

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O desenvolvimento do conceito de dimensionamento de estruturas baseado nos estados limites, ocorrido na Rússia no período de 1947 a 1949, desencadeou um processo de revisão nos critérios normativos propostos pelos códigos de inúmeros países. No Canadá, a mudança no modelo de investigação da segurança estrutural ocorreu na década de 80, principalmente para que o projeto das estruturas de madeira pudesse se aproximar, do ponto de vista metódico, do projeto de estruturas de concreto, aço e alumínio. Esse mesmo modelo tem sido empregado na Austrália, nos países da Comunidade Econômica Européia e nos Estados Unidos da América – para citar apenas aqueles que pertencem à abrangência deste estudo. Apesar de terem sido pesquisados outros códigos normativos, tais como: o inglês, o norueguês, o neozelandês e o suíço, a insuficiente diferenciação conceitual tornou injustificável a sua exposição.

As propostas normativas são mais bem entendidas a partir do conhecimento dos dados de pesquisas e fórmulas empíricas propostas por pesquisadores em recentes publicações científicas, o que se faz em seguida, antes da apresentação dos critérios normativos brasileiro e de outros países.

2.1 Fórmulas para dimensionamento de peças comprimidas e flexocomprimidas

Demarzo (1990) apresenta uma interessante evolução no estudo das peças sujeitas às cargas axiais de compressão e comenta que o fenômeno da flambagem em barras prismáticas comprimidas foi observado, inicialmente, nos experimentos do pesquisador P. van Musschenbroek, publicando-as em 1729. Todavia, quem apresentou pela primeira vez o estudo teórico das linhas elásticas foi Leonhard Euler, em 1744. No caso de barras fletidas, a primeira investigação sobre a linha elástica deve-se ao matemático suíço Jakob Bernoulli. Destaca-se a importância de outros pesquisadores no desenvolvimento desse tema, tais como Lagrange – 1800, Navier – 1826, Hodgkinson – 1840, Lamarle – 1845, Rankine – 1898,

Tetmajer e Jasinsky – 1894, Considère – 1889 e Engesser – 1898. E, mais recentemente, Shanley – 1946 e Johnston – 1961. No âmbito dos pilares de madeira: Newlin & Trayer – 1941, Ylinen – 1956, Malhotra – 1969, Neubauer – 1973, Buchanan – 1986 e Zahn – 1986. Ao longo do tempo, muitas expressões foram deduzidas para o cálculo desses elementos estruturais, transformando-se num imenso festival de fórmulas. O uso de expressões empíricas para o projeto de pilares é inteiramente válido, desde que sejam observados os limites constituídos.

Visando estudar a interação entre os dois modos básicos de ruptura dos pilares de madeira (resistência do material e instabilidade), Buchanan desenvolveu, em 1984, um modelo para investigação da resistência de peças de madeira submetidas à flexão combinada com ações axiais. O comportamento da madeira assumido no modelo é mostrado na Figura 2.1, associado com os seguintes conceitos:

- A resistência das peças sujeitas à ação combinada do momento fletor com esforços axiais pode ser prevista a partir do comportamento de peças similares carregadas sob tração e compressão axial;
- As seções planas permanecem planas;
- A madeira solicitada à compressão comporta-se de forma não-linear dúctil;
- As tensões de tração e de compressão estão sujeitas aos efeitos de comprimento e da largura das peças;
- O modelo não considera deformação torsional ou fora do plano principal, efeitos de duração de carregamento ou a possibilidade de ruptura por cisalhamento.

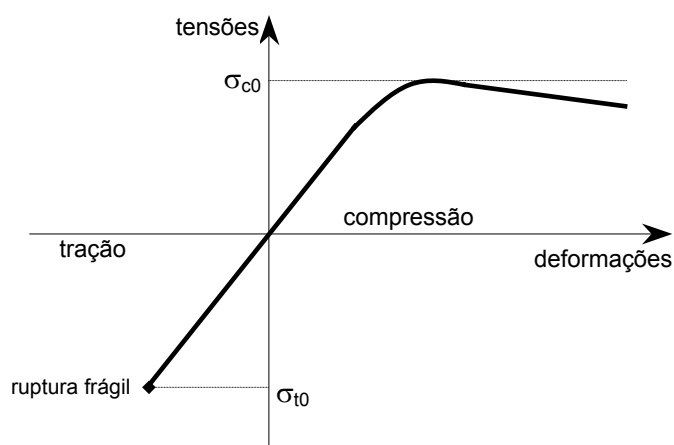


Figura 2.1 – Curva tensão-deformação utilizada no modelo de Buchanan.
Fonte: Madsen (1992)

Os resultados relativos ao 5°, 50° e 95° quantis da distribuição de frequências, obtidos por meio dos ensaios em que as ações são aplicadas com excentricidade variando de 2 a 200 mm, são mostrados na Figura 2.2. Todavia, o comportamento relativo ao 5° quantil é o de interesse específico, porque no projeto estrutural são limitantes os resultados inferiores da distribuição de resistência. Nessa figura vê-se a representação (linha pontilhada marcada com a palavra “code”) do critério adotado pela atual norma canadense para o caso de peças flexocomprimidas. O conservadorismo normativo pode representar diferenças de até 60%, dependendo do índice de esbeltez e do esforço aplicado. A Figura 2.3 fornece uma percepção global da influência da esbeltez nas peças sujeitas à flexo-compressão.

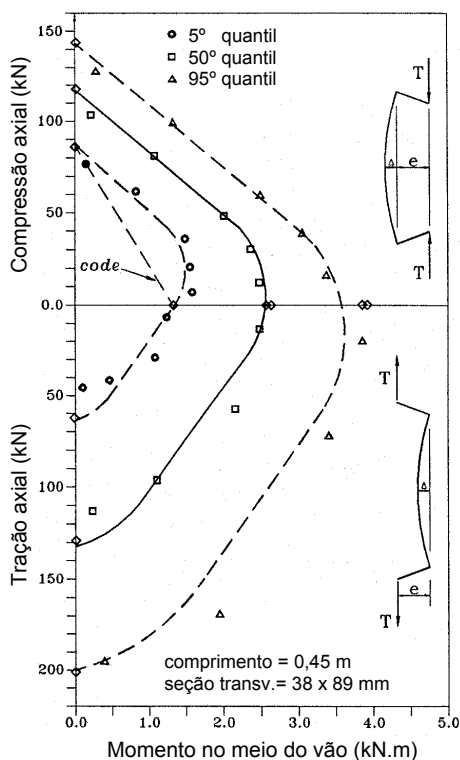


Figura 2.2 – Interação entre a flexão e ações axiais de tração e compressão. Fonte: Madsen (1992)

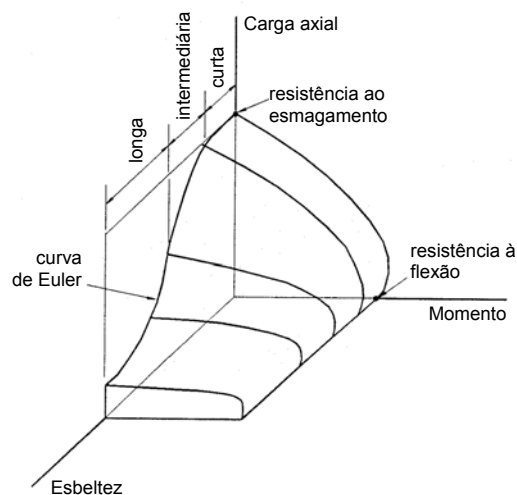


Figura 2.3 – Representação tridimensional da flexo-compressão em função da esbeltez. Fonte: Madsen (1992)

Newbauer¹, apud Madsen (1992), propôs uma expressão para representar o comportamento das peças de madeira comprimidas sem a presença do momento fletor, também conhecida como fórmula cúbica de Rankine-Gordon:

¹ NEWBAUER, L.W. (1973). *A realistic and continuous wood column formula*. Forest Products Journal, vol. 23, nº 3, p. 38-44.

$$\frac{N}{N_c} = \frac{1}{1 + \frac{f_{c0}}{E} \cdot \frac{(L_e/d)^3}{35}} \quad [2.1]$$

em que:

N = esforço axial centrado atuando em uma peça esbelta;

N_c = esforço resistente por uma peça curta sujeita à compressão axial;

f_{c0}/E = razão entre a resistência à compressão axial e o módulo de elasticidade;

L_e/d = razão entre o comprimento efetivo e a correspondente dimensão da seção transversal da peça.

A Equação [2.1] tem sido adotada pelo código canadense, como descreve Johns (1991), com fatores de modificação para considerar os efeitos de dimensões das peças.

Quando um material comporta-se elasticamente, as deformações resultantes do efeito de segunda ordem podem ser estimadas adequadamente pelo fator de amplificação do momento inicial, μ , dado por:

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{N}{F_E}} \quad [2.2]$$

sendo F_E a força de flambagem de Euler e N o esforço axial na peça. Segundo Madsen (1992), a experimentação e a teoria demonstram que a amplificação do momento, na ruptura, é maior que a representada pela Equação [2.2], justificada pelo comportamento não-linear da madeira na compressão. Um fator de amplificação mais seguro e mais realístico, proposto por Buchanan, é:

$$\mu = \frac{1 + (N/F_E)}{1 - (N/F_E)} \quad [2.3]$$

Nos Estados Unidos da América, a equação de Ylinen (Ylinen, 1956) foi incorporada ao código normativo – NDS/91 – especialmente a partir dos trabalhos de J.J. Zahn, substituindo a equação parabólica de quarta ordem, que foi empregada no dimensionamento das peças comprimidas de madeira por mais de quarenta anos, de acordo com Zahn (1986).

Segundo Zahn (1992), a forma essencial de uma equação de interação entre os dois possíveis modos de ruptura de uma peça comprimida é uma relação entre quocientes de ruptura, que exibem o comportamento limitante entre a resistência ou a flambagem elástica, representada pela condição:

$$\frac{N}{N_c} + \frac{N}{N_E} = 1 \quad [2.4]$$

em que N é o esforço axial; N_c é o esforço de ruptura por esmagamento puro e N_E é o esforço de ruptura por flambagem elástica pura (Euler).

Geralmente a equação de interação não precisa ser linear, como na Equação [2.4]. Zahn (1992) faz uma retrospectiva analisando a validade das fórmulas propostas por autores que o antecederam, inclusive discutindo a fórmula proposta por Rankine-Gordon, e retoma a fórmula de Ylinen para reescrevê-la como um caso de interação não-linear entre resistência e flambagem, em que o parâmetro “ c ” é o responsável pelo ajuste da curva aos dados experimentais, conforme segue:

$$N = \frac{N_c + N_E}{2c} - \sqrt{\left(\frac{N_c + N_E}{2c}\right)^2 - \frac{N_c N_E}{c}} \quad [2.5]$$

O critério adotado pelo projeto de norma do EUROCODE N° 5, de 1988, baseava-se na equação de Perry-Robertson para o dimensionamento das peças sujeitas a cargas axiais:

$$N = \frac{\bar{N}_c + (1 + m)N_E}{2} - \sqrt{\left(\frac{\bar{N}_c + (1 + m)N_E}{2}\right)^2 - N_E \bar{N}_c} \quad [2.6]$$

em que:

$$m = \eta \cdot (L/i) \cdot (f_{c0}/f_M) \quad [2.7]$$

e

$$\bar{N}_c = N_c (1 + 20\eta) \quad [2.8]$$

sendo:

- f_{c0} = resistência à compressão paralela às fibras;
 f_M = resistência à flexão;
 η = parâmetro ajustável ($\eta = 0,006$ para madeira sólida).

A Equação [2.6] foi obtida usando-se a teoria da máxima tensão de ruptura para flexão combinada com compressão, assumindo-se uma excentricidade $e = \eta \cdot (L/i) \cdot c$, em que i é o raio de giração da seção transversal e c é a distância do eixo neutro até a fibra mais afastada (na flexão). A semelhança dessa equação com a fórmula de Ylinen é notável.

Zahn (1992) afirma que, considerando o termo da flexão, a suposição de uma interação linear entre a resistência por esmagamento e a ruptura por flexão, não é sustentada pelos dados. Para madeira serrada, um modelo de interação parabólico remete a uma maior precisão, resultando na Equação [2.9], em que M_r é o momento fletor resistente pela peça:

$$\left(\frac{N}{N_c}\right)^2 + \frac{M}{M_r} = 1 \quad [2.9]$$

A Figura 2.4 compara as equações de Perry-Robertson, Neubauer e Ylinen, plotando-as em função do *índice de esbeltez universal*, λ_u , definido como $\lambda_u = \sqrt{N_c/N_E}$. Nota-se que a equação de Ylinen produz um melhor ajuste aos dados. Apesar dos bons resultados de ajuste da curva de Neubauer, Zahn (1992) critica sua equação pela carência de uma base teórica sólida e não ser tão adaptável e nem precisa quanto a expressão de Ylinen.

Zahn (1986) discute, neste trabalho, a validade das fórmulas de interação entre flexão e solicitações axiais e apresenta uma proposta para contemplar os casos de flexo-compressão biaxial, que na versão de 1991 da NDS, torna-se condição normativa.

Em trabalho publicado posteriormente, Zahn (1988) continua o estudo dos critérios de estabilidade de peças flexocomprimidas. Relativamente ao modo de interação entre os momentos na flexão biaxial, Galambos¹, apud Zahn (1988), mostrou que sob a ação de momentos constantes, M_z e M_y , atuando sobre os eixos de maior e menor inércia,

¹ GALAMBOS, T.V. (1968). *Beam-columns*. Structural members and frames, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., p. 246-249.

respectivamente, o momento atuante sobre o eixo de menor inércia é modificado pela presença de um momento agindo no eixo de maior inércia. O fator de modificação para o momento atuante sobre o eixo de menor inércia é:

$$\frac{1}{1 - (M_z/M_1)^2} \quad [2.10]$$

sendo M_1 o valor do momento de flambagem lateral-torsional elástica de M_z .

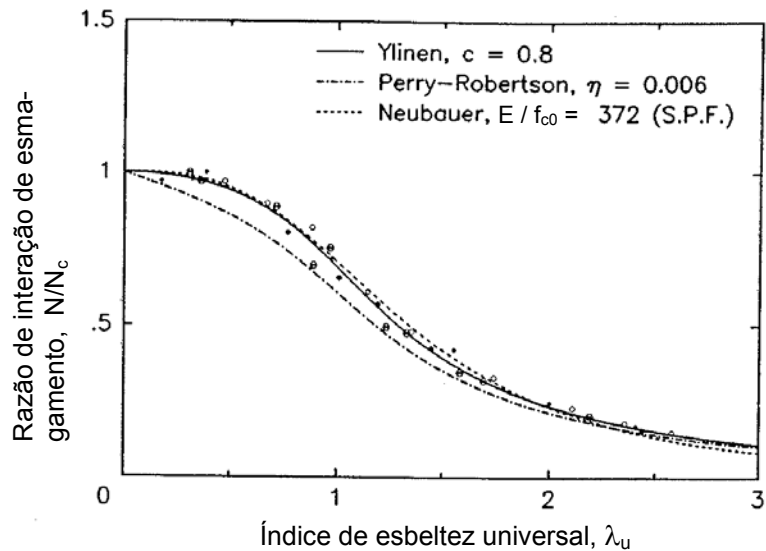


Figura 2.4 – Comparação das equações de Ylinen, Perry-Robertson e Neubauer.
 Fonte: Zahn (1992)

Esse autor ressalta que há, na literatura, poucos critérios para avaliação da flambagem sob ações combinadas. Utilizando o método de Ritz para a resolução de equações diferenciais, Zahn (1988) encontra as equações para o cálculo de deslocamentos e esforços válidos para uma barra simplesmente apoiada e submetida a um caso geral de carregamento, composto por força de compressão excêntrica e carregamentos laterais em ambas as faces da peça, demonstrando um critério que relaciona, no cálculo de peças flexocomprimidas com qualquer índice de esbeltez, as resistências à flexão e ao esmagamento do material.

Supondo que o critério de ruptura do material é representado por alguma fórmula ψ , Zahn (1988) demonstra que esse critério, num caso geral de interação, toma a seguinte forma:

$$\psi \left(\frac{\sigma_{c0}}{f'_{c0}}, \frac{\sigma_{M1}(1 + \alpha_1 \eta_1)}{f'_{M1}(1 - \eta_1)}, \frac{\sigma_{M2}}{f_{M2}(1 - \eta_2)} \right) = 0 \quad [2.11]$$

em que σ representam as tensões normais atuantes, f denotam as resistências e f' as resistências reduzidas pela esbeltez. Os índices subscritos “ c_0 ” significam compressão paralela às fibras; os índices “ M_1 ” denotam flexão sobre o eixo de maior inércia e os “ M_2 ” a flexão sobre o eixo de menor inércia. Os parâmetros α_1 , η_1 e η_2 são constantes que dependem do tipo de carregamento aplicado. Esse critério foi, posteriormente, adotado pelas normas norte-americanas em vigor.

Larsen & Theilgaard (1979), estudando as peças de madeira carregadas lateralmente, comentam que, na teoria clássica de peças axialmente carregadas e da flambagem lateral de vigas, é assumido um comportamento perfeitamente elástico para o material. A correspondência entre a teoria e a prática, segundo os autores, é boa para as peças esbeltas. Todavia, para as peças de menor esbeltez pode haver grandes discrepâncias, que são tradicionalmente explicadas pela relação de dependência entre o módulo de elasticidade e o correspondente valor da tensão. Há boa correlação entre a teoria e os resultados de ensaios se as peças são assumidas com comportamento elástico até a ruptura, porém com desvios iniciais de alinhamento.

A Equação [2.12] representa a hipótese mais simples de ruptura de uma peça flexocomprimida, na qual se assume que a ruptura tem início na zona comprimida, quando a seguinte condição é satisfeita:

$$\frac{\sigma_{c0}}{f_{c0}} + \frac{\sigma_M}{f_M} = 1 \quad [2.12]$$

Substituindo-se as expressões gerais de capacidade de carga na Equação [2.12], obtém-se a seguinte condição geral:

$$\frac{N}{f_{c0}A} + \frac{M_x + Nv_0}{f_M W_x \left(1 - \frac{N}{N_{ex}}\right)} + \frac{M_y + u_0 \left[N + \frac{N_{ey}}{\gamma} \left(\frac{M_x}{M_{cr}} \right)^2 \right]}{f_M W_y \left[1 - \frac{N}{N_{ey}} - \left(\frac{M_x}{M_{cr}} \right)^2 \right]} \leq 1 \quad [2.13]$$

sendo:

$N =$ força axial de compressão;

$A =$ área da seção transversal;

$M_x =$ momento aplicado nas extremidades sobre o eixo x;

$M_y =$ momento aplicado nas extremidades sobre o eixo y;

$u_0 =$ deslocamento horizontal;

$v_0 =$ deslocamento vertical;

$W_x =$ módulo de resistência relativo ao eixo x;

$W_y =$ módulo de resistência relativo ao eixo y;

$\gamma =$ constante relativa à seção transversal ($\gamma = 1 - (EI_y/EI_x)$)

$N_{ex} =$ carga crítica de Euler que provoca flexão sobre o eixo x;

$N_{ey} =$ carga crítica de Euler que provoca flexão sobre o eixo y;

$M_{cr} =$ momento crítico correspondendo à flambagem lateral, calculado de acordo com a teoria clássica da estabilidade.

Nos ensaios realizados por Larsen & Theilgaard (1979) ficou demonstrado que, pela adoção das relações $u_0 = 0,0035 \cdot L$ e $v_0 = 0,0035 \cdot L$, é possível se obter valores razoavelmente seguros para peças curtas e de média esbeltez. A influência das excentricidades é maior para os elementos de média esbeltez.