Capítulo 4 – Lógica *"Fuzzy"*

4.1 Introdução

O ser humano utiliza sua experiência, seu conhecimento e sua intuição para lidar com fatores como a resolução de um problema, a ambigüidade, a incerteza e informações vagas. Nos problemas de difícil solução, onde se faz jus ao uso computacional matemático, modelar tais fatores é extremamente complicado.

Em situações onde há imprecisões, a lógica clássica é muito restrita, pois utiliza conceitos binários, onde são aceitos somente dois valores: verdadeiro e falso. Com essa teoria, não é possível, matematicamente, tratar os níveis de incerteza e ambigüidade.

A Lógica *"Fuzzy"* (Nebulosa ou Difusa) vem aproximar a máquina ao raciocínio humano e propor soluções cada vez mais próximas do real que até então, somente o cérebro humano era capaz de interpretar e resolver.

A grande vantagem dessa metodologia é a preservação dos dados, em outras palavras, descreve de maneira satisfatória a fartura das informações fornecidas.

4.2 Como surgiu a Lógica *"Fuzzy"*

Aristóteles, filósofo grego (383-322 a.C.), foi o fundador da ciência da lógica apresentando a primeira sistematização da lógica da qual se tem notícia. É claro que já antes de Aristóteles havia uma certa preocupação com a questão da validade dos argumentos, por exemplo, por parte dos sofistas e de Platão. Mas esses pensadores, embora tenham-se ocupado um pouco de tais

questões, de fato nunca desenvolveram uma teoria lógica - nunca se preocuparam em fazer um estudo sistemático dos tipos de argumentos válidos.

A "lógica aristotélica" permaneceu incólume, sem alterações significativas, por mais de mil anos. O filósofo Immanuel Kant (1724-1804) chegou mesmo a dizer que, em matéria de lógica, provavelmente, nada mais poderia ser acrescentado ao que fez Aristóteles. A partir de meados do século XIX, no entanto, matemáticos como George Boole (1815-1864) e Gottlob Frege (1845-1925) deram contribuições significativas no sentido da criação da lógica matemática, e o marco inicial foi a publicação, em 1849, de "Investigação sobre as Leis do Pensamento", de George Boole. Esse livro deu início à "simbolização" da lógica, o que constitui em se fazer numa linguagem simbólica, artificial, o que Aristóteles havia começado em grego, uma linguagem natural. Boole, na verdade, apresentou um cálculo lógico (hoje bastante conhecido também como álgebra booleana) contendo um número infinito de formas válidas de argumentos. Daí em diante, a lógica tornou-se essencialmente matemática, tendo alcançado um desenvolvimento extraordinário com implicações em praticamente todos os campos do saber humano.

No entanto, mesmo com tal desenvolvimento, os princípios básicos da lógica de tradição aristotélica não foram questionados, dentre elas o chamado Princípio da Não Contradição, ou seja, uma declaração é falsa ou verdadeira, não podendo ser ao mesmo tempo parcialmente verdadeira ou parcialmente falsa. Como por exemplo, "Está chovendo" e "Não está chovendo", uma delas tem que ser falsa, ou seja, elas não podem ser verdadeiras simultaneamente. Em suma, de acordo com a lógica clássica, binária, não se pode tolerar uma contradição. Aristóteles estabeleceu um conjunto de regras rígidas para que conclusões pudessem ser aceitas como logicamente válidas, neste caso não poderiam ser verdadeiras ao mesmo tempo as proposições "Está chovendo" e "Não está chovendo".

Na década de 60, um professor de engenharia elétrica e ciências da computação da Universidade da Califórnia, em Berkeley, chamado Lofti A. Zadeh observou que muitas regras que as pessoas usavam para fazer inferências não eram conscientes, ou seja, não podiam ser explicadas pelas

pessoas que as usavam. Por exemplo, pode-se olhar para uma pessoa e dizer "ela parece ter em média vinte e cinco anos", entretanto não estamos preparados para explicar como se chegou a essa conclusão. Observou, além disso, que os recursos tecnológicos disponíveis eram incapazes de automatizar as atividades relacionadas a problemas de natureza industrial, biológica ou química, que compreendessem situações ambíguas, não passíveis de processamento através da lógica computacional fundamentada na lógica booleana.

Procurando solucionar esses problemas o professor Zadeh desenvolveu uma variação da tradicional teoria dos conjuntos e lógica booleana, tornando a análise e controle de sistemas complexos mais tratáveis. Publicando, em 1965, um artigo resumindo os conceitos dos Conjuntos *“Fuzzy”*, revolucionou o assunto com a criação de sistemas *"Fuzzy"*. A ele é atribuído o reconhecimento como grande colaborador do Controle Moderno. Em 1975, os professores Mamdani e Assilian, do Queen Mary College, de Londres, publicaram um trabalho na "Revista Internacional de Estudos Homem-Máquina", denominado "Um Experimento em Síntese Lingüística com um Controlador *"Fuzzy"*, descrevendo um sucesso em controlar o funcionamento de uma máquina a vapor utilizando uma aplicação *"Fuzzy"*.

O artigo descreve também as inúmeras tentativas frustradas de controle com tipos distintos de controladores, incluindo o PID(proporcional-integral-derivativo). Esse sucesso serviu de alavanca para muitas outras aplicações, como em 1980, no controle *"Fuzzy"* de operação de um forno de cimento. Estimulados pelo desenvolvimento e pelas enormes possibilidades práticas de aplicações que se apresentaram, os estudos sobre sistemas *"Fuzzy"* e controle de processos avançaram rapidamente, culminando com a criação em 1984, da Sociedade Internacional de Sistemas *"Fuzzy"*, constituída principalmente por pesquisadores dos países mais avançados tecnologicamente.

4.3 O que é Lógica *"Fuzzy"*

É uma lógica matemática, multivalorada, que trata de informações que não podem ser precisamente descritas, detalhadas ou especificadas.

A Lógica *"Fuzzy"* deriva da sua habilidade em inferir conclusões e gerar respostas baseadas em informações vagas, ambíguas, qualitativamente incompletas ou imprecisas. Nesse aspecto, os Sistemas *"Fuzzy"* têm habilidade de raciocinar de forma semelhante à dos humanos. Seu comportamento é representado de maneira muito simples e natural, levando à construção de sistemas compreensíveis e de fácil manutenção. São alguns exemplos:

- O carro está andando muito rápido, pise no freio;
- Ele é uma pessoa muito feliz;
- Esta sala é pequena para todos os alunos, reserve outra maior;
- Nesta cidade a temperatura freqüentemente está alta, gastamos muita energia nos condicionadores de ar.

A descrição completa de um sistema real em muitos casos requer dados extremamente detalhados e muito além do que um ser humano poderia simultaneamente, processar e entender. No entanto, freqüentemente executamos tarefas complexas que para serem descritas necessitam destes termos imprecisos que não podem ser modelados pela matemática tradicional de conjuntos. São exemplos encontrados no dia a dia:

- Coloque no forno até ficar no ponto;
- Vire o volante um pouco para a direita;
- Se temos muita roupa suja na máquina de lavar, aumente o tempo de lavagem;
- Se a terra está muito seca e temperatura está alta, regue durante muito tempo.

Por esses e outros motivos, surgiu a necessidade de se fazer um estudo sobre como lidar com as ambigüidades, incertezas e informações vagas na resolução de problemas em que se faz necessário o auxílio matemático computacional.

A Lógica *"Fuzzy"* é baseada na teoria dos Conjuntos *"Fuzzy"*. Esta é uma generalização da teoria dos Conjuntos Tradicionais para resolver os paradoxos gerados a partir da classificação "verdadeiro ou falso" da Lógica Clássica. Tradicionalmente, uma proposição lógica tem dois extremos: ou "completamente verdadeiro" ou "completamente falso". Entretanto, na Lógica *"Fuzzy"*, uma premissa varia em grau de verdade de 0 a 1, o que leva a ser parcialmente verdadeira ou parcialmente falsa.

Com a incorporação do conceito de grau de verdade, a teoria dos Conjuntos *"Fuzzy"* estende a teoria dos Conjuntos Tradicionais. Os grupos são rotulados qualitativamente (usando termos lingüísticos, tais como: alto, morno, ativo, pequeno, perto, etc.) e os elementos desses conjuntos são caracterizados variando-se o grau de pertinência (valor que indica o grau em que um elemento pertence a um conjunto). Por exemplo, um homem de 1,80 metro e um homem de 1,75 metro são membros do conjunto "alto", embora o homem de 1,80 metro tenha um grau de pertinência maior neste conjunto.

A lógica *"Fuzzy"* distingue-se da lógica booleana por permitir a utilização de um intervalo entre os limites 0 e 1, e não apenas estes, como no caso binário. Em outras palavras, pode-se trabalhar não apenas com os valores 0 e 1, mas com todos entre estes valores , ou seja, o intervalo [0,1].

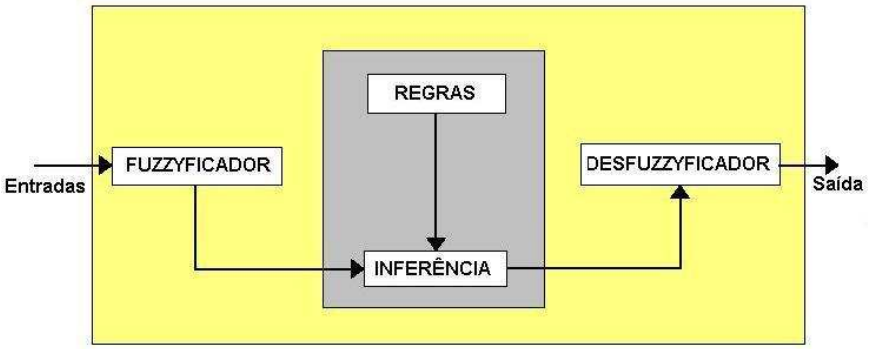

Figura 4.1: Modelo *"Fuzzy"*

A figura 4.1 apresenta um Sistema *"Fuzzy"* geral. Aplica-se uma determinada entrada de dados; o Fuzzyficador ativa as regras pré-estabelecidas (definidas ou extraídas de dados numéricos), e calcula os valores de pertinência; o Desfuzzyficador produz a saída do sistema *"Fuzzy"*.

4.3.1 Sistemas *"Fuzzy"*

O grau de pertinência dos elementos de um conjunto é especificado por um número: '1' para os estritamente membros, '0' para os não membros e valores do intervalo [0,1] para representar a transição entre esses extremos.

4.3.1.1 Fuzzyficador

A chamada fuzzyficação consiste na atribuição de um grau de pertinência (do intervalo [0,1]) a uma variável, dentre um conjunto de elementos classificadores. Com isso classifica-se a variável com um termo lingüístico (um adjetivo) e cria-se uma semântica a partir de elementos matemáticos. A classificação da variável é feita por uma função de pertinência.

4.3.1.2 Regras

Uma das partes mais importantes em um sistema *"Fuzzy"* é a construção das regras. As regras devem ser simples e claras e para isso deve-se ter o domínio, o entendimento do assunto para que as regras sejam especificadas de modo que se chegue mais próximo do real. Essas regras podem ser formuladas através de conhecimentos de pessoas especialistas em algum assunto específico ou mesmo através de pesquisas ou algum tipo de conhecimento pré-estabelecido.

4.3.1.3 Inferência

A máquina de inferência combina, através de preceitos lógicos, as informações advindas da base de regras e do Fuzzificador, de modo a fornecer uma decisão. Como esta é de caráter nebuloso, geralmente é necessário efetuar uma interpretação de modo a traduzi-la para um valor determinístico. Este procedimento é efetuado pelo Desfuzzificador.

4.3.1.4 Desfuzzificador

O Desfuzzificador gera a saída. A decisão gerada é um valor determinístico. No estágio do Desfuzzificador, a variável difusa produzida pela máquina de inferência é transformada em variável numérica (determinística) que atuará no processo de forma a regulá-lo. O termo Desfuzzificador equivale à transformação *"Fuzzy"* - escalar, correspondendo a um mapeamento do espaço de ações de controle *"Fuzzy"* e definido sobre o universo de discurso para o espaço de ações não *"Fuzzy"* ou escalares (FIGUEIREDO, 1993), (VIOT, 1993), (KING;MANDANI, 1977).

De forma a produzir um valor numérico para aplicação ao processo, as variáveis lingüísticas geradas pela máquina de inferência devem ser Desfuzzificadas. Basicamente são mais utilizados os seguintes métodos:

- Método do critério máximo: esse método produz como ação de controle, o valor numérico da saída correspondente ao índice da variável lingüística de saída, produzida pela máquina de inferência, de maior grau de pertinência.
- Método da média dos máximos: O valor numérico da saída corresponde ao índice referente a medida dos máximos locais da variável lingüística de saída produzida pela inferência.
- Método do centro de gravidade: é o método mais utilizado, e baseia-se no cálculo do centro de gravidade da função de associação. No método do centro de gravidade, calcula-se a área da curva da variável lingüística de saída produzida pela máquina

de inferência, e acha-se o índice correspondente que divide essa área na metade.

- Método do *Singleton*: este método é usado algumas vezes para simplificar o processo de Desfuzzificação. Um *Singleton* é uma função de saída com um grau de participação representada por uma única linha vertical. Esta linha passa pelo centro de gravidade do termo lingüístico para a participação máxima. Uma vez que um *Singleton* intercepta o eixo x em um único ponto, o cálculo do centro de gravidade se reduz apenas ao cálculo da média ponderada dos valores de x para cada *Singleton* e de seu grau de participação.

4.3.1.5 Função de Pertinência

É a função que define os graus de pertinência do elemento em um conjunto *"Fuzzy"*, e é representado por: μA:U $\Rightarrow$ [0,1]. O grau de pertinência de um elemento a um conjunto *"Fuzzy"* expressa o grau de compatibilidade do elemento com o conceito representado pelo conjunto *"Fuzzy"*.

4.3.2 Vantagens e Desvantagens

Algumas vantagens podem ser listadas:

- As regras expressam as imprecisões e aproximações do mundo real;
- Fácil de entender e testar;
- São mais robustos;
- Necessitam de menos regras;
- Avaliam regras paralelamente;
- Supera as limitações da lógica convencional;

- Possui vasta aplicabilidade em sistemas de controle;
- Acumulam evidências contra e a favor.

Algumas desvantagens:

- Necessitam de mais simulações e testes;
- Dificuldade em se estabelecer regras corretamente;
- Não há uma definição matemática precisa.

4.4 Conjuntos *"Fuzzy"*

A lógica *"Fuzzy"* utiliza valores contínuos, tornando necessário a representação por conjuntos, descritos por funções como as que seguem.

4.4.1 Triangular

Este tipo de função serve para indicar apenas um único ponto de máximo no conjunto. A definição é do tipo:

$$f = \begin{cases} y\min, x \le i \quad ou \quad x \ge f \\ y\min + (y\max - y\min)x(x-i)/(m-i), i < x \le m \\ y\min + (y\max - y\min)x(f-i)/(f-i), i < x \le f \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $y\min$ é o menor valor possível para a função, $y\max$ o maior valor, i o início da ascendente da função, m o valor de máximo, e f o final da descendente. Para uma melhor compreensão, observe o gráfico da Figura 4.2:

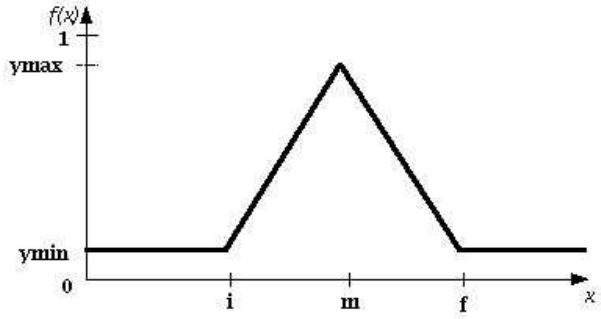

Figura 4.2: Função *Fuzzy* Triangular

4.4.2 Trapezoidal

Nesta função é possível representar todo um intervalo de pontos de máximo, conforme a equação 4.2:

$$f = \begin{cases} y\min, \quad x \le i \quad ou \quad x \ge f \\ y\min \ + \ (y\max - y\min) \ \ x \ \ (x-1) \ \ / \ \ (m1-i), \ \ i < x < m1 \\ y\max, \quad m1 \le x \le m2 \\ y\min \ + \ (y\max - y\min) \ \ x \ \ (f-x) \ \ / \ \ (f-m2), \ \ m2 < x < f \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $y\min$ é o menor valor possível para a função, $y\max$ o maior valor, i o início do trapézio, $m1$ o início do intervalo de máximo, $m2$ o fim do intervalo e máximo, e f o final do trapézio, conforme mostra a figura 4.3.

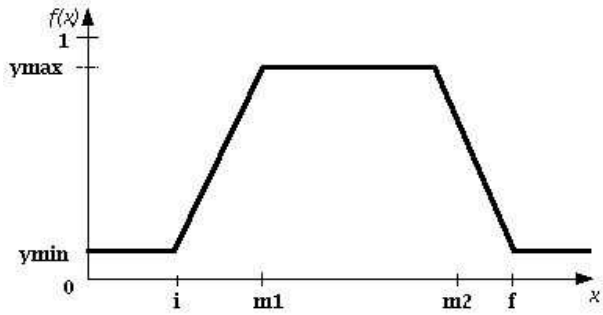

Figura 4.3: Função *Fuzzy* Trapezoidal

4.4.3 LR (*Left-Right*)

Este tipo de conjunto é mais genérico, pois permite a utilização de vários tipos de funções para definir o intervalo de representação. As funções são chamadas de L (*left*), pois define a função à esquerda) e de R (*right*, define a da direita).

A formulação padrão é do tipo:

$$f = \begin{cases} L((m1 - x)/\alpha), & x < m1 \\ 1, m1 \leq x \leq m2 \\ R((m2 - x)/\beta), & x < m2 \end{cases} \tag{4.3}$$

onde L e R podem ser funções que tenham f(0) = f(1) = 0 e mantenham-se no intervalo [0;1]; m1 é onde inicia o intervalo de máximo, terminando em m2; alfa é o espalhamento lateral da esquerda e beta o da direita.

Para exemplificar, fazendo-se L = R = 1/(1+x²), espalhamento esquerdo 5 e direito 2, tem-se um gráfico semelhante ao apresentado na Figura 4.1.

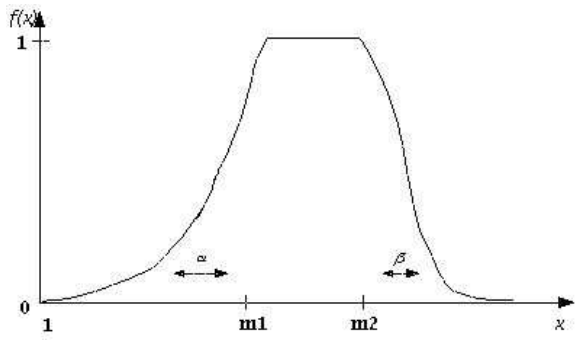

Figura 4.4: Função *Fuzzy* do tipo *Left-Right*

4.5 Considerações Finais

A lógica *"Fuzzy"* é utilizada onde não se tem a totalidade de toda a informação necessária para que se possa tomar alguma atitude ou se resolver algum problema.

Pode-se dizer que a lógica *"Fuzzy"* simula o raciocínio do cérebro humano, na operação com ambigüidades ou imprecisões.

Neste trabalho pretende-se utilizar os conceitos dessa lógica matemática, para classificar a vasta quantidade de cores dos *pixels* existentes em uma imagem. Deve-se levar em consideração, não somente a quantidade de *pixels*, mas também as três variáveis que definem cada cor.