Campus de São Carlos

**DINÂMICA E CONTROLE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES COM
INTERAÇÃO AUTO-EXCITADORA, SUJEITOS À FONTES DE
ENERGIA DO TIPO IDEAL E NÃO-IDEAL**

Autor: Bento Rodrigues de Pontes Junior

Orientadora: Profª. Drª. Vilma Alves Oliveira

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**ESCOLA DE ENGENHARIA
DE SÃO CARLOS**

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

DINÂMICA E CONTROLE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES
COM INTERAÇÃO AUTO-EXCITADORA, SUJEITOS
À FONTES DE ENERGIA DO TIPO IDEAL E NÃO-IDEAL

Bento Rodrigues de Pontes Junior

DEDALUS - Acervo - EESC

31100043085

Tese apresentada à Escola de Engenharia de
São Carlos, da Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Doutor em Engenharia Elétrica.

ORIENTADORES: Prof^a. Dr^a. Vilma Alves Oliveira
Prof. Dr. José Manoel Balthazar

São Carlos

2003

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP

EXEMPLAR REVISADO

Data de entrada no Serviço: 30 / 04 / 03

Ass.: *Kamata*

Class. TESE-EESC
Cutt. 4534
Tombo T100103
Sysno 1314707

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento da Informação do Serviço de
Biblioteca - EESC/USP

P814d Pontes Junior, Bento Rodrigues de
Dinâmica e controle de sistemas não-lineares com
interação auto-excitadora, sujeitos à fontes de
energia do tipo ideal e não-ideal / Bento Rodrigues de
Pontes Junior. -- São Carlos, 2003.

Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de São
Carlos-Universidade de São Paulo, 2003.

Área : Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof^a. Dr^a. Vilma Alves de Oliveira.

Co-orientador: Prof. Dr. José Manoel Balthazar.

1. Dinâmica. 2. Controle. 3. Sistemas auto-
excitados. 4. Excitação não-ideal. 5. Atrito.

I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **BENTO RODRIGUES DE PONTES JUNIOR**

Tese defendida e julgada em 24-02-2003 perante a Comissão Julgadora:

Adilson

Prof. Assoc. **VILMA ALVES DE OLIVEIRA (Orientadora)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

L

Prof. Liv. Doc. **JOSÉ MANOEL BALTHAZAR**
(UNESP/Campus de Rio Claro)

Depto. 10-10

Walter

Prof. Dr. **VALDER STEFFEN JUNIOR**
(Universidade Federal de Uberlândia/UFU)

Aprova

Luiz C.S.

Prof. Dr. **LUIZ CARLOS SANDOVAL GÓES**
(Instituto Tecnológico de Aeronáutica/ITA)

APROVADO

Geraldo

Prof. Liv. Doc. **GERALDO NUNES SILVA**
(UNESP/Campus de S.J.R. Preto)

Aprovado

Muriel

Prof. Assoc. **MURILO ARAUJO ROMERO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

Maria do Carmo

Prof. Assoc. **MARIA DO CARMO CALIJURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Dedico este trabalho à minha Família.

Agradeco

À Professora Vilma e ao Professor Balthazar pela espontânea disposição e disponibilidade na orientação oferecida durante o desenvolvimento deste trabalho e, também, pela amizade.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica da EESC/USP que contribuíram na elaboração deste trabalho.

Aos amigos e colegas da EESC/USP pela agradável convivência.

Aos órgãos públicos de fomento, FUNDAP, CAPES, FAPESP e CNPq, pelas bolsas de estudo concedidas desde minha iniciação científica.

À Faculdade de Engenharia de Bauru - FEB, da Universidade Estadual Paulista - UNESP, pelo oferecimento das condições necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica da FEB/UNESP pelo incentivo e apoio durante toda esta etapa de minha formação profissional.

À Deus por minha vida e Família.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	i
LISTA DE SÍMBOLOS	vi
RESUMO	ix
ABSTRACT	x
CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO	1
1.1 TEMA E MOTIVAÇÃO	1
1.2 BREVE HISTÓRICO DOS FENÔMENOS DO ATRITO EM ENGENHARIA	7
1.3 REVISÃO DA LITERATURA	10
1.3.1 Análise da Dinâmica	11
1.3.2 Sistemas com Atrito e seu Controle	12
1.4 OBJETIVOS	18
1.5 MATERIAIS E MÉTODOS	20
1.6 DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO DA TESE	22
CAPÍTULO 2 MODELAGEM MATEMÁTICA DOS SISTEMAS: IDEAL E NÃO-IDEAL	24
2.1 INTRODUÇÃO	24
2.1.1 Componentes de um Sistema Dinâmico Mecânico	25
2.1.2 Sistema Linear com Atrito Negativo	26
2.2 MODELAGEM DO SISTEMA IDEAL OSCILADOR-ESTEIRA	28
2.3 MODELO DO ATRITO	31
2.3.1 O Modelo da Força de Atrito Adere-Desliza	31
2.4 MODELAGEM DO SISTEMA NÃO-IDEAL OSCILADOR-ESTEIRA-MOTOR	36
2.4.1 Problema de Oscilações Auto-Excitadas: Sistema Não-Ideal	39
2.4.2 Problema de Oscilações Auto-Excitadas: Sistema Ideal	46

2.5	MODELAGEM DO SISTEMA OSCILADOR NÃO-LINEAR-ESTEIRA	47
2.5.1	Problema de Oscilações Auto-Excitadas: Sistema Oscilador Não-Linear com Fonte Ideal	47
	CAPÍTULO 3 ANÁLISE DA DINÂMICA DO OSCILADOR LINEAR: IDEAL E NÃO-IDEAL	50
3.1	ANÁLISE DO ATRITO SECO	51
3.1.1	Oscilador com Movimento do Suporte	51
3.2	SISTEMA IDEAL: OSCILADOR-ESTEIRA	54
3.2.1	Representação das Regiões do Espaço de Fase	54
3.2.2	Análise do Sistema Oscilador-Esteira	56
3.2.3	Modos do Movimento no Sistema Oscilador-Esteira	61
3.2.4	Comportamento do Sistema para Diferentes Modelos de Atrito	62
3.3	SISTEMA NÃO-IDEAL: OSCILADOR-ESTEIRA-MOTOR	69
3.3.1	Análise da Influência do Motor - Interação do Sistema Auto-Excitado e a Fonte de Energia de Potência Limitada	69
3.3.2	Caso Não-Ideal com Excitação Externa	76
3.4	CONCLUSÕES	80
	CAPÍTULO 4 CONTROLE CHAVEADO PARA COMPENSAÇÃO ROBUSTA DO ATRITO ADERE-DESLIZA	81
4.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ROBUSTO	81
4.1.1	Modelo da Força de Atrito Adere-Desliza	83
4.1.2	Limitantes da Força de Atrito	84
4.1.3	Construção da Lei de Controle para Regulação da Posição e Seguimento de Trajetória	86
4.2	ANÁLISE DE ESTABILIDADE	92
4.2.1	Estabilidade pelo Método Direto de Lyapunov	92
4.3	RESULTADOS DA SIMULAÇÃO	103
4.3.1	Força de Compensação do Atrito	103
4.3.2	Controle de Posição	104
4.3.3	Controle de Trajetória de Posição	107
4.3.4	Controle do Sistema Não-Ideal	109
4.4	CONCLUSÕES	113

CAPÍTULO 5 ANÁLISE DO DA DINÂMICA CAÓTICA DO OSCILADOR NÃO-LINEAR E IDEAL	114
5.1 INTRODUÇÃO	115
5.2 CRITÉRIO DE PREDIÇÃO DE CAOS HOMOCLÍNICO	117
5.3 INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS DE CONTROLE NA OCORRÊNCIA DE BIFURCAÇÕES E CAOS	119
5.3.1 Parâmetro de Controle: Força de Excitação	120
5.3.2 Uma Rota para o Caos	120
5.3.3 Parâmetro de Controle: Velocidade da Esteira (Velocidade de Excitação)	128
5.3.4 Parâmetro de Controle: Frequência de Excitação	130
5.3.5 Escape dos Poços de Potencial	130
5.3.6 Comportamento Bifurcacional do Sistema Sem o Atrito Estático	133
5.4 CONCLUSÕES	133
 CAPÍTULO 6 COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES	135
6.1 SOBRE O OSCILADOR	136
6.2 SOBRE O ATRITO	137
6.3 SOBRE A VELOCIDADE DE EXCITAÇÃO	137
6.4 SOBRE O MOTOR	137
6.5 SOBRE O CONTROLE	138
6.6 SOBRE A ROBUSTEZ DO CONTROLE	138
6.7 PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS	139
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	140
 APÊNDICE A - CARACTERÍSTICAS E MODELO DO MOTOR CC	149
APÊNDICE B - ATRITO EM MÁQUINAS	159

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Exemplos de engenharia de sistemas com oscilação adere-desliza	3
Figura 1.2 - Torre de perfuração de poços de petróleo.	4
Figura 1.3 - Sistema com oscilações adere-desliza.	5
Figura 1.4 - Resposta do sistema: (a) deslocamento; (b) velocidade.	5
Figura 1.5 - Sistema mecânico.	6
Figura 1.6 - Plano de fase do oscilador, mostrando o ciclo limite da oscilação adere-desliza e uma parte de trajetória em regime transiente no modo de aderência.	6
Figura 1.7 - Sistema mecânico com fonte de energia: sistema oscilador-esteira-motor.	19
Figura 2.1 - Sistema mecânico: oscilador-esteira.	28
Figura 2.2 - Característica da força de atrito constituída das componentes de atrito viscoso mais atrito Coulomb.	30
Figura 2.3 - Modelo de força de aderência durante o atrito estático, com níveis iguais em ambos os sentidos, $F_s^+ = F_s^-$.	33
Figura 2.4 - Exemplo genérico das componentes do modelo da força de deslizamento, $F_d^+(\cdot)$ e $F_d^-(\cdot)$, no primeiro e terceiro quadrante.	34
Figura 2.5 - Sistema mecânico com fonte de energia: sistema oscilador-esteira-motor.	36
Figura 2.6 - Modelos de componentes da força de atrito no contato seco.	37
Figura 2.7 - Exemplos de curvas características estáticas de torque do motor CC:	43
Figura 2.8 - Sistema mecânico: oscilador não linear-esteira.	47
Figura 3.1 - Sistema oscilador com movimento do suporte.	51
Figura 3.2 - Forças de atrito na resposta estacionária do movimento adere-desliza, com amortecimento viscoso nulo $\xi=0$: curvas atrito-deslocamento relativo, atrito-velocidade, plano de fase e atrito-tempo.	52
Figura 3.3 - Resposta do oscilador com movimento do suporte.	53
Figura 3.4 - Sistema mecânico oscilador-esteira.	54

Figura 3.5 - Plano de fase do oscilador mostrando o ciclo limite da oscilação adere-desliza e algumas trajetórias para diferentes condições iniciais.	55
Figura 3.6 - Resposta do sistema oscilador-esteira para o coeficiente de amortecimento $\xi=0$. No plano de fase, a condição inicial está indicada pelo símbolo (X).	57
Figura 3.7 - Força de atrito na resposta estacionária do sistema oscilador-esteira para o coeficiente de amortecimento $\xi=0$. No plano de fase, a condição inicial está indicada pelo símbolo (X).	57
Figura 3.8 - Resposta do sistema oscilador-esteira para o coeficiente de amortecimento $\xi=0$. No plano de fase, a condição inicial está indicada pelo símbolo (X).	58
Figura 3.9 - Resposta do sistema oscilador-esteira para o coeficiente de amortecimento $\xi=0$. No plano de fase, a condição inicial está indicada pelo símbolo (X).	59
Figura 3.10 - Resposta do sistema oscilador-esteira para o coeficiente de amortecimento $\xi=0$. No plano de fase, a condição inicial está indicada pelo símbolo (X).	59
Figura 3.11 - Resposta do sistema oscilador-esteira para o coeficiente de amortecimento $\xi=0,2$. No plano de fase, a condição inicial está indicada pelo símbolo (X).	60
Figura 3.12 - Caso 1: sistema não auto-excitado.	64
Figura 3.13 - Caso 2: sistema não auto-excitado.	65
Figura 3.14 - Caso 3: sistema auto-excitado.	66
Figura 3.15 - Caso 4: sistema auto-excitado.	67
Figura 3.16 - Caso 5: sistema auto-excitado.	68
Figura 3.17 - Sistema mecânico com fonte de energia: sistema oscilador-esteira-motor	69
Figura 3.18 - Respostas do caso ideal sem excitação externa para $v_B \approx 0.14\text{m/s}$ e $f_0=0\text{N/kg}$. (a) deslocamento; (b) velocidade; (c) plano de fase velocidade-deslocamento; (d) seção de Poincaré (1592 pontos) ; (e) espectro de frequência (obtido diretamente do Simulink durante a simulação).	71

- Figura 3.19 - Respostas do caso não-ideal sem excitação externa harmônica para constante de torque $K_T=0.50$, $v_B \approx 0.14\text{m/s}$ e $f_\theta=0\text{N/kg}$. (a) deslocamento; (b) velocidade; (c) plano de fase velocidade-deslocamento; (d) seção de Poincaré (6400 pontos); (e) espectro de frequência (obtido diretamente do Simulink durante a simulação). 72
- Figura 3.20 - Respostas do caso não-ideal sem excitação externa harmônica para constante de torque $K_T=0.05$, $v_B \approx 0.14\text{m/s}$ e $f_\theta=0\text{N/kg}$. (a) deslocamento; (b) velocidade; (c) plano de fase velocidade-deslocamento; (d) seção de Poincaré (6400 pontos); (e) espectro de frequência (obtido diretamente do Simulink durante a simulação). 73
- Figura 3.21 - Diagrama de bifurcações dependentes da amplitude da força de atrito dinâmico F_D ($v_B=0.14\text{m/s}$, $|F_s^+|=|F_s^-|=0.4\text{N/kg}$ e $f_\theta=0$). 75
- Figura 3.22 - Respostas do sistema não-ideal, em função do parâmetro de controle frequência de excitação da força externa, para $K_T=0.5$, $v_B \approx 0.14\text{m/s}$, $|F_d^+|=|F_d^-|=0.2\text{N/kg}$; $|F_s^+|=|F_s^-|=0.8\text{N/kg}$ e $f_\theta=0.2\text{N/kg}$: (a) deslocamento-razão de frequência; (b) velocidade-razão de frequência; (c) velocidade angular-razão de frequência. 77
- Figura 3.23 - Respostas do sistema não-ideal, em função do parâmetro de controle frequência de excitação da força externa, para $K_T=0.05$, $v_B \approx 0.14\text{m/s}$, $|F_d^+|=|F_d^-|=0.2\text{N/kg}$; $|F_s^+|=|F_s^-|=0.8\text{N/kg}$ e $f_\theta=0.2\text{N/kg}$: (a) deslocamento-razão de frequência; (b) velocidade-razão de frequência; (c) velocidade angular-razão de frequência. 78
- Figura 3.24 - Respostas do sistema não-ideal, em função do parâmetro de controle frequência de excitação da força externa, para $K_T=0.01$, $v_B \approx 0.14\text{m/s}$, $|F_d^+|=|F_d^-|=0.2\text{N/kg}$; $|F_s^+|=|F_s^-|=0.8\text{N/kg}$ e $f_\theta=0.2\text{N/kg}$: (a) deslocamento-razão de frequência; (b) velocidade-razão de frequência; (c) velocidade angular-razão de frequência. 79
- Figura 4.1 - Representação esquemática do sistema mecânico: sistema oscilador-esteira. 82
- Figura 4.2 - Modelo de força de atrito de aderência durante o atrito estático, com $|F_s^+|=|F_s^-|$. 85
- Figura 4.3 - O modelo da força de atrito de deslizamento, $F_d^+(\cdot)$ e $F_d^-(\cdot)$, dentro dos limitantes lineares por partes no primeiro e terceiro quadrante. 85

Figura 4.4 - Ciclo limite da oscilação adere-desliza e posição de equilíbrio

$$x_s = F_{\text{desliza}}/k. \quad 87$$

Figura 4.5 - Resposta do sistema para posicionamento na origem com controle PD para $(x_0, v_0) = (0, 0)$; $K_p = 10$; $K_d = 20$. O símbolo asterisco * representa a origem no plano de fase.

89

Figura 4.6 - A força de compensação descontínua mais proporcional $K_p\{x + x_c(x)\} = K_p x + F_c(x)$.

91

Figura 4.7 - Superfície de descontinuidade S e o ciclo limite da oscilação adere-desliza.

93

Figura 4.8 - Complemento não-linear, $g(x)$, para a função Lyapunov candidata.

94

Figura 4.9 - Subdivisão do espaço de estado em subregiões para análise da estabilidade. Nas subregiões é indicado o sinal do termo

$$-x\{K_p x - F_{\text{desliza}}(y_{\text{Ref}})\}. \quad 96$$

Figura 4.10 - Para $K_p = 10$; $K_d = 0$

99

Figura 4.11 - Para $K_p = 10$; $K_d = 30$

100

Figura 4.12 - Para $K_p = 10$; $K_d = 100$

101

Figura 4.13 - Seções da derivada da função de Lyapunov para $x_1 = 0$, $K_p = 10$ e $K_d = 100$.

102

Figura 4.14 - Seções da derivada da função de Lyapunov para $x_2 = 0$, $K_p = 10$ e $K_d = 100$.

102

Figura 4.15 - Força de controle descontínua mais proporcional $K_p(x + x_c(x)) = K_p x + F_c(x)$.

104

Figura 4.16 - Resposta para posicionamento na origem com controle PD para $(x_0, v_0) = (0, 0)$; $K_p = 10$; $K_d = 20$.

106

Figura 4.17 - Resposta para posicionamento na origem com controle PD mais compensação descontínua para o atrito adere-desliza para

$$(x_0, v_0) = (0, 0); K_p = 10; K_d = 20; \text{transição} = 0,01; |\tilde{F}_s^+| = |\tilde{F}_s^-| = 12 \text{N/kg}. \quad 106$$

Figura 4.18 - Resposta para seguimento de trajetória com controle PD. A linha tracejada indica a trajetória desejada ($K_p = 10$; $K_d = 20$; amplitudes e frequência da órbita $= (0, 2; 0, 2\pi; \pi)$).

108

Figura 4.19 - Resposta para seguimento de trajetória com controle PD com compensação descontínua para o atrito adere-desliza ($K_p = 10$; $K_d = 20$;

$$|\tilde{F}_s^+| = |\tilde{F}_s^-| = 12 \text{N/kg}; \text{ amplitudes e frequência da órbita} = (0, 2; 0, 2\pi; \pi)). \quad 108$$

- Figura 4.20 - Caso não-ideal: resposta para posicionamento na origem com controle PD para $(x_0, v_0)=(0;0,4)$; $K_p=10$; $K_d=20$. 110
- Figura 4.21 - Caso não-ideal: resposta para posicionamento na origem com controle PD mais compensação descontínua para o atrito adere-desliza, com $(x_0, v_0)=(0;0,4)$; $K_p=10$; $K_d=20$; $|\tilde{x}_H| = |\tilde{x}_L| = 0,01\text{m}$;
 $|\tilde{F}_s^+| = |\tilde{F}_s^-| = 12\text{N/kg}$. 110
- Figura 4.22 - Caso não-ideal: resposta para seguimento de trajetória com controle PD. A linha tracejada indica a trajetória desejada ($K_p=10$; $K_d=20$; amplitudes e frequência da órbita= $(0,2; 0,2\pi; \pi)$). 111
- Figura 4.23 - Caso não-ideal: resposta para seguimento de trajetória com controle PD com compensação descontínua para o atrito adere-desliza, ($K_p=10$; $K_d=20$; $|\tilde{x}_H| = |\tilde{x}_L| = 0,01\text{m}$; $|\tilde{F}_s^+| = |\tilde{F}_s^-| = 9,0\text{N/kg}$ e $10,1\text{N/kg}$; amplitudes e frequência da órbita= $(0,2; 0,2\pi; \pi)$). 112
- Figura 5.1 - Sistema mecânico oscilador não linear-esteira. 115
- Figura 5.2 - (a) Plano de fase velocidade-deslocamento; (b) Mapa de Poincaré ($f_0=1,4\text{N/kg}$; $v_B=0,4\text{m/s}$; $\omega_E=2\text{rad/s}$; e 1000 seções de Poincaré). 116
- Figura 5.3 - Curvas do critério de Melnikov. 118
- Figura 5.4 - Diagramas de bifurcações dependentes da amplitude da força harmônica f_0 [N/kg] para $v_B=0,4\text{m/s}$ e $\omega_E=2\text{rad/s}$. 121
- Figura 5.5 - Rota para o caos homoclínico, na faixa da amplitude da força de excitação $0,1 \leq f_0 \leq 1,8$, do sistema com atrito estático e Coulomb, para $v_B=0,4\text{m/s}$ e $\omega_E=2\text{rad/s}$: espectro de frequência (obtido diretamente do Simulink durante a simulação) e plano de fase velocidade-deslocamento. 127
- Figura 5.6 - Diagramas de bifurcações dependentes da velocidade da esteira (velocidade de excitação) v_B [m/s], para $f_0=0,1\text{N/kg}$ e $\omega_E=2\text{rad/s}$. 128
- Figura 5.7 - Diagramas de bifurcações dependentes da velocidade da esteira (velocidade de excitação) v_B [m/s], para $f_0=1,2\text{N/kg}$ e $\omega_E=2\text{rad/s}$. 129
- Figura 5.8 - Diagramas de bifurcações dependentes da frequência de excitação ω_E [rad/s], para $v_B=0,4\text{m/s}$. 132

LISTA DE SÍMBOLOS

b	coeficiente de amortecimento viscoso do motor
C_D	coeficiente de atrito dinâmico
C_S	coeficiente de atrito estático
c	coeficiente de amortecimento viscoso
$D(x, \dot{x})$	função amortecimento
F_0	amplitude da força de excitação externa
F_R	força resultante equilibrada pela força de atrito no modo de aderência
$F_{Atrito}(\cdot, \cdot)$	função força de atrito adere-desliza
F_D	amplitude da força de atrito dinâmica
F_S	amplitude da força de atrito estática
$F_C(\cdot)$	força de compensação do atrito adere-desliza
$F(\cdot)$	força de controle
$F_{adere}(\cdot)$	função força de atrito no modo de aderência
$F_{desliza}(\cdot)$	função força de atrito no modo de deslizamento
$F_d^+(\cdot)$	função atrito no deslizamento em velocidade relativa positiva
$F_d^-(\cdot)$	função atrito no deslizamento em velocidade relativa negativa
F_s^+	limite superior da força de atrito estático
F_s^-	limite inferior da força de atrito estático
$\tilde{F}_s^+, \tilde{F}_s^-$	limites ampliados da força de atrito estático para compensação
F_0^+	limite positivo da força no deslizamento em velocidade relativa nula
F_0^-	limite negativo da força no deslizamento em velocidade relativa nula
f_0	amplitude da força excitação normalizada pela massa
f_{Atrito}	amplitude da força de atrito normalizada pela massa

f	amplitude da força da lei de controle normalizada pela massa
$g(\cdot)$	função complemento da função Lyapunov
I_a	corrente de armadura
$J_{Externo}$	momento de inércia do acoplamento oscilador-motor
J_{Motor}	momento de inércia do motor
K_e	constante elétrica do motor
K_t	constante de torque do motor
K_p, K_d	ganhos proporcional e derivativo
k	constante de mola linear
k_1, k_2	constantes da mola não linear
k_a, k_b	constantes da mola não linear normalizadas
m	massa
N	amplitude da força normal no contato
R_a	resistência de armadura
r	raio da polia
rf	razão de frequência angular
S	superfície de descontinuidade do espaço de fase
T_{Eixo}	torque mecânico da carga externa
T_L	torque mecânico da carga interna
T_m	torque magnético
$V(\cdot)$	função Lyapunov
V_a	tensão aplicada no motor
v_B	velocidade da esteira (velocidade de excitação)
v_{Rel}	velocidade relativa oscilador-esteira
x	deslocamento do oscilador em relação a posição de equilíbrio
$x_C(\cdot)$	função descontínua da compensação do atrito
x_{Eq}	ponto de equilíbrio estático do oscilador com controle PD em modo de deslizamento
$\tilde{x}_H, \tilde{x}_L$	limites ampliados da região de atuação da compensação

x_S	ponto de equilíbrio do oscilador em modo de deslizamento
$\dot{x}$	velocidade do oscilador
y	deslocamento do suporte
α	parâmetro zero artificial
ε	constante de ampliação da região de atuação
φ	deslocamento angular do motor
$\mu(.)$	função Heaviside
$\lambda(.)$	função chaveamento entre os modos
ω_E	frequência angular da excitação externa
ω_N	frequência angular natural do oscilador
ξ	coeficiente de amortecimento adimensional
$(x, \dot{x})$	variáveis de estado do oscilador

RESUMO

PONTES JUNIOR, B.R. (2003). *Dinâmica e controle de sistemas não-lineares com interação auto-excitadora, sujeitos à fontes de energia do tipo ideal e não-ideal*. São Carlos, 2003, 176 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

As vibrações em máquinas estão relacionadas à transferência de energia associada a dois efeitos devido ao atrito: a dissipação de energia e a auto-excitação. A dissipação de energia reduz e a auto-excitação aumenta a quantidade de energia de um sistema. Na dinâmica dos sistemas com atrito ocorrem os ciclos limite adere-desliza e movimentos caóticos que podem prejudicar o funcionamento das máquinas. Para o controle desses sistemas torna-se necessária uma estratégia de compensação do atrito. Em geral, não considera-se a influência da dinâmica do sistema oscilante sobre sua fonte de energia ou excitação externa. Em problemas práticos de engenharia, a representação mais realista dessa influência é denominada de sistema não-ideal ou de potência limitada (máquina não-ideal). Neste trabalho, considera-se a dinâmica e o controle de um sistema auto-excitado pelo atrito interagindo com sua fonte de energia. O comportamento dos sistemas ideal e não-ideal são investigados através de simulação numérica e apresentam-se resultados de uma estratégia de controle chaveado para posicionamento e para seguimento de trajetórias periódicas, com compensação robusta do atrito, e a análise de estabilidade pelo método de Lyapunov.

Palavras-chave: dinâmica; controle; sistemas auto-excitados; excitação não-ideal; atrito

ABSTRACT

PONTES JUNIOR, B.R. (2003). *Dynamics and control of the non-linear systems with self-exciting interaction undergo ideal and non-ideal energy sources*. São Carlos, 2003, 176 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

The vibrations of machines are related to energy transference associate to two effects due to the friction: the energy dissipation and the self-excitation. the energy dissipation decrease and the self-excitation increase the system energy quantity. In dynamics of systems with friction occurs the stick-slip limit cycles and chaotic motion that can damage the machine working. For the control of that systems become necessary an compensation strategy of friction. In generally, are not considering the dynamical influence of oscillating system undergo their energy source or external excitation. In engineering practice problems, the more realistic representation of this influence is called non-ideal system or limited power supply (non-ideal machine). This work considers the dynamics and control of a self-excited system due to the friction interacting with their energy source. The behavior of ideal and non-ideal systems are investigated through numerical simulation and results of a switching control strategy for positioning and periodic trajectories tracking, with robust compensation of friction, and the stability analysis by the Lyapunov method are presented.

Keywords: dynamics; control; self-exciting systems; non-ideal excitation; friction

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta o tema e a motivação da pesquisa que está inserida no contexto da Teoria de Dinâmica e Controle de Sistemas Não-Lineares. Em seguida, apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre o fenômeno físico do atrito, as causas de auto-excitação devido ao atrito, a interação não-ideal com a fonte de energia e o controle de sistemas com atrito. Finalmente, apresentam-se os objetivos principais, os materiais e métodos utilizados, e uma descrição do conteúdo da tese.

1.1 TEMA E MOTIVAÇÃO

As oscilações (vibrações) mecânicas estão presentes em nossa vida nas mais diversas situações, tendo como exemplos, entre muitos outros em engenharia, os seguintes casos: o movimento oscilante da suspensão de um carro, o movimento do solo pela passagem de um ônibus nas proximidades e a propagação do som de uma música associada às vibrações acústicas. Todas essas situações, que notamos intuitivamente, são fenômenos físicos nos quais ocorrem transferência de energia mecânica de uma natureza para outra.

Os exemplos citados, anteriormente, apresentam as seguintes naturezas de energia:

- 1) na suspensão do carro, a mola é o elemento relacionado à energia potencial elástica de deformação do material e o amortecedor é o elemento dissipador (transformador) de energia mecânica para energia térmica, o que é verificado pelo aquecimento do óleo do amortecedor;

- 2) as rodas do ônibus, em movimento sobre o pavimento, transmitem energia potencial elástica para o solo;
- 3) a música é a transmissão de ondas de pressão no ar (pressão acústica), que são percebidas através de nosso sistema auditivo.

Em alguns problemas de engenharia, as oscilações (vibrações) mecânicas devem ser controladas ou suprimidas. Alguns exemplos de casos de necessidade de controle de oscilações (vibrações) mecânicas são: o problema da estabilidade dos veículos, o problema da emissão de ruído em sistemas mecânicos e o problema das oscilações (vibrações) induzidas por atrito em máquinas.

A seguir, na Figura 1.1, são citados alguns exemplos ilustrativos de sistemas com o fenômeno das oscilações (vibrações) induzidas por atrito que serão de utilidade na compreensão do texto. No caso de sistemas com atrito, podem ocorrer geração de ruído e/ou oscilações auto-excitadas que prejudicam o funcionamento dos sistemas. A dinâmica de uma superfície de contato com atrito produz uma alternância de estados do movimento, que são conhecidas como modo de aderência (*stick*, em inglês) e modo de deslizamento (*slip*, em inglês). Tal fenômeno pode ser, facilmente, observado no comportamento dinâmico entre o pneu e o pavimento (estrada) durante a frenagem brusca de um veículo. As oscilações (vibrações) induzidas por atrito que apresentam uma alternância de modos de oscilar são denominadas de oscilações adere-desliza. O movimento adere-desliza é indesejável, na maioria dos casos, por causa do seu efeito ser prejudicial sobre a operação e desempenho dos sistemas mecânicos. Sua eliminação é um dos principais interesses dos engenheiros envolvidos no projeto e operação de máquinas com componentes deslizantes (ANDRONOV *et al.*, 1966; HAGEDORN, 1988; IBRAHIM, 1994a-b; FEENY *et al.*, 1998).

(a) Sistemas de freios.

(b) Máquinas-ferramentas da indústria de manufatura.

(c) Sistemas articulados de robótica.

(d) Rodagem de trens em curvas gerando ruído.

Figura 1.1 Exemplos de engenharia de sistemas com oscilação adere-desliza
(extraído de FEENY *et al.*, 1998).

O sistema de perfuratrizes (*drillstrings*) de poços de petróleo, mostrado na Figura 1.2, onde uma broca muito longa é movida para perfuração da rocha, é também um exemplo de sistema com oscilação adere-desliza. O atrito com o solo, ao longo do comprimento da broca, sobrecarrega o sistema gerando oscilações, devido a elasticidade da broca. Devido a esse fenômeno, torna-se necessário a utilização de um sistema de controle do motor da perfuratriz que suprima as oscilações torcionais adere-desliza (*stick-slip*) da broca. Nos trabalhos de SERRARENS *et al.* (1998) e VRANDE *et al.* (1999) foi estudado esse problema de controle de oscilações adere-desliza.

Figura 1.2 Torre de perfuração de poços de petróleo.

Uma representação esquemática de um modelo conceitual de sistema com oscilações adere-desliza, é mostrada na Figura 1.3. O suporte, base de fixação, está submetido a um movimento em velocidade constante. A resposta desse sistema, para um determinado conjunto de parâmetros, é mostrada na Figura 1.4. Na curva do deslocamento do bloco (linha contínua), Figura 1.4(a), podem ser observados os patamares horizontais que correspondem ao modo de aderência. Durante o modo de aderência, a velocidade do bloco é nula em relação a superfície estacionária, Figura 1.4(b), e pode ser constatada através da comparação entre as respostas (deslocamento e velocidade do bloco). Nos outros intervalos de tempo verifica-se o modo de deslizamento, período em que ocorre uma aceleração, seguida de uma desaceleração.

Figura 1.3 Sistema com oscilações adere-desliza.

Figura 1.4 Resposta do sistema: (a) deslocamento; (b) velocidade.

Um outro exemplo de sistema com oscilação adere-desliza é ilustrado na Figura 1.5. O ciclo limite típico da oscilação adere-desliza, desse sistema, é mostrado na Figura 1.6.

Figura 1.5 Sistema mecânico.

Figura 1.6 Plano de fase do oscilador, mostrando o ciclo limite da oscilação adere-desliza e uma parte de trajetória em regime transiente no modo de aderência.

Em máquinas com transmissão de movimento ou de potência que utilizam componentes flexíveis denominados correias ou esteiras, pode aparecer um fenômeno de interação auto-excitadora de oscilações devido ao atrito. A correia ou a esteira transmite o movimento entre polias ou interage com outros mecanismos através do contato entre suas superfícies. Em OKUBO *et al.* (2000), foi apresentado um problema de controle de vibrações, através de excitação paramétrica, de um sistema de transmissão por correia. A análise da dinâmica, desses sistemas, é fundamental quando deve-se controlar as vibrações em cumprimento à diferentes especificações, tais como: de funcionalidade, de integridade estrutural ou de conforto ambiental devido a emissão de ruído. Com esta finalidade, várias investigações

científicas sobre o fenômeno de interação auto-excitadora de oscilações devido ao atrito têm sido conduzidas com o objetivo de desenvolver novas técnicas de projeto e controle (ANDREUS&CASINI, 2001, 2002; PONTES *et al.*, 1999; OKUBO *et al.*, 2000; PONTES *et al.*, 2000a, -b, -c, -d; PONTES *et al.*, 2001; PONTES *et al.*, 2002; THOMSEN, 1999; THOMSEN & FIDLIN, 2003; entre outras).

Um outro aspecto presente nos sistemas de engenharia é a interação da dinâmica do sistema mecânico (máquina ou estrutura), propriamente dito, e a sua fonte de energia (excitação). Na teoria clássica de dinâmica, essa interação não é considerada e esse modelo de máquina é denominada máquina ideal. Essa interação foi, pioneiramente, detectada por Sommerfeld em 1903 e recebeu o nome de efeito Sommerfeld. Se no modelo de uma máquina, o efeito Sommerfeld é considerado, ela recebe a denominação de máquina não-ideal. O efeito Sommerfeld foi descrito no livro de KONONENKO (1969). Ressalta-se que uma revisão dos trabalhos, nesta linha de pesquisa, até 1979 foi efetuada por NAYFEH & MOOK (1979) e, recentemente, por BALTHAZAR *et al.* (2002) que apresenta uma completa revisão do tema cobrindo o período de 1903 a 2002.

Do exposto, esse trabalho tem como motivação as várias aplicações existentes da engenharia de controle em sistemas que apresentam interações entre superfícies de contato, tais como, junções de manipuladores mecânicos (robôs), esteiras transportadoras, processos de fabricação (máquinas-ferramentas de alta precisão), máquinas perfuratrizes, sistemas anti-travamento de freios e rodagem de trens de alta velocidade.

1.2 BREVE HISTÓRICO DOS FENÔMENOS DO ATRITO EM ENGENHARIA

Os exemplos anteriores ilustram casos de diferentes tipos de mecanismos que apresentam vibrações auto-excitadas induzidas pelo atrito. Uma obra de revisão sobre o tema foi elaborada por IBRAHIM (1994a, -b) e serviu de fonte da história das investigações sobre as vibrações auto-excitadas pelo atrito. Na exposição das idéias, os comentários são apresentados distinguindo-se os sistemas mecânicos entre

sistemas com um grau de liberdade e com múltiplos graus de liberdade, descritos sumariamente a seguir:

Em um sistema dinâmico modelado como sendo de um grau de liberdade, para ocorrência de vibrações auto-excitadas, uma condição necessária é ter-se a inclinação (derivada da função) negativa da curva força de atrito-velocidade relativa. Essa inclinação negativa é a responsável pelo acréscimo de energia do sistema, que ocorre durante as vibrações auto-excitadas. Se existe um comportamento elástico no sistema, quando uma das superfícies desliza em relação a outra, o movimento não será contínuo e passa por um processo de alternância dos modos do movimento, denominado de movimento adere-desliza (*stick-slip*). Durante o movimento adere-desliza, dois mecanismos diferentes de deformação acontecem. O primeiro, ocorre quando as duas superfícies de contato aderem (*stick*) e as asperezas deformam elasticamente. O segundo é uma deformação plástica, onde o deslizamento (*slip*) acontece e as asperezas deformam plasticamente. A ocorrência de movimento adere-desliza é imprevisível, principalmente por causa da inclinação da curva força de atrito-velocidade relativa não ser constante e variar aleatoriamente devido a diversos fatores, tais como, contaminações, acabamento superficial, desalinhamento entre as superfícies de contato (IBRAHIM, 1994a, -b).

Em sistemas dinâmicos com múltiplos graus de liberdade, as diferenças de fase entre os modos de vibrar acoplados do movimento podem fornecer (transmitir) energia entre si, o que induz vibrações. As características das vibrações são dependentes do sistema e da intensidade do acoplamento entre o atrito e os diversos graus de liberdade do sistema. A importância do acoplamento entre os diversos graus de liberdade do sistema foi reconhecida em uma análise linear de um problema com geração de ruído (*squeal*) por atrito seco. Observações experimentais, de um sistema constituído de um pino deslizando sobre um disco rotativo, destacaram a importância do acoplamento nas vibrações induzidas por atrito (IBRAHIM, 1994a, -b).

Em IBRAHIM (1994a, -b) são encontrados os seguintes relatos históricos das investigações do fenômeno de auto-excitação de vibrações devido ao atrito. Em 1931 Den Hartog obteve uma solução exata do movimento estacionário adere-desliza de um sistema com um grau de liberdade, que apresentava dois intervalos de travamento ou aderência (*lockup*) por ciclo, isto é, nenhum movimento relativo entre as

superfícies de contato. A solução analítica por partes, de cada subintervalo, foi agrupada para a construção do ciclo completo do movimento periódico; em 1940, Blok linearizou a curva atrito-velocidade relativa e mostrou que o aumento do amortecimento do sistema, a partir de um certo valor, pode eliminar o fenômeno adere-desliza. Sua conclusão foi que a condição essencial para ocorrência do movimento adere-desliza é o decréscimo da força de atrito com o aumento da velocidade de deslizamento relativo, isto é, quando $dF_{Atrito}/dv_{Rel} < 0$, onde F_{Atrito} é força de atrito e v_{Rel} é a velocidade relativa; em 1955, Sinclair e Manville mostraram que a vibração induzida por atrito é devido a elevação do coeficiente de atrito quando a velocidade de deslizamento decresce; em 1957, Rabinowicz realizou experimentos sobre o processo adere-desliza e destacou a dependência da amplitude da vibração em relação a velocidade da superfície movida, mostrando que o movimento adere-desliza cessa quando uma dada velocidade crítica da superfície movida é atingida; em 1960, Singh considerou um coeficiente de atrito estático dependente do tempo. Os casos principais estudados até 1960 foram:

- 1) oscilações forçadas de um sistema massa-mola com atrito, que contém as contribuições combinadas do atrito viscoso e atrito Coulomb, sendo o suporte do sistema massa-mola excitado. A análise foi limitada ao estudo do movimento com deslizamento contínuo;
- 2) oscilações de um sistema no qual o atrito Coulomb e o viscoso são elasticamente acoplados ao suporte do sistema;
- 3) oscilações forçadas de um sistema com atrito Coulomb entre massa e suporte, submetido à excitação harmônica do suporte.

Continuando o relato de IBRAHIM (1994a, -b) tem-se a seguinte classificação das vibrações auto-excitadas. Em 1967, Brockley determinou uma expressão para a velocidade crítica que indica um limite para a ocorrência de vibrações auto-excitadas pelo atrito. Essa velocidade crítica depende do amortecimento do sistema, da carga normal, da rigidez e das características do atrito que variam com o tempo e a velocidade. Na maioria dos estudos sobre vibrações induzidas por atrito é considerado que o movimento adere-desliza existe por causa do atrito estático ser maior do que o atrito dinâmico; Brockley descobriu que uma oscilação quase-harmônica existe quando o movimento é governado por forças de atrito que

dependem apenas da velocidade relativa; em 1978, Tondl classificou as vibrações auto-excitadas em estáveis e instáveis (*soft and hard*). Os sistemas com vibrações auto-excitadas estáveis experimentam vibrações auto-excitadas, se e só se, sua posição de equilíbrio é instável. Por outro lado, sistemas com vibrações auto-excitadas instáveis possuem uma posição de equilíbrio estável. Portanto, com a ação de uma perturbação, de certa intensidade, acontece a transição para vibrações auto-excitadas. Assim, segundo essa classificação, a existência e não existência de vibração auto-excitada depende da estabilidade do ponto de equilíbrio. Também, foi verificado que a existência de oscilação quase-harmônica depende da forma particular da curva do atrito dinâmico; em 1970, Kato e Matsubayashi mostraram que a frequência de oscilação do movimento adere-desliza aumenta com o aumento da velocidade da superfície e que o máximo valor da frequência do movimento atingido aproxima-se do valor da frequência natural não-amortecida do sistema; em 1977, Alifov e Frolov examinaram o acoplamento auto-paramétrico na interação de um sistema oscilatório auto-excitado com potência limitada, máquina não ideal, para o caso da velocidade relativa entre a massa e a esteira ser positiva. A interação do movimento do sistema com a dinâmica da fonte de energia é um problema não-linear não-ideal.

Em linhas gerais, segundo IBRAHIM (1994a-b), são três as variáveis relacionadas com a eliminação ou minimização do movimento adere-desliza: a transição elasto-plástica, a rigidez das peças motrizes e a característica atrito-velocidade.

A seguir, disserta-se sobre uma revisão da literatura para posicionamento do problema que estamos pesquisando nesta tese.

1.3 REVISÃO DA LITERATURA

Na literatura, em geral, a denominação atrito seco refere-se a interação entre superfícies sólidas com movimento relativo, na qual não estão presentes substâncias com características de lubrificação. Na interação entre superfícies sólidas, o chamado atrito seco apresenta dois modos principais de movimento, os quais estão associados a aderência e ao deslizamento. O modo de aderência envolve o chamado atrito

estático e o modo de deslizamento o chamado atrito dinâmico. O modelo clássico de atrito seco que considera apenas o modo de deslizamento recebe o nome de atrito de Coulomb. Em geral, o atrito seco, também, é denominado de atrito adere-desliza, por causa dos modos de movimento associados. A força de atrito adere-desliza é uma resistência natural ao movimento relativo entre dois corpos em contato, sendo normalmente modelada como uma combinação linear de várias componentes de atrito. As componentes de atrito usuais na combinação são: o atrito Coulomb (dinâmico), o atrito da aderência (estático) e o atrito viscoso (dinâmico). O modelo do atrito construído com essas componentes é capaz de prever a dinâmica da maioria dos sistemas observados (ANDRONOV *et al.*, 1966; HAGEDORN, 1988; IBRAHIM, 1994a, -b; FEENY *et al.*, 1998).

O fenômeno não-linear do atrito seco entre superfícies de contato, presente em praticamente todos os mecanismos e máquinas, pode produzir amortecimento ou auto-excitação de vibrações, como já visto anteriormente. Exemplos de vibrações auto-excitadas aparecem no movimento de guias lineares e articulações de mecanismos de posicionamento, em sistemas de freio e acoplamentos por atrito. A auto-excitação pelo atrito seco ocorre em todos os sistemas de engenharia onde as forças de atrito têm influência significativa sobre a operação do sistema. Por esta razão, o atrito seco tem sido objeto de muitas investigações experimentais e modelos matemáticos têm sido propostos para o estudo das propriedades dinâmicas e estáticas do atrito seco (SHAW, 1986; HECKEL & ABRAHAMS, 1996; CANUDAS-DE-WIT *et al.*, 1995; MCMILLAN, 1997; CANUDAS-DE-WIT, 1998).

A seguir, disserta-se sobre a análise da dinâmica dos sistemas com atrito, citando vários trabalhos com o objetivo de posicionar o problema na literatura.

1.3.1 Análise da Dinâmica

Os sistemas com atrito, em geral, são sistemas descontínuos (não-suaves) e essa característica pode causar dificuldades nas diferentes formas de análise, na teórica e na numérica. O cálculo direto dos expoentes de Lyapunov não pode ser usado em sistemas descontínuos e, para essa finalidade, deve ser desenvolvido um procedimento especial para a análise das transições de movimentos adere-desliza

(*stick-slip*), desliza-desliza (*slip-slip*) e desliza-adere (*slip-stick*) (HINRICHS *et al.*, 1997).

O fenômeno do movimento adere-desliza foi estudado por vários pesquisadores, para exemplificar alguns, cita-se os seguintes trabalhos: WIT *et al.* (1995), MCMILLAN (1997), HINRICHS *et al.* (1998), LIANG & FEENY (1998), THOMSEN (1999) e THOMSEN & FIDLIN, (2003). Nestes trabalhos podem ser encontrados resultados de análises experimentais e numéricas das oscilações adere-desliza.

Um grande número de trabalhos mostra o comportamento do movimento caótico adere-desliza em osciladores não-lineares. Entretanto, apenas alguns mostram resultados sobre a predição analítica do caos adere-desliza. Um critério de predição de caos é o método de *Melnikov* descrito em diversos livros e trabalhos, tais como, GUCKENHEIMER & HOLMES (1983), KOILLER *et al.* (1987), ARGYRIS *et al.* (1994); NAYFEH & BALACHANDRAN (1995); AWREJCEWICZ & HOLICKE, (1999). Recentemente, em AWREJCEWICZ & HOLICKE (1999), uma fórmula de predição de caos homoclínico, obtida via o método de *Melnikov*, foi apresentada para um sistema mecânico com oscilações auto-excitadas adere-desliza devido às componentes de atrito Coulomb e viscoso, e pode-se delimitar regiões onde o comportamento caótico poderia ser observado. Em PONTES *et al.* (2001) foi estudado o problema de um sistema mecânico auto-excitado por um modelo de atrito com componentes de atrito estático e Coulomb, no qual utilizou-se também a fórmula da predição de caos homoclínico de AWREJCEWICZ & HOLICKE (1999).

A seguir, citam-se alguns trabalhos na área de dinâmica e controle de sistemas com atrito com o objetivo de posicionar o problema na literatura.

1.3.2 Sistemas com Atrito e seu Controle

Em SOUTHWARD *et al.* (1991) foi desenvolvida uma força de compensação não-linear do atrito adere-desliza para complementar uma lei de controle proporcional mais derivativa (PD) aplicada a um sistema mecânico de um grau de liberdade, para o problema com objetivo de posicionamento inercial. Uma força de controle proporcional mais derivativa (PD) foi aplicada no sistema com o atrito

adere-desliza, mas as trajetórias de estado terminaram próximas da posição desejada com um erro estacionário não-nulo. Uma ação integral poderia ser adicionada para zerar o erro estacionário, mas a força de atrito leva a ciclos limite indesejáveis. Então, a escolha de uma força de compensação descontínua foi motivada pela exigência da referência desejada (posição) ser o único ponto de equilíbrio do sistema compensado. Essa exigência, levou a adoção de uma força de realimentação proporcional não-linear descontínua, a qual comporta-se como uma força impulsiva tipo “bang-bang” na região próxima a referência desejada. Com essa lei de controle, o sistema tornou-se robusto a incerteza em relação ao atrito, sendo suficiente o conhecimento dos níveis do atrito estático. A estabilidade e a eficiência do controle foram verificadas analiticamente, numericamente e experimentalmente.

Em CANUDAS DE WIT *et al.* (1995), foi proposto um modelo dinâmico para o atrito e demonstrado as propriedades relevantes do modelo ao controle de sistemas com atrito. Segundo os autores o modelo captura a maior parte do comportamento do atrito que foi observada experimentalmente em outros trabalhos. Esse comportamento inclui o efeito Stribeck, a histerese, a característica elástica para a adesão (*stiction*) e uma força de aderência de limite variável (*varying break-away force*). As propriedades do modelo importantes para o projeto do controle foram investigadas por análise e simulação. Novas estratégias de controle de posição e velocidade foram apresentadas, incluindo um observador do atrito e a análise de estabilidade do sistema realimentado.

Em HECKEL & ABRAHAMS (1996), uma técnica de controle ativo para supressão de vibrações induzidas por forças de atrito seco foi investigada. O atrito seco atua como um mecanismo de excitação para vibrações de grandes amplitudes produzindo o efeito “*squeal*” quando trens percorrem curvas. Um sistema oscilante massa-mola em contato sobre uma esteira em movimento foi utilizado, pois sua dinâmica é semelhante ao problema do efeito “*squeal*” na rodagem de trens em curvas. Como resultado das análises, de tal sistema, uma predição das condições de estabilidade do sistema foi obtida, para em seguida incluir ao sistema um controle ativo de supressão de vibrações induzidas pelas forças de atrito seco. O sistema de

controle ativo consistiu de uma realimentação que controla a força de um atuador, vinculado à massa oscilante, que deve superpor-se à força de atrito. A estabilidade do sistema controlado foi analisada de duas maneiras: pelos autovalores e pela equação de balanço de energia do oscilador. As diferenças entre esta forma de controle ativo e os métodos convencionais anti-vibrações foram discutidas.

Em CASELLA *et al.* (1996) foi tratado o problema de supressão ativa de vibrações em estruturas flexíveis espaciais, no qual aplicou-se um controle não-linear, tipo força impulsiva (bang-bang). A estratégia básica de controle foi aplicada, inicialmente, em um oscilador mecânico de um grau de liberdade e os resultados da análise foram utilizados na síntese dos controladores liga-desliga (on-off). Segundo as observações desse trabalho, quando a derivada da função Lyapunov é descontínua devido a lei de controle, a estabilidade Lyapunov não pode ser aplicada na forma clássica. Mas se a condição $\dot{V}(x, \dot{x}) \leq 0$ é satisfeita, ela implica que o controlador reduz a energia mecânica total do sistema. Se o controlador for eficiente o bastante, a condição $\dot{V}(x, \dot{x}) \leq 0$ pode ser válida na vizinhança da posição de equilíbrio e através de simulações pode ser verificado se o controlador utilizado trabalha apropriadamente. Então, é possível mostrar que a lei de controle tem algumas propriedades estabilizantes. Os resultados de simulações e experimentos demonstraram o bom desempenho na presença de ruídos de medidas, atrasos nos atuadores e alta frequência, da dinâmica não modelada.

Em TATARYN *et al.* (1996) um estudo experimental sobre o comportamento de um manipulador industrial (rôbo) foi conduzido para avaliar o desempenho de algumas técnicas de compensação do atrito adere-desliza. O elemento principal do controlador foi um controle PD (proporcional mais derivativo). A este elemento principal foram experimentadas duas formas de ação integral e duas outras formas de compensação robusta não-linear, denominadas de realimentação proporcional não-linear descontínua e de realimentação não-linear robusta suave. Foram desenvolvidas simulações e experimentos que forneceram importantes informações sobre as características dos compensadores do atrito, indicando que o controle de

realimentação não-linear robusta suave, comparativamente, seria o mais apropriado na remoção dos erros de posição causados pelo o atrito adere-desliza e que para compensação da gravidade e de dinâmicas acopladas são necessários procedimentos de identificação de parâmetros. A compensação dos erros devido ao atrito viscoso não foi considerada e apenas foi observado os efeitos na resposta dos sistema.

Em MCMILLAN (1997), um modelo de atrito não-linear para o estudo das condições que geram ruído na derrapagem de rodas em curvas (*squeal*) devido as vibrações auto-excitadas induzidas pelo atrito foi desenvolvido. Um modelo do fenômeno foi proposto para caracterizar a natureza da força de atrito, combinando os conceitos de atrito estático e dinâmico, baseando-se na intuição e em evidências documentadas na literatura. O sistema foi simplificado para um bloco vinculado a uma parede rígida por uma mola e um amortecedor, e apoiado sobre uma esteira transportadora em movimento. Conforme verificado em HECKEL & ABRAHAMS (1996), a quantidade de energia que entra nesse sistema é auto-limitada e transmitida pelo atrito. Nesse sistema, a fonte de energia foi o movimento da esteira em velocidade constante. A frequência de oscilação do movimento do bloco oscilante foi estimada através do tempo para completar um ciclo. O efeito “*squeal*” foi considerado como sendo o aumento da amplitude do movimento do bloco, implicando o aumento da intensidade de qualquer ruído gerado pelo sistema. A dinâmica desse sistema não-linear, predita através do uso do modelo de atrito adotado, evidencia que as condições que produzem a auto-excitação de vibrações dependem da velocidade da esteira e das condições iniciais (deslocamento e velocidade) da estrutura. Esta constatação é útil para o controle e supressão de vibrações auto-excitadas induzidas pelo atrito. Os resultados caracterizaram três situações da dinâmica do problema:

- 1) oscilações adere-desliza com grandes amplitudes, isto é, modo de aderência e modo de deslizamento;
- 2) ciclo limite instável com deslizamento;
- 3) ponto de equilíbrio fixo (repouso) representando o estado estacionário em deslizamento puro e velocidade constante da esteira.

Em CANUDAS DE WIT *et al.* (1998) foi apresentada uma prova completa da estabilidade através do princípio da invariância de *La Salle* de um sistema com atrito, para os casos de seguimento (*tracking*) e regulação estudados em CANUDAS DE WIT *et al.* (1995).

Em LIANG & FEENY (1998), o comportamento dinâmico do atrito em um oscilador forçado com flexibilidade no contato foi descrito e quantificado, através de experimentos e simulações. A flexibilidade no contato pode aparecer da deformação elástica de regiões próximas a área de contato ou da estrutura do sistema. O modelo idealizado consistiu de uma massa deslizando harmonicamente sobre um contato flexível sem massa, o qual produziu histerese que pôde ser verificada através das curvas atrito-velocidade. A verificação da validade do modelo de atrito adotado incluiu os fenômenos do deslizamento contínuo e do movimento adere-desliza. As características dinâmicas do atrito, dependentes da rigidez no contato, da intensidade do atrito e da frequência e amplitude da oscilação, foram analisadas. A flexibilidade no contato é uma característica da modelagem física que representa o comportamento observado na natureza, o qual pode ser significativo no desempenho do sistema de controle e na geração de ruído (*squeal*) através da indução de vibrações (*dither*).

Em HINRICHS *et al.* (1997, 1998), a dinâmica de um oscilador auto-excitado pelo atrito com excitação externa harmônica foi investigada, dando ao sistema a denominação de tipo não suave, devido à descontinuidade presente no comportamento da força de atrito. Os diferentes tipos de movimento, diagramas de bifurcações e mapas de *Poincaré* foram determinados dos experimentos. Comparações com resultados numéricos foram utilizadas para identificação de modelos de atrito. Diferentes formas de calcular os expoentes de *Lyapunov* para sistemas não suaves foram discutidas e implementadas, além da análise de estabilidade.

Em ALLEYNE & LIUET (2000) foi desenvolvido um algoritmo de controle baseado em *Lyapunov* para controle de seguimento de força de um atuador eletro-hidráulico. O desenvolvimento do controlador dependeu de um modelo preciso do

sistema. Para compensação das incertezas paramétricas foi aplicada uma adaptação de parâmetros baseada em Lyapunov. A modelagem e compensação do atrito foram consideradas e os resultados experimentais demonstraram o bom desempenho da metodologia. Também foi demonstrado que algumas simplificações são possíveis na lei de controle adaptativo sem perda significativa de desempenho.

Em HACE *et al.* (2001) foi desenvolvido um algoritmo de controle de posição e seguimento e aplicado em um controlador de movimento CNC (comando numérico computadorizado) de uma máquina de corte a laser. O conjunto motriz da máquina é composto de correias motrizes. Esse servo-mecanismo elástico é descrito por um sistema de duas massas interconectadas por uma mola. Para uma malha fechada de controle que utiliza um procedimento convencional de controle, o desempenho é limitado devido a presença da elasticidade, do atrito e das perturbações. Quando utiliza-se um algoritmo de controle de movimento obtido da teoria de controle de estrutura variável, ocorre efetiva supressão das vibrações com garantia da compensação das incertezas do sistema e precisão no seguimento de posição. Os resultados experimentais demonstraram a robustez do controle para aplicação em máquinas com acionamento elásticos de baixo custo através de correias, mas com posicionamento preciso em alta velocidade.

Em SONG & AGRAWAL (2001) foi desenvolvido um procedimento de redução de vibrações de estruturas espaciais flexíveis durante o controle de atitude utilizando controle ativo através de um par de foguetes on-off na reorientação e materiais inteligentes (*smart materials*) na supressão das vibrações. Foram realizados experimentos para comparar as metodologias de controle por: modulação da largura do pulso e da frequência e controle *bang-bang* com e sem zona morta (*dead-zone*). Os resultados mostraram que o controle bang-bang produziu uma excessiva ação do foguetes e uma interação com os modos flexíveis da estrutura, resultando em ciclos limites. A modulação no controle dos foguetes induziu menores níveis de vibrações que foram suprimidas pelo uso de materiais inteligentes com realimentação da posição.

Em HÄGGLUND (2002) foi desenvolvido um procedimento compensador do atrito estático (aderência) em válvulas de controle pneumáticas. A compensação foi obtida através da adição de pulsos no sinal de controle, quando é detectado o movimento adere-desliza. As características dos pulsos foram determinadas pela ação do controle. A experiência das aplicações industriais mostra que o procedimento reduz significativamente o erro de controle durante o movimento adere-desliza quando comparado com o controle convencional sem compensação da aderência. O compensador melhorou o desempenho da malha de controle durante o movimento adere-desliza e não aumenta o desgaste das válvulas.

Em LIU & CHANG (2002) foi estudado um sistema um grau de liberdade com a presença em paralelo de uma mola linear, de um amortecedor viscoso e um dispositivo de atrito seco no contato. Uma massa, enquanto é movida periodicamente ou em velocidade constante sobre uma esteira, desliza ou adere na esteira. Foram deduzidas algumas soluções fechadas e mostrados alguns comportamentos interessantes do sistema. Para o oscilador com suporte imóvel e não amortecido sobre a esteira em movimento, foram desenvolvidas estimativas do deslocamento máximo e da velocidade mínima necessária para evitar a aderência. Duas leis de atrito foram estudadas: uma de atrito Coulomb e outra de atrito dependente da velocidade relativa, com inclinação negativa em baixa velocidade relativa. Os resultados mostraram uma bifurcação Hopf subcrítica.

Finalmente, em THOMSEN (1999) e THOMSEN & FIDLIN (2003) foram desenvolvidas aproximações analíticas para as condições de existência, as amplitudes e as frequências básicas das oscilações (vibrações) adere-desliza e em deslizamento puro, de um modelo de sistema massa-mola-esteira ideal que apresenta vibrações induzidas pelo atrito.

1.4 OBJETIVOS

Neste trabalho são tratados os sistemas com interação auto-excitadora devido às forças de atrito e considera-se, também, o caso da interação com a fonte de energia

do tipo não-ideal. Os objetivos do trabalho são a análise da dinâmica e do controle dos sistemas auto-excitados, nos quais as forças de atrito induzem oscilações adere-desliza. A escolha da configuração do tipo de sistema foi motivada pela grande equivalência observada entre o seu comportamento dinâmico e o comportamento dos diversos exemplos de sistemas de engenharia citados neste capítulo.

No sistema dinâmico oscilador-esteira-motor, ilustrado na Figura 1.7, considera-se a transferência de energia entre a esteira e o bloco oscilante devido ao atrito. Dois problemas de oscilações auto-excitadas são considerados. O primeiro problema considera o sistema ideal, como ilustrado na Figura 1.5, e o segundo, o sistema não-ideal, como ilustrado na Figura 1.7. No sistema ideal, a fonte de excitação é considerada uma constante ou uma função do tempo e no sistema não-ideal, a dinâmica do sistema é considerada como sendo dependente das propriedades de sua fonte de excitação (PONTES, 1999, 2000-a, -b, 2002). O último pode ser descrito como um sistema autônomo. Em ambos os problemas, a força de atrito é a força de interação responsável pelo efeito de auto-excitação do sistema oscilante bloco-esteira-motor.

Figura 1.7 Sistema mecânico com fonte de energia: sistema oscilador-esteira-motor.

Os objetivos da pesquisa estão distribuídos entre os seis tópicos detalhados a seguir:

1) O fenômeno físico conhecido como oscilações auto-excitadas

Estudo dos mecanismos geradores das oscilações auto-excitadas e os efeitos dinâmicos na estabilidade de funcionamento de máquinas e estruturas. Os

mecanismos auto excitadores constituem-se, normalmente, das não-linearidades do sistema.

2) A física e os modelos do atrito seco

Para entender melhor o fenômeno atrito seco é desenvolvido um estudo específico sobre a física do contato e os modelos matemáticos existentes. Esse estudo fornece a fundamentação para a escolha do modelo de atrito utilizado neste trabalho.

3) As oscilações auto-excitadas induzidas pelo atrito seco

Sendo o atrito seco o mecanismo indutor de oscilações auto-excitadas, desenvolve-se um estudo sobre as características do atrito seco relacionadas com o efeito da auto-excitação. O sistema com atrito seco é estudado através de técnicas da dinâmica não-linear, procurando detectar os regimes estacionários, os comportamentos transientes e caóticos.

4) A interação entre um sistema dinâmico com oscilações induzidas pelo atrito seco e a sua fonte de energia

A dinâmica do sistema com atrito seco interagindo com uma fonte de energia do tipo não-ideal é analisada através de técnicas da dinâmica não-linear.

5) O aparecimento de caos devido a auto-excitação nos problemas ideal e não-ideal

O aparecimento de caos é um aspecto importante da dinâmica do sistema e um estudo desse fenômeno é desenvolvido para identificação e qualificação das causas.

6) O controle de vibrações mecânicas auto-excitadas pelo atrito seco

Considera-se o problema de controle do sistema, com os seguintes objetivos: de supressão de vibrações, de seguimento de trajetória de posição e de eliminação de comportamentos caóticos. Uma análise de estabilidade do sistema controlado foi efetuada através do método de Lyapunov.

1.5 MATERIAIS E MÉTODOS

Neste trabalho, os ensaios numéricos foram realizados em um computador Pentium III, no qual foram executadas as rotinas de programação do aplicativo Matlab/Simulink®.

As equações dos sistemas ideal e não-ideal foram integradas pelo método Runge-Kutta ODE45, fornecendo os seguintes resultados:

- 1) séries temporais;
- 2) planos de fase;
- 3) espectros de frequência (transformada de Fourier);
- 4) mapas de Poincaré;
- 5) diagramas de bifurcações.

Estas técnicas são usuais em problemas de dinâmica e controle (PARKER & CHUA, 1989; ARGYRIS *et al.*, 1994; THOMPSON & STEWART, 1994; NAYFEH & BALACHANDRAN, 1995; KHALIL, 1996; FRADKOV & POGROMSKY, 1998).

A seguir, apresentam-se os comentários sobre o desenvolvimento da simulação dos sistemas ideal e não-ideal. Os aspectos de destaque são: a implementação dos modelos do sistema dinâmico, a escolha do passo de integração, o tempo de processamento necessário.

Na implementação dos modelos do sistema dinâmico foram necessárias muitas etapas de verificação e validação do programa, buscando a eficiência e facilidade de uso. A facilidade de uso está relacionada ao grande número de parâmetros que devem ser ajustados nos ensaios e as soluções que devem ser retiradas para exibição dos resultados.

Quando se utilizou um passo de integração de variação automática, o programa não convergia e quase sempre indicava erro numérico do programa. Então, verificou-se a necessidade de escolha do passo de integração fixo, devido a característica de descontinuidade do sistema com atrito. Para definir o passo de integração foram realizados ensaios com diferentes valores e após verificar a convergência das soluções definiu-se que um valor apropriado seria um passo de $\Delta t = T/1000$, onde T é o período de oscilação do oscilador linear. O integrador utilizado foi o Runge-Kutta ODE45 Matlab/Simulink®.

O tempo de processamento para obter as séries temporais e os planos de fase foi relativamente pequeno (da ordem de segundos ou minutos) na maioria dos

ensaios, mas no caso dos diagramas de bifurcações e mapas de Poincaré atingiu-se um tempo de processamento entre 8 e 10 horas.

A seguir, descreve-se como está esquematizado o conteúdo do trabalho.

1.6 DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO DA TESE

A tese é desenvolvida em seis capítulos, que apresentam o seguinte conteúdo.

No Capítulo 1, apresentam-se uma introdução geral dos sistemas com atrito de relevância na área de aplicações da engenharia, envolvendo auto-excitação, fontes de energia não-ideais e o controle dos sistemas.

No Capítulo 2, trata-se do modelo matemático dos sistemas auto-excitados pelo atrito, na forma do oscilador linear e do não-linear. Para o oscilador linear é considerada a interação com fontes de energia do tipo ideal e não-ideal.

No Capítulo 3, apresentam-se os resultados por integração direta das equações do movimento do oscilador linear, em três conjuntos: em primeiro, é apresentado o caso do sistema de transmissão ou acionamento do oscilador, através do movimento do suporte em velocidade constante, em contato com uma superfície em repouso e atrito seco que combina dois comportamentos do atrito, o atrito estático e o atrito Coulomb (dinâmico); em segundo, é apresentado o caso do oscilador interagindo com uma superfície de contato em velocidade constante e com diferentes modelos de atrito seco; em terceiro, é apresentado o caso do oscilador interagindo com uma superfície de contato acionada por uma fonte não-ideal, mostrando o efeito Sommerfeld. A análise está baseada nas respostas no tempo (estados transiente e estacionário), no plano de fase, nos espectros de frequência e diagrama de bifurcações. As variáveis ou parâmetros observados são: condição inicial, velocidade de excitação (velocidade da superfície de contato), componentes da força de atrito, força de excitação harmônica (amplitude e frequência de excitação), parâmetros da fonte de energia (motor).

No Capítulo 4, é desenvolvido um procedimento de controle de sistemas com atrito adere-desliza. A implementação de uma lei de controle para regular a posição do oscilador e para seguimento de uma trajetória de posição no plano de fase é realizada através de um controlador chaveado, inspirado na técnica de controle de

estrutura variável. A lei de controle varia de forma descontínua e o procedimento é robusto com respeito à força do atrito, da qual basta o conhecimento dos seus limitantes inferior e superior. Apresenta-se resultados dos sistemas ideal e não-ideal.

No Capítulo 5, apresentam-se os resultados por integração direta das equações do movimento do oscilador não-linear interagindo com uma superfície móvel em velocidade constante. O sistema oscilante é auto-excitado por um modelo de atrito seco que combina dois comportamentos do atrito, o atrito estático e o atrito Coulomb (dinâmico), e perturbado por uma excitação externa harmônica. Um método analítico de predição de caos homoclínico é aplicado na predição da ocorrência de movimento caótico do sistema. A análise está baseada nos diagramas de bifurcações e curvas de predição do caos homoclínico, nos seguintes parâmetros de controle: velocidade de excitação (velocidade da superfície de contato), força de excitação harmônica (amplitude e frequência de excitação).

No Capítulo 6, apresentam-se as discussões finais, as conclusões e propostas de abordagens para trabalhos futuros no tema da tese.

No Apêndice A, apresenta-se uma revisão sobre as características e o modelo do motor CC (corrente contínua). No Apêndice B, apresenta-se uma revisão sobre a física e os modelos do mecanismo do atrito, com o objetivo de fornecer uma visão geral e complementar do problema do atrito.

CAPÍTULO 2 - MODELAGEM MATEMÁTICA DOS SISTEMAS IDEAL E NÃO-IDEAL

Neste capítulo, inicialmente, discute-se o problema da auto-excitação devido ao atrito e apresenta-se a modelagem matemática adotada na solução dos sistemas ideais e não-ideais.

Nas análises, que serão efetuadas neste trabalho, são considerados dois tipos de problemas de oscilações auto-excitadas devido às forças de interação do atrito. O primeiro problema considera o chamado sistema ideal e o segundo, o chamado sistema não-ideal. No sistema ideal, a fonte de excitação é considerada como sendo uma constante ou uma função do tempo e no sistema não-ideal, a dinâmica do sistema é considerada como sendo dependente das propriedades de sua fonte de excitação. O último pode ser descrito como um sistema autônomo. Em ambos os problemas, a força de atrito seco é a força de interação responsável pelo efeito de auto-excitação do sistema oscilador-esteira-motor.

2.1 INTRODUÇÃO

No funcionamento de sistemas mecânicos, a amplitude das vibrações está relacionada à transferência de energia, que é associada a dois efeitos diferentes: o efeito de dissipação de energia (amortecimento) e o efeito da auto-excitação. O efeito de dissipação de energia é produzido por fenômenos de atrito que reduzem a quantidade de energia cinética e potencial de um sistema mecânico, tais como o amortecimento viscoso e o atrito seco. O efeito de auto-excitação depende das

características do sistema, onde o atrito (amortecimento) pode produzir transferência de energia ao sistema, aumentando a sua quantidade de energia.

Existe na literatura um número grande de trabalhos sobre teoria das oscilações com auto-excitações. A auto-excitação aparece nos casos em que o oscilador possui um comportamento não-linear dependente das forças de amortecimento. Nesses casos, a força de amortecimento aumenta a amplitude das oscilações quando as amplitudes são pequenas e tende a decrescê-las quando as amplitudes são grandes. Um movimento estacionário será estabelecido quando a variação da energia do sistema é nula no final de cada ciclo, ou seja, a energia que o sistema ganha durante uma parte do ciclo é perdida durante a parte restante do ciclo MEIROVITCH (1970). As oscilações auto-excitadas também foram estudadas através do método das perturbações em NAYFEH & MOOK (1979) e NAYFEH (1981).

2.1.1 Componentes de um Sistema Dinâmico Mecânico

O modelo de um sistema dinâmico mecânico pode ser representado por um conjunto de parâmetros concentrados, que caracterizam os componentes básicos do sistema dinâmico. Esses componentes básicos são classificados segundo suas propriedades, como a seguir:

- 1) a massa é um parâmetro associado ao efeito de memória, relativa a inércia do movimento, e a energia cinética do sistema;
- 2) a mola linear ou não-linear é um parâmetro associado ao armazenamento de energia potencial do sistema;
- 3) o amortecedor viscoso linear ou não-linear é um parâmetro relacionado a representação da dissipação de energia do sistema;
- 4) o mecanismo de excitação é um agente interno (auto-excitação) ou externo do sistema, que pode ser de potência ilimitada (caso ideal) ou limitada (caso não-ideal).

A combinação desses componentes permite a modelagem matemática de diferentes sistemas para análise do comportamento dinâmico e do controle.

A seguir, é demonstrado o fenômeno da auto-excitação de oscilações (vibrações) induzidas pelo atrito (amortecimento), através do exemplo do balanço de energia de um problema denominado de sistema linear com atrito negativo.

2.1.2 Sistema Linear com Atrito Negativo

Para exemplificar a origem do fenômeno de auto-excitação, ANDRONOV *et alli* (1966) utilizou um sistema linear massa-mola submetido a uma força perturbadora, na forma de um atrito denominado de atrito negativo. O termo da força perturbadora tem a seguinte forma $\{D(x, \dot{x})\dot{x}\}$, onde $D(x, \dot{x})$ é uma função amortecimento que depende das variáveis de estado do sistema, $(x, \dot{x})$, deslocamento e velocidade do sistema, respectivamente. Assim, o sistema linear massa-mola com a perturbação é representado pela seguinte equação do movimento

$$m\ddot{x} + D(x, \dot{x})\dot{x} + kx = 0 \quad (2.1)$$

onde

m é a massa;

$D(x, \dot{x})$ é a função amortecimento em relação as variáveis de estado do sistema;

k é a constante de mola linear;

x é o deslocamento em relação a posição de equilíbrio.

Em seguida, multiplica-se todos os termos de (2.1) por $\dot{x}$ e integra-se sobre o intervalo de tempo 0 a τ , obtendo-se a expressão

$$m \int_0^\tau \ddot{x} \dot{x} dt + \int_0^\tau D(x, \dot{x}) (\dot{x})^2 dt + k \int_0^\tau x \dot{x} dt = 0 \quad (2.2)$$

que após o processo de integração, relaciona as variações de energia do sistema através da seguinte expressão

$$\left. \frac{m}{2} \dot{x}^2 \right|_0^\tau + \left. \frac{k}{2} x^2 \right|_0^\tau = - \int_0^\tau D(x, \dot{x}) \dot{x}^2 dt \quad (2.3)$$

Os termos no lado esquerdo de (2.3) expressam a variação da energia cinética e da energia potencial do sistema durante o intervalo de tempo 0 a τ , e a sua soma determina a variação da energia total do sistema sobre este intervalo de tempo. Em (2.3) podem ser identificadas duas condições distintas e opostas:

- 1) Se o valor da função que representa o amortecimento for sempre positivo, $D > 0$, a integral do lado direito é positiva e a variação da energia é negativa, isto é, a energia do sistema decresce. Nesta condição, este decréscimo de energia é causado por perda de energia devido ao atrito;
- 2) Se o valor da função que representa o amortecimento for sempre negativo, $D < 0$, a integral do lado esquerdo é negativa e a variação da energia é positiva, isto é, a energia do sistema cresce. Nesta condição, o atrito representa a fonte de energia.

Em um sistema que não possui a sua própria fonte de energia, a segunda condição é impossível, pois o valor da função que representa o amortecimento D deve ser sempre positivo. Entretanto, se um sistema possui seu próprio reservatório de energia, pode ser admitido valor negativo para a função que representa o amortecimento, isto é, $D < 0$, e dessa forma a energia do sistema aumenta às custas do atrito. Certamente, quando $D < 0$, a segunda condição não representa o atrito no sentido usual, mas como a função D aparece no termo de (2.1) associado à velocidade, $\dot{x}$, que também pode representar o atrito normal (dissipativo), esse atrito recebe a denominação de “atrito negativo” ou “resistência negativa”.

A seguir, é apresentado o modelo do sistema ideal e demonstrado que a auto-excitação devido ao atrito depende da característica da relação força de atrito-velocidade relativa.

2.2 MODELAGEM DO SISTEMA IDEAL OSCILADOR-ESTEIRA

Um sistema mecânico, no qual o atrito pode ser negativo em uma certa região, é o sistema oscilador-esteira, como mostrado na Figura 2.1. Esse sistema é do tipo ideal, pois a velocidade da esteira (ou velocidade de excitação) não depende das variáveis de estado do oscilador. O sistema oscilador-esteira é constituído de um bloco de massa m , fixada por uma mola k , que oscila interagindo com uma esteira móvel pelo contato de superfícies. Neste exemplo, a velocidade da esteira (ou velocidade de excitação) v_B é considerada constante.

Figura 2.1 Sistema mecânico: oscilador-esteira.

Nesse sistema, a força de atrito, que atua entre o bloco de massa oscilante e a esteira, é uma função não-linear da velocidade relativa $v_{Rel} = v_B - \dot{x}$. A força friccional (de atrito) é representada pela função $F_{Atrito}(v_{Rel}) = F_{Atrito}(v_B - \dot{x})$ que caracteriza a dependência da força friccional em relação a velocidade relativa. Considerando que todas as forças friccionais atuantes nesse sistema (por exemplo, a resistência do ar ou o atrito interno da mola) são proporcionais a velocidade, a equação do movimento do sistema pode ser expressa por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{Atrito}(v_B - \dot{x}) \quad (2.4)$$

onde

x é o deslocamento da massa em relação a posição de equilíbrio,

$\dot{x}$ é a velocidade da massa,

$\ddot{x}$ é a aceleração da massa,
 m é a massa do bloco,
 k é a constante de mola linear e
 c é o coeficiente de amortecimento viscoso.

Inicialmente, sem especificar a forma da função friccional $F_{Atrito}(v_B - \dot{x})$ restringe-se a uma região do plano de fase para análise, na qual $|\dot{x}| \ll v_B$. Expande-se, agora, nesta região a função $F_{Atrito}(v_B - \dot{x})$ em série sobre os valores de v_B e considera-se apenas um termo da série. Então $F_{Atrito}(v_B - \dot{x}) = F_{Atrito}(v_B) - \dot{x} \partial F_{Atrito}(v_B) / \partial v_{Rel} + \dots$, e dentro dos limites desta aproximação, a equação de movimento assume a seguinte forma

$$m\ddot{x} + \left[c + \frac{\partial F_{Atrito}(v_B)}{\partial v_{Rel}} \right] \dot{x} + kx = F_{Atrito}(v_B) \quad (2.5)$$

onde o termo $\partial F_{Atrito}(v_B) / \partial v_{Rel}$ representa a inclinação (derivada) da função característica do atrito na velocidade da esteira v_B .

O termo constante $F_{Atrito}(v_B)$, que ocorre do lado direito de (2.5), causa apenas um deslocamento da posição de equilíbrio do sistema, que é proporcional à quantidade $F_{Atrito}(v_B)/k$, na direção do movimento da esteira (análogo ao repouso em equilíbrio do sistema linear). A amplitude e o sinal do coeficiente da velocidade $[c + \partial F_{Atrito}(v_B) / \partial v_{Rel}]$ depende da característica do atrito entre a massa e a esteira. Para uma característica de atrito decrescente, o termo $\partial F_{Atrito}(v_B) / \partial v_{Rel}$ assume valores negativos, $\partial F_{Atrito}(v_B) / \partial v_{Rel} < 0$. Se a característica do atrito decrescer rapidamente, na região próxima a v_B e o coeficiente de amortecimento viscoso c for suficientemente pequeno, tem-se a situação onde o coeficiente da velocidade $[c + \partial F_{Atrito}(v_B) / \partial v_{Rel}]$ é negativo, e (2.5) representa um sistema com “atrito negativo”. Na prática, este caso é fácil de ajustar, considerando que a característica do atrito, entre superfícies sólidas, apresenta usualmente a forma mostrada na Figura

2.2, que refere-se a um modelo de atrito com as componentes de atrito Coulomb e atrito viscoso. Em baixas velocidades, a característica do atrito tem quase sempre um segmento significativo com inclinação negativa. Nesta região, esse modelo representa um sistema linear com “atrito negativo”, ou seja, existe auto-excitação no comportamento do sistema (ANDRONOV *et al.*, 1966).

Figura 2.2 Característica da força de atrito constituída das componentes de atrito viscoso mais atrito Coulomb.

A seguir, é apresentado o modelo do atrito adere-desliza.

2.3 MODELO DO ATRITO

As observações, nos estudos pioneiros sobre as propriedades do atrito seco (atrito adere-desliza), identificaram que a força de atrito era proporcional a força normal do contato. O pesquisador Coulomb propôs o conceito de um valor limite para a força de atrito estático, que diz o seguinte: **“As forças externas aplicadas a um corpo em repouso relativo, não causaram deslizamento até que um valor limite seja ultrapassado. O valor limite para a força de atrito estático é maior do que o valor máximo da força de atrito dinâmico, que ocorre durante o deslizamento relativo entre as superfícies do contato”**. Na lei de atrito, criada por Coulomb, foi constatado que a força de atrito durante o deslizamento é quase independente da velocidade relativa do deslizamento e proporcional a força normal de contato entre as superfícies. A partir dessa constatação foram definidos os coeficientes de atrito estático e de atrito dinâmico, os quais relacionam o valor da força de atrito desenvolvida como sendo apenas função da força normal de contato. Para muitas situações, esta representação é considerada um bom modelo para o fenômeno do atrito durante o deslizamento (HECKEL & ABRAHAMMS, 1996; MCMILLAN, 1997; BERGER, 2001; BLAU, 2001).

2.3.1 O Modelo da Força de Atrito Adere-Desliza

A força de atrito adere-desliza é modelada com um termo para força de aderência e um termo para força de deslizamento, a qual gera derivadas descontínuas nas variáveis de estado do sistema. O modelo para a força de atrito adere-desliza F_{atrito} , usado nesta análise, é uma forma modificada do modelo introduzido por KARNOPP (1985). Este modelo permite a avaliação da força de atrito durante os movimentos com modos de aderência e de deslizamento e, também, elimina os problemas numéricos associados com os cálculos da força de atrito em valores da velocidade relativa próximos a zero. A expressão (2.6) representa o modelo conceitual da força de atrito adere-desliza F_{Atrito} ,

$$F_{Atrito}(v_{Rel}, F_R) = F_{desliza}(v_{Rel})[\lambda(v_{Rel})] + F_{adere}(F_R)[1 - \lambda(v_{Rel})] \quad (2.6)$$

$$\lambda(v_{Rel}) = \begin{cases} 1 & |v_{Rel}| > \alpha \\ 0 & |v_{Rel}| \leq \alpha \end{cases}, \quad \alpha > 0$$

onde

α é o parâmetro que representa um zero artificial e define a espessura da faixa de zero artificial em torno da velocidade relativa nula, sendo uma constante positiva e pequena (KARNOPP, 1985; SOUTHWARD *et al.*, 1991; LEINE *et al.*, 1998; THOMSEN, 1999; LEINE *et al.*, 2000; THOMSEN & FIDLIN, 2003);

$F_{desliza}$ é a função que representa a força de atrito no modo de deslizamento;

F_{adere} é a função que representa a força de atrito no modo de aderência;

F_R é a resultante das forças atuantes sobre a massa, que é equilibrada pelo mecanismo do atrito, na forma de uma força restritiva ao movimento relativo, durante o modo de aderência;

$\lambda(v_{Rel})$ é a função que realiza o chaveamento entre os modos.

Para o estudo analítico do sistema, o parâmetro zero artificial α é considerado como identicamente zero. Na simulação numérica, valores não nulos do parâmetro α são usados, o que garante que os algoritmos de integração numérica permaneçam estáveis. Qualquer valor da velocidade relativa, que está numericamente dentro da faixa definida pelo parâmetro α , é considerado como sendo velocidade relativa zero.

A função aderência

A função aderência, F_{adere} (2.7) fornece valores da força de atrito em velocidade relativa zero, ou seja, a força de atrito estático, como mostrado na Figura 2.3. Este termo da função atrito é usado para determinar se a massa estará aderida, ou se estará livre (*break free*) das forças de atrito estático. Os limites máximos positivos e negativos das forças de atrito estático são dados por F_s^+ e F_s^- , respectivamente. Os limites máximos da força de atrito estático são adotados como constantes em toda a análise, mas não se pressupõe que o módulo seja igual.

$$F_{adere}(F_R) = \begin{cases} F_s^+ & 0 < F_s^+ \leq F_R \\ F_R & F_s^- < F_R < F_s^+ \\ F_s^- & F_R \leq F_s^- < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Quando a massa não está em movimento relativo, $v_{rel}=0$, e a resultante das forças F_R atuantes sobre a massa, está entre os níveis máximos da força de atrito estático, o mecanismo do atrito fornece uma força restritiva ao movimento que mantém a massa em repouso, isto é, produz-se uma condição de equilíbrio. A massa não pode mover-se até que a força resultante, atuando sobre a massa, seja maior, em módulo, do que a respectiva força de atrito estático máxima, representada pela função aderência F_{adere} .

Figura 2.3 Modelo de força de aderência durante o atrito estático, com níveis iguais em ambos os sentidos, $F_s^+ = F_s^-$.

A função deslizamento

A função deslizamento, $F_{desliza}$, fornece os valores da força de atrito em velocidade relativa não nula, ou seja, a força de atrito dinâmica, e é representada por

$$F_{desliza}(v_{Rel}) = F_d^+(v_{Rel} - \alpha)\mu(v_{Rel}) + F_d^-(v_{Rel} + \alpha)\mu(-v_{Rel}) \quad (2.8)$$

onde $\mu(\cdot)$ é a função degrau Heaviside contínua à direita. A função $F_d^+(\cdot)$ define a força de deslizamento para velocidade relativa positiva, e a função $F_d^-(\cdot)$ define a força de deslizamento para velocidade relativa negativa. Para representar uma força de deslizamento não-simétrica, duas funções são necessárias. Um exemplo genérico de modelo de força de deslizamento, quando é adotado o valor zero para o parâmetro zero artificial, $\alpha=0$, é mostrado na Figura 2.4.

Figura 2.4 Exemplo genérico das componentes do modelo da força de deslizamento, $F_d^+(\cdot)$ e $F_d^-(\cdot)$, no primeiro e terceiro quadrante.

A força de deslizamento $F_{desliza}$ é adotada como sendo uma força dissipativa de energia em todas as velocidades não-nulas e, portanto, é limitada dentro do primeiro e terceiro quadrante. Baseado em observações físicas, quando a velocidade relativa aproxima-se de zero, pela direita ou pela esquerda, os valores limites da força de deslizamento não excedem, em geral, os respectivos níveis máximos da força de

atrito estático, F_s^+ e F_s^- , então, dessa maneira tem-se como limites naturais F_0^+ e F_0^- , para a força de deslizamento em velocidade relativa tendendo a zero.

Com a finalidade de utilizar um modelo genérico para a força de atrito de deslizamento (componente dinâmico), onde ajustando os parâmetros fosse possível representar diferentes formas de atrito, como por exemplo, o atrito com efeito Stribeck (derivada negativa em velocidade relativa baixa) mostrado na Figura 2.4, foram adotadas as seguintes funções força de atrito de deslizamento:

$$F_d^+(v_{Rel}) = F_0^+ - \Delta F^+ \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{v_{Rel}}{v_0^+} \right) \right] \right\} + b^+ v_{Rel} \quad (2.9a)$$

$$F_d^-(v_{Rel}) = F_0^- - \Delta F^- \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{v_{Rel}}{v_0^-} \right) \right] \right\} + b^- v_{Rel} \quad (2.9b)$$

onde F_0^+ e F_0^- são os níveis da força de atrito dinâmico na condição da velocidade relativa tendendo a zero; ΔF^+ e ΔF^- são a redução (queda) dos níveis da força de atrito dinâmico, em relação aos níveis em velocidade relativa tendendo a zero; v_0^+ e v_0^- são as constantes características de velocidade relativa nas quais ocorre 63% da redução (queda) na força de atrito dinâmico; b^+ e b^- são os coeficientes da componente de amortecimento viscoso do atrito de deslizamento. Nesse modelo da força de atrito de deslizamento o efeito Stribeck (derivada negativa) é representado pela associação do decaimento exponencial entre o nível do atrito estático ao nível da força de atrito dinâmica e uma componente de amortecimento viscoso (SOUTHWARD *et al.*, 1991). Os diferentes casos de atrito obtidos através de (2.9) serão detalhados no próximo capítulo.

A seguir, é apresentado o modelo do sistema não-ideal.

2.4 MODELAGEM DO SISTEMA NÃO-IDEAL OSCILADOR-ESTEIRA-MOTOR

Nesta seção é apresentado o modelo do sistema não-ideal oscilador-esteira-motor, no qual considera-se que a esteira é acionada por um motor CC (motor de corrente contínua) de potência limitada, como mostrado na Figura 2.5. O oscilador consiste de um bloco de massa ligada a uma mola linear e um amortecedor, fixados em um suporte. O bloco oscilante, por sua vez, está apoiado na esteira (superfície em movimento). A transferência de energia entre a esteira e o bloco oscilante ocorre através das forças de interação do atrito seco na superfície de contato. O atrito seco é modelado como em (2.6) através da combinação do atrito estático mais o atrito dinâmico, na forma da lei do atrito de Coulomb, como mostrado na Figura 2.6. Quando for utilizado, ao longo do trabalho, um modelo do atrito diferente deste, o modelo adotado será indicado.

Figura 2.5 Sistema mecânico com fonte de energia: sistema oscilador-esteira-motor.

Figura 2.6 Modelos de componentes da força de atrito no contato seco.

Em problemas de engenharia, em geral, não é considerada a influência do movimento do sistema oscilante sobre sua fonte de energia ou excitação externa. Entretanto, em muitos problemas práticos de engenharia foram observados que a excitação externa ou a fonte de energia do sistema é influenciada pela resposta do sistema. Esta constatação invalida a formulação tradicional da teoria das oscilações, o que torna necessário uma formulação, mais realista, que considere a interação entre as variáveis de estado da fonte de energia ou excitação externa e as variáveis de estado do sistema mecânico (KONONENKO, 1969; BALTHAZAR *et al.*, 2002). O modelo tradicional, onde a existência do fenômeno de interação dinâmica entre o sistema mecânico e a fonte de energia não é considerada, é denominado de modelo de sistema dinâmico com fonte de energia ideal (máquina ideal). O modelo que considera a interação dinâmica entre o sistema mecânico e a fonte de energia é denominado de modelo de sistema dinâmico com fonte de energia não-ideal ou de potência limitada (máquina não-ideal).

A máquina não-ideal é um conceito que depende, fundamentalmente, das características da máquina, por exemplo, a estrutura que a suporta. Um clássico exemplo de sistema não-ideal é uma estrutura flexível (por exemplo, uma viga engastada ou um simples pórtico) sobre a qual é montado um motor com um eixo desbalanceado com fonte de energia de potência limitada. No caso mencionado, o movimento do sistema estrutural, devido a sua própria flexibilidade, afeta as condições de funcionamento da máquina. Em consequência da interação entre a estrutura flexível e a fonte de excitação neste tipo de sistema dinâmico, os seguintes efeitos podem ser observados:

- 1) descontinuidades ou saltos abruptos na curva Amplitude versus Frequência e diferentes curvas Amplitude versus Frequência quando a velocidade do motor aumenta ou diminui, o que não é predito na teoria das oscilações;
- 2) dependência entre os efeitos mencionados acima e a característica do motor.

Além disso, deve ser notado que os sistemas dinâmicos não-ideais possuem graus de liberdade adicionais em função do número de fontes de energia de potência limitada interagindo no sistema, quando comparado ao sistema ideal correspondente. Um sistema com fonte de energia de potência limitada é caracterizado por não ter capacidade de operar em velocidades próximas as velocidades críticas (ressonâncias) e, também, mostra dificuldade em acelerar e/ou desacelerar durante a passagem através de velocidades críticas (ressonâncias), quando ocorrem grandes amplitudes na resposta transiente do sistema. Esse fenômeno é conhecido como efeito Sommerfeld, em honra ao primeiro pesquisador a observá-lo, e também é descrito em KONONENKO (1969). Tal tipo de problema foi considerado em YAMAKAWA *et al.* (1990), onde foi apresentado um método de otimização das curvas de operação de uma máquina rotativa com fonte de energia de potência limitada.

O controle de vibrações de um sistema dinâmico não-ideal durante a passagem pela ressonância foi realizado, experimentalmente, por DIMENTBERG *et al.* (1997), através da alteração momentânea da rigidez do sistema e por BALTHAZAR *et al.* (1999a) utilizando uma técnica de otimização. Uma revisão completa de diferentes

procedimentos para problemas não-ideais, até 1979, é dada em NAYFEH & MOOK (1979) e mais recentemente em BALTHAZAR *et al.* (2002). Os aspectos topológicos das vibrações paramétricas e não-paramétricas de alguns modelos dados em KONONENKO (1969) foram analisados em BALTHAZAR *et al.* (1999b).

A seguir, são apresentadas as equações do sistema não-ideal.

2.4.1 Problema de Oscilações Auto-Excitadas: Sistema Não-Ideal

O sistema não-ideal é descrito pelas equações do movimento do sistema dinâmico oscilador-esteira e do sistema rotacional (relativo ao motor). A equação do movimento do sistema dinâmico oscilador-esteira é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = F_{Atrito}(\dot{x}) + F_0 \cos(\omega_E t) \quad (2.10)$$

onde

x é o deslocamento do bloco em relação a posição de configuração não tensionada da mola;

y é o deslocamento do suporte;

m é a massa do bloco;

c é o coeficiente de amortecimento viscoso;

k é a constante elástica da mola;

$v_{Rel} = v_B - \dot{x} = r\dot{\phi} - \dot{x}$ é a velocidade relativa entre o bloco e a esteira;

v_B é a velocidade da esteira (ou velocidade de excitação);

r é o raio da polia da esteira ou a razão de transmissão;

$\dot{\phi}$ é a velocidade angular do eixo do motor;

F_0 e ω_E são a amplitude e a frequência da força externa de excitação, respectivamente;

$F_{Atrito}(\dot{x})$ é a função interação oscilador-esteira, ou seja, a força de atrito (2.6).

No modelo de atrito seco adotado, Figura 2.6, a componente de atrito estático tem como valores limites $|F_s^+| = |F_s^-| = F_s$, segundo a Figura 2.3, e para a componente de atrito dinâmico os seguintes valores $F_d^+(v_{rel}) = F_D$ e $F_d^-(v_{rel}) = -F_D$, segundo a Figura 2.4.

Para adimensionalizar e normalizar os parâmetros, algumas manipulações são aplicadas em (2.10) considerando o suporte em repouso, e a seguinte equação é obtida:

$$\ddot{x} + (2\xi\omega_N)\dot{x} + (\omega_N)^2 x = f_{Atrito}(\cdot, \cdot) + f_0 \cos(\omega_E t) \quad (2.11)$$

onde

$$\xi = \frac{c}{c_{Cr}} = \frac{c}{2m\omega_N} \quad \text{é a razão de amortecimento;}$$

$$c_{Cr} \quad \text{é o valor crítico do coeficiente de amortecimento;}$$

$$\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{é a frequência natural do sistema massa-mola;}$$

$$f_{Atrito}(\cdot, \cdot) = \frac{F_{Atrito}(\cdot, \cdot)}{m} \quad \text{é a amplitude da força de atrito normalizada pela massa do bloco;}$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m} \quad \text{é a amplitude da força de excitação externa normalizada pela massa do bloco.}$$

A seguir, é apresentado o modelo do motor CC.

Sistema motriz - fonte de energia

Aqui, são apresentadas as expressões essenciais do modelo do motor elétrico de corrente contínua (motor CC), para maiores detalhes veja o Apêndice A. Para um motor CC, o torque magnético ou motriz T_m é igual a soma do torque enviado para as cargas interna e externa (eixo do motor), sendo esta relação expressada por

$$T_m = T_L + T_{Eixo} \quad (2.12)$$

onde

T_L é o torque mecânico da carga interna;

T_{Eixo} é o torque mecânico da carga externa (no eixo do motor).

O torque mecânico da carga interna, incluindo inércia rotativa e amortecimento viscoso, é expressado da seguinte forma

$$T_L = J_{Motor} \ddot{\phi} + b \dot{\phi} \quad (2.13)$$

onde

$\dot{\phi}$ é a velocidade angular do motor (fonte de energia);

$\ddot{\phi}$ é a aceleração angular do motor (fonte de energia);

J_{Motor} é o momento de inércia de rotação do motor;

b é o coeficiente de amortecimento interno do motor.

A partir de (2.12) e (2.13), pode-se escrever a equação da dinâmica entre o motor e a carga externa, que relaciona o torque magnético, o torque mecânico da carga externa e os parâmetros mecânicos do motor,

$$J_{Motor} \ddot{\phi} + b \dot{\phi} = T_m - T_{Eixo} \quad (2.14)$$

Segundo DORF & BISHOP (1997), o motor CC controlado pela armadura utiliza uma corrente de campo constante e a relação eletro-mecânica do torque magnético desenvolvido pelo motor é dada por

$$T_m = K_t I_a \quad (2.15)$$

onde

K_t é a constante de torque do motor;

I_a é a corrente de armadura;

T_m é o torque magnético (ou motriz) desenvolvido pelo motor.

A partir de (2.14), (2.15) obtém-se a seguinte expressão para o torque mecânico da carga externa,

$$T_{Eixo} = -(J_{Motor} \ddot{\phi} + b \dot{\phi}) + K_t I_a \quad (2.16)$$

A equação do movimento rotacional (relativo ao motor) que descreve a interação entre a fonte de energia (motor) e a força de atrito é:

$$J_{Externo} \ddot{\phi} = T_{Eixo} - r F_{Atrito} \quad (2.17)$$

onde

$J_{Externo}$ é o momento de inércia de rotação do acoplamento entre a esteira e o motor;

T_{Eixo} é o torque mecânico no eixo do motor, descrito ilustrativamente pelas curvas características estáticas do motor, como mostrado na Figura 2.7.

2.7(a)

2.7(b)

Figura 2.7 Exemplos de curvas características estáticas de torque do motor CC:

- (a) Característica estática para diferentes tensões aplicadas. Na curva característica estática 1 estão indicadas as situações extremas da velocidade angular e do torque magnético, correspondentes à tensão aplicada V_{a1} ;
- (b) Curvas características estáticas para diferentes valores da constante de torque K_t , com uma dada tensão aplicada e sem limitação de corrente.

Agora, substituindo a equação (2.16) na (2.17), obtém-se a seguinte expressão que descreve a interação entre o motor e a força de atrito,

$$[J_{\text{Externo}} + J_{\text{Motor}}]\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} = K_t I_a - rF_{\text{Atrito}} \quad (2.18)$$

Definindo as variáveis de estado $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \varphi$, $x_4 = \dot{\varphi}$, o modelo do sistema não-ideal pode ser, então, representado pelo sistema de equações espaço de estado como

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= \dot{x} = x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \ddot{x} = -(2\xi\omega_N)x_2 - (\omega_N)^2 x_1 + \left(\frac{F_{\text{Atrito}}(\cdot, \cdot)}{m}\right) + f_0 \cos(\omega_E \tau) \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= \dot{\varphi} = x_4 \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= \ddot{\varphi} = \frac{-b\dot{\varphi} - rF_{\text{Atrito}}(\cdot, \cdot)}{J_{\text{Externo}} + J_{\text{Motor}}} + \frac{K_t I_a}{J_{\text{Externo}} + J_{\text{Motor}}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Características estáticas do motor CC

Em regime estacionário, a variação do torque magnético dT_m/dt é zero e a equação elétrica do motor CC é reduzida para (DORF & BISHOP, 1997)

$$T_m = \left(\frac{K_t}{R_a}\right)(V_a - K_e \omega) \quad (2.20)$$

Observe que, se a tensão aplicada V_a for mantida constante, na equação elétrica do motor, (2.20), ocorre uma relação linear entre o torque magnético T_m e a velocidade angular do motor ω , na forma

$$T_m = c_1 - c_2 \omega \quad (2.21)$$

onde as constantes c_1 e c_2 , da relação linear, dependem dos parâmetros elétricos do motor, como mostrado na Figura 2.7(a). Dessa relação, as curvas características estáticas do motor definem, matematicamente, dois casos extremos, um para velocidade angular nula ($\omega=0$) e um para torque nulo ($T_m=0$), como a seguir

$$\omega = 0 \Rightarrow T_m = T_0 = \left(\frac{K_t}{R_a} \right) V_a \quad (2.22)$$

$$T_m = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{V_a}{K_e} \quad (2.23)$$

Na Figura 2.7(a) são ilustradas as curvas das características estáticas do motor CC, para diferentes valores da tensão aplicada. Essas curvas representam os pontos de equilíbrio na operação do motor CC, para uma dada tensão aplicada e um torque resistente total (interno e externo), em regime estacionário. Na Figura 2.7(b) são ilustradas as curvas para diferentes valores da constante de torque.

A seguir, são apresentadas as equações do sistema ideal.

2.4.2 Problema de Oscilações Auto-Excitadas: Sistema Ideal

No sistema ideal, o sistema de equações é formado considerando-se o equilíbrio entre o torque disponível no motor e o torque requerido pelo sistema oscilante bloco-esteira. Portanto, a aceleração angular é nula e a velocidade angular permanece constante. Então, o modelo do sistema ideal passa a ser representado por uma forma mais simples de sistema de equações, ou seja, com menos graus de liberdade devido a ausência da interação com a fonte de energia, como o seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\tau} &= \dot{x} = x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \ddot{x} = -(2\xi\omega_N)x_2 - (\omega_N)^2 x_1 + \left(\frac{F_{Atrito}(\cdot,\cdot)}{m}\right) + f_0 \cos(\omega_E \tau)\end{aligned}\quad (2.24)$$

A seguir, é apresentado o modelo do sistema ideal do oscilador não-linear.

2.5 MODELAGEM DO SISTEMA OSCILADOR NÃO-LINEAR-ESTEIRA

Nesta seção, considera-se o mesmo sistema ideal oscilador-esteira, mas com o oscilador não-linear. O oscilador é não-linear devido a presença de uma mola não-linear, sendo a representação desse oscilador conhecida como equação de Duffing. Nesse sistema mecânico, o atrito pode ser negativo em uma certa região e o sistema será denominado de sistema oscilador não linear-esteira, como mostrado na Figura 2.8. Neste caso, a velocidade da esteira (ou velocidade de excitação) v_B é considerada constante.

Figura 2.8 Sistema mecânico: oscilador não linear-esteira.

2.5.1 Problema de Oscilações Auto-Excitadas: Sistema Oscilador Não-Linear com Fonte Ideal

Em sistemas mecânicos e de estruturas, os efeitos não-lineares aparecem quando as deflexões são de grandes amplitudes. Por exemplo, em uma viga bi-engastada, a rigidez devido a ação de flexão produz uma força restauradora não-linear. Tais sistemas podem ser representados pela equação de Duffing, cujo comportamento da solução fornece discernimento sobre a dinâmica não-linear, na qual aparecem comportamentos imprevisíveis e movimentos irregulares. A equação de Duffing representa um dos sistemas dinâmicos, mais simples, que podem apresentar movimentos caóticos. Em sua forma modificada, a força restauradora

(ação da mola) é aproximada por um polinômio de terceira ordem, e dessa forma, a equação de Duffing pode representar o comportamento de uma viga que apresenta grandes deflexões sob carregamentos axial e transversal (*buckling load*). A não-linearidade da força restauradora, relativa a variável de estado deslocamento, é uma condição necessária para o comportamento caótico, mas não é suficiente (ARGYRIS *et al.*, 1994; THOMPSON & STEWART, 1994; AWREJCEWICZ & HOLICKE, 1999).

O problema analisado é o sistema dinâmico oscilador não-linear-esteira descrito pela equação

$$m\ddot{x} - k_1x + k_2x^3 = F_{Atrito}(\cdot, \cdot) + F_0 \cos(\omega_E t) \quad (2.25)$$

onde

x é o deslocamento do bloco;

m é a massa do bloco;

k_1 é a constante elástica linear da mola;

k_2 é a constante elástica não-linear da mola;

F_0 e ω_E são a amplitude e a frequência da força externa de excitação, respectivamente;

$v_{Rel} = v_B - \dot{x}$ é a velocidade relativa entre o bloco e a esteira;

v_B é a velocidade da esteira;

$F_{Atrito}(\cdot, \cdot)$ é a função interação bloco-esteira, ou seja, a força de atrito (2.6).

Normalizando os coeficientes de (2.25), obtém-se

$$\ddot{x} - k_a x + k_b x^3 = f_{Atrito}(\cdot, \cdot) + f_0 \cos(\omega_E t) \quad (2.26)$$

onde $k_a = k_1/m$ e $k_b = k_2/m$ são as constantes normalizadas da mola não-linear;

$f_{Atrito}(\cdot, \cdot) = F_{Atrito}(\cdot, \cdot)/m$ é a amplitude da força de atrito normalizada pela massa do bloco;

$f_0 = F_0/m$ é a amplitude da força de excitação externa normalizada pela massa do bloco.

Definindo as variáveis de estado $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$, o modelo do sistema ideal, oscilador não-linear-esteira é representado pelo seguinte sistema de equações espaço de estado:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= \dot{x} = x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \ddot{x} = k_a x_1 - k_b x_1^3 + f_{Atrito}(\cdot, \cdot) + f_0 \cos(\omega_E \tau) \end{aligned} \quad (2.27)$$

CAPÍTULO 3 - ANÁLISE DA DINÂMICA DO OSCILADOR LINEAR IDEAL E NÃO-IDEAL

Neste capítulo é desenvolvida a análise do comportamento do oscilador linear em duas configurações: na primeira, o oscilador interage com uma superfície estacionária; e na segunda, o oscilador interage com uma superfície móvel. Na segunda configuração são analisadas duas situações: na primeira, a superfície móvel é representada por uma esteira em velocidade constante (velocidade de excitação constante); e na segunda, a esteira é acionada por um motor CC (de corrente contínua) e então, a velocidade torna-se dependente da característica dinâmica do motor. Os resultados, dessas análises, são apresentados segundo os seguintes conjuntos:

- 1) resultados da análise do movimento adere-desliza do sistema oscilador com movimento do suporte, que representa uma máquina com componentes deslizantes. Nessa análise verifica-se o comportamento do sistema para o modelo de atrito seco adotado;
- 2) resultados da análise do movimento adere-desliza do sistema oscilador-esteira para o caso ideal, no qual o movimento da esteira é mantido em velocidade constante (velocidade de excitação constante);
- 3) resultados da análise do movimento adere-desliza do sistema oscilador-esteira-motor para o caso não-ideal, no qual a esteira é acionada por um motor CC. Nessa análise verifica-se o aparecimento de caos e o comportamento bifurcacional do movimento devido ao atrito seco.

3.1 ANÁLISE DO ATRITO SECO

Para verificação do comportamento do sistema com o modelo de atrito seco adotado, uma análise é desenvolvida sobre o movimento de um oscilador linear interagindo com uma superfície estacionária. Este sistema é a representação elementar de uma máquina com componentes deslizantes.

3.1.1 Oscilador com Movimento do Suporte

Este problema consiste na análise do movimento de um bloco deslizando sobre uma superfície, e está representado por (2.10). O bloco está fixado a dois elementos mecânicos discretos (uma mola linear e um amortecedor linear viscoso), os quais estão submetidos ao movimento em velocidade constante através do suporte, como mostrado na Figura 3.1. No contato bloco-superfície, o modelo de atrito estático mais atrito dinâmico adotado é como mostrado na Figura 2.6. Em termos físicos, o atrito estático comporta-se como uma força restritiva ao movimento, até que seja atingido um valor limite da amplitude da força de atrito. De maneira distinta, o atrito dinâmico, denominado de atrito de Coulomb, comporta-se como uma força aplicada, cuja amplitude independe da velocidade relativa do deslizamento.

Figura 3.1 Sistema oscilador com movimento do suporte.

Na Figura 3.2, para análise das forças de atrito desenvolvidas no movimento estacionário adere-desliza, são mostradas as curvas atrito-deslocamento relativo, atrito-velocidade, plano de fase (velocidade-deslocamento relativo) e atrito-tempo. O amortecimento viscoso adotado, nesse caso, é nulo.

Figura 3.2 Forças de atrito na resposta estacionária do movimento adere-desliza, com amortecimento viscoso nulo $\xi=0$: curvas atrito-deslocamento relativo, atrito-velocidade, plano de fase e atrito-tempo.

Nas Figuras 3.3(a) e 3.3(b), são apresentados os resultados para o movimento adere-desliza com e sem amortecimento viscoso, respectivamente. As curvas mostram as seguintes respostas: o deslocamento do bloco e do suporte em relação ao tempo, a velocidade do bloco, o plano de fase velocidade-deslocamento relativo do bloco e a força de atrito versus tempo. Na Figura 3.3(a), a resposta com amortecimento viscoso nulo apresenta um ciclo limite adere-desliza no plano de fase. Na Figura 3.3(b), a resposta do sistema amortecido demonstra que ocorreu uma mudança na condição de estabilidade e o ciclo limite foi eliminado. Nesse caso, conclui-se que a auto-excitação devido ao atrito não foi suficiente para manter o ciclo limite adere-desliza.

3.3(a) Movimento estacionário adere-desliza do sistema não amortecido.

3.3(b) Resposta transiente do sistema com amortecimento.

Figura 3.3 Resposta do oscilador com movimento do suporte.

3.2 SISTEMA IDEAL: OSCILADOR-ESTEIRA

A seguir, é desenvolvida a análise do movimento do oscilador interagindo com uma esteira, que está em movimento. Como a velocidade da esteira (velocidade de excitação) é uma função independente das variáveis de estado do sistema, nesse caso tem-se um sistema denominado de ideal e está descrito por (2.24). O modelo de atrito adotado, no contato bloco-esteira, é o descrito por (2.6). A configuração do sistema é mostrada na Figura 3.4 (PONTES *et al*, 1999, 2000-a, -b).

Figura 3.4. Sistema mecânico oscilador-esteira.

3.2.1 Representação das Regiões do Espaço de Fase

Na Figura 3.5 são mostradas algumas trajetórias, em regime transiente, para diferentes condições iniciais e o ciclo limite da oscilação adere-desliza. Na Figura 3.5a, as trajetórias transientes são externas ao ciclo limite. Na Figura 3.5b, as trajetórias transientes são internas ao ciclo limite e nessa região podem aparecer, como regime estacionário, um ponto de equilíbrio (repouso em deslizamento puro) ou diferentes órbitas (trajetórias fechadas) com comportamento periódico, onde existem apenas o modo de deslizamento.

3.5a Trajetórias transientes externas ao ciclo limite.

3.5b Trajetórias transientes internas ao ciclo limite.

Figura 3.5 Plano de fase do oscilador mostrando o ciclo limite da oscilação adere-desliza e algumas trajetórias para diferentes condições iniciais.

A seguir, serão apresentados os resultados de simulação de um oscilador linear, com frequência natural $\omega_N = 1 \text{ rad/s}$, para análise da influência das condições iniciais na atração da trajetória, para três diferentes regimes estacionários: o ciclo limite adere-desliza, a órbita em deslizamento puro ou o repouso em deslizamento puro.

3.2.2 Análise do Sistema Oscilador-Esteira

Nas Figuras 3.6 a 3.10, são mostradas as respostas do sistema oscilador-esteira, com regimes transientes e estacionários do movimento. A localização da condição inicial, no plano de fase, está indicada pelo símbolo (X). Em cada conjunto de curvas são mostrados as seguintes respostas: o deslocamento, a velocidade, o plano de fase e a força de atrito.

Nas Figuras 3.6, 3.8 e 3.9 são mostrados os ciclos limite do movimento adere-desliza. Na figura 3.6 é verificado o efeito de atração, pelo modo de aderência, sobre o movimento iniciado em suas proximidades e com velocidade inicial do oscilador inferior a velocidade da esteira (velocidade de excitação). No plano de fase, também, pode ser observada a transição entre os modos de deslizamento e de aderência. Quando a velocidade relativa v_{rel} entre o bloco e a esteira muda de sinal ocorre a transição entre os modos do movimento, isto é, mudança de deslizamento para aderência e vice-versa. A ocorrência da aderência entre a esteira e o bloco é evidenciada pela linha reta horizontal no plano de fase.

Na Figura 3.7, para analisar o comportamento das forças de atrito durante o movimento adere-desliza, na resposta estacionária, do sistema oscilador-esteira, são mostradas as curvas atrito-deslocamento relativo, atrito-velocidade, plano de fase (velocidade-deslocamento) e atrito-tempo. Nesse caso, o amortecimento viscoso adotado é nulo e a condição inicial está sobre a região do modo de aderência.

Na Figura 3.8, também, é mostrado o efeito de atração da região do modo de aderência sobre o movimento iniciado nas proximidades, porém, neste caso é adotada como velocidade inicial do bloco um valor superior ao da velocidade da esteira

(velocidade de excitação). Nessas condições, o movimento, também, torna-se um ciclo limite com movimento adere-desliza.

Figura 3.6 Resposta do sistema oscilador-esteira para o coeficiente de amortecimento $\xi=0$. No plano de fase, a condição inicial está indicada pelo símbolo (X).

Figura 3.7 Força de atrito na resposta estacionária do sistema oscilador-esteira para o coeficiente de amortecimento $\xi=0$. No plano de fase, a condição inicial está indicada pelo símbolo (X).

Figura 3.8 Resposta do sistema oscilador-esteira para o coeficiente de amortecimento $\xi=0$. No plano de fase, a condição inicial está indicada pelo símbolo (X).

Nos resultados da Figura 3.9, foram considerados valores para as condições iniciais que são distantes da região de atração do modo de aderência e estão do lado de fora do ciclo limite da oscilação adere-desliza mostrada, anteriormente, na Figura 3.8. Nesse caso, o movimento do sistema entra numa trajetória que conduz ao ciclo limite com oscilação adere-desliza, como mostrado na Figura 3.9.

Na Figura 3.10 verifica-se que, se a velocidade inicial do bloco está fora da região de atração do movimento pelo modo de aderência, o efeito de atração não acontece. Nesse caso, o movimento resultante apresenta apenas interação da força de atrito dinâmica. Nessas condições, a resposta do sistema torna-se uma órbita e apresenta apenas o modo de deslizamento, ou seja, a velocidade do bloco é sempre inferior a velocidade da esteira (velocidade de excitação), $\dot{x} < v_B$.

Figura 3.9 Resposta do sistema oscilador-esteira para o coeficiente de amortecimento $\xi=0$. No plano de fase, a condição inicial está indicada pelo símbolo (X).

Figura 3.10 Resposta do sistema oscilador-esteira para o coeficiente de amortecimento $\xi=0$. No plano de fase, a condição inicial está indicada pelo símbolo (X).

Na Figura 3.11, é apresentado o caso de desestabilização do ciclo limite pelo amortecimento viscoso elevado. Nesse caso, o movimento é atraído por um ponto de equilíbrio (repouso) em deslizamento puro, isto é, o amortecimento adotado mudou a estabilidade do ciclo limite.

Figura 3.11 Resposta do sistema oscilador-esteira para o coeficiente de amortecimento $\xi=0,2$. No plano de fase, a condição inicial está indicada pelo símbolo (X).

3.2.3 Modos do Movimento no Sistema Oscilador-Esteira

A seguir, resumidamente, descrevem-se os modos do movimento adere-desliza.

Modo de deslizamento

No sistema oscilador-esteira, Figura 3.4, o bloco oscilante tem seu movimento amortecido e excitado pela força de atrito atuante entre o bloco e a esteira. O bloco oscila com amplitude limitada quando a parcela de energia retirada pelo atrito do sistema oscilante e a parcela de energia fornecida ao sistema oscilante (efeito de auto-excitação) são equivalentes durante um ciclo (HAGEDORN, 1988).

No regime estacionário, considerando apenas o atrito dinâmico relativo ao modo de deslizamento, o movimento do sistema apresenta três situações distintas, que são dependentes do movimento relativo entre o bloco oscilante e a esteira:

- 1) primeira, o movimento do bloco oscilante é oposto ao sentido do movimento da esteira. Nessa situação, o efeito de amortecimento ocorre sobre a oscilação do bloco;
- 2) segunda, a esteira e o bloco oscilante movem-se no mesmo sentido, mas o bloco move-se mais rápido. Nessa situação, novamente, ocorre o efeito de amortecimento;
- 3) e finalmente, a terceira, quando a esteira e o bloco oscilante movem-se no mesmo sentido, porém, o bloco move-se mais lento do que a esteira. Nessa situação ocorre o efeito da auto-excitação sobre o movimento do bloco oscilante (PONTES *et al.*, 1999, 2000).

Modo de não-deslizamento (aderência)

Quando a velocidade do bloco torna-se igual a velocidade da esteira (velocidade de excitação), durante o ciclo de oscilação, ocorre o fenômeno da força de atrito estático no contato, denominado de modo de não-deslizamento ou aderência. A alternância entre o modo de deslizamento e o modo de não-deslizamento é uma característica do movimento do sistema, a qual gera uma interação complexa oscilador-esteira, denominada de oscilação adere-desliza.

Quando os efeitos do atrito estático e do dinâmico são considerados e a velocidade do bloco é a mesma da esteira, o fenômeno do não-deslizamento ocorre e o sistema oscilante é excitado ou amortecido pela força de atrito estático, cujo valor é de maior intensidade do que os atingidos pela força de atrito dinâmico.

O efeito do amortecimento é associado a uma força oposta ao movimento do bloco e, dessa forma, o deslizamento (modo dinâmico) é o principal modo durante o amortecimento do movimento, o qual envolve valores menores da força de atrito dos que ocorrem durante o modo de não-deslizamento (modo estático). Por outro lado, o efeito de excitação do movimento do bloco oscilante recebe as contribuições de ambas as forças de atrito, ou seja, nos modos de deslizamento e não-deslizamento (PONTES *et al.*, 1999, 2000).

A seguir, apresenta-se uma análise do comportamento do sistema ideal oscilador-esteira para diferentes modelos de atrito.

3.2.4 Comportamento do Sistema para Diferentes Modelos de Atrito

Para verificação do comportamento do sistema oscilador-esteira quando está submetido a diferentes modelos de atrito, foram definidos os conjuntos de parâmetros, mostrados na Tabela 3.1, que caracterizam diferentes formas de forças de atrito representadas através de (2.6) a (2.9). O coeficiente de amortecimento viscoso adotado é $\xi=0,005$ e a frequência natural $\omega_N = 2\pi \text{ rad/s}$, em todos os casos.

Tabela 3.1 Parâmetros do modelo do atrito adere-desliza.

Caso	$F_s^+ (F_s^-)$	$F_0^+ (F_0^-)$	$\Delta F^+ (\Delta F^-)$	$v_0^+ (v_0^-)$	$b^+ (b^-)$
Sistema em regime não auto-excitado					
1	10,0 (-10,0)	10,0 (-10,0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
2	10,0 (-10,0)	10,0 (-10,0)	2,0 (-2,0)	0,1 (-0,1)	2,0 (2,0)
Sistema em regime de auto-excitação					
3	10,0 (-10,0)	10,0 (-10,0)	2,0 (-2,0)	0,1 (-0,1)	1,5 (1,5)
4	10,0 (-10,0)	8,0 (-8,0)	2,0 (-2,0)	0,1 (-0,1)	2,0 (2,0)
5	10,0 (-10,0)	8,0 (-8,0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)

Nas Figuras 3.12 a 3.16 são mostrados a função força de atrito e o correspondente comportamento do sistema oscilador-esteira. A série de resultados mostra que nos casos 1 e 2, os sistemas não apresentam auto-excitação e nos casos 3 a 5 tem-se a auto-excitação. No caso 1, Figura 3.12, o oscilador converge para o ponto fixo de repouso em deslizamento puro. No caso 2, Figura 3.13, o oscilador também converge para o ponto fixo de repouso. Nos casos 3 a 5, Figuras 3.14 a 3.16, o oscilador apresenta um ciclo limite em regime estacionário de oscilação adere-desliza. Deve ser observado que o modelo de atrito do caso 1 não induz oscilações auto-excitadas, mas o modelo de atrito do caso 2 não teve auto-excitação suficiente para compensar o amortecimento. Entretanto, o modelo do caso 3 é capaz de induzir auto-excitação suficiente para o sistema exibir um ciclo limite adere-desliza, e isso é atribuído a existência da derivada negativa em velocidades relativas baixas. No caso 4, foi inserida uma diferença entre o nível do atrito estático e do atrito dinâmico em velocidade relativa tendendo a zero, e essa forma também induz oscilações auto-excitadas com o ciclo limite adere-desliza. No caso 5, um modelo clássico de atrito, com a componente estática mais o atrito Coulomb, que é caracterizado por uma queda entre os níveis das componentes do atrito e a não dependência da velocidade relativa para a componente do atrito de deslizamento, induz oscilações auto-excitadas.

Os resultados da simulação indicam que tanto os modelos dos casos 3 e 4, com efeito Stribeck, e o modelo do caso 5 induzem o fenômeno da auto-excitação com intensidade suficiente para manter o ciclo limite adere-desliza. Essa constatação justificou o uso do modelo do caso 5 nos problemas analisados.

Desses resultados, a principal característica que induz a auto-excitação é a queda no valor entre as componentes do atrito. O limite do atrito estático é maior do que o limite do atrito Coulomb.

(a) Atrito estático e Coulomb de mesma intensidade.

(b) Regime estacionário de repouso em deslizamento puro.

Figura 3.12 Caso 1: sistema não auto-excitado.

(a) Atrito estático mais as componentes do atrito Coulomb e do atrito viscoso. O limite do estático é igual ao atrito Coulomb em velocidade tendendo a zero.

(b) Regime estacionário de repouso em deslizamento puro.

Figura 3.13 Caso 2: sistema não auto-excitado.

(a) Atrito estático mais as componentes do atrito Coulomb e do atrito viscoso. O limite do estático é igual ao atrito Coulomb em velocidade tendendo a zero.

(b) Regime estacionário em ciclo limite da oscilação adere-desliza.

Figura 3.14 Caso 3: sistema auto-excitado.

(a) Atrito estático mais as componentes do atrito Coulomb e do atrito viscoso. O limite do estático é maior do que o atrito Coulomb em velocidade tendendo a zero.

(b) Regime estacionário em ciclo limite da oscilação adere-desliza.

Figura 3.15 Caso 4: sistema auto-excitado.

(a) Atrito estático e Coulomb de intensidades diferentes. O limite do estático é maior do que o atrito Coulomb.

(b) Regime estacionário em ciclo limite da oscilação adere-desliza.

Figura 3.16 Caso 5: sistema auto-excitado.

3.3 SISTEMA NÃO-IDEAL: OSCILADOR-ESTEIRA-MOTOR

Nesta seção, desenvolve-se a análise da interação entre um sistema dinâmico, com vibrações induzidas por atrito seco, e a sua fonte de energia (motor CC). A combinação entre o sistema dinâmico e a sua fonte de energia constituem o denominado sistema não-ideal, objeto desta análise. Esse sistema não-ideal é identificado pela denominação de sistema oscilador-esteira-motor. As variáveis de estado foram definidas como x_1 = deslocamento, x_2 = velocidade, x_3 =deslocamento angular do motor, x_4 =velocidade angular do motor (PONTES *et al.*, 1999; PONTES *et al.*, 2000a; PONTES *et al.*, 2000b; PONTES *et al.*, 2002a; PONTES *et al.*, 2002b). As equações do movimento são dadas por (2.19), conforme apresentado anteriormente.

Figura 3.17 Sistema mecânico com fonte de energia: sistema oscilador-esteira-motor

3.3.1 Análise da Influência do Motor - Interação do Sistema Auto-Excitado e a Fonte de Energia de Potência Limitada

Para verificar a influência do motor sobre o movimento adere-desliza, são apresentados os resultados do caso ideal, mostrado na Figura 3.18, e do caso não-ideal para diferentes valores da constante do torque do motor, como mostrado nas Figuras 3.19 e 3.20. A partir da comparação entre os resultados, mostrados nas Figuras 3.18 a 3.20, torna-se possível fazer os seguintes comentários:

- 1) o plano de fase do caso ideal, Figura 3.18(c), mostra o comportamento do ciclo limite com movimento adere-desliza. A Figura 3.18(d) mostra a seção de Poincaré, que foi obtida para a frequência natural do sistema linear (oscilador sem atrito), na qual é possível verificar que o movimento do sistema está contido num ciclo limite regular. Através do espectro de frequência é constatado o comportamento quase periódico do sistema;
- 2) os planos de fase do caso não-ideal, Figuras 3.19(c) e 3.20(c), foram obtidos para constantes de torque $K_T=0,50$ e $0,05$, respectivamente. Para a constante de torque $K_T=0.50$, o comportamento do sistema não é muito diferente do caso ideal, Figura 3.18(c). Entretanto, para a constante de torque $K_T=0.05$, o comportamento do sistema torna-se plenamente aperiódico (irregular);
- 3) na Figura 3.19(d), a seção de Poincaré mostra a influência do motor, com constante de torque $K_T=0.50$, no comportamento do sistema oscilador-esteira. Agora, a resposta do sistema apresenta, também, trajetórias internas ao ciclo limite, que foi observado na resposta do sistema ideal. Um movimento irregular é constatado;
- 4) na Figura 3.20(d), a seção de Poincaré mostra que a influência do motor é maior, quando a constante de torque é reduzida para $K_T=0.05$. O movimento produzido é um movimento bastante irregular (caótico), quando comparado com o caso do motor de constante de torque $K_T=0,50$, que foi mostrado na Figura 3.19(d). Através do espectro de frequência é constatado o comportamento não periódico do sistema, indicando característica de movimento caótico. Nesse caso, o sistema funciona com o motor de potência mais reduzida, mas entra em regime de movimento caótico.

Figura 3.18 Respostas do caso ideal sem excitação externa para $v_B \approx 0.14 \text{ m/s}$ e $f_0 = 0 \text{ N/kg}$. (a) deslocamento; (b) velocidade; (c) plano de fase velocidade-deslocamento; (d) seção de Poincaré (1592 pontos); (e) espectro de frequência (obtido diretamente do Simulink© durante a simulação).

Figura 3.19 Respostas do caso não-ideal sem excitação externa harmônica para constante de torque $K_T=0.50$, $v_B \approx 0.14 \text{ m/s}$ e $f_0=0 \text{ N/kg}$. (a) deslocamento; (b) velocidade; (c) plano de fase velocidade-deslocamento; (d) seção de Poincaré (6400 pontos); (e) espectro de frequência (obtido diretamente do Simulink® durante a simulação).

Figura 3.20 Respostas do caso não-ideal sem excitação externa harmônica para constante de torque $K_T=0.05$, $v_B \approx 0.14\text{m/s}$ e $f_0=0\text{N/kg}$. (a) deslocamento; (b) velocidade; (c) plano de fase velocidade-deslocamento; (d) seção de Poincaré (6400 pontos); (e) espectro de frequência (obtido diretamente do Simulink© durante a simulação).

Influência do atrito sobre os pontos de transição do movimento

A seguir, para análise da influência das componentes da força de atrito nos pontos de transição do movimento adere-desliza foi obtido um diagrama de bifurcações, em relação ao parâmetro de controle amplitude da força de atrito dinâmica. O sistema considerado foi o sistema do caso ideal. O diagrama de bifurcações foi obtido como um conjunto de mapas de Poincaré quando varia-se um dado parâmetro de controle do sistema (Parker & Chua, 1989). O parâmetro de controle do sistema escolhido aqui foi a amplitude da força de atrito dinâmica F_D e os pontos do mapa de Poincaré foram obtidos quando a trajetória do sistema oscilante cruzou a velocidade relativa zero no plano de fase, isto é, os pontos de transição do movimento das oscilações adere-desliza. Através do diagrama de bifurcação, mostrado na Figura 3.21, é investigada a influência das amplitudes da força de atrito sobre os pontos de transição desliza-adere, desliza-desliza e adere-desliza. Os pontos de transição do movimento como uma função da amplitude da força de atrito dinâmica caracteriza um comportamento bifurcacional, o qual está associado aos planos de fase mostrados nas Figuras 3.18 a 3.20. Para uma diferença grande entre os valores das componentes da força de atrito durante as oscilações adere-desliza, o movimento apresenta três pontos de transição para a amplitude da força dinâmica $|F_d^+| = |F_d^-| = 0,1 \text{ N/kg}$.

Figura 3.21 Diagrama de bifurcações dependentes da amplitude da força de atrito dinâmico F_D ($v_B=0,14\text{m/s}$, $|F_s^+|=|F_s^-|=0,4\text{N/kg}$ e $f_0=0$).

A seguir, são apresentados resultados do caso não-ideal com excitação externa do oscilador, para mostrar a interação do sistema oscilador com a fonte de energia, em diferentes valores da frequência de excitação.

3.3.2 Caso Não-Ideal com Excitação Externa

Nesta seção, é apresentada a análise da influência do motor sobre o sistema auto-excitado forçado, ou seja, quando o oscilador está submetido a uma excitação externa. Para analisar o comportamento do sistema não-ideal, quando o bloco oscilante é excitado por uma força harmônica, foram obtidos três conjuntos de resultados do regime estacionário, através de uma variação lenta da frequência de excitação externa. Os valores da constante de torque do motor CC consideradas foram $K_T=0,5$, $K_T=0,05$ e $K_T=0,01$. Em todos os casos, foram utilizados os mesmos valores de tensão aplicada no motor. Em cada conjunto de resultados, são mostradas as respostas, em função da frequência de excitação externa, através das seguintes variáveis de estado: deslocamento e velocidade do bloco oscilante; e velocidade angular do motor. Nas Figuras 3.22, 3.23 e 3.24 são apresentados os resultados, para as constantes de torque $K_T=0,5$, $K_T=0,05$ e $K_T=0,01$, respectivamente. Nessa análise, um valor de constante de torque $K_T=0,5$ representa o caso de uma fonte de energia com capacidade de potência elevada. Através da comparação entre os resultados obtidos, para os diferentes valores da constante torque, podem ser feitos os seguintes comentários:

- 1) para $K_T=0,5$, pode ser notada uma influência pequena do motor sobre o movimento do sistema oscilante e que a velocidade angular do motor permanece praticamente constante. Este comportamento corresponde a resposta do modelo de sistema ideal;
- 2) para $K_T=0,05$, a amplitude do movimento do bloco oscilante decresce e a velocidade angular mostra maiores flutuações;
- 3) para $K_T=0,01$, o sistema oscilante sofre maior interação com sua fonte de energia, o que decresce a amplitude do movimento do bloco e aumenta as flutuações da velocidade angular, principalmente na faixa da razão de frequência

$$0,3 < \left(\frac{\omega_E}{\omega_N} \right) < 1,0.$$

De forma semelhante ao caso sem excitação externa, também, verificou-se a influência do motor no comportamento dinâmico do oscilador.

Figura 3.22 Respostas do sistema não-ideal, em função do parâmetro de controle frequência de excitação da força externa, para $K_T=0,5$, $v_B \approx 0,14 \text{ m/s}$, $|F_d^+| = |F_d^-| = 0,2 \text{ N/kg}$; $|F_s^+| = |F_s^-| = 0,8 \text{ N/kg}$ e $f_0 = 0,2 \text{ N/kg}$: (a) deslocamento-razão de frequência; (b) velocidade-razão de frequência; (c) velocidade angular-razão de frequência.

Figura 3.23 Respostas do sistema não-ideal, em função do parâmetro de controle frequência de excitação da força externa, para $K_I=0,05$, $v_B \approx 0,14\text{m/s}$, $|F_d^+|=|F_d^-|=0,2\text{N/kg}$; $|F_s^+|=|F_s^-|=0,8\text{N/kg}$ e $f_0=0,2\text{N/kg}$: (a) deslocamento-razão de frequência; (b) velocidade-razão de frequência; (c) velocidade angular-razão de frequência.

Figura 3.24 Respostas do sistema não-ideal, em função do parâmetro de controle frequência de excitação da força externa, para $K_I=0,01$, $v_B \approx 0,14\text{m/s}$, $|F_d^+|=|F_d^-|=0,2\text{N/kg}$; $|F_s^+|=|F_s^-|=0,8\text{N/kg}$ e $f_0=0,2\text{N/kg}$: (a) deslocamento-razão de frequência; (b) velocidade-razão de frequência; (c) velocidade angular-razão de frequência.

3.4 CONCLUSÕES

Neste capítulo foi analisado o comportamento de um sistema oscilante auto-excitado por atrito do caso não-ideal. Inicialmente, foi desenvolvida uma análise para verificação do comportamento do sistema oscilador com movimento do suporte para o modelo do atrito seco adotado, na qual os resultados demonstraram a concordância com as especificações do modelo. Então, obteve-se os resultados principais da análise, que foram sobre a interação entre a fonte de energia de potência limitada e as oscilações (vibrações) mecânicas induzidas por atrito.

A ocorrência da aderência entre a esteira e o bloco oscilante foi evidenciada pelas linhas retas horizontais nos planos de fase. Quando a velocidade da esteira (velocidade de excitação) ultrapassa um certo valor, o modo dominante é o deslizamento.

A influência da dinâmica do motor sobre o sistema oscilante, também, é evidenciada pelas variações presentes nas curvas de resposta da velocidade angular do motor. Através dos resultados foi possível observar a influência da fonte de energia sobre o sistema oscilante auto-excitado, a qual produziu movimentos não-periódicos com característica de movimento caótico, quando a característica do motor CC representou uma fonte de energia de potência limitada.

A influência das condições iniciais e da amplitude das componentes da força de atrito sobre a resposta do sistema oscilante foi mostrada através dos diferentes ciclos limites. A influência da amplitude da força de atrito dinâmica sobre as oscilações adere-desliza também pode ser notada nos pontos de transição do movimento desliza-adere, desliza-desliza e adere-desliza, mostrados no diagrama de bifurcações.

Nos resultados obtidos sobre a interação entre a fonte de energia e o sistema oscilante auto-excitado pelo modelo de atrito seco, verificou-se a ocorrência de diferentes intensidades da influência dessa interação dinâmica. Para o valor da constante de torque $K_T=0,01$, a resposta do sistema oscilante sofreu uma maior influência da fonte de energia, evidenciado a interação entre os comportamentos do motor e do sistema oscilante.

CAPÍTULO 4 - CONTROLE CHAVEADO PARA COMPENSAÇÃO ROBUSTA DO ATRITO ADERE-DESLIZA

Neste capítulo é desenvolvido um procedimento de controle de sistemas com atrito adere-desliza. A implementação de uma lei de controle para regular a posição da massa do oscilador e para seguimento de uma trajetória de posição periódica no plano de fase é realizada através de um controlador chaveado inspirado na técnica de controle de estrutura variável (UTKIN, 1978; ZINOBER, 1990). A lei de controle varia de forma descontínua, porém, esse procedimento é robusto com respeito à força do atrito, da qual conhece-se apenas os seus limitantes inferior e superior (PONTES *et al.*, 2002c).

4.1 Formulação do Problema de Controle Robusto

Desde que o homem começou a usar máquinas, o controle dos fenômenos presentes na natureza, tais como, a força de atrito adere-desliza tem sido uma fonte de dificuldades operacionais dessas máquinas, porém algumas vezes, o atrito tem ajudado nesse processo. O controle por realimentação, para o posicionamento preciso de sistemas mecânicos, torna-se muito difícil devido a força de atrito adere-desliza ser descontínua em velocidade zero. Com a finalidade de possibilitar a utilização das técnicas da teoria de controle linear que são bem desenvolvidas, os modelos dos sistemas não-lineares, em geral, são linearizados sobre algum ponto de operação. Entretanto, no caso do atrito adere-desliza, os esforços para linearizar ou desconsiderar o efeito do atrito são praticamente impossíveis ou produzem previsões

inválidas da resposta do sistema (ZINOBER, 1990; SLOTINE, 1991; SOUTHWARD *et al.*, 1991).

É comum, os sistemas servo-mecânicos terem seu desempenho deteriorado pela ação do atrito adere-desliza. Esses são sistemas não-suaves (*smooth*), isto é, apresentam descontinuidades, que nesse caso aparecem de duas maneiras distintas:

- 1) pelo atrito adere-desliza que é descontínuo em relação a velocidade relativa e;
- 2) pela lei de controle que é descontínua.

A escolha de uma força de compensação descontínua, em geral nesses casos, é motivada pela exigência da referência desejada (posição) ser o único ponto de equilíbrio do sistema compensado. Essa exigência, leva a adoção de uma força de realimentação proporcional não-linear descontínua, a qual comporta-se como uma força impulsiva tipo “bang-bang” na região próxima a referência desejada (SLOTINE, 1991; SOUTHWARD *et al.*, 1991; CASELLA *et al.*, 1996; TATARYN *et al.*, 1996; HACE *et al.*, 2001; SONG & AGRAWAL, 2001; HÄGGLUND, 2002).

Modelo do sistema

O modelo do sistema analisado, descrito no Capítulo 2, é o oscilador-esteira que consiste de uma massa deslizando sobre a superfície de uma esteira, como mostrado na Figura 4.1. Esse sistema apresenta o fenômeno da auto-excitação devido à ação do atrito adere-desliza na superfície de contato oscilador-esteira (THOMSEN, 1999; PONTES *et al.*, 2000).

Figura 4.1. Representação esquemática do sistema mecânico: sistema oscilador-esteira.

O modelo do oscilador linear, que interage com o atrito adere-desliza e está submetido à força de excitação F , é representado pela seguinte equação do movimento:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{Atrito}(\dot{x}, x) + F \quad (4.1)$$

onde

x é o deslocamento do bloco;

m é a massa do bloco;

c é o coeficiente de amortecimento viscoso;

k é a constante elástica da mola;

F é a força de excitação;

$F_{Atrito}(\dot{x}, x)$ é a função interação bloco-esteira, neste caso a força de atrito, e representa os efeitos estáticos e dinâmicos, a ser definida posteriormente.

Escrevendo a equação do movimento, na forma espaço de estados e escolhendo $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$ tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-cx_2 - kx_1 + F_{Atrito}(\dot{x}, x)}{m} + \frac{F}{m} \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.1.1 Modelo da Força de Atrito Adere-Desliza

O modelo para a força de atrito adere-desliza $F_{Atrito}(\dot{x}, x)$ usada nesta análise é semelhante ao modelo introduzido por KARNOPP (1985), como foi descrito no Capítulo 2. A força de atrito adere-desliza foi modelada com um termo para força de aderência e um termo para força de deslizamento, a qual gera derivadas descontínuas nas variáveis de estado do sistema. Ressalta-se que o modelo (2.6) permite a avaliação da força de atrito durante os movimentos com modos de aderência e de deslizamento e, também, elimina os problemas numéricos associados com os cálculos da força de atrito em valores da velocidade relativa próximos a zero.

4.1.2 Limitantes da Força de Atrito

A seguir, estudam-se os limitantes superior e inferior para cada uma das componentes da força de atrito, a saber, a força na aderência e a força no deslizamento.

A força de atrito de aderência

A força de atrito de aderência $F_{adere}(\cdot)$ apresentada em (2.7) é repetida a seguir em (4.3) para fácil referência. A mesma fornece valores da força de atrito em velocidade relativa zero, a chamada força de atrito estático, como mostrado na Figura 4.2. Este termo da força de atrito é usado para determinar se a massa estará aderida, ou se estará livre (*break free*) das forças de atrito estático. Os limites superior (positivo) e inferior (negativo) das forças de atrito estático são denotados por F_s^+ e F_s^- , respectivamente. O módulo dos limites da força de atrito estático podem ser diferentes.

$$F_{adere}(F_R) = \begin{cases} F_s^+ & 0 < F_s^+ < F_R \\ F_R & F_s^- < F_R < F_s^+ \\ F_s^- & F_R \leq F_s^- < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

onde F_R é a resultante das forças atuantes sobre a massa. Quando a massa não está em movimento relativo, isto é, $v_{Rel}=0$, e a resultante das forças F_R , atuantes sobre a massa, está entre os níveis máximos da força de atrito estático, o mecanismo do atrito fornece uma força restritiva ao movimento que mantém a massa em repouso, isto é, produz-se uma condição de equilíbrio. A massa não pode mover-se até que a força resultante, atuando sobre a massa, seja maior, em módulo, do que a respectiva força de atrito estático máxima, representada pela função aderência $F_{adere}(\cdot)$.

Figura 4.2 Modelo de força de atrito de aderência durante o atrito estático, com $|F_s^+| = |F_s^-|$.

A força de atrito de deslizamento

A força de atrito de deslizamento, $F_{desliza}(\cdot)$ pode ser representada por uma função da velocidade relativa a qual fornece os valores da força de atrito em velocidade relativa não nula, a chamada força de atrito dinâmica. A Figura 4.3 mostra a força de atrito de deslizamento adotada neste trabalho.

Figura 4.3 O modelo da força de atrito de deslizamento, $F_d^+(\cdot)$ e $F_d^-(\cdot)$, dentro dos limitantes lineares por partes no primeiro e terceiro quadrante.

Em toda a análise, as funções $F_d^+(\cdot)$ e $F_d^-(\cdot)$ são consideradas funções contínuas arbitrárias, as quais satisfazem a condição Lipschitz (relativa a continuidade) sobre seus respectivos domínios. A força de atrito de deslizamento $F_{desliza}(\cdot)$ é adotada como sendo uma força dissipativa de energia em todas as velocidades não-nulas e, portanto, é limitada dentro do primeiro e terceiro quadrante. É considerado que

existam constantes $F_s^- \leq F_0^- < 0$ e $F_s^+ \geq F_0^+ > 0$, as quais definem os limitantes lineares por partes para as forças de atrito de deslizamento, como mostrado na Figura 4.3. Baseado em observações físicas, quando a velocidade relativa aproxima-se de zero, pela direita ou pela esquerda, os limitantes da força de atrito de deslizamento não excedem, em geral, os respectivos níveis máximos da força de atrito estático, F_s^+ e F_s^- , então, dessa maneira, tem-se como limitantes naturais F_0^+ e F_0^- .

4.1.3 Construção da Lei de Controle para Regulação da Posição e Seguimento de Trajetória

A lei de controle para o oscilador submetido à ação do atrito adere-desliza é desenvolvida, para duas metas principais:

- 1) regulação da posição e;
- 2) seguimento de trajetórias de posição periódicas no espaço de fase.

No caso da regulação da posição, o ponto de equilíbrio no espaço de fase é adotado como sendo a posição de referência desejada. Um controle proporcional mais derivativo (PD) é simples de implementar, mas quando é aplicado no sistema com o atrito adere-desliza (4.2), as trajetórias de estado terminam próximas da posição desejada com um erro estacionário não-nulo. Uma ação integral pode ser adicionada para zerar o erro estacionário, mas certos modelos de força de atrito levam a ciclos limite indesejáveis. A lei de controle adotada é inspirada na lei de controle apresentada em SOUTHWARD *et al.* (1991) para um sistema mecânico de um grau de liberdade submetido ao atrito adere-desliza.

Na Figura 4.4 é ilustrado o ciclo limite da oscilação adere-desliza e indicado a posição desejada. As trajetórias desejadas para seguimento, serão definidas posteriormente.

Figura 4.4 Ciclo limite da oscilação adere-desliza e posição de equilíbrio $x_S = F_{desliza}(v_{Rel})/k$.

Com o objetivo de melhorar o desempenho do sistema com controle PD, neste trabalho inclui-se uma força de compensação descontínua $F_c(x)$ na lei de controle

$$F = -K_p x - K_d \dot{x} - F_c(x) \quad (4.4)$$

onde $K_p > 0$ e $K_d > 0$, são os ganhos proporcional e derivativo, respectivamente. A força de compensação descontínua $F_c(x)$ será construída em seguida, após a análise dos pontos de equilíbrio do sistema.

A seguir, será analisado o equilíbrio do sistema oscilador-esteira para dois casos de controle: no primeiro, o controle é PD e no outro, o controle é PD com compensação para o atrito.

Ponto de equilíbrio sem a força de compensação descontínua

O ponto de equilíbrio de (4.2) com a lei de controle PD, é obtido substituindo $F = -K_p x - K_d \dot{x}$ em

$$\dot{x} = 0 \quad (4.5)$$

$$\ddot{x} = \frac{-c\dot{x} - kx + F_{Atrito}(\cdot, \cdot)}{m} + \frac{F}{m} = 0 \quad (4.6)$$

e utilizando (2.6) em (4.6) tem-se

$$\{-c\dot{x} - kx + [\lambda(v_{Rel})F_{desliza}(v_{Rel}) + (1 - \lambda(v_{Rel}))F_{adere}(F)] - K_p x - K_d \dot{x}\} = 0$$

como $\dot{x} = 0$ e $v_{Rel} \neq 0$, $v_{Rel} = v_B$ tem-se

$$-kx + F_{desliza}(v_{Rel}) - K_p x = 0 \quad (4.7)$$

usando o modelo para a força de atrito de deslizamento $F_{desliza}(\cdot)$, como mostrado na Figura 4.3. A partir de (4.7) encontra-se os pontos de equilíbrio que dependem da força de atrito de deslizamento

$$x_{Eq}(F_{desliza}) = \frac{F_{desliza}(v_{Rel})}{(k + K_p)} \quad (4.8)$$

considerando que a velocidade da esteira (velocidade de excitação) é positiva, $v_B > 0$, para velocidade relativa positiva $v_{Rel} = v_B - \dot{x} > 0$, o ponto de equilíbrio está na região positiva do eixo x do espaço de fase, isto é, $x_{Eq}(F_{desliza}) > 0$. Para o modelo de atrito adotado $F_{desliza}(v_{Rel} > 0) = F_d^+$, então

$$x_{Eq} = \frac{F_d^+}{(k + K_p)}. \quad (4.9)$$

O ponto de equilíbrio x_{Eq} , obtido sem a compensação, é diferente da origem e, portanto, o sistema apresenta um erro estacionário na posição estando num estado estacionário de deslizamento nesse equilíbrio, onde a força de controle por realimentação proporcional mais derivativa (PD) é incapaz de compensar a força de atrito dinâmico.

O erro estacionário na posição do sistema realimentado com controle PD é mostrado na Figura 4.5, posteriormente, também será mostrado o resultado do controle PD com compensação do atrito. As respostas caracterizam duas fases do comportamento do sistema analisado: no início da simulação, o controle está

desligado e após o período inicial é ligado o controle. Para obter esses resultados foram utilizadas condição inicial $(x_0, v_0) = (0, 0)$; velocidade da esteira (velocidade de excitação) $v_B = 0,4 \text{ m/s}$; força de atrito $|F_s^+| = |F_s^-| = 10 \text{ N/kg}$; $|F_d^+| = |F_d^-| = 4 \text{ N/kg}$; amortecimento viscoso $\xi = 0,062$; tempo de simulação $\tau = 10 \text{ s}$; $\omega_N = \sqrt{k/m} = 2\pi \text{ rad/s}$.

Figura 4.5 Resposta do sistema para posicionamento na origem com controle PD com $(x_0, v_0) = (0, 0)$; $K_p = 10$; $K_d = 20$. O símbolo asterisco * representa a origem no plano de fase.

Ponto de equilíbrio com a força de compensação descontínua

Para alterar o ponto de equilíbrio, eliminando o erro estacionário de posição, inclui-se uma força de compensação descontínua em (4.6), a força de compensação escolhida tem a seguinte forma

$$F_c = K_p x_c \quad (4.10)$$

Com esta força de compensação e as restrições do equilíbrio (4.5) e (4.6), é necessário escolher uma função $x_c(x)$ tal que a relação

$$-x_{Eq} \leq (x + x_c) \leq +x_{Eq} \quad (4.11)$$

seja satisfeita apenas para $x=0$, então, garante-se que a origem seja o ponto de equilíbrio do sistema malha fechada. A função descontínua $x_c(x)$, que satisfaz a desigualdade (4.11), tem a seguinte forma

$$x_c(x) = \begin{cases} 0 & \tilde{x}_H < x \\ (\tilde{x}_H - x) & 0 < x \leq \tilde{x}_H \\ 0 & x = 0 \\ (\tilde{x}_L - x) & \tilde{x}_L \leq x < 0 \\ 0 & x < \tilde{x}_L \end{cases} \quad (4.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{x}_H &= x_{Eq} + \varepsilon \\ \tilde{x}_L &= -x_{Eq} - \varepsilon \end{aligned}, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.13)$$

são os limites ampliados da região de atuação da força de compensação descontínua F_c , à esquerda e a direita da origem, respectivamente. A adição da força de compensação descontínua F_c , definida por (4.10), (4.12) e (4.13), na lei de controle PD garante que a origem seja o único ponto de equilíbrio. A força de compensação é ativada apenas quando a massa está entre os limites da região ampliada de x , dada por $\tilde{x}_L \leq x \leq \tilde{x}_H$ (SOUTHWARD *et al.*, 1991).

A combinação da força de compensação descontínua com a força proporcional, $K_p(x + x_c)$, é mostrada na Figura 4.6. Dois parâmetros adicionais são definidos para simplificar a implementação da força de controle, como a seguir

$$\begin{aligned} \tilde{F}_s^+ &= F_s^+ + K_p \varepsilon \\ \tilde{F}_s^- &= F_s^- - K_p \varepsilon \end{aligned} \quad (4.14)$$

Figura 4.6 Força de compensação descontínua mais proporcional $K_p\{x+x_c(x)\} = K_p x + F_c(x)$.

Quando a massa está entre os limites $-x_{Eq} \leq x \leq x_{Eq}$, qualquer valor positivo de ε é suficiente para garantir que a força de realimentação sempre excederá os níveis da força de atrito. Dessa forma, aplicando-se esta estratégia de controle em (4.2), garante-se que a massa continua movendo direto para origem. Então, nessa região, a força de controle é, essencialmente, uma força impulsiva tipo *bang-bang*.

A seguir, discute-se o problema da estabilidade do sistema controlado.

4.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE

4.2.1 Estabilidade pelo Método Direto de Lyapunov

Uma modificação do método direto de Lyapunov é usada para o caso da função Lyapunov candidata não-diferenciável (SHEVITZ & PADEN, 1994; WU *et al.*, 1998; WU & SEPEHRI, 1999). O teorema da estabilidade assintótica global de Lyapunov para sistemas contínuos é modificado pela substituição da derivada $\dot{V}(x, \dot{x})$ pelas derivadas Dini $D^*V(\cdot)$, onde o asterisco * representa qualquer uma das quatro derivadas Dini possíveis (ROUCHE *et al.*, 1977; SOUTHWARD *et al.*, 1991). Em qualquer ponto onde a derivada $\dot{V}(x, \dot{x})$ existe, todas as quatro derivadas Dini terão um valor comum igual a derivada naquele ponto, ou seja

$$D^*V(\cdot) = \dot{V}(\cdot) \quad \forall (x, \dot{x}) \notin S \quad (4.15)$$

onde S é uma superfície de descontinuidade contida na região $v_{Rel}=0$ a qual é ilustrada na Figura 4.7. Todas as descontinuidades são simples e portanto ambos os valores limites esquerdo e direito das derivada $\dot{V}(x, \dot{x})$ existem fora de S . As derivadas Dini são simples nestes limites. Desde que $V(x, \dot{x})$ é contínua e $\dot{V}(x, \dot{x})$ é semi-definida negativa para todos os pontos fora de S , as derivadas Dini são semi-definida negativas para todos os pontos de S (YOSHIKAWA, 1966).

Figura 4.7 Superfície de descontinuidade S e o ciclo limite da oscilação adere-desliza.

Teorema: A origem do sistema (4.2), com a lei de controle dada por (4.4), é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Prova: Escolhe-se como candidata a função Lyapunov que representa aproximadamente a função energia do sistema

$$V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + g(x) \quad (4.16)$$

onde

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} K_p (\tilde{x}_H)^2 & \tilde{x}_H < x \\ K_p \left[\tilde{x}_H x - \frac{1}{2} x^2 \right] & 0 \leq x \leq \tilde{x}_H \\ K_p \left[\tilde{x}_L x - \frac{1}{2} x^2 \right] & \tilde{x}_L \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} K_p (\tilde{x}_L)^2 & x < \tilde{x}_L \end{cases} \quad (4.17)$$

é um complemento não-linear da função Lyapunov candidata mostrada na Figura 4.8 (SOUTHWARD *et al.*, 1991). Deve ser verificado que esta candidata a função Lyapunov é definida positiva, decrescente e satisfaz uma condição Lipschitz global. Esta função é também contínua em relação aos estados x e $\dot{x}$.

Figura 4.8 Complemento não-linear, $g(x)$, para a função Lyapunov candidata.

Avalia-se a seguir a derivada no tempo da função Lyapunov candidata, $\dot{V}(x, \dot{x})$, ao longo da solução de (4.2). A derivada $\dot{V}(x, \dot{x})$ é o produto escalar entre o gradiente de $V(x, \dot{x})$ e a derivada do vetor de estados. O sistema (4.2) é descontínuo em todos os pontos na superfície de descontinuidade S no espaço de estados e, de (4.17) tem-se que o gradiente de $V(x, \dot{x})$ é descontínuo em $x=0$. Assim, a derivada $\dot{V}(x, \dot{x})$ é descontínua ou não existe para todos os pontos da superfície S , entretanto ela existe e é bem definida para todos os pontos nas regiões abertas R_1 ($x_2 > v_B$) e R_2 ($x_2 < v_B$), mostradas na Figura 4.7. Ao longo da solução, excluindo os pontos de S , pode-se calcular a derivada da candidata a função Lyapunov (4.16), obtendo

$$\dot{V}(x, \dot{x}) = kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} + \frac{\partial g(x)}{\partial x}\dot{x} \quad (4.18)$$

Substituindo (4.2) em (4.18) tem-se

$$\dot{V}(x, \dot{x}) = kx\dot{x} + m\dot{x} \left[\frac{-c\dot{x} - kx + F_{\text{Atrito}} + F}{m} \right] + \frac{\partial g(x)}{\partial x}\dot{x}$$

e na sequência (2.6) e (4.4) resulta

$$\dot{V}(x, \dot{x}) = kx\dot{x} + \dot{x} \left[-c\dot{x} - kx + \{F_{\text{desliza}}\lambda(v_{\text{Rel}}) + F_{\text{adere}}(1 - \lambda(v_{\text{Rel}}))\} - K_p x - K_d \dot{x} - K_p x_c \right] + \frac{\partial g(x)}{\partial x}\dot{x}$$

que simplificada torna-se

$$\dot{V}(x, \dot{x}) = -c\dot{x}^2 - K_d\dot{x}^2 + \dot{x}F_{desliza}(v_{Rel}) - \dot{x}K_px + \dot{x}\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x} - K_px_c\right) \quad (4.19)$$

onde

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = \begin{cases} 0 & \tilde{x}_H < x \\ K_p(\tilde{x}_H - x) & 0 < x \leq \tilde{x}_H \\ \text{indefinido} & x = 0 \\ K_p(\tilde{x}_L - x) & \tilde{x}_L \leq x < 0 \\ 0 & x < \tilde{x}_H \end{cases} \quad (4.20)$$

Através de (4.12), nota-se que o último termo $\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x} - K_px_c\right)$ de (4.19) é identicamente zero em todo x , exceto em $x=0$, onde $\frac{\partial g(x)}{\partial x}$ é indefinido, além disso, deve-se verificar a validade da expressão

$$\dot{V}(x, \dot{x}) = -c\dot{x}^2 - K_d\dot{x}^2 - \dot{x}\{K_px - F_{desliza}(v_{Rel})\} \leq 0 \quad \forall (x, \dot{x}) \notin S \quad (4.21)$$

através do sinal do termo

$$-\dot{x}\{K_px - F_{desliza}(v_{Rel})\}. \quad (4.22)$$

A Figura (4.9) ilustra todas as possibilidades para este sinal.

Figura 4.9 Subdivisão do espaço de estado em subregiões para análise da estabilidade. Nas subregiões é indicado o sinal do termo $-\dot{x}\{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\}$.

Na análise do sinal de (4.22), é definido o parâmetro

$$x_t = \frac{F_{desliza}(v_{Rel})}{K_p} \quad (4.23)$$

o qual é o ponto de mudança de sinal do termo $\{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\}$. A seguir, para analisar o sinal de (4.22), são tabuladas as situações possíveis:

a) na região R1: $v_{Rel} < 0$ e $F_{desliza}(v_{Rel}) < 0$

$$(1) \quad v_B < \dot{x} \quad ; \quad x < x_t < 0 \quad ; \quad \{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} < 0$$

$$\text{então} \quad -\dot{x}\{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} > 0$$

$$(2) \quad v_B < \dot{x} \quad ; \quad x_t < x < 0 \quad ; \quad \{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} > 0$$

$$\text{então} \quad -\dot{x}\{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} < 0$$

$$(3) \quad v_B < \dot{x} \quad ; \quad 0 < x \quad ; \quad \{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} > 0$$

$$\text{então} \quad -\dot{x}\{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} < 0$$

b) na região R_2 : $v_{Rel} > 0$ e $F_{desliza}(v_{Rel}) > 0$

$$(4) \quad 0 < \dot{x} < v_B \quad ; \quad x < 0 \quad ; \quad \{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} < 0$$

$$\text{então} \quad -\dot{x}\{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} > 0$$

$$(5) \quad 0 < \dot{x} < v_B \quad ; \quad 0 < x < x_t \quad ; \quad \{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} < 0$$

$$\text{então} \quad -\dot{x}\{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} > 0$$

$$(6) \quad 0 < \dot{x} < v_B \quad ; \quad x_t < x \quad ; \quad \{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} > 0$$

$$\text{então} \quad -\dot{x}\{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} < 0$$

$$(7) \quad \dot{x} < 0 < v_B \quad ; \quad x < 0 \quad ; \quad \{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} < 0$$

$$\text{então} \quad -\dot{x}\{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} < 0$$

$$(8) \quad \dot{x} < 0 < v_B \quad ; \quad 0 < x < x_t \quad ; \quad \{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} < 0$$

$$\text{então} \quad -\dot{x}\{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} < 0$$

$$(9) \quad \dot{x} < 0 < v_B \quad ; \quad x_t < x \quad ; \quad \{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} > 0$$

$$\text{então} \quad -\dot{x}\{K_p x - F_{desliza}(v_{Rel})\} > 0$$

Nas regiões (1), (4), (5) e (9), mostradas na Figura (4.9), o termo (4.22) é positivo. Entretanto, uma vez que $\dot{x}$ é limitada, existe um ganho derivativo K_d que torna a desigualdade (4.21) válida. Nas demais regiões, o termo (4.22) é sempre negativo. Usando (4.15), as derivadas Dini são semi-definida negativas sobre todo o espaço de estados. A partir de (4.21) tem-se que $\dot{V}(x, \dot{x}) = 0$ em um conjunto de pontos no eixo x_1 quando se tem $x_2 = 0$. Mas pode-se verificar que a solução não está completamente contida neste conjunto e portanto, a origem é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável (VIDYASAGAR, 1978).

Nas Figuras 4.10 a 4.12 são mostradas a derivada da função Lyapunov para três valores diferentes do ganho derivativo, na forma de superfícies, e os seus perfis. Na Figura 4.14 é constatado que os valores da derivada da função Lyapunov são negativos ou nulos na região da análise. Nas Figuras 4.13 e 4.14 são mostradas seções transversais em relação a uma das variáveis de estado na superfície que representa a derivada da função Lyapunov.

Figura 4.10 Para $K_p=10$; $K_d=0$.

Figura 4.11 Para $K_p=10$; $K_d=30$.

Figura 4.12 Para $K_p=10$; $K_d=100$.

Figura 4.13 Seções da derivada da função de Lyapunov para $x_1=0$, $K_p=10$ e $K_d=100$.

Figura 4.14 Seções da derivada da função de Lyapunov para $x_2=0$, $K_p=10$ e $K_d=100$.

4.3 RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos das aplicações da estratégia de controle, proposta na Seção 4.1, no sistema auto-excitado pelo atrito como já descrito. No começo é apresentado um exemplo da forma da força de compensação descontínua em função da posição e, a seguir, os casos analisados do controle. Estes estão agrupados conforme o objetivo do controle e a lei de controle utilizada, e são especificados a seguir:

- 1) a origem como posição de equilíbrio, através de uma lei de controle PD;
- 2) a origem como posição de equilíbrio, através de uma lei de controle que associa o controle PD e a força de compensação descontínua em função da posição;
- 3) uma trajetória de posição para o oscilador atingir uma órbita periódica desejada, através de uma lei de controle PD sobre o erro de posição;
- 4) uma trajetória de posição para o oscilador atingir uma órbita periódica desejada, através de uma lei de controle que associa o controle PD sobre o erro de posição e a força de compensação descontínua, também em função do erro de posição.

As respostas caracterizam duas fases do comportamento do sistema analisado: no início da simulação, o controle está desligado e após o período inicial é ligado o controle.

4.3.1 Força de Compensação do Atrito

A força de compensação descontínua atua somente em torno da origem, numa faixa $[\tilde{x}_L, \tilde{x}_H]$ definida de acordo. Uma ilustração das amplitudes da força de compensação é mostrada na Figura 4.15. Os parâmetros adotados nesse exemplo são: $K_p=1000$; faixa de atuação da força descontínua $[-0,01;0,01]$ m; $|\tilde{F}_s^+| = |\tilde{F}_s^-| = 12$ N/kg.

A faixa de atuação é definida em relação aos limites ampliados da posição x , para que a força de compensação descontínua seja sempre maior do que o limite superior da força de atrito.

Figura 4.15 Força de controle descontínua mais proporcional $K_p(x+x_c(x))=K_p x+F_c(x)$.

4.3.2 Controle de Posição

Os resultados da análise do controle de posição, nos quais o objetivo é atingir a origem do espaço de fase, estão divididos em dois conjuntos segundo a estratégia de controle utilizada, como indicado a seguir:

- 1) lei de controle PD. Os resultados são mostrados na Figura 4.16.
- 2) lei de controle (4.9), que associa o termo PD e o termo de compensação descontínua, com chaveamento dependente da posição, para o efeito do atrito adere-desliza. Os resultados são mostrados na Figura 4.17.

Em todos os resultados apresentados nesta seção, foram utilizados: condição inicial $(x_0, v_0) = (0, 0)$; velocidade da esteira (velocidade de excitação) $v_B = 0,4 \text{ m/s}$; força de atrito $|F_s^+| = |F_s^-| = 10 \text{ N/kg}$; $|F_d^+| = |F_d^-| = 4 \text{ N/kg}$; amortecimento viscoso $\xi = 0,062$; tempo de simulação $\tau = 10 \text{ s}$ e $\omega_N = \sqrt{k/m} = 2\pi \text{ rad/s}$.

Ao observar os resultados na Figura 4.16 constata-se que a trajetória do sistema converge rapidamente para a vizinhança da origem, mas não atinge essa posição, que é o objetivo do controle. No caso do controle PD está presente um erro estacionário de posição. Nos resultados da Figura 4.17 pode ser observada a eficiência da compensação que eliminou o erro estacionário de posição produzido pelo estado estacionário de deslizamento existente devido ao atrito adere-desliza.

Figura 4.16 Resposta para posicionamento na origem com controle PD com $(x_0, v_0)=(0,0)$; $K_p=10$; $K_d=20$.

Figura 4.17 Resposta para posicionamento na origem com controle PD mais compensação descontínua para o atrito adere-desliza, com $(x_0, v_0)=(0,0)$; $K_p=10$; $K_d=20$;

$$|\tilde{x}_L| = |\tilde{x}_H| = 0,01\text{m}; \quad |\tilde{F}_s^+| = |\tilde{F}_s^-| = 12\text{N/kg}.$$

4.3.3 Controle de Trajetória de Posição

Os casos analisados estão agrupados conforme o objetivo do controle e a estratégia de controle utilizada, e são especificados a seguir:

- 1) uma trajetória de posição para o oscilador atingir uma órbita periódica desejada, através de uma lei de controle PD sobre o erro de posição $e = x - x_{desejado}$ em relação a órbita desejada, com chaveamento dependente do erro de posição. Os resultados são mostrados na Figura 4.18.
- 2) uma trajetória de posição para o oscilador atingir uma órbita periódica desejada, através de uma lei de controle sobre o erro de posição $e = x - x_{desejado}$ em relação a órbita desejada, que associa o controle PD e um termo de compensação descontínuo para o efeito do atrito adere-desliza, com chaveamento dependente do erro de posição. Os resultados são mostrados na Figuras 4.19.

Em todos os resultados apresentados, foram utilizados: condição inicial $(x_0, v_0) = (0, 0)$; velocidade da esteira (velocidade de excitação) $v_B = 0,4 \text{ m/s}$; força de atrito $|F_s^+| = |F_s^-| = 10 \text{ N/kg}$; $|F_d^+| = |F_d^-| = 4 \text{ N/kg}$; amortecimento viscoso $\xi = 0,062$; tempo de simulação $\tau = 10 \text{ s}$ e $\omega_N = \sqrt{k/m} = 2\pi \text{ rad/s}$.

Nos resultados mostrados pode ser observado que as trajetórias do sistema no espaço de fase convergem rapidamente para o objetivo do controle, a trajetória de posição desejada. Entretanto, no caso do controle PD, Figura 4.18, está presente um erro estacionário na trajetória de posição, que é maior na região próxima do modo de aderência, na qual a influência do atrito estático é dominante. Nos resultados da Figura 4.19 pode ser observada a eficiência da compensação que reduziu o erro estacionário da trajetória de posição produzido pelo atrito adere-desliza.

Figura 4.18 Resposta para seguimento de trajetória com controle PD. A linha tracejada indica a trajetória desejada ($K_p=10$; $K_d=20$; amplitudes e frequência da órbita= $(0,2; 0,2\pi; \pi)$).

Figura 4.19 Resposta para seguimento de trajetória com controle PD com compensação descontínua para o atrito adere-desliza ($K_p=10$; $K_d=20$; $|\tilde{F}_s^+| = |\tilde{F}_s^-| = 12\text{N/kg}$; amplitudes e frequência da órbita= $(0,2; 0,2\pi; \pi)$).

A seguir, são apresentados os resultados da aplicação da estratégia de controle para o caso do sistema não-ideal oscilador-esteira-motor, representado por (2.19).

4.3.4 Controle do Sistema Não-Ideal

Os dados do motor são os seguintes $R_a=1\Omega$; $K_t=K_e=0,437$; $J=0,6594\text{e-}3\text{kg.m}^2$; $B=0,4494\text{e-}3\text{N.m.s/rad}$; relação da transmissão motor-esteira=0,001. Os dados do oscilador são: $\xi=0,05$; $m=1,0\text{kg}$; $k=(2\pi)^2\text{N/m}$; $\omega_N=(2\pi)\text{rad/s}$; $T=1\text{s}$; condição inicial $(x_0, v_0)=(0;0,4)$. A faixa de atuação da força de compensação é $|\tilde{x}_H|=|\tilde{x}_L|=0,01\text{m}$.

Nos resultados do controle do sistema não-ideal oscilador-esteira-motor, mostrados nas Figuras 4.20 a 4.23, pode-se observar que a interação entre o sistema não-ideal controlado e o motor não está aparente, a influência do motor nesse caso é pequena.

Nas Figuras 4.23(a) e 4.23(b) são apresentadas duas situações: na primeira, os limites da força de compensação são inferiores ao da força de atrito e na segunda, os limites são superiores. Esses resultados mostram a atuação da força de compensação da força de atrito, principalmente na região de aderência.

Figura 4.20 Caso não-ideal: resposta para posicionamento na origem com controle PD com $(x_0, v_0) = (0; 0,4)$; $K_p = 10$; $K_d = 20$.

Figura 4.21 Caso não-ideal: resposta para posicionamento na origem com controle PD mais compensação descontínua para o atrito adere-desliza, com $(x_0, v_0) = (0; 0,4)$; $K_p = 10$; $K_d = 20$; $|\tilde{x}_H| = |\tilde{x}_L| = 0,01\text{m}$; $|\tilde{F}_s^+| = |\tilde{F}_s^-| = 12\text{N/kg}$.

Figura 4.22 Caso não-ideal: resposta para seguimento de trajetória com controle PD. A linha tracejada indica a trajetória desejada ($K_p=10$; $K_d=20$; amplitudes e frequência da órbita= $(0,2; 0,2\pi; \pi)$).

$$4.23(a) \quad |\tilde{F}_s^+| = |\tilde{F}_s^-| = 9,0 \text{ N/kg}$$

$$4.23(b) \quad |\tilde{F}_s^+| = |\tilde{F}_s^-| = 10,1 \text{ N/kg}$$

Figura 4.23 Caso não-ideal: resposta para seguimento de trajetória com controle PD com compensação descontínua para o atrito adere-desliza, ($K_p=10$; $K_d=20$; $|\tilde{x}_H| = |\tilde{x}_L| = 0,01 \text{ m}$; $|\tilde{F}_s^+| = |\tilde{F}_s^-| = 9,0 \text{ N/kg}$ e $10,1 \text{ N/kg}$; amplitudes e frequência da órbita $= (0,2; 0,2\pi; \pi)$).

4.4 CONCLUSÕES

Neste capítulo, foi desenvolvida e aplicada uma estratégia de controle robusto para compensação do atrito adere-desliza nos sistemas ideal e não-ideal. A estratégia de controle foi inspirada no trabalho de SOUTHWARD *et al.* (1991), que compensou o efeito do atrito num problema de posicionamento de um componente deslizante, que representava um mecanismo de transmissão de máquina.

Os resultados obtidos demonstraram a robustez da técnica desenvolvida e utilizada, em relação à incerteza no modelo do atrito diante das características dos sistemas ideal e não-ideal auto-excitados. A estabilidade do sistema controlado foi verificada através do método de Lyapunov, com uma função de Lyapunov descontínua.

A partir dos resultados, constatou-se que ao atingir a posição desejada no sistema auto-excitado, o chaveamento do controlador não cessou e isso foi atribuído ao efeito da força de deslizamento. No caso do problema estudado em SOUTHWARD *et al.* (1991), quando se atinge a posição desejada, o chaveamento do controlador cessa e o corpo deslizante fica em repouso, pois não existe mecanismo de auto-excitação no sistema.

CAPÍTULO 5 - ANÁLISE DA DINÂMICA CAÓTICA DO OSCILADOR NÃO-LINEAR E IDEAL

Neste capítulo é desenvolvida uma extensão do problema analisado que considera um oscilador não-linear e apenas o caso ideal, na seguinte configuração: o oscilador interage com uma superfície móvel, representada por uma esteira em velocidade constante (velocidade de excitação constante). O sistema oscilante é auto-excitado pelo atrito seco, o qual apresenta, no modelo do atrito, os comportamentos do atrito estático e do atrito Coulomb. O método analítico de predição de caos homoclínico, de AWREJCEWICZ & HOLICKE (1999), é aplicado na predição da ocorrência de movimento caótico na análise do sistema mecânico não-linear forçado fracamente. A análise está baseada no diagramas de bifurcações e curvas de predição do caos homoclínico. Os resultados, para análise, são apresentados segundo os seguintes conjuntos:

- 1) curvas do critério de predição de caos homoclínico de Melnikov;
- 2) resultados do movimento adere-desliza do sistema oscilador não-linear-esteira, quando o sistema é perturbado por uma excitação externa harmônica, sendo o sistema do tipo ideal. Nessa análise verifica-se o aparecimento de caos, o comportamento bifurcacional do sistema e a influência das componentes estática e dinâmica do atrito.

5.1 INTRODUÇÃO

A seguir, é desenvolvida a análise do movimento do oscilador não-linear interagindo com uma esteira, que está em movimento. Como a velocidade da esteira (velocidade de excitação) é considerada constante, ou seja, é uma função independente das variáveis de estado do sistema, tem-se um sistema ideal. O modelo de atrito adotado, no contato bloco-esteira, é o descrito no Capítulo 2. A configuração do sistema é mostrada na Figura 5.1 (PONTES *et al.*, 2000c; PONTES *et al.*, 2000d; PONTES *et al.*, 2001).

Figura 5.1. Sistema mecânico oscilador não-linear-esteira.

Para o sistema não perturbado (sistema sem excitação externa $f_0=0$ e sem atrito) descrito pela equação (2.27), existem três pontos de equilíbrio quando os parâmetros da mola não-linear são positivos, $k_a > 0$ e $k_b > 0$: dois centros em $(x, \dot{x}) = (\pm \sqrt{k_a/k_b}, 0)$ e um ponto de sela hiperbólico na origem. Nesse caso, qualquer perturbação pequena pode alterar as variedades estáveis e instáveis (órbita homoclínica) do ponto de sela hiperbólico. Nesse caso duas situações são possíveis: em uma, as variedades nunca se aproximam e na outra, as variedades estáveis e instáveis se interceptam transversalmente, sendo os pontos de intercepção chamados de pontos homoclínicos transversais. Quando as variedades estáveis e instáveis se interceptam, uma secção de Poincaré forma o mapa “Smale’s horseshoe” que caracteriza a perda de todas as informações das condições iniciais, isto é, o sistema possui uma estrutura fractal, como

mostrado na Figura 5.2 (PONTES *et al.*, 2000c; PONTES *et al.*, 2000d; PONTES *et al.*, 2001). A existência deste mapa indica a impossibilidade de prognóstico sobre a resposta do sistema, após transcorrido um longo intervalo de tempo. O surgimento de pontos homoclínicos transversais (fronteiras fractais) resulta em bifurcações homoclínicas globais com a desintegração ou mudança de atratores e, como consequência, ocorrem mudanças globais do fluxo (trajetórias) no espaço de fase. Este comportamento é chamado de movimento caótico homoclínico. Através da teoria de Melnikov é possível determinar analiticamente limites para o surgimento de pontos homoclínicos transversais (ARGYRIS *et al.*, 1994; THOMPSON & STEWART, 1994; AWREJCEWICZ & HOLICKE, 1999).

Figura 5.2 (a) Plano de fase velocidade-deslocamento; (b) Mapa de Poincaré ($f_0=1,4\text{N/kg}$; $v_B=0,4\text{m/s}$; $\omega_E=2\text{rad/s}$; e 1000 seções de Poincaré).

5.2 CRITÉRIO DE PREDIÇÃO DE CAOS HOMOCLÍNICO

O sistema oscilador não-linear-esteira, mostrado na Figura 5.1, é similar ao sistema considerado em AWREJCEWICZ & HOLICKE (1999). Os modelos de atrito que foram considerados são a diferença entre os sistemas. A característica do atrito adotado em AWREJCEWICZ & HOLICKE (1999) é o modelo do atrito Coulomb-viscoso, o qual não leva em conta o modo de aderência (atrito estático) devido ao atrito seco.

Uma fórmula de predição da ocorrência de caos homoclínico, para o sistema representado por (2.25), pode ser obtido através do cálculo da integral de

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_o(t) [F_{\text{Atrito}}(v_{\text{Rel}}, F_R) + F_0 \cos(\omega_E t)] dt \quad (5.1)$$

onde v_o é a velocidade na órbita homoclínica do sistema não perturbado (ARGYRIS *et al.*, 1994; NAYFEH & BALACHANDRAN, 1995).

Seguindo AWREJCEWICZ & HOLICKE (1999) obtêm-se, ao fazer a integral de Melnikov nula, uma fórmula de predição de caos homoclínico, em termos de alguns dos parâmetros de controle do sistema (velocidade de excitação da esteira, amplitude e frequência da força de excitação), cuja expressão final não depende da componente de atrito estático, porque o termo correspondente da integral é nulo,

$$f_0 = \begin{cases} \frac{2F_d^+ k_a \left[\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{k_b}{2k_a^2} v_B^2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{k_b}{2k_a^2} v_B^2}} \right]}{\pi \omega_E \operatorname{sech}\left(\frac{\pi \omega_E}{2}\right)} & \text{para } v_B < \frac{k_a}{\sqrt{2k_b}} \\ 0 & \text{para } v_B > \frac{k_a}{\sqrt{2k_b}} \end{cases} \quad (5.2)$$

As curvas força de excitação-velocidade da esteira (velocidade de excitação) e força de excitação-frequência, $f_0(v_B)$ e $f_0(\omega_E)$, respectivamente, mostradas na Figura 5.2, são obtidas usando o critério de Melnikov para o sistema auto-excitado oscilador não-linear-esteira, com os seguintes valores dos parâmetros do sistema: $k_a = 1$; $k_b = 1$; $\omega_E = 2$ (rad/s); $|F_d^+| = |F_d^-| = 0,3\text{N/kg}$ e $|F_s^+| = |F_s^-| = 0,4\text{N/kg}$. O critério prediz que acima dessas curvas o caos pode aparecer (ARGYRIS *et al.*, 1994; NAYFEH & BALACHANDRAN, 1995; AWREJCEWICZ & HOLICKE, 1999; PONTES *et al.*, 2001).

(a) Curva força de excitação-velocidade da esteira (velocidade de excitação) $f_0(v_B)$, para $\omega_E = 2\text{rad/s}$.

(b) Curva força de excitação-frequência $f_0(\omega_E)$, para $v_B = 0,4\text{m/s}$.

Figura 5.3 Curvas do critério de Melnikov.

5.3 INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS DE CONTROLE NA OCORRÊNCIA DE BIFURCAÇÕES E CAOS

Nesta seção, a análise do comportamento do sistema dinâmico, obtido pela solução numérica, será desenvolvida através de diagramas de bifurcação, curvas de predição do caos homoclínico nos parâmetros de controle, planos de fase e espectros de frequência. As faixas dos parâmetros de controle considerada, nas análises, foram em função das curvas obtidas pelo critério de Melnikov. Os resultados mostram o comportamento bifurcacional do sistema, a ocorrência do caos homoclínico, e uma rota para o caos homoclínico. As simulações numéricas foram obtidas usando o Matlab-Simulink™ da Mathworks®.

A seguir, serão analisadas as influências dos parâmetros de controle do sistema sobre as bifurcações. Através do critério de Melnikov, a ocorrência do caos homoclínico pode ser predita. Em geral, a variação lenta (processo quase estacionário) de um parâmetro de controle do sistema leva, igualmente, a uma modificação lenta (processo quase estacionária) do plano de fase de um atrator. Se uma bifurcação local ou global ocorrer, aparecerá mudanças qualitativas no comportamento dinâmico do sistema (diferente tipo de atrator). As bifurcações locais levam à mudanças qualitativas locais na dinâmica de longo tempo do sistema, em regiões do espaço de fase (ARGYRIS *et al.*, 1994; THOMPSON & STEWART, 1994).

Os diagramas de bifurcações são construídos através de um conjunto de mapas de Poincaré obtidos com a variação de um parâmetro de controle selecionado (PARKER & CHUA, 1989). Os parâmetros de controle considerados aqui são a força de excitação (amplitude e frequência) e a velocidade da esteira (velocidade de excitação). Para os parâmetros de controle, amplitude da força de excitação e velocidade da esteira (velocidade de excitação), os pontos do mapa de Poincaré foram obtidos para cada período da excitação. Enquanto que, para o parâmetro de controle frequência de excitação, os pontos do mapa de Poincaré foram obtidos quando as trajetórias do sistema oscilante cruzavam a velocidade zero, no espaço de fase.

Na sequência, são mostrados, para os diferentes parâmetros de controle, o comportamento bifurcacional do sistema. A ocorrência e não ocorrência do caos homoclínico são observadas nos diagramas de bifurcações, como predita pelo critério de Melnikov.

5.3.1 Parâmetro de Controle: Força de Excitação

A curva força de excitação-velocidade da esteira (velocidade de excitação) $f_0(v_B)$ para $v_B=0,4\text{m/s}$ e $\omega_E=2\text{rad/s}$ mostram que para valores da amplitude da força de excitação f_0 acima de 0,7, pode ocorrer o caos (Figura 5.3a). Associado a esta verificação, observa-se o caos homoclínico no diagrama de bifurcação da Figura 5.4a, para $0,8 < f_0 < 1,8$.

5.3.2 Uma Rota Para o Caos

Uma transição para o caos homoclínico, relativa ao parâmetro de controle amplitude da força de excitação, na faixa $0,1 \leq f_0 \leq 1,8$, do sistema com atrito estático e Coulomb pode ser observada no diagrama de bifurcação, Figura 5.4a, e no plano de fase com o espectro de frequência associado, Figura 5.5, que mostram o comportamento bifurcacional do sistema e a transição para o caos homoclínico, respectivamente.

a) atrito estático e Coulomb

(b) apenas atrito Coulomb

Figura 5.4 Diagramas de bifurcações dependentes da amplitude da força harmônica f_0 [N/kg] para $v_B=0,4\text{m/s}$ e $\omega_E=2\text{rad/s}$.

5.5(a) $f_0=0,1$

5.5(b) $f_0=0,5$

5.5(c) $f_0=1,0$

5.5(d) $f_0=1,5$

5.5(c) $f_0=1,6$

5.5(f) $f_0=1,8$

Figura 5.5 Rota para o caos homoclínico, na faixa da amplitude da força de excitação $0,1 \leq f_0 \leq 1,8$, do sistema com atrito estático e Coulomb, para $v_B=0,4\text{m/s}$ e $\omega_E=2\text{rad/s}$: espectro de frequência (obtido diretamente do Simulink© durante a simulação) e plano de fase velocidade-deslocamento.

5.3.3 Parâmetro de Controle: Velocidade da Esteira (Velocidade de Excitação)

A curva força de excitação-velocidade da esteira (velocidade de excitação) $f_0(v_B)$, para $f_0=0,1\text{N/kg}$ e $\omega_E=2\text{rad/s}$, mostra que para velocidade da esteira (velocidade de excitação) v_B superior a 0,7 pode ocorrer o caos (Figura 5.3a). Em associação a esta verificação, observa-se que não ocorre o caos homoclínico através do diagrama de bifurcação da Figura 5.6a, em toda a faixa da velocidade da esteira (velocidade de excitação).

5.6(a) atrito estático e Coulomb

5.6(b) apenas atrito Coulomb

Figura 5.6 Diagramas de bifurcações dependentes da velocidade da esteira (velocidade de excitação) $v_B, [\text{m/s}]$ para $f_0=0,1\text{N/kg}$ e $\omega_E=2\text{rad/s}$.

A curva força de excitação-velocidade da esteira (velocidade de excitação) $f_0(v_B)$ para $f_0=1,2\text{N/kg}$ e $\omega_E=2\text{rad/s}$, mostra que para qualquer valor da velocidade da esteira (velocidade de excitação) v_B pode ocorrer o caos homoclínico (Figura 5.3a). Novamente, em associação a esta verificação, o caos homoclínico é observado através do diagrama de bifurcação da Figura 5.7a, para $0 < v_B < 1,8$.

5.7(a) atrito estático e Coulomb

5.7(b) apenas atrito Coulomb

Figura 5.7 Diagramas de bifurcações dependentes da velocidade da esteira (velocidade de excitação) v_B , [m/s] para $f_0=1,2\text{N/kg}$ e $\omega_E=2\text{rad/s}$.

5.3.4 Parâmetro de Controle: Frequência de Excitação

A curva força de excitação-frequência $f_0(\omega_E)$ para $f_0=0,1\text{N/kg}$ e $v_B=0,4\text{m/s}$, mostra que, para qualquer valor de frequência, não pode ocorrer o caos homoclínico (Figura 5.3b). Em associação a esta verificação, o caos homoclínico não é observado através do diagrama de bifurcação da Figura 5.8a, em toda a faixa de frequência.

A curva força de excitação-frequência $f_0(\omega_E)$ para $f_0=0,4\text{N/kg}$ e $v_B=0,4\text{m/s}$, mostra que, para a faixa de frequência $0,4<\omega_E<1,4$, pode ocorrer o caos homoclínico (Figura 5.3b). Em associação a esta verificação, o caos homoclínico é observado através do diagrama de bifurcação da Figura 5.8b, próximo ao valor de frequência $\omega_E=0,6\text{rad/s}$.

A curva força de excitação-frequência $f_0(\omega_E)$ para $f_0=0,5\text{N/kg}$ e $v_B=0,4\text{m/s}$, mostra que para a faixa de frequência $0,3<\omega_E<1,6$, pode ocorrer o caos homoclínico (Figura 5.3b). Em associação a esta verificação, o caos é observado através do diagrama de bifurcação da Figura 5.8c, na faixa de frequência $0,55<\omega_E<0,7$.

5.3.5 Escape dos Poços de Potencial

A curva força de excitação-frequência $f_0(\omega_E)$ para $f_0=0,6\text{N/kg}$ e $v_B=0,4\text{m/s}$, mostra que, para a faixa de frequência $0,25<\omega_E<1,7$, pode ocorrer o caos homoclínico (Figura 5.3b). Em associação a esta verificação, o caos homoclínico é observado através do diagrama de bifurcação da Figura 5.8d, na faixa de frequência $0<\omega_E<0,3$. Além disso, outra característica é observada através do diagrama de bifurcação da Figura 5.8d, um ponto de escape do poços de potencial é detectado. Este fenômeno é associado ao desaparecimento da bacia de atração das soluções limitadas. O contorno (fronteira) da bacia de atração separa, nesse caso, as condições iniciais que levam a movimentos limitados e ilimitados, tornando-se fractalmente dividida na vizinhança (região) do espaço de fase próxima das interseções transversais homoclínicas (NAYFEH &

BALACHANDRAN, 1995). Portanto, as condições iniciais, para o conjunto de parâmetros adotados, estão localizadas do lado de fora da bacia de atração das soluções limitadas.

5.8(a) $f_0=0,1$ 5.8(b) $f_0=0,4$

5.8(c) $f_0=0,5$ 5.8(d) $f_0=0,6$

Figura 5.8 Diagramas de bifurcações dependentes da frequência de excitação ω_E [rad/s], para $v_B=0,4$ m/s.

5.3.6 Comportamento Bifurcacional do Sistema Sem o Atrito Estático

Para analisar a influência das componentes do atrito seco (atrito estático e Coulomb) sobre o comportamento do sistema, diagramas de bifurcações de dois casos foram comparados: um, onde considera-se a existência das duas componentes do atrito seco e outro, no qual considera-se apenas a presença do atrito Coulomb, como mostrado nas Figuras 5.4, 5.6 e 5.7.

A comparação entre os diagramas de bifurcações do sistema, relativos ao parâmetro de controle amplitude da força de excitação, dos casos com atrito estático e Coulomb, Figura 5.4a, e sem o atrito estático (apenas atrito Coulomb), Figura 5.4b, mostra que a influência do atrito Coulomb é dominante no surgimento de caos homoclínico, em toda a faixa de valores da amplitude da força de excitação indicada pelo critério de Melnikov.

A comparação entre os diagramas de bifurcações do sistema, relativos ao parâmetro de controle velocidade da esteira (velocidade de excitação), dos casos com atrito estático e Coulomb, Figura 5.7a, e sem o atrito estático (apenas atrito Coulomb), Figura 5.7b, mostra que a influência da associação das componentes do atrito, neste caso é dominante no surgimento de caos homoclínico, em valores da velocidade da esteira (velocidade de excitação) superiores a $v_B=0,7\text{m/s}$, como indicado pelo critério de Melnikov.

5.4 CONCLUSÕES

Neste capítulo, foi analisado um sistema oscilante auto-excitado pelo atrito, o qual apresenta, no modelo do atrito, os comportamentos do atrito estático e do atrito Coulomb. O método analítico de predição de caos homoclínico, de AWREJCEWICZ & HOLICKE (1999), foi aplicado na predição da ocorrência de movimento caótico na

análise do sistema mecânico não-linear forçado fracamente. A análise foi baseada nos diagramas de bifurcações e curvas de predição do caos homoclínico.

A análise do sistema mecânico, com uma força restauradora não-linear e com atrito, foi apresentado para o estudo do comportamento bifurcacional das vibrações auto-excitadas. A dinâmica do sistema é caracterizado pela existência de dois poços de potencial no plano de fase e exibe comportamentos bifurcacionais e caóticos bastante complexos.

Os resultados principais obtidos foram sobre as vibrações induzidas pelo atrito e o critério de Melnikov para predição de caos homoclínico. Os parâmetros de controle do sistema que foram considerados são: a força de excitação (amplitude e frequência) e a velocidade da esteira (velocidade de excitação), nas faixas indicadas pelo critério de Melnikov.

Os resultados obtidos caracterizaram a ocorrência e a não ocorrência de atratores caóticos, em relação as faixas de valores dos parâmetros de controle, como predito pelo critério de predição de caos de Melnikov. Uma rota para o caos homoclínico foi detectada na faixa $0,1 \leq f_0 \leq 1,8$ da força de excitação do sistema com a associação das componentes de atrito estático e Coulomb. Em complemento, foi observada a influência da associação das componentes do atrito na ocorrência de caos homoclínico e detectou-se, também, um escape dos poços de potencial.

Num trabalho futuro, o avanço da pesquisa sobre esse problema deve incluir o controle de caos. Existem na literatura alguns trabalhos na área de controle de caos e, como exemplo, cita-se o livro de FRADKOV & POGROMSKY (1998) que propõe alguns métodos.

CAPÍTULO 6 - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Neste trabalho, o objeto de estudo foi um sistema dinâmico, constituído de um oscilador, uma superfície em movimento contínuo e um motor. No sistema existem duas formas de interação dinâmica: uma auto-excitadora de oscilações adere-desliza devido à força de atrito e outra, entre o oscilador e a fonte de energia do sistema.

Os objetivos do trabalho foram a análise da dinâmica e o controle desse sistema auto-excitado, observando as influências do atrito e da interação entre o oscilador e a fonte de energia no comportamento do sistema. A escolha dessa configuração de sistema foi motivada pela grande equivalência observada entre o seu comportamento dinâmico e o comportamento de importantes sistemas de engenharia citados anteriormente na introdução.

Inicialmente, nesta pesquisa, foram desenvolvidos estudos sobre os diferentes aspectos do sistema. Estudou-se os mecanismos geradores do fenómeno físico denominado de oscilações auto-excitadas e os efeitos dinâmicos na estabilidade de funcionamento de máquinas e estruturas, constatando-se que os mecanismos auto-excitadores estão relacionados com as não-linearidades do sistema. Em seguida, desenvolveu-se um estudo sobre a física do contato e os modelos matemáticos existentes do atrito. Esse estudo forneceu a fundamentação para a escolha dos modelos de atrito utilizados no trabalho. Sendo o atrito, neste trabalho, o mecanismo indutor de oscilações auto-excitadas, desenvolveu-se um estudo sobre as características do atrito relacionadas com o efeito da auto-excitação. O sistema com atrito e interagindo com a fonte de energia foi estudado através de técnicas da dinâmica não-linear, procurando detectar os regimes estacionários, os

comportamentos transientes e caóticos. O aparecimento de caos é um aspecto importante da dinâmica desse sistema e um estudo desse fenômeno foi desenvolvido identificando e qualificando as causas. Finalmente, uma técnica de controle para compensação robusta do atrito adere-desliza foi aplicada, para os objetivos de controle de posição e de seguimento de trajetória, que suprimiu as oscilações ou eliminou comportamentos caóticos, produzindo pontos de equilíbrio e movimentos periódicos. Nessa etapa, também, foi considerada a influência da fonte de energia no comportamento do sistema.

6.1 Sobre o Oscilador

O oscilador foi estudado nas formas linear e não-linear do elemento elástico, denominado de mola. No caso do oscilador linear foram pesquisados os seguintes aspectos: a auto-excitação devido ao atrito que gera oscilações adere-desliza, a influência do motor na dinâmica do sistema e a influência do atrito sobre o comportamento bifurcacional do sistema. No caso do oscilador não-linear, foram pesquisadas as influências da força de excitação (amplitude e frequência), das componentes da força de atrito e da velocidade de excitação (velocidade da esteira), no comportamento bifurcacional do sistema e na origem do caos homoclínico.

Na análise do comportamento do sistema com oscilador linear, foi experimentada a aplicação de uma técnica analítica, denominada de método da média (NAYFEH, 1981), mas chegou-se a conclusão, que no problema em questão devido a descontinuidade do atrito, não seria possível aplica-la de forma integral na descrição do regime de oscilações adere-desliza. A aplicação do método da média apenas seria possível no regime estacionário de oscilações em deslizamento puro. Uma conclusão semelhante foi encontrada em THOMSEN (1999), onde foram aplicadas técnicas analíticas diferenciadas, uma para cada regime do comportamento do sistema em oscilação adere-desliza, ficando os resultados definidos por partes. O método da média foi aplicado por THOMSEN (1999), exclusivamente, quando o sistema apresentava o regime estacionário de oscilações em deslizamento puro e não durante a aderência.

6.2 Sobre o Atrito

Para verificar o comportamento do sistema, utilizou-se três modelos de atrito: o estático mais Coulomb, o estático mais Coulomb suavizado e o estático mais Coulomb e viscoso (efeito Stribeck).

Uma constatação importante, a partir dos resultados obtidos, é a interdependência entre o modelo do atrito e o modelo do restante do sistema dinâmico. O atrito responde influenciado pela dinâmica do sistema em que está inserido, dessa maneira não é possível prever comportamentos de forma independente. Tal afirmativa também foi ressaltada no trabalho de revisão de BERGER (2001). Dessa constatação fica estabelecido que os modelos de atrito sempre devem ser analisados em associação ao sistema dinâmico completo.

6.3 Sobre a Velocidade de Excitação

Para o sistema do oscilador linear com modelo de atrito estático mais Coulomb, a velocidade de excitação (velocidade da esteira) quando aumentada gradativamente, a partir de zero, consegue acelerar o oscilador, em regime de oscilações adere-desliza, até atingir um valor limite, a partir do qual o modo estacionário será de oscilação ou de repouso em deslizamento puro. Para uma velocidade de excitação abaixo do valor limite e mantida constante, o oscilador precisa ter uma condição inicial que o coloque na condição de oscilação adere-desliza, caso contrário, ele não entra em regime de oscilações adere-desliza, podendo ficar em um modo estacionário de oscilação ou de repouso em deslizamento puro. O repouso em deslizamento puro é o equilíbrio dinâmico atingido quando o amortecimento do oscilador elimina as oscilações de qualquer natureza, adere-desliza ou deslizamento puro.

6.4 Sobre o Motor

Para investigar a influência da fonte de energia, representada pelo motor, sobre a dinâmica do sistema foram utilizados conjuntos de parâmetros do motor, que

caracterizaram motores de diferentes potências. Em relação ao motor, também, foi adicionada uma malha interna de controle PID para a velocidade do motor. A regulação da velocidade do motor não alterou significativamente o comportamento do sistema oscilador-controle de posição e de seguimento de trajetória.

No sistema não controlado, o comportamento caótico apareceu facilmente, tendo como efeito dominante o atrito e em menor escala a influência do motor. Esta influência está relacionada, com maior intensidade, à existência de oscilações adere-desliza, ou seja, à estabilidade do movimento.

6.5 Sobre o Controle

A lei de controle proposta para o sistema auto-excitado pelo atrito combina um termo proporcional mais derivativo e um termo descontínuo dependente da posição. O termo descontínuo é inspirado na técnica de controle de estrutura variável, para compensação robusta do atrito adere-desliza.

A largura da faixa de atuação escolhida, em torno da posição desejada, para a adição do termo descontínuo, define a precisão do posicionamento e o seu estreitamento faz o sistema chavear mais frequentemente.

6.6 Sobre a Robustez do Controle

Para verificar a robustez do controle em relação ao atrito, utilizou-se três modelos de atrito: o estático mais Coulomb, o estático mais Coulomb suavizado e o estático mais Coulomb e viscoso (efeito Stribeck).

O controle de compensação do atrito atingiu seu objetivo para diferentes amplitudes e formas do atrito. Além dos diferentes modelos de atrito, a incerteza nos parâmetros do modelo do atrito, como por exemplo, no valor do atrito estático F_s , foi compensada robustamente pelo controle.

A estabilidade do sistema controlado foi verificada através do método de Lyapunov, com funções de Lyapunov descontínuas.

6.7 Perspectivas de Trabalhos Futuros

A partir das investigações realizadas e dos resultados obtidos foi estruturado um ferramental que irá possibilitar a continuação de novas pesquisas sobre o tema, em um estágio mais avançado do que aquele iniciado na proposta desta tese. Em relação aos tópicos de trabalhos futuros sobre o tema podem ser citados os seguintes:

- 1) avaliação da influência de modelos de atrito mais complexos;
- 2) avaliação da dinâmica do sistema interagindo com fontes de energia de outras características;
- 3) avaliação de sistemas auto-excitados com maior número de graus de liberdade;
- 4) aplicação de outras estratégias de controle, considerando outros métodos baseados em funções de Lyapunov, como aquelas apresentadas em KHALIL (1996): o reprojeto Lyapunov; a técnica de retrorecursão; o controle de modo de deslizamento (*sliding mode control*) (UTKIN, 1978; ZINOBER, 1990) a partir do reprojeto Lyapunov e da técnica de retrorecursão; e finalmente, o projeto de controle adaptativo com o método de Lyapunov (KRISTIC *et al.*, 1995);
- 5) verificações experimentais em protótipos dos sistemas auto-excitados, visando a validação dos estudos para aplicação no projeto dos sistemas de engenharia;
- 6) estudo de técnicas de controle de caos para o sistema oscilador não-linear, analisado no Capítulo 5, tais como, as apresentadas em FRADKOV & POGROMSKY (1998), que são baseadas nos conceitos da função de Lyapunov e passividade, no mapa de Poincaré e no método do gradiente de velocidade. Os objetivos de controle incluem a excitação ou supressão de oscilações, visando a transformação dos modos das oscilações de caóticas para periódicas e o contrário, ou a sincronização. Os teoremas propostos em FRADKOV & POGROMSKY (1998) estabelecem critérios de estabilidade do sistema, desempenho e robustez sob perturbações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLEYNE, A.; LIU, R. (2000) A simplified approach to force control for electro-hydraulic systems. *Control Engineering Practice*, v. 8, 1347-1356.
- ANDREUS, U.; CASINI, P. (2001) Dynamics of friction oscillators excited by a moving base and/or driving force. *Journal of Sound and Vibration*, 245(4), 685-699.
- ANDREUS, U.; CASINI, P. (2002) Friction oscillator excited by a moving base and colliding with a rigid or deformable obstacle. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v.37, 117-133.
- ANDRONOV, A.A.; VITT, A.A.; KHAIKIN, S.E. (1966) *Theory of Oscillations*. London, Pergamon Press.
- ARMSTRONG-HÉLOUVRY, B.; DUPONT, P.; CANUDAS DE WIT, C. (1994-a) Friction in servo machines: analysis and control methods. In: Friction-Induced Vibration, edited by R.A. Ibrahim and E. Rivin, *ASME - Applied Mechanics Reviews*, v.47, n. 7, 275-305.
- ARMSTRONG-HÉLOUVRY, B.; DUPONT, P.; CANUDAS DE WIT, C. (1994-b) A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, v.30, n. 7, 1083-1138.
- ARGYRIS, J.; FAUST, G.; HAASE, M. (1994) *An exploration of chaos - An introduction for natural scientists and engineers*. Amsterdam, Elsevier Science.
- AWREJCEWICZ, J.; HOLICKE, M.M. (1999) Melnikov's method and stick-slip chaotic oscillations in very weakly forced mechanical systems. *Int. J. Bifurcation and Chaos* 9(3), 505-518.

- BALTHAZAR, J.M.; CAMPANHA, J.R.; WEBER, H.I.; MOOK, D.T. (1999-a) Some remarks on the numerical simulations of ideal and non-ideal self-excited vibrations. In: *Mathematical Applications in Engineering' 24*, Eds. B.I. Cheshankov and M.D. Todorov, Sofia, Heron Press. 9-15.
- BALTHAZAR, J.M.; TONON, O.; WEBER, H.I.; MOOK, D.T. (1999-b) Some remarks on Kononenko's topology of non-ideal dynamical systems. In: *Applied Mechanics in the Americas: Dynamics* 8, 1231-1234.
- BALTHAZAR, J.M.; MOOK, D.T.; WEBER, H.I.; BRASIL, R.M.L.R.F.; FENILI, A.; BELATO, D.; FELIX, J.L.P. (2002) An overview on non-ideal vibrations. *Meccanica*, 330 (7), 1-9.
- BERGER, E.J. (2001) Friction modeling for dynamics simulation. *Applied Mechanics Reviews*, number of pages 94 (submitted), <http://ranger.mie.rhod.uc.edu> (27/06/2002)
- BLAU, P.J. (2001) The significance and use of the friction coefficient. *Tribology International Journal*, v. 34, 585-591.
- CANUDAS DE WIT, C.; OLSSON, H.; ASTRÖM, K.J.; LISCHINSKY, P., (1995) A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control* 40 (3), 419-425.
- CANUDAS-DE-WIT, C. (1998) Comments on "A new model for control of systems with friction". *IEEE Transactions on Automatic Control* 43 (8), 1189-1190.
- CASELLA, F.; LOCATELLI, A.; SCHIAVONI, N. (1996) Nonlinear controllers for vibration suppression in a large flexible structure. *Control Engineering Practice*, v. 4, n. 6, 791-806.
- DIMENTBERG, M.F.; MCGOVERN, L.; NORTON, R.L.; CHAPDELAINE, J.; HARRISON, R. (1997) Dynamics of an unbalanced shaft interacting with a limited power supply. *Nonlinear Dynamics*, v. 13, 171-187.

-
- DORF, R.C.; BISHOP, R. (1997) *Modern Control Systems*, 8th edition, New York, Addison-Wesley Pub Co.
- FEENY, B.; GURAN, A.; HINRICHS, N.; POPP, K. (1998) A historical review on dry friction and stick-slip phenomena. *Applied Mechanics Reviews - Trans. ASME* v. 51, 321-341.
- FRADKOV, A.L.; POGROMSKY, A.Y. (1998) *Introduction to Control of Oscillations and Chaos*, London, World Scientific Publishing.
- HACE, A.; JEZERNIK, K.; TERBUC, M. (2001) VSS motion control for a laser-cutting machine; *Control Engineering Practice*, v. 9, 67-77.
- HAGEDORN, P. (1988) *Non-linear Oscillations*. New York, Oxford Science Publications.
- HÄGGLUND, T. (2002) A friction compensator for pneumatic control valves. *Journal of Process Control*, v. 12, 897-904.
- HECK, B.S. (1997) Analysis of stick-slip motion in Coulomb damped systems. *Proceedings of American Control Conference*
- HECKEL, M.A.; ABRAHAM, I.D. (1996) Active control of friction-driven oscillations. *Journal of Sound and Vibration*, v. 193, n. 1, p. 417-426.
- HINRICHS, N.; OESTREICH, M.; POPP, K. (1997) Dynamics of oscillators with impact and friction. *Journal of Chaos, Solitons and Fractals*, v. 8(4), 535-558.
- HINRICHS, N.; OESTREICH, M.; POPP, K. (1998) On the modelling of friction oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, v. 216(3), 435-459.
- HONG, H.-K.; LIU, C.-S. (2000) Coulomb friction oscillator: modelling and responses to harmonic loads and base excitation. *Journal of Sound and Vibration*, v. 229(5), 1171-1192.
- IBRAHIM, R.A. (1994-a) Friction-induced vibration, chatter, squeal and chaos. Part I: Mechanics of contact and friction, In: *Friction-Induced Vibration* edited

- by R.A. Ibrahim and E. Rivin, *ASME - Applied Mechanics Reviews*, v. 47, n. 7, 209-226.
- IBRAHIM, R.A. (1994-b) Friction-induced vibration, chatter, squeal and chaos. Part II: Dynamics and Modeling, In: Friction-Induced Vibration edited by R.A. Ibrahim and E. Rivin, *ASME - Applied Mechanics Reviews*, v.47, n. 7, 227-253.
- KARNOPP, D. (1985) Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Trans. ASME, v. 107, 100-103.
- KHALIL, H.K. (1996) *Nonlinear Systems*, 2nd Edition, New Jersey, Prentice Hall.
- KONONENKO, V.O. (1969) *Vibrating Problems of Limited Power Supply*, London, Iliffe Books.
- KRSTIC, M.; KANELLAKOPOULOS, I.; KOKOTOVIC, P. (1995) *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York, Wiley-Interscience Publication.
- LEINE, R.I.; VAN CAMPEN, D.H.; DE KRAKER, A.; VAN DEN STEEN, L. (1998) Stick-slip vibrations induced by alternate friction models. *Nonlinear Dynamics*, v. 16, 41-54.
- LEINE, R.I.; VAN CAMPEN, D.H.; VAN DE VRANDE, B.L. (2000) Bifurcations in nonlinear discontinuous systems. *Nonlinear Dynamics*, v. 23, 105-164.
- LIANG, J. -W.; FEENY, B.F. (1998) Dynamical friction behavior in the forced oscillator with a compliant contact. *Journal of Applied Mechanics - Trans. ASME*, v. 65, 250-257.
- LIU, C.-S.; CHANG, W.-T. (2002) Frictional behaviour of a belt-driven and periodically excited oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, v. 258(2), 247-268.
- MCMILLAN, A.J. (1997) A non-linear friction model for self-excited vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, v. 205(3), 323-335.

-
- MEIROVITCH, L. (1970) *Methods of Analytical Dynamics*. New York, McGraw-Hill Book Company.
- NAYFEH, A.H. (1981) *Introduction to Perturbation Methods*. New York, John Wiley & Sons.
- NAYFEH, A.H.; BALACHANDRAN, B. (1995) *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational and Experimental Methods*. New York, John Wiley & Sons.
- NAYFEH, A.H.; MOOK, D.T. (1979) *Nonlinear Oscillations*. New York, John Wiley & Sons.
- OANCEA, V.G.; LAURSEN, T.A. (1998) Investigations of low frequency stick-slip motion: experiments and numerical modeling. *Journal of Sound and Vibration*, v. 213(4), 577-600.
- OKUBO, H.; TAKANO, K.; MATSUSHITA, O.; WATANABE, K.; HIRASE, Y. (2000) Vibration and control of axially moving belt system: analysis and experiment by parametric excitation. *Journal of Vibration and Control*, v. 6, 589-605.
- OSSOWSKI, A. (1999) Asymptotic behaviour of an oscillator excited by dry friction forces. *Journal of Sound and Vibration*, v. 222, n. 4, 521-530.
- PARKER, T.S.; CHUA, L.O. (1989) *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Berlin, Springer-Verlag.
- PONTES, B.R.; OLIVEIRA, V.A.; BALTHAZAR, J.M. (1999) On friction driven vibrations with a limited power supply. In: *Computational Methods in Engineering '99*, Eds. Pimenta, P.M.; Brasil, R.M.L.R.F.; Almeida, N.E.S., (AMC, São Paulo) 119(1-15).
- PONTES, B.R.; OLIVEIRA, V.A.; BALTHAZAR, J.M. (2000a) On friction driven vibrations in a mass block-belt-motor system with a limited power supply. *Journal of Sound and Vibration*, v. 234(4), 713-723.

- PONTES, B.R.; OLIVEIRA, V.A.; BALTHAZAR, J.M. (2000b) On the dynamic response of a mechanical system with dry friction and limited power supply. In: *Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications to Engineering Sciences. Vol 4: Recent Developments in Nonlinear Phenomena*, Editors: J.M. Balthazar; P.B. Gonçalves; R.M.L.R.F. Brasil; I.L. Caldas; F.B. Rizzato, p. 333-348, Published by ABCM, Rio de Janeiro.
- PONTES, B.R.; OLIVEIRA, V.A.; BALTHAZAR, J.M. (2000c) A note on the use of Melnikov's chaos prediction criterion: results of a friction-driven self-excited vibrating system. *Proc. 2nd Int. Conf. Control of Oscillations and Chaos (COC 2000)*, International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM), St. Petersburg, July 5-7, 2000, Copyright by the IEEE.
- PONTES, B.R.; OLIVEIRA, V.A.; BALTHAZAR, J.M. (2000d) Bifurcations and homoclinic chaos in a mechanical system with dry friction. In: *Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications to Engineering Sciences. Vol 5: Chaos, Control and Time Series*. Editors: J.M. Balthazar; P.B. Gonçalves; R.M.L.R.F. Brasil; I.L. Caldas; F.B. Rizzato, p. 268-279 (2000), Published by ABCM, Rio de Janeiro.
- PONTES, B.R.; OLIVEIRA, V.A.; BALTHAZAR, J.M. (2000e) Stick-slip chaos in an oscillating system with limited power supply. *I Oficina da Pós-Graduação*, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 16-18 agosto 2000, São Carlos (pgs. 4 - CDROM).
- PONTES, B.R.; OLIVEIRA, V.A.; BALTHAZAR, J.M. (2001) On stick-slip homoclinic chaos and bifurcations in a mechanical system with dry friction. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, v. 11, n. 7, July (2001), 2019-2029.
- PONTES, B.R.; OLIVEIRA, V.A.; BALTHAZAR, J.M. (2002a) The interacting phenomena between a dry friction-driven vibrating system and its limited power supply. *Proceedings of 7th Pan American Congress of Applied*

-
- Mechanics* (PACAM VII), Applied Mechanics in the Americas Vol. 9, 597-600, Temuco, Published by American Academy of Mechanics, Philadelphia.
- PONTES, B.R.; OLIVEIRA, V.A.; BALTHAZAR, J.M. (2002b) Stick-slip chaos in a mechanical system with a limited power supply and self-excitation induced by dry friction. *Journal of Sound and Vibration* (no prelo).
- PONTES, B.R.; OLIVEIRA, V.A.; BALTHAZAR, J.M. (2002c) A switching feedback controller for stick-slip compensation; *Journal of Vibration and Control* (no prelo).
- ROUCHE, N.; HABETS, P.; LALOY, M. (1977) *Stability Theory by Lyapunov's Direct Method*. New York, Springer-Verlag, p. 345-346.
- SCHMIDT, G.; TONDL, A. (1986) *Nonlinear Vibrations*. Cambridge, Cambridge University Press.
- SERRARENS, A.F.A.; MOLENGRAFT, M.J.G.; KOK, J.J.; STEEN, L. (1998) H-infinite control for suppressing stick-slip in oil well drillstrings. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 18(2) 19-30.
- SHAW, S. (1986) On the dynamic response of a system with dry friction. *Journal of Sound and Vibration*, v. 108(2), 305-325.
- SHEVITZ, D.; PADEN, B. (1994) Lyapunov stability theory of nonsmooth systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 9, 1910-1914, Sept.
- SLOTINE, J.-J.E.; LI, W. (1991) *Applied Nonlinear Control*, New Jersey, Prentice Hall.
- SONG, G.; AGRAWAL, B.N. (2001) Vibration suppression of flexible spacecraft during attitude control. *Acta Astronautica*, v. 49, n. 2, 73-83.
- SOUTHWARD, S.C.; RADCLIFFE, C.J.; MACCLUER (1991) Robust nonlinear stick-slip friction compensation. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Trans. ASME*, v. 113, 639-645.

-
- STOKER, J.J. (1960) *Nonlinear Vibrations*. New York, Interscience.
- TATARYN, P.D.; SEPHERI, N.; STRONG, D. (1996) Experimental comparison of some compensation techniques for the control of manipulators with stick-slip friction. *Control Engineering Practice*, v. 4, n. 9, 1209-1219.
- THOMPSON, J.M.T.; STEWART, H.B. (1994) *Nonlinear Dynamics and Chaos*. New York, John Wiley & Sons.
- THOMSEN, J.J. (1999) Using fast vibrations to quench friction-induced oscillations. *Journal of Sound and Vibration*, v. 228(5), 1079-1102.
- THOMSEN, J.J.; FIDLIN, A. (2003) Analytical approximations for stick-slip vibration amplitudes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 38, 389-403.
- UTKIN, V.I. (1978) *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*, Moscow, Mir Publishers.
- VAN DE VRANDE, B.L.; VAN CAMPEN, D.H.; DE KRAKER, A. (1999) An approximate analysis of dry-friction-induced stick-slip vibrations by a smoothing procedure. *Nonlinear Mechanics*, v. 19, 157-169.
- VIDYASAGAR, M. (1978) *Nonlinear Systems Analysis*. New Jersey, Prentice Hall.
- WU, Q.; ONYSHKO, S.; SEPEHRI, N.; THORNTON-TRUMP, A.B. (1998) On construction of smooth Lyapunov functions for non-smooth systems. *International Journal of Control*, v. 69, n. 3, 443-457.
- WU, Q.; SEPEHRI, N. (1999) On construction of non-smooth Lyapunov functions for non-smooth systems. *Proceedings of the 14th World Congress of IFAC*, Paper No. E-2c-15-4, 333-338.
- YAMAKAWA, H.; MURAKAMI, S. (1990) Optimum designs of operating curves for rotating shaft systems with limited power supplier. *Current Topics in: Structural Mechanics* 179, ASME, 181-185. Ed. H. Chung, PVP.

YOSHIZAWA, T. (1966) *Stability Theory by Lyapunov's Second Method*. Tokyo, Gakyjutsutosho Printing C.O. Ltd, p.1-10.

ZINOBER, A.S.I. (1990) *Deterministic Control of Uncertain Systems.*, Edited by: A.S.I. Zinober, IEE Control Engineering Series Vol. 40, London, Published by: Peter Peregrinus Ltd., pgs. 362.

APÊNDICE A - CARACTERÍSTICAS E MODELO DO MOTOR CC

O motor CC (isto é, motor alimentado por corrente contínua) é um atuador que converte energia elétrica em energia mecânica rotacional. A maior parte do torque gerado no rotor (armadura) do motor está disponível para acionamento de uma carga externa. Os motores CC são largamente usados em aplicações de controle, por causa das propriedades do alto torque, da controlabilidade de velocidade em grande faixa, da característica torque-velocidade bem comportada e da adaptabilidade a vários tipos de métodos de controle. O motor CC possui uma família de curvas características estáticas, sendo cada uma associada a uma potência e definida através da variação de um parâmetro de regulação ou controle do motor. A forma de regulação, mais usual, é a variação de tensão aplicada aos terminais do motor, a qual controla a velocidade de rotação.

Segundo DORF & BISHOP (1997), o motor CC controlado pela armadura utiliza uma corrente de campo constante e a relação eletro-mecânica do torque magnético desenvolvido pelo motor é dada por

$$T_m = K_m I_a \quad (\text{A.1})$$

onde

K_m é a constante de torque do motor,

I_a é a corrente de armadura e

T_m é o torque magnético (ou motriz) desenvolvido pelo motor.

A corrente de armadura está relacionada a tensão de entrada V_a aplicada na armadura como a seguir

$$V_a = \left(R_a I_a + L_a \frac{dI_a}{dt} \right) + V_b \quad (\text{A.2})$$

onde

V_b é a tensão relativa a força contra-eletromotriz,

R_a é a resistência elétrica do motor e

L_a é a indutância do motor.

A tensão relativa a força contra-eletromotriz V_b é proporcional a velocidade angular do motor e é expressada como

$$V_b = K_b \omega \quad (\text{A.3})$$

onde

K_b é a constante da tensão elétrica do motor e

$\omega = d\theta/dt$ é a velocidade angular do motor.

Substituindo as equações (A.1) e (A.3) em (A.2), obtém-se a seguinte expressão

$$V_a - K_b \omega = \left(\frac{R_a}{K_M} \right) T_m + \left(\frac{L_a}{K_M} \right) \frac{dT_m}{dt} \quad (\text{A.4})$$

A equação (A.4) relaciona as seguintes grandezas: a velocidade angular do motor, a tensão elétrica aplicada, o torque magnético e a variação do torque.

Em regime estacionário, a variação do torque é zero e a equação (A.4) é reduzida para

$$\left(\frac{R_a}{K_M} \right) T_m = V_a - K_b \omega \quad (\text{A.5})$$

Observe na equação (A.5), que se a tensão aplicada V_a for mantida constante, ocorre uma relação linear entre o torque magnético T_m e a velocidade angular do motor ω , na forma

$$T_m = c_1 - c_2 \omega \quad (\text{A.6})$$

Os parâmetros c_1 e c_2 são as constantes da relação linear. Dessa relação, as curvas características estáticas do motor definem dois casos extremos, um para velocidade angular nula e um para torque nulo, como a seguir

$$\omega = 0 \Rightarrow T_m = T_0 = \frac{K_M}{R_a} V_a \quad (\text{A.7})$$

$$T_m = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{V_a}{K_b} \quad (\text{A.8})$$

Figura A.1 Curvas características estáticas do motor CC.

A partir da equação (A.2) e usando a notação da transformada de Laplace, a corrente de armadura é expressada por

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - K_b \omega(s)}{(R_a + L_a s)} \quad (\text{A.9})$$

O torque magnético ou motriz $T_m(s)$ é igual a soma do torque enviado para as cargas interna e externa, sendo esta relação expressada por

$$T_m(s) = T_L(s) + T_{Eixo}(s) \quad (\text{A.10})$$

onde

$T_L(s)$ é o torque mecânico da carga interna

$T_{Eixo}(s)$ é o torque mecânico da carga externa (no eixo do motor).

O torque mecânico da carga interna incluindo inércia rotativa e amortecimento viscoso é expressado da seguinte forma

$$T_L(s) = Js^2\theta(s) + bs\theta(s) \quad (\text{A.11})$$

A partir das equações (A.10) e (A.11) pode-se escrever o torque mecânico da carga interna como

$$T_L(s) = Js^2\theta(s) + bs\theta(s) = T_m(s) - T_{Eixo}(s) \quad (\text{A.12})$$

Usando as equações (A.1), (A.9) e (A.12), obtém-se a função de transferência (com $T_{Eixo}(s)=0$)

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_a s)(Js + b) + K_b K_m]} \\ &= \frac{K_m}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Em alguns motores CC a constante de tempo da armadura, $\tau_a = L_a/R_a$ é desprezada e a função de transferência torna-se

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[R_a(Js + b) + K_b K_m]} = \frac{[K_m/(R_a b + K_b K_m)]}{s(\tau_1 s + 1)} \quad (\text{A.14})$$

onde a constante de tempo equivalente é

$$\tau_1 = \frac{R_a J}{(R_a b + K_b K_m)} \quad (\text{A.15})$$

É interessante notar que K_m é igual a K_b . Esta igualdade pode ser mostrada através da operação do motor em estado estacionário e do balanço de energia quando a resistência elétrica do rotor é desprezada. A potência de entrada para o rotor é $(K_b \omega) i_a$, e a potência enviada ao eixo é $T \omega$. Na condição de estado estacionário, a potência de entrada é igual a potência enviada ao eixo de maneira que $(K_b \omega) i_a = T \omega$. Além disso, de $T_m = K_m I_a$, o que estabelece a igualdade $K_b = K_m$.

Figura A.2 Diagrama de bloco do modelo do motor CC controlado pela armadura.

A seguir, são apresentadas as constantes de tempo do motor CC.

Constantes de Tempo do Motor CC

As constantes de tempo definidas para esse modelo de motor CC são as seguintes (OLIVEIRA *et al.*, 2001, FITZGERALD *et al.*, 1975):

$$\tau_a = \frac{L_a}{R_a} \text{ constante de tempo elétrico}$$

$$\tau_m = \frac{JR_a}{K_b K_m} \text{ constante de tempo mecânico ou inercial}$$

$$\tau_b = \frac{J}{B} \text{ constante de tempo de amortecimento}$$

Exemplos de Especificações de Motores CC

Segundo DORF & BISHOP (1997), as constantes típicas de um motor CC, com potência de saída máxima de 1/4 HP (ou 187W), são:

Constante de torque magnético $K_m = 0,050 \text{ N.m/A}$

Inércia do Rotor $J = 0,001 \text{ N.m.s}^2/\text{rad}$ ou $[\text{kg.m}^2]$

Constante de tempo elétrico = 1 ms

Constante de tempo mecânico = 100ms

Os valores dos parâmetros do motor utilizado como referência são:

$R_a = 5,25 \Omega$

$K_b = 0,437 \text{ V.s/rad}$

$L_a = 0$

$J = 0,001256 \text{ N.m.s}^2/\text{rad}$ ou $[\text{kg.m}^2]$

$B = 0,000856 \text{ N.m.s/rad}$

$K_m = 0,437 \text{ N.m/A}$

Tabela A1 Dados da Placa de Identificação do Motor CC

Potência = 750 watts
Torque máximo = 2 N.m
$V_{a(max)} = 170$ volts
$I_{a(max)} = 4,4$ ampères
$\omega_{(max)} = 377$ rad/s (ou 3600rpm) (sem carga externa)

Escolha dos Parâmetros do Motor para Diferentes Características

Para modelar diferentes características de potência e/ou torque do motor CC utilizado, deve ser adotado um procedimento de determinação apropriada dos parâmetros do motor. O parâmetro de referência inicial é a resistência da armadura R_a . As constantes de torque K_m e elétrica K_b caracterizam a eficiência do motor. O momento de inércia do rotor J e o amortecimento viscoso interno do motor B são parâmetros que caracterizam o comportamento mecânico da parte interna do motor. Esses parâmetros estão interrelacionados através das constantes de tempo do motor. Dessa forma, inicialmente, especificando a resistência de armadura, e fixando os valores das constantes de torque e elétrica, determina-se os parâmetros mecânicos de inércia e amortecimento para manter proporcionais os comportamentos dos motores com diferentes características de potência e torque.

Assumindo valores para a resistência de armadura, para a constante de tempo mecânico e para as constantes de torque e elétrica, determina-se o momento de inércia, através da seguinte expressão

$$J = \frac{\tau_m (K_b K_m)}{R_a}$$

Em seguida, assumindo uma constante de tempo de amortecimento e o valor determinado do momento de inércia, determina-se o amortecimento viscoso através da seguinte expressão

$$B = \frac{J}{\tau_b}$$

Dessa forma, obtém-se os valores de momento de inércia e amortecimento viscoso, conseguindo manter a proporcionalidade das características entre os motores utilizados.

Procedimento de Caracterização dos Motores

Para caracterizar as características dos motores e manter a proporcionalidade, deve-se seguir o seguinte procedimento:

1) Para um dado valor da resistência da armadura R_a , coloque o motor operando sem carga e aplique uma tensão de alimentação V_a , quando estabilizar, verifica a corrente I_a e a velocidade angular $\omega_{(max)}$. Então, através do produto do valor da tensão de alimentação pelo valor da corrente, determina-se a potência produzida pelo motor em vazio, $P = V_a I_a$.

2) Em seguida, partindo da operação do motor sem carga, acrescente carga (torque resistente externo) gradativamente, até conseguir uma redução de 15% na velocidade angular do motor, o que representa o escorregamento usual de um motor. Quando atingir a redução de velocidade desejada, verifica-se a corrente e o torque resistente máximo que pode ser aplicado. Com esses valores pode-se verificar a potência produzida pelo motor, $P = V_a I_a$, e a potência mecânica máxima disponível no eixo do motor, $P_{mec} = T\omega$.

Exemplo de Caracterização dos Modelos dos Motores

Os valores das constantes de tempo do motor CC utilizado são:

$$\tau_a = \frac{L_a}{R_a} = 0 \text{ s} \quad \tau_m = \frac{J R_a}{K_b K_m} = 0,034529 \text{ s} \quad (\sim 34 \text{ ms})$$

$$\tau_b = \frac{J}{B} = 1,46729 \text{ s}$$

As Tabelas A.2 e A.3 mostram os valores da simulação dos motores com comportamento proporcional, sendo o número 2 o utilizado como referência.

Tabela A.2 Valores da operação em vazio ($V_a=170V$).

Motor	R_a	J	B	I_a	$\omega_{(max)}$	P_{vazio}
1	1,0	6,5939E-3	4,4939E-3	3,930	380,02	668,10
2	2,5	2,638E-3	1,798E-3	1,583	379,96	269,11
3	5,25	1,256E-3	8,56E-4	0,7463	380,037	127,041
4	10	6,5939E-4	4,4939E-4	0,3919	380,049	66,623
5	100	6,5939E-5	4,4939E-5	0,04083	379,67	6,941
6	1 000	6,5939E-6	4,4939E-6	0,003931	380,02	0,66827
7	10 000	6,5939E-7	4,4939E-7	0,000431	379,15	0,07327
8	100 000	6,5939E-8	4,4939E-8	7,927e-5	370	0,01347

Tabela A.3 Valores da operação em carga máxima ($V_a=170V$).

Motor	R_a	I_a	T	ω	$P_{magnética}$	$P_{mecânica}$
1	1,0	26,22	10	329,00	4457,40	3290,00
2	2,5	10,52	4	328,85	1778,40	1315,40
3	5,25	5,217	2	326,342	886,89	652,68
4	10	2,749	1,048	326,120	467,33	341,773
5	100	0,2629	0,1	328,84	44,693	32,884
6	1 000	0,02612	0,01	329,25	4,4404	3,2925
7	10 000	0,002586	0,001	329,83	0,43962	0,32983
8	100 000	0,000276	0,00011	330,00	0,04692	0,0363

REFERÊNCIAS (APÊNDICE A)

- DORF, R.C. , BISHOP, R. *Modern Control Systems*, 8th edition, Addison-Wesley Pub Co; ISBN: 0201308649, 820 pgs., 1997.
- FITZGERALD, A.E., KINGSLEY, C., KUSKO, A., *Máquinas Elétricas - Conversão Eletromecânica da Energia*, McGraw-Hill, Rio de Janeiro, 1975.
- OLIVEIRA, V.A., AGUIAR, M.L., VARGAS, J.B., *Sistemas de Controle: Experimentos para Laboratório de Ensino*, Apostila de Apoio do Laboratório de Controle - Código 07039, Departamento de Engenharia Elétrica, EESC-USP, São Carlos, pgs. 171, 2001.

APÊNDICE B - ATRITO EM MÁQUINAS

O fenômeno físico atrito está presente em todas as máquinas que incorporam partes com movimento relativo. Embora, o atrito possa ser uma propriedade desejável, como no caso de freios, ele é geralmente fonte de dificuldades operacionais em alguns sistemas de servo controle, pois pode induzir instabilidades. A tribologia, primordialmente, é a ciência da mecânica do contato (dinâmica friccional), ou seja, o conhecimento dos processos físicos do contato deslizante em componentes de máquinas, tais como: mancais, elementos de transmissão, escovas, selos mecânicos (vedações), etc. Na tribologia, também, são considerados os aspectos dos mecanismos de desgaste, do tempo de vida, da área de contato verdadeira, dos processos de lubrificação, das relações entre os atritos, das propriedades químicas e físicas das superfícies. A dinâmica friccional (do atrito) é de fundamental interesse para os engenheiros de controle (ARMSTRONG-HÉLOUVRY, 1994; FEENY, 1998, IBRAHIM, 1994).

Modelos do Atrito

As investigações dentro do campo de controle devem considerar adequadamente modelos do atrito disponíveis de trabalhos experimentais e teóricos da tribologia. As ferramentas da teoria da estabilidade, do controle não-linear, da identificação de sistemas não-lineares, de controle adaptativo são bem desenvolvidas, mas muitas investigações ainda são baseadas nos modelos de Leonardo Da Vinci ou

da física elementar. Dessa forma, as ferramentas de análise capazes de prever a ocorrência de oscilações adere-desliza e outros comportamentos friccionais podem não ser plenamente confiáveis. Dentro da tribologia existe amplo entendimento da dinâmica friccional do contato lubrificado metal-metal, enquanto que o mais complexo modelo de atrito no contato seco utilizado é o que considera a lei do atrito de Coulomb mais a lei do atrito estático de Leonardo Da Vinci, conforme mostrado na Figura B.1 (IBRAHIM, 1994).

(a) Atrito Coulomb

(b) Atrito estático + Atrito Coulomb

Figura B.1 Modelos da física elementar para o atrito no contato seco.

Quando os métodos de controle por realimentação são aplicados a corpos em movimento, o atrito é inevitável dentre as forças principais do movimento. Por este fato, na engenharia de controle são investigadas as contribuições do atrito nas forças do movimento, quando estuda-se a dinâmica de multi-corpos, a aero ou fluido-dinâmica. Mas, a contribuição às forças do movimento devido ao atrito são

frequentemente estudadas com modelos simples, similares àqueles empregados por Leonardo Da Vinci. O grande esforço da área de tribologia para entender esse fenômeno, tem sido motivado pelo consumo de energia devido ao atrito e a falhas de equipamentos devido a desgaste e que representam uma parcela considerável de toda a economia moderna.

O controle por realimentação é frequentemente aplicado em sistemas mecânicos que envolvem contato metal-metal com graxa ou óleo lubrificante. As especificações de fabricação ou desempenho motivam a escolha de metais para os componentes de trabalho e as especificações de tempo de vida em serviço motivam o uso de fluidos lubrificantes. Estudos especializados em tribologia propõem outras combinações de materiais de engenharia, tais como plásticos sobre metal e lubrificação a seco e contatos elétricos.

O modelo clássico de força de atrito proporcional à carga normal, opondo ao movimento, independente da área de contato é conhecido como modelo de Leonardo Da Vinci, e permaneceu obscuro por séculos. Em 1965, *Rabinowicz* argumenta que os primeiros estudos científicos do atrito apareceram após a formulação da primeira lei de *Newton* em 1687 e a concepção moderna de força. A idéia de *Da Vinci* em 1519 sobre a natureza das forças, na qual o atrito era um exemplo de força, fornece uma fascinante compreensão dos problemas da filosofia natural pré-Newtonianas.

O modelo do atrito de Da Vinci foi redescoberto por *Amontons* em 1699 e desenvolvido por *Coulomb* em 1785. *Amontons* afirmava que o atrito é independente da área de contato (segunda lei de Da Vinci), o que já tinha sido verificado por Da Vinci. *Morin* em 1833 introduziu a idéia de atrito estático e *Reynolds* em 1866 introduziu a equação do fluxo de fluido viscoso, completando o modelo de atrito que é o mais utilizado em engenharia: o modelo de atrito estático + Coulomb + viscoso, como mostrado na Figura B.2.

(a) Atrito Coulomb + Atrito viscoso

(b) Atrito estático + Atrito Coulomb + Atrito viscoso

(c) Atrito viscoso negativo + Atrito Coulomb + Atrito Viscoso (efeito Stribeck)

Figura B.2 Outros modelos de atrito.

A Tribologia do Atrito de Máquinas

A maioria das máquinas servo-controladas são lubrificadas com óleo ou graxa. Esses lubrificantes são empregados porque eles fornecem uma barreira fluida entre as partes metálicas em deslizamento mudando a interação de atrito seco para atrito viscoso e assim, reduzindo drasticamente o desgaste. A barreira de fluido pode ser mantida através de lubrificação forçada sob pressão dentro da interface de carga do mancal, esta técnica é denominada de lubrificação hidrostática e exige complexos mecanismos, não sendo possível sua aplicação em muitos tipos de transmissões e mancais. A técnica mais comum de lubrificação é a hidrodinâmica, na qual o lubrificante é impelido para a interface de carga através do movimento das partes. A lubrificação hidrodinâmica apresenta simples implementação, requerendo apenas um caminho do óleo ou graxa ou talvez um jato (spray) de fluido. Entretanto, esta técnica sofre limitações por não manter o filme de fluido quando opera em velocidades inferiores a uma velocidade crítica (mínima). Abaixo dessa velocidade crítica ocorre contato sólido-sólido.

Para entender a tribologia das superfícies de engenharia é necessário considerar a topografia da superfície. Os primeiros modelos do atrito falhavam porque a topografia das superfícies não eram compreendidas. As interações na superfície de contato são analisadas considerando os pequenos contatos progressivamente. Na Figura B.3 um contato do tipo conforme (conformal) é mostrado, onde a parte A repousa na parte B. Em tais contatos, a área aparente do contato é determinada pela dimensão das partes.

Figura B.3 Contato conforme. Exemplos: guias de máquinas e mancais.

Partes que não se encaixam perfeitamente, isto é, existe diferença no raio de curvatura, apresentam contato não conforme ou Hertziano (nonconformal), como mostrado na Figura B.4. Esses contatos são denominados de pontos ou linhas de contato, o que é uma idealização. Na realidade, as partes se deformam para criar uma área de contato aparente, uma área que aumenta com o aumento da carga.

Figura B.4 Contato não conforme. Exemplos: contato no rolamento de rolos e contato entre os dentes de engrenagens.

A tensão encontrada em contatos conforme entre partes de aço são raramente maiores do que 7MPa (7MPa=1000psi), enquanto que em contato não conforme o pico de tensão pode ser 100 vezes maior. Uma tensão de 700MPa é maior do que o limite de resistência ao escoamento de muitos tipos de aço. Valores dessa ordem na tensão do contato Hertziano são possíveis porque a tensão é compressiva. Superfícies cristalinas, mesmo aparentemente superfícies suaves, são microscopicamente rugosas (ásperas). As características protuberantes das superfícies de contato são chamadas de asperezas e o contato verdadeiro ocorre em pontos onde as asperezas tocam-se, como mostrado na Figura B.5. Desta forma, a área verdadeira é muito menor do que a área aparente do contato. Sobre uma grande variedade de materiais de engenharia, as asperezas apresentam faixas de inclinação de 0 a 25 graus e estão concentradas na banda de 5 a 10 graus.

Figura B.5 Contato parte-parte ocorre nas asperezas, os pequenos caracteres superficiais.

Quando as asperezas estão em contato, a capacidade de carga local é determinada através da resistência dos materiais. As asperezas deformam-se para gerar a área de contato necessária para suportar a carga total. Como uma primeira aproximação, pode-se considerar a tensão local em uma junção de asperezas como sendo proporcional ao limite de resistência ao escoamento do material. A área de contato, por outro lado, é diretamente proporcional à carga total. Como uma regra prática, a área de contato verdadeira, A , é dada por $A=W/3Y$, onde W é a carga e Y é o limite de resistência ao escoamento do material. A tensão de contato em uma aspereza é adotada, por regra prática, como sendo três vezes o limite de resistência ao escoamento do material. Quando em contato não conforme, a tensão maior do que

o limite de resistência ao escoamento é possível porque as asperezas estão sob compressão.

O atrito é proporcional à resistência ao cisalhamento das junções de asperezas. Quando a carga cresce, a área da junção cresce, mas a resistência ao cisalhamento (medida por unidade de área) permanece constante. Desta forma, o atrito é proporcional à carga. Se superfícies verdadeiramente limpas são colocadas em contato, a resistência ao cisalhamento da junção (ação do atrito) pode ser maior do que a resistência ao cisalhamento do material e o coeficiente de atrito pode ser muito maior do que o valor unitário. Felizmente para operação de máquinas, a obtenção de superfícies verdadeiramente limpas é algo praticamente impossível. Mesmo na ausência de lubrificantes, filmes de óxidos formam-se na superfície do aço e de outro materiais de engenharia produzindo uma camada limite. Na presença de lubrificantes, aditivos para o óleo reagem com a superfície formando a camada limite. Os aditivos de camada limite são formulados para controlar o atrito e desgaste das superfícies. A camada limite é um sólido e a maior parte do cisalhamento ocorre nesse filme. Se a camada limite tem baixa resistência ao cisalhamento, o atrito será baixo e se ela tem boa adesão à superfície e pode ser preenchida de óleo, o desgaste será reduzido. A espessura da camada limite varia da espessura de uns poucos átomos a fração de um microm. Como sugere a Figura B.5, um décimo de um microm é uma espessura típica da camada limite formada por aditivos lubrificantes de óleos industriais. Note que essa espessura é duas ordens de grandeza menor que a dimensão típica da aspereza das junções no material metálico aço.

O Atrito como Função da Velocidade: Quatro Regimes Dinâmicos

Existem quatro regimes de lubrificação em um sistema com graxa ou óleo: atrito estático, camada lubrificante, lubrificação fluida parcial e lubrificação fluida completa. Desses quatro regimes cada um contribui para a dinâmica que um controlador apresenta quando a máquina acelera a partir da velocidade zero. Na Figura B.6 é mostrado a curva do efeito Stribeck juntamente com os três regimes do

movimento lubrificado. A característica interessante do regime I, atrito estático, é que o mesmo não é dependente da velocidade.

Figura B.6. Curva do efeito Stribeck generalizada mostrando o atrito como uma função da velocidade para a faixa de baixa velocidade.

O primeiro regime: atrito estático e deslocamento pré-deslizamento

Na Figura B.5 é mostrado o contato que ocorre nas junções das asperezas. Do ponto de vista de controle, estas junções têm dois comportamentos importantes: elas deformam elasticamente, produzindo um deslocamento pré-deslizamento e ambas, camadas limites e asperezas deformam plasticamente, produzindo a elevação do atrito estático. Assume-se frequentemente quando se estuda o atrito que não existe movimento durante o atrito estático, o qual é denominado de regime de não movimento sem deslizamento. Mas, em máquinas é bem conhecido que os contatos são flexíveis em ambas direções, normal e tangencial. *Dahl* (1968) estudou experimentalmente o atrito em mancais de rolamento para pequenas rotações e concluiu que para pequenos movimentos, uma junção em atrito estático comporta-se como uma mola e considerou as implicações para o controle. Existe um deslocamento (deslocamento pré-deslizamento) o qual é aproximadamente uma função linear da força aplicada, até que uma força crítica seja atingida, na qual ocorre uma transição brusca no regime do movimento (breakaway). A elasticidade das asperezas é representada esquematicamente na Figura B.7.

Figura B.7. Contato idealizado entre superfícies de engenharia em atrito estático. As asperezas do contato comportam-se como molas.

Quando as forças são aplicadas, as asperezas deformam-se, como mostrado esquematicamente na Figura B.8, mas recuperam quando a força é removida, como em uma mola. Neste regime, a força tangencial é representada por

$$F_T = -k_T x \quad (1)$$

onde F_T é a força tangencial, k_T é a rigidez tangencial no contato e x é o deslocamento a partir da posição de equilíbrio. F_T e x referem-se à força e ao deslocamento no contato antes do deslizamento começar, como indicado nas Figuras B.8 e B.9. Quando a força aplicada excede a força requerida para a transição brusca, a junção rompe (na camada limite, se presente) e o deslizamento verdadeiro começa, como mostrado esquematicamente na Figura B.9.

Força < Limite do Atrito Estático (Break-away)
Deslocamento pré-deslizamento é proporcional a força (5×10^{-6} m máximo típico)

Figura B.8. Deformação da aspereza sob a força aplicada, deslocamento pré-deslizamento.

O atrito estático não é uma força de atrito verdadeira, pois o atrito estático não é nem dissipativo e nem é uma consequência do deslizamento, isto é, ele é apenas uma força restritiva ao movimento, ou seja uma força tangencial no contato.

Figura B.9 Na transição brusca do regime do movimento (breakaway) ocorre o começo do verdadeiro deslizamento.

A rigidez tangencial no contato, k_T , é uma função da geometria da aspereza, da elasticidade do material e da força normal aplicada. Note que a rigidez tangencial no contato devido ao deslocamento pré-deslizamento é completamente diferente (e pode ser substancialmente menor do que) da rigidez da própria máquina, isto é, na análise do atrito, as asperezas são consideradas deformáveis enquanto que a máquina é considerada como rígida. Quando a força normal está variando, o comportamento pode ser completamente complexo, porque a força normal, a rigidez normal e a rigidez tangencial são não-lineares, sendo funções de interação do deslocamento normal. Para primeira aproximação, o deslocamento de transição brusca (breakaway) é adotado como sendo constante e a rigidez é então dada por:

$$k_T = \frac{F_b}{x_b} \quad (2)$$

onde F_b é a força de transição brusca (breakaway) e x_b é a deformação máxima das asperezas antes da transição brusca (breakaway). Se a força normal está variando e o

coeficiente de atrito estático é aproximadamente constante, então k_T torna-se proporcional à força normal.

O deslocamento de transição brusca (breakaway) pode ser medido em materiais de engenharia, a transição brusca é observada através das deflexões na ordem de 2-5 microns em junções de aço. Mas, por outro lado, grandes deslocamentos podem ser observados em um mecanismo. Como por exemplo, em um rôbo com controle por realimentação, onde os microns do movimento nos dentes de uma engrenagem são amplificados para milímetros através da alavanca representada pelo braço do rôbo.

O deslocamento pré-deslizamento tem sido amplamente estudado pela comunidade mecânica sendo, algumas vezes, denominado de micro-deslizamento (micro-slip). A transição do contato elástico para o deslizamento não é simples. O deslizamento é observado que se origina primeiro no contorno de uma região de contato e propaga-se em direção ao centro. Assim, não existe transição abrupta para o deslizamento. O deslocamento pré-deslizamento é um fenômeno de interesse da comunidade de controle em aplicações de posicionamento de extrema alta precisão, em dinâmica e em simulação. Outro aspecto também importante é a determinação da não existência de descontinuidades no atrito como uma função do tempo.

O segundo regime: lubrificação de contorno

No segundo regime, aquele de baixa velocidade de deslizamento onde a lubrificação fluida não é importante, a velocidade não é adequada para a formação do filme de fluido entre as superfícies. Como descrito, a camada limite serve como lubrificação. A camada limite deve ser sólida para que seja mantida sob a tensão de contato, mas a baixa resistência ao cisalhamento reduz o atrito. Na Figura B.10 o deslizamento na lubrificação de contorno é mostrado. Por causa da existência do contato sólido-sólido, existe cisalhamento na camada lubrificante. Por isto a lubrificação de contorno é um processo de cisalhamento em um sólido, sendo frequentemente considerado que o atrito na lubrificação de contorno é maior do que para lubrificação fluida, ou seja, os regimes denominados de três (III) ou quatro (IV). Certos lubrificantes de contorno reduzem o atrito estático a níveis inferiores ao atrito Coulomb e eliminam totalmente o movimento adere-desliza (stick-slip).

Figura B.10. Lubrificação de contorno, regime II da curva Stribeck.

O terceiro regime: lubrificação fluida parcial

O processo de enchimento de lubrificante na zona de contato, através do movimento, é mostrado na Figura B.11. O lubrificante é trazido para a região da carga de contato através do movimento, de deslizamento ou de rolamento. Um quantidade de lubrificante é expelida pela elevação de pressão devido a carga, mas a viscosidade evita que todo o lubrificante escape e assim um filme de fluido lubrificante é formado.

Figura B.11 O movimento introduz o fluido lubrificante na zona de contato.

O processo de enchimento é dominado pela interação da viscosidade do lubrificante, da velocidade e da geometria do contato. Quanto maior a viscosidade ou a velocidade do movimento, maior será a espessura do filme de fluido. Quando a espessura do filme de fluido não é maior do que a altura das asperezas, alguns contatos sólido-sólido ocorrerão e existirá uma lubrificação fluida parcial, como mostrado na Figura B.12.

Figura B.12 Lubrificação fluida parcial, regime III da curva Stribeck.

O quarto regime: lubrificação fluida completa

A lubrificação hidrodinâmica ou elasto-hidrodinâmica são duas formas de lubrificação fluida completa. A lubrificação hidrodinâmica aparece em contatos do tipo conforme (conformal), e a lubrificação elasto-hidrodinâmica em contatos do tipo não-conforme (nonconformal). Como mostrado na Figura B.13, o contato sólido-sólido é totalmente eliminado. Neste regime de lubrificação, o desgaste é bastante reduzido e o atrito é bem comportado. O objetivo da engenharia da lubrificação é a manutenção de uma lubrificação fluida completa eficiente e de baixo custo.

Figura B.13 Lubrificação fluida completa, regime IV da curva Stribeck.

Oscilações com Relaxação: Comportamento do Atrito num Ciclo Limite Adere-Desliza (*Stick-Slip*)

As oscilações adere-desliza (*stick-slip*) apareceram nos primeiros estudos sobre movimentos em baixa velocidade de sistemas com atrito e são classificadas como oscilações com relaxação. Os primeiros esforços em representar esse fenômeno físico foram através do modelo de atrito que incorpora o conceito do atrito estático mais o atrito Coulomb (dinâmico), como mostrado na Figura B.1(b).

Mecanismo com deslizador: sistema massa-mola

Os estudos pioneiros sobre oscilações com relaxação do tipo adere-desliza (*stick-slip*) utilizaram a análise do plano de fase para estudar as oscilações possíveis em mecanismos com deslizador, ou seja sistemas massa-mola, equivalendo a um controle proporcional+derivativo (PD), como mostrado na Figura B.14. Um atrito viscoso negativo, como mostrado na Figura B.2(c), foi adotado e os esforços foram direcionados na determinação da influência do atrito nas características das oscilações adere-desliza observadas.

Figura B.14 Esquema de máquina elementar com atrito: sistema massa-mola onde a superfície plana deslizando sob um pino.

Na Figura B.14, a superfície plana move-se em velocidade constante. Esse mecanismo é análogo a uma servo-máquina movendo com uma desejada velocidade v , um ganho de controle proporcional k_p e um amortecimento k_v . Sobre condições específicas esse sistema apresenta oscilações adere-desliza. A força da mola (ação de controle) observada durante o movimento é mostrada na Figura B.15.

Durante a adesão, intervalo a-b, a força eleva-se em uma taxa de variação $dF_{mola}/dt = k_p v$. No ponto b, a força atinge o valor $F_{s,00}$, o nível do atrito estático quando o sistema ficou em repouso por um grande tempo, e o deslizamento começa. Durante o intervalo b-c, o deslizamento ocorre e o movimento exato é governado pela dinâmica massa-mola mais os efeitos das forças de atrito. No ponto c, o pino está em repouso relativo sobre a superfície e a força da mola novamente começa a elevar-se com taxa de variação $dF_{mola}/dt = k_p v$ entrando em um ciclo limite estável de pontos c-d-e. O ponto d é mais baixo do que o ponto b por causa do sistema ter só estado em repouso por um tempo c-d. No ponto g, a velocidade é aumentada. O fato empírico importante é que quando a velocidade é aumentada, a amplitude do ciclo limite, i-j-k, diminui. A Figura B.16 mostra a força de atrito estático (breakaway force) como uma função do tempo de repouso (dwell time) correspondente aos intervalos do movimento apresentado na Figura B.15.

Figura B.15 Perfil da força na mola durante o movimento adere-desliza em velocidades diferentes. A força na mola decresce quando a velocidade aumenta.

Figura B.16 Atrito estático (breakaway force) como uma função do tempo de repouso (dwell time).

A principal motivação da discussão apresentada é a determinação de quais as condições para eliminação das oscilações adere-desliza. Observou-se que com o aumento da velocidade atinge-se uma velocidade crítica onde as oscilações adere-desliza (stick-slip) são extintas. Para os engenheiros de controle estas análises fornecem um procedimento para levantar os limites de operação, ou seja, quão lento uma máquina pode operar, antes de apresentar oscilações adere-desliza e de quais parâmetros dependem esses limites. Uma das formas de eliminar oscilações adere-desliza é o aumento da rigidez da mola.