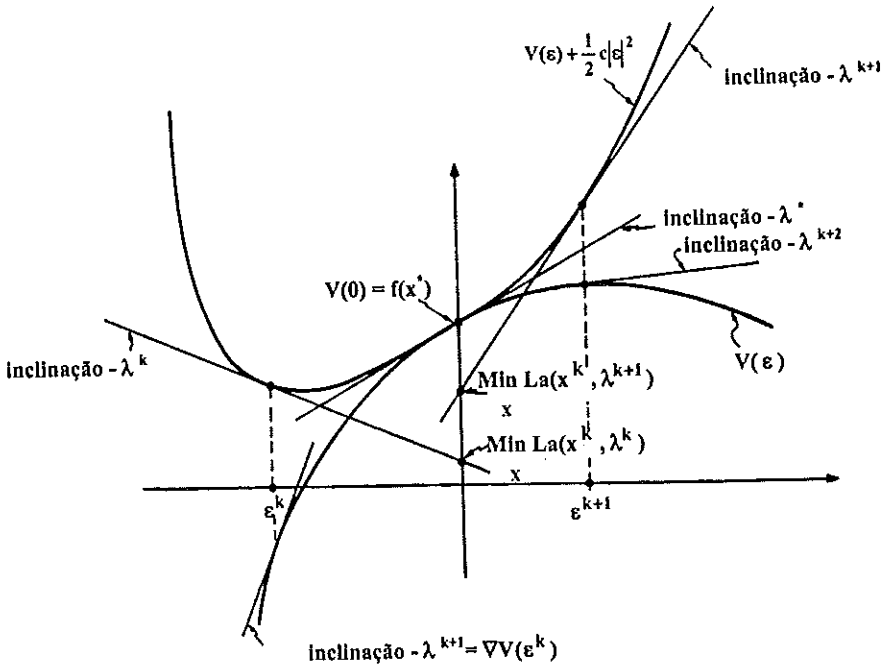

FIGURA 3.9 – Atualização dos multiplicadores de Lagrange

Uma visão geométrica da atualização do fator de penalidade é fornecida na Figura 3.10. Para $c > 0$ e λ^* fixo, temos que encontrar o mínimo de $f(x)+\lambda^* g(x)+cg^2(x)$ sobre E_n, o que corresponde a encontrar o menor valor de a, para o qual a curva $f+\lambda^* g +cg^2 = a$ mantém contato com $V(\varepsilon)$. O vértice dessa parábola é $\frac{-\lambda^*}{2c}$. Quando $g = 0$, temos $f = a$ sobre a parábola. Além disso, quando $a = V(0)$, o qual é o valor objetivo ótimo primal, a parábola passa pelo ponto $(0,V(0))$ e a

inclinação da reta tangente à parábola é $-\lambda^*$ (ver Figura 3.10).

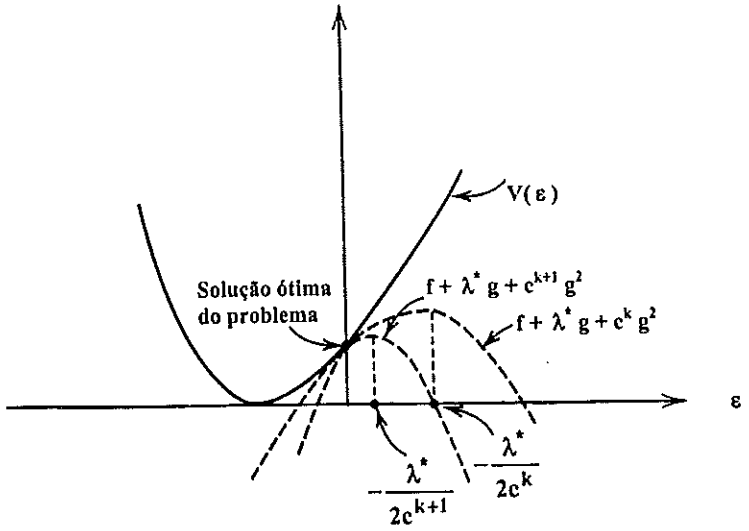

FIGURA 3.10 – Atualização dos fatores de penalidade

3.5.3 Dificuldades computacionais

Uma das vantagens do método dos multiplicadores, em relação ao método das penalidades, é a não-necessidade de o parâmetro de penalidade tender ao infinito para garantir a convergência. Podendo gerenciar o crescimento do fator de penalidade, o método "alivia" o problema de mal condicionamento, porém não consegue evitá-lo totalmente. Uma dificuldade do método é a escolha inicial de fatores e parâmetros de penalidade e dos multiplicadores.

3.6 O método de Newton-Lagrangiano

Dado um problema de otimização restrita, o método de Newton para

resolução de sistemas de equações pode ser aplicado para se analisar as condições necessárias de primeira ordem da função Lagrangiana.

Seja o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a: } g_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{3.59}$$

Associada ao problema (3.59), temos a função Lagrangiana

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), \tag{3.60}$$

onde λ_i é o multiplicador de Lagrange associado à restrição $g_i(x)$.

O processo consiste em determinar valores, para x e λ, que satisfaçam as condições necessárias de otimalidade sobre a função Lagrangiana (3.60). Assim:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \end{aligned} \tag{3.61}$$

O Método de Newton resolve (3.61) de forma direta. Utilizando Taylor de primeira ordem em torno de x^k e λ^k, em (3.61), as expressões encontradas nesta são linearizadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\nabla_x L(x^k,\lambda^k)+\nabla^2_{xx}L(x^k,\lambda^k)\Delta x^k+\nabla^2_{x\lambda}L(x^k,\lambda^k)\Delta\lambda^k = 0\\
&\nabla_\lambda L(x^k,\lambda^k)+\nabla^2_{\lambda x}L(x^k,\lambda^k)\Delta x^k+\nabla^2_{\lambda\lambda}L(x^k,\lambda^k)\Delta\lambda^k = 0,
\end{aligned} \tag{3.62}$$

ou ,

$$\begin{aligned}
&\nabla_x L(x^k,\lambda^k)+\nabla^2_{xx}L(x^k,\lambda^k)\Delta x^k+\nabla_x g(x^k)^t\Delta\lambda^k = 0\\
&g(x^k)+\nabla_x g(x^k)\Delta x^k = 0,
\end{aligned} \tag{3.63}$$

onde $\nabla_x g(x^k)^t=(\nabla_x g_1(x),...,\nabla_x g_m(x))$.

O novo ponto é obtido por:

$$\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k+\Delta x^k\\
\lambda^{k+1} &= \lambda^k+\Delta\lambda^k
\end{aligned}, \tag{3.64}$$

onde Δx e $\Delta\lambda$ são denominados vetores de direções de busca.

O sistema (3.63) pode ser representado na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{xx}L(x^k,\lambda^k) & \nabla_x g(x^k)^t \\ \nabla_x g(x^k) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x^k\\ \Delta\lambda^k\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\nabla_x L(x^k,\lambda^k)\\ g(x^k)\end{pmatrix}, \tag{3.65}$$

ou, de forma simplificada:

$$\begin{pmatrix} H & J^t \\ J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x L \\ \\ \nabla_\lambda L \end{pmatrix}, \qquad (3.66)$$

onde a matriz dos coeficientes do sistema é denominada matriz Lagrangiana e encontra-se dividida em quatro submatrizes: a matriz Hessiana H, a matriz Jacobiana $J=\nabla^2_{\lambda x}$ e sua transposta, e uma matriz nula.

O mínimo da função será atingido quando os novos valores de x e λ satisfizerem as condições de KKT para o problema original.

3.6.1 Algoritmo

Passo inicial

Dado o problema (3.59), construa (3.60);

Faça k = 0.

Escolha um ponto inicial $x^0 \in E_n$ e λ^0 um vetor multiplicador de Lagrange associado às restrições de igualdade.

Passo iterativo

Se x^k e λ^k satisfazem as condições de KKT, **PARE**. Caso contrário, resolva o sistema (3.65) e atualize as variáveis usando (3.64) e repita o **passo iterativo**.

3.6.2 Dificuldades computacionais

O método de Newton exige que o ponto inicial esteja na vizinhança de x^* e λ^*, o que, muitas vezes, pode inviabilizar o método, pois não existe garantia de convergência.

No próximo capítulo apresentaremos o método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica.

CAPÍTULO 4

MÉTODO DA FUNÇÃO LAGRANGIANA AUMENTADA-BARREIRA LOGARÍTMICA

Neste capítulo propomos uma nova abordagem do método da função Lagrangiana aumentada. Nessa abordagem, as restrições canalizadas são tratadas por uma função barreira, as restrições de igualdade, pelo método de Newton, e as desigualdades, pela função Lagrangiana aumentada, tendo como objetivo o aproveitamento das melhores características de cada método.

4.1 Apresentação do problema

Considere o problema de programação não-linear

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a: } g_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m, \\ &\qquad h_j(x) \leq 0,\ j = 1, \ldots, r \\ &\qquad x^{min} \leq x \leq x^{max} \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $x^t=(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$; $(x^{min})^t = (x_1^{min}, \ldots, x_n^{min}) \in R^n$; $(x^{max})^t = (x_1^{max}, \ldots, x_n^{max}) \in R^n$ e $m < n$.

Vários métodos podem ser utilizados na resolução do problema (4.1). Entre eles, citamos os métodos de Newton, da Lagrangiana aumentada e de barreira. Eles apresentam algumas particularidades em sua aplicação. O método de Newton apresenta um excelente desempenho para problemas somente com restrições de igualdade. Contudo, para restrições de desigualdade, exige-se que se conheça o conjunto ativo na solução, o que pode dificultar o processo de convergência. O método da Lagrangiana aumentada apresenta melhor comportamento que o método das penalidades; determina a solução de problemas, nos quais o método das penalidades não obtém sucesso; e ameniza o problema de mal condicionamento. Finalmente, no método de barreira, gerenciar o fator de barreira e seu parâmetro, garantindo a convergência do método, é uma tarefa difícil, porém sua aplicação em problemas com restrições canalizadas é muito vantajosa.

Com o objetivo de aproveitar as melhores características dos métodos citados anteriormente, propomos uma nova abordagem do método da função Lagrangiana aumentada para resolver o problema (4.1). Essa abordagem será denominada método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica. O método proposto trata as restrições canalizadas pelo método de barreira logarítmica, as quais são incorporadas à função objetivo, resultando em um novo problema, que é associado à função Lagrangiana aumentada – estudada em COSTA (1990). As condições necessárias de primeira ordem são aplicadas, resultando num sistema não-linear, que é resolvido

pelo Método de Newton. A solução pelo método de Newton fornece os fatores de correção para atualizarmos as variáveis duais – os multiplicadores de Lagrange associados às igualdades – e as variáveis primais – o vetor x e as variáveis de folga. Os multiplicadores de Lagrange associados às desigualdades são determinados utilizando-se a regra de atualização da função Lagrangiana aumentada, vista em HESTENES (1969), e os fatores de penalidades e barreira são atualizados por um parâmetro preestabelecido.

Nas próximas seções, definiremos a nova abordagem do método da função Lagrangiana aumentada e seu algoritmo.

4.2 Função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica

Apresentamos, nesta seção, a função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica, baseada nos conceitos dos métodos de barreira e da função Lagrangiana aumentada vistos no capítulo 3.

Dado o problema (4.1), podemos reescrevê-lo da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimizar } f(x)\\
&\text{sujeito a: } g_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m,\\
&\qquad h_j(x) + z_j = 0,\ j = 1, \ldots, r\\
&\qquad x + su = x^{max}\\
&\qquad x - si = x^{min}\\
&\qquad z_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, r\\
&\qquad su \geq 0\\
&\qquad si \geq 0
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

EESC • USP Biblioteca São Carlos

onde $(su)^t=(su_1, \ldots, su_n)$, com $su_k \geq 0$, e $(si)^t=(si_1, \ldots, si_n)$, com $si_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, n$. As variáveis z_j, $j=1,\ldots,r$, bem como as componentes do vetor su são variáveis de folga, e as componentes do vetor si são variáveis de excesso. Denominamos su e si de vetores auxiliares.

O problema (4.2) pode ser transformado no seguinte problema equivalente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & f(x) - \delta\left(\sum_{k=1}^{n} \ln su_k + \sum_{k=1}^{n} \ln si_k\right) \\ \text{sujeito a: } & g_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m, \\ & h_j(x) + z_j = 0,\ j = 1, \ldots, r \\ & x + su = x^{max} \\ & x - si = x^{min} \\ & z_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, r \end{aligned} \qquad (4.3)$$

onde δ é o fator de barreira.

Adicionamos à função objetivo a condição de não-negatividade das componentes dos vetores auxiliares si e su, através da função barreira logarítmica definida em (3.24). O problema modificado (4.3) tem a mesma solução que o problema original (4.1).

Associamos ao problema (4.3) a seguinte função Lagrangiana aumentada:

$$La(x,s,\lambda,\pi,\mu,z) = f(x) - \delta\left(\sum_{k=1}^{n} \ln su_k + \sum_{k=1}^{n} \ln si_k\right) + \frac{1}{2}c\sum_{j=1}^{r}(h_j(x)+z_j)^2 + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x) +$$

$$\sum_{k=1}^{n}\pi u_k(x_k + su_k - x_k^{max}) + \sum_{k=1}^{n}\pi i_k(x_k - si_k - x_k^{min}) + \sum_{j=1}^{r}\mu_j(h_j(x)+z_j), \quad (4.4)$$

onde λ, $\pi u, \pi i$ e μ são os vetores dos multiplicadores de Lagrange, $c > 0$ é o fator de penalidade, e δ, o fator de barreira.

Minimizamos (4.4) com relação a z_j, j = 1, ..., n, e aplicamos as condições necessárias de otimalidade:

$$\nabla_{z_j} La(x,s,\lambda,\pi,\mu,z)=0,\ j = 1, \dots, r, \qquad (4.5)$$

ou,

$$z_j = -\frac{\mu_j}{c} - h_j(x),\ j = 1, \dots, r. \qquad (4.6)$$

Como $z_j \geq 0$, temos:

$$z_j = \begin{cases} -\frac{\mu_j}{c} - h_j(x), \text{ se } -\frac{\mu_j}{c} - h_j(x) \geq 0 \\ 0, \text{ se } -\frac{\mu_j}{c} - h_j(x) \leq 0 \end{cases}, j = 1, \dots, r. \qquad (4.7)$$

Substituímos (4.7) em (4.4), obtendo a função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica:

$$La(x,s,\lambda,\pi,\mu) = f(x) - \delta\left(\sum_{k=1}^{n} \ln su_k + \sum_{k=1}^{n} \ln si_k\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{k=1}^{n} \pi u_k (x_k + su_k - x_k^{max}) +$$

$$\sum_{k=1}^{n} \pi i_k (x_k - si_k - x_k^{min}) + \sum_{j=1}^{r} \begin{cases} \mu_j h_j(x) + \frac{1}{2} c h_j^2(x), \text{ se } h_j(x) \geq -\frac{u_j}{c} \\ -\frac{\mu_j^2}{2c}, \text{ se } h_j(x) \leq -\frac{u_j}{c} \end{cases}. \qquad (4.8)$$

Definimos, desse modo, a função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica associada ao problema (4.1).

4.3 Método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica

Apresentamos, nesta seção, o método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica, para a resolução do problema (4.1), utilizando a função (4.8). A solução do problema (4.1) é encontrada por meio da resolução de uma seqüência de problemas irrestritos. Aplicando as condições de otimalidade sobre a função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica (4.8), obtemos um sistema não-linear, cuja solução são as direções de busca, Δx, Δsu, Δsi, $\Delta\lambda$, $\Delta\pi u$ e $\Delta\pi i$, como segue:

$$\begin{cases} \nabla_x La(x,s,\lambda,\pi,\mu)=0 \\ \nabla_{su} La(x,s,\lambda,\pi,\mu)=0 \\ \nabla_{si} La(x,s,\lambda,\pi,\mu)=0 \\ \nabla_{\lambda} La(x,s,\lambda,\pi,\mu)=0 \\ \nabla_{\pi u} La(x,s,\lambda,\pi,\mu)=0 \\ \nabla_{\pi i} La(x,s,\lambda,\pi,\mu)=0 \end{cases} \tag{4.9}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} \nabla_x f(x)^t + \lambda^t J(x) + (\pi u)^t I + (\pi i)^t I + \sum_{j=1}^{r} \begin{cases} (\mu_j + c h_j(x)) \nabla_x h_j(x)^t, & \text{se } h_j(x) \geq -\dfrac{\mu_j}{c} \\ 0, & \text{se } h_j(x) \leq -\dfrac{\mu_j}{c} \end{cases} = 0 \\ -\dfrac{\delta}{su_k} + \pi u_k = 0, k = 1,\ldots,n \\ -\dfrac{\delta}{si_k} - \pi i_k = 0, k = 1,\ldots,n \\ g_i(x) = 0, i = 1,\ldots,m \\ x + su - x^{max} = 0 \\ x - si - x^{min} = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

onde $J(x)^t = (\nabla_x g_1(x), \ldots, \nabla_x g_m(x))$ é denominada matriz Jacobiana.

Obtemos a solução do sistema não-linear (4.10) utilizando o método de Newton, o qual foi apresentado na seção 3.2. A aplicação do método de Newton resulta no sistema matricial, que, em sua forma simplificada, é representado por:

$$W \, \Delta d = - \nabla La, \tag{4.11}$$

onde,

$$W = \begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} La & 0 & 0 & J(x)^t & I & I \\ 0 & \delta(Su) & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \delta(Si) & 0 & 0 & -I \\ J(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é a matriz Lagrangiana,

com

$$Su = \begin{pmatrix} \frac{1}{(su_1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(su_n)^2} \end{pmatrix}, \quad Si = \begin{pmatrix} \frac{1}{(si_1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(si_n)^2} \end{pmatrix}, \text{ e}$$

$$\nabla^2_{xx} La = \nabla^2_{xx} f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2_{xx} g_i(x) + \sum_{j=i}^{r} \begin{cases} (\mu_j + c h_j(x)) \nabla^2_{xx} h_j(x) + c(\nabla_x h_j(x)) \nabla_x h_j(x)^t, \text{se} h_j(x) \geq -\frac{\mu_j}{c} \\ 0, \text{se} h_j(x) \leq -\frac{\mu_j}{c} \end{cases};$$

$$\Delta d^t = (\Delta x, \Delta su, \Delta si, \Delta\lambda, \Delta\pi u, \Delta\pi i)$$

é o vetor das direções de busca,

e

$$\nabla La = \begin{pmatrix} \nabla_x f(x)^t + \lambda^t J(x) + (\pi u)^t I + (\pi i)^t I + \sum_{j=1}^{r} \begin{cases} (\mu_j + c h_j(x)) \nabla_x h_j(x)^t, \text{ se} h_j(x) \geq -\frac{\mu_j}{c} \\ 0, \text{ se } h_j(x) \leq -\frac{\mu_j}{c} \end{cases} \\ -\frac{\delta}{su_k} + \pi u_k, \; k = 1,\ldots,n \\ -\frac{\delta}{si_k} - \pi i_k, \; k = 1,\ldots,n \\ g_i(x), \; i = 1,\ldots,m \\ x + su - x^{max} \\ x - si - x^{min} \end{pmatrix}$$

é denominado vetor gradiente.

Atualizamos o vetor das variáveis x, su e si, e os vetores multiplicadores de Lagrange, λ, πu e πi, da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k + \alpha_p \Delta x^k \\
su^{k+1} &= su^k + \alpha_p \Delta\, su^k \\
si^{k+1} &= si^k + \alpha_p \Delta\, si^k \\
\lambda^{k+1} &= \lambda^k + \alpha_d \Delta\lambda^k \\
\pi u^{k+1} &= \pi u^k + \alpha_d \Delta\pi u^k \\
\pi i^{k+1} &= \pi i^k + \alpha_d\, \Delta\pi i^k
\end{aligned}
\qquad (4.12)
$$

onde α_p e α_d são os passos utilizados na atualização das variáveis primais e duais, respectivamente.

Esses passos são calculados de forma que cada componente dos vetores das variáveis auxiliares su e si permaneça estritamente positiva e os elementos dos vetores duais λ, πu e πi permaneçam com seus respectivos sinais. Uma sugestão para o cálculo do passo máximo é a estratégia utilizada por GRANVILLE (1994) e QUINTANA (1995), dada por:

$$
\alpha_p = \min \{ \sigma \left(\min_{\Delta su<0} \frac{su}{|\Delta su|}, \min_{\Delta si<0} \frac{si}{|\Delta si|} \right), 1 \}; \qquad (4.13)
$$

$$\alpha_d = \min \{ \sigma (\min_{\Delta\pi u>0} \frac{-\pi u}{|\Delta\pi u|}, \min_{\Delta\pi i<0} \frac{\pi i}{|\Delta\pi i|}) , 1 \}, \qquad (4.14)$$

onde $\sigma=0{,}9995$ é um valor determinado empiricamente e que, segundo WRIGHT (1995), é derivado da fórmula $1-\frac{1}{9\sqrt{m}}$, onde m é o número de restrições do problema.

Os multiplicadores de Lagrange μ_j, j = 1, ..., r, são atualizados utilizando-se a regra de HESTENES (1969):

$$\mu_j^{k+1} = \begin{cases} \mu_j^k + c^k h_j(x^{k+1}), \text{ se } h_j(x^{k+1}) \geq -\frac{\mu_j^k}{c^k} \\ 0, \text{ se } h_j(x^{k+1}) \leq -\frac{\mu_j^k}{c^k} \end{cases} , j = 1, \ldots, r, \qquad (4.15)$$

e os fatores de penalidade c e de barreira δ, respectivamente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c^{k+1} &= \beta c^k, \ \beta>1, \\ \delta^{k+1} &= \frac{\delta^k}{\rho}, \ \rho>0, \end{aligned} \qquad (4.16)$$

onde β e ρ são denominados parâmetros de correção.

4.4 Algoritmo

A nova abordagem do método da função Lagrangiana aumentada pode ser apresentada pelo seguinte algoritmo:

Passo inicial

Dado o problema (4.1), construa a função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica (4.8);

Faça $k = 0$;

Escolha uma solução inicial para as variáveis do problema: x^0, λ^0, $(\pi u)^0$, $(\pi i)^0$, $(su)^0$, $(si)^0$, μ^0, c^0, δ^0.

Passo iterativo

PI1) Determine o sistema (4.11) e resolva-o;

PI2) Atualize as variáveis x, λ, su, si, πu e πi utilizando (4.12);

PI3) Se o critério de parada escolhido para o método de Newton é satisfeito, vá ao passo **PI4)**; caso contrário, volte ao passo **PI1)**;

PI4) Se as variáveis do problema satisfazem KKT, **PARE**; caso contrário, vá ao passo **PI5)**;

PI5) Atualize os multiplicadores de Lagrange e os fatores de penalidade e barreira usando (4.15) e (4.16) ; faça k= k+1 e volte a **PI1)**.

Observamos que o algoritmo apresentado é de fácil implementação numérica e apresenta melhor desempenho quanto ao número de iterações, quando comparado,

separadamente, aos métodos de barreira e da função Lagrangiana aumentada. Ele preserva características do método da função Lagrangiana aumentada, pois caminha pelo exterior da região factível, porém, obedece às restrições de canalização. Em razão da estrutura da matriz do método de Newton, podemos utilizar técnicas eficientes de esparsidade. A convergência do algoritmo está diretamente ligada à escolha dos fatores iniciais de penalidade e barreira e de seus parâmetros de correção. Analogamente aos métodos de penalidade e barreira, tal escolha pode ser difícil e faz-se necessário o uso de regras especiais para a correção dos fatores e parâmetros.

No próximo capítulo, apresentaremos a aplicação do método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica ao problema de fluxo de potência ótimo.

CAPÍTULO 5

O PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO

Neste capítulo apresentamos a formulação dos problemas de fluxo de potência (FP) e de fluxo de potência ótimo (FPO). Aplicamos o método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica ao problema de FPO e discutimos a sua implementação computacional.

5.1 Formulação básica do fluxo de potência

O cálculo do fluxo de potência padrão (FP) consiste em determinar as grandezas que representam o comportamento da rede em regime permanente. Um sistema de equações não-lineares é obtido impondo-se o princípio da conservação de potência ativa e reativa em cada barra da rede. A resolução deste sistema de equações fornece o estado da rede, isto é, a tensão fasorial de cada barra e os *taps* dos transformadores. Com o estado da rede conhecido, calcula-se as outras grandezas de

interesse, como: os fluxos ativos e reativos nas linhas de transmissão e nos transformadores; as gerações de potências reativas nas barras de controle de reativos; a geração da potência ativa da barra de referência (*slack*); perdas de potência ativa no sistema, entre outras

Como o apresentado por MONTICELLI (1983), o FP pode ser formulado por equações não-lineares e inequações que representam as restrições de operação do sistema elétrico de potência. Para a formulação do problema, quatro grandezas físicas estão associadas a cada barra do sistema. São elas:

P_k - potência ativa líquida injetada na barra k;

Q_k - potência reativa líquida injetada na barra k;

V_k - magnitude da tensão na barra k;

θ_k - ângulo de fase da tensão da barra k.

Somente duas grandezas físicas em cada barra são conhecidas a priori, sendo que através da solução do FP obtém-se as duas restantes. Assim, podemos classificar as barras do sistema, basicamente, em três tipos:

a) *Barra de referência* θV :

- são dados V_k e θ_k (θ_k é considerado como referência angular para a rede elétrica; geralmente é fixado em 0°);
- são calculados P_k e Q_k;

b) *Barra de tensão controlada ou barra PV*:

- são dados P_k e V_k;
- são calculados Q_k e θ_k;

c) *Barra de carga ou barra PQ*:

- são dados P_k e Q_k;
- são calculados V_k e θ_k.

No equacionamento do problema de FP, a cada barra do sistema associamos equações que são obtidas impondo-se a primeira lei de Kirchhoff, segundo a qual as injeções de potências ativas e reativas em uma barra são iguais a soma dos fluxos que deixam a barra através das linhas de transmissão e transformadores. Essas equações do FP podem ser matematicamente expressas por:

$$\Delta P_k = P_k^{esp} - P_k(V,\theta) = 0; \qquad (5.1)$$

$$\Delta Q_k = Q_k^{esp} - Q_k(V,\theta) = 0, \qquad (5.2)$$

onde:

$P_k^{esp} = P_k^G - P_k^C$ - potência ativa especificada na barra k;

$Q_k^{esp} = Q_k^G - Q_k^C$ - potência reativa especificada na barra k;

$P_k(V,\theta) = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos\theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen}\theta_{km})$;

$Q_k(V,\theta) = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \operatorname{sen}\theta_{km} - B_{km} \cos\theta_{km})$;

P_k^G - potência ativa gerada na barra k;

P_k^C - potência ativa consumida na barra k;

Q_k^G - potência reativa gerada na barra k;

P_k^C - potência reativa consumida na barra k;

V_k - tensão na barra k;

V_m - tensão na barra m;

$\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$ - ângulo da tensão nas barras k e m, respectivamente;

$Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$ - admitância da linha entre as barras k e m;

Ω_k - conjunto de todas as barras vizinhas à barra k, mais a própria barra k.

As restrições de operação do problema de fluxo de potência são dadas por:

- limites das tensões nas barras de carga:

$$V_k^{min} \le V_k \le V_k^{max}; \qquad (5.3)$$

- limites de injeções de reativos nas barras PV:

$$Q_k^{min} \le Q_k \le Q_k^{max}. \qquad (5.4)$$

Para a solução das equações (5.1) e (5.2) é necessária a utilização de métodos iterativos dentre os quais destacam-se os métodos de Gauss-Seidel; e o de Newton-Raphson e suas variações tais como: desacoplado (STTOT & ALSAC (1972)) e desacoplado rápido (STTOT & ALSAC (1974)).

A solução do problema de FP é alcançada quando ΔP_k e ΔQ_k possuem um erro menor que uma tolerância previamente determinada, e todas as restrições de operação são satisfeitas.

Quando esta solução não produz resultados aceitáveis, um ajuste nos equipamentos, isto é, nas variáveis de controle, é realizado e o sistema de equações (5.1) e (5.2) , é novamente resolvido. Por exemplo, se a solução mostrar uma tensão inaceitável em um barramento, uma compensação *shunt* ou um *tap* pode ser ajustado para resolver o problema. Através de operadores experientes, o fluxo de potência torna-se um efetivo instrumento de ajuste das variáveis de controle para situações localizadas. Quando um grande número de variáveis de controle precisa ser ajustado, por exemplo, em um sistema real, para satisfazer uma condição do problema, o uso do FP torna-se um exaustivo processo de tentativas e erros, trazendo unicamente aos operadores a responsabilidade dos ajustes.

Neste caso o FPO é o instrumento ideal para resolver as equações do FP, ajustando simultaneamente, de maneira ótima, todas as variáveis de controle do sistema para satisfazer algum critério preestabelecido do problema.

5.2 O problema de fluxo de potência ótimo

O FPO é um problema de otimização restrita, não-linear, não convexo e de grande porte; determina o melhor ponto de operação do sistema através da otimização de uma função objetivo que representa um dado desempenho do sistema, satisfazendo as restrições de operação.

Sua formulação pode ser apresentada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{Sujeito a: } g(x) = 0 \qquad (5.5) \\ &\qquad h^{min} \leq h(x) \leq h^{max} \\ &\qquad x^{min} \leq x \leq x^{max} \end{aligned}$$

onde:

f(x) - função escalar que representa o desempenho do sistema;

g(x) - conjunto das restrições de igualdade formado pelas equações de fluxo de potência;

h(x) - restrições funcionais de desigualdade;

x - variáveis de estado do sistema;

x^{min} , h^{min} e x^{max}, h^{max} - limites inferiores e superiores, de x e h(x), respectivamente.

Ao reescrever (5.5) utilizando as equações do FP temos o seguinte problema

de FPO:

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimizar } f(t,V,\theta) \\
&\text{Sujeito a: } \Delta P_i(t,V,\theta)=0 && i=1,\ldots,NBC\cup NBCR \\
&\Delta Q_j(t,V,\theta)=0 && j=1,\ldots,NBC \\
&Q_m^{min}\le Q_m(t,V,\theta)\le Q_m^{max} && m=1,\ldots,NBCR \qquad (5.6)\\
&t_l^{min}\le t_l \le t_l^{max} && l=1,\ldots,NT \\
&V_k^{min}\le V_k \le V_k^{max} && k=1,\ldots,NB
\end{aligned}
$$

onde:

NB - número de barras da rede elétrica;

NBC - número de barras de carga;

NBCR - número de barras de controle reativo;

NT - número de transformadores.

O problema de FPO apresentado é conhecido como FPO reativo, pois as variáveis associadas com as potências ativas estão todas fixas. Neste caso $(NBC\cup NBCR)=NB-1$.

Como podemos observar em (5.6), o FPO resolve o problema de FP, uma vez que as restrições de igualdades são as equações do fluxo de potência, e ainda otimiza uma função objetivo, a qual representa alguma característica do desempenho elétrico

do sistema, satisfazendo as restrições de operação.

5.3 A função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica associada ao problema de fluxo de potência ótimo

Apresentamos, nesta seção, a função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica, aplicada ao problema de FPO (5.6).

Dado o problema (5.6), transformamos todas as desigualdades em igualdade utilizando variáveis auxiliares. Adicionamos à função objetivo: a condição de não-negatividade das variáveis auxiliares, referentes às variáveis de estado, através da função barreira logarítmica. Obtemos, assim, um problema equivalente a (5.6) e, seguindo o desenvolvimento matemático apresentado no capítulo 4, temos a seguinte função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica associada:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{La(t,V,\theta,\lambda,s,\pi,\mu)} = f(t,V,\theta) - \delta\Big(&\sum_{k=1}^{NB} \ln siV_k + \sum_{k=1}^{NB} \ln suV_k + \sum_{l=1}^{NT} \ln sit_l + \sum_{l=1}^{NT} \ln sut_l\Big) + \\
&\sum_{i=1}^{NB-1} \lambda P_i\ \Delta P_i(t,V,\theta) + \sum_{j=1}^{NBC} \lambda Q_j\ \Delta Q_j(t,V,\theta) + \sum_{k=1}^{NB} \pi u_{v_k}(V_k + suV_k - V_k^{max}) + \\
&\sum_{k=1}^{NB} \pi i_{v_k}(V_k - siV_k - V_k^{min}) + \sum_{l=1}^{NT} \pi u_{t_l}(t_l + sut_l - t_l^{max}) + \sum_{l=1}^{NT} \pi i_{t_l}(t_l - sit_l - t_l^{min}) + \\
&\sum_{m=1}^{NBCR} \begin{cases} \mu_m(\Delta Q_m(t,V,\theta)) + \dfrac{1}{2} c(\Delta Q_m(t,V,\theta))^2, \text{se } (\Delta Q_m(t,V,\theta)) \geq -\dfrac{\mu_m}{c} \\ -\dfrac{\mu_m^2}{2c}, \text{se}(\Delta Q_m(t,V,\theta)) \leq -\dfrac{\mu_m}{c} \end{cases},
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

onde:

δ - fator de barreira;

siV_k - variável auxiliar inferior associada a V_k;

suV_k - variável auxiliar superior associada a V_k;

sit_l - variável auxiliar inferior associada a t_l;

sut_l - variável auxiliar superior associada a t_l;

λP_i - multiplicador de Lagrange associado à equação ΔP_i;

λQ_j - multiplicador de Lagrange associado à equação ΔQ_j;

πu_{v_k} - multiplicador de Lagrange associado à equação superior de V_k;

πi_{v_k} - multiplicador de Lagrange associado à equação inferior de V_k;

πu_{t_l} - multiplicador de Lagrange associado à equação superior de t_l;

πi_{t_l} - multiplicador de Lagrange associado à equação inferior de t_l;

μ_m - multiplicador de Lagrange associado à equação da variável Q_m;

c - fator de penalidade.

5.4 O método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica aplicado ao problema de FPO

Apresentamos, nesta seção, o método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica, para resolução do problema de FPO, utilizando a função (5.7).

Aplicamos as condições de otimalidade à função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica (5.7), em relação às variáveis t, V, θ, λP, λQ, siV, sit, suV, sut, πi_v, πi_t, πu_v e πu_t, e, obtemos o seguinte sistema não-linear:

$$
\begin{cases}
\nabla_{(t,v,\theta)} f^t + \lambda^t J + (\pi u)^t BI + (\pi i)^t BI + \sum_{m=1}^{NBCR} \begin{cases} (\mu_m + c\Delta Q_m)\nabla_x \Delta Q_m^t, & \text{se } \Delta Q_m \geq -\frac{\mu_m}{c} \\ 0, & \text{se } \Delta Q_m \leq -\frac{\mu_m}{c} \end{cases} = 0 \\
\Delta P_i = 0,\ i = 1,\ldots, NB-1 \\
\Delta Q_j = 0,\ j = 1\ldots, NBC \\
-\frac{\delta}{siV_k} - \pi i_{v_k} = 0, k = 1,\ldots, NB \\
-\frac{\delta}{sit_l} - \pi i_{t_l} = 0,\ l = 1,\ldots, NT \\
-\frac{\delta}{suV_k} + \pi u_{v_k} = 0,\ k = 1,\ldots, NB \\
-\frac{\delta}{sut_l} + \pi u_{t_l} = 0,\ l = 1,\ldots, NT \\
V_k - siV_k - V_k^{min} = 0,\ k = 1,\ldots, NB \\
t_l - sit_l - t_l^{min} = 0,\ l = 1,\ldots, NT \\
V_k + suV_k - V_k^{max} = 0,\ k = 1,\ldots, NB \\
t_l + sut_l - t_l^{max} = 0,\ l = 1,\ldots, NT
\end{cases}
\tag{5.8}
$$

onde:

$\lambda^t = (\lambda P_i \vdots \lambda Q_j)$, i = 1, ..., NB-1 e j = 1, ...,NBC; $\lambda^t \in R^{NB+NBC-1}$;

$$J = \begin{pmatrix} \nabla \Delta P_i^t \\ \cdots\cdots \\ \nabla \Delta Q_j^t \end{pmatrix}, \ i = 1, \ldots, NB\text{-}1\ , j = 1, \ldots, NBC;\ J \in M_{(NB+NBC-1)x(NT+2NB-1)}(R);$$

$\pi u^t = (\pi u_{t_l} \vdots \pi u_{v_k})$, l = 1, ..., NT e k = 1, ..., NB; $\pi u^t \in R^{NT+NB}$;

$\pi i^t = (\pi i_{t_l} \vdots \pi i_{v_k})$, l = 1, ..., NT e k = 1, ..., NB; $\pi i^t \in R^{NT+NB}$;

$$BI = \begin{pmatrix} I_t & 0 & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & I_v & 0 \end{pmatrix};\ BI \in M_{(NT+NB)x(NT+2NB-1)}(R);$$

I_t : matriz identidade; $I_t \in M_{NT}(R)$;

I_v.: matriz identidade; $I_v \in M_{NB}(R)$.

A aplicação do método de Newton ao sistema (5.8) resulta no sistema matricial, que, em sua forma simplificada, é representado por:

$$W\ \Delta d = -\nabla La, \tag{5.9}$$

onde:

$$W = \begin{pmatrix} \nabla^2_{(t,V,\theta)} La & J^t & 0 & 0 & BI^t & BI^t \\ J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta Si & 0 & -DI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta Su & 0 & DI \\ BI & 0 & -DI & 0 & 0 & 0 \\ BI & 0 & 0 & DI & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com:

$W \in M_{5NT+7NB+NBC-2}(R)$;

$\nabla^2_{(t,V,\theta)} La \in M_{NT+2NB-1}(R)$;

$$DI = \begin{pmatrix} I_v & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix};\ DI \in M_{NB+NT}(R);$$

$$Si = \begin{pmatrix} SiV & 0 \\ 0 & Sit \end{pmatrix},\ \text{com}\ SiV = \begin{pmatrix} \frac{1}{(siV_1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(siV_{NB})^2} \end{pmatrix}\ \text{e}\ Sit = \begin{pmatrix} \frac{1}{(sit_1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(sit_{NT})^2} \end{pmatrix},$$

$$Su = \begin{pmatrix} SuV & 0 \\ 0 & Sut \end{pmatrix},\ \text{com}\ SuV = \begin{pmatrix} \frac{1}{(suV_1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(suV_{NB})^2} \end{pmatrix}\ \text{e}\ Sut = \begin{pmatrix} \frac{1}{(sut_1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(sut_{NT})^2} \end{pmatrix};$$

$$\Delta d = (\Delta t, \Delta V, \Delta\theta, \Delta\lambda P, \Delta\lambda Q, \Delta siV, \Delta sit, \Delta suV, \Delta sut, \Delta\pi i_v, \Delta\pi i_t, \Delta\pi u_v, \Delta\pi u_t),$$

com:

$\Delta d \in R^{5NT+7NB+NBC-2}$;

e

$$\nabla La = \begin{cases} \nabla_{(t,v,\theta)} f^t + \lambda^t J + (\pi u)^t BI + (\pi i)^t BI + \sum_{m=1}^{NBCR} \begin{cases} (\mu_m + c\Delta Q_m)\nabla_x \Delta Q_m^t, & \text{se } \Delta Q_m \geq -\frac{\mu_m}{c} \\ 0, \text{ se } \Delta Q_m \leq -\frac{\mu_{mj}}{c} \end{cases} \\ \Delta P_i \,, \; i = 1,\ldots, NB-1 \\ \Delta Q_j \,, \; j = 1\ldots, NBC \\ -\frac{\delta}{siV_k} - \pi i_{v_k} \,, \; k = 1,\ldots, NB \\ -\frac{\delta}{sit_l} - \pi i_{t_l} \,, \; l = 1,\ldots, NT \\ -\frac{\delta}{suV_k} + \pi u_{v_k} \,, \; k = 1,\ldots, NB \\ -\frac{\delta}{sut_l} + \pi u_{t_l} \,, \; l = 1,\ldots, NT \\ V_k - siV_k - V_k^{min} \,, \; k = 1,\ldots, NB \\ t_l - sit_l - t_l^{min} \,, \; l = 1,\ldots, NT \\ V_k + suV_k - V_k^{max} \,, \; k = 1,\ldots, NB \\ t_l + sut_l - t_l^{max} \,, \; l = 1,\ldots, NT \end{cases} ,$$

com:

$\nabla La^t \in R^{5NT+7NB+NBC-2}$.

Definidos o vetor gradiente ∇La e a matriz Lagrangiana W, o sistema (5.9) é resolvido, e determina-se o vetor de direções de busca Δd. As variáveis são atualizadas por meio do uso do vetor de direções de busca juntamente com os passos primais e duais; os multiplicadores de Lagrange são atualizados pela regra de HESTENES (1969), e os fatores de penalidade e os barreira pelos parâmetros de correção. As fórmulas de atualização e o algoritmo do método são encontrados no capítulo 4.

5.5 Implementação computacional do algoritmo

Nesta seção apresentamos algumas considerações a respeito: da resolução do sistema não-linear (5.8); da estrutura da matriz Lagrangiana W; da resolução do sistema matricial (5.9); da implementação computacional; e dos módulos do programa.

Aplicamos o método de Newton modificado à resolução do sistema de equações não-lineares (5.8), como visto em COSTA & LANGONA (1996). Nesse método, as informações de primeira ordem são mantidas intactas, e as informações de segunda ordem são aproximadas. Assim, a matriz Lagrangiana pode ser simplificada: trabalhamos somente com a diagonal principal da submatriz Hessiana, $\nabla^2_{(t,V,\theta)} La$, a qual é atualizada a cada iteração. Aumentamos, deste modo, o número de elementos nulos da matriz W. Com tal aproximação, o processo de otimização passa a realizar um maior número de iterações; porém, ganhamos em economia de memória e de número de operações realizadas.

Observamos, no sistema (5.9), que a matriz Lagrangiana W tem uma estrutura esparsa. Verificamos que, em sistemas elétricos reais, o "grau de esparsidade", dessa matriz, cresce conforme aumentam as dimensões da rede elétrica. Em virtude da sua esparsidade, o armazenamento de W foi feito de forma compacta, isto é, somente os elementos diferentes de zero foram armazenados; com o auxílio do módulo Topologia da rede. Aplicamos a técnica de esparsidade fornecida pela rotina MA28.f, desenvolvida pelo *Grupo de Algoritmos Numéricos do Laboratório de*

Harwell, do *United Kingdom Atomic Energy Authority*. Essa rotina determina a solução de sistemas lineares esparsos, utilizando uma variante da eliminação de Gauss para esses sistemas, conforme DUFF & REID (1979). Os parâmetros utilizados na subrotina MA28 são:

n - ordem da matriz W;

nz - número de elementos diferentes de zero da matriz W;

a - vetor contendo os elementos diferentes de zero da matriz Lagrangiana;

irn - vetor contendo a posição da linha dos elementos diferentes de W;

lirn - tamanho do vetor irn, lirn $\geq$ nz;

icn - vetor contendo a posição da coluna dos elementos diferentes de zero deW;

licn - tamanho de a e icn, licn $\geq$ 2nz;

x - vetor contendo os elementos do vetor gradiente; após a solução do sistema linear o vetor x retorna da rotina MA28.f com os elementos do vetor direção de busca Δd do sistema: $W\Delta d = -\nabla La$.

A implementação computacional foi realizada em linguagem FORTRAN; o programa foi desenvolvido em um microcomputador Pentium III – 500 MHz, com 256 Mbytes de memória RAM, do Laboratório de Otimização de Sistemas de Energia Elétrica (LOSE), do Departamento de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC – USP). Na implementação utilizamos a dupla precisão aritmética.

O programa foi dividido nos seguintes módulos, mostrados na Figura 5.1:

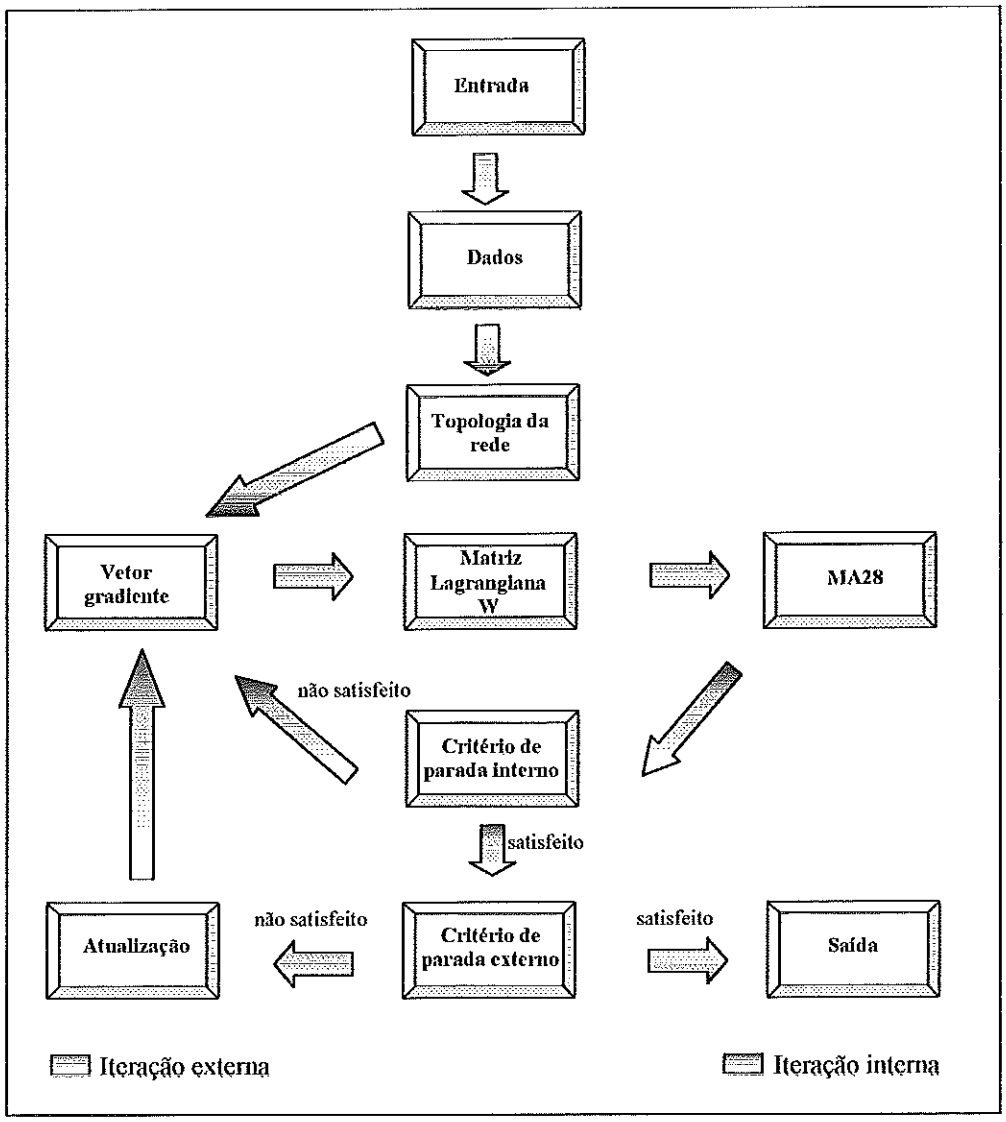

FIGURA 5.1 - Módulos do programa do método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica aplicado ao problema de FPO.

Entrada - faz a declaração das variáveis e constantes utilizadas no programa (variáveis globais);

Dados - faz a leitura dos dados das barras e linhas, isto é, da tensão, dos ângulos, dos *taps*, dos limites de reativos, limites de *taps* e limites de tensão, utilizando o banco de dados;

Topologia da rede - armazena a topologia do sistema elétrico, isto é, as ligações existentes entre as barras. É de fundamental importância para a criação do vetor gradiente e da matriz Lagrangiana.

Vetor gradiente - constrói o vetor gradiente associado à função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica;

Matriz Lagrangiana W - constrói a matriz Lagrangiana W associada à função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica; a matriz será utilizada na resolução do sistema linear (5.9);

MA28 - resolve o sistema linear (5.9) utilizando a rotina MA28.f até a satisfação de um critério de parada interno;

Critério de parada interno - verifica se as restrições de igualdade foram satisfeitas dentro de uma tolerância predeterminada;

Critério de parada externo - verifica as condições de KKT foram satisfeitas dentro de uma tolerância predeterminada;

Atualização - atualiza os fatores de penalidade e barreira por um parâmetro predeterminado;

Saída - gera o arquivo de saída que contém os valores de tensão, ângulos, *taps* e

reativos.

O programa é composto de iterações denominadas internas e externas. As iterações internas correspondem à resolução sucessiva do sistema linear (5.9) com a utilização da rotina MA28.f até a satisfação de um critério de parada interno; as iterações externas correspondem à atualização dos fatores de penalidade e barreira, e multiplicadores da desigualdade, até a satisfação de um critério de parada externo.

No próximo capítulo apresentaremos os resultados numéricos obtidos através da aplicação do método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica ao problema de FPO, discutindo o seu desempenho.

CAPÍTULO 6

RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentamos os resultados numéricos obtidos através da aplicação do método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica ao problema de fluxo de potência ótimo, discutindo o seu desempenho. Analisamos um exemplo numérico clássico e os sistemas elétricos TESTE (3 barras), AEP 14, AEP 30, AEP 57 e IEEE 118. A função objetivo considerada nos cinco sistemas elétricos foram as perdas de potência ativa na transmissão. Essa função objetivo é não-linear e não convexa, o que torna o problema de FPO difícil de ser resolvido (MONTICELLI & LIU (1992)).

6.1 Exemplo 1

Seja o problema de otimização:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \\ \text{sujeito a:} \quad & x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ & x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ & 1{,}5 \leq x_2 \leq 2 \end{aligned} \quad , \qquad (6.1)$$

Associados ao problema (6.1) temos a função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica

$$La(x,s,\lambda,\pi,\mu) = (x_1-2)^4 + (x_1-2x_2)^2 - \delta(\ln su + \ln si) + \lambda(x_1+x_2-3) + \pi u(x_2+su-2)+$$

$$\pi i(x_2-si-1,5)+\begin{cases}\mu(x_1^2-x_2)+\frac{1}{2}c(x_1^2-x_2)^2, se(x_1^2-x_2)\geq -\frac{\mu}{c}\\ -\frac{\mu^2}{2c}, se(x_1^2-x_2)\leq -\frac{\mu}{c}\end{cases}, \qquad (6.2)$$

a matriz Lagrangiana

$$W = \begin{pmatrix} \nabla^2_{x_1x_1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \nabla^2_{x_2x_2} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \frac{\delta}{su^2} & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta}{si^2} & 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (6.3)$$

onde

$$\nabla^2_{x_1x_1} = 12(x_1-2)^2 + 2 + \begin{cases} 2\mu + c(6x_1^2-2x_2), se(x_1^2-x_2)\geq -\frac{\mu}{c}\\ 0, se(x_1^2-x_2)\leq -\frac{\mu}{c}\end{cases};$$

$$\nabla^2_{x_2x_2} = 8 + \begin{cases} c, se(x_1^2-x_2)\geq -\frac{\mu}{c}\\ 0, se(x_1^2-x_2)\leq -\frac{\mu}{c}\end{cases};$$

e o vetor gradiente

$$\nabla La = \begin{pmatrix} 4(x_1-2)^3 + 2(x_1-2x_2) + \lambda + \begin{cases} 2\mu x_1 + c(2x_1^3 - 2x_1x_2), se(x_1^2 - x_2) \geq \frac{-\mu}{c} \\ 0, se(x_1^2 - x_2) \leq \frac{-\mu}{c} \end{cases} \\ -4(x_1-2x_2) + \lambda + \pi u + \pi i + \begin{cases} -\mu - c(x_1^2 - x_2), se(x_1^2 - x_2) \geq \frac{-\mu}{c} \\ 0, se(x_1^2 - x_2) \leq \frac{-\mu}{c} \end{cases} \\ -\frac{\delta}{su} + \pi u \\ -\frac{\delta}{si} - \pi i \\ x_1 + x_2 - 3 \\ x_2 + su - 2 \\ x_2 - si - 1{,}5 \end{pmatrix} \quad .(6.4)$$

As Tabelas 6.1 e 6.2 apresentam o processo de convergência do exemplo 1, que usa o método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica para diferentes fatores e parâmetros de penalidade e barreira, partindo do mesmo ponto inicial. Na Tabela 6.1 observamos que o processo convergiu em 14 iterações, utilizando como valores iniciais: o ponto x^t = (1,1;1,9); os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade e desigualdade, λ=0 e $\mu = \pi u = \pi i = 0$ respectivamente; o fator de penalidade associado à restrição de desigualdade c = 1, sendo β = 1,01 seu parâmetro de correção; o fator de barreira δ = 1, sendo ρ = 2 seu parâmetro de correção; e as variáveis de folga su = si = 0,1.

TABELA 6.1: Método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica aplicada ao exemplo 1, com c = 1 e δ = 1

It.	(x_1, x_2)	F.Ob.	λ	μ	πu	πi	c	δ	su	si
1	(1,425;1,574)	3,077	4,204	0,458	2,349	-13,445	1,01	0,5	0,425	0,074
2	(1,438;1,561)	2,932	1,274	0,972	1,139	-8,174	1,02	0,25	0,438	0,061
3	(1,451;1,549)	2,803	-0,512	1,539	0,554	-5,090	1,03	0,125	0,451	0,049
4	(1,451;1,598)	2,800	-2,183	2,114	0,277	-2,564	1,04	0,0625	0,451	0,048
5	(1,433;1,566)	2,993	-3,389	2,621	0,144	-0,936	1,05	0,0313	0,433	0,667
6	(1,402;1,597)	3,343	-3,992	3,008	0,077	-0,250	1,06	0,0156	0,402	0,097
7	(1,371;1,629)	3,717	-4,207	3,274	0,041	-0,108	1,07	0,0078	0,371	0,129
8	(1,349;1,650)	3,989	-4,322	3,457	0,022	-0,050	1,08	0,0039	0,349	0,150
9	(1,334;1,665)	4,181	-4,3909	3,582	0,011	-0,023	1,09	0,0020	0,334	0,165
10	(1,324;1,675)	4,314	-4,432	3,668	0,006	-0,011	1,10	0,0010	0,324	0,175
11	(1,317;1,682)	4,407	-4,458	3,728	0,003	-0,005	1,11	0,0005	0,317	0,182
12	(1,312;1,687)	4,472	-4,475	3,768	0,001	-0,002	1,12	0,0002	0,312	0,187
13	(1,309;1,690)	4,516	-4,486	3,796	0,0008	-0,001	1,13	0,0001	0,309	0,190
14	**(1,307;1,692)**	**4,546**	**-4,494**	**3,815**	**0,0003**	**-0,0006**	**1,14**	**0,00006**	**0,307**	**0,192**

Na Tabela 6.2 observamos que, para o mesmo problema, o processo convergiu em 5 iterações, utilizando como valores iniciais: o ponto $x^t = (1,1;1,9)$; os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade e desigualdade, λ=0 e $\mu = \pi u = \pi i = 0$ respectivamente; o fator de penalidade associado à restrição de desigualdade c = 3, sendo β = 1,2 seu parâmetro de correção; o fator de barreira δ =1,5, sendo ρ = 10 seu parâmetro de correção; e as variáveis de folga su=si = 0,1. Observamos que o valor da função objetivo no ponto inicial, para as duas tabelas, é 7,9461.

TABELA 6.2: Método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica aplicada ao exemplo 1, com c = 3 e δ = 1,5

It.	(x_1, x_2)	F.Ob.	λ	μ	πu	πi	c	δ	su	si
1	(1,402;1,597)	3,343	4,440	1,105	3,729	-15,343	3,600	0,150	0,402	0,977e-1
2	(1,414;1,585)	3,203	-3,036	2,599	0,361	-1,752	4,320	0,150e-1	0,414	0,855e-1
3	(1,354;1,645)	3,929	-4,280	3,409	0,423e-1	-0,102	5,184	0,150e-2	0,354	0,145
4	(1,319;1,681)	4,388	-4,452	3,715	0,470e-2	-0,828e-2	6,220	0,150e-3	0,319	0,180
5	**(1,307;1,692)**	**4,548**	**-4,494**	**3,817**	**0,488e-3**	**-0,778e-3**	**7,465**	**0,150e-4**	**0,307**	**0,192**

Nas Figuras 6.1 e 6.2 mostramos uma comparação do processo de convergência referente às Tabelas 6.1 e 6.2 respectivamente. Lembramos que estamos partindo da mesma solução factível. Como podemos verificar nas Figuras 6.1 e 6.2, dado o ponto inicial, o método proposto procura um ponto fora da região factível e, através de pontos infactíveis, aproxima-se da solução ótima do problema, mantendo satisfeitas a restrição de igualdade e a restrição canalizada da variável x_2 durante todo o processo de otimização. Verificamos, também, que a escolha dos fatores e dos parâmetros de penalidade e barreira interfere no número de iterações para a convergência ótima. Na Tabela 6.2 observamos que, para um bom ajuste nos fatores e parâmetros de penalidade e barreira, podemos obter o mesmo resultado da Tabela 6.1, em um número menor de iterações, utilizando uma precisão de 10^{-2}.

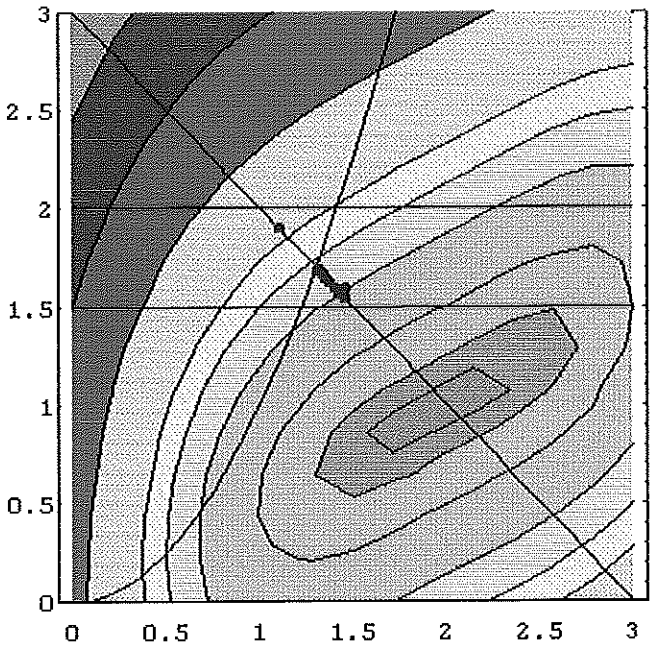

FIGURA 6.1: Convergência referente à Tabela 6.1

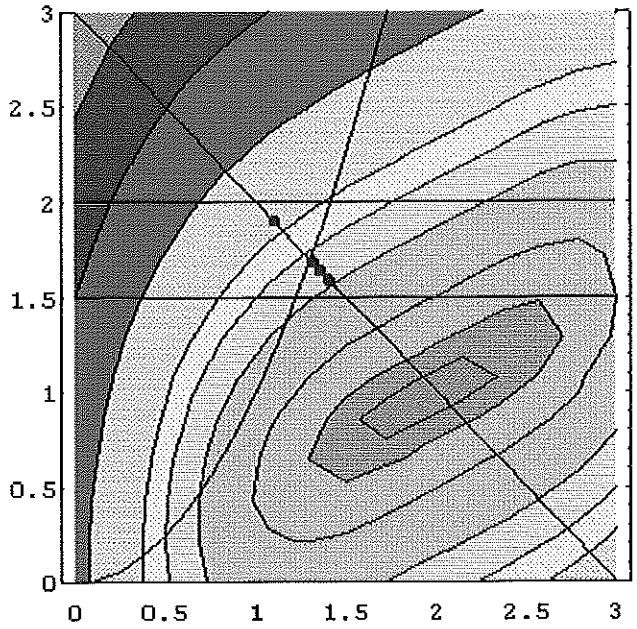

FIGURA 6.2: Convergência referente à Tabela 6.2

Nas próximas seções analisaremos o sistema TESTE, de 3 barras, proposto por DOMMEL & TINNEY (1968);e os sistemas elétricos: AEP 14 , AEP 30, AEP 57, encontrados em FRERIS (1968); e IEEE 118.

6.2 Exemplo 2: TESTE

Este exemplo foi proposto por DOMMEL & TINNEY (1968) a fim de testar a formulação do FPO.

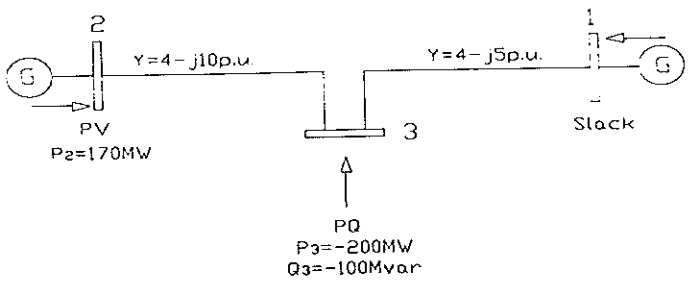

FIGURA 6.3 – Sistema TESTE

O sistema TESTE, da Figura 6.3, apresenta as seguintes características:

- 1 barra de geração (*slack* - SL) - barra 1;
- 1 barra de controle reativo (CR) - barra 2;
- 1 barra de carga (CG) - barra 3;
- 2 linhas de transmissão.

O problema de FPO associado ao sistema da Figura 6.3 pode ser formulado como segue:

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimizar} \quad 4[\,(V_1^2 + V_3^2 - 2V_1 V_3 \cos\theta_{13}) + (V_2^2 + V_3^2 - 2V_2 V_3 \cos\theta_{23})] \\
&\text{Sujeito a:} \quad P_2 - 1{,}7 = 0 \\
&\qquad\qquad P_3 + 2{,}0 = 0 \\
&\qquad\qquad Q_3 + 1{,}0 = 0 \\
&\qquad\qquad 0{,}1 \le Q_2 \le 2{,}0 \\
&\qquad\qquad 0.8 \le V_1 \le 1{,}2 \\
&\qquad\qquad 0.8 \le V_2 \le 1{,}2 \\
&\qquad\qquad 0.99 \le V_3 \le 1{,}01 \\
&\qquad\qquad \theta_1 = 0
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

onde:

$$P_2 = 4V_2^2 - 4V_2V_3\cos\theta_{23} + 10V_2V_3\,\mathrm{sen}\,\theta_{23};$$

$$P_3 = (4V_3^2 - 4V_3V_2\cos\theta_{32} + 10V_3V_2\,\mathrm{sen}\,\theta_{32}) + (4V_3^2 - 4V_3V_1\cos\theta_{31} + 4V_3V_1\,\mathrm{sen}\,\theta_{31});$$

$$Q_3 = (10V_3^2 - 10V_3V_2\cos\theta_{32} - 4V_3V_2\,\mathrm{sen}\,\theta_{32}) + (5V_3^2 - 5V_3V_1\cos\theta_{31} - 4V_3V_1\,\mathrm{sen}\,\theta_{31});$$

$$Q_2 = v_2\,(10V_2 - 10V_3\cos\theta_{23} - 4V_3\,\mathrm{sen}\,\theta_{23});$$

$$\cos\theta_{ij} = \cos(\theta_i - \theta_j);$$

$$\mathrm{sen}\,\theta_{ij} = \mathrm{sen}\,(\theta_i - \theta_j).$$

Apresentamos o processo de convergência destacando a matriz Lagrangiana W, os fatores e parâmetros de penalidade e barreira, os multiplicadores de Lagrange e os valores das potências ativas e reativas nas barras. O estado inicial do sistema e os limites utilizados para o nível de tensão e fonte de reativos são mostrados nas Tabelas 6.3 e 6.4 respectivamente.

TABELA 6.3 – Estado inicial do sistema TESTE

Barra k	Tipo	V_k (pu)	Ang_k	P_k (MW)	Q_k (Mvar)
1	SL	1	0	-	-
2	CR	1	0	170,0	-200,0
3	CG	1	0	-	-100,0

Função Objetivo inicial = 0 MW

TABELA 6.4 – Limites para o nível de tensão

Barra k	V_k^{min}	V_k^{max}	Q_k^{min}	Q_k^{max}
1	0,8	1,2	-9999	9999
2	0,8	1,2	0,1	2
3	0,99	1,01	-	-

Os valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade e desigualdade são: $\lambda P_2 = 0$, $\lambda P_3 = 0$, $\lambda Q_3 = 0$, $\pi u_{v_1} = 0$, $\pi u_{v_2} = 0$, $\pi u_{v_3} = 0$, $\pi i_{v_1} = 0, \pi i_{v_2} = 0, \pi i_{v_3} = 0$ e $\mu Q_2 = 0$. O fator de penalidade associado à restrição de desigualdade é c = 1, sendo β = 1,2 seu parâmetro de correção. O fator de barreira é δ =0,01, sendo ρ = 10 seu parâmetro de correção. Os limites da tensão na barra 3 foram escolhidos muito próximos, para que a tensão final fosse praticamente de 1,0 p.u., como o proposto por DOMMEL & TINNEY (1968). Conseqüentemente, os elementos da matriz correspondentes a essa barra tornaram-se muito grandes.

Iteração externa 1

$$W=\begin{pmatrix}
9,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4,1263 & -4,8879 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 8,0669 & 0 & 0 & 0 & 6,0233 & -4,8822 & -9,5882 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 19,4006 & 0 & 0 & -3,5041 & 6,1210 & 13,9538 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 9,5099 & 0 & 11,7284 & -10,9071 & 5,5538 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 18,2949 & -11,7284 & 16,0003 & -9,8534 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6,0233 & -3,5041 & 11,7284 & -11,7284 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4,1263 & -4,8822 & 6,1210 & -10,9071 & 16,0003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4,8879 & -9,5882 & 13,9538 & 5,5538 & -9,8534 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1708 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0878 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & $4(10^{12})$ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,5646 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (10^{5}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \quad (6.6)$$

TABELA 6.5 – Comportamento das variáveis do sistema TESTE na iteração externa 1

Barra k	Tipo	V_k (pu)	P_k (MW)	λP_k	Q_k (Mvar)	λQ_k	c	δ
1	SL	1,0661	-42,90	0,0000	-24,70	0,0000	-	0,001
2	CR	1,1266	-170,00	-0,0319	-105,00	0,0000	1,20	0,001
3	CG	0,9990	199,90	0,0755	100,00	0,0547	-	0,001

Função Objetivo: 12,9493 MW

Iteração externa 2

$$W=\begin{pmatrix}
9,2000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4,1269 & -4,8874 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 8,9448 & 0 & 0 & 0 & 6,0152 & -4,9559 & -9,5503 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 20,0496 & 0 & 0 & -3,3807 & 5,9911 & 13,9840 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 9,8630 & 0 & 11,6418 & -10,7594 & 5,5833 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 18,9980 & -11,6418 & 15,9701 & -9,9832 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6,0152 & -3,3807 & 11,6418 & -11,6418 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4,1269 & -4,9559 & 5,9911 & -10,7594 & 15,9701 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4,8874 & -9,5503 & 13,9840 & 5,5833 & -9,9832 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0141 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0094 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & $1(10^{11})$ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0558 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1856 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \quad (6.7)$$

TABELA 6.6 – Comportamento das variáveis do sistema TESTE na iteração externa 2

Barra k	Tipo	V_k (pu)	P_k (MW)	λP_k	Q_k (Mvar)	λQ_k	c	δ
1	SL	1,0674	-42,90	0,0000	-25,80	0,0000	-	0,0001
2	CR	1,1258	-170,00	-	-103,90	0,0000	1,44	0,0001
3	CG	0,9990	200,00	0,0741	100,00	0,0437	-	0,0001

Função Objetivo: 12,9493 MW

Iteração externa 3

$$W=\begin{pmatrix}
9,4401 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4,1223 & -4,8913 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 9,2052 & 0 & 0 & 0 & 6,0133 & -4,9601 & -9,5481 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 19,9361 & 0 & 0 & -3,3731 & 5,9902 & 13,9841 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 9,7381 & 0 & 11,6350 & -10,7492 & 5,5841 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 18,8200 & -11,6350 & 15,9701 & -9,9841 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6,0133 & -3,3731 & 11,6350 & -11,6350 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4,1223 & -4,9601 & 5,9902 & -10,7492 & 15,9701 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4,8913 & -9,5481 & 13,9841 & 5,5841 & -9,9841 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0009 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & $2(10^{10})$ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0057 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0182 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \quad (6.8)$$

TABELA 6.7 – Comportamento das variáveis do sistema TESTE na iteração externa 3

Barra k	Tipo	V_k (pu)	P_k (MW)	λP_k	Q_k (Mvar)	λQ_k	c	δ
1	SL	1,0686	-42,90	0,0000	-26,90	0,0000	-	0,00001
2	CR	1,1249	-170,00	-	-102,70	0,0000	1,72	0,00001
3	CG	0,9990	200,00	0,0766	100,00	0,0495	-	0,00001

Função Objetivo: 12,9437MW

Iteração externa 4

$$W=\begin{pmatrix}
9,7281 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4,1170 & -4,8958 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 9,4850 & 0 & 0 & 0 & 6,0110 & -4,9645 & -9,5459 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 20,4400 & 0 & 0 & -3,3651 & 5,9902 & 13,9841 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 9,8039 & 0 & 11,6274 & -10,7382 & 5,5846 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 18,9382 & -11,6273 & 15,9700 & -9,9841 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6,0110 & -3,3651 & 11,6274 & -11,6273 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4,1170 & -4,9645 & 5,9902 & -10,7382 & 15,9700 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4,8958 & -9,5459 & 13,9841 & 5,5846 & -9,9841 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & $6(10^8)$ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0018 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10,004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \quad (6.9)$$

TABELA 6.8 – Comportamento das variáveis do sistema TESTE na iteração externa 4

Barra k	Tip	V_k (pu)	P_k (MW)	λP_k	Q_k (Mvar)	λQ_k	c	δ
1	SL	1,0694	-42,90	0,0000	-27,60	0,0000	-	0,000001
2	CR	1,1244	-170,00	-	-102,00	0,0000	2,0736	0,000001
3	CG	0,9990	200,00	0,0780	100,00	0,0500	-	0,000001

Função Objetivo: 12,9419 MW

O sistema convergiu em 4 iterações externas, atingindo a mesma solução obtida por DOMMEL & TINNEY (1968), com uma precisão de 10^{-3} p.u. Observamos que, na primeira iteração externa, o programa realizou duas iterações internas e obteve um ponto próximo ao ótimo. Nas demais iterações externas foram realizadas somente uma iteração interna, e a solução foi refinada por meio dos ajustes dos multiplicadores de Lagrange e dos fatores de penalidade e barreira. Na solução do problema, as restrições de igualdade e desigualdade e as condições de KKT estão satisfeitas.

Na Figura 6.4 apresentamos o processo de convergência da função objetivo e, na Figura 6.5, o comportamento do máximo erro de potência ativa e reativa. Salientamos que, nessas figuras, os resultados são apresentados a partir da primeira iteração externa, e o processo obtém, logo na primeira iteração externa, um ponto próximo ao ótimo.

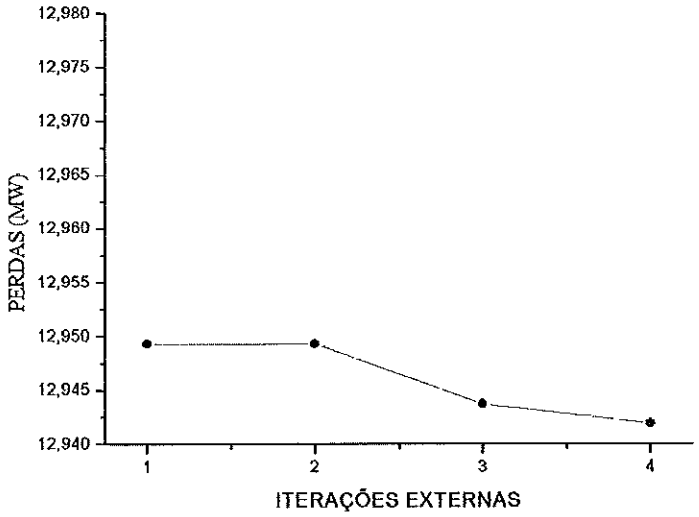

FIGURA 6.4 – Convergência da função objetivo para o sistema TESTE

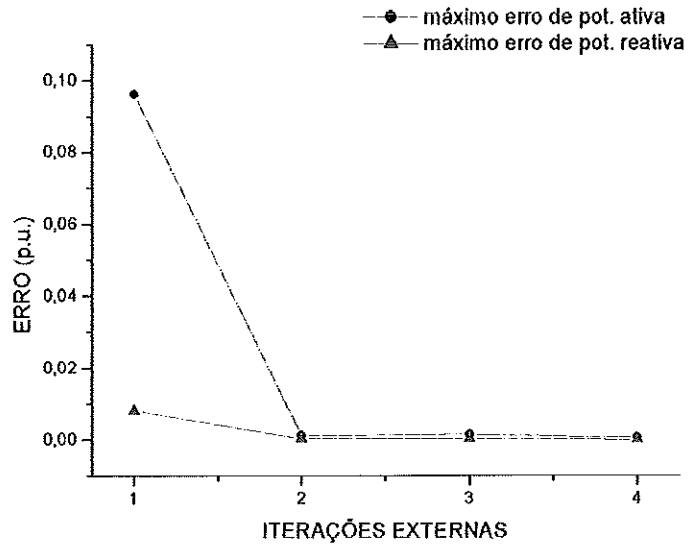

FIGURA 6.5 – Máximo erro de potência para o sistema TESTE

Na Figura 6.4 podemos observar o decréscimo da função objetivo a cada iteração externa e, na Figura 6.5, o processo de convergência associado às restrições de igualdade.

Ressaltamos que o número de iterações do processo de convergência está diretamente ligado à escolha e ao ajuste dos fatores e parâmetros de penalidade e barreira. O banco de dados do sistema TESTE pode ser encontrado no Apêndice 1.

6.3 Exemplo 3: AEP 14

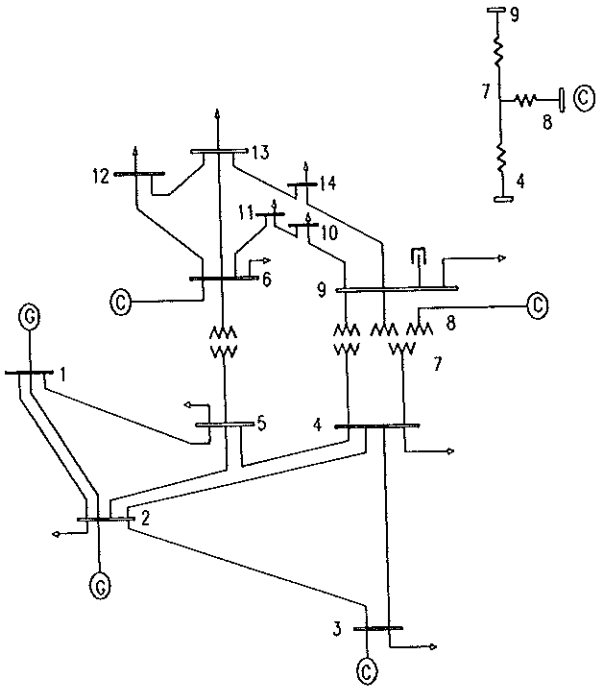

FIGURA 6.6 – Sistema AEP14

A Figura 6.6 apresenta o sistema AEP 14, que possui as seguintes características:

- 1 barra de geração (*slack*);
- 4 barras de controle reativo;
- 9 barras de carga;
- 17 linhas de transmissão;
- 3 transformadores com *tap* variável.

O problema de FPO associado ao sistema AEP 14 é composto por 22 equações de igualdade, 4 equações canalizadas de potência reativa, 3 restrições canalizadas de *tap*, 14 restrições canalizadas de tensão, um total de 126 variáveis e uma matriz Lagrangiana de ordem 120.

Na Tabela 6.9, mostramos o valor da função objetivo e o número de iterações para diferentes valores dos parâmetros citados.

TABELA 6.9 – Testes para o sistema AEP 14

Teste	c	β	δ	ρ	Perdas (MW)	It. Ext.
1	1	1,2	0,001	10	13,0595	5
2	1	1,5	0,001	10	13,0595	5
3	1	1.5	0,001	100	13,0591	5

onde:

c - fator de penalidade;

β - parâmetro de penalidade;

δ - fator de barreira;

ρ - parâmetro de barreira.

Nos Apêndices 1 e 2, apresentamos o banco de dados e o estado final do teste1 da Tabela 6.9 referentes ao sistema AEP 14.

Na Figura 6.7 mostramos o gráfico da convergência da função objetivo e, na Figura 6.8 o do máximo erro de potência ativa e reativa, ambos em cada iteração externa; os dois gráficos são referentes ao teste 1 da Tabela 6.9.

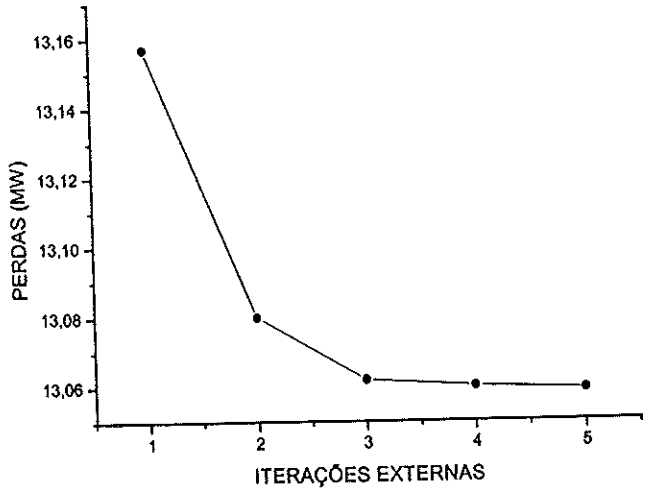

FIGURA 6.7 – Convergência da função objetivo para o teste 1 do sistema AEP 14

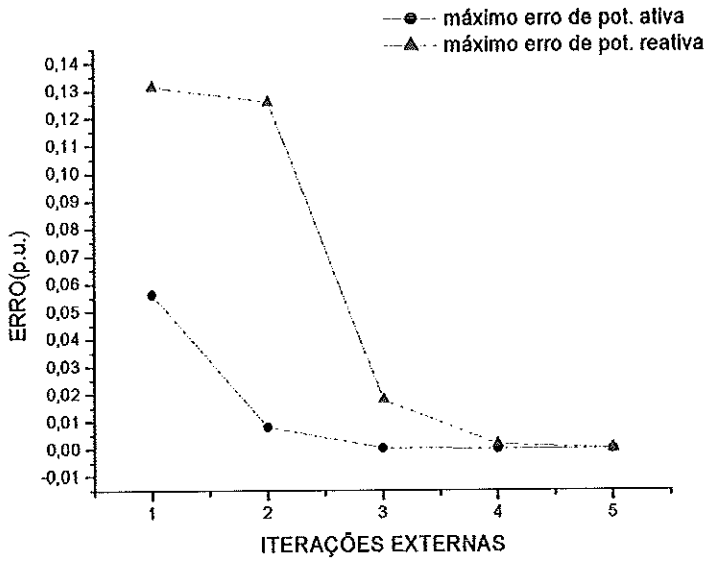

FIGURA 6.8 – Máximo erro de potência para o teste 1 do sistema AEP 14

Observamos, nas Figuras 6.7 e 6.8, que a convergência para o teste 1 da Tabela 6.9 ocorreu em 5 iterações externas. Partimos de uma solução inicial próxima à solução do fluxo de carga, isto é, apenas com as restrições de igualdade satisfeitas, satisfazendo um erro em torno de 10^{-1} p.u. Foi realizada uma iteração interna para cada iteração externa.

No estado final do sistema AEP 14, todas as tensões, *taps* e potências reativas permaneceram dentro de seus limites, e a solução final obedeceu a todas as restrições do sistema, satisfazendo KKT e uma precisão de 10^{-3}p.u.

6.4 Exemplo 4: AEP 30

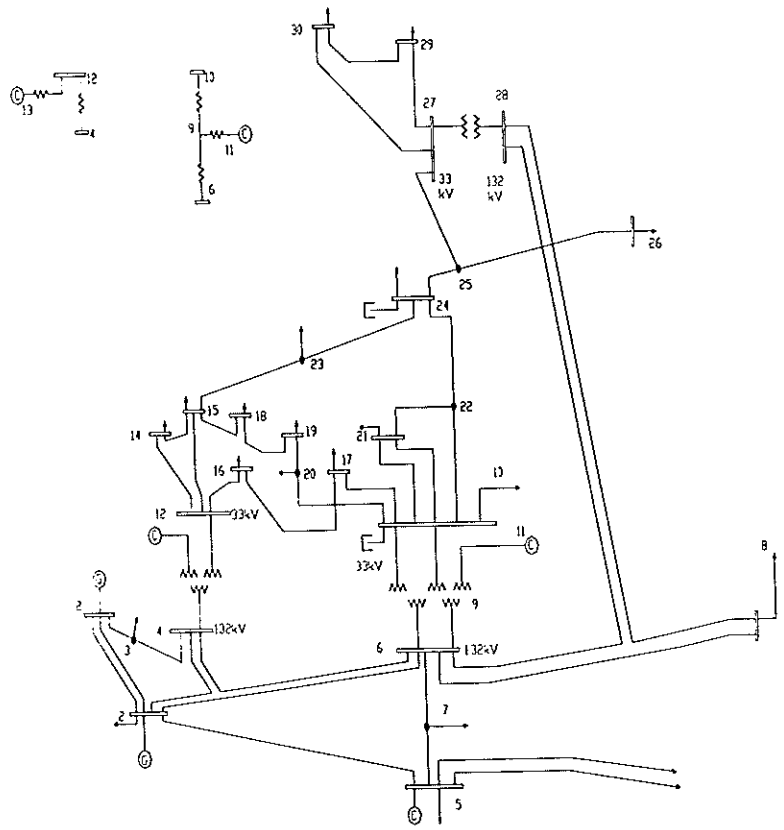

FIGURA 6.9 – Sistema AEP 30

A Figura 6.9 apresenta o sistema AEP 30, que possui as seguintes características:

- 1 barra de geração (*slack*);
- 5 barras de controle de reativos;

- 24 barras de carga;
- 37 linhas de transmissão;
- 4 transformadores com *tap* variável.

O problema de FPO associado ao sistema AEP 30 é composto por 53 equações de igualdade, 5 equações canalizadas de potência reativa, 4 restrições canalizadas de *tap*, 30 restrições canalizadas de tensão, um total de 259 variáveis e uma matriz Lagrangiana de ordem 252.

Na Tabela 6.10, mostramos o valor da função objetivo e o número de iterações externas para diferentes valores dos fatores e parâmetros citados.

TABELA 6.10 – Testes para o sistema AEP 30

Teste	C	β	δ	ρ	Perdas (MW)	It. Ext.
1	1	1,2	0,0001	10	17,5717	4
2	1	1,5	0,0001	10	17,5775	5
3	1	1,5	0,0001	100	17,5776	5

onde:

c - fator de penalidade;

β - parâmetro de penalidade;

δ - fator de barreira;

ρ - parâmetro de barreira.

Nos Apêndices 1 e 2, apresentamos o banco de dados e o estado final do teste 1 da Tabela 6.10 referentes ao sistema AEP 30.

Na Figura 6.10 mostramos o gráfico da convergência da função objetivo e, na figura 6.11, o do máximo erro de potência ativa e reativa, ambos em cada iteração externa; esses gráficos referem-se ao teste 1 da Tabela 6.10.

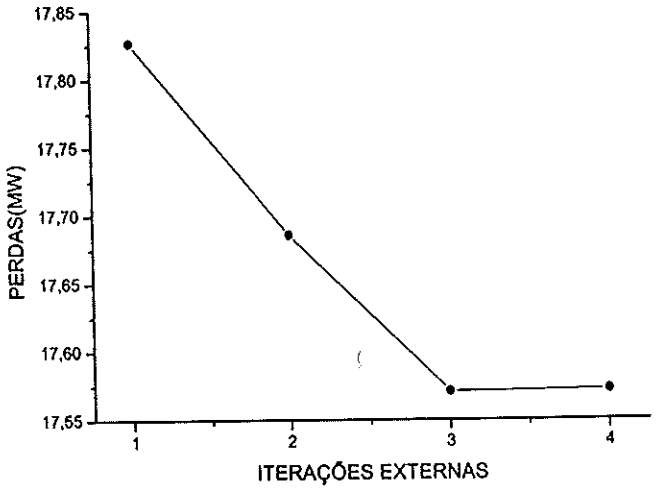

FIGURA 6.10 - Convergência da função objetivo para o teste 1 do sistema AEP 30

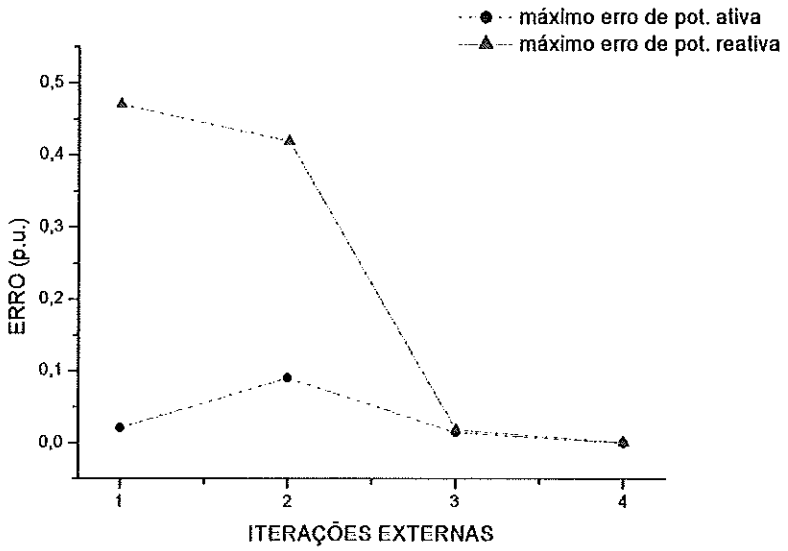

FIGURA 6.11 - Máximo erro de potência para o teste 1 do sistema AEP 30

Nas Figuras 6.10 e 6.11 observamos que a convergência para o teste 1 da Tabela 6.10 ocorreu em 4 iterações externas. Na Tabela 6.10 podemos verificar que pequenas mudanças nos parâmetros de penalidade e barreira podem provocar mudanças no número de iterações e no valor da função objetivo. Em cada iteração externa foi realizada apenas uma iteração interna.

No estado final do sistema AEP 30, todas as tensões, *taps* e potências reativas permaneceram dentro de seus limites, e a solução final obedeceu a todas as restrições do sistema, satisfazendo KKT e uma precisão de 10^{-3} p.u.

6.5 Exemplo 5: AEP 57

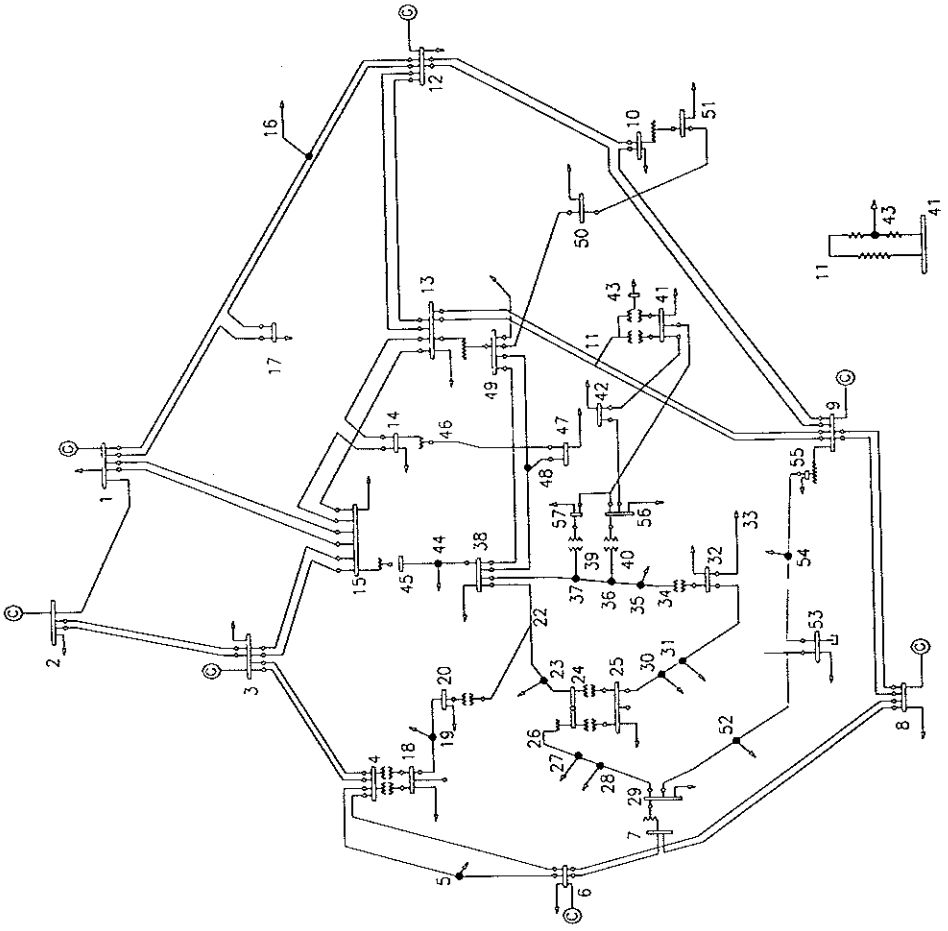

FIGURA 6.12 – Sistema AEP 57

A Figura 6.12 apresenta o sistema AEP 57, que possui as seguintes características:

- 1 barra de geração (*slack*);
- 6 barras de controle de reativos;
- 50 barras de carga;
- 80 linhas de transmissão;
- 17 transformadores com *tap* variável.

O problema de FPO associado ao sistema AEP 57 é composto por 106 equações de igualdade, 6 equações canalizadas de potência reativa, 17 restrições canalizadas de *tap*, 57 restrições canalizadas de tensão, um total de 540 variáveis e uma matriz Lagrangiana de ordem 532.

Na Tabela 6.11, mostramos o valor da função objetivo e o número de iterações para diferentes valores dos fatores e parâmetros citados.

TABELA 6.11 – Testes para o sistema AEP 57

Teste	c	β	δ	ρ	Perdas (MW)	It. Ext.
1	1	1,2	0,0001	10	27,5501	10
2	1	1,5	0,0001	10	27,8215	10
3	1	1,5	0,0001	100	27,8215	10

EESC - USP Biblioteca CAMPUS DE S. CARLOS

onde:

c - fator de penalidade;

β - parâmetro de penalidade;

δ - fator de barreira;

ρ - parâmetro de barreira.

Nos Apêndices 1 e 2 apresentamos o banco de dados e o estado final do teste 1 da Tabela 6.11 referentes ao sistema AEP 57.

Na Figura 6.13 mostramos o gráfico da convergência da função objetivo e, na figura 6.14, o do máximo erro de potência ativa e reativa, ambos em cada iteração externa; os gráficos são relativos ao teste 1 da Tabela 6.11.

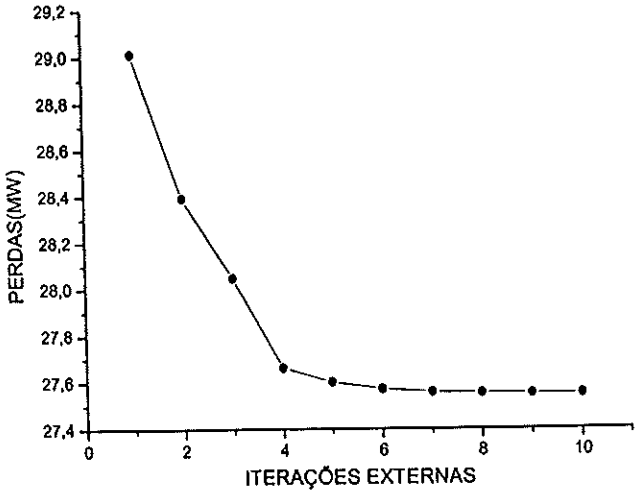

FIGURA 6.13 - Convergência da função objetivo para o teste 1 do sistema AEP 57

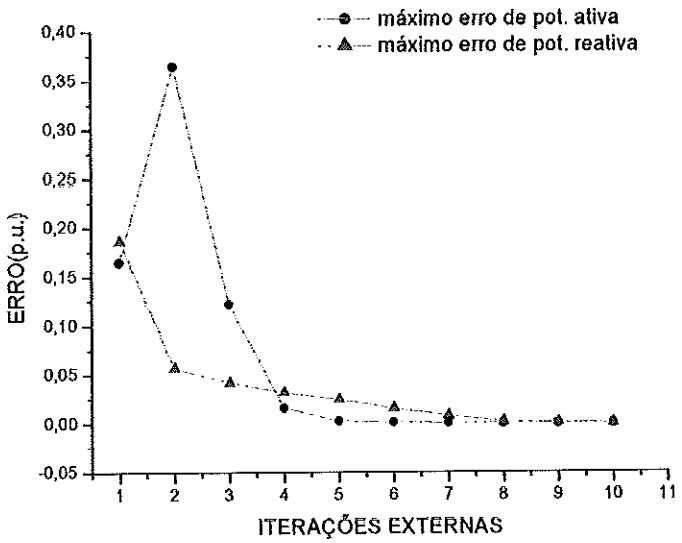

FIGURA 6.14 – Máximo erro de potência para o teste 1 do sistema AEP 57

Nas Figuras 6.13 e 6.14 observamos que a convergência para o teste 1 ocorreu em 10 iterações externas; na primeira iteração externa foram realizadas 2 iterações internas e, nas demais, apenas uma.

No estado final do sistema AEP 57, todas as tensões e *taps* permaneceram dentro de seus limites, e a solução final obedeceu a todas as restrições do sistema, satisfazendo KKT e uma precisão de 10^{-3}p.u.

6.6 Exemplo 6: IEEE 118

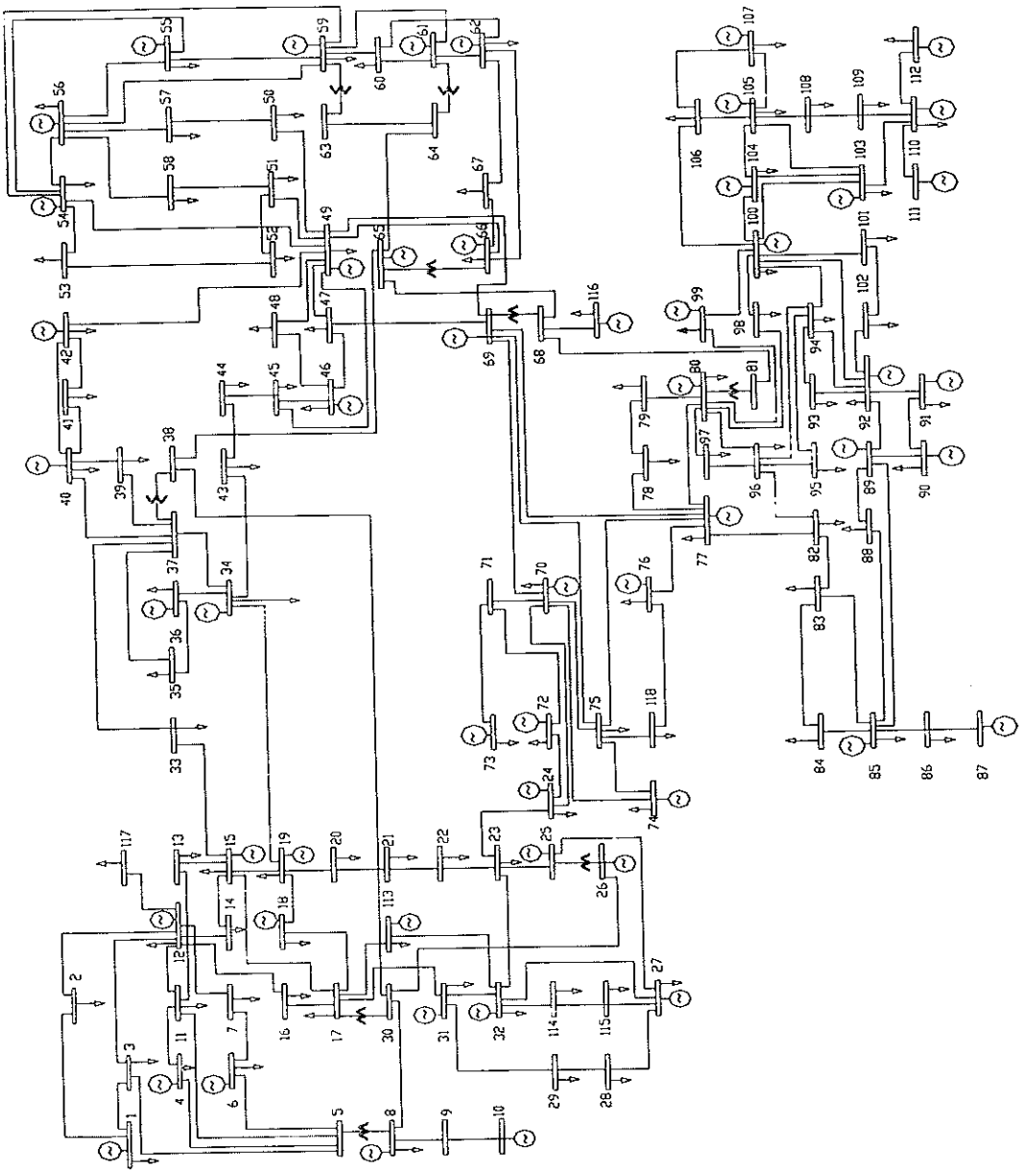

FIGURA 6.15 – Sistema IEEE 118

A Figura 6.15 apresenta o sistema IEEE 118, que possui as seguintes características:

- 1 barra de geração (*slack*);
- 51 barras de controle de reativo;
- 66 barras de carga;
- 186 linhas de transmissão;
- 9 transformadores com *tap* variável.

O problema de FPO associado ao sistema IEEE 118 é composto por 183 equações de igualdade, 51 equações canalizadas de potência reativa, 9 restrições canalizadas de *tap*, 118 restrições canalizadas de tensão, um total de 988 variáveis e uma matriz Lagrangiana de ordem 935.

Na Tabela 6.12, mostramos o valor da função objetivo e o número de iterações para diferentes valores dos fatores e parâmetros citados.

TABELA 6.12 – Testes para o sistema IEEE 118

Teste	c	β	δ	ρ	Perdas (MW)	It. Ext.
1	1	1,1	0,0001	10	130,3833	20
2	1	1,2	0,0001	10	130,4230	21
3	1	1,2	0,0001	100	130,4229	21

onde:

c - fator de penalidade;

β - parâmetro de penalidade;

δ - fator de barreira;

ρ - parâmetro de barreira.

Nos Apêndices 1 e 2 apresentamos o banco de dados e o estado final do teste 1 da Tabela 6.12 referentes ao sistema IEEE 118.

Na Figura 6.16 mostramos o gráficos da convergência da função objetivo e, na figura 6.17, o do máximo erro de potência ativa e reativa, ambos em cada iteração externa; os dois gráficos são referentes ao teste 1 da Tabela 6.12.

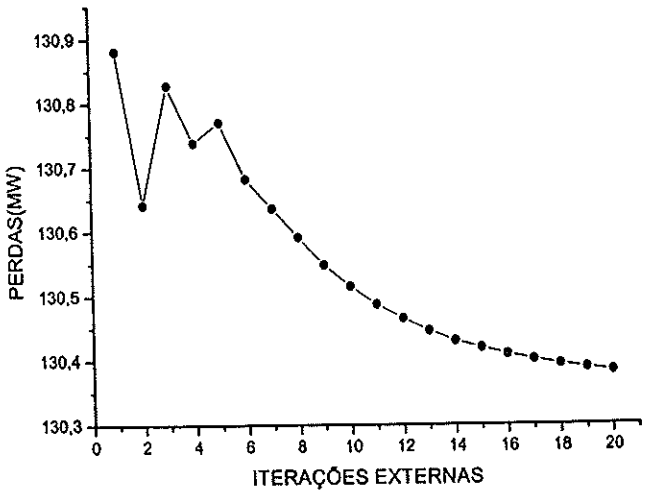

FIGURA 6.16 - Convergência da função objetivo para teste 1 do sistema IEEE 118

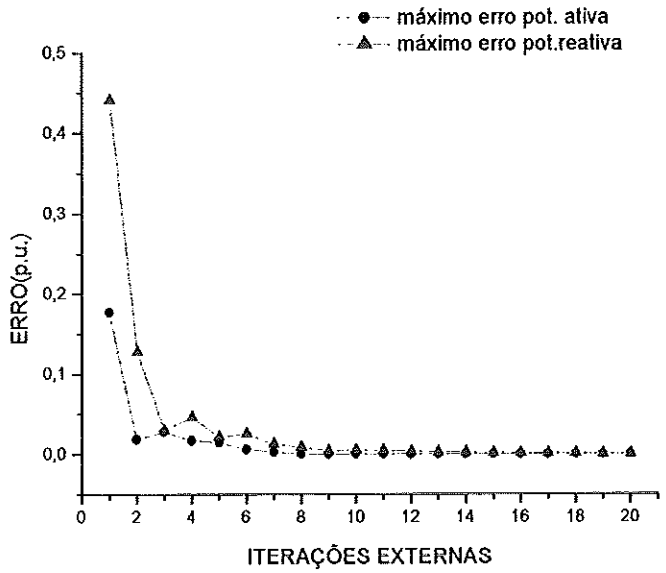

FIGURA 6.17 – Máximo erro de potência para o teste 1 do sistema IEEE 118

Nas Figuras 6.16 e 6.17 observamos que a convergência para o teste 1 da Tabela 6.12 ocorreu em 20 iterações externas. Foi realizada uma iteração interna para cada iteração externa.

Salientamos que, no estado final do sistema IEEE 118, todas as tensões e *taps* permaneceram dentro de seus limites e a solução final obedeceu a todas as restrições do sistema, satisfazendo KKT e uma precisão de 10^{-3} p.u.

Nos exemplos apresentados, o método convergiu de modo efetivo e obteve o ótimo do problema em um número de iterações aceitável. Porém, uma das dificuldades desse método é a escolha e o ajuste dos fatores e parâmetros de

penalidade e barreira, e o fato de ele ser extremamente sensível a tais ajustes. Contudo, salientamos a obtenção, por meio dele, da solução ótima dos sistemas sem o desagradável ajuste das variáveis de estado e das potências reativas por um processo de tentativa e erro.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

Neste trabalho propusemos uma abordagem para a resolução do problema de FPO baseada na associação do método da função Lagrangiana aumentada e do método da função barreira logarítmica. Denominamos essa abordagem de método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica.

Inicialmente, apresentamos, um histórico a fim de posicionar o trabalho cronologicamente, e uma revisão dos métodos de otimização utilizados no desenvolvimento da abordagem para fornecer um suporte teórico. Construímos a função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica, na qual as restrições de igualdade são tratadas pelo método de Newton, um subconjunto das restrições canalizadas, pelo método de barreira; e as restrições de desigualdade e demais restrições canalizadas, pelo método da função Lagrangiana aumentada. O algoritmo foi baseado na solução de uma seqüência de problemas de minimização irrestrita, parametrizados pelos fatores de barreira e penalidade, e pelos multiplicadores de Lagrange da função Lagrangiana aumentada. Esse algoritmo envolve iterações internas (Newton) e externas (Lagrangiana aumentada e barreira). A cada iteração

externa, os fatores de penalidade e barreira e os multiplicadores de Lagrange da função Lagrangiana aumentada são atualizados. A iteração interna corresponde a um processo para minimização de um problema irrestrito em que os fatores de penalidade e barreira e os multiplicadores de Lagrange da função Lagrangiana aumentada são fixos. As variáveis primais e duais são atualizadas pelos fatores de correção, originados da iteração interna; nessa atualização utilizam-se passos que garantem a não-negatividade das variáveis auxiliares e o sinal dos multiplicadores de Lagrange.

Aplicamos o método ao problema de FPO e realizamos sua implementação computacional. Os resultados numéricos apresentados neste trabalho evidenciam o potencial desta metodologia para a resolução de problemas de PNL e, em particular, para o problema de FPO. O número de iterações do método está diretamente ligado à escolha dos fatores iniciais de barreira e penalidade e seus respectivos parâmetros de correção. Analogamente aos métodos de barreira e penalidade, nele podem ocorrer dificuldades na escolha de tais fatores, influenciando sua convergência.

A matriz Lagrangiana W tem uma estrutura esparsa, característica, que foi explorada na implementação computacional. Verificamos que, em sistemas elétricos reais, o "grau de esparsidade" da matriz W cresce conforme aumentam as dimensões das redes elétricas. Em virtude de sua esparsidade, o armazenamento da matriz Lagrangiana foi feito de forma compacta, isto é, somente os elementos diferentes de zero foram armazenados. Aplicamos a técnica de esparsidade fornecida pela rotina MA28. Essa rotina utiliza uma variação da eliminação de Gauss para sistemas

esparsos e demonstrou um bom desempenho nos testes realizados, obtendo ganho de memória e redução no tempo de processamento.

As contribuições deste trabalho podem ser resumidas em dois aspectos: na área de Matemática contribuímos com o desenvolvimento de uma nova abordagem da função Lagrangiana aumentada e seu método para a resolução de problemas de PNL restritos; na área de Engenharia Elétrica, acrescentamos uma metodologia do tipo primal-dual ao conjunto dos métodos aplicados na resolução do problema de FPO, o qual é de grande interesse para os estudos realizados no planejamento e na programação de operação de sistemas de energia elétrica. Uma vantagem na aplicação deste método é a de não precisarmos de uma solução inicial factível.

A pesquisa desenvolvida leva-nos a uma seqüência de trabalhos futuros enunciados a seguir:

- proposta de novas regras de ajuste nos passos primais e duais utilizados;
- estudo de regras especiais para a inicialização e correção do fator barreira;
- demonstração da convergência do método;
- utilização de outros tipos de função barreira;
- comparação do desempenho do método com o de outros já existentes;
- realização de testes mais elaborados com sistemas elétricos maiores;
- modelagem do problema com a inclusão de outras funções objetivos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARROW, K.J.; GOULD, F.J.; HOWE, S.M. (1973). A General Saddle Point for Constrained Optimization. *Mathematical Programming*, v. 5, n. 1, p. 225-234.

BAPTISTA, E.C.; COSTA, G.R.M. (1998). Uma Abordagem de Otimização para Problemas Não Lineares e Não Convexos. *Anais do 2º SPOLM*, CD-room-10pag.

BAPTISTA, E.C. & COSTA, G.R.M. (1999). A Função Lagrangeana Aumentada com Barreira Logarítmica, *Anais do XXXI SBPO*, p. 367-377.

BAZARAA, M.S.; SHERALI, H.D.; SHETTY, C.M. (1993). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. 2.ed. New York, John Wiley.

BELATI, E.A.B. ; BAPTISTA, E.C.; COSTA, G.R.M.(2001). A New Solution to the Optimal Power Flow, *IEEE Porto Power Tech 2001*, 6 pag. (a ser publicado em 09/2001).

BEN-TAL, A.; ZIBULEVSKY, M. (1997). Penalty/Barrier Multiplier Methods For Convex Programming Problems. *SIAM Journal of Optimization*, v. 7, n. 2, p.347-366.

BERTSEKAS, D.P. (1976a). On Penalty and Multiplier Methods for Constrained Minimization. *SIAM Journal Control and Optimization*,v.14, n. 2, p. 216-235.

BERTSEKAS, D.P. (1976b). Multiplier Methods: A Survey. *Automática*, v. 12, n. 2, p.133-145.

BERTSEKAS, D.P.; LAUER, G.S.; SANDELL, N.R.; POSBERG, T.A.Jr. (1982). Optimal Short Term Scheduling of Large-Scale Power Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. AC-28, p. 1-11.

BERTSEKAS, D.P. (1982). *Constrained Optimization and Lagrange Methods*. 1.ed. Londres, Academic Press.

BERTSEKAS, D.P.; TSENG, P. (1993). On the Convergence of the Exponential Multiplier Method for Convex Programming. *Mathematical Programming*. v. 60, n. 1, p. 1-19.

BOGGS, P.T.; TOLLE, J.W. (1980). Augmented Lagrangians Which Are Quadratic in the Multiplier. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 31, n. 1, p. 17-26.

BOUKARI, D.; FIACCO, A.V. (1995). Survey of Penalty, Exact-Penalty and Multiplier Methods From 1968 to 1993. *Optimization*, v. 32, p.301-334.

BREITFELD, M.G.; SHANNO, D.F. (1996). Computational experience with penalty-barrier methods for nonlinear programming. *Annals of Operations Research*, v. 62, p. 439-463.

CARPENTIER, J. L. (1962). Contribution a L'etude du Dispatching Economique. *Bull-Soc. Fr Elec.*, Ser. B3, p. 431 – 447.

CARROL, C.W. (1961). The Created Response Surface Technique for Optimizing Nonlinear Restrained Systems. *Operations Research*, v. 9, p. 169-184.

CONN, R.A.; GOULD, N.I.M.; TOINT, P.L. (1988). Global Convergence of a Class of Trust Region Algorithms for Optimization with Simple Bounds. *SIAM Journal Numerical Analysis*, v. 25, p. 433 - 460.

CONN, R.A.; GOULD, N.I.M.; TOINT, P.L. (1991). A Globally Convergent Augmented Lagrangian Algorithm for Optimization With General Constraints and Simple Bounds. *SIAM Journal Numerical Analysis*, v. 28, n. 2, p. 545-572.

CONN, A.R.; GOULD, N.; TOINT, P.L. (1997). A Globally Convergent Lagrangian Barrier Algorithm for Optimization With General Inequality Constraints and Simple Bounds. *Mathematics of Computation*, v. 66, n. 217, p. 261 –288.

COSTA, G.R.M. (1990). *O Método Dual-Newton Aplicado ao Fluxo de Carga Ótimo*, Campinas. 235 p. Tese (Doutorado) – FEE/DSCE, Unicamp.

COSTA, G.R.M.; LANGONA, K.; ALVES,D.A. (1996). O método de Newton Modificado Associado à Função Lagrangeana Aumentada para a Resolução do Fluxo de Carga Ótimo. In: XI CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, São Paulo, 1996. *Anais*. v.1, p. 173-178.

COSTA, G.R.M; COSTA, C.E.U; SOUZA, A.M. (2000). Comparative studies of optimization methods for the optimal power flow problem. *Electric Power Systems Research*, v. 56, n. 3, p. 249-254;

COSTA, G.R.M.; COSTA, C.E.U. (2000). Improved Newton method for optimal power flow problem. *Electrical power and Energy Systems*, v. 22, p. 459-462.

COURANT, R. (1943). Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration. *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 49, p. 1-23.

DANTIZIG, G.B. (1948). Programming in a Linear Structure. *Comptroller United States Air Force*, Washington, D.C.

DAVIDON, W.C. (1959). Variable Metric Method for Minimization. *Research and Development*, Report ANL – 5990 (Ref.) U.S. Atomic Energy Commission, Argonne National Laboratories.

DIKIN, I.I. (1967). Iterative solution of problems of linear and quadratic programming. *Soviet Mathematics Doklady*, v. 8, p. 674-675.

DI PILLO, G. A.; GRIPPO, L. (1979). New Class of Augmented Lagrangians in Nonlinear Programming. *SIAM Journal Control and Optimization*, v. 17, n. 5, p.618-628.

DI PILLO, G.; GRIPPO, L. (1982). A New Augmented Lagrangian Function for Inequality Constraints in Nonlinear Programming Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 36, n.4, p.495-519.

DOMMEL, H.W.; TINNEY, W.F. (1968). Optimal Power Flows Solutions. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems.* v. 87, n. 10, p. 1866- 1876.

DOSTAL, Z.; FRIEDLANDER, A.; SANTOS, S.A. (1999). Augmented Lagrangians with Adaptive Precision Control for Quadratic Programming with Equality Constraints. *Computational Optimization and Applications.* v. 14, p. 37-53.

DUFF, I.S.; REIO,J.K. (1979). Some Design Features of a Sparse Matrix Code – Aere Harwell, *ACM Transactions on Mathematical Software.* v. 5, n. 1, p. 18-35.

DUSSAULT, J.P. (1998). Augmented Penalty Algorithms. *IMA Journal of Numerical Analysis*. v. 18, p. 355-372.

EL-BAKRY, A.S.; TAPIA, R.A.; TSUCHIYA, T.; ZHANG, Y. (1996). On the Formulation and Theory of the Newton Interior-Point Method for Nonlinear Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 89, n.3, p. 507-541.

FANG, S.; PUTHENPURA, S. (1993). *Linear Optimization and Extentions: Theory and Algorithms*. New Jersey, Prentice-Hall.

FIACCO, A.V.; McCORMICK, G.P. (1968). *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. New York, John Wiley & Sons.

FIACCO, A.V. (1979). Barrier Methods in Nonlinear Programming, in: *Operations Research Support Methodology- Industrial Engineering Series*, Marcel Dekker. v. 2. New York.p. 377-440.

FIACCO, A.V.; McCORMICK, G.P. (1990). *Nonlinear Programming - Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. Philadelphia. SIAM. (Classics in Applied Mathematics, v. 4).

FLETCHER, R. (1975). Ideal Penalty for Constrained Optimization, *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*. v. 15, n. 3, p. 319-342.

FLETCHER, R. (1985). *Practical Methods of Optimization*. 2.ed. New York, John Wiley & Sons. v. 2.

FRERIS, L.L. (1968). Investigation of the Load-Flow Problem. *Proc. IEE*, v. 115, n. 10, p. 1459-1470.

FRISCH, K. R. (1955). *The Logarithmic Potential Method of Convex Programming.* University Institute of Economics(manuscript). Oslo, Norway.

GILL, P.E.; MURRAY, W.;WRIGHT, M.H.. (1981). *Practical Optimization.* 1. ed. Londres, Academic Press.

GILL, P.E.; MURRAY, W.; SAUNDERS, M.A.; TOMLIN, J.A.; WRIGHT, M.H. (1986). On Projected Newton Barrier Methods for Linear Programming and an Equivalence to Karmarkar's Projective Method. *Mathematical Programming*, v.36, n. 2, p. 183-209.

GLAD, S.T. (1979). Properties of Updating Methods for the Multipliers in Augmented Lagrangians. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v.28, n. 2, p. 135-156.

GOLDFARB, D.; POLYAK, R.; SCHEINBERG, K.; YUZEFOVICH, I. (1999). A modified Barrier-Augmented Lagrangian Method for Constrained Minimization, *Computational Optimization and Applications*. v. 14, p. 55-74.

GONZAGA, C.C. (1989). Algoritmos de Pontos Interiores para Programação Linear. In:17° COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, Rio de Janeiro, IMPA-CNPQ.

GONZAGA, C.C. (1991). Large-Steps Path-Following Method in Linear Programming: Barrier Function Method. *SIAM Journal on Optimization*. v.1, p.268-279.

GONZAGA, C.C. (1992). Path Following Methods for Linear Programming. *Siam Review*, v. 34, n. 2, p. 167-224.

GRANVILLE, S. (1994). Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, p. 136-146.

HAGER, W.W. (1993). Analysis an Implementation of a Dual Algorithm for Constrained Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v.79, n. 3, p.427-462.

HAN, S.P. (1979). Penalty Lagrangian Methods Via a Quasi-Newton Approach. *Mathematics of Operations Research*, v. 4, n. 3, p.291-302.

HESTENES, M.R. (1969). SURVEY PAPER – Multiplier and Gradient Methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 4, n.5, p.303-320.

HIMENBLAU, D.M. (1972). *Applied Nonlinear Programming*. New York, McGraw-Hill.

HUNEALT, M.; GALIANA, F.D. (1991). A Survey of the Optimal Power Flow Literature. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 6, p. 762-770.

KARMARKAR, N. (1984). A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming. *Combinatorics*, v. 4, p. 373-395.

KARMARKAR, N.; RESENDE, M.G.C.; RAMAKRISHNAN, K.G. (1991). An Interior Point Algorithm to Solve Computationally difficult set covering problems. *Mathematical Programming*, v.52, n. 3, p. 597-618.

KREJIK, N.; MARTINEZ, J.M., MELLO, M.; PILLOTTA, E.A. (2000). Validation of an augmented lagrangian algorithm witch a Gauss-Newton Hessian approximation using a set of hard-spheres problems. *Computational Optimization and Applications*, v. 16, n. 3, p. 247-263.

LAUER, G.S.; BERTSEKAS, D.P.; SANDELL, N.R.; POSBERGH, T.A.Jr. (1981). Optimal Solution of Large -Scale Unit Commitment Problems. *IEEE Transactions on Power Systems and Apparatus*, v.101, p. 79-86.

LUCIDI, S. (1988). New Results on a Class of Exact Augmented Lagrangians. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 58, n. 2, p. 259-282.

LUENBERGER, D.G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming*. 2.ed.. California, Addison-Wesley.

MARIA, G.A., FINDLAY,J.A. (1987). A Newton Optimal Power Flow Program for Ontario Hydro SEM. *IEEE Transactions on Power Apparatus Systems*, v. 12, n.3, p.579-584.

MELMAN, A. (1996). Line search procedure in barrier methods for some convex programming problems. *SIAM Journal on Optimization*, v. 6, n. 2, p. 283-298.

MIELE, A.; MOSELEY, P.E.; CRAGG, E.E. (1972). On the Method of Multipliers for Mathematical Programming Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 10, n. 1, p.1- 33.

MIJANGOS, E.; NABONA, N. (2001). On the first-order estimation of multipliers from Kuhn-Tucker systems. *Computers & Operations Research*, v. 28, n. 3, p.243-270.

MOMOH, J.A; EL-HAWARY, M.E.; ADAPA, R. (1999.a). A review of Selected Optimal Power Flow Literature to 1993 – Part I: NonLinear and Quadratic Programming Approaches. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n.1, p.96-104.

MOMOH, J.A; EL-HAWARY, M.E.; ADAPA, R. (1999.b). A review of Selected Optimal Power Flow Literature to 1993 – Part II: Newton, Linear Programming and Interior Point Methods. *IEEE Transactions on Power Systems* , v. 14, n.1, p.105-111.

MONTEIRO, R.D.C.; ADLER, I. (1989a). Interior Path Following Primal-Dual Algorithms - Part I: Linear Programming. *Mathematical Programming*, v. 44, n.1, p. 27-41.

MONTEIRO, R.D.C.; ADLER, I. (1989b). Interior Path Following Primal-Dual Algorithms - Part II: Convex Quadratic Programming. *Mathematical Programming*, v. 44, n. 1, p. 43-66.

MONTEIRO, R.D.C. (1992). On the Continuos Trajectories for a Potential reduction Method for Linear Programming. *Mathematical Programming*, v. 17, n. 1, p.225-253.

MONTICELLI, A. (1983). *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica.* São Paulo, Edgard Blucher Ltda. Cap. 5, p. 75-100.

MONTICELLI, A.; LUI, W.H.E. (1992). Adaptive Movement Penalty Method for Newton Optimal Power Flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.7, n.1, p.334-341.

MURRAY, W. (1971). Analytical Expressions for the Eigenvalues and Eigenvectors of the Hessian Matrices of Barrier and Penalty Functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*,v. 7, n. 3, p. 189-196.

NEJDAWI, I.M.; CLEMENTS, K.A.; DAVIS, P.W. (2000). Na Efficient Interior Point Method for Sequential Quadratic Programming Based Optimal Power Flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 15, n. 4, p. 1179-1183.

POLYAK, R. (1992). Modified barrier functions. *Mathematical Programming*, v. 54, n. 2, p. 177-222.

POWELL, M.J.D. (1969). A Method for Nonlinear Constraints in Minimization Problems. In: FLETCHER, R. *Optimization*, New York, Academic Press, p.283-298.

PSIAKI, M.L.; PARK, K. (1995). Augmented Lagrangian Nonlinear Programming Algorithm That Uses SQP and Trust Region Techniques. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 86, n. 2, p. 311-325.

QUINTANA, V.H.; GOMEZ, A.; MARTINEZ, J.L. (1995). Nonlinear Optimal Power Flows by Logarithmic-Barrier Primal-Dual Algorithm. *IEEE NAPS Meeting.*

QUINTANA, V.H.; TORRES, G.L.; MEDINA-PALOMO, J. (2000). Interior-point methods and their applications to power systems: A classification of publications and software codes. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 15, n. 1, p. 170-176.

RASHED, A.M.H.; KELLY, D.H. (1974). Optimal Load Flow Solution Using Lagrangian Multipliers and the Hessian Matrix. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 93, n. 5, p. 1292-1297.

ROCKAFELLAR, R.T. (1972). *Convex Analysis*. 2. ed. New Jersey, Princeton.

ROCKAFELLAR, R.T. (1973a). A Dual Approach to Solving Nonlinear Programming Problems by Unconstrained Optimization. *Mathematical Programming*, v. 5, p.354-373.

ROCKAFELLAR, R.T. (1973b). The Multiplier Method of Hestenes and Powell Applied to Convex Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 12, n. 6, p. 555-562.

ROCKAFELLAR, R.T. (1974). Augmented Lagrange Multiplier Functions and Duality in Nonconvex Programming. *SIAM Journal of Control*, v. 12, n. 2, p.268-285.

ROCKAFELLAR, R.T. (1993). Lagrange Multipliers and Optimality. *SIAM Review*, v.35, n. 2, p. 183-238.

SANTOS, A. (1986). *O Método da Lagrangeana Aumentada Aplicada ao Fluxo de Carga Ótimo*. Campinas. 166 p. Tese (Doutorado) – FEE/DSCE, Unicamp.

SANTOS, A.; DECKMAN, S.; SOARES, S. (1988). A Dual Lagrangian Approach for Optimal Power Flow. *IEEE Transactions on Power Systems,* v. 3, p. 1020-1025.

SASSON, A.M.; VILORIA, F.; ABOYTES, F. (1973). Optimal Load Flow Solutions Using the Hessian Matrix. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems,* v. 92, p. 31-41.

SHANNO, D.F.; BREITFELD, M.G.; SIMANTIRAKI, E.M. (1996). Implementing Barrier Methods for Nonlinear Programming, in: *Interior Point Methods of Mathematical Programming.* Netherlands. Kluwer Academic Publishers, p. 399-414.

STTOT, B.; ALSAC, O. (1972). Decoupled Newton Load Flow. *IEE e Trans. Power App. Systems,* v. pas 91, p. 1955-1959.

STTOT, B.; ALSAC, O. (1974). Fast Decoupled Load Flow. *IEE e Trans. Power App. Systems,* v. pas 93, p. 859-869.

STOTT B.; ALSAC O.; MARINHO J.L. (1980). The Optimal Power Flow Problem, *In Electric Power Problems: The Mathematical Challenge*, A.M.Erisman et. Al. (editors). SIAM, p. 327-351.

SUN, D.I.; ASHLEY, B.; HUGUES,A.; TINNEY, W.F. (1984). Optimal Power Flow by Newton Approach. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. pas 103, n. 10, p. 2864-2875.

TORRES, G. L.; QUINTANA, V.H.; TORRES, G.L. (1998). Optimal Power Flow in Rectangular Form via an Interior Point Method. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n. 4, p. 1211-1218.

WRIGHT, M. H. (1994). Some properties of the Hessian of the logarithmic barrier function. *Mathematical Programming*, v. 67, p. 265-295.

WRIGHT, M. H. (1995). Why a pure primal Newton barrier step may be infeasible. *SIAM Journal on Optimization*, v. 5, n. 1, p. 1-12.

WRIGHT. S.; JARRE, F. (1999). The role of linear objective functions in barrier methods. *Mathematical programming*, v. 84, p. 357-373.

WU, Y.; DEBS, A.S.; MARSTEN, R.E. (1994). A Direct Nonlinear Predictor Corrector Primal-Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, p. 876-883.

ZANGWILL, W.I. (1967). Nonlinear Programming Via Penalty Functions. *Management Science*, v. 13, p. 344-358.

APÊNDICE 1

BANCO DE DADOS DOS SISTEMAS ELÉTRICOS

Banco de dados do sistema TESTE

```
   1   1    barra1    1000  0.  0.0  0.0-9999 9999       0.0  0.0
   2  -1    barra2    1000  0.  0.0  0.0-9999 9999    -170.  0.0
   3   0    barra3    1000  0.  0.0  0.0              200. 100.
9999
   2       3     3.44838.6206
   3       1     9.756112.195
9999
   1    0.8     1.2
   2    0.8     1.2
   3    0.99    1.01
9999
                900
9999
```

Banco de dados do sistema AEP 14

```
   1   1    barra1    1060  0.  0.0  0.0-9999 9999       0.0  0.0
   2  -1    barra2    1045 -5.  0.0  0.0   -40   50    -18.3 12.7
   3  -1    barra3    1010-13.  0.0  0.0     0   40     94.2 19.0
   4   0    barra4    1019-10.  0.0  0.0                47.8 -3.9
   5   0    barra5    1020-8.8  0.0  0.0                 7.6  1.6
   6  -1    barra6    1070-14.  0.0  0.0    -6   24     11.2  7.5
   7   0    barra7    1062-13.  0.0  0.0                 0.0  0.0
   8  -1    barra8    1090-13.  0.0  0.0    -6   24      0.0  0.0
   9   0    barra9    1056-15.  0.0  0.0                29.5 16.6   19
  10   0    barra10   1051-15.  0.0  0.0                 9.0  5.8
  11   0    barra11   1057-15.  0.0  0.0                 3.5  1.8
```

```
  12   0    barra12   1055-15.  0.0  0.0                    6.1  1.6
  13   0    barra13   1050-15.  0.0  0.0                   13.5  5.8
  14   0    barra14   1036-16.  0.0  0.0                   14.9  5.0
9999
   1       2      1.938 5.917  5.28                              900
   1       5      5.40322.304  4.92                              900
   2       3      4.69919.797  4.38                              900
   2       4      5.81117.632  3.74                              900
   2       5      5.69517.388  3.40                              900
   3       4      6.70117.103  3.46                              900
   4       5      1.335 4.211  1.28                              900
   4       7           20.912       0.9780.9501.050             900
   4       9           55.618       0.9690.9501.050             900
   5       6           25.202       0.9320.9501.050             900
   6      11       9.49819.890                                   900
   6      12      12.29125.581                                   900
   6      13       6.61513.027                                   900
   7       8       0.00117.615                                   900
   7       9            11.001                                   900
   9      10       3.181 8.450                                   900
   9      14      12.71127.038                                   900
  10      11       8.20519.207                                   900
  12      13      22.09219.988                                   900
  13      14      17.09334.802                                   900
9999
        0.95    1.10
9999
                100
9999
```

Banco de dados do sistema AEP 30

```
   1   1 BARRA1 SLACK 1053  .0        -9999 9999       0.    0.
   2  -1 BARRA2 GERA. 1032-.09         -40.   50.     -18.3  12.7
   3   0 BARRA3 CARG. 1018-.14                         2.4   1.2
   4   0 BARRA4 CARG. 1010-.17                         7.6   1.6
   5  -1 BARRA5 C.RE. 1010-.25         -40.   40.     94.2  19.0
   6   0 BARRA6 CARG. 1004-.20                          .0    .0
   7   0 BARRA7 CARG.  998-.23                        22.8  10.9
   8  -1 BARRA8 C.RE. 1010-.21         -10.   40.     30.0  30.0
   9   0 BARRA9 CARG. 1017-.26                          .0    .0
  10   0 BARRA10 CARG 1015-.29                         5.8   2.0  19.
  11  -1 BARRA11 C.RE 1072-.26          -6.   24.       .0    .0
  12   0 BARRA12 CARG 1019-.27                        11.2   7.5
  13  -1 BARRA13 C.RE 1057-.27          -6.   24.       .0    .0
  14   0 BARRA14 CARG 1005-.29                         6.2   1.6
  15   0 BARRA15 CARG 1001-.29                         8.2   2.5
  16   0 BARRA16 CARG 1010-.29                         3.5   1.8
  17   0 BARRA17 CARG 1008-.29                         9.0   5.8
  18   0 BARRA18 CARG  994-.30                         3.2   0.9
  19   0 BARRA19 CARG  992-.31                         9.5   3.4
  20   0 BARRA20 CARG  997-.30                         2.2   0.7
  21   0 BARRA21 CARG 1003-.30                        17.5  11.2
  22   0 BARRA22 CARG 1004-.29                          .0    .0
```

```
  23    0 BARRA23 CARG  994-.30                                    3.2  1.6
  24    0 BARRA24 CARG  994-.30                                    8.7  6.7  4.3
  25    0 BARRA25 CARG 1001-.29                                    .0   .0
  26    0 BARRA26 CARG  983-.30                                    3.5  2.3
  27    0 BARRA27 CARG 1013-.28                                    .0   .0
  28    0 BARRA28 CARG  997-.21                                    .0   .0
  29    0 BARRA29 CARG  993-.31                                    2.4  0.9
  30    0 BARRA30 CARG  982-.32                                    10.6 1.9
9999
   1       2       1.92  5.75  2.64                                    9000
   1       3       4.52 18.52  2.04                                    9000
   2       4       5.70 17.37  1.84                                    9000
   3       4       1.32  3.79  0.42                                    9000
   2       5       4.72 19.83  2.09                                    9000
   2       6       5.81 17.63  1.87                                    9000
   4       6       1.19  4.14  0.45                                    9000
   5       7       4.60 11.60  1.02                                    9000
   6       7       2.67  8.20  0.85                                    9000
   6       8       1.20  4.20  0.45                                    9000
   6       9        .0  20.80      1.0380.9501.05                      9000
   6      10        .0  55.60      0.9560.9501.05                      9000
   9      11       .001 20.80                                          9000
   9      10       .001 11.00                                          9000
   4      12        .0  25.60      1.0150.9501.05                      9000
  12      13        .0  14.00                                          9000
  12      14      12.31 25.59                                          9000
  12      15       6.62 13.04                                          9000
  12      16       9.45 19.87                                          9000
  14      15      22.10 19.97                                          9000
  16      17       8.24 19.23                                          9000
  15      18      10.70 21.85                                          9000
  18      19       6.39 12.92                                          9000
  19      20       3.40  6.80                                          9000
  10      20       9.36 20.90                                          9000
  10      17       3.24  8.45                                          9000
  10      21       3.48  7.49                                          9000
  10      22       7.27 14.99                                          9000
  21      22       1.16  2.36                                          9000
  15      23      10.00 20.20                                          9000
  22      24      11.50 17.90                                          9000
  23      24      13.20 27.00                                          9000
  24      25      18.85 32.92                                          9000
  25      26      25.44 38.00                                          9000
  25      27      10.93 20.87                                          9000
  28      27       0.0  39.60       .9580.9501.05                      9000
  27      29      21.98 41.53                                          9000
  27      30      32.02 60.27                                          9000
  29      30      23.99 45.33                                          9000
   8      28       6.36 20.00  2.14                                    9000
   6      28       1.69  5.99  0.65                                    9000
9999
        0.95    1.1
9999
                100.
9999
```

Banco de dados do sistema AEP 57

1	1	BARRA1.SLAC	1040	.0	0	0	-9999	9999	55.0	17.0	0.	1	.
2	-1	BARRA2.GERA	1010	.0	0	0	-17.	50.	3.0	88.0	0.	1	.
3	-1	BARRA3.GERA	0985	.0	40	0	-10.	60.	41.0	21.0	0.	1	.
4	0	BARRA4.CARG	1000	.0	0	0	0	0	.0	.0	0.	1	.
5	0	BARRA5.CARG	1000	.0	0	0	0	0	13.0	4.0	0.	1	.
6	-1	BARRA6.GERA	980	.0	0	0	-8.	25.	75.0	2.0	0.	1	.
7	0	BARRA7.CARG	1000	.0	0	0	0	0	.0	.0	0.	1	.
8	-1	BARRA8.GERA	1005	.0	450	0	-140.	200.	150.0	22.0	0.	1	.
9	-1	BARRA9.GERA	980	.0	0	0	-3.	9.	121.0	26.0	0.	1	.
10	0	BARRA10.CAR	1000	.0	0	0	0	0	5.0	2.0	0.	1	.
11	0	BARRA11.CAR	1000	.0	0	0	0	0	.0	.0	0.	1	.
12	-1	BARRA12.GER	1015	.0	310	0	-50.	155.	377.0	24.0	0.	1	.
13	0	BARRA13.CAR	1000	.0	0	0	0	0	18.0	2.3	0.	1	.
14	0	BARRA14.CAR	1000	.0	0	0	0	0	10.5	5.3	0.	1	.
15	0	BARRA15.CAR	1000	.0	0	0	0	0	22.0	5.0	0.	1	.
16	0	BARRA16.CAR	1000	.0	0	0	0	0	43.0	3.0	0.	1	.
17	0	BARRA17.CAR	1000	.0	0	0	0	0	42.0	8.0	0.	1	.
18	0	BARRA18.C.R	1000	.0	0	0	0	0	27.2	9.8	10.	1	.
19	0	BARRA19.CAR	1000	.0	0	0	0	0	3.3	0.6	0.	1	.
20	0	BARRA20.CAR	1000	.0	0	0	0	0	2.3	1.0	0.	1	.
21	0	BARRA21.CAR	1000	.0	0	0	0	0	.0	.0	0.	1	.
22	0	BARRA22.CAR	1000	.0	0	0	0	0	.0	.0	0.	1	.
23	0	BARRA23.CAR	1000	.0	0	0	0	0	6.3	2.1	0.	1	.
24	0	BARRA24.CAR	1000	.0	0	0	0	0	.0	.0	0.	1	.
25	0	BARRA25.C.R	1000	.0	0	0	0	0	6.3	3.2	5.9	1	.
26	0	BARRA26.CAR	1000	.0	0	0	0	0	.0	.0	0.	1	.
27	0	BARRA27.CAR	1000	.0	0	0	0	0	9.3	0.5	0.	1	.
28	0	BARRA28.CAR	1000	.0	0	0	0	0	4.6	2.3	0.	1	.
29	0	BARRA29.CAR	1000	.0	0	0	0	0	17.0	2.6	0.	1	.
30	0	BARRA30.CAR	1000	.0	0	0	0	0	3.6	1.8	0.	1	.
31	0	BARRA31.CAR	1000	.0	0	0	0	0	5.8	2.9	0.	1	.
32	0	BARRA32.CAR	1000	.0	0	0	0	0	1.6	0.8	0.	1	.
33	0	BARRA33.CAR	1000	.0	0	0	0	0	3.8	1.9	0.	1	.
34	0	BARRA34.CAR	1000	.0	0	0	0	0	.0	.0	0.	1	.
35	0	BARRA35.CAR	1000	.0	0	0	0	0	6.0	3.0	0.	1	.
36	0	BARRA36.CAR	1000	.0	0	0	0	0	.0	.0	0.	1	.
37	0	BARRA37.CAR	1000	.0	0	0	0	0	0	.0	0.	1	.
38	0	BARRA38.CAR	1000	.0	0	0	0	0	14.0	7.0	0.	1	.
39	0	BARRA39.CAR	1000	.0	0	0	0	0	.0	.0	0.	1	.
40	0	BARRA40.CAR	1000	.0	0	0	0	0	.0	.0	0.	1	.
41	0	BARRA41.CAR	1000	.0	0	0	0	0	6.3	3.0	0.	1	.
42	0	BARRA42.CAR	1000	.0	0	0	0	0	7.1	4.4	0.	1	.
43	0	BARRA43.CAR	1000	.0	0	0	0	0	2.0	1.0	0.	1	.
44	0	BARRA44.CAR	1000	.0	0	0	0	0	12.0	1.8	0.	1	.
45	0	BARRA45.CAR	1000	.0	0	0	0	0	.0	.0	0.	1	.
46	0	BARRA46.CAR	1000	.0	0	0	0	0	.0	.0	0.	1	.
47	0	BARRA47.CAR	1000	.0	0	0	0	0	29.7	11.6	0.	1	.
48	0	BARRA48.CAR	1000	.0	0	0	0	0	.0	.0	0.	1	.
49	0	BARRA49.CAR	1000	.0	0	0	0	0	18.0	8.5	0.	1	.
50	0	BARRA50.CAR	1000	.0	0	0	0	0	21.0	10.5	0.	1	.
51	0	BARRA51.CAR	1000	.0	0	0	0	0	18.0	5.3	0.	1	.
52	0	BARRA52.CAR	1000	.0	0	0	0	0	4.9	2.2	0.	1	.
53	0	BARRA53.C.R	1000	.0	0	0	0	0	20.0	10.0	6.3	1	.
54	0	BARRA54.CAR	1000	.0	0	0	0	0	4.1	1.4	0.	1	.
55	0	BARRA55.CAR	1000	.0	0	0	0	0	6.8	3.4	0.	1	.
56	0	BARRA56.CAR	1000	.0	0	0	0	0	7.6	2.2	0.	1	.

```
  57    0 BARRA57.CAR  1000  .0    0    0    0    0        6.7  2.0    0. 1 .
9999
   1        2        0.83  2.80  6.45
   2        3        2.98  8.50  4.09
   3        4        1.12  3.66  1.90
   4        5        6.25 13.20  1.29
   4        6        4.30 14.80  1.74
   6        7        2.00 10.20  1.38
   6        8        3.39 17.30  2.35
   8        9         .99  5.05  2.74
   9       10        3.69 16.79  2.20
   9       11        2.58  8.48  1.09
   9       12        6.48 29.50  3.86
   9       13        4.81 15.80  2.03
  13       14        1.32  4.34  0.55
  13       15        2.69  8.69  1.15
   1       15        1.78  9.10  4.94
   1       16        4.54 20.60  2.73
   1       17        2.38 10.80  1.43
   3       15        1.62  5.30  2.72
   4       18         .0  43.00   .0  .9780.9001.050              900
   5        6        3.02  6.41  0.62
   7        8        1.39  7.12  0.97
  10       12        2.77 12.62  1.64
  11       13        2.23  7.32  0.94
  12       13        1.78  5.80  3.02
  12       16        1.80  8.13  1.08
  12       17        3.97 17.90  2.38
  14       15        1.71  5.47  0.74
  18       19       46.10 68.50   .0
  19       20       28.30 43.40   .0
  21       20         .0  77.67   .0 1.0430.90 1.05              900
  21       22        7.36 11.70   .0
  22       23        0.99  1.52   .0
  23       24       16.60 25.60  0.42
  24       25         .0  60.22   .0 1.0000.90 1.05              900
  24       26         .0   4.73   .0 1.0430.90 1.05              900
  26       27       16.50 25.40   .0
  27       28        6.18  9.54   .0
  28       29        4.18  5.87   .0
   7       29         .0   6.48   .0 0.9600.90 1.05
  25       30       13.50 20.20   .0
  30       31       32.60 49.70   .0
  31       32       50.70 75.50   .0
  32       33        3.92  3.60   .0
  34       32         .0  95.30   .0 0.9750.9001.05              900
  34       35        5.20  7.80  0.16
  35       36        4.30  5.37  0.08
  36       37        2.90  3.66   .0
  37       38        6.51 10.09  0.01
  37       39        2.39  3.79   .0
  36       40        3.00  4.66   .0
  22       38        1.92  2.95   .0
  11       41         .0  74.90   .0  .9550.90 1.05              900
  41       42       20.70 35.20   .0
  41       43         .0  41.20   .0
  38       44        2.89  5.85  0.10
  15       45         .0  10.42   .0  .9550.90 1.05              900
  14       46         .0   7.35   .0  .90 0.90 1.05              900
```

```
 46      47       2.30  6.80  0.16
 47      48       1.82  2.33   .0
 48      49       8.34 12.90  0.24
 49      50       8.01 12.80   .0
 50      51      13.86 22.00   .0
 10      51        .0   7.12   .0  .93 0.90 1.05            900
 13      49        .0  19.10   .0  .8950.90 1.05            900
 29      52      14.42 18.70   .0
 52      53       7.62  9.84   .0
 53      54      18.78 23.20   .0
 54      55      17.32 22.65   .0
 11      43        .0  15.30   .0  .9580.90 1.05            900
 44      45       6.24 12.42   .02
 40      56        .0 119.50   .0  .9580.9001.05            900
 56      41      55.30 54.90   .0
 56      42      21.25 35.40   .0
 39      57        .0 135.50   .0  .98 0.90 1.05            900
 57      56      17.40 26.00   .0
 38      49      11.50 17.70  0.30
 38      48       3.12  4.82   .0
  9      55        .0  12.05   .0  .94 0.90 1.05
9999
        0.95    1.05
9999
                100.
9999
```

Banco de dados do sistema IEEE 118

```
 12   1 BARRA12      1000      .0      -9999 9999        .0   .0
  2   0 BARRA2       1000      .0                      20.0  9.0
  3   0 BARRA3       1000      .0                      39.0 10.0
  4  -1 BARRA4       1000      .0       -50.  50.      39.0 12.0
  5   0 BARRA5       1000      .0                        .0   .0  40.
  6  -1 BARRA6       1000      .0       -50.  50.      52.0 22.0
  7   0 BARRA7       1000      .0                      19.0  2.0
  8  -1 BARRA8       1000      .0       -50.  50.      28.0  0.0
  9   0 BARRA9       1000      .0                        .0   .0
 10  -1 BARRA10      1000      .0      -250. 250.     -450.   .0
 11   0 BARRA11      1000      .0                      70.0 23.0
  1  -1 BARRA1       1000      .0       -50.  50.      51.0 27.0
 13   0 BARRA13      1000      .0                      34.0 16.0
 14   0 BARRA14      1000      .0                      14.0  1.0
 15  -1 BARRA15      1000      .0       -50.  50.      90.0 30.0
 16   0 BARRA16      1000      .0                      25.0 10.0
 17   0 BARRA17      1000      .0                      11.0  3.0
 18  -1 BARRA18      1000      .0       -50.  50.      60.0 34.0
 19  -1 BARRA19      1000      .0       -50. 115.      45.0 25.0
 20   0 BARRA20      1000      .0                      18.0  3.0
 21   0 BARRA21      1000      .0                      14.0  8.0
 22   0 BARRA22      1000      .0                      10.0  5.0
 23   0 BARRA23      1000      .0                       7.0  3.0
 24   0 BARRA24      1000      .0                      13.0   .0
```

```
25  -1 BARRA25      1000      .0     -250. 250.      -220.    .0
26  -1 BARRA26      1000      .0     -250. 250.      -314.    .0
27  -1 BARRA27      1000      .0      -50.  50.       71.0 13.0
28   0 BARRA28      1000      .0                      17.0  7.0
29   0 BARRA29      1000      .0                      24.0  4.0
30   0 BARRA30      1000      .0                       0.0  0.0
31  -1 BARRA31      1000      .0      -50.  50.       36.0 27.0
32  -1 BARRA32      1000      .0      -50. 100.       59.0 23.0
33   0 BARRA33      1000      .0                      23.0  9.0
34   0 BARRA34      1000      .0                      59.0 26.013.99
35   0 BARRA35      1000      .0                      33.0  9.0
36  -1 BARRA36      1000      .0      -50.  50.       31.0 17.0
37   0 BARRA37      1000      .0                        .0   .0 25.
38   0 BARRA38      1000      .0                        .0   .0
39   0 BARRA39      1000      .0                      27.0 11.0
40  -1 BARRA40      1000      .0      -50. 150.       66.0 23.0
41   0 BARRA41      1000      .0                      37.0 10.0
42  -1 BARRA42      1000      .0      -50.  50.       96.0 23.0
43   0 BARRA43      1000      .0                      18.0  7.0
44   0 BARRA44      1000      .0                      16.0  8.0 10.
45   0 BARRA45      1000      .0                      53.0 22.0 10.
46  -1 BARRA46      1000      .0      -50.  50.        9.0 10.0 10.
47   0 BARRA47      1000      .0                      34.0   .0
48   0 BARRA48      1000      .0                      20.0 11.015.04
49  -1 BARRA49      1000      .0     -250. 250.      -117. 30.0
50   0 BARRA50      1000      .0                      17.0  4.0
51   0 BARRA51      1000      .0                      17.0  8.0
52   0 BARRA52      1000      .0                      18.0  5.0
53   0 BARRA53      1000      .0                      23.0 11.0
54  -1 BARRA54      1000      .0      -50. 150.       65.0 32.0
55  -1 BARRA55      1000      .0      -50. 150.       63.0 22.0
56  -1 BARRA56      1000      .0      -50. 150.       84.0 18.0
57   0 BARRA57      1000      .0                      12.0  3.0
58   0 BARRA58      1000      .0                      12.0  3.0
59  -1 BARRA59      1000      .0      -50.  50.      122.0113.0
60   0 BARRA60      1000      .0                      78.0  3.0
61  -1 BARRA61      1000      .0     -250. 250.      -160.    .0
62  -1 BARRA62      1000      .0      -50.  50.       77.0 14.0
63   0 BARRA63      1000      .0                        .0   .0
64   0 BARRA64      1000      .0                        .0   .0
65  -1 BARRA65      1000      .0     -250. 250.      -391.    .0
66  -1 BARRA66      1000      .0     -250. 250.      -353. 18.0
67   0 BARRA67      1000      .0                      28.0  7.0
68   0 BARRA68      1000      .0                        .0   .0
69  -1 BARRA69      1000      .0     -250. 250.      -329.  0.
70  -1 BARRA70      1000      .0      -50.  50.       66.0 20.0
71   0 BARRA71      1000      .0                        .0   .0
72  -1 BARRA72      1000      .0      -50.  50.       12.0   .0
73  -1 BARRA73      1000      .0      -50.  50.        6.0   .0
74  -1 BARRA74      1000      .0      -50.  80.       68.0 27.0 12.
75   0 BARRA75      1000      .0                      47.0 11.0
76  -1 BARRA76      1000      .0      -50. 100.       68.0 36.0
77  -1 BARRA77      1000      .0      -50.  50.       61.0 28.0
78   0 BARRA78      1000      .0                      71.0 26.0
79   0 BARRA79      1000      .0                      39.0 32.0 20.
80  -1 BARRA80      1000      .0     -250. 250.      -347. 26.0
81   0 BARRA81      1000      .0                        .0   .0
82   0 BARRA82      1000      .0                      54.0 27.0 20.
83   0 BARRA83      1000      .0                      20.0 10.0 10.
```

```
 84    0 BARRA84       1000       .0                       11.0  7.0
 85   -1 BARRA85       1000       .0        -50.   80.     24.0 15.0
 86    0 BARRA86       1000       .0                       21.0 10.0
 87   -1 BARRA87       1000       .0       -250.  250.     -4.0   .0
 88    0 BARRA88       1000       .0                       48.0 10.0
 89   -1 BARRA89       1000       .0       -250.  250.     -607.  .0
 90   -1 BARRA90       1000       .0        -50.  100.    163.0 42.0
 91   -1 BARRA91       1000       .0        -50.   50.     10.0   .0
 92   -1 BARRA92       1000       .0        -50.  100.     65.0 10.0
 93    0 BARRA93       1000       .0                       12.0  7.0
 94    0 BARRA94       1000       .0                       30.0 16.0
 95    0 BARRA95       1000       .0                       42.0 31.0
 96    0 BARRA96       1000       .0                       38.0 15.0
 97    0 BARRA97       1000       .0                       15.0  9.0
 98    0 BARRA98       1000       .0                       34.0  8.0
 99   -1 BARRA99       1000       .0        -50.   50.     42.0   .0
100   -1 BARRA100      1000       .0       -250.  250.     -215. 18.0
101    0 BARRA101      1000       .0                       22.0 15.0
102    0 BARRA102      1000       .0                        5.0  3.0
103   -1 BARRA103      1000       .0       -250.  250.    -17.0 16.0
104   -1 BARRA104      1000       .0        -50.    0.     38.0 25.0
105   -1 BARRA105      1000       .0        -50.   20.     31.0 26.0 20.
106    0 BARRA106      1000       .0                       43.0 16.0
107   -1 BARRA107      1000       .0        -50.   60.     50.0 12.0  6.
108    0 BARRA108      1000       .0                        2.0  1.0
109    0 BARRA109      1000       .0                        8.0  3.0
110   -1 BARRA110      1000       .0        -50.    0.     39.0 30.0  6.
111   -1 BARRA111      1000       .0       -250.    0.    -36.0   .0
112   -1 BARRA112      1000       .0        -50.   50.     68.0 13.0
113   -1 BARRA113      1000       .0        -50.    0.      6.0   .0
114    0 BARRA114      1000       .0                        8.0  3.0
115    0 BARRA115      1000       .0                       22.0  7.0
116   -1 BARRA116      1000       .0        -50.    0.      0.0   .0
117    0 BARRA117      1000       .0                       20.0  8.0
118    0 BARRA118      1000       .0                       33.0 15.0
9999
   1      2      3.03   9.99   2.540                     900.   900.0
   1      3      1.29   4.24   1.082                     900.   900.0
   4      5      0.176  0.798  0.210                     900.   900.0
   3      5      2.41  10.80   2.840                     900.   900.0
   5      6      1.19   5.40   1.426                     900.   900.0
   6      7      0.459  2.08   0.550                     900.   900.0
   8      9      0.244  3.05 116.62                      900.   900.0
   8      5      0.00   2.67   0.000 1.0   .95 1.05      900.   900.0
   9     10      0.258  3.22 123.00                      900.   900.0
   4     11      2.09   6.88   1.748                     900.   900.0
   5     11      2.03   6.82   1.738                     900.   900.0
  11     12      0.595  1.96   0.502                     900.   900.0
   2     12      1.87   6.16   1.572                     900.   900.0
   3     12      4.84  16.00   4.060                     900.   900.0
   7     12      0.862  3.40   0.874                     900.   900.0
  11     13      2.225  7.31   1.876                     900.   900.0
  12     14      2.15   7.07   1.816                     900.   900.0
  13     15      7.44  24.44   6.268                     900.   900.0
  14     15      5.95  19.50   5.020                     900.   900.0
  12     16      2.12   8.34   2.140                     900.   900.0
  15     17      1.32   4.37   4.440                     900.   900.0
  16     17      4.54  18.01   4.660                     900.   900.0
  17     18      1.23   5.05   1.298                     900.   900.0
```

18	19	1.119	4.93	1.142			900.	900.0
19	20	2.52	11.70	2.980			900.	900.0
15	19	1.20	3.94	1.010			900.	900.0
20	21	1.83	8.49	2.160			900.	900.0
21	22	2.09	9.70	2.460			900.	900.0
22	23	3.42	15.90	4.040			900.	900.0
23	24	1.35	4.92	4.980			900.	900.0
23	25	1.56	8.00	8.640			900.	900.0
26	25	0.00	3.82	0.000	1.0	.95 1.05	900.	900.0
25	27	3.18	16.30	17.640			900.	900.0
27	28	1.913	8.55	2.160			900.	900.0
28	29	2.37	9.43	2.380			900.	900.0
30	17	0.00	3.88	0.000	1.0	.95 1.05	900.	900.0
8	30	.431	5.04	51.400			900.	900.0
26	30	.799	8.60	91.800			900.	900.0
17	31	4.74	15.63	3.990			900.	900.0
29	31	1.08	3.31	0.830			900.	900.0
23	32	3.17	11.53	11.730			900.	900.0
31	32	2.98	9.85	2.510			900.	900.0
27	32	2.29	7.55	1.926			900.	900.0
15	33	3.80	12.44	3.194			900.	900.0
19	34	7.52	24.70	6.320			900.	900.0
35	36	.224	1.02	.268			900.	900.0
35	37	1.10	4.97	1.318			900.	900.0
33	37	4.15	14.20	3.660			900.	900.0
34	36	.871	2.68	0.568			900.	900.0
34	37	.256	0.94	0.988			900.	900.0
38	37	0.00	3.75	0.000	1.0	.95 1.05	900.	900.0
37	39	3.21	10.60	2.700			900.	900.0
37	40	5.93	16.80	4.200			900.	900.0
30	38	.464	5.40	42.200			900.	900.0
39	40	1.84	6.05	1.552			900.	900.0
40	41	1.45	4.87	1.222			900.	900.0
40	42	5.55	18.30	4.660			900.	900.0
41	42	4.10	13.50	3.440			900.	900.0
43	44	6.08	24.54	6.068			900.	900.0
34	43	4.13	16.81	4.226			900.	900.0
44	45	2.24	9.01	2.240			900.	900.0
45	46	4.00	13.56	3.320			900.	900.0
46	47	3.80	12.70	3.160			900.	900.0
46	48	6.01	18.90	4.720			900.	900.0
47	49	1.91	6.25	1.604			900.	900.0
42	49	3.57	16.15	17.200			900.	900.0
45	49	6.84	18.60	4.440			900.	900.0
48	49	1.79	5.05	1.258			900.	900.0
49	50	2.67	7.52	1.874			900.	900.0
49	51	4.86	13.70	3.420			900.	900.0
51	52	2.03	5.88	1.396			900.	900.0
52	53	4.05	16.35	4.058			900.	900.0
53	54	2.63	12.20	3.110			900.	900.0
49	54	3.99	14.51	14.690			900.	900.0
54	55	1.69	7.07	2.020			900.	900.0
54	56	.275	.955	0.732			900.	900.0
55	56	.488	1.51	0.374			900.	900.0
56	57	3.43	9.66	2.420			900.	900.0
50	57	4.74	13.40	3.320			900.	900.0
56	58	3.43	9.66	2.420			900.	900.0
51	58	2.55	7.19	1.788			900.	900.0
54	59	5.03	22.93	5.980			900.	900.0

56	59	4.07	12.24	11.050			900.	900.0
55	59	4.739	21.58	5.646			900.	900.0
59	60	3.17	14.50	3.760			900.	900.0
59	61	3.28	15.00	3.880			900.	900.0
60	61	.264	1.35	1.456			900.	900.0
60	62	1.23	5.61	1.468			900.	900.0
61	62	.824	3.76	0.980			900.	900.0
63	59	0.00	3.86	0.000	1.0	.95 1.05	900.	900.0
63	64	.172	2.00	21.60			900.	900.0
64	61	0.00	2.68	0.000	1.0	.95 1.05	900.	900.0
38	65	.901	9.86	114.6			900.	900.0
64	65	.269	3.02	38.00			900.	900.0
49	66	0.90	4.59	4.960			900.	900.0
62	66	4.82	21.80	5.780			900.	900.0
62	67	2.58	11.70	3.100			900.	900.0
65	66	0.00	3.70	0.000	1.0	.95 1.05	900.	900.0
66	67	2.24	10.15	2.682			900.	900.0
65	68	.138	1.60	63.80			900.	900.0
47	69	8.44	27.78	7.092			900.	900.0
49	69	9.85	32.40	8.280			900.	900.0
68	69	0.00	3.70	0.000	1.0	.95 1.05	900.	900.0
69	70	3.00	12.70	12.20			900.	900.0
24	70	10.22	141.15	10.198			900.	900.0
70	71	.882	3.55	0.878			900.	900.0
24	72	4.88	19.60	4.880			900.	900.0
71	72	4.46	18.00	4.444			900.	900.0
71	73	.866	4.54	1.178			900.	900.0
70	74	4.01	13.23	3.368			900.	900.0
70	75	4.28	14.10	3.600			900.	900.0
69	75	4.05	12.20	12.40			900.	900.0
74	75	1.23	4.06	1.034			900.	900.0
76	77	4.44	14.80	3.680			900.	900.0
69	77	3.09	10.10	10.38			900.	900.0
75	77	6.01	19.99	4.978			900.	900.0
77	78	.376	1.24	1.264			900.	900.0
78	79	.546	2.44	0.648			900.	900.0
77	80	1.09	3.32	7.000			900.	900.0
79	80	1.56	7.04	1.870			900.	900.0
68	81	.175	2.02	80.80			900.	900.0
81	80	0.00	3.70	0.000	1.0	.95 1.05	900.	900.0
77	82	2.98	8.53	8.174			900.	900.0
82	83	1.12	3.665	3.796			900.	900.0
83	84	6.25	13.20	2.580			900.	900.0
83	85	4.30	14.80	3.480			900.	900.0
84	85	3.02	6.41	1.234			900.	900.0
85	86	3.50	12.30	2.760			900.	900.0
86	87	2.828	20.74	4.450			900.	900.0
85	88	2.00	10.20	2.760			900.	900.0
85	89	2.39	17.30	4.700			900.	900.0
88	89	1.39	7.12	1.934			900.	900.0
89	90	1.63	6.52	15.880			900.	900.0
90	91	2.54	8.36	2.140			900.	900.0
89	92	0.80	3.83	9.620			900.	900.0
91	92	3.87	12.72	3.268			900.	900.0
92	93	2.58	8.48	2.180			900.	900.0
92	94	4.81	15.80	4.060			900.	900.0
93	94	2.23	7.32	1.876			900.	900.0
94	95	1.32	4.34	1.110			900.	900.0
80	96	3.56	18.20	4.940			900.	900.0

```
 82      96      1.62  5.30  5.440
 94      96      2.69  8.69  2.300
 80      97      1.83  9.34  2.540
 80      98      2.38 10.80  2.860
 80      99      4.54 20.60  5.460
 92     100      6.48 29.50  7.720
 94     100      1.78  5.80  6.040
 95      96      1.71  5.47  1.474
 96      97      1.73  8.85  2.400
 98     100      3.97 17.90  4.760
 99     100      1.80  8.13  2.160
100     101      2.77 12.62  3.280
 92     102      1.23  5.59  1.464
101     102      2.46 11.20  2.840
100     103      1.60  5.25  5.360
100     104      4.51 20.40  5.410
103     104      4.66 15.84  4.070
103     105      5.35 16.25  4.080
100     106      6.05 22.90  6.200
104     105      .994  3.78  0.986
105     106      1.40  5.47  1.434
105     107      5.30 18.30  4.720
105     108      2.61  7.03  1.844
106     107      5.30 18.30  4.720
108     109      1.05  2.88  0.760
103     110      3.90618.13  4.610
109     110      2.78  7.62  2.020
110     111      2.20  7.55  2.000
110     112      2.47  6.40  6.200
 17     113      .913  3.01  0.768
 32     113      6.15 20.30  5.180
 32     114      1.35  6.12  1.628
 27     115      1.64  7.41  1.972
114     115      0.23  1.04  0.276
 68     116      .034  .405  16.40
 12     117      3.29 14.00  3.580
 75     118      1.45  4.81  1.198
 76     118      1.64  5.44  1.356
9999
        0.90    1.1
9999
                900
9999
```

```
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
900.  900.0
```

APÊNDICE 2

ESTADO FINAL DOS SISTEMAS ELÉTRICOS

Estado final do sistema AEP 14

CONVERGENCIA EM 5 ITERACOES

ESTADO DO SISTEMA						FLUXOS NAS LINHAS		
BARRA	TP	NOME	TENSAO	ANG.	MW	MVAR	BARRA	MW	MVAR
1	SL	barra1	1.0736	0.00	-232.1	1.6	2	156.39	-6.14
							5	75.67	4.58
2	CR	barra2	1.0506	-4.74	-18.3	-7.3	1	-152.27	12.75
							3	73.16	1.66
							4	56.09	-4.64
							5	41.32	-2.50
		REAT.GER.= 20.0 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -40.]							
3	CR	barra3	1.0194	-12.40	94.2	-5.7	2	-70.87	3.28
							4	-23.33	2.47
		REAT.GER.= 24.7 [LIMITES:MAX= 40. MIN= 0.]							
4	CG	barra4	1.0284	-10.07	47.8	-3.9	2	-54.43	5.63
							3	23.69	-5.17
							5	-62.35	12.20
							7	29.07	-8.89
							9	16.23	0.13
5	CG	barra5	1.0316	-8.56	7.6	1.6	1	-72.96	1.15
							2	-40.44	1.50
							4	62.86	-11.94
							6	42.94	7.68

6	CR	barra6	1.0680	-14.47	11.2	-11.2		
							5	-42.94	-3.18
							11	6.64	4.19
							12	7.71	2.60
							13	17.39	7.54
	REAT.GER.=		18.7	[LIMITES:MAX=	24.	MIN=	-6.]		
7	CG	barra7	1.0566	-13.30	0.0	0.0		
							4	-29.07	10.72
							8	0.00	-15.14
							9	29.07	4.42
8	CR	barra8	1.0819	-13.30	0.0	-15.5		
							7	0.00	15.50
	REAT.GER.=		15.5	[LIMITES:MAX=	24.	MIN=	-6.]		
9	CG	barra9	1.0525	-14.95	29.5	16.6		
							4	-16.23	1.25
							7	-29.07	-3.57
							10	5.94	3.58
							14	9.86	3.19
	CAP/REAT					21.0			
10	CG	barra10	1.0478	-15.15	9.0	5.8		
							9	-5.92	-3.54
							11	-3.08	-2.26
11	CG	barra11	1.0544	-14.94	3.5	1.8		
							6	-6.59	-4.09
							10	3.09	2.29
12	CG	barra12	1.0530	-15.31	6.1	1.6		
							6	-7.64	-2.45
							13	1.54	0.85
13	CG	barra13	1.0482	-15.37	13.5	5.8		
							6	-17.18	-7.13
							12	-1.53	-0.85
							14	5.22	2.17
14	CG	barra14	1.0326	-16.14	14.9	5.0		
							9	-9.73	-2.93
							13	-5.17	-2.07

DADOS DOS TRANSFORMADORES DE TAP VARIAVEL

BARRA INICIAL	BARRA FINAL	TAP DO TRANSFORMADOR ATUAL	MINIMO	MAXIMO
4	7	0.992	0.950	1.050
4	9	0.980	0.950	1.050
5	6	0.953	0.950	1.050

Estado final do sistema AEP 30

CONVERGENCIA EM 4 ITERACOES

ESTADO DO SISTEMA						FLUXOS NAS LINHAS		
BARRA	TP	NOME	TENSAO	ANG.	MW	MVAR	BARRA	MW	MVAR
1	SL	BARRA1 SLACK	1.0612	0.00	-261.0	15.2	2	177.55	-19.00
							3	83.42	3.85
2	CR	BARRA2 GERA.	1.0433	-5.47	-18.3	-31.1	1	-172.12	32.33
							4	45.49	-0.11
							5	83.04	0.86
							6	61.89	-2.03
		REAT.GER.= 43.8 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -40.]							
3	CG	BARRA3 CARG.	1.0271	-8.03	2.4	1.2	1	-80.62	5.41
							4	78.22	-6.61
4	CG	BARRA4 CARG.	1.0198	-9.70	7.6	1.6	2	-44.41	1.46
							3	-77.45	8.38
							6	71.66	-10.48
							12	42.60	-0.96
5	CR	BARRA5 C.RE.	1.0142	-14.37	94.2	-21.0	2	-80.04	9.49
							7	-14.16	11.49
		REAT.GER.= 40.0 [LIMITES:MAX= 40. MIN= -40.]							
6	CG	BARRA6 CARG.	1.0160	-11.41	0.0	0.0	2	-59.85	6.25
							4	-71.06	12.10
							7	37.47	-1.00
							8	29.67	-8.77
							9	29.14	-17.64
							10	15.65	7.33
							28	18.97	1.73
7	CG	BARRA7 CARG.	1.0071	-13.13	22.8	10.9	5	14.31	-12.15
							6	-37.11	1.25
8	CR	BARRA8 C.RE.	1.0162	-12.15	30.0	-10.0	6	-29.56	8.69
							28	-0.44	1.29
		REAT.GER.= 40.0 [LIMITES:MAX= 40. MIN= -10.]							
9	CG	BARRA9 CARG.	1.0199	-14.65	0.0	0.0	6	-29.14	19.98
							10	29.14	2.57
							11	0.00	-22.56

10	CG BARRA10 CARG	1.0176 -16.42	5.8	2.0		
					6	-15.65 -5.72
					9	-29.14 -1.67
					17	6.01 5.73
					20	9.44 4.31
					21	15.87 10.26
					22	7.67 4.76
	CAP/REAT			19.7		
11	CR BARRA11 C.RE	1.0659 -14.65	0.0	-23.6		
					9	0.00 23.57
	REAT.GER.= 23.6 [LIMITES:MAX= 24. MIN= -6.]					
12	CG BARRA12 CARG	1.0236 -15.67	11.2	7.5		
					4	-42.60 5.43
					13	0.00 -23.01
					14	7.64 2.20
					15	17.20 5.85
					16	6.56 2.04
13	CR BARRA13 C.RE	1.0550 -15.67	0.0	-23.7		
					12	0.00 23.71
	REAT.GER.= 23.7 [LIMITES:MAX= 24. MIN= -6.]					
14	CG BARRA14 CARG	1.0090 -16.60	6.2	1.6		
					12	-7.57 -2.04
					15	1.37 0.44
15	CG BARRA15 CARG	1.0052 -16.70	8.2	2.5		
					12	-16.99 -5.44
					14	-1.36 -0.44
					18	5.61 1.03
					23	4.54 2.35
16	CG BARRA16 CARG	1.0136 -16.28	3.5	1.8		
					12	-6.51 -1.95
					17	3.01 0.15
17	CG BARRA17 CARG	1.0109 -16.60	9.0	5.8		
					10	-5.99 -5.67
					16	-3.01 -0.13
18	CG BARRA18 CARG	0.9970 -17.34	3.2	0.9		
					15	-5.58 -0.95
					19	2.38 0.05
19	CG BARRA19 CARG	0.9954 -17.52	9.5	3.4		
					18	-2.38 -0.05
					20	-7.12 -3.35
20	CG BARRA20 CARG	1.0002 -17.30	2.2	0.7		
					10	-9.34 -4.10
					19	7.14 3.40
21	CG BARRA21 CARG	1.0046 -16.89	17.5	11.2		
					10	-15.75 -10.00
					22	-1.75 -1.20
22	CG BARRA22 CARG	1.0051 -16.87	0.0	0.0		
					10	-7.61 -4.64
					21	1.75 1.20
					24	5.86 3.44

23	CG BARRA23 CARG	0.9959 -17.09	3.2	1.6		
					15	-4.52 -2.30
					24	1.32 0.70
24	CG BARRA24 CARG	0.9923 -17.25	8.7	6.7		
					22	-5.81 -3.36
					23	-1.31 -0.69
					25	-1.58 1.59
	CAP/REAT			4.2		
25	CG BARRA25 CARG	0.9901 -16.77	0.0	0.0		
					24	1.59 -1.57
					26	3.55 2.37
					27	-5.14 -0.80
26	CG BARRA26 CARG	0.9719 -17.21	3.5	2.3		
					25	-3.50 -2.30
27	CG BARRA27 CARG	0.9975 -16.20	0.0	0.0		
					25	5.17 0.86
					28	-18.47 -4.22
					29	6.20 1.68
					30	7.10 1.68
28	CG BARRA28 CARG	1.0117 -12.02	0.0	0.0		
					6	-18.91 -2.19
					8	0.45 -3.48
					27	18.47 5.66
29	CG BARRA29 CARG	0.9771 -17.49	2.4	0.9		
					27	-6.11 -1.51
					30	3.71 0.61
30	CG BARRA30 CARG	0.9653 -18.42	10.6	1.9		
					27	-6.93 -1.36
					29	-3.67 -0.54

DADOS DOS TRANSFORMADORES DE TAP VARIAVEL

BARRA INICIAL	BARRA FINAL	TAP DO TRANSFORMADOR ATUAL	MINIMO	MAXIMO
6	9	1.033	0.950	1.050
6	10	0.963	0.950	1.050
4	12	1.004	0.950	1.050
28	27	0.995	0.950	1.050

Estado final do sistema AEP 57

CONVERGENCIA EM 10 ITERACOES

ESTADO DO SISTEMA						FLUXOS NAS LINHAS		
BARRA	TP	NOME	TENSAO	ANG.	MW	MVAR	BARRA	MW	MVAR
1	SL	BARRA1.SLAC	1.0374	0.00	-423.3	-85.8	2	101.90	58.19
							15	149.13	28.55
							16	79.13	-2.88
							17	93.20	1.92
2	CR	BARRA2.GERA	1.0128	-1.28	3.0	73.8	1	-100.80	-61.28
							3	97.80	-12.57
		REAT.GER.= 14.2 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -17.]							
3	CR	BARRA3.GERA	0.9965	-6.18	1.0	-13.0	2	-94.99	16.46
							4	59.46	0.43
							15	34.53	-3.84
		REAT.GER.= 34.0 [LIMITES:MAX= 60. MIN= -10.]							
4	CG	BARRA4.CARG	0.9895	-7.44	0.0	0.0	3	-59.06	-1.00
							5	14.57	-2.23
							6	14.93	-2.29
							18	29.56	5.52
5	CG	BARRA5.CARG	0.9827	-8.63	13.0	4.0	4	-14.43	1.26
							6	1.43	-5.26
6	CR	BARRA6.GERA	0.9855	-8.77	75.0	-4.4	4	-14.83	0.94
							5	-1.43	4.68
							7	-16.30	2.94
							8	-42.44	-4.11
		REAT.GER.= 6.4 [LIMITES:MAX= 25. MIN= -8.]							
7	CG	BARRA7.CARG	0.9852	-7.75	0.0	0.0	6	16.36	-3.98
							8	-79.49	-14.32
							29	63.13	18.30
8	CR	BARRA8.GERA	1.0079	-4.59	-300.0	-39.7	6	43.07	4.99
							7	80.43	18.13
							9	176.51	16.62
		REAT.GER.= 61.7 [LIMITES:MAX= 200. MIN= -140.]							
9	CR	BARRA9.GERA	0.9854	-9.64	121.0	18.9	8	-173.44	-3.70
							10	17.53	-7.73
							11	12.75	2.19
							12	2.56	-15.23
							13	1.80	-2.57
							55	17.80	8.10
		REAT.GER.= 7.1 [LIMITES:MAX= 9. MIN= -3.]							

10	CG BARRA10.CAR	0.9907	-11.51	5.0	2.0		
						9	-17.40 6.19
						12	-18.16 -22.71
						51	30.56 14.52
11	CG BARRA11.CAR	0.9798	-10.24	0.0	0.0		
						9	-12.70 -3.10
						13	-10.88 -6.87
						41	9.03 4.16
						43	14.55 5.81
12	CR BARRA12.GER	1.0238	-10.56	67.0	-128.0		
						9	-2.43 11.90
						10	18.39 22.09
						13	-1.41 63.90
						16	-33.25 14.90
						17	-48.29 15.26
	REAT.GER.= 152.0 [LIMITES:MAX= 155. MIN= -50.]						
13	CG BARRA13.CAR	0.9871	-9.85	18.0	2.3		
						9	-1.80 0.61
						11	10.92 6.08
						12	2.14 -64.58
						14	-9.77 26.55
						15	-47.77 9.36
						49	28.27 19.67
14	CG BARRA14.CAR	0.9766	-9.39	10.5	5.3		
						13	9.88 -26.72
						15	-67.44 -6.17
						46	47.06 27.59
15	CG BARRA15.CAR	0.9924	-7.26	22.0	5.0		
						1	-145.29 -14.01
						3	-34.34 1.79
						13	48.42 -8.37
						14	68.26 8.08
						45	40.94 7.51
16	CG BARRA16.CAR	1.0178	-8.92	43.0	3.0		
						1	-76.49 11.98
						12	33.49 -14.98
17	CG BARRA17.CAR	1.0178	-5.44	42.0	8.0		
						1	-91.27 5.30
						12	49.27 -13.30
18	CG BARRA18.C.R	1.0098	-15.01	27.2	9.8		
						4	-29.56 -1.55
						19	2.36 1.94
	CAP/REAT				10.2		
19	CG BARRA19.CAR	0.9859	-15.43	3.3	0.6		
						18	-2.31 -1.88
						20	-0.99 1.28
20	CG BARRA20.CAR	0.9831	-14.96	2.3	1.0		
						19	0.99 -1.27
						21	-3.29 0.27
21	CG BARRA21.CAR	1.0120	-13.53	0.0	0.0		
						20	3.29 -0.19
						22	-3.29 0.19

22	CG BARRA22.CAR	1.0142 -13.31	0.0	0.0		
					21	3.30 -0.17
					23	8.47 1.94
					38	-11.77 -1.77
23	CG BARRA23.CAR	1.0131 -13.37	6.3	2.1		
					22	-8.46 -1.93
					24	2.16 -0.17
24	CG BARRA24.CAR	1.0094 -13.67	0.0	0.0		
					23	-2.15 -0.25
					25	14.47 4.25
					26	-12.32 -4.01
25	CG BARRA25.C.R	1.0367 -18.69	6.3	3.2		
					24	-14.47 -2.91
					30	8.17 6.05
	CAP/REAT			6.3		
26	CG BARRA26.CAR	0.9641 -13.35	0.0	0.0		
					24	12.32 4.08
					27	-12.32 -4.08
27	CG BARRA27.CAR	0.9962 -11.88	9.3	0.5		
					26	12.62 4.54
					28	-21.92 -5.04
28	CG BARRA28.CAR	1.0148 -10.87	4.6	2.3		
					27	22.23 5.53
					29	-26.83 -7.83
29	CG BARRA29.CAR	1.0305 -10.19	17.0	2.6		
					7	-63.13 -15.41
					28	27.15 8.27
					52	18.98 4.54
30	CG BARRA30.CAR	1.0143 -19.14	3.6	1.8		
					25	-8.04 -5.86
					31	4.44 4.06
31	CG BARRA31.CAR	0.9802 -19.65	5.8	2.9		
					30	-4.32 -3.88
					32	-1.48 0.98
32	CG BARRA32.CAR	0.9804 -18.69	1.6	0.8		
					31	1.49 -0.96
					33	3.81 1.91
					34	-6.90 -1.75
33	CG BARRA33.CAR	0.9782 -18.72	3.8	1.9		
					32	-3.80 -1.90
34	CG BARRA34.CAR	0.9713 -14.60	0.0	0.0		
					32	6.90 2.28
					35	-6.90 -2.28
35	CG BARRA35.CAR	0.9768 -14.35	6.0	3.0		
					34	6.93 2.17
					36	-12.93 -5.17
36	CG BARRA36.CAR	0.9853 -14.07	0.0	0.0		
					35	13.02 5.21
					37	-16.00 -7.79

				40	2.98	2.59
37	CG BARRA37.CAR	0.9929 -13.86	0.0	0.0		
				36	16.09	7.91
				38	-19.66	-10.90
				39	3.57	2.98
38	CG BARRA38.CAR	1.0169 -13.13	14.0	7.0		
				22	11.79	1.81
				37	20.00	11.40
				44	-27.77	-1.66
				48	-15.03	-13.57
				49	-2.99	-4.98
39	CG BARRA39.CAR	0.9909 -13.89	0.0	0.0		
				37	-3.57	-2.97
				57	3.57	2.97
40	CG BARRA40.CAR	0.9832 -14.10	0.0	0.0		
				36	-2.97	-2.58
				56	2.97	2.58
41	CG BARRA41.CAR	1.0160 -14.40	6.3	3.0		
				11	-9.03	-3.39
				42	9.19	3.97
				43	-12.55	-3.73
				56	6.10	0.15
42	CG BARRA42.CAR	0.9838 -15.79	7.1	4.4		
				41	-8.99	-3.63
				56	1.89	-0.77
43	CG BARRA43.CAR	1.0324 -11.58	2.0	1.0		
				11	-14.55	-5.42
				41	12.55	4.42
44	CG BARRA44.CAR	1.0259 -12.27	12.0	1.8		
				38	27.98	2.00
				45	-39.98	-3.80
45	CG BARRA45.CAR	1.0558 -9.76	0.0	0.0		
				15	-40.94	-5.68
				44	40.94	5.68
46	CG BARRA46.CAR	1.0599 -11.51	0.0	0.0		
				14	-47.06	-25.30
				47	47.06	25.30
47	CG BARRA47.CAR	1.0337 -12.88	29.7	11.6		
				46	-46.48	-23.74
				48	16.78	12.14
48	CG BARRA48.CAR	1.0280 -12.97	0.0	0.0		
				38	15.16	13.76
				47	-16.70	-12.05
				49	1.55	-1.71
49	CG BARRA49.CAR	1.0287 -13.15	18.0	8.5		
				13	-28.27	-17.35
				38	3.02	4.72
				48	-1.54	1.46
				50	8.79	2.66
50	CG BARRA50.CAR	1.0186 -13.65	21.0	10.5		
				49	-8.73	-2.56

					51	-12.27	-7.94
51	CG BARRA51.CAR	1.0526	-12.79	18.0	5.3		
					10	-30.56	-13.69
					50	12.56	8.39
52	CG BARRA52.CAR	0.9960	-11.81	4.9	2.2		
					29	-18.47	-3.87
					53	13.57	1.67
53	CG BARRA53.C.R	0.9841	-12.51	20.0	10.0		
					52	-13.42	-1.48
					54	-6.58	-2.42
	CAP/REAT				6.1		
54	CG BARRA54.CAR	1.0024	-11.89	4.1	1.4		
					53	6.67	2.53
					55	-10.77	-3.93
55	CG BARRA55.CAR	1.0300	-10.91	6.8	3.4		
					9	-17.80	-7.63
					54	11.00	4.23
56	CG BARRA56.CAR	0.9826	-16.28	7.6	2.2		
					40	-2.97	-2.39
					41	-5.90	0.05
					42	-1.88	0.79
					57	3.15	-0.65
57	CG BARRA57.CAR	0.9788	-16.83	6.7	2.0		
					39	-3.57	-2.68
					56	-3.13	0.68

DADOS DOS TRANSFORMADORES DE TAP VARIAVEL

BARRA INICIAL	BARRA FINAL	TAP DO TRANSFORMADOR ATUAL	MINIMO	MAXIMO
4	18	0.965	0.900	1.050
21	20	1.031	0.900	1.050
24	25	0.953	0.900	1.050
24	26	1.049	0.900	1.050
7	29	0.945	0.900	1.050
34	32	0.970	0.900	1.050
11	41	0.936	0.900	1.050
15	45	0.933	0.900	1.050
14	46	0.902	0.900	1.050
10	51	0.932	0.900	1.050
13	49	0.924	0.900	1.050
11	43	0.940	0.900	1.050
40	56	0.969	0.900	1.050
39	57	0.972	0.900	1.050
9	55	0.947	0.900	1.050

Estado final do sistema IEEE 118

CONVERGENCIA EM 20 ITERACOES

ESTADO DO SISTEMA						FLUXOS NAS LINHAS		
BARRA	TP	NOME	TENSAO	ANG.	MW	MVAR	BARRA	MW	MVAR
12	SL	BARRA12	0.9998	0.00	-36.4	-55.2	2	31.96	0.37
							3	9.20	-1.59
							7	-16.72	6.99
							11	-33.57	45.53
							14	17.89	-4.63
							16	7.47	3.42
							117	20.15	5.11
2	CG	BARRA2	0.9933	-1.12	20.0	9.0	1	11.77	-7.69
							12	-31.77	-1.31
3	CG	BARRA3	0.9948	-0.84	39.0	10.0	1	39.52	-15.74
							5	-69.36	8.06
							12	-9.15	-2.32
4	CR	BARRA4	0.9992	3.17	39.0	50.4	5	-102.61	-40.88
							11	63.61	-9.50
		REAT.GER.= -38.4 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -50.]							
5	CG	BARRA5	1.0043	3.60	0.0	0.0	3	70.56	-5.55
							4	102.83	41.65
							6	88.74	-8.55
							8	-338.97	17.66
							11	76.84	-4.86
		CAP/REAT				40.3			
6	CR	BARRA6	0.9992	0.81	52.0	-5.3	5	-87.81	11.37
							7	35.81	-6.02
		REAT.GER.= 27.3 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -50.]							
7	CG	BARRA7	0.9987	0.36	19.0	2.0	6	-35.75	5.74
							12	16.75	-7.74
8	CR	BARRA8	1.0011	8.77	28.0	49.4	5	338.97	13.00
							9	-439.93	-15.06
							30	72.97	-47.30
		REAT.GER.= -49.4 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -50.]							
9	CG	BARRA9	1.0077	16.48	0.0	0.0	8	444.69	-43.12
							10	-444.69	43.12
10	CR	BARRA10	0.9959	24.84	-450.0	100.3	9	450.00	-100.33
		REAT.GER.= -100.3 [LIMITES:MAX= 250. MIN= -250.]							

11	CG BARRA11	0.9929	0.54	70.0	23.0			
						4	-62.75	10.60
						5	-75.65	7.13
						12	33.76	-45.40
						13	34.64	4.67
1	CR BARRA1	0.9963	-1.92	51.0	-20.8			
						2	-11.72	5.36
						3	-39.28	15.44
	REAT.GER.= 47.8 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -50.]							
13	CG BARRA13	0.9813	-0.88	34.0	16.0			
						11	-34.36	-5.58
						15	0.36	-10.42
14	CG BARRA14	0.9987	-0.77	14.0	1.0			
						12	-17.82	3.06
						15	3.82	-4.06
15	CR BARRA15	0.9995	-1.25	90.0	-12.8			
						13	-0.32	4.41
						14	-3.81	-0.92
						17	-103.47	14.39
						19	11.25	-4.66
						33	6.36	-0.44
	REAT.GER.= 42.8 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -50.]							
16	CG BARRA16	0.9945	-0.30	25.0	10.0			
						12	-7.45	-5.48
						17	-17.55	-4.52
17	CG BARRA17	1.0070	1.45	11.0	3.0			
						15	104.92	-14.06
						16	17.69	0.42
						18	81.49	-4.44
						30	-236.33	-2.77
						31	16.88	-2.21
						113	4.35	20.05
18	CR BARRA18	0.9998	-0.92	60.0	-1.3			
						17	-80.68	6.44
						19	20.68	-5.11
	REAT.GER.= 35.3 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -50.]							
19	CR BARRA19	0.9998	-1.54	45.0	-16.8			
						15	-11.23	3.70
						18	-20.63	4.19
						20	-8.63	12.67
						34	-4.51	-3.79
	REAT.GER.= 41.8 [LIMITES:MAX= 115. MIN= -50.]							
20	CG BARRA20	0.9855	-0.74	18.0	3.0			
						19	8.70	-15.28
						21	-26.70	12.28
21	CG BARRA21	0.9793	0.75	14.0	8.0			
						20	26.87	-13.59
						22	-40.87	5.59
22	CG BARRA22	0.9822	3.20	10.0	5.0			
						21	41.24	-6.22
						23	-51.24	1.22

23	CG BARRA23	0.9985	8.03	7.0	3.0		
						22	52.18 -0.84
						24	13.04 -11.51
						25	-161.87 35.68
						32	89.65 -26.34
24	CG BARRA24	1.0012	7.59	13.0	0.0		
						23	-13.01 6.65
						70	-3.40 -4.02
						72	3.41 -2.63
25	CR BARRA25	1.0010	15.83	-220.0	38.2		
						23	166.22 -22.01
						26	-88.30 2.75
						27	142.09 -18.93
	REAT.GER.= -38.2 [LIMITES:MAX= 250. MIN= -250.]						
26	CR BARRA26	1.0003	17.76	-314.0	55.3		
						25	88.30 0.23
						30	225.70 -55.50
	REAT.GER.= -55.3 [LIMITES:MAX= 250. MIN= -250.]						
27	CR BARRA27	1.0002	2.27	71.0	-31.4		
						25	-135.65 34.28
						28	31.97 -0.87
						32	12.02 -3.96
						115	20.65 1.91
	REAT.GER.= 44.4 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -50.]						
28	CG BARRA28	0.9943	0.69	17.0	7.0		
						27	-31.78 -0.41
						29	14.78 -6.59
29	CG BARRA29	0.9960	-0.19	24.0	4.0		
						28	-14.72 4.47
						31	-9.28 -8.47
30	CG BARRA30	1.0095	6.64	0.0	0.0		
						8	-72.72 -1.74
						17	236.33 24.26
						26	-221.62 6.64
						38	58.01 -29.16
31	CR BARRA31	0.9997	-0.06	36.0	-14.1		
						17	-16.75 -1.37
						29	9.30 7.70
						32	-28.55 7.80
	REAT.GER.= 41.1 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -50.]						
32	CR BARRA32	0.9997	1.71	59.0	-18.3		
						23	-86.96 24.41
						27	-11.99 2.15
						31	28.82 -9.43
						113	1.70 -3.47
						114	9.44 4.63
	REAT.GER.= 41.3 [LIMITES:MAX= 100. MIN= -50.]						
33	CG BARRA33	0.9956	-1.68	23.0	9.0		
						15	-6.34 -2.69
						37	-16.66 -6.31

34	CG BARRA34	1.0048	-0.93	59.0	26.0		
						19	4.53 -2.50
						36	29.84 4.95
						37	-97.24 -21.17
						43	3.87 6.85
	CAP/REAT				14.1		
35	CG BARRA35	1.0009	-1.35	33.0	9.0		
						36	1.24 0.55
						37	-34.24 -9.55
36	CR BARRA36	1.0008	-1.36	31.0	6.1		
						34	-29.76 -5.27
						35	-1.24 -0.82
	REAT.GER.= 10.9 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -50.]						
37	CG BARRA37	1.0092	-0.44	0.0	0.0		
						33	16.78 3.06
						34	97.49 21.09
						35	34.38 8.84
						38	-251.53 7.47
						39	57.03 -4.22
						40	45.86 -10.77
	CAP/REAT				25.5		
38	CG BARRA38	1.0114	4.86	0.0	0.0		
						30	-57.85 -12.11
						37	251.53 15.81
						65	-193.68 -3.70
39	CG BARRA39	0.9959	-3.94	27.0	11.0		
						37	-56.00 4.90
						40	29.00 -15.90
40	CR BARRA40	1.0000	-5.11	66.0	-34.4		
						37	-44.59 10.13
						39	-28.80 15.01
						41	17.38 8.43
						42	-9.99 0.80
	REAT.GER.= 57.4 [LIMITES:MAX= 150. MIN= -50.]						
41	CG BARRA41	0.9931	-5.52	37.0	10.0		
						40	-17.33 -9.46
						42	-19.67 -0.54
42	CR BARRA42	1.0000	-3.96	96.0	-26.1		
						40	10.05 -5.26
						41	19.84 -2.34
						49	-125.89 33.71
	REAT.GER.= 49.1 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -50.]						
43	CG BARRA43	0.9882	-1.09	18.0	7.0		
						34	-3.83 -10.89
						44	-14.17 3.89
44	CG BARRA44	0.9807	1.21	16.0	8.0		
						43	14.32 -9.14
						45	-30.32 10.76
	CAP/REAT				9.6		

45	CG BARRA45	0.9772	3.01	53.0	22.0		
						44	30.57 -11.92
						46	-34.89 -6.49
						49	-48.68 5.95
	CAP/REAT				9.5		
46	CR BARRA46	0.9994	5.67	9.0	-6.6		
						45	35.41 5.01
						47	-29.05 9.08
						48	-15.36 2.49
	CAP/REAT				10.0		
	REAT.GER.= 16.6 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -50.]						
47	CG BARRA47	0.9977	8.02	34.0	0.0		
						46	29.42 -11.01
						49	-17.19 -0.31
						69	-46.23 11.32
48	CG BARRA48	0.9999	7.50	20.0	11.0		
						46	15.51 -6.72
						49	-35.51 10.76
	CAP/REAT				15.0		
49	CR BARRA49	1.0008	8.64	-117.0	5.4		
						42	132.18 -22.44
						45	50.42 -5.55
						47	17.24 -1.11
						48	35.76 -11.31
						50	49.88 -8.85
						51	61.82 -7.10
						54	71.76 -23.24
						66	-265.50 66.02
						69	-36.56 8.15
	REAT.GER.= 24.6 [LIMITES:MAX= 250. MIN= -250.]						
50	CG BARRA50	0.9942	6.36	17.0	4.0		
						49	-49.20 8.90
						57	32.20 -12.90
51	CG BARRA51	0.9820	3.55	17.0	8.0		
						49	-59.95 9.00
						52	27.49 -2.62
						58	15.46 -14.39
52	CG BARRA52	0.9776	2.56	18.0	5.0		
						51	-27.33 1.74
						53	9.33 -6.74
53	CG BARRA53	0.9819	1.53	23.0	11.0		
						52	-9.28 3.03
						54	-13.72 -14.03
54	CR BARRA54	1.0013	2.31	65.0	-26.4		
						49	-69.61 16.35
						53	13.81 11.41
						55	6.66 -4.28
						56	18.30 -6.03
						59	-34.16 8.94
	REAT.GER.= 58.4 [LIMITES:MAX= 150. MIN= -50.]						

55	CR BARRA55	1.0025	2.01	63.0	-26.7		
						54	-6.65 2.29
						56	-17.87 13.32
						59	-38.48 11.11
	REAT.GER.= 48.7 [LIMITES:MAX= 150. MIN= -50.]						
56	CR BARRA56	1.0013	2.21	84.0	-41.0		
						54	-18.29 5.33
						55	17.89 -13.62
						57	-19.45 12.32
						58	-3.26 13.80
						59	-60.89 23.20
	REAT.GER.= 59.0 [LIMITES:MAX= 150. MIN= -50.]						
57	CG BARRA57	0.9952	3.55	12.0	3.0		
						50	-31.64 11.19
						56	19.64 -14.19
58	CG BARRA58	0.9880	2.69	12.0	3.0		
						51	-15.35 12.97
						56	3.35 -15.97
59	CR BARRA59	0.9947	7.17	122.0	63.0		
						54	34.82 -11.90
						55	39.27 -13.14
						56	62.73 -28.67
						60	-45.56 3.22
						61	-54.34 3.30
						63	-158.93 -15.81
	REAT.GER.= 50.0 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -50.]						
60	CG BARRA60	1.0041	11.06	78.0	3.0		
						59	46.23 -3.89
						61	-115.88 -7.71
						62	-8.35 8.61
61	CR BARRA61	1.0082	11.93	-160.0	-67.8		
						59	55.33 -2.67
						60	116.23 8.05
						62	28.87 15.51
						64	-40.42 46.92
	REAT.GER.= 67.8 [LIMITES:MAX= 250. MIN= -250.]						
62	CR BARRA62	0.9999	11.39	77.0	12.0		
						60	8.37 -10.00
						61	-28.78 -16.10
						66	-34.90 5.61
						67	-21.70 8.49
	REAT.GER.= 2.0 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -50.]						
63	CG BARRA63	0.9974	10.74	0.0	0.0		
						59	158.93 25.87
						64	-158.93 -25.87
64	CG BARRA64	1.0037	12.54	0.0	0.0		
						61	40.42 -45.92
						63	159.37 9.36
						65	-199.79 36.55

```
------------------------------------------------------------------------
 65  CR BARRA65        0.9942  16.09   -391.0    235.4
                                                      38    197.25    -72.49
                                                      64    200.94    -61.58
                                                      66      5.19    -19.38
                                                      68    -12.38    -81.93
     REAT.GER.= -235.4 [LIMITES:MAX=  250. MIN= -250.]
------------------------------------------------------------------------
 66  CR BARRA66        1.0014  15.98   -353.0     29.6
                                                      49    272.26    -36.53
                                                      62     35.52     -8.59
                                                      65     -5.19     19.53
                                                      67     50.41     -3.99
     REAT.GER.=  -11.6 [LIMITES:MAX=  250. MIN= -250.]
------------------------------------------------------------------------
 67  CG BARRA67        0.9942  13.00     28.0      7.0
                                                      62     21.84    -10.90
                                                      66    -49.84      3.90
------------------------------------------------------------------------
 68  CG BARRA68        1.0025  16.17      0.0      0.0
                                                      65     12.42     18.78
                                                      69      3.19     17.80
                                                      81    -15.61    -70.20
                                                     116      0.01     33.62
------------------------------------------------------------------------
 69  CR BARRA69        1.0054  16.10   -329.0     93.5
                                                      47     48.23    -11.86
                                                      49     38.03    -11.67
                                                      68     -3.19    -17.68
                                                      70    102.30    -19.21
                                                      75    101.04    -23.69
                                                      77     42.59     -9.42
     REAT.GER.=  -93.5 [LIMITES:MAX=  250. MIN= -250.]
------------------------------------------------------------------------
 70  CR BARRA70        1.0003   8.45     66.0     -5.6
                                                      24      3.42     -6.14
                                                      69    -99.14     20.30
                                                      71     14.65     -4.97
                                                      74     15.67     -6.19
                                                      75     -0.59      2.59
     REAT.GER.=   25.6 [LIMITES:MAX=   50. MIN=  -50.]
------------------------------------------------------------------------
 71  CG BARRA71        1.0006   8.13      0.0      0.0
                                                      70    -14.63      4.17
                                                      72      8.63     -3.88
                                                      73      6.00     -0.29
------------------------------------------------------------------------
 72  CR BARRA72        0.9999   7.20     12.0      2.7
                                                      24     -3.41     -2.23
                                                      71     -8.59     -0.42
     REAT.GER.=   -2.7 [LIMITES:MAX=   50. MIN=  -50.]
------------------------------------------------------------------------
 73  CR BARRA73        1.0000   7.98      6.0      0.9
                                                      71     -6.00     -0.88
     REAT.GER.=   -0.9 [LIMITES:MAX=   50. MIN=  -50.]
------------------------------------------------------------------------
 74  CR BARRA74        1.0002   7.16     68.0    -21.8
                                                      70    -15.56      3.17
                                                      75    -52.44     30.60
        CAP/REAT                                              12.0
     REAT.GER.=   48.8 [LIMITES:MAX=   80. MIN=  -50.]
```

75	CG BARRA75	0.9944	8.61	47.0	11.0		
						69	-96.83	23.98
						70	0.60	-6.14
						74	52.90	-30.12
						77	-39.25	9.63
						118	35.59	-8.34
76	CR BARRA76	1.0048	7.27	68.0	-48.6		
						77	-65.69	26.90
						118	-2.31	21.72
	REAT.GER.= 84.6 [LIMITES:MAX= 100. MIN= -50.]							
77	CR BARRA77	0.9975	13.57	61.0	-22.0		
						69	-42.03	0.84
						75	40.28	-11.15
						76	67.95	-23.05
						78	38.50	28.67
						80	-157.82	12.29
						82	-7.88	14.41
	REAT.GER.= 50.0 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -50.]							
78	CG BARRA78	0.9924	13.36	71.0	26.0		
						77	-38.41	-29.63
						79	-32.59	3.63
79	CG BARRA79	0.9933	13.83	39.0	32.0		
						78	32.65	-4.00
						80	-71.65	-8.27
	CAP/REAT				19.7			
80	CR BARRA80	1.0110	16.64	-347.0	-13.1		
						77	160.57	-10.96
						79	72.47	10.09
						81	15.63	-11.15
						96	20.40	10.02
						97	27.78	14.68
						98	29.75	1.91
						99	20.39	-1.52
	REAT.GER.= 39.1 [LIMITES:MAX= 250. MIN= -250.]							
81	CG BARRA81	1.0087	16.32	0.0	0.0		
						68	15.63	-11.29
						80	-15.63	11.29
82	CG BARRA82	0.9842	14.28	54.0	27.0		
						77	8.00	-22.09
						83	-49.42	8.70
						96	-12.58	5.75
	CAP/REAT				19.4			
83	CG BARRA83	0.9860	15.42	20.0	10.0		
						82	49.71	-11.42
						84	-26.30	8.31
						85	-43.41	2.83
	CAP/REAT				9.7			
84	CG BARRA84	0.9908	17.81	11.0	7.0		
						83	26.81	-9.77
						85	-37.81	2.77

85	CR BARRA85	1.0004	19.27	24.0	-26.0		
						83	44.25 -3.37
						84	38.25 -3.05
						86	17.11 1.69
						88	-50.95 18.78
						89	-72.67 11.91
	REAT.GER.=	41.0	[LIMITES:MAX=	80.	MIN=	-50.]	
86	CG BARRA86	0.9909	18.11	21.0	10.0		
						85	-17.01 -4.06
						87	-3.99 -5.94
87	CR BARRA87	0.9999	18.53	-4.0	-1.6		
						86	4.00 1.60
	REAT.GER.=	1.6	[LIMITES:MAX=	250.	MIN=	-250.]	
88	CG BARRA88	0.9916	22.50	48.0	10.0		
						85	51.55 -18.46
						89	-99.55 8.46
89	CR BARRA89	1.0015	26.67	-607.0	82.9		
						85	73.98 -7.14
						88	100.96 -3.14
						90	169.04 -36.96
						92	263.02 -35.68
	REAT.GER.=	-82.9	[LIMITES:MAX=	250.	MIN=	-250.]	
90	CR BARRA90	0.9995	20.08	163.0	-38.2		
						89	-164.26 40.19
						91	1.26 -1.97
	REAT.GER.=	80.2	[LIMITES:MAX=	100.	MIN=	-50.]	
91	CR BARRA91	0.9999	20.00	10.0	-2.7		
						90	-1.26 -0.17
						92	-8.74 2.88
	REAT.GER.=	2.7	[LIMITES:MAX=	50.	MIN=	-50.]	
92	CR BARRA92	0.9976	20.74	65.0	-23.3		
						89	-257.42 52.85
						91	8.77 -6.02
						93	57.32 -3.05
						94	51.82 -6.63
						100	30.61 -11.79
						102	43.90 -2.03
	REAT.GER.=	33.3	[LIMITES:MAX=	100.	MIN=	-50.]	
93	CG BARRA93	0.9857	17.88	12.0	7.0		
						92	-56.47 3.71
						94	44.47 -10.71
94	CG BARRA94	0.9836	15.83	30.0	16.0		
						92	-50.51 6.94
						93	-43.99 10.46
						95	40.71 13.39
						96	19.56 -4.92
						100	4.22 -41.86
95	CG BARRA95	0.9721	14.88	42.0	31.0		
						94	-40.46 -13.62
						96	-1.54 -17.38

96	CG BARRA96	0.9817	14.76	38.0	15.0			
						80	-20.20	-13.90
						82	12.62	-10.88
						94	-19.45	3.06
						95	1.59	16.14
						97	-12.56	-9.41
97	CG BARRA97	0.9914	15.33	15.0	9.0			
						80	-27.60	-16.28
						96	12.60	7.28
98	CG BARRA98	1.0008	14.87	34.0	8.0			
						80	-29.54	-3.85
						100	-4.46	-4.15
99	CR BARRA99	1.0001	14.30	42.0	6.3			
						80	-20.20	-3.16
						100	-21.80	-3.11
	REAT.GER.= -6.3 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -50.]							
100	CR BARRA100	1.0058	15.28	-215.0	14.5			
						92	-29.96	7.01
						94	-3.94	36.80
						98	4.47	-0.60
						99	21.88	1.32
						101	-16.13	16.04
						103	121.30	-61.42
						104	56.82	-4.86
						106	60.56	-8.74
	REAT.GER.= 3.5 [LIMITES:MAX= 250. MIN= -250.]							
101	CG BARRA101	0.9883	16.74	22.0	15.0			
						100	16.29	-18.59
						102	-38.29	3.59
102	CG BARRA102	0.9932	19.31	5.0	3.0			
						92	-43.66	1.66
						101	38.66	-4.66
103	CR BARRA103	1.0197	11.20	-17.0	-70.4			
						100	-118.43	65.35
						104	32.22	7.28
						105	42.81	-0.94
						110	60.40	-1.34
	REAT.GER.= 86.4 [LIMITES:MAX= 250. MIN= -250.]							
104	CR BARRA104	0.9915	8.55	38.0	32.8			
						100	-55.38	5.99
						103	-31.72	-9.68
						105	49.10	-29.10
	REAT.GER.= -7.8 [LIMITES:MAX= 0. MIN= -50.]							
105	CR BARRA105	0.9977	7.31	31.0	8.8			
						103	-41.86	-0.35
						104	-48.77	29.36
						106	8.72	7.00
						107	26.90	-16.40
						108	24.02	-8.54
	CAP/REAT				19.9			
	REAT.GER.= 17.2 [LIMITES:MAX= 20. MIN= -50.]							

106	CG BARRA106	0.9922	7.10	43.0	16.0			
						100	-58.35	10.93
						105	-8.70	-8.35
						107	24.05	-18.58
107	CR BARRA107	1.0108	4.09	50.0	-22.6			
						105	-26.41	13.33
						106	-23.59	15.41
	CAP/REAT				6.1			
	REAT.GER.=	34.6	[LIMITES:MAX=	60.	MIN= -50.]			
108	CG BARRA108	0.9969	6.23	2.0	1.0			
						105	-23.85	7.15
						109	21.85	-8.15
109	CG BARRA109	0.9969	5.82	8.0	3.0			
						108	-21.80	7.55
						110	13.80	-10.55
110	CR BARRA110	1.0005	5.06	39.0	30.0			
						103	-59.03	3.00
						109	-13.72	8.75
						111	-35.72	0.63
						112	69.46	-36.39
	CAP/REAT				6.0			
	REAT.GER.=	0.0	[LIMITES:MAX=	0.	MIN= -50.]			
111	CR BARRA111	1.0074	6.61	-36.0	1.7			
						110	36.00	-1.68
	REAT.GER.=	-1.7	[LIMITES:MAX=	0.	MIN= -250.]			
112	CR BARRA112	1.0060	2.06	68.0	-33.9			
						110	-68.00	33.94
	REAT.GER.=	46.9	[LIMITES:MAX=	50.	MIN= -50.]			
113	CR BARRA113	1.0005	1.48	6.0	22.4			
						17	-4.31	-20.69
						32	-1.69	-1.70
	REAT.GER.=	-22.4	[LIMITES:MAX=	0.	MIN= -50.]			
114	CG BARRA114	0.9951	1.42	8.0	3.0			
						32	-9.42	-6.18
						115	1.42	3.18
115	CG BARRA115	0.9948	1.41	22.0	7.0			
						27	-20.58	-3.55
						114	-1.42	-3.45
116	CR BARRA116	1.0008	16.18	0.0	50.0			
						68	0.00	-50.00
	REAT.GER.=	-50.0	[LIMITES:MAX=	0.	MIN= -50.]			
117	CG BARRA117	0.9839	-1.51	20.0	8.0			
						12	-20.00	-8.00
118	CG BARRA118	0.9931	7.55	33.0	15.0			
						75	-35.39	7.80
						76	2.39	-22.80

DADOS DOS TRANSFORMADORES DE TAP VARIAVEL

BARRA INICIAL	BARRA FINAL	TAP DO TRANSFORMADOR ATUAL	MINIMO	MAXIMO
8	5	0.997	0.950	1.050
26	25	1.000	0.950	1.050
30	17	0.997	0.950	1.050
38	37	1.001	0.950	1.050
63	59	0.995	0.950	1.050
64	61	1.008	0.950	1.050
65	66	1.000	0.950	1.050
68	69	0.991	0.950	1.050
81	80	0.994	0.950	1.050