

**ESTUDO DAS ESTRUTURAS DE MEMBRANA:  
UMA ABORDAGEM INTEGRADA DO SISTEMA  
CONSTRUTIVO, DO PROCESSO DE PROJETAR E DOS  
MÉTODOS DE ANÁLISE**

Maria Betânia de Oliveira

Tese apresentada à Escola de Engenharia  
de São Carlos, da Universidade de São  
Paulo, como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Doutor em  
Engenharia de Estruturas

ORIENTADOR: Prof. Dr. Roberto Luiz de Arruda Barbato

São Carlos

2001

*Dedico este trabalho aos meus queridos:*

*Manoel, Filipe e Lucas.*

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Professor Roberto Luiz de Arruda Barbato pela sugestão do tema da pesquisa, pelo trabalho de orientação e pelo companheirismo.

À Universidade de São Paulo por proporcionar condições favoráveis ao desenvolvimento de pesquisa no Brasil.

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC) pela oportunidade de realizar este doutorado.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pela bolsa de estudo concedida.

À Faculdade de Engenharia, Arquitetura e Urbanismo da Universidade do Vale do Paraíba pelos recursos disponibilizados durante a impressão dos exemplares definitivos da tese.

À Pistelli Engenharia Ltda pelas fotos concedidas e por ter permitido o acompanhamento da elaboração de projetos e da fabricação de estruturas de membrana, durante os meses de nov/97, dez/97 e jan/98.

À Tapetes São Carlos Ltda pelas fotos concedidas.

Aos colegas, professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas/EESC pelo apoio técnico, pela amizade e pelo convívio.

Ao meu marido pela ajuda, incentivo e motivação.

A todos aqueles que direta ou indiretamente tornaram possível a elaboração deste trabalho.

# SUMÁRIO

<b>RESUMO</b>	<b>viii</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>ix</b>
<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações Iniciais	1
1.2 A Pesquisa e seus Objetivos	5
1.3 Apresentação da Pesquisa	5
<b>SISTEMA CONSTRUTIVO</b>	<b>6</b>
2.1 Considerações Iniciais	6
2.2 Desenvolvimento Histórico	7
2.3 Tipos de Estruturas de Membrana, Detalhes Técnicos e Exemplos de Obras	15
2.3.1 Estruturas de Membrana Protendida por Cabos	18
2.3.2 Estruturas Pneumáticas	26
2.4 Considerações Finais	42
<b>PROCESSO DE PROJETAR</b>	<b>45</b>
3.1 Considerações Iniciais	45
3.2 Problemas Inerentes ao Projeto	45
3.2.1 Determinação da Configuração Inicial da Membrana	46
3.2.2 Definição do Modelo de Corte da Membrana	49
3.2.3 Análise da Membrana Submetida às Ações	53
3.3 Processo de Projetar Integrado	54
3.4 Considerações Finais	56

<b>ANÁLISE ESTRUTURAL: PROCESSO ANALÍTICO</b>	<b>57</b>
<b>4.1 Considerações Iniciais</b>	<b>57</b>
<b>4.2 Fundamentos Geométricos</b>	<b>58</b>
4.2.1 Vetores Diretores, Elementos de Linha e Elementos de Superfície	58
4.2.2 Derivada de um Vetor ao Longo das Curvas Paramétricas	61
4.2.3 Curvatura e Torção de uma Superfície	66
<b>4.3 Teoria de Membrana para Pequenas Deformações e Pequenos Deslocamentos</b>	<b>70</b>
4.3.1 Equações Básicas	71
4.3.2 Verificação da Pressão Interna	75
<b>4.4 Formulação para as Estruturas Pneumáticas Simétricas</b>	<b>78</b>
4.4.1 Observações Gerais	78
4.4.2 Determinação dos Esforços	81
4.4.3 Determinação dos Deslocamentos	84
<b>4.5 Formulação para as Estruturas Pneumáticas Esféricas</b>	<b>87</b>
4.5.1 Determinação dos esforços	88
4.5.2 Determinação dos Deslocamentos	89
4.5.3 Verificação da Pressão Interna para a Ação do Peso Próprio	91
<b>4.6 Exemplo de Aplicação: Cobertura do Tipo <i>Air Supported</i></b>	<b>92</b>
4.6.1 Definição das Ações	92
4.6.2 Cálculo dos Esforços	93
4.6.3 Cálculo dos Deslocamentos	95
<b>4.7 Considerações Finais</b>	<b>98</b>
<b>ANÁLISE ESTRUTURAL: MÉTODOS NUMÉRICOS</b>	<b>101</b>
<b>5.1 Considerações Iniciais</b>	<b>101</b>
<b>5.2 Método da Densidade de Força</b>	<b>101</b>
5.2.1 Coeficiente de Densidade de Força proposto por MAURIN & MOTRO (1998)	102
5.2.2 Equilíbrio Nodal segundo MAURIN & MOTRO (1998)	105
5.2.3 Equilíbrio Global da Membrana segundo MAURIN & MOTRO (1998)	106
5.2.4 Convergência do Método segundo MAURIN & MOTRO (1998)	107
5.2.5 Membrana Reforçada por Cabos	109
5.2.6 Estruturas Pneumáticas	112

<b>5.3</b>	<b>Método da Relaxação Dinâmica</b>	<b>112</b>
5.3.1	Algoritmo da Relaxação Dinâmica segundo LEWIS (1993)	114
5.3.2	Formulação do Elemento segundo LEWIS (1993)	116
<b>5.4</b>	<b>Método da Análise Não-linear Direta</b>	<b>119</b>
<b>5.5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>121</b>
<b>SISTEMATIZAÇÃO DO PROJETO</b>		<b>122</b>
<b>6.1</b>	<b>Considerações Iniciais</b>	<b>122</b>
<b>6.2</b>	<b>Descrição do Caso</b>	<b>123</b>
<b>6.3</b>	<b>Definição da Forma Inicial da Membrana</b>	<b>123</b>
<b>6.4</b>	<b>Definição das Ações</b>	<b>126</b>
6.4.1	Peso Próprio	126
6.4.2	Pressão Interna	127
6.4.3	Vento	128
6.4.4	Combinações das Ações	133
<b>6.5</b>	<b>Análise da Membrana Submetida às Ações</b>	<b>134</b>
6.5.1	Cálculo da Resistência à Tração Admissível na Membrana	134
6.5.2	Determinação dos Esforços e dos Deslocamentos na Membrana	134
6.5.3	Verificação das Tensões	139
<b>6.6</b>	<b>Definição do Modelo de Corte da Membrana</b>	<b>140</b>
<b>6.7</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>149</b>
<b>CONCLUSÃO</b>		<b>150</b>
<b>7.1</b>	<b>Considerações Iniciais</b>	<b>150</b>
<b>7.2</b>	<b>Modelo Integrado de Pesquisa em Estruturas de Membrana</b>	<b>151</b>
<b>7.3</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>157</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>		<b>159</b>

## RESUMO

OLIVEIRA, M. B. (2001). *Estudo das estruturas de membrana: uma abordagem integrada do sistema construtivo, do processo de projetar e dos métodos de análise*. São Carlos, Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

As estruturas de membrana empregadas em coberturas são sistemas construtivos formados principalmente pela membrana estrutural, que ainda tem a função de vedar. As membranas estruturais são folhas flexíveis que resistem às ações externas devido à sua forma, às suas características físicas e ao seu pré-tracionamento. O pré-tracionamento da membrana pode ser alcançado, ou através do seu estiramento por meio de cabos (estruturas de membrana protendida por cabos), ou através da atuação da pressão de gases (estruturas pneumáticas). Ambas estão sendo usadas em coberturas de centros esportivos, de áreas comerciais e de construções industriais ou agro-industriais. Todavia, as estruturas de membrana são pouco conhecidas, estudadas e empregadas no Brasil. Neste contexto, este trabalho tem como objetivos sistematizar o conhecimento científico existente sobre o tema e introduzi-lo no Brasil e, também, apontar caminhos para investigação científica sobre as estruturas de membrana no país. Apresenta o sistema construtivo, o processo de projetar e os métodos de análise das estruturas de membrana empregadas em coberturas. Sistematiza o projeto de estruturas de membrana, através de recomendações e de estudo de caso. Propõe um modelo de pesquisa integrado voltado para o desenvolvimento desta tecnologia no Brasil. Este deve auxiliar a coordenação e a compatibilização dos esforços de investigação científica nas diversas áreas do conhecimento envolvidas no desenvolvimento das estruturas de membrana.

**Palavras-chave:** estruturas de membrana; estruturas pneumáticas; membranas protendidas; coberturas; sistema construtivo; processo de projetar; análise estrutural; projeto; modelo de pesquisa.

## ABSTRACT

OLIVEIRA, M. B. (2001). *Study of membrane structures: an integrated approach of the constructive system, design process and analysis methods*. São Carlos, Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Membrane structures used in roofs are constructive systems formed mainly by structural membrane, which has also the function of sealing. Structural membranes are flexible sheets that resist to external loads due to their form, to their physical characteristics and to their pre-stressing. The pre-stressing of the membrane can be achieved either through its stretching using cables (surface-tensioned membranes) or through gases pressurization (pneumatic structures). These structures are being utilized in roofs over airports, stadiums, industrial facilities, shopping precincts and buildings for industrial or agricultural use, among others. However, membrane structures are not yet well known, studied and used here in Brazil. In this context, this work has as objectives to systematize the scientific knowledge existent on the theme, to introduce it in Brazil and, also, to point out ways for scientific investigation on membrane structures in this country. This research presents the constructive system, the design process and the analysis methods of membrane structures used in roofs. This work systematizes the membrane structural design, with recommendations and study of case. This work proposes an integrated model of research for this technology development in Brazil. This model should assist the coordination and the mutual appreciation of the scientific investigation efforts in the different knowledge areas involved in the membrane structure development.

**Keywords:** membrane structures; pneumatic structures; pre-stressed membranes; roofs; constructive system; design process; structural analysis; design; model of research.



---

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Considerações Iniciais

A abertura do mercado brasileiro para os competidores internacionais mostrou a necessidade do país buscar a competitividade de suas atividades econômicas. Este contexto exige a permanente realização de obras civis, seja na estruturação física do país, seja na construção e modernização das instalações das empresas. Porém, estas obras, ou públicas ou privadas, precisam ser realizadas de forma racional para não onerarem o custo da atividade ou social ou empresarial. Nesse sentido, é importante dar atenção especial às estruturas empregadas em coberturas, seja na construção de estádios e ginásios, seja na construção de galpões fabris e de depósitos, entre outras.

Com relação às estruturas empregadas em coberturas, as estruturas de membrana podem ser uma solução economicamente viável devido às características da membrana, as quais possibilitam a utilização de pré-fabricação, de iluminação natural e de formas esteticamente agradáveis (TENSAR, 1999; BIRDAIR, 1998; ROBBIN, 1996; VANDENBERG, 1996; STRUCTURAL ENGINEERING REVIEW, 1994 e INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURE, 1993). Todavia, as estruturas de membrana ainda são pouco conhecidas, estudadas e empregadas no Brasil.

As estruturas de membrana resistem às ações externas devido à sua forma, às suas características físicas e ao seu pré-tracionamento. A forma da superfície é definida por uma configuração possível de equilíbrio. Suas características físicas definem a sua resistência à tração, limitando os níveis de tensão que podem ser atingidos. O pré-tracionamento é o necessário para assegurar que a membrana esteja sempre submetida a esforços de tração.

É importante ressaltar que o pré-tracionamento da membrana pode ser basicamente alcançado, ou através do seu estiramento por meio de cabos que compõem o sistema

estrutural de suporte, ou através da atuação da pressão de gases. Quando o pré-tracionamento é alcançado pela pressão de gases — estas estruturas são chamadas de estruturas pneumáticas. No primeiro caso — quando o pré-tracionamento é alcançado pelo estiramento da membrana por meio de cabos tensores, geralmente situados no contorno da membrana — estas estruturas são chamadas de estruturas de membrana protendida por cabos (OLIVEIRA & BARBATO,1999; LEWIS, 1998; OLIVEIRA & BARBATO, 1998a; OLIVEIRA & BARBATO, 1998b; NOHMURA, 1991). Cabe acrescentar que a membrana pode ser protendida, ainda, pela ação conjunta da pressão interna e do estiramento de cabos tensores. As Figs.(1.1-4) mostram exemplos de estruturas de membrana empregadas em coberturas.



FIGURA 1.1: Estrutura de membrana protendida por cabos, *Aeroporto Internacional de Denver* (ROBBIN, 1996).



FIGURA 1.2: Estrutura de membrana protendida por cabos, *Cynthia Woods Mitchell Center*, Texas (ROBBIN,1996).



FIGURA 1.3: Estrutura pneumática, Armazém Industrial no Brasil [Fonte: Pistelli Engenharia Ltda. (1997)].



FIGURA 1.4: Estrutura pneumática, *Tokyo Dome*, Japão (FORSTER,1994)

A tecnologia envolvida no desenvolvimento das estruturas de membrana abrange o sistema construtivo, o processo de projetar e os métodos de análise estrutural a serem empregados.

A sua construção é relativamente simples, sendo necessário o mesmo nível de cuidado e de controle dispensado às construções convencionais. Os principais aspectos da construção são aqueles ligados à confecção da membrana, ao sistema de bombeamento de ar e ao sistema de acesso (para o caso das estruturas pneumáticas), à ancoragem, ao transporte e à montagem (TENSAR, 1999; BIRDAIR, 1998; ASCE 17-96, 1996; CRISWELL at. al., 1996; ROBBIN, 1996; VANDENBERG, 1996; ARCHITECTURAL DESIGN, 1995; FIRTH, 1993; ASI-77, 1977; HERZOG, 1977 e OTTO & TROSTEL, 1967).

O seu projeto é caracterizado pela grande interdependência entre o seu estado de tensão e a sua forma, pela composição da superfície desejada através da emenda de pedaços de membrana e pelo fato da membrana resistir apenas a esforços de tração. Sendo assim, o projeto envolve a resolução de três problemas: determinação da configuração inicial de equilíbrio (*form-finding*); definição do modelo de corte (*cutting-pattern*) e análise do comportamento estrutural da membrana submetida às ações (*load analysis*) (LEWIS, 1998; TABARROK & QIN, 1992 e FUJIKAKE et al., 1989).

Por fim, a análise estrutural usualmente requer uma abordagem específica. Nesta área as pesquisas estão basicamente divididas em três grupos. No primeiro grupo emprega-se

o Método da Análise Não-linear Direta (TABARROK & QIN, 1992), no segundo emprega-se o Método da Densidade de Força (MAURIN & MOTRO, 1998) e no terceiro grupo emprega-se o Método da Relaxação Dinâmica (BARNES, 1994).

## 1.2 A Pesquisa e seus Objetivos

Inserida neste contexto, esta pesquisa de doutorado é dedicada ao estudo das estruturas de membrana empregadas em coberturas. Como **objetivos** buscam-se as seguintes contribuições básicas: sistematizar o conhecimento científico existente sobre o tema e introduzi-lo no Brasil e, também, apontar caminhos para investigação científica sobre as estruturas de membrana no país

## 1.3 Apresentação da Pesquisa

Após esta Introdução, onde foram apresentados o tema e os objetivos da pesquisa, seguem cinco capítulos. No Capítulo 2, Sistema Construtivo, apresentam-se a conceituação, o desenvolvimento histórico, alguns exemplos de obras e os detalhes técnicos do sistema construtivo composto por estruturas de membrana.

No Capítulo 3 apresenta-se o Processo de Projetar as estruturas de membrana. Assim, são apresentados os problemas inerentes ao projeto, os métodos de análise empregados e o modelo de projeto integrado proposto por VÉRON et al (1998b).

No Capítulo 4 apresenta-se o Processo Analítico para a análise estática de estruturas de membrana, incluindo a aplicação da teoria em um exemplo de cobertura pneumática.

O Capítulo 5 é voltado ao Métodos Numéricos empregados na análise de estruturas de membrana. Apresentam-se o Método da Densidade de Força, o Método da Relaxação Dinâmica e Método da Análise Não-linear Direta.

No Capítulo 6 apresenta-se a sistematização do projeto de estruturas de membrana através da apresentação de recomendações e de estudo de caso.

No Capítulo 7, Conclusão, faz-se o fechamento do trabalho e propõe-se um Modelo Integrado de Pesquisa em estruturas de membrana.

Por fim, as Referências Bibliográficas do trabalho são apresentadas.

---

## CAPÍTULO 2

# SISTEMA CONSTRUTIVO

### 2.1 Considerações Iniciais

Segundo LEONARD (1988), as estruturas tracionadas, podem ser basicamente divididas em duas grandes classes. As estruturas de cabo, formadas por elementos estruturais uniaxialmente tracionados, e as estruturas de membrana, formadas por elementos estruturais bi-axialmente tracionados, Fig.(2.1.1).

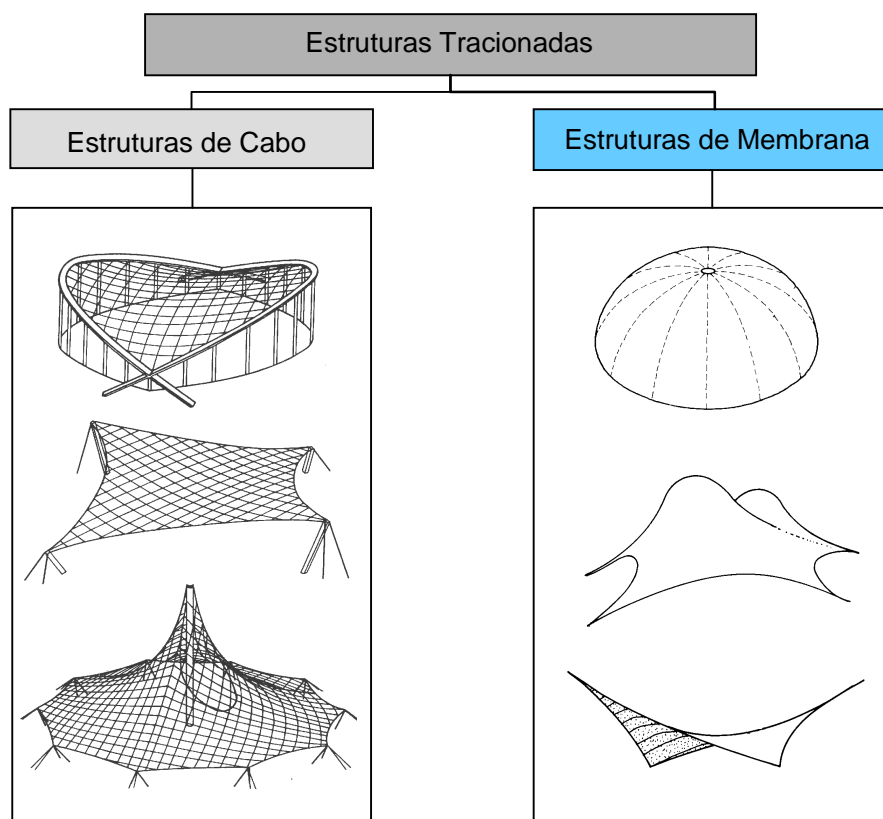


FIGURA 2.1.1: Estruturas Tracionadas [figura da autora, ilustrações das estruturas de BARBATO (1991) e de VANDENBERG (1996)].

As estruturas de cabo não são tratadas nesta pesquisa, entretanto, podem-se destacar as seguintes dissertações e teses sobre este tema defendidas no SET/EESC/USP: AGUIAR(1999); SALES (1998), DAVID (1995), OLIVEIRA (1995), BARBATO (1991), QUEIROZ (1991), RIGITANO (1991), OSHIMA (1987), DUCATTI (1986), EL DEBS (1983), BARBATO (1975) e BARBATO (1972). Nestes trabalhos pode-se encontrar, além de avanços, uma vasta revisão bibliográfica sobre as estruturas de cabo.

Porém, as estruturas de membrana empregadas em coberturas são tema desta pesquisa. Estas, como anteriormente definidas, são sistemas construtivos formados principalmente pela membrana estrutural, que ainda tem a função de vedar. As membranas estruturais são folhas flexíveis que resistem às ações externas devido à sua forma, às suas características físicas e ao seu pré-tracionamento. O pré-tracionamento da membrana pode ser alcançado, ou através do seu estiramento por meio de cabos (estruturas de membrana protendida por cabos), ou através da atuação da pressão de gases (estruturas pneumáticas) (OLIVEIRA & BARBATO,1999; LEWIS, 1998; OLIVEIRA & BARBATO, 1998a; OLIVEIRA & BARBATO, 1998b; NOHMURA, 1991).

## 2.2 Desenvolvimento Histórico

Inspirado na natureza, fonte permanente das estruturas tracionadas, o homem inventou a tenda, que é a forma mais elementar de estrutura de membrana (ROBBIN, 1996).

Eram comuns as tendas dos exércitos da Civilização Assíria, Egípcia e Romana, as quais eram construídas com peles de animais ou com tecidos. Os espectadores Romanos freqüentavam anfiteatros cobertos por membrana de tecido de linho (FORSTER, 1994).

Antes do século XIX, uma evolução na área das estruturas de membrana se deu com os povos nômades, que, devido às suas necessidades, desenvolveram coberturas facilmente montáveis, desmontáveis e transportáveis. Destaca-se a Tenda Negra, assim denominada devido ao emprego de tecido de pêlo negro de bode, a qual era feita com a combinação de mastros e cordas ancoradas no chão, Fig.(2.2.1). Usada inicialmente em climas quentes do Oriente Médio e do norte da África, sua cor escura proporcionava sombra e sua trama aberta permitia o escape do ar quente e, ainda, ajudava na proteção contra os intempéries (DREW, 1979; FORSTER, 1994; ROBBIN, 1996).



FIGURA 2.2.1: Tenda Negra Tradicional (HALLET & SAMIZAY<sup>1</sup> *apud* ROBBIN, 1996).

Com relação as estruturas de membrana pneumática, também antes do século XIX, em 1783 os irmãos franceses Montgolfier perceberam que a diferença de pressão entre o ar quente e o ar frio era capaz de estabilizar um balão, com 11 m de diâmetro, que possuía membrana de linho e papel. Neste mesmo ano, Meusenier sugeriu o projeto revolucionário de um dirigível. Os estudos nesta área, continuaram no século seguinte e no início do século XX, proporcionando a solução dos problemas estruturais dos balões e dos dirigíveis (DENT, 1971).

A Revolução Industrial possibilitou a mecanização da produção de tecidos têxteis de algodão, de lã e de linho. A partir de 1800 os circos tornaram-se a principal forma de entretenimento da época, surgindo "a grande tenda de circo". A Fig.(2.2.2) mostra o clássico *Chapiteau*, que já possuía superfície de dupla curvatura e considerável tecnologia de construção, a qual foi passada a sucessivas gerações de construtores (FORSTER, 1994).



FIGURA 2.2.2: *Chapiteau* (FORSTER, 1994).

---

<sup>1</sup> HALLET, S. I.; SAMIZAY, R. (1980). *Architecture of Afghanistan*. New York, Garland STPM.



Em 1844, em Paris, o engenheiro francês Marey-Monge construiu um reservatório de hidrogênio na forma de balão, Fig.(2.2.3). Este foi o precursor dos satélites em forma de balão do Programa Espacial Americano, Fig.(2.2.4) (DENT, 1971; OTTO & TROSTEL, 1967).

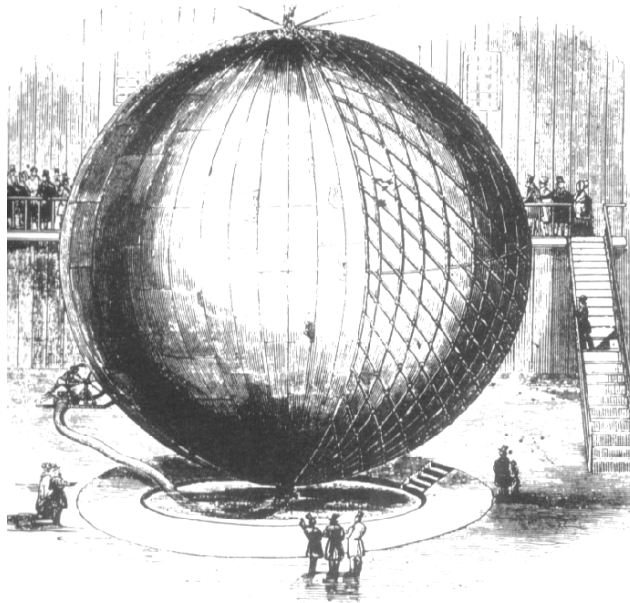
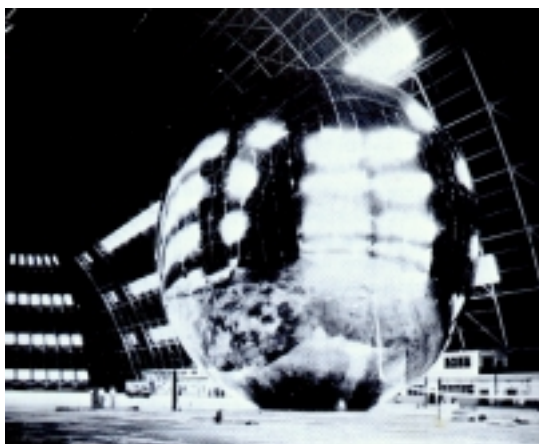
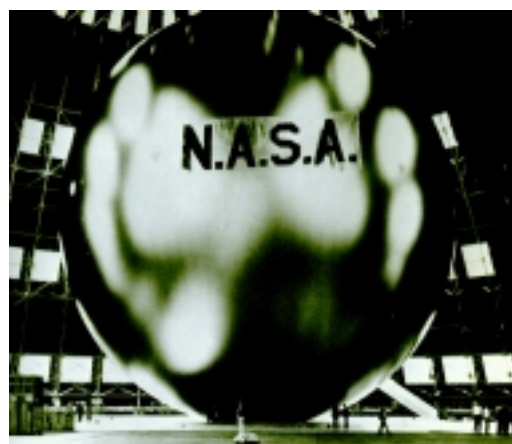


FIGURA 2.2.3: Reservatório de Hidrogênio  
(Illustrated London News, 1844 *apud* OTTO & TROSTEL,1967).



*ECHO I*



*ECHO A-12*

FIGURA 2.2.4: Exemplos de Satélites de Comunicação em Estrutura Pneumática  
Construídos pela NASA (DENT, 1971).

A utilização das estruturas de membrana pneumática em coberturas foi primeiro defendida pelo engenheiro inglês Lanchester, que em 1917 registrou uma patente com detalhes importantes sobre o projeto de coberturas pneumáticas, Fig.(2.2.5) (DENT, 1971; OTTO & TROSTEL, 1967).

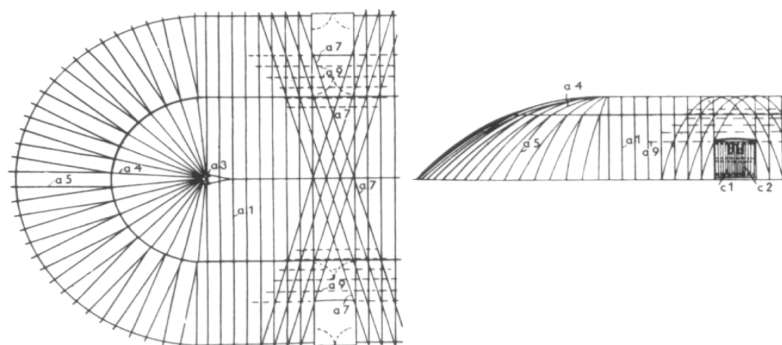


FIGURA 2.2.5: Esquema da Patente de Lanchester (LANCHESTER<sup>2</sup> apud DENT, 1971).

Cabe aqui acrescentar que a idéia de se usar estruturas pneumáticas em coberturas foi a aplicação de uma nova tecnologia na construção das tendas modernas, como pode ser observado nas seguintes palavras do próprio Lanchester (DENT, 1971).

*"A presente invenção tem por objetivo fornecer um meio de construir e montar uma tenda de grande tamanho sem o uso de mastro ou suportes de qualquer tipo. A presente invenção consiste na explicação da construção de uma tenda em que um balão de tecido, ou outro material de pequena permeabilidade de ar, é empregado e mantido erguido pela pressão de ar e em que o acesso é providenciado por meio de uma, ou mais, eclusa de ar..."* (LANCHESTER<sup>2</sup> apud DENT, 1971).

Durante a Segunda Guerra Mundial houve grande desenvolvimento na área de materiais e na engenharia de estruturas. Com relação aos materiais desenvolvidos, para a área de estruturas de membrana, foram importantes as fibras sintéticas (por exemplo, o *nylon*) e materiais de revestimento das membranas de tecido. Estes materiais foram aplicados em importantes instalações industriais e militares durante a guerra (FORSTER, 1994; DENT, 1971; KRISHNA, 1978).

---

<sup>2</sup> LANCHESTER, F. W. (1917). *Patent 119-339*, London.

Finalmente, em 1946 colocaram-se em prática as idéias de Lanchester quando os Estados Unidos desenvolveram uma grande antena de radar para proteger a sua fronteira. Esta antena precisava de ser protegida das severas condições climáticas do norte, com mínima obstrução das ondas de rádio. A solução foi dada por Walter Bird, que propôs uma cobertura de membrana suportada apenas pela pressão de ar, Fig.(2.2.6) (DENT, 1971; KAMRASS, 1956). Com o sucesso das coberturas de radar, em 1956, Bird montou uma empresa especializada em estruturas pneumáticas, difundindo-as nos EUA (DENT, 1971; ALLISON, 1959).



FIGURA 2.2.6: Primeira cobertura pneumática, *radome*, cobertura de radar em clima ártico (KAMRASS, 1956).

Na Europa e na Ásia, as estruturas pneumáticas popularizaram-se após a construção em 1958 do *Pan American Airways Pavilion*, em Bruxelas, Fig.(2.2.7). Com o sucesso deste pavilhão, diversas coberturas pneumáticas foram construídas em feiras, destacando a Exposição de Osaka, no Japão, em 1971. Neste evento, pela primeira vez, empregou-se com sucesso a resistente membrana de fibra de vidro revestida por *teflon* (DENT, 1971; FORSTER, 1994). As Figs.(2.3.19) e (2.3.31) mostram exemplos de coberturas pneumáticas da Exposição de Osaka.



FIGURA 2.2.7: *Pan American Airways Pavilion* de 1958 em Bruxelas (OTTO & TROSTEL, 1967).

Paralelamente aos fatos anteriormente descritos, Frei Otto, especialista em estruturas tracionadas, construiu em 1967 o Pavilhão da Alemanha na Exposição de Montreal, Fig.(2.2.8). Como nesta época a membrana não possuía resistência suficiente para ficar suspensa apenas pelos mastros, o problema foi contornado com o emprego de uma rede de cabos sob a membrana, a qual tinha apenas a função de vedar. Outro projeto similar do mesmo autor foi o do Estádio Olímpico de Munique, construído em 1971, Fig.(2.2.9) (ROBBIN, 1996; FORSTER, 1994).

A partir de então desenvolveram-se as estruturas de membrana contemporâneas, que constituem-se na utilização de membranas de elevada resistência, inspiradas nas coberturas em redes de cabo de Frei Otto e nas estruturas pneumáticas de Walter Bird. Assim, as estruturas de membrana contemporâneas são a continuação da tradição ininterrupta (FORSTER, 1994).

Durante os últimos vinte anos houve rápido aumento no uso de estruturas de membrana devido ao contínuo desenvolvimento dos materiais, da tecnologia de construção e das ferramentas que auxiliam os engenheiros durante o projeto (STRUCTURAL ENGINEERING REVIEW, 1994; INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURE, 1993).



FIGURA 2.2.8: Pavilhão da Alemanha na Exposição de Montreal, em 1967 (FORSTER, 1994).



FIGURA 2.2.9: Estádio Olímpico de Munique, Alemanha, 1971 (ROBBIN, 1996).

Esses avanços tecnológicos viabilizam o emprego das estruturas de membrana em coberturas de grandes áreas com o utilização de pré-fabricação, de iluminação natural durante o dia e de formas esteticamente agradáveis aos olhos contemporâneos (TENSAR, 1999; BIRDAIR, 1998; ROBBIN, 1996; VANDENBERG, 1996; STRUCTURAL ENGINEERING REVIEW, 1994 e INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURE, 1993).

Mais especificamente, cabe ainda destacar que as estruturas de membrana estão sendo usadas na cobertura de estações rodoviárias, aeroportos, estádios, entradas de edifícios, piscinas, quadras de esportes, galpões fabris e galpões de depósito. Além disso, devido à facilidade de pré-fabricação, de transporte e de adaptações em suas dimensões, este tipo de estrutura é uma opção econômica para as coberturas de uso temporário. É o caso das coberturas de abrigos para populações atingidas por sinistros da natureza, coberturas de galpões para armazenagem de picos de estoque, coberturas de canteiros-de-obras da construção civil e coberturas de pavilhões de exposições, reuniões e outros eventos (ARCHITECTURAL DESIGN, 1968; ARCHITECTURAL DESIGN, 1995; ARCHITECTURAL DESIGN, 1998; BERGER & DE PAOLA, 1992; DENT, 1971; GEIGER, 1988; FIRTH, 1993; FORSTER, 1994; HAMILTON et al., 1995; HERZOG, 1977; HOPPE, 1993; KAMRASS, 1956; KRISHNA, 1978, KRONENBURG, 1995; LIDDELL, 1994; MAKOWSKI, 1993; MAJOWIECKI, 1985; McCONVILLE, 1988; ROBBIN, 1996; SCHLAICH et al., 1994; VANDENBERG, 1996; WOOD & HUNTER, 1995). As estruturas pneumáticas são, ainda, usadas como fôrmas para cascas de concreto, Fig. (2.2.10) (TENSAR, 1999). Mais arrojada é a utilização destas em bases extraterrestres (CRISWELL et al., 1996).

Cabe ressaltar que, enquanto as obras anteriormente citadas representam marcos do desenvolvimento tecnológico das estruturas de membrana, os estudos originais de Frei Otto, os quais deram origem a várias pesquisas, são marcos sob o ponto de vista teórico. OTTO & TROSTEL (1967) apresentam o conceito do princípio pneumático, muitas idéias criativas de aplicação das estruturas pneumáticas e, também, uma criteriosa formulação para a análise estrutural da membrana.

Atualmente as pesquisas continuam sendo desenvolvidas devido à exigência de pequena tolerância durante a fase de produção das estruturas de membrana e ao seu comportamento estrutural altamente não-linear. Assim sendo, avanços estão sendo constantemente alcançados (ADDIS, 1994; BARNES, 1994; KNUDSON, 1991; LEONARD, 1974; MAKOWSKI, 1993).



FIGURA 2.2.10: Emprego de Estrutura Pneumática como Fôrma para Casca de Concreto (TENSAR, 1999).

Entretanto, apesar de serem largamente usadas nos países desenvolvidos, as estruturas de membrana ainda são pouco conhecidas, estudadas e empregadas no Brasil.

### 2.3 Tipos de Estruturas de Membrana, Detalhes Técnicos e Exemplos de Obras

As estruturas de membrana empregadas em coberturas compõem um sistema construtivo constituído pela membrana estrutural que efetivamente cobre a área de interesse e, também, pela estrutura de suporte.

A estrutura de membrana é o “envelope” da cobertura formada pela emenda de faixas de membrana estrutural, denominadas painéis.

A membrana estrutural, segundo a ASCE 17-96, deve ter qualidade uniforme, deve possuir propriedades físicas condizentes com a aplicação e deve estar livre de defeitos que prejudiquem o seu comportamento estrutural e a sua durabilidade. Segundo esta norma, as propriedades físicas das membranas devem ser determinadas de acordo com o ASTM D 4851-88 (*Standard Test Methods for Coated and Laminated Fabrics For Architectural Use*).

Na escolha do tipo de membrana são levadas em consideração características tais como flexibilidade, resistência, permeabilidade, resistência ao fogo, peso próprio, trabalhabilidade, durabilidade, isolamento térmico e translucidez (HERZOG, 1977). Sendo o seu custo fortemente influenciado pela durabilidade, segundo FIRTH(1993), usualmente

as coberturas pneumáticas são confeccionadas com membrana de tecido *poliester* revestido com *PVC* e, nos projetos mais requintados, com membrana constituída por fibras de vidro revestidas com *teflon* ou com silicone.

Os métodos de produção usados para emendar as faixas de membrana dependem essencialmente dos materiais que a compõem. As emendas devem apresentar características — tais como resistência, flexibilidade e permeabilidade — próximas das características da membrana original. As emendas podem ser ou desmontáveis ou não-desmontáveis. As desmontáveis, são o fecho, as juntas com cavilha e a amarração, ou com cordas ou com cabos. As não desmontáveis são a costura, a solda, o rebitemento e o grampeamento (HERZOG, 1977).

A estrutura de suporte é subdividida em dois grupos. O primeiro não é diretamente ligado à membrana, podendo ser composto pelos mastros e cabos externos. O segundo é mecanicamente ligado à membrana, podendo ser composto pelos seguintes sistemas estruturais: mecanismos de ancoragem; cabos que adaptam a forma do contorno aos requisitos arquitetônicos; vigas e tubos que criam bordas retilíneas; anéis usualmente colocados nos topos dos mastros que podem gerar superfície aproximadamente cônica e, ainda, arcos que criam regiões curvas (VÉRON et al., 1998b). Neste último grupo inclui-se a pressão interna, que também pode ser considerada como uma “estrutura de suporte” das estruturas pneumáticas (DENT, 1971).

Existem vários tipos de estruturas de membrana e são numerosas as obras que exemplificam tais possibilidades. Entretanto, de acordo com a tecnologia empregada na protensão da membrana, estas estruturas podem ser classificadas em dois tipos básicos: as Estruturas de Membrana Protendida por Cabos e as Estruturas Pneumáticas. Estes tipos básicos podem ser subdivididos em diversas alternativas, como indicado na Fig.(2.3.1). As alternativas, os detalhes técnicos e alguns exemplos de obras com Estruturas de Membrana Protendida por Cabos e com as Estruturas Pneumáticas são apresentados, respectivamente, nas seções (2.3.1) e (2.3.2).



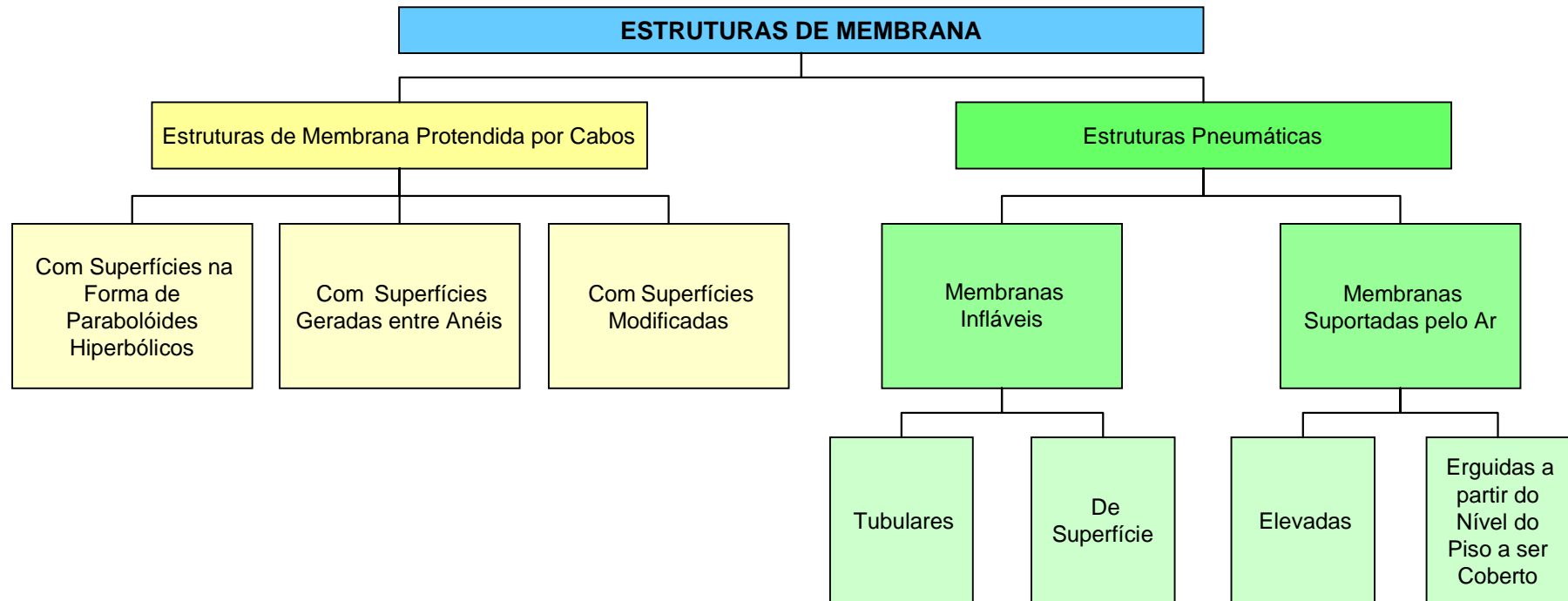


FIGURA 2.3.1: Tipos de Estruturas de Membrana (figura da autora).

### 2.3.1 Estruturas de Membrana Protendida por Cabos

As estruturas de membrana protendida por cabos são estabilizadas através do seu estiramento por meio de cabos tensores, geralmente situados em bainhas no contorno da membrana. Os cabos tensores fazem parte do sistema estrutural de suporte, que pode ser composto por estrutura metálica, de concreto ou de madeira (VANDERBERG, 1996).

Essas estruturas apresentam contorno contínuo, o qual pode ser flexível ou rígido. Usualmente o contorno é flexível, formado por cabos embutidos nas extremidades da membrana, Fig.(2.3.2). O contorno define a forma da estrutura e determina onde e como há a transferência das tensões da membrana para o sistema estrutural rígido ou para a fundação (VANDERBERG, 1996).

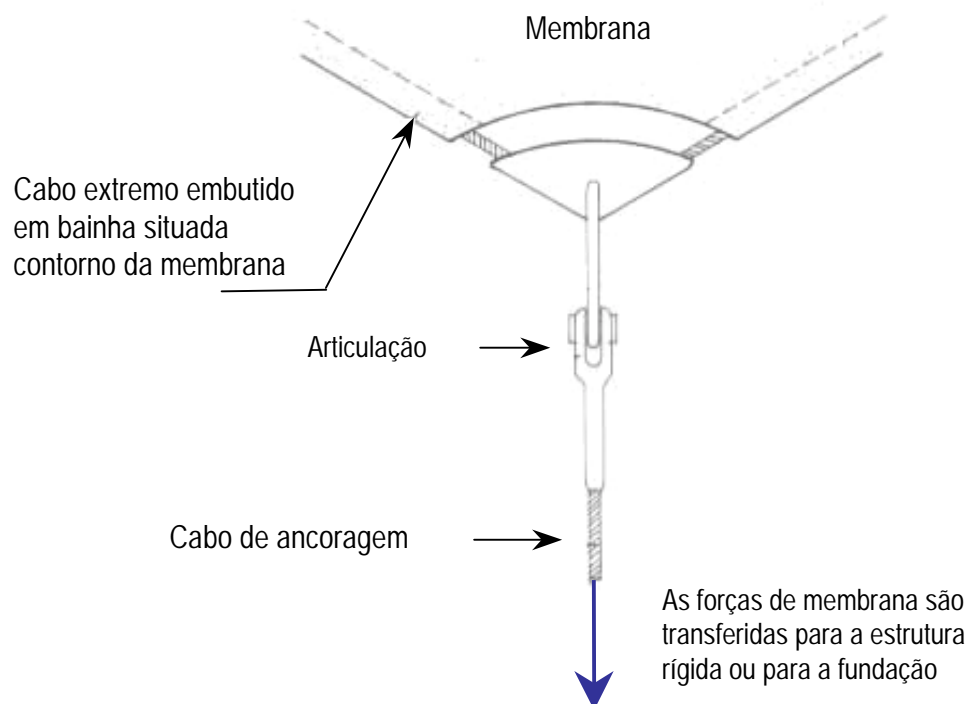


FIGURA 2.3.2: Detalhe típico dos cabos embutidos em bainhas situadas no contorno da membrana (adaptada de VANDERBERG, 1996).

Basicamente existem duas famílias de formas empregadas em estruturas de membrana protendida por cabos: as superfícies formadas por parabolóides hiperbólicos e as superfícies geradas entre anéis. Além destas, existem as formadas por superfícies modificadas, as quais são geradas pela introdução de outras estruturas de suporte nas

superfícies básicas anteriormente definidas (VANDERBERG, 1996). A Fig. (2.3.3) esquematiza estes tipos de estruturas, os quais são detalhados em seguida.

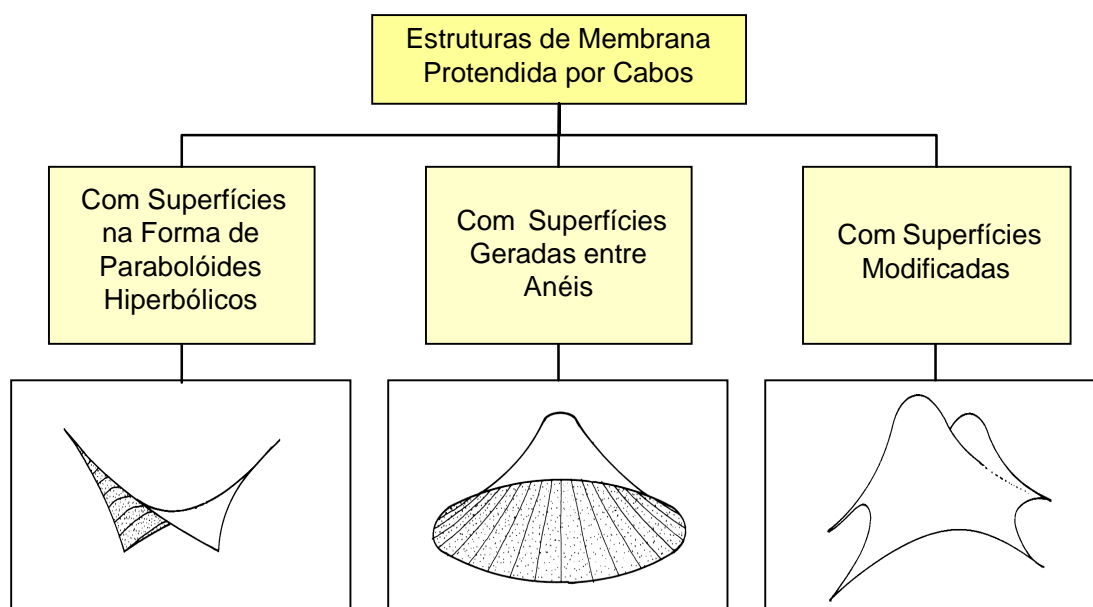


FIGURA 2.3.3: Tipos de Estruturas de Membrana Protendida por Cabos [figura da autora, ilustrações das estruturas de VANDENBERG(1996)].

- ***Superfícies na Forma de Parabolóides Hiperbólicos***

As superfícies na forma de parabolóides hiperbólicos são geradas entre um nível de pontos baixos e outro nível de pontos altos, como ilustra a Fig.(2.3.4). A Fig. (2.3.5) mostra que como esta superfície pode ser gerada a partir de uma linha reta movida da posição A-C para a posição D-B de tal maneira que as suas extremidades movam ao longo das linhas retas A-D e C-B. Sendo assim, a forma de sela resultante tem quatro contornos retos e A-B e C-D são parábolas. Estas parábolas tem curvaturas opostas, sendo a parábola A-B côncava e a parábola C-D convexa. Desta forma, as fibras da membrana na direção A-B resistem às ações de baixo para cima (vento) e as fibras da membrana na direção C-D podem resistir às ações de cima para baixo (cargas verticais), ficando toda a membrana estável sobre qualquer tipo de carregamento, desde que suficientemente protendida (VANDERBERG, 1996).

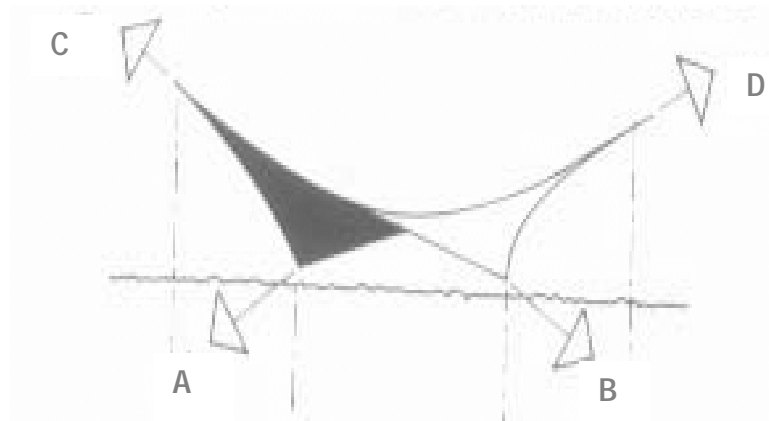


FIGURA 2.3.4: Forma básica de estrutura de membrana: superfície na forma de parabolóide hiperbólico [adaptada de VANDENBERG (1996)].

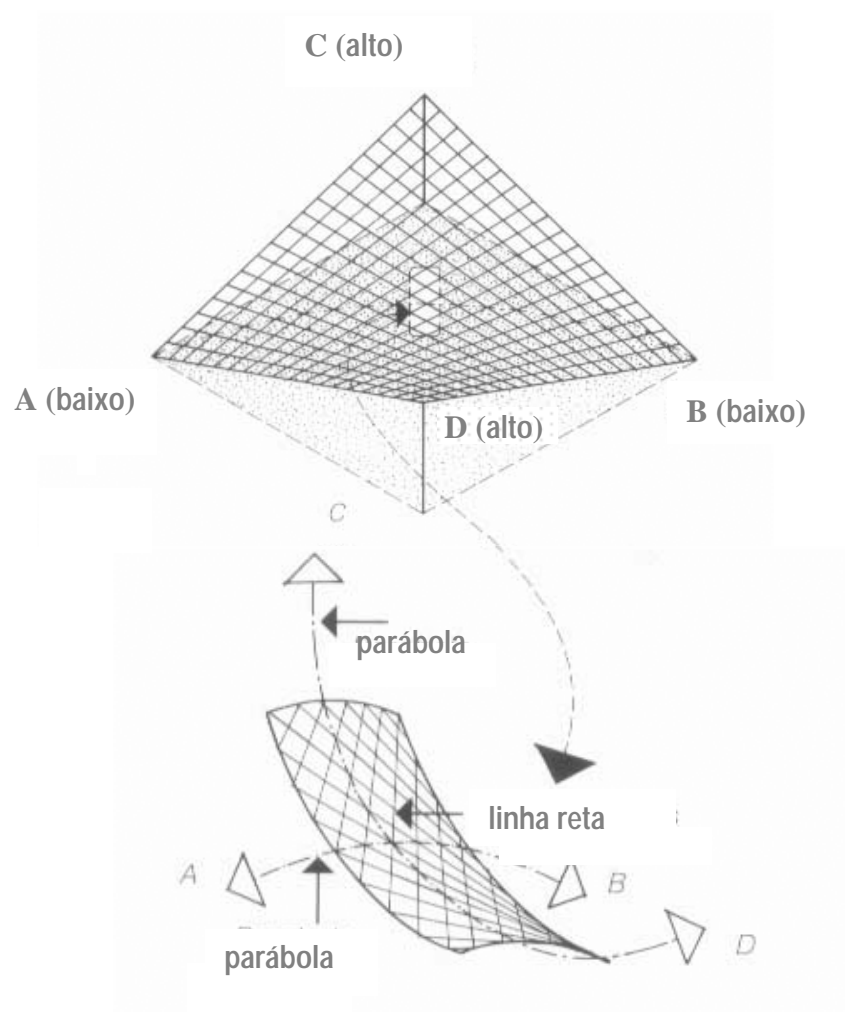


FIGURA 2.3.5: Obtenção de uma Superfície na forma de Parabolóide Hiperbólico (adaptada de VANDENBERG, 1996).

As coberturas simples e agradáveis esteticamente com superfície de parabolóide hiperbólico são usualmente criadas por quatro cabos de contorno espaçados entre dois mastros (formando os pontos altos) e duas ancoragens no chão (formando os pontos baixos), como ilustra a foto da obra mostrada na Fig.(2.3.6).



FIGURA 2.3.6: Pavilhão de Música de Kassel, Alemanha, 1955 (VANDENBERG, 1996).

- ***Superfícies Geradas entre Anéis***

Nestas coberturas a superfície da membrana é gerada entre um anel inferior grande e um anel interno superior menor, os quais estão em um mesmo eixo, como ilustrado na Fig.(3.3.7). Nesse caso, para que a tensão na membrana seja uniforme, o raio A-B deve em todo ponto ser o mesmo que o raio C-D. Entretanto, devido às imposições arquitetônicas, isto pode não ser possível e as tensões podem ser não uniformes. Nestes casos, há a necessidade de se reforçar a membrana, ou através da adição de camadas de membrana, ou através do uso de emendas mais resistentes, ou através da introdução de cabos sob a membrana (VANDENBERG, 1996).

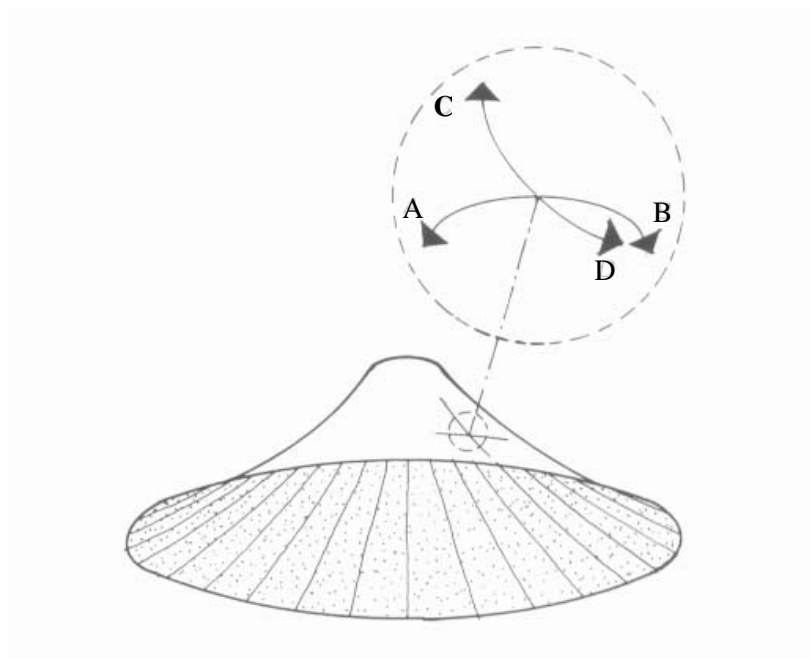


FIGURA 2.3.7: Forma Básica de Estrutura de Membrana: Superfície Gerada entre Anéis [adaptada de VANDENBERG (1996)].

A seguir apresentam-se exemplos de coberturas de membrana protendidas por cabos com superfície gerada entre anéis: o *Pompano Beach Bandshell*, *Hajj Terminal* e o *Pensacola Pool*, Figs. (2.3.8-10).



FIGURA 2.3.8: *Pompano Beach Bandshell*, Flórida, 1993 (ROBBIN, 1996)



FIGURA 2.3.9: *Hajj Terminal, Jeddah, Soudi Arabia* [adaptada de ROBBIN (1996) e VANDENBERG (1996)]

FIGURA 2.3.10: *Pensacola Pool*, EUA (VANDENBERG, 1996).

- ***Superfícies Modificadas***

A superfícies básicas anteriormente definidas podem ser modificadas pela introdução de outras estruturas de suporte, como ilustra a Fig.(2.3.11). Nestes casos, a posição de equilíbrio da membrana geralmente não é a superfície mínima e, então, podem ser necessários cabos ou reforços em pontos de concentração de tensão (VANDENBERG, 1996).

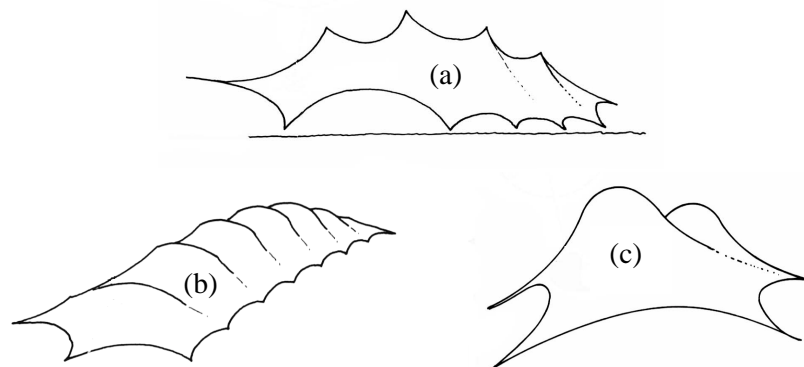


FIGURA 2.3.11: Formas modificadas por: (a) estrutura pontual, (b) estrutura linear em arco e (c) estrutura tridimensional [adaptada de VANDENBERG (1996)].



A seguir apresentam-se dois exemplos de estruturas de membrana protendidas por cabos com formas modificadas: a cobertura do *Chene Park Amphitheater* e a cobertura do Laboratório de Pesquisa M&G, Figs.(2.3.12-13).



FIGURA 2.3.12: Chene Park Amphitheater, Detroit, 1990 (ROBBIN, 1996).



FIGURA 2.3.13: Laboratório de Pesquisa M&G, Itália (ROBBIN, 1996).

### 2.3.2 Estruturas Pneumáticas

As estruturas pneumáticas podem ser consideradas como formas estruturais estabilizadas integralmente, ou parcialmente, pela atuação de pressão de gases na membrana (OTTO & TROSTEL, 1967).

Responsável por essa estabilização, o sistema de bombeamento de ar deve assegurar uma pressão interna de acordo com as indicações de projeto. O sistema a ser empregado depende do tipo da estrutura pneumática, do seu porte, da permeabilidade de sua membrana. Cabe ressaltar que um sistema de reserva deve entrar em operação sempre que houver ou interrupção de energia elétrica ou defeito do sistema principal. Diferentes equipamentos podem ser empregados na estabilização de estruturas pneumáticas, os quais são distintos pelo tipo de controle da corrente de ar, como ilustra a Fig.(2.3.14). No caso dos ventiladores axiais a corrente de ar circula na direção do eixo do equipamento, possibilitando o arranjo de sistemas em série. O barulho gerado com altas velocidades é maior que de outros equipamentos e a direção da corrente de ar pode ser facilmente invertida através da inversão das hélices. No caso dos ventiladores radiais a corrente de ar é tomada na direção do eixo do equipamento, porém, é soprada na direção de um ângulo reto da entrada. Por causa da mudança de direção do fluxo de ar, não pode ser facilmente montado arranjo de equipamentos. Altas velocidades são necessárias para produzir a pressão de ar e a direção da corrente de ar não pode ser invertida. No caso de equipamentos tangenciais, o eixo com hastes atua como um impulsor que gira dentro de um cilindro. O ar entra e sai tangencialmente à área deste cilindro. Este equipamento é empregado em pequenas estruturas, onde há exigência de barulho reduzido. São convenientes na produção de pressões negativas, entretanto, não permitem a inversão da direção do fluxo de ar (HERZOG, 1977).

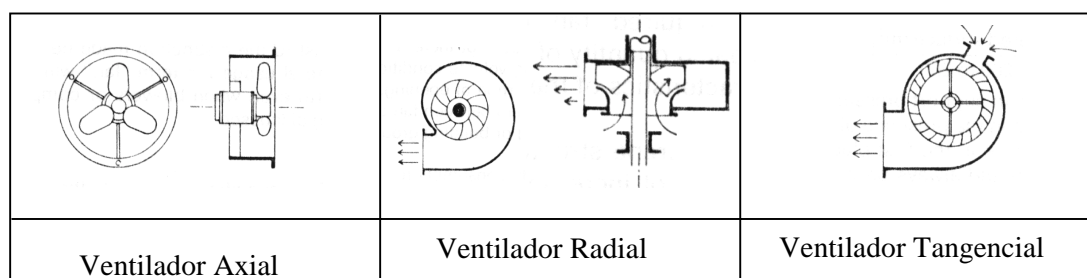


FIGURA 2.3.14: Tipos de Equipamentos Empregados na Estabilização de Estruturas Pneumáticas (HERZOG, 1977).

O sistema de estabilização é ligado à estrutura através de um tubo de transição, como ilustrado na Fig. (2.3.15).

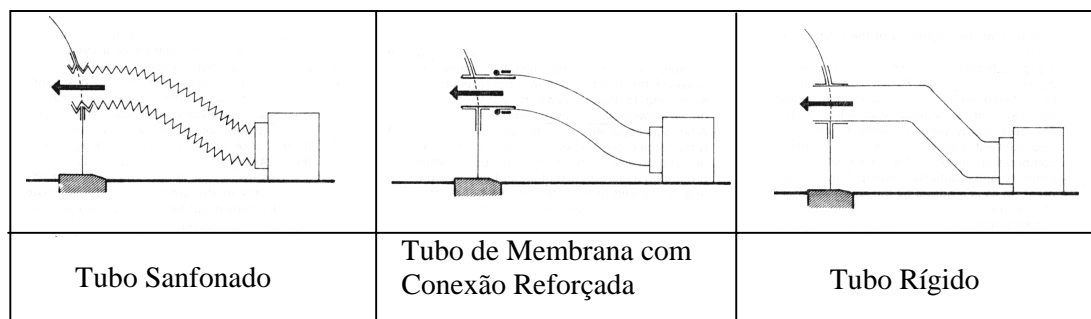


FIGURA 2.3.15: Tipos de Conexão entre o Sistema de Pressurização e a Estrutura Pneumática (HERZOG, 1977).

As estruturas pneumáticas possuem um ou mais compartimentos pressurizados, os quais podem, ou não, fazer parte do espaço útil da construção, surgindo os dois tipos básicos de estruturas pneumáticas: *air supported* e *air inflated* (DENT, 1971; HERZOG, 1977; OTTO & TROSTEL,1967). A Fig.(2.3.16) ilustra estes tipos básicos de estruturas pneumáticas, os quais são detalhados em seguida.

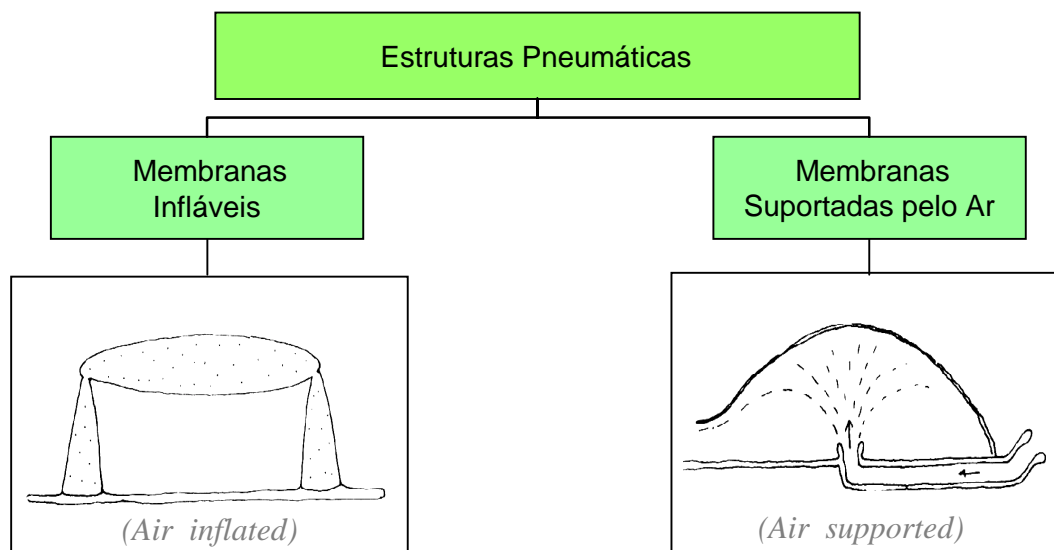


FIGURA 2.3.16: Tipos básicos de estruturas pneumáticas [figura da autora, ilustrações das estruturas de OTTO & TROSTEL (1967)].

- ***Membranas Infláveis***

Membranas Infláveis são as estruturas pneumáticas do tipo *air inflated*. Nestas estruturas os compartimentos pressurizados não fazem parte do espaço útil da cobertura e, assim sendo, estes não possuem aberturas tais como portas e janelas. Então, o ar é contido em uma membrana fechada formando elementos estruturais pressurizados — tais como, colunas, vigas, arcos e cascas — os quais resistem às ações de forma semelhante aos elementos estruturais das estruturas convencionais (DENT, 1971; HERZOG, 1977; OTTO & TROSTEL, 1967).

Neste tipo de estrutura pneumática, desde que não haja vazamento de ar, pode-se pensar que o bombeamento contínuo de ar não é necessário, diminuindo assim o consumo de energia. Porém, o custo da cobertura pode ser elevado em consequência do aumento do consumo de membrana e das altas pressões requeridas. Cabe ressaltar que devido à porosidade da membrana, principalmente nas emendas, geralmente a reposição de ar é essencial para que a pressão interna se mantenha constante. Além disso, variações de temperatura causam expansão e contração do ar, afetando a pressão interna. Nas estruturas onde a pressão interna é muito elevada, este efeito não é tão pronunciado. Entretanto, em estruturas com pressões internas menos acentuadas, as variações de temperatura podem levar ao colapso da estrutura, ou por redução excessiva da pressão interna (não tracionando a membrana), ou por aumento excessivo da pressão interna (ocorrendo trações maiores que a admissível). Consequentemente, a reposição periódica de ar pode ser necessária e um contínuo suprimento de ar é quase sempre essencial em casos onde grandes volumes de ar são envolvidos (DENT, 1971).

Existem dois tipos básicos de membranas infláveis: as membranas infláveis tubulares e as membranas infláveis de superfície, Fig. (2.3.17).

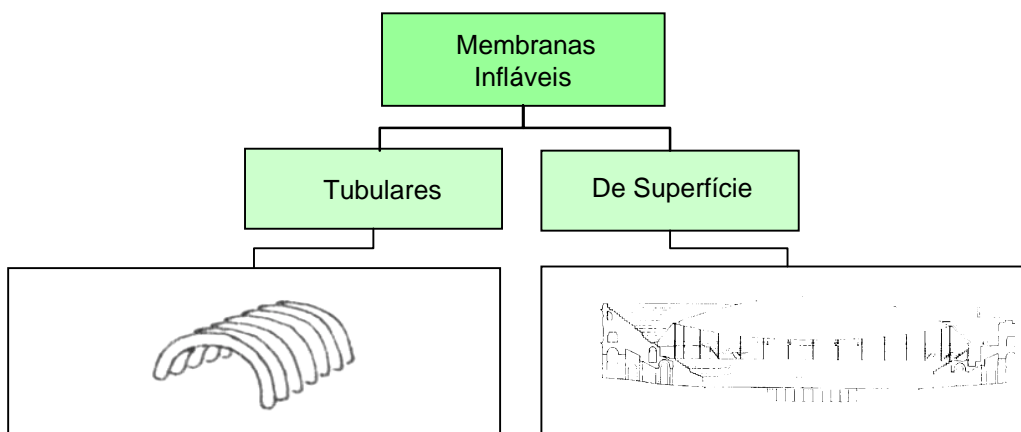


FIGURA 2.3.17: Tipos de Membranas Infláveis [figura da autora, ilustrações das estruturas de SCHLAICH et al. (1994) e de HERZOG (1977)].

As membrana infláveis tubulares, Fig.(2.3.18), são submetidas a alta pressão interna. Devido aos pequenos volumes usualmente envolvidos, são uma opção viável para estruturas simples de pequenos vãos (HERZOG, 1977). Como exemplo de membrana inflável tubular, pode-se citar o Pavilhão da Fuji na Exposição de Osaka. A cobertura pneumática cilíndrica do tipo *air inflated*, construída em 1970, consistia de uma estrutura composta por 16 arcos, os quais eram tubos com 4 m de diâmetro e 72 m de comprimento, Fig.(2.3.19) (FORSTER, 1994; DENT, 1971).

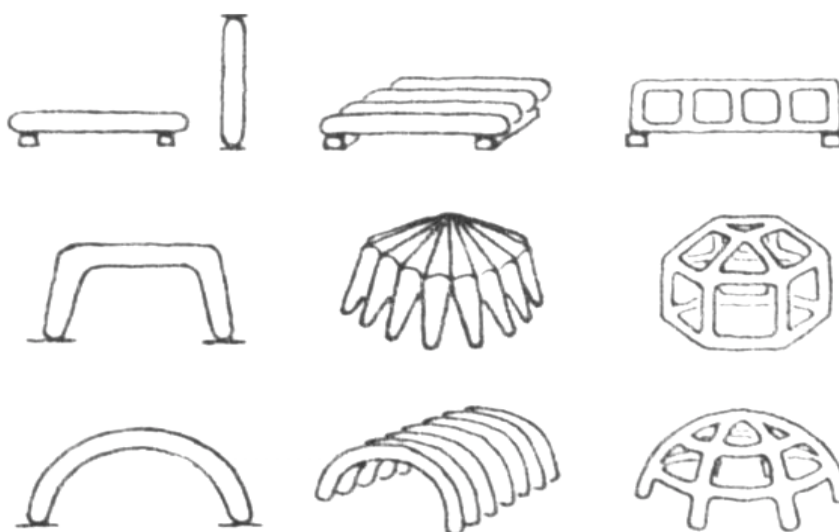


FIGURA 2.3.18: Tipos de membranas infláveis tubulares (HERZOG, 1977).

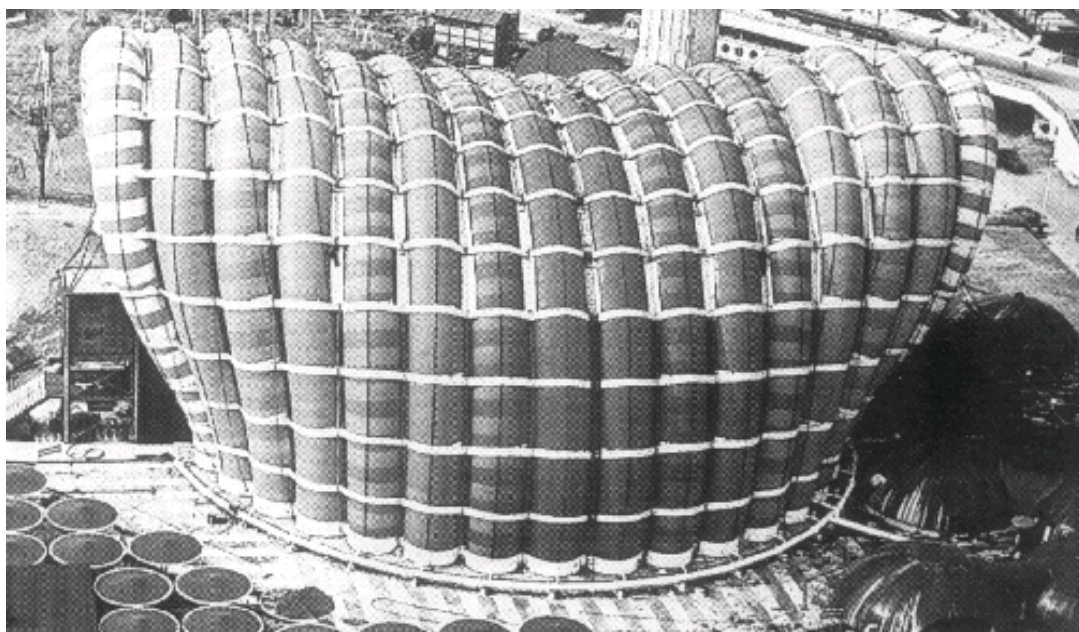


FIGURA 2.3.19: Pavilhão da Fuji na Exposição de Osaka (FORSTER, 1994).

As membranas infláveis de superfície, também chamadas de *cushion structures*, são submetidas à baixa pressão interna. Neste caso, o ar é contido entre duas membranas, formando um colchão de ar pressurizado. Os grandes volumes de ar associados a esta forma estrutural possibilita o seu uso para se vencer grandes vãos. A pressão interna baixa pode ser ou maior ou menor que a pressão atmosférica (pressão de referência). Uma outra característica dos sistemas de baixa pressão é a possibilidade de colocação de suportes secundários para ajudarem na estabilização da membrana, Fig.(2.3.20) (HERZOG, 1977).









	Sem suportes adicionais	Suporte pontual adicional	Suporte linear adicional	Suporte pontual e linear adicional
Pressão negativa				
Pressão positiva				

FIGURA 2.3.20: Tipos de membranas infláveis de superfície [adaptada de HERZOG(1977)].

Como exemplo de membrana inflável de superfície, pode-se citar a Cobertura da Arena Romana de Nîmes na França, Fig.(2.3.21). Esta cobertura, construída em 1988, possui planta elíptica com eixos de 132 m e 101 m, altura de 22 m e anel metálico com 30 colunas também metálicas (SCHLAICH et al., 1994).

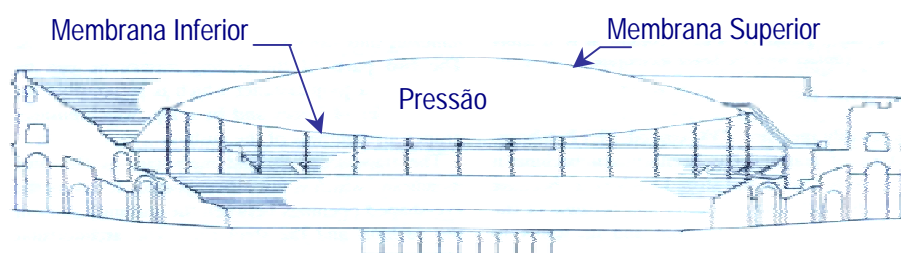


FIGURA 2.3.21: Cobertura da Arena Romana de Nîmes, França [adaptada de SCHLAICH et al. (1994)].

▪ **Membranas Suportadas pelo Ar**

As membranas suportadas pelo ar são as estruturas pneumáticas do tipo *air supported*. Este tipo, utilizado com maior frequência, possui membrana simples suportada por um pequeno diferencial de pressão de ar (DENT, 1971; HERZOG, 1977; OTTO & TROSTEL, 1967). Neste caso, o meio pressurizado, o volume interno da construção, está usualmente submetido a uma pressão interna que varia de 20 mm a 100 mm de coluna de água (TURKKAN & SRIVASTAVA, 1992). Sendo assim, o acesso à construção se dá de forma especial e o bombeamento contínuo de ar para o interior da construção é necessário, principalmente devido ao escape de ar pelas aberturas. As Figs.(2.3.22-23) mostram sistemas de acesso típicos.

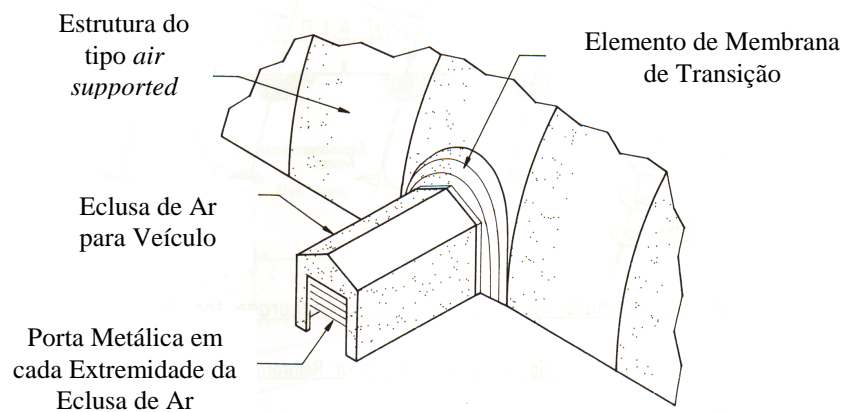


FIGURA 2.3.22: Ilustração de sistema típico de acesso à cobertura pneumática do tipo *air supported* ("eclusa de ar") e do elemento de transição entre este e o interior da estrutura (adaptada de ASCE 17-96).

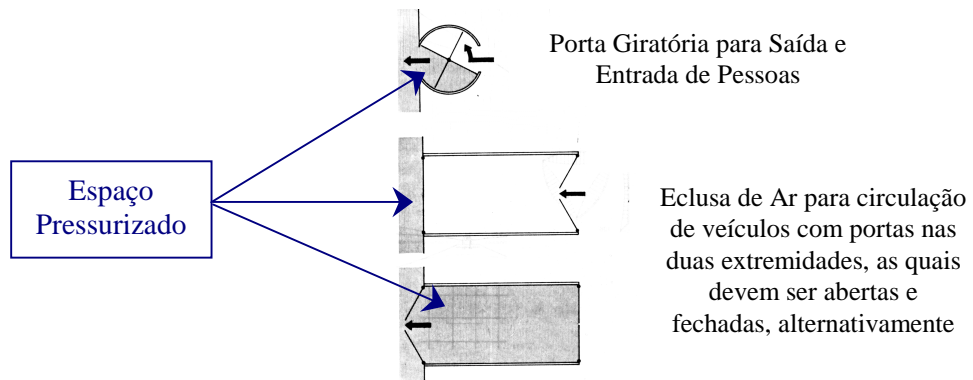


FIGURA 2.3.23: Esquema do funcionamento do sistema de acesso à cobertura pneumática do tipo *air supported* [adaptada de HERZOG(1977)].



Como as estruturas do tipo *air supported* estão submetidas à baixa pressão, a pressão interna pode ser positiva ou negativa, tendo como pressão de referência a pressão atmosférica, Fig.(2.3.24). O tipo de pressão interna interfere na forma da membrana e também na forma da estrutura do contorno. Além disto, a presença de suportes secundários, os quais podem ajudar na estabilização da membrana, interfere também na forma da membrana (HERZOG, 1977).









	Sem suportes adicionais	Suporte pontual adicional	Suporte linear adicional	Suportes lineares e pontual adicionais
Pressão negativa				
Pressão positiva				

FIGURA 2.3.24: Tipos de membrana suportadas pelo ar [adaptada de HERZOG(1977)].

As coberturas com membranas suportadas pelo ar podem ser divididas em dois tipos: as membranas elevadas (*elevated air supported structure*) e as membranas erguidas a partir do nível do piso a ser coberto (*ground-mounted air-supported structure*), Fig.(2.3.25).

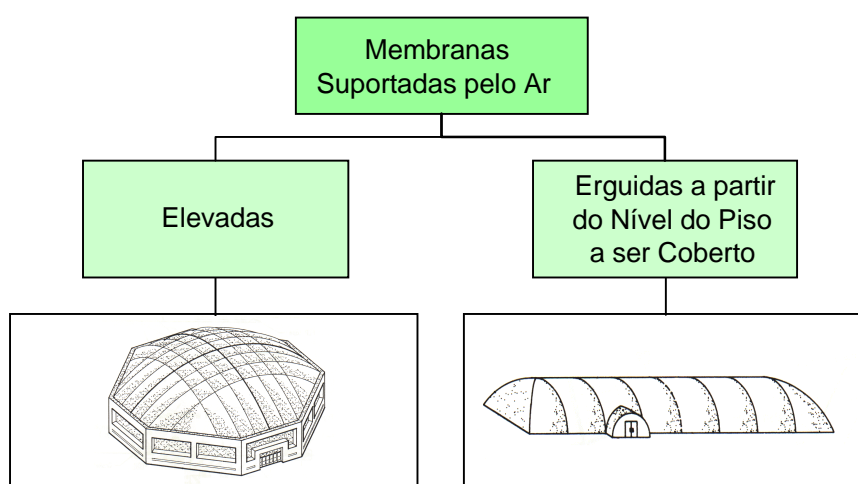


FIGURA 2.3.25: Tipos de Estruturas de Membrana Suportada pelo Ar (figura da autora, ilustrações das estruturais de ASCE 17-96).

A Fig.(2.3.26) mostra o esquema típico das membranas suportadas pelo ar elevadas.

As Figs(2.3.27-30) mostram os detalhes deste esquema estrutural.

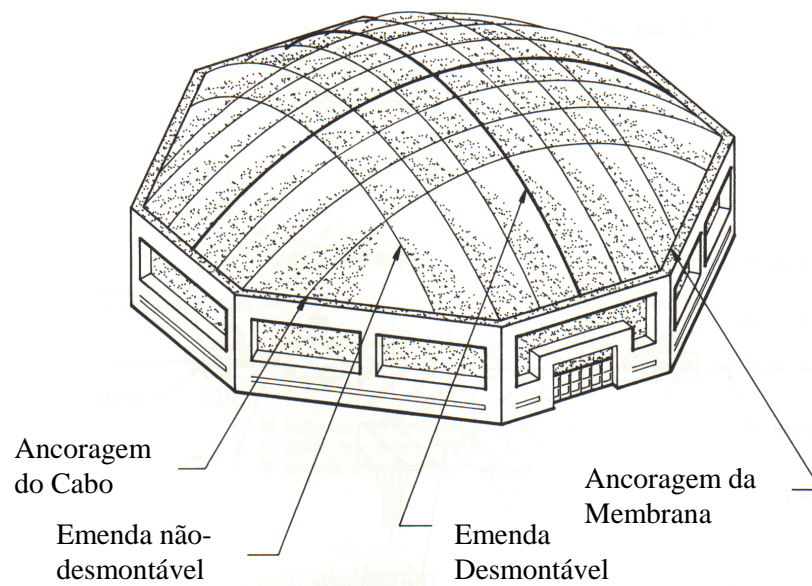


FIGURA 2.3.26: Esquema típico de membrana suporta pelo ar elevada (adaptada de ASCE 17-96).

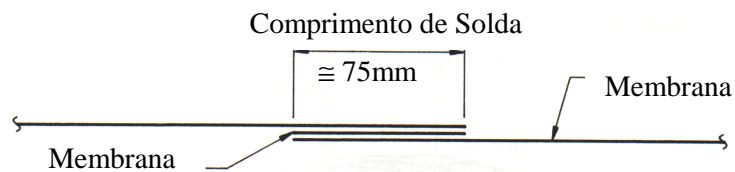


FIGURA 2.3.27: Detalhe da emenda não-desmontável da membrana suporta pelo ar elevada (adaptada de ASCE 17-96).

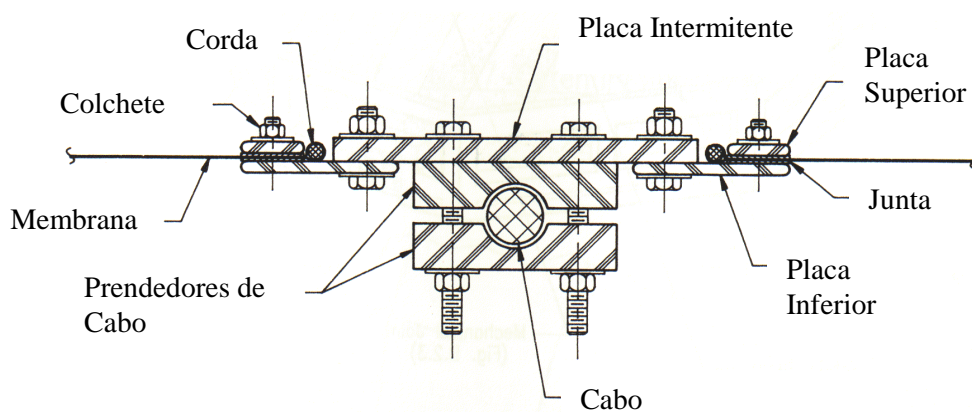


FIGURA 2.3.28: Detalhe típico da emenda desmontável da membrana suporta pelo ar elevada (adaptada de ASCE 17-96).

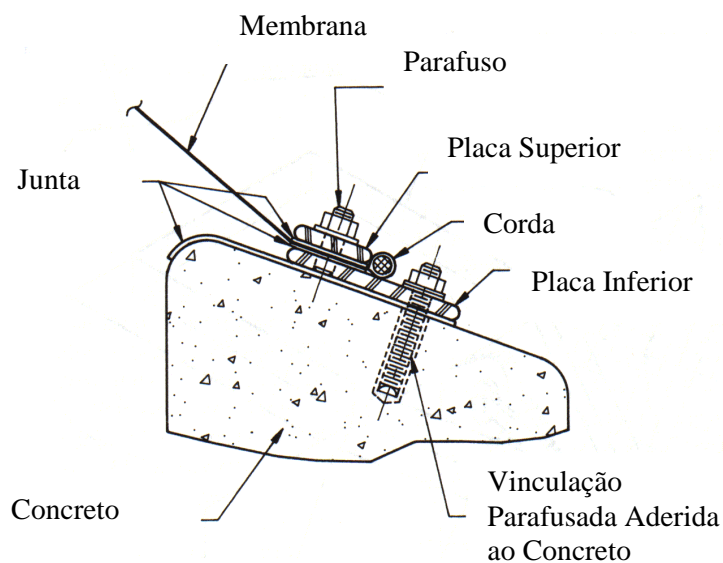


FIGURA 2.3.29: Detalhe típico da ancoragem da membrana no contorno da estrutura de membrana suportada pelo ar elevada (adaptada de ASCE 17-96)

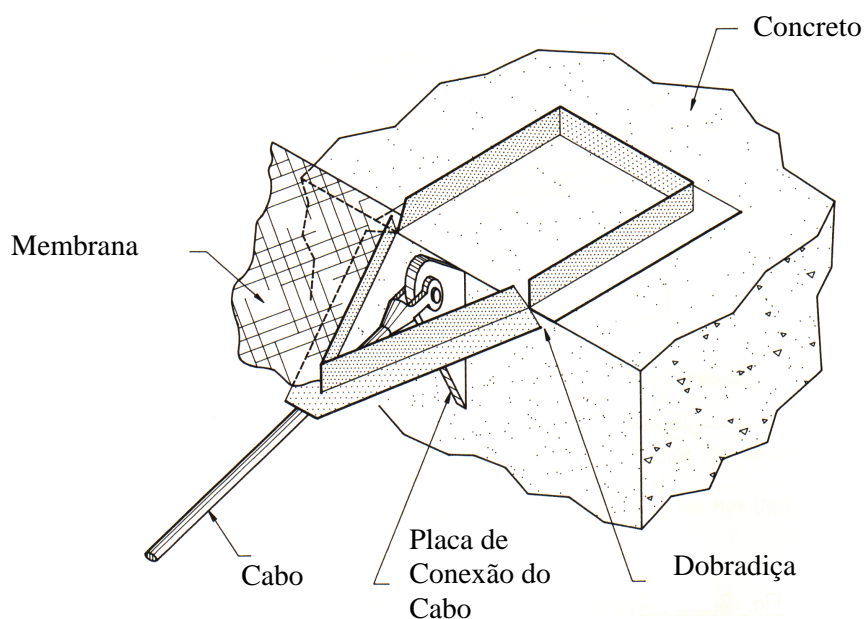


FIGURA 2.3.30: Detalhe típico da ancoragem dos cabos no contorno da estrutura de membrana suportada pelo ar elevada (adaptada de ASCE 17-96)

Como exemplo do emprego de membranas suportadas pelo ar elevadas em coberturas pode-se citar o *Pavilhão dos Estados Unidos na Exposição de Osaka em 1970*, com vão livre de 135m, Fig.(2.3.31). Esta estrutura formou o arquétipo dos grandes ginásios de esporte com estruturas pneumáticas, Figs.(2.3.32-33), com área coberta de mais de 40000m<sup>2</sup> (FORSTER,1994).



FIGURA 2.3.31: Pavilhão dos Estados Unidos na exposição de Osaka (LIDDELL, 1994).



FIGURA 2.3.32: Estádio de Vancouver, Canadá (HAMILTON et al., 1995).

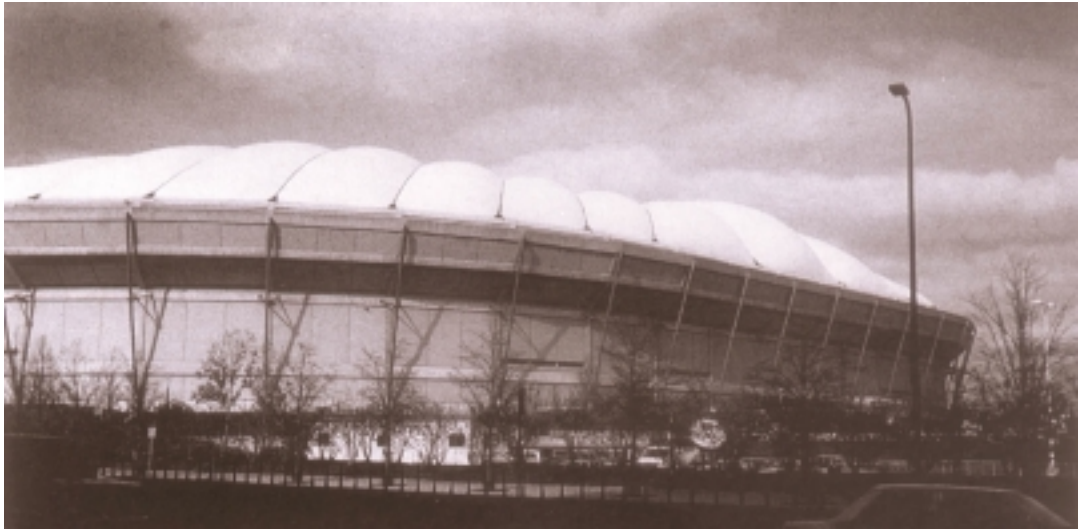


FIGURA 2.3.33: *Minnesota Metrodome* (LIDDELL, 1994).

A Fig.(2.3.34) mostra o esquema típico das membranas suportadas pelo ar erguidas a partir do nível do piso a ser coberto (*ground-mounted air-supported structures*). As Figs.(2.3.35-38) mostram os detalhes do esquema apresentado na Fig.(2.3.34).

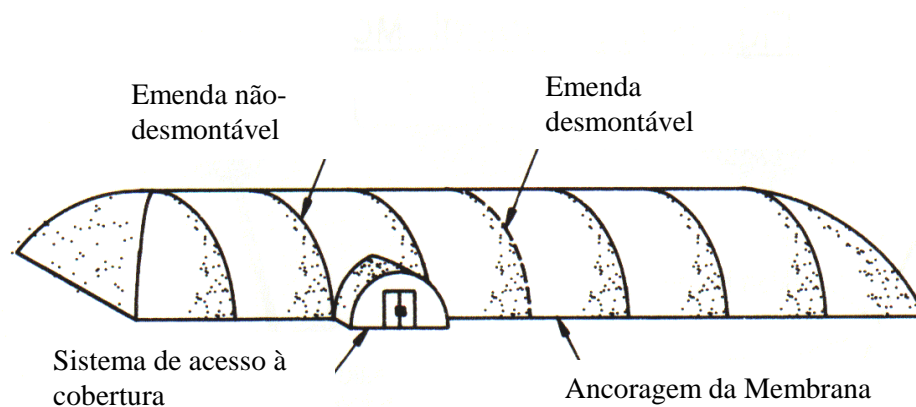


FIGURA 2.3.34: Esquema típico de membrana suportada pelo ar erguida a partir do nível do piso a ser coberto (adaptada de ASCE 17-96).

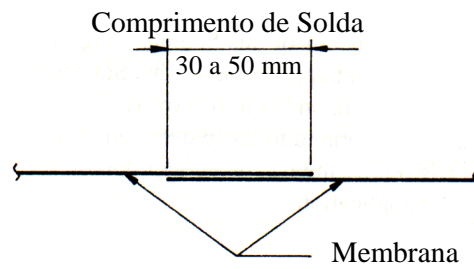


FIGURA 2.3.35: Detalhe da emenda não-desmontável da membrana suportada pelo ar erguida a partir do nível do piso a ser coberto (adaptada de ASCE 17-96).

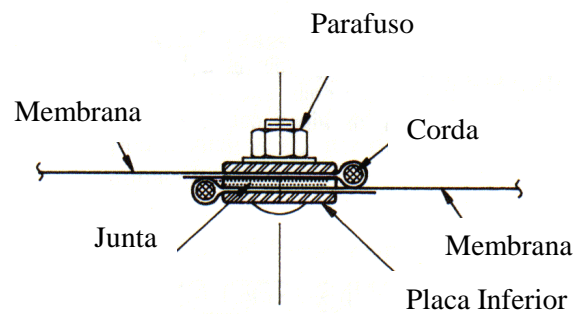


FIGURA 2.3.36: Detalhe típico da emenda desmontável da membrana suportada pelo ar erguida a partir do nível do piso a ser coberto (adaptada de ASCE 17-96).

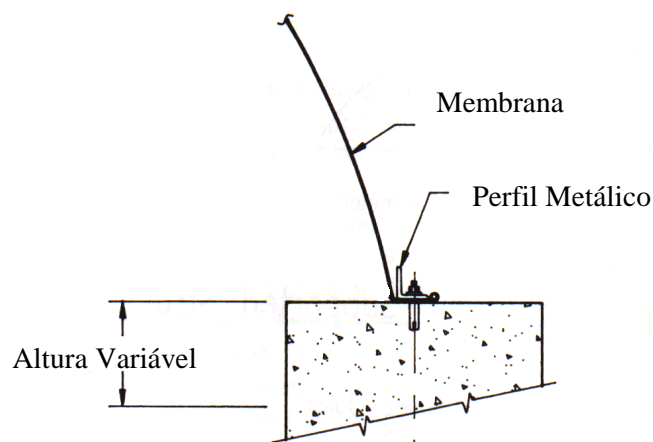


FIGURA 2.3.37: Detalhe típico da ancoragem da membrana no contorno da estrutura de membrana suportada pelo ar erguida a partir do nível do piso a ser coberto (adaptada de ASCE 17-96)

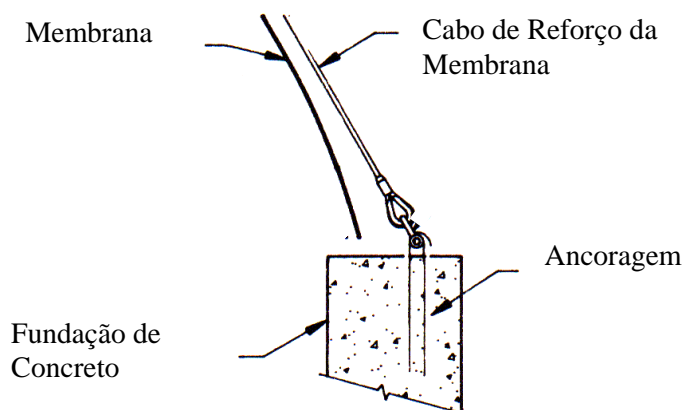


FIGURA 2.3.38: Detalhe típico da ancoragem dos cabos no contorno da estrutura de membrana suportada pelo ar reforçada erguida a partir do nível do piso a ser coberto (adaptada de ASCE 17-96)

As membranas suportadas pelo ar erguidas a partir do nível do piso a ser coberto são usualmente empregadas com as formas cilíndrica ou esférica (ASCE 17-96, 1996; DENT, 1971; HERZOG, 1977; OTTO & TROSTEL, 1967).

As membranas cilíndricas erguidas a partir do piso a ser coberto, devido à facilidade de padronização na pré-fabricação, são usualmente empregadas na cobertura de áreas que possuem uma das dimensões predominante. É o caso das coberturas de piscinas, quadras de esportes, campos de golfe, galpões fabris e galpões de depósito. Com relação à forma esférica, as estruturas do tipo *air supported* erguidas a partir do piso a ser coberto podem ser, ou abatidas quando se necessita cobrir grandes áreas, ou superfícies próximas das semi-esféricas quando se necessita de uma cobertura de grande altura (DENT, 1971; HERZOG, 1977; OTTO & TROSTEL, 1967).

Como exemplo de cobertura esférica do tipo *air supported* erguidas a partir do piso a ser coberto pode-se citar o Pavilhão do Exército Americano — construído em 1958, consistia de cinco grandes domos, o domo central com 49.5 m de diâmetro e os domos menores com 33.0 m de diâmetro (HERZOG, 1977; OTTO & TROSTEL, 1967) — Fig.(2.3.39).

Como exemplo de cobertura cilíndrica do tipo *air supported* erguida a partir da piso a ser coberto pode-se citar o Cobertura de Campo de Golf, em Nova York, Fig.(2.3.40).



FIGURA 2.3.39: Pavilhão do Exército Americano (HERZOG,1977).





FIGURA 2.3.40: Cobertura de campo de golfe, NY (TENSAR, 1999).

A maioria das estruturas de membrana construídas no Brasil são estruturas pneumáticas erguidas a partir do nível do piso a ser coberto, as quais são empregadas em coberturas cilíndricas de armazéns industriais com planta retangular de aproximadamente 1000 m<sup>2</sup>. A Fig.(2.3.41) mostra o Armazém da Tapetes São Carlos Ltda., construído em 1977. A Fig. (2.3.42) apresenta exemplos de armazéns industriais com esta forma estrutural disponíveis para aluguel no país.



FIGURA 2.3.41: Armazém da Tapetes São Carlos Ltda. (Foto da autora, 1997).



FIGURA 2.3.42: Exemplos de Armazéns Industriais Disponíveis para Aluguel no Brasil (Fonte: Pistelli Engenharia Ltda., 1997).

## 2.4 Considerações Finais

O sistema construtivo apresentado é relativamente simples, sendo necessário o mesmo nível de cuidado e de controle dispensado às construções convencionais com mesmas dimensões. Os principais aspectos da construção das estruturas de membrana são os ligados à confecção da membrana, ao sistema de bombeamento de ar e ao sistema de acesso (no caso de estruturas pneumáticas), à ancoragem, ao transporte e à montagem. A confecção da membrana envolve a execução de cortes e emendas do material encontrado comercialmente. No corte da membrana, deve-se assegurar a forma desejada e o menor gasto possível de material e mão-de-obra. Os métodos de produção usados para se emendar as faixas de membrana dependem essencialmente dos materiais que a compõem. Nas

estruturas pneumáticas, o sistema de bombeamento de ar deve assegurar uma pressão interna de acordo com as indicações de projeto. Para as estruturas do tipo *air supported*, o sistema de acesso deve possibilitar o acesso à construção, sem a sua despressurização. A ancoragem da membrana tem a função de conduzir os esforços de tração desta para o sistema estrutural rígido ou para a fundação. O transporte destas estruturas se torna viável até mesmo para regiões distantes de difícil acesso, devido ao seu pequeno peso e ao seu pequeno volume a ser transportado. A estrutura e os equipamentos são transportados para o lugar de montagem depois de confeccionada a membrana, montados o sistema de suportes e concluídos o sistema de ancoragem. Por fim, a montagem consiste da fixação da membrana nos pontos de ancoragem e do pré-tracionamento da membrana. Segundo KRISHNA (1978), se a fundação estiver concluída, uma equipe composta de um engenheiro e quatro operários pode construir uma cobertura pneumática de  $1000\text{m}^2$  em 4 a 5 dias, sendo que esta pode ser pressurizada em 40min e despressurizada em 20min.

As principais vantagens das estruturas de membrana são relacionadas ao fato de serem leves, flexíveis e de poderem ser constituídas por materiais translúcidos. Sendo assim, viabiliza-se a utilização de pré-fabricação, de iluminação natural e de formas esteticamente agradáveis ao olhos contemporâneos.

As desvantagens dessas estruturas são relacionadas com a tendência de serem suscetíveis a grandes deslocamentos e à formação de rugas, principalmente quando submetidas às ações concentradas.

Com relação às estruturas pneumáticas, é importante ressaltar que no âmbito da Engenharia Civil a idéia de se usar o ar para suportar carregamentos desperta ainda hoje questões com relação aos riscos de despressurização e aos efeitos da pressão interna sobre o homem. No caso de despressurização, sabe-se que os riscos são mínimos devido ao pequeno peso próprio da cobertura e ao fato desta ocorrer lentamente, permitindo a desocupação da área coberta. No que se refere ao efeito da pressão interna sobre o homem, mesmo pessoas sensíveis não percebem as tão pequenas variações de pressão das estruturas *air supported*.

Um outro ponto importante é o custo das estruturas de membrana. Obviamente, para efetuar a avaliação de custos de uma construção deve-se ter sempre em mente que podem existir diversas formas estruturais que atendem aos requisitos de projeto (GEIGER, 1988). A questão custo deve ser equacionada caso a caso, mas para os casos mais comuns não é necessário fazer tal abordagem, já existindo dados sobre o comportamento do custo das estruturas de membrana em comparação com outros tipos de estrutura: as estruturas de membrana são, geralmente, soluções economicamente viáveis. Segundo FIRTH (1993), uma

estrutura pneumática usual empregada para se cobrir quadra de tênis no Reino Unido custa aproximadamente £50-80/m<sup>2</sup>, enquanto uma cobertura similar em estrutura tradicional de aço custa aproximadamente £150-180/m<sup>2</sup>. Ainda segundo FIRTH (1993), as coberturas pneumáticas são uma solução econômica para se cobrir grande área, mesmo quando os custos de operação e manutenção são computados. HAMILTON et al. (1995) afirma que o custo inicial das coberturas do tipo *air supported*, empregadas na cobertura de grandes ginásios de esportes, é sempre menor que o das coberturas convencionais, devido ao baixo custo na construção e da fundação.

Segundo VANDENBERG (1996), no caso das estruturas de membrana protendida por cabos, o custo varia de £160-400/m<sup>2</sup>, o qual pode ser diminuído com a redução do custo das estruturas de suporte através da construção de estruturas modulares. Entretanto, estas estruturas podem ser mais convenientes que as estruturas pneumáticas, devido ao seu menor custo de manutenção, a não necessidade de serem herméticas, a maior possibilidade de variação da forma e ao fato de poderem também ser construídas com materiais translúcidos.

---

## CAPÍTULO 3

# PROCESSO DE PROJETAR

### 3.1 Considerações Iniciais

O projeto das estruturas de membrana é caracterizado pela grande interdependência entre o estado de tensão e a forma da estrutura, pela composição da superfície desejada através da emenda de pedaços de membrana e pelo fato desta resistir apenas a esforços de tração (TABARROK & QIN, 1992; FUJIKAKE et al., 1989; LEWIS, 1998; LEVY & SPILLERS, 1998).

A partir dessa caracterização, no projeto têm-se três problemas básicos a serem resolvidos, os quais são abordados a seguir.

### 3.2 Problemas Inerentes ao Projeto

O projeto das estruturas de membrana envolve essencialmente a resolução de três problemas: determinação da configuração inicial da membrana, definição do modelo de corte e análise do comportamento estrutural da membrana submetida às ações (TABARROK & QIN, 1992; FUJIKAKE et al., 1989; LEWIS, 1998; LEVY & SPILLERS, 1998).

A determinação da configuração inicial da membrana, *form-finding*, consiste na determinação da configuração de equilíbrio inicial da membrana, a partir dos requisitos estruturais e arquitetônicos. Como resultado, tem-se a forma da estrutura em três dimensões (ARGYRIS et al., 1974; BARNES, 1988; GOSLING & LEWIS, 1996a; GOSLING & LEWIS, 1996b; GRÜNDING, 1988; HABER & ABEL, 1982a; HABER & ABEL, 1982b; LEVY & SPILLERS, 1998; LEONARD, 1967a; LEWIS, 1993; LI & LEONARD, 1973;

MAURIN & MOTRO, 1998; OTTO & TROSTEL, 1967; SCHEK, 1973; TABARROK & QIN, 1992).

A definição do modelo de corte, *cutting-pattern*, consiste na transformação da superfície tridimensional em uma correspondente superfície plana com os dados de corte/emenda necessários para a composição da membrana (GALASKO et al., 1997; MOCRIEFF & TOPPING, 1990; WAKEFIELD, 1984).

A análise do comportamento estrutural da membrana submetida às ações, *load analysis*, é relacionada ao problema da determinação da configuração final de equilíbrio (BARNES, 1980; BARNES, 1988a; BARNES, 1988b; CONTRI & SCHREFLER, 1988; FUJIKAKE et al., 1989; KANG & IM, 1997; LEONARD, 1967b; LEONARD, 1969; LEONARD, 1988; LEONARD & VERMA, 1976; LI & LEONARD, 1973; OTTO & TROSTEL, 1967; SYGULSKI, 1993; SYGULSKI, 1995; TABARROK & QIN, 1992; TABARROK & QIN, 1997; TURKKAN & SRIVASTAVA, 1992).

### 3.2.1 Determinação da Configuração Inicial da Membrana

O problema da determinação da configuração inicial de equilíbrio é usualmente denominado por *form finding*, ou *shape finding*, ou *3D shape definition*. Este é um problema de otimização da estrutura, que já tem uma considerável atenção nas pesquisas (AGRYRIS et al., 1974; GEA, 1996; GRÜNDING, 1988; GOSLING & LEWIS, 1996a; GOSLING & LEWIS, 1996b; SCHIERLE & YIN, 1993).

A determinação da forma das estruturas de membrana é uma operação delicada, na qual deve-se assegurar a ausência de áreas comprimidas e o controle das formas geradas (MAURIN & MOTRO, 1998). Estas não podem ser prescritas *a priori*, pois, como a membrana não resiste à flexão, a forma da estrutura, as ações e os esforços interagem de modo a satisfazerem as equações de equilíbrio, sem a ocorrência de compressão na membrana. Além de satisfazer as condições de equilíbrio, a configuração inicial tem que satisfazer às exigências estéticas, de funcionalidade e estruturais (TABARROK & QIN, 1997).

De uma forma geral, existem várias configurações possíveis de equilíbrio e o projetista deve selecionar a configuração que satisfaça às exigências citadas. É importante destacar que uma única configuração possui superfície mínima. A vantagem desta é estar

associada à distribuição uniforme de tensão de tração em toda a membrana. Todavia, em alguns casos a superfície de tensão uniforme não pode satisfazer às exigências arquitetônicas (GRÜNDING, 1988; GOSLING & LEWIS, 1996a; GOSLING & LEWIS, 1996b).

Os primeiros estudos foram realizados com modelos físicos, Fig.(3.2.1). Resultados importantes foram alcançados com os estudos de Frei Otto com tecidos convenientemente esticados e com bolhas de sabão, estas últimas são configurações com superfície mínima. Através das conclusões alcançadas com os modelos físicos, pode-se obter a posição inicial através de processos analíticos com considerações puramente geométricas (OTTO & TROSTEL, 1967; HERZOG, 1977).

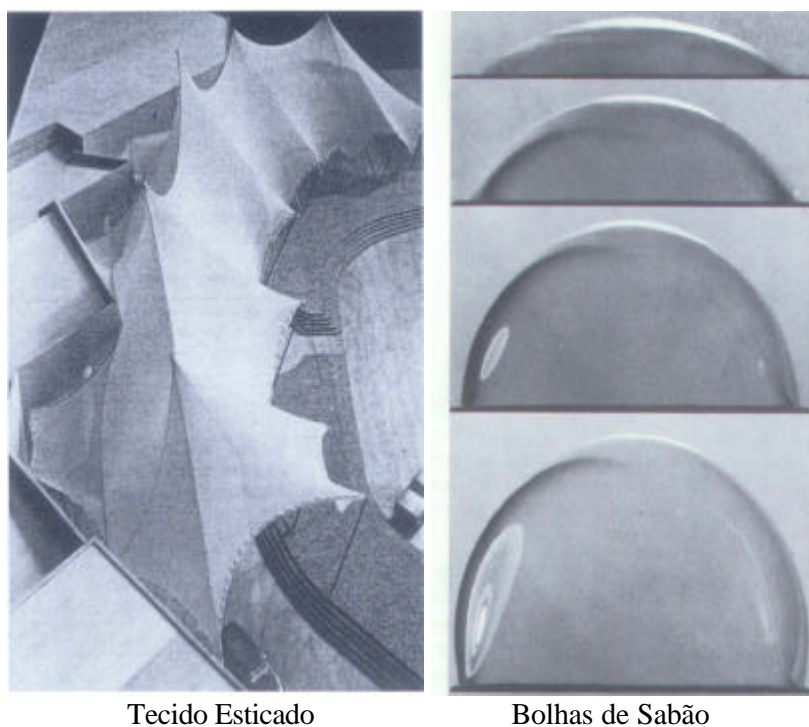


FIGURA 3.2.1: Exemplos de modelos físicos empregados na definição da forma inicial da membrana [adaptada de BARNES & WAKEFIELD(1988) e de OTTO & TROSTEL(1967)].

Com os avanços tecnológicos, a determinação da configuração inicial passou a ser principalmente alcançada com o emprego de métodos numéricos, Fig.(3.2.2). Estes podem ser colocados em três grupos. O primeiro grupo emprega o Método da Densidade de Força (SCHEK, 1973), o segundo, o Método da Relaxação Dinâmica (DAY, 1965) e o terceiro

grupo, o Método da Análise Não-linear Direta (HABER & ABEL, 1982a; HABER & ABEL, 1982b). Estes métodos são tratados no Capítulo 5.

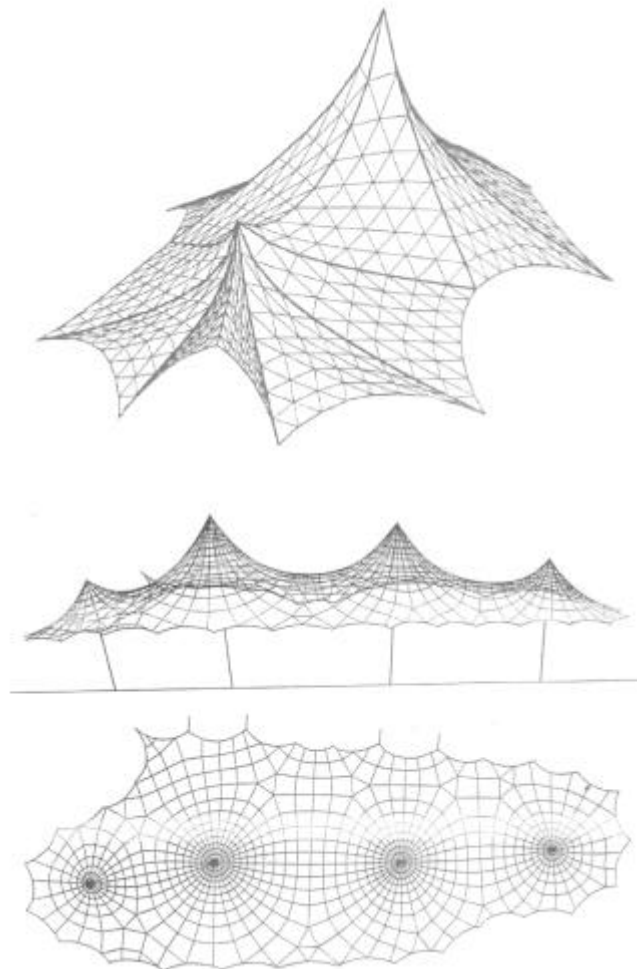


FIGURA 3.2.2: Determinação da forma inicial da membrana com o emprego de processos numéricos [adaptada de TABARROK & QIN (1992) e BARNES & WAKEFIELD, 1988].

Todos os métodos tem suas próprias vantagens (e desvantagens), mas a sua implementação é muito mais importante que o seu conceito (LEWIS, 1998). Sendo assim, HABER & ABEL (1982c) sugerem que o projetista tenha diversos métodos em sua disposição, por não haver um método ótimo para todas as situações de projeto. Ainda segundo estes autores, os resultados de cálculo obtidos com um determinado método podem ser usados como entrada de dados em subseqüentes análises com outros métodos, buscando o aperfeiçoamento do projeto final.



Atualmente, as pesquisas estão voltadas para o desenvolvimento de sistemas gráficos interativos que combinem diversos métodos para a solução do problema de equilíbrio inicial, através de uma base de dados comum (VÉRON *et al.*, 1998a; VÉRON *et al.*, 1998b; KNUDSON, 1991).

### 3.2.2 Definição do Modelo de Corte da Membrana

Como a membrana é encontrada comercialmente em rolos, esta precisa ser cortada em pedaços que, emendados e protendidos, proporcionem a forma da superfície tridimensional apropriada. Nesta fase do projeto, define-se o modelo de corte da membrana, o qual é denominado *cutting pattern*.

Assim sendo, após a determinação da configuração inicial da superfície da membrana, em uma primeira etapa da definição do modelo de corte, esta superfície tridimensional é dividida em pedaços, Fig.(3.2.3). Estes pedaços são a determinação dos parâmetros de corte/emenda, ainda em três dimensões (GALASKO *et al.*, 1997; MOCRIEFF & TOPPING, 1990; WAKEFIELD, 1984).

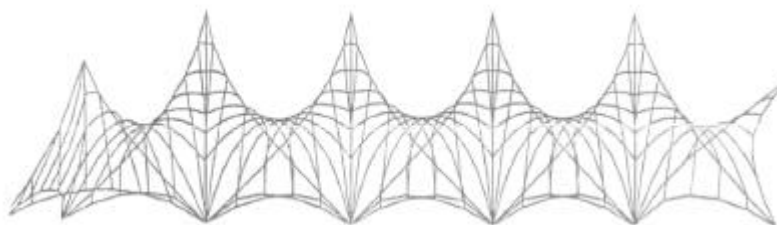


FIGURA 3.2.3: Definição do modelo de corte através de linhas com propriedades geodésicas (BARNES, 1988a).

Em uma segunda etapa da definição do modelo de corte, esses pedaços são transformados em correspondentes pedaços planos, ou seja, a superfície tridimensional é transformada em uma correspondente superfície plana com os dados de corte/emenda necessários para a fabricação da estrutura, Fig.(3.2.4) (GALASKO *et al.*, 1997; MOCRIEFF & TOPPING, 1990; WAKEFIELD, 1984).

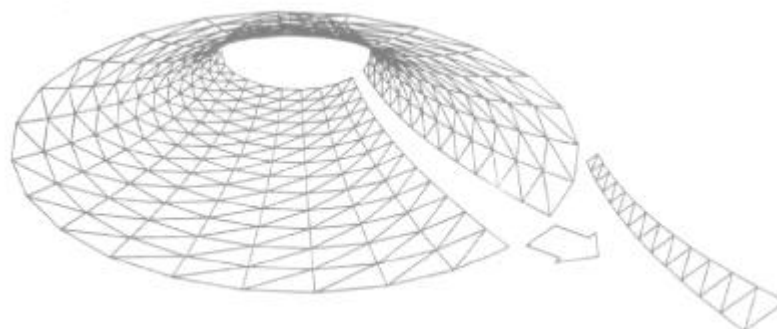


FIGURA 3.2.4: Transformação de pedaços da superfície tridimensional em correspondentes pedaços planos (MONCRIEFF & TOPPING, 1990).

Com exceção de superfícies com curvatura em apenas uma direção, qualquer determinação de geometria de corte em um plano é aproximada. Esta é uma questão difícil, pois a maioria das superfícies das estruturas de membrana não pode ser colocada em um plano sem sobrepor-se ou sem separar-se em partes. Sendo assim, o problema da transformação de uma superfície tridimensional em uma plana não possui solução única. Neste sentido, procura-se uma solução que minimize os gastos de materiais, que preserve a forma da superfície, que apresente *layout* esteticamente agradável e, por fim, que preserve a capacidade da estrutura em suportar às ações (VÉRON et al., 1998a).

Essa é uma atividade importante no projeto de estruturas de membrana, que não está dentro do domínio tradicional do Engenheiro de Estruturas (VÉRON et al., 1998a). Entretanto, cabe destacar que a definição do modelo de corte de uma estrutura de membrana é tão importante quanto o detalhamento das armaduras de uma estrutura convencional de concreto.

De modo similar à determinação da configuração de equilíbrio, a definição do modelo de corte pode ser tratada por diversos métodos. Para a escolha do método mais apropriado, caso a caso, pode-se equacionar os graus de confiabilidade, de flexibilidade e de rapidez convenientes na definição do modelo de corte (GALASKO et al., 1997; MONCRIEFF & TOPPING, 1990; WAKEFIELD, 1984).

Em geral, os métodos empregados para gerar modelos de corte são baseados em modelos físicos, modelos geométricos e modelos por equilíbrio (WAKEFIELD, 1984; MONCRIEFF & TOPPING, 1990). Estes tipos de modelagem são descritos a seguir.

- ***Modelagem Física***

A modelagem física consiste na execução de modelos físicos para a definição dos modelos de corte, na leitura dos dados nos modelos e, posteriormente, na transformação destes dados para a fabricação da membrana (GALASKO et al., 1997; MOCRIEFF & TOPPING, 1990; WAKEFIELD, 1984).

A modelagem física pode ser dividida em duas fases. Na primeira fase a geometria da superfície é determinada pelas dimensões em escala de modelos físicos pequenos. Na segunda fase, modelos “arquitetônicos” são construídos para a visualização de detalhes arquitetônicos e estruturais (MONCRIEFF & TOPPING, 1990).

Usualmente os modelos de corte físicos são realizados com película fina de PVC sobre contorno apropriado. A superfície obtida é pintada com cor fosca, usualmente branca, para que possam ser feitos traços em escala. Pequenas tiras de película transparente são então coladas nas regiões onde se deseja colocar as faixas de membrana. Uma vez encontrado um *layout* satisfatório, obtêm-se as dimensões para o corte da membrana (MONCRIEFF & TOPPING, 1990).

Tradicionalmente a modelagem física tem sido parte integrante do projeto das estruturas de membrana e continua sendo empregada apesar de requerer grande cuidado na modelagem e na leitura dos dados. A modelagem física é apropriada para estruturas com curvatura não muito acentuada e economicamente vantajosa nos projetos de estruturas pequenas. O aspecto mais importante da modelagem física é a ótima visualização da estrutura, apesar de não possibilitar a previsão dos níveis de tensão ou de outros dados relacionados com o desempenho estrutural da membrana. Deve-se ressaltar que em estruturas do tipo *air supported* esta modelagem não é conveniente, devido à dificuldade de se obter a forma da superfície membrana (MONCRIEFF & TOPPING, 1990).

- ***Modelagem Geométrica***

Outro tipo de geração de modelo de corte tradicional é a modelagem geométrica, na qual fundamentos da geometria descritiva da superfície são usados para gerar diretamente o corte (MONCRIEFF & TOPPING, 1990; HERZOG, 1977). Quando empregada em superfícies que têm uma forma regular e definida, a modelagem geométrica é rápida, simples

e eficiente. Sendo assim, é utilizada principalmente no projeto de estruturas pneumáticas padronizadas do tipo *air supported* (MONCRIEFF & TOPPING, 1990).

A Fig.(3.2.5) mostra formas típicas de corte de membranas empregadas em coberturas cilíndricas e esféricas do tipo *air supported*, erguidas a partir do nível do piso. Estas são empregadas por diferentes fabricantes e podem ser definidas pela modelagem geométrica (HERZOG, 1977).

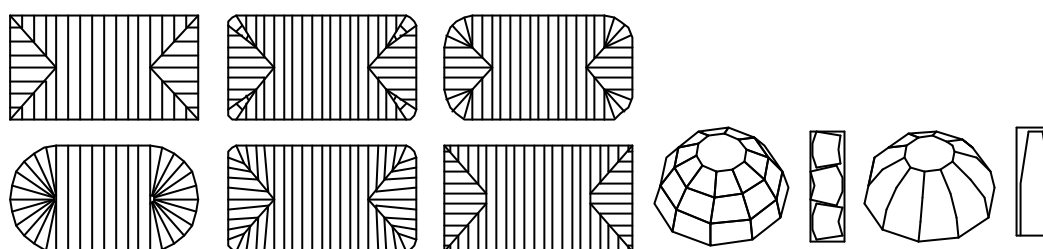


FIGURA 3.2.5: Formas típicas de corte de membranas empregadas em coberturas cilíndricas e esféricas do tipo *air supported*, erguidas a partir do nível do piso [adaptada de HERZOG(1977)].

#### ▪ *Modelagem por Equilíbrio*

Na modelagem por equilíbrio os modelos de corte são obtidos através de análise estrutural, na qual a estrutura modelada em três dimensões é deslocada para o plano, no qual são detalhados o corte das faixas que compõem a superfície da membrana.

Ao estudar trabalhos recentes percebe-se que este problema não está tão explorado (LEWIS, 1998). Segundo GALASKO et al. (1997), as metodologias não são claramente explicadas nos artigos, porque precisam ser ajustadas antes de darem resultados satisfatórios do ponto de vista industrial. Entretanto, segundo VÉRON et al. (1998a), a modelagem por equilíbrio é conveniente porque possibilita o emprego do mesmo modelo matemático para a determinação da forma inicial da superfície, para a análise do comportamento estrutural da membrana submetida às ações e, também, para a definição do modelo de corte. Segundo o mesmo autor, isto é conveniente com o aumento da complexidade da estrutura.

Na primeira etapa da obtenção do modelo de corte, usualmente, geram-se as faixas de membranas, cujas emendas são representadas por linhas com propriedades geodésicas, Fig.(3.2.3). Uma linha é denominada geodésica se a trajetória que segue sobre a superfície é

o caminho mais curto entre os seus pontos finais. A vantagem de se usar emendas sob linhas geodésicas é que a membrana resultante tende a ser extremamente eficiente do ponto de vista do consumo de material e do desempenho estrutural em serviço (MONCRIEFF & TOPPING, 1990).

Para a definição do modelo de corte na superfície 3D, pode-se usar a combinação simultânea da obtenção da forma e da localização da emenda, ou então, a interpolação das emenda em uma superfície predefinida pelas coordenadas dos nós (VÉRON et al., 1998a).

Na abordagem com a relaxação dinâmica, há a combinação simultânea da obtenção da forma e do modelo de corte. Definem-se as emendas introduzindo “molas” fictícias tracionadas ao longo da costura (MONCRIEFF & TOPPING, 1990).

Na abordagem com o método da densidade de força, tendo obtida a forma estrutural desejada, as faixas de membrana são “cortadas” da superfície inicial, projetando-se linhas geodésicas sobre a superfície triangularizada (MONCRIEFF & TOPPING, 1990).

Após a definição do modelo de corte em uma superfície 3D, força-se esta superfície a se tornar plana através de um sistema de análise estrutural conveniente. Neste caso, para se assegurar que as faixas adjacentes continuem compatíveis após se tornarem planas (*flattening*), em toda emenda do contorno os comprimentos têm que continuar inalterados. Isto pode ser alcançado pela introdução de elementos de costura fictícios de grande rigidez nesta região (VÉRON et al., 1998a).

### 3.2.3 Análise da Membrana Submetida às Ações

Determinados a forma inicial e o modelo de corte da membrana, o comportamento da estrutura submetida às ações deve ser investigado (LEWIS, 1998; VÉRON et al., 1998b; LEONARD & VERMA, 1976; VERMA & LEONARD, 1978; LEONARD, 1974; LEONARD, 1967).

A ausência de rigidez à flexão torna as estruturas de membrana suscetíveis a grandes deslocamentos. Em muitos casos as ações também dependem da configuração da membrana. Um exemplo é a pressão interna, normal à superfície atual da membrana. Portanto, análise não-linear é necessária para a inclusão destes efeitos (TABARROK & QIN, 1992).

Além disso, como a membrana não resiste às tensões de compressão, rugas ocorrerão quando as ações provocam tensões de compressão maiores que as tensões de tração provenientes da protensão da membrana. Então, um procedimento para os elementos não-tracionados deve ser incluído na análise (TABARROK & QIN, 1992; CONTRI & SCHREFLER, 1988; SEOKWOO & SEYOUNG, 1997).

O estudo do comportamento das estruturas de membrana pode ser realizado através de processos analíticos, de processos numéricos e de ensaios experimentais com protótipos e modelos (FIRTH, 1993; LEONARD, 1988; MAJOWIECKI, 1985; ERZOG, 1977 e OTTO & TROSTEL, 1967).

Os processos numéricos têm dominado as análises. Nestes casos, para a resolução da não linearidade geométrica os métodos de solução mais usuais são os seguintes:

- Método incremental iterativo do tipo Newton-Raphson, para a solução do sistema de equações não-lineares inerente à análise não-linear direta da estrutura (TABARROK & QIN, 1992).
- Método da relaxação dinâmica, onde na obtenção do equilíbrio da membrana, resolve-se o problema como um problema dinâmico (BARNES, 1994).

Quanto ao comportamento do material, pode-se empregar membrana de tecido cujo comportamento é anisótropo e cuja rigidez a cortante é próxima de zero. Além disto, como as relações entre tensão e deformação dependem do estado de tensão, são necessários testes bi-axiais de tração para a obtenção das propriedades constitutivas da membrana (KNUDSON, 1991).

As ações usualmente consideradas são a sobrecarga concentrada, o peso próprio, a pressão interna uniforme, o carregamento de neve e a pressão de vento (TABARROK & QIN, 1992).

É importante ressaltar que o efeito do vento em estruturas flexíveis, tais como as estruturas de membrana, é diferente do efeito do vento em estruturas rígidas convencionais (MINAMI et al., 1993). SRIVASTAVA & TURKKAN (1995) apresentam o estudo experimental em túnel de vento em estruturas de membrana e TURKKAN & SRIVASTAVA (1995) mostram que o método das redes neurais pode ser usado para a definição da pressão do vento em estruturas pneumáticas. Recentemente, TABARROK & QIN (1997) apresentam análise do comportamento dinâmico de estruturas de membrana com o Método dos Elementos Finitos. Entretanto, usualmente valores conservativos de ações estáticas equivalentes são empregados no projeto (LEWIS, 1998).

Além disso, pode-se levar em consideração o efeito dinâmico da pressão interna nas estruturas pneumáticas. SYGULSKI (1993) e SYGULSKI (1995) fazem estudo das vibrações em estruturas pneumáticas considerando a interação com a pressão interna. O Método dos Elementos Finitos é empregado para modelar a estrutura e o Método de Elementos de Contorno é empregado para modelar o ar. Neste trabalho, o efeito da compressibilidade do ar é considerado.

### 3.3 Processo de Projetar Integrado

Para resolução dos problemas inerentes ao projeto das estruturas de membrana, VÉRON et al. (1998b) propõem o processo de projetar apresentado a seguir.

- O cliente expressa ao arquiteto suas necessidades.
- O arquiteto cria um esboço da estrutura de membrana onde são especificadas as principais dimensões e as possíveis estruturas que poderão interagir com a estrutura de membrana. Nesta etapa, o esboço da estrutura é mostrado para o cliente sendo que este é modificado até que ambos entre em acordo.
- Em seguida o modelo da estrutura produzido pelo arquiteto é passado para o escritório de engenharia, o qual fica encarregado de determinar a geometria, tão próxima quanto possível do esboço sugerido. A estrutura aqui definida, através do estudo da configuração inicial de equilíbrio da membrana, deve receber a aprovação do arquiteto e do cliente. Aspectos relacionados com a funcionalidade e com a estética da estrutura são mais importantes que os aspectos técnicos nesta fase.
- Após a definição da configuração inicial de equilíbrio da estrutura, faz-se a preparação dos detalhes para a fabricação, a qual consiste basicamente do seguinte.
  - Definição do modelo de corte na superfície tridimensional da estrutura de membrana, tendo em vista o anteprojeto do arquiteto. De fato, o *layout* do modelo de corte sobre a estrutura deve satisfazer aos requisitos estéticos porque a relativa transparência da membrana cria regiões escuras ao longo do contorno de faixas adjacentes, onde são emendadas.

- Transformação de cada faixa 3D da superfície em uma correspondente superfície plana, na qual o seu contorno será empregado para cortar a membrana. As exigências práticas na definição de cada faixa 2D são as seguintes:
  - \* sua orientação tem que levar em conta a direção das fibras da membrana de tecido,
  - \* o raio de curvatura de suas principais curvas do contorno devem ser tão grande quanto possível para maximizar a rendimento e minimizar o desperdício de material.

Neste instante, discussões devem ocorrer entre o escritório de engenharia, o fabricante e o arquiteto para a adaptação do *lay out* global do modelo de corte.

- Em seguida, no escritório de engenharia, inicia-se o projeto da estrutura de suporte. Após esta etapa, faz-se a análise estrutural da estrutura global submetida às ações. Nesta fase, são verificadas a formação de rugas na membrana e os níveis das tensões máximas. No caso de se detectar a formação de rugas ou a atuação de tração maior que a máxima admitida, mudanças no projeto precisam ser realizadas. Caso contrário, os resultados obtidos são enviados para o fabricante da estrutura.

### 3.4 Considerações Finais

A maioria das pesquisas relacionadas com o projeto das estruturas de membrana concentraram-se no desenvolvimento de aspectos específicos, onde os problemas do projeto — determinação da forma da membrana, definição do modelo de corte e análise do comportamento estrutural da membrana submetida às ações externas — são tratados separadamente. Todavia, como no projeto destas estruturas há grande interdependência entre os dados geométricos, mecânicos e de fabricação, os estudos estão evoluindo para o desenvolvimento de abordagens que permitam a consideração desta interdependência de dados, com saídas gráficas e com o emprego de ferramentas de comunicação e de conceitos de colaboração (VÉRON *et al.*, 1998a; VÉRON *et al.*, 1998b).



---

## CAPÍTULO 4

# ANÁLISE ESTRUTURAL: PROCESSO ANALÍTICO

### 4.1 Considerações Iniciais

No processo analítico a membrana é estudada a partir de equações diferenciais que relacionam tensões (esforços), deformações e deslocamentos. Estas equações resolvidas levam às expressões que permitem analisar a membrana solicitada por diversos tipos de carregamento.

Neste capítulo, apresenta-se o processo analítico com a abordagem de OTTO & TROSTEL (1967), por considerar de mais fácil entendimento a exposição da teoria de membrana com formas arbitrárias e, a partir desta, de membranas com formas usuais. Entretanto, também foram estudadas as abordagens de HERZOG (1977) e de LEONARD (1988), as quais são direcionadas a membranas com formas específicas.

A análise de estruturas pneumáticas, ou de outras estruturas de membrana, é composta de dois problemas principais: determinação da pressão interna (*pressure inflation*) necessária, ou de outras forças de protensão, e do cálculo do máximo esforço de tração atuante na membrana submetida às ações. Determina-se a pressão interna, ou outras forças de protensão, supondo que as esforços de compressão não aparecem em nenhum ponto da membrana submetida ao carregamento externo e a pressão interna (ou outras forças de protensão). Desta forma a mínima tensão principal deve ser ainda de tração. Esta condição é necessária para se garantir a ausência de pregas na membrana. No cálculo da pressão interna requerida, ou de outras forças de protensão, bem como da máxima tensão, determinam-se primeiro os esforços na membrana (*sectional loads*). Nestes cálculos, admite-se, aqui, material submetido a pequenas deformações e consideram-se as ações atuando no sistema indeformado. É muito mais trabalhoso a análise de membranas altamente deslocáveis, as quais são incapazes de suportar algum carregamento na forma inicial. Nestes casos, as membranas sofrem grandes deslocamentos até atingirem a configuração final de equilíbrio,

as equações diferenciais a serem resolvidas para a determinação da configuração final exata são, geralmente, não-lineares (OTTO & TROSTEL, 1967).

Neste capítulo, após a apresentação dos fundamentos geométricos, os itens subsequentes tratam da teoria de membranas ligeiramente deformáveis, cujas formas iniciais são as configurações de equilíbrio. Depois do tratamento geral de formas arbitrárias, consideram-se membranas com superfície simétrica. Por fim, as estruturas pneumáticas esféricas são analisadas.

## 4.2 Fundamentos Geométricos

No estudo das estruturas de membrana pelo processo analítico, alguns fundamentos geométricos são importantes, nos quais empregam-se conceitos de cálculo vetorial, cálculo tensorial e geometria diferencial (CRAIG, 1943; COBURN, 1955; THOMAS, 1965; OTTO & TROSTEL, 1967 e POGORÉLOV, 1977).

### 4.2.1 Vetores Diretores, Elementos de Linha e Elementos de Superfície

Uma superfície  $M$  pode ser definida por um vetor posição  $r = r(\alpha, \beta)$ , que depende de parâmetros escalares  $\alpha, \beta$  | Fig.(4.2.1). Sobre a superfície duas famílias de curvas paramétricas | as "curvas- $\alpha$ ", definidas por  $r = r(\alpha, \beta_c)$  ao longo de  $\beta = const$ , e as "curvas- $\beta$ ", definidas por  $r = r(\alpha_c, \beta)$  ao longo de  $\alpha = const$  | formam uma malha, geralmente não ortogonal.

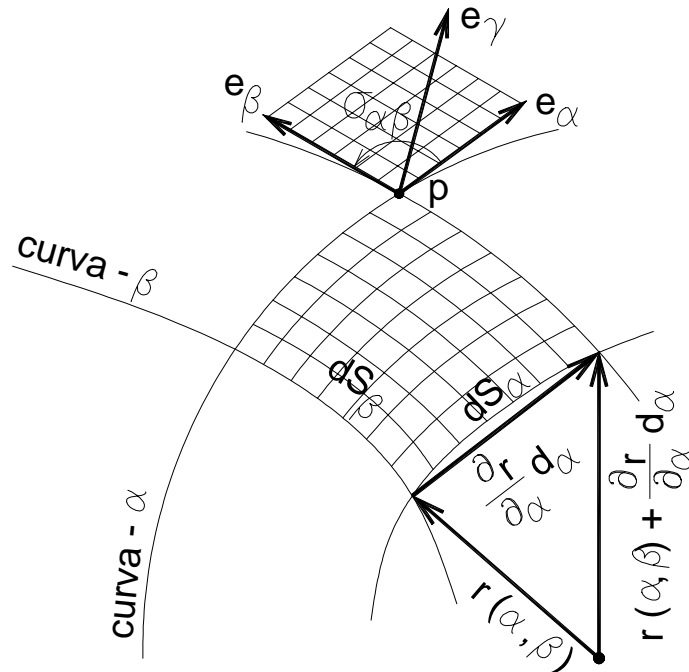


FIGURA 4.2.1: Definição da Superfície (OTTO & TROSTEL, 1967).

Com o objetivo de se definir a orientação do plano tangente à superfície  $M$  no ponto  $P$ , definem-se os versores tangentes às curvas paramétricas neste ponto. Sendo  $e_\alpha$  e  $e_\beta$  estes versores, têm-se

$$e_\alpha = \frac{r_\alpha}{\|r_\alpha\|} = \frac{r_\alpha}{\sqrt{(r_\alpha \cdot r_\alpha)}} \quad (4.2.1a)$$

$$e_\beta = \frac{r_\beta}{\|r_\beta\|} = \frac{r_\beta}{\sqrt{(r_\beta \cdot r_\beta)}} \quad (4.2.1b)$$

onde:

$$r_\alpha = \frac{\partial r}{\partial \alpha} \quad (4.2.2a)$$

$$r_\beta = \frac{\partial r}{\partial \beta} \quad (4.2.2b)$$

Sendo a orientação do plano normal à superfície o versor  $e_\gamma$ , obtém-se

$$e_\gamma = \frac{e_\alpha \times e_\beta}{\|e_\alpha \times e_\beta\|} = \frac{e_\alpha \times e_\beta}{\text{sen}\sigma_{\alpha\beta}} \quad (4.2.3)$$

onde,  $\sigma_{\alpha\beta}$  é o ângulo formado entre as direções positivas das curvas  $\alpha$  e  $\beta$ , o qual é definido por

$$\cos\sigma_{\alpha\beta} = e_\alpha \cdot e_\beta \quad (4.2.4)$$

Determina-se o tensor métrico da superfície, calculando os valores:

$$g_{\alpha\alpha} = r_\alpha \cdot r_\alpha \quad (4.2.5a)$$

$$g_{\beta\beta} = r_\beta \cdot r_\beta \quad (4.2.5b)$$

$$g_{\alpha\beta} = r_\alpha \cdot r_\beta \quad (4.2.5c)$$

assim sendo, podem-se, também, escrever:

$$e_\alpha = \frac{r_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \quad (4.2.6a)$$

$$e_\beta = \frac{r_\beta}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} \quad (4.2.6b)$$

$$e_\gamma = \frac{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\sqrt{g_{\beta\beta}}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2}} e_\alpha \times e_\beta = \frac{r_\alpha \times r_\beta}{\sqrt{(r_\alpha \cdot r_\alpha)(r_\beta \cdot r_\beta) - (r_\alpha \cdot r_\beta)^2}} \quad (4.2.6c)$$

$$\cos\sigma_{\alpha\beta} = e_\alpha \cdot e_\beta = \frac{r_\alpha \cdot r_\beta}{\|r_\alpha\|\|r_\beta\|} = \frac{g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\sqrt{g_{\beta\beta}}} \quad (4.2.6d)$$

$$\text{sen}\sigma_{\alpha\beta} = \sqrt{1 - \cos^2\sigma_{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\sqrt{g_{\beta\beta}}} \quad (4.2.6e)$$

Os elementos de linha correspondentes aos incrementos  $d\alpha$  e  $d\beta$ , podem ser escritos da seguinte forma:

$$ds_\alpha = \left\| \frac{\partial r}{\partial \alpha} \right\| d\alpha = \|r_\alpha\| d\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} d\alpha \quad (4.2.7a)$$

$$ds_\beta = \left\| \frac{\partial r}{\partial \beta} \right\| d\beta = \|r_\beta\| d\beta = \sqrt{g_{\beta\beta}} d\beta \quad (4.2.7b)$$

tendo em mente a definição dos versores tangentes, têm-se

$$e_\alpha = \frac{\partial r}{\partial s_\alpha} \quad (4.2.8a)$$

$$e_\beta = \frac{\partial r}{\partial s_\beta} \quad (4.2.8b)$$

Portanto, obtém-se o elemento de superfície correspondente aos incrementos  $d\alpha$  e  $d\beta$ :

$$\begin{aligned} dA &= \left\| \frac{\partial r}{\partial \alpha} d\alpha \times \frac{\partial r}{\partial \beta} d\beta \right\| = \|r_\alpha \times r_\beta\| d\alpha d\beta = \sqrt{g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2} d\alpha d\beta \\ &= \text{sen } \sigma_{\alpha\beta} ds_\alpha ds_\beta \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

## 4.2.2 Derivada de um Vetor ao Longo das Curvas Paramétricas

Sendo dado o vetor

$$v = v_\alpha e_\alpha + v_\beta e_\beta + v_\gamma e_\gamma = \sum_{k=\alpha,\beta,\gamma} v_k e_k \quad (4.2.10)$$

pode-se fazer a seguinte derivada

$$\frac{\partial v}{\partial s_i} = \frac{\partial}{\partial s_i} \left( \sum_{k=\alpha,\beta,\gamma} v_k e_k \right) = \sum_{k=\alpha,\beta,\gamma} \frac{\partial v_k}{\partial s_i} e_k + \sum_{k=\alpha,\beta,\gamma} v_k \frac{\partial e_k}{\partial s_i} \quad (4.2.11)$$

Na Eq.(4.2.11), a primeira somatória, denominando-a de  $\delta v / \delta s_i$ , representa a diferenciação de componentes escalares, sem considerar a mudança de direção dos vetores da base. Os termos restantes da segunda somatória são provocados pela possibilidade de rotação da base. Consequentemente, estes termos podem ser expressos através do produto vetorial do vetor unitário  $e_k$  e seus respectivos deslocamentos angulares pela unidade de

comprimento de arco, ou ainda através da aplicação de um tensor adequado,  $R^{(i)}$ , aos vetores da base. Portanto:

$$\frac{\partial v}{\partial s_i} = \frac{\delta v}{\delta s_i} + \sum_{k=\alpha,\beta,\gamma} v_k (\bar{\omega}^{(ki)} \times e_k) = \frac{\delta v}{\delta s_i} + v R^{(i)} \quad (4.2.12)$$

Para a interpretação da equação acima, pode-se observar a Fig.(4.2.2), na qual mostram-se duas posições na curva paramétrica  $s_i$  vizinhas e os seus correspondentes vetores da base. Como os módulos destes vetores não mudam (vetores unitários), os seus incrementos  $(\partial e_k / \partial s_i) ds_i$  são provocados apenas pela mudança de direção da base ao longo de  $s_i$ , podendo ocorrer rotações diferentes.

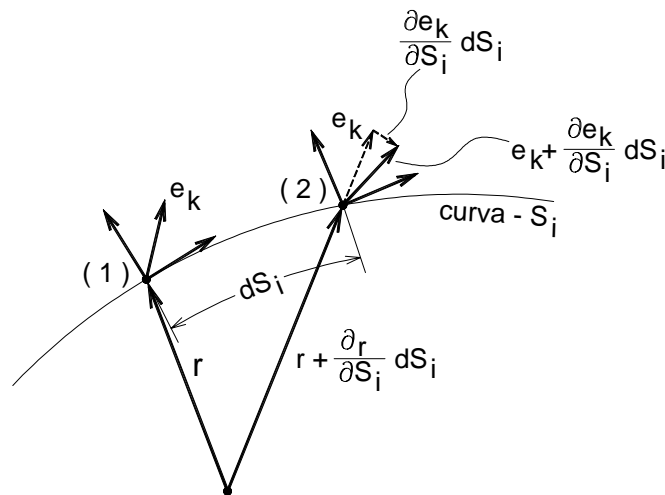


FIGURA 4.2.2: Variação dos vetores da base ao longo da curva paramétrica  $s_i$  (OTTO&TROSTEL, 1967).

Se os vetores da base sofrem a rotação  $\bar{\omega}^{(ki)}$ , quando deslocam uma distância unitária ao longo da curva  $s_i$  ( $\Delta s_i = 1$ ), portanto,  $e_k$  gira  $\bar{\omega}^{(ki)} ds_i$ , quando desloca da posição 1 à posição 2. Sendo

$$\bar{\omega}^{(ki)} = \omega_\alpha^{(ki)} e_\alpha + \omega_\beta^{(ki)} e_\beta + \omega_\gamma^{(ki)} e_\gamma \quad (4.2.13)$$

podem-se escrever

$$\frac{\partial e_k}{\partial s_i} ds_i = \bar{\omega}^{(ki)} ds_i \times e_k \quad (4.2.14a)$$

$$\frac{\partial e_k}{\partial s_i} = \bar{\omega}^{(ki)} \times e_k \quad (4.2.14b)$$

Tendo em vista a Eq.(4.2.3) e a regra do duplo produto vetorial, escrevem-se as equações seguintes:

$$e_\alpha \times e_\gamma = (e_\alpha \cos \sigma_{\alpha\beta} - e_\beta) / \text{sen } \sigma_{\alpha\beta} \quad (4.2.15a)$$

$$e_\beta \times e_\gamma = (e_\alpha - e_\beta \cos \sigma_{\alpha\beta}) / \text{sen } \sigma_{\alpha\beta} \quad (4.2.15b)$$

então, pode-se obter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s_i} = & \left[ \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_i} - \frac{v_\alpha \omega_\gamma^{(\alpha i)} \cos \sigma_{\alpha\beta} + v_\beta \omega_\gamma^{(\beta i)}}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} + \frac{v_\gamma}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} (\omega_\alpha^{(\gamma i)} \cos \sigma_{\alpha\beta} + \omega_\beta^{(\gamma i)}) \right] e_\alpha + \\ & + \left[ \frac{\partial v_\beta}{\partial s_i} + \frac{v_\beta \omega_\gamma^{(\beta i)} \cos \sigma_{\alpha\beta} + v_\alpha \omega_\gamma^{(\alpha i)}}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} - \frac{v_\gamma}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} (\omega_\beta^{(\gamma i)} \cos \sigma_{\alpha\beta} + \omega_\alpha^{(\gamma i)}) \right] e_\beta + \\ & + \left[ \frac{\partial v_\gamma}{\partial s_i} - (v_\alpha \omega_\beta^{(\alpha i)} - v_\beta \omega_\alpha^{(\beta i)}) \text{sen } \sigma_{\alpha\beta} \right] e_\gamma \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Para a obtenção das componentes do vetor  $\bar{\omega}^{(ki)}$ , considere-se o seguinte. Sendo o produto misto entre os vetores da base não nulos, existem os seguintes vetores recíprocos:

$$e_\alpha^* = \frac{e_\beta \times e_\gamma}{[e_\alpha e_\beta e_\gamma]} \quad e_\beta^* = \frac{e_\gamma \times e_\alpha}{[e_\alpha e_\beta e_\gamma]} \quad e_\gamma^* = \frac{e_\alpha \times e_\beta}{[e_\alpha e_\beta e_\gamma]} \quad (4.2.17a-c)$$

que verificam as seguintes igualdades:

$$e_\alpha \cdot e_\alpha^* = e_\beta \cdot e_\beta^* = e_\gamma \cdot e_\gamma^* = 1 \quad (4.2.18a)$$

$$e_\alpha \cdot e_\beta^* = e_\alpha \cdot e_\gamma^* = e_\beta \cdot e_\alpha^* = e_\beta \cdot e_\gamma^* = e_\gamma \cdot e_\alpha^* = e_\gamma \cdot e_\beta^* = 0 \quad (4.2.18b)$$

assim sendo, percebe-se que:

$$v_\alpha = v \cdot e_\alpha^* = \frac{v \cdot (e_\beta \times e_\gamma)}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} \quad (4.2.19a)$$

$$v_{\beta} = v \cdot e_{\beta}^* = \frac{v \cdot (e_{\gamma} \times e_{\alpha})}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} \quad (4.2.19b)$$

$$v_{\gamma} = v \cdot e_{\gamma}^* = \frac{v \cdot (e_{\alpha} \times e_{\beta})}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} \quad (4.2.19c)$$

portanto

$$\begin{aligned} \sum_{k=\alpha,\beta,\gamma} v_k (\bar{\omega}^{(ki)} \times e_k) &= \frac{v \cdot (e_{\beta} \times e_{\gamma})}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} (\bar{\omega}^{(\alpha i)} \times e_{\alpha}) + \frac{v \cdot (e_{\gamma} \times e_{\alpha})}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} (\bar{\omega}^{(\beta i)} \times e_{\beta}) + \\ &+ \frac{v \cdot (e_{\alpha} \times e_{\beta})}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} (\bar{\omega}^{(\gamma i)} \times e_{\gamma}) \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

ou, escrevendo-se com outra notação<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{k=\alpha,\beta,\gamma} v_k (\bar{\omega}^{(ki)} \times e_k) &= v [(e_{\beta} \times e_{\gamma}) \otimes (\bar{\omega}^{(\alpha i)} \times e_{\alpha}) + (e_{\gamma} \times e_{\alpha}) \otimes (\bar{\omega}^{(\beta i)} \times e_{\beta}) + \\ &+ (e_{\alpha} \times e_{\beta}) \otimes (\bar{\omega}^{(\gamma i)} \times e_{\gamma})] / \text{sen } \sigma_{\alpha\beta} = v R^{(i)} \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

onde se verifica a Eq.(4.2.12).

As componentes de  $\bar{\omega}^{(ki)}$  apresentadas na Eq.(4.2.16), são:

$$\omega_{\alpha}^{(ki)} = \bar{\omega}^{(ki)} \cdot e_{\alpha}^* \quad \omega_{\beta}^{(ki)} = \bar{\omega}^{(ki)} \cdot e_{\beta}^* \quad \omega_{\gamma}^{(ki)} = \bar{\omega}^{(ki)} \cdot e_{\gamma}^* \quad (4.2.22a-c)$$

portanto, obtêm-se:

(para  $\Delta S_{\alpha} = 1$ )

$$\omega_{\beta}^{(\alpha\alpha)} = \frac{1}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} e_{\alpha} \cdot \frac{\partial e_{\gamma}}{\partial s_{\alpha}} = -\frac{1}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} e_{\gamma} \cdot \frac{\partial e_{\alpha}}{\partial s_{\alpha}} = -\sqrt{\frac{g_{\beta\beta}}{g_{\alpha\alpha}}} \frac{[r_{\alpha} r_{\beta} r_{\alpha\alpha}]}{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2} \quad (4.2.23a)$$

---

<sup>1</sup>  $(a \cdot b)c = a(b \otimes c)$



$$\omega_{\gamma}^{(\alpha\alpha)} = \frac{1}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} e_{\beta} \cdot \frac{\partial e_{\alpha}}{\partial s_{\alpha}} = \frac{\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{g_{\alpha\beta}}{2g_{\alpha\alpha}} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial \beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}} \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2}} \quad (4.2.23b)$$

$$\omega_{\alpha}^{(\beta\alpha)} = -\frac{1}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} e_{\beta} \cdot \frac{\partial e_{\gamma}}{\partial s_{\alpha}} = \frac{1}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} e_{\gamma} \cdot \frac{\partial e_{\beta}}{\partial s_{\alpha}} = \frac{[r_{\alpha} r_{\beta} r_{\alpha\alpha}]}{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2} \quad (4.2.23c)$$

$$\omega_{\gamma}^{(\beta\alpha)} = -\frac{1}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} e_{\alpha} \cdot \frac{\partial e_{\beta}}{\partial s_{\alpha}} = -\frac{\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial \beta} - \frac{g_{\alpha\beta}}{g_{\beta\beta}} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial \alpha}}{2\sqrt{g_{\alpha\alpha}} \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2}} \quad (4.2.23d)$$

$$\omega_{\alpha}^{(\gamma\alpha)} = -\frac{1}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} e_{\beta} \cdot \frac{\partial e_{\gamma}}{\partial s_{\alpha}} = \omega_{\alpha}^{(\beta\alpha)} \quad (4.2.23e)$$

$$\omega_{\beta}^{(\gamma\alpha)} = \frac{1}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} e_{\alpha} \cdot \frac{\partial e_{\gamma}}{\partial s_{\alpha}} = \omega_{\beta}^{(\alpha\alpha)} \quad (4.2.23f)$$

(para  $\Delta S_{\beta} = 1$ )

$$\omega_{\beta}^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} e_{\alpha} \cdot \frac{\partial e_{\gamma}}{\partial s_{\beta}} = -\frac{1}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} e_{\gamma} \cdot \frac{\partial e_{\alpha}}{\partial s_{\beta}} = -\frac{[r_{\alpha} r_{\beta} r_{\alpha\beta}]}{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2} = -\omega_{\alpha}^{(\beta\alpha)} \quad (4.2.24a)$$

$$\omega_{\gamma}^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} e_{\beta} \cdot \frac{\partial e_{\alpha}}{\partial s_{\beta}} = \frac{\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial \alpha} - \frac{g_{\alpha\beta}}{g_{\alpha\alpha}} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial \beta}}{2\sqrt{g_{\beta\beta}} \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2}} \quad (4.2.24b)$$

$$\omega_{\alpha}^{(\beta\beta)} = -\frac{1}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} e_{\beta} \cdot \frac{\partial e_{\gamma}}{\partial s_{\beta}} = \frac{1}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} e_{\gamma} \cdot \frac{\partial e_{\beta}}{\partial s_{\beta}} = \sqrt{\frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{\beta\beta}}} \frac{[r_{\alpha} r_{\beta} r_{\beta\beta}]}{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2} \quad (4.2.24c)$$

$$\omega_{\gamma}^{(\beta\beta)} = -\frac{1}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} e_{\alpha} \cdot \frac{\partial e_{\beta}}{\partial s_{\beta}} = -\frac{\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \frac{g_{\alpha\beta}}{2g_{\beta\beta}} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial \beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial \alpha}}{\sqrt{g_{\beta\beta}} \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2}} \quad (4.2.24d)$$

$$\omega_{\alpha}^{(\gamma\beta)} = -\frac{1}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} e_{\beta} \cdot \frac{\partial e_{\gamma}}{\partial s_{\beta}} = \omega_{\alpha}^{(\beta\beta)} \quad (4.2.24e)$$

$$\omega_{\beta}^{(\gamma\beta)} = \frac{1}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} e_{\alpha} \cdot \frac{\partial e_{\gamma}}{\partial s_{\beta}} = \omega_{\beta}^{(\alpha\beta)} \quad (4.2.24f)$$

Os vetores  $\bar{\omega}^{(ki)}$  caracterizam a curvatura e a torção da superfície.

### 4.2.3 Curvatura e Torção de uma Superfície

Considera-se uma curva sobre a superfície que, no ponto  $P$ , faz um ângulo  $\varphi$  com a direção  $e_\alpha$ , Fig.(4.2.3). Portanto,  $\varphi$  é um ângulo entre duas curvas sobre a superfície.

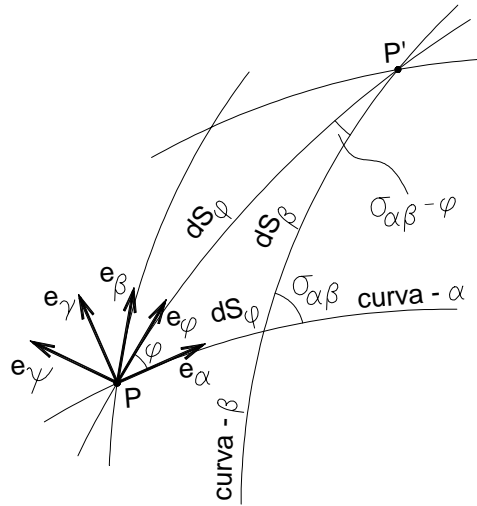


FIGURA 4.2.3: Definição de uma curva sobre uma superfície (OTTO&TROSTEL, 1967).

Com o intuito de se estudar a torção e a curvatura dessa curva, escreve-se a equação do seu versor tangente:

$$e_\varphi = \frac{dr}{ds_\varphi} = \frac{\partial r}{\partial s_\alpha} \frac{ds_\alpha}{ds_\varphi} + \frac{\partial r}{\partial s_\beta} \frac{ds_\beta}{ds_\varphi} = e_\alpha \frac{ds_\alpha}{ds_\varphi} + e_\beta \frac{ds_\beta}{ds_\varphi} \quad (4.2.25)$$

e, através da lei dos senos, Fig.(4.2.3), têm-se

$$ds_\alpha = ds_\varphi \frac{\text{sen}(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi)}{\text{sen} \sigma_{\alpha\beta}} \quad (4.2.26a)$$

$$ds_\beta = ds_\varphi \frac{\text{sen} \varphi}{\text{sen} \sigma_{\alpha\beta}} \quad (4.2.26b)$$

finalmente, obtém-se:

$$e_\varphi = \frac{e_\alpha \text{sen}(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi) + e_\beta \text{sen} \varphi}{\text{sen} \sigma_{\alpha\beta}} \quad (4.2.27)$$

Este versor  $e_\varphi$  é tangente à curva- $\varphi$  (e à superfície) e perpendicular ao vetor  $e_\gamma$ , este normal à superfície. Então, os vetores  $e_\varphi$ ,  $e_\gamma$  e

$$e_\psi = e_\gamma \times e_\varphi = -\frac{e_\alpha \cos(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi) - e_\beta \cos \varphi}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} \quad (4.2.28)$$

formam uma base ortonormal em cada ponto da curva considerada. Como no item anterior, pode-se descrever a rotação desta base vetorial ao longo do comprimento da curva ( $\Delta S_\varphi = 1$ ) através do vetor  $\bar{\omega}(\varphi)$ :

$$\frac{de_\gamma}{dS_\varphi} = \bar{\omega}(\varphi) \times e_\gamma \quad (4.2.29)$$

A derivada de  $e_\gamma$  ao longo da curva considerada é

$$\frac{de_\gamma}{dS_\varphi} = \frac{\partial e_\gamma}{\partial S_\alpha} \frac{dS_\alpha}{dS_\varphi} + \frac{\partial e_\gamma}{\partial S_\beta} \frac{dS_\beta}{dS_\varphi} = \frac{\text{sen}(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi)}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} \frac{\partial e_\gamma}{\partial S_\alpha} + \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} \frac{\partial e_\gamma}{\partial S_\beta} \quad (4.2.30)$$

fazendo o produto vetorial de  $e_\gamma$  por  $\frac{de_\gamma}{dS_\varphi}$ , obtém-se

$$e_\gamma \times \frac{de_\gamma}{dS_\varphi} = \bar{\omega}(\varphi) - e_\gamma \omega_\gamma(\varphi) = e_\gamma \times \left( \frac{\text{sen}(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi)}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} \frac{\partial e_\gamma}{\partial S_\alpha} + \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} \frac{\partial e_\gamma}{\partial S_\beta} \right) \quad (4.2.31)$$

O produto escalar entre o vetor tangente à curva e o vetor  $\bar{\omega}(\varphi)$  resulta na componente tangencial das rotações, ou seja, a torção geodésica da curva

$$T(\varphi) = \bar{\omega}(\varphi) \cdot e_\varphi = \left( e_\gamma \times \frac{de_\gamma}{dS_\varphi} \right) \cdot e_\varphi = -e_\psi \cdot \frac{de_\gamma}{dS_\varphi} \quad (4.2.32)$$

Tendo em vista as Eqs. (4.2.30), (4.2.28) e (4.2.23), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 T(\varphi) = & \left( \omega_{\beta}^{(\alpha\alpha)} \cos \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha}^{(\beta\alpha)} \right) \cos 2\varphi + \\
 & + \left[ \frac{\omega_{\beta}^{(\alpha\alpha)} + \omega_{\alpha}^{(\beta\beta)}}{2 \operatorname{sen} \sigma_{\alpha\beta}} - \frac{\cos \sigma_{\alpha\beta}}{\operatorname{sen} \sigma_{\alpha\beta}} \left( \omega_{\beta}^{(\alpha\alpha)} \cos \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha}^{(\beta\alpha)} \right) \right] \operatorname{sen} 2\varphi
 \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

A componente da rotação perpendicular ao plano definido pelos vetores  $e_{\gamma}$  e  $e_{\varphi}$  é obtida através do produto escalar entre o vetor  $\bar{\omega}(\varphi)$  e o vetor  $e_{\psi} = e_{\gamma} \times e_{\varphi}$ . Portanto,

$$K_n(\varphi) = \bar{\omega}(\varphi) \cdot e_{\psi} = \left( e_{\gamma} \times \frac{de_{\gamma}}{dS_{\varphi}} \right) \cdot e_{\psi} = e_{\varphi} \cdot \frac{de_{\gamma}}{dS_{\varphi}} \quad (4.2.34)$$

Esta componente,  $K_n(\varphi)$ , é a curvatura desta seção normal da superfície no ponto  $P$ . Tendo em vista as Eqs.(4.2.27), (4.2.30) e (4.2.23), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 K_n(\varphi) = & \left( \frac{\omega_{\beta}^{(\alpha\alpha)} - \omega_{\alpha}^{(\beta\beta)}}{2 \operatorname{sen} \sigma_{\alpha\beta}} + \omega_{\alpha}^{(\beta\alpha)} \frac{\cos \sigma_{\alpha\beta}}{\operatorname{sen} \sigma_{\alpha\beta}} \right) + \\
 & + \left[ \frac{\omega_{\beta}^{(\alpha\alpha)} + \omega_{\alpha}^{(\beta\beta)}}{2 \operatorname{sen} \sigma_{\alpha\beta}} + \frac{\cos \sigma_{\alpha\beta}}{\operatorname{sen} \sigma_{\alpha\beta}} \left( \omega_{\beta}^{(\alpha\alpha)} \cos \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha}^{(\beta\alpha)} \right) \right] \cos 2\varphi + \\
 & - \left( \omega_{\beta}^{(\alpha\alpha)} \cos \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha}^{(\beta\alpha)} \right) \operatorname{sen} 2\varphi
 \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

Fazendo

$$H = \frac{\omega_{\beta}^{(\alpha\alpha)} - \omega_{\alpha}^{(\beta\beta)}}{2 \operatorname{sen} \sigma_{\alpha\beta}} + \omega_{\alpha}^{(\beta\alpha)} \frac{\cos \sigma_{\alpha\beta}}{\operatorname{sen} \sigma_{\alpha\beta}} \quad (4.2.36a)$$

$$r_1 = \frac{\omega_{\beta}^{(\alpha\alpha)} + \omega_{\alpha}^{(\beta\beta)}}{2 \operatorname{sen} \sigma_{\alpha\beta}} + \frac{\cos \sigma_{\alpha\beta}}{\operatorname{sen} \sigma_{\alpha\beta}} \left( \omega_{\beta}^{(\alpha\alpha)} \cos \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha}^{(\beta\alpha)} \right) \quad (4.2.36b)$$

$$r_2 = \omega_{\beta}^{(\alpha\alpha)} \cos \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha}^{(\beta\alpha)} \quad (4.2.36c)$$

e tendo em vista as Eqs. (4.2.33) e (4.2.35), obtém-se a equação do círculo:

$$[K_n(\varphi) - H]^2 + T(\varphi)^2 = r_1^2 + r_2^2 = R^2 \quad (4.2.37)$$

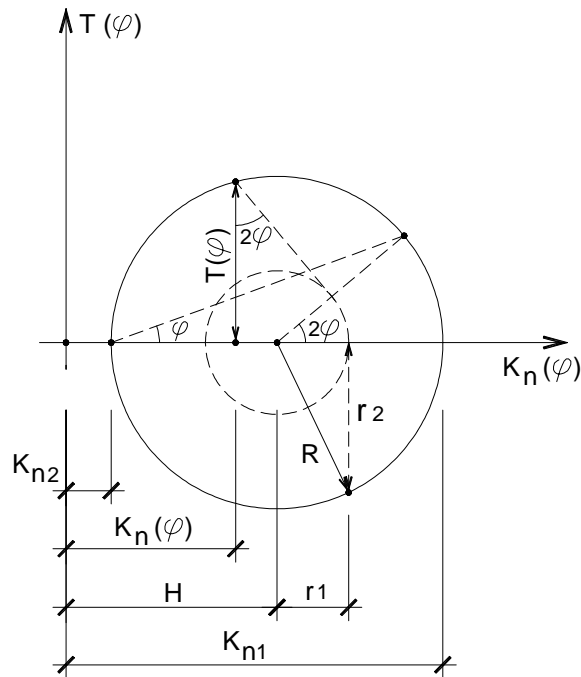


FIGURA 4.2.4: Representação da curvatura da superfície em um círculo de Mohr (OTTO & TROSTEL, 1967).

A partir da representação gráfica do círculo, Fig.(4.2.4), pode-se observar, primeiro, que existem duas direções de curvatura da seção normal extremas, onde a torção geodésica é nula e, segundo, que a soma das curvaturas de pontos de seções normais perpendiculares é constante.

Define-se, então, a curvatura média,  $H$ , como a média de duas curvaturas principais (este nome tem significado devido a primeira observação colocada acima).

$$H = \frac{1}{2} [K_n(\varphi) + K_n(\varphi + \pi/2)] = \frac{\omega_\beta^{(\alpha\alpha)} - \omega_\alpha^{(\beta\beta)}}{2 \operatorname{sen} \sigma_{\alpha\beta}} + \omega_\alpha^{(\beta\alpha)} \frac{\cos \sigma_{\alpha\beta}}{\operatorname{sen} \sigma_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \nabla e_\gamma \quad (4.2.38)$$

onde  $\nabla$  é o seguinte operador diferencial

$$\nabla = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma_{\alpha\beta}} \left[ e_\alpha \left( \frac{\partial}{\partial S_\alpha} - \cos \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial S_\beta} \right) + e_\beta \left( \frac{\partial}{\partial S_\beta} - \cos \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial S_\alpha} \right) \right] \quad (4.2.39)$$

A curvatura gaussiana, ou total,  $K$ , no ponto  $P$  é o produto entre as curvaturas principais, ou seja:

$$K = K_{n1} K_{n2} = (H + R)(H - R) = H^2 - R^2 = K_n(\varphi)K_n(\varphi + \pi/2) - T^2(\varphi) \quad (4.2.40)$$

A curvatura gaussiana é positiva nos pontos elípticos, é negativa nos pontos hiperbólicos e é igual a zero nos pontos parabólicos e nos pontos planos.

### 4.3 Teoria de Membrana para Pequenas Deformações e Pequenos Deslocamentos

Admite-se regime elástico linear com pequenas deformações e pequenos deslocamentos. Assim sendo, assumindo que a superfície carregada esteja ligeiramente deslocada e deformada, obtêm-se os esforços com os parâmetros conhecidos da superfície inicial. O sistema de coordenadas empregado é curvilíneo, com coordenadas  $(\alpha, \beta)$ , tomadas na superfície inicial da membrana em questão.

Os esforços de membrana presentes ao longo das curvas  $\alpha$  e  $\beta$ , definem um estado biaxial de sollicitação. Estes esforços, contidos no plano tangente à superfície no ponto em questão, geralmente possuem componentes normais e cisalhantes. Na membrana, a rigidez a momentos e a cortantes transversais é desprezada. Além disso, as tensões normais não podem ser negativas, esta é a condição necessária para a não formação de rugas na membrana. A satisfação da condição de tensões principais positivas é fundamental para a determinação da pressão interna (ou de outras forças de protensão) nas estruturas pneumáticas (ou em outros tipos de estrutura de membrana).

Os resultados são proporcionais ao carregamento, mas podem apreciavelmente estar distantes dos esforços que realmente ocorrem nas regiões dos apoios, porque a teoria linearizada empregada, geralmente, não satisfaz a todas condições de contorno. Além destes casos, existem outros em que a posição inicial da estrutura não é capaz de satisfazer as condições de equilíbrio da estrutura carregada. Nestas situações, os deslocamentos (geralmente grandes) redistribuem os esforços em toda a membrana e devem ser considerados (OTTO & TROSTEL, 1967).

### 4.3.1 Equações Básicas

A seguir apresentam-se as equações básicas para o elemento infinitesimal de membrana. Estas equações são as equações de equilíbrio, as relações entre deformações e deslocamentos, e as relações entre esforços e deformações.

As equações de equilíbrio do elemento são satisfeitas na posição inicial. Os esforços de membrana,  $T = h\sigma$ , podem ser definidos como sendo as resultantes das tensões,  $\sigma$ , atuantes em um comprimento unitário do seguimento de membrana, assumindo uma distribuição uniforme de tensões ao longo da espessura,  $h$ .

Esses esforços em um sistema  $(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma)$  são

$$T_\alpha = T_{\alpha\alpha} e_\alpha + T_{\alpha\beta} e_\beta \quad (4.3.1a)$$

$$T_\beta = T_{\beta\alpha} e_\alpha + T_{\beta\beta} e_\beta \quad (4.3.1b)$$

e, a resultante das ações (por unidade de área) aplicadas no elemento é

$$p = p_\alpha e_\alpha + p_\beta e_\beta + p_\gamma e_\gamma \quad (4.3.2)$$

As equações vetoriais de equilíbrio de forças e momentos para um elemento de membrana de área inicial,  $dA = ds_\alpha ds_\beta \text{ sen } \sigma_{\alpha\beta}$ , Fig.(4.3.1), são:

$\Sigma$  forças = 0

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha} (T_\alpha ds_\beta) ds_\alpha + \frac{\partial}{\partial s_\beta} (T_\beta ds_\alpha) ds_\beta + p dA = 0 \quad (4.3.3a)$$

$\Sigma$  momentos = 0 (em relação ao ponto A)

$$\begin{aligned} & \left( ds_\alpha e_\alpha + \frac{ds_\beta}{2} e_\beta \right) \times \left[ T_\alpha ds_\beta + \frac{\partial}{\partial s_\alpha} (T_\alpha ds_\beta) ds_\alpha \right] - \frac{ds_\beta}{2} e_\beta \times T_\alpha ds_\beta + \\ & + \left( ds_\beta e_\beta + \frac{ds_\alpha}{2} e_\alpha \right) \times \left[ T_\beta ds_\alpha + \frac{\partial}{\partial s_\beta} (T_\beta ds_\alpha) ds_\beta \right] - \frac{ds_\alpha}{2} e_\alpha \times T_\beta ds_\alpha + \\ & + \left( \frac{ds_\alpha}{2} e_\alpha + \frac{ds_\beta}{2} e_\beta \right) \times p dA = 0 \end{aligned} \quad (4.3.3b)$$

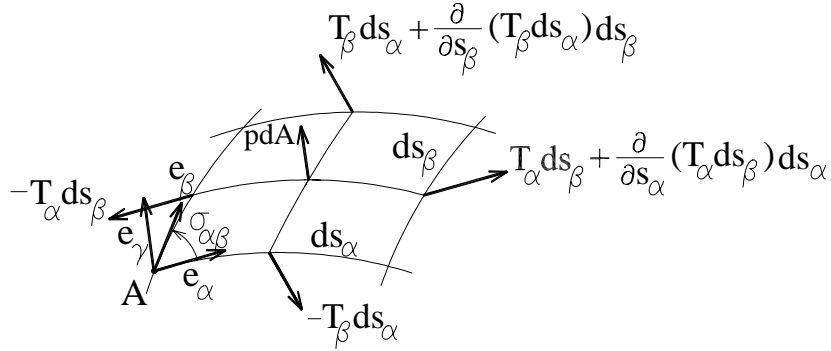


FIGURA 4.3.1: Carregamento e esforços em um elemento infinitesimal de membrana [adaptada de OTTO e TROSTEL (1967)].

Desprezando termos de ordem superior e introduzindo as Eqs.(4.2.3), (4.2.6e), (4.2.7a,b), (4.3.1) nas Eqs.(4.3.3a-b), obtêm-se:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (\sqrt{g_{\beta\beta}} T_{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\sqrt{g_{\alpha\alpha}} T_{\beta}) + p \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2} = 0 \quad (4.3.4a)$$

$$e_{\alpha} \times T_{\alpha} + e_{\beta} \times T_{\beta} = e_{\gamma} \text{ sen } \sigma_{\alpha\beta} (T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}) = 0 \quad (4.3.4b)$$

A partir da Eq.(4.3.4b), obtém-se a igualdade das componentes tangenciais,  $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$ . A partir da Eq.(4.3.3a), tendo em vista a Eq.(4.2.16) e, lembrando que  $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$ ,  $\omega_{\alpha}^{(\beta\alpha)} = -\omega_{\beta}^{(\alpha\beta)}$  e que  $e_{\alpha}, e_{\beta}$  e  $e_{\gamma}$  são quaisquer, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sqrt{g_{\beta\beta}} T_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\sqrt{g_{\alpha\alpha}} T_{\alpha\beta}) - \frac{T_{\alpha\alpha} \omega_{\gamma}^{(\alpha\alpha)} \cos \sigma_{\alpha\beta} + T_{\beta\beta} \omega_{\gamma}^{(\beta\beta)}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2}} + \\ & - \frac{T_{\alpha\beta} (\omega_{\gamma}^{(\beta\alpha)} + \omega_{\gamma}^{(\alpha\beta)} \cos \sigma_{\alpha\beta})}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2}} + p_{\alpha} \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.5a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sqrt{g_{\beta\beta}} T_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\sqrt{g_{\alpha\alpha}} T_{\beta\beta}) + \frac{T_{\alpha\alpha} \omega_{\gamma}^{(\alpha\alpha)} + T_{\beta\beta} \omega_{\gamma}^{(\beta\beta)} \cos \sigma_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2}} + \\ & + \frac{T_{\alpha\beta} (\omega_{\gamma}^{(\beta\alpha)} \cos \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\gamma}^{(\alpha\beta)})}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2}} + p_{\beta} \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.5b)$$

$$2T_{\alpha\beta} \omega_{\alpha}^{(\beta\alpha)} - T_{\alpha\alpha} \omega_{\beta}^{(\alpha\alpha)} + T_{\beta\beta} \omega_{\alpha}^{(\beta\beta)} + p_{\gamma} = 0 \quad (4.3.5c)$$



Este sistema de equações geralmente é suficiente para a determinação das componentes dos esforços —  $T_{\alpha\alpha}$ ,  $T_{\beta\beta}$  e  $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$  — desde que os parâmetros geométricos da superfície sejam conhecidos.

O carregamento da estrutura provoca deformações e, conseqüentemente, a superfície da membrana se desloca, Fig.(4.3.2). As deformações (alongamentos e distorções) de um elemento de membrana podem ser caracterizadas através das componentes de um tensor de deformações,  $D$ . Objetivando a determinação do tensor  $D$ , admite-se que o vetor posição inicial da superfície da membrana é  $r(\alpha, \beta)$ , que o vetor posição final é  $\bar{r}(\alpha, \beta)$  e que o vetor de deslocamentos entre a posição inicial e final é  $v(\alpha, \beta)$ . Assim sendo, podem-se escrever:

$$\bar{r}(\alpha, \beta) = r(\alpha, \beta) + v(\alpha, \beta) \quad (4.3.6)$$

$$D = \frac{1}{2} \left[ \nabla \otimes v + v^t \otimes \nabla + (\nabla \otimes v)(v^t \otimes \nabla) \right] \quad (4.3.7)$$

onde  $\nabla$  é um operador diferencial definido por

$$\nabla = \frac{1}{\sin^2 \sigma_{\alpha\beta}} \left[ e_\alpha \left( \frac{\partial}{\partial s_\alpha} - \cos \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial s_\beta} \right) + e_\beta \left( \frac{\partial}{\partial s_\beta} - \cos \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial s_\alpha} \right) \right] \quad (4.3.8)$$

As propriedades dos materiais podem ser direcionais e não-lineares, especialmente para altos níveis de tensão. Para materiais com anisotropia ortogonal e em regime elástico-linear, podem-se escrever as seguintes relações entre tensões e deformações:

$$\epsilon_\alpha = \frac{T_{\alpha\alpha}}{E_\alpha} - \frac{\nu_\beta}{E_\beta} T_{\beta\beta} \quad (4.3.9a)$$

$$\epsilon_\beta = \frac{T_{\beta\beta}}{E_\beta} - \frac{\nu_\alpha}{E_\alpha} T_{\alpha\alpha} \quad (4.3.9b)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{T_{\alpha\beta}}{E_{\alpha\beta}} \quad (4.3.9c)$$

onde,  $E_i$  é o módulo de elasticidade do material e  $\nu_i$  é coeficiente de *Poisson*.

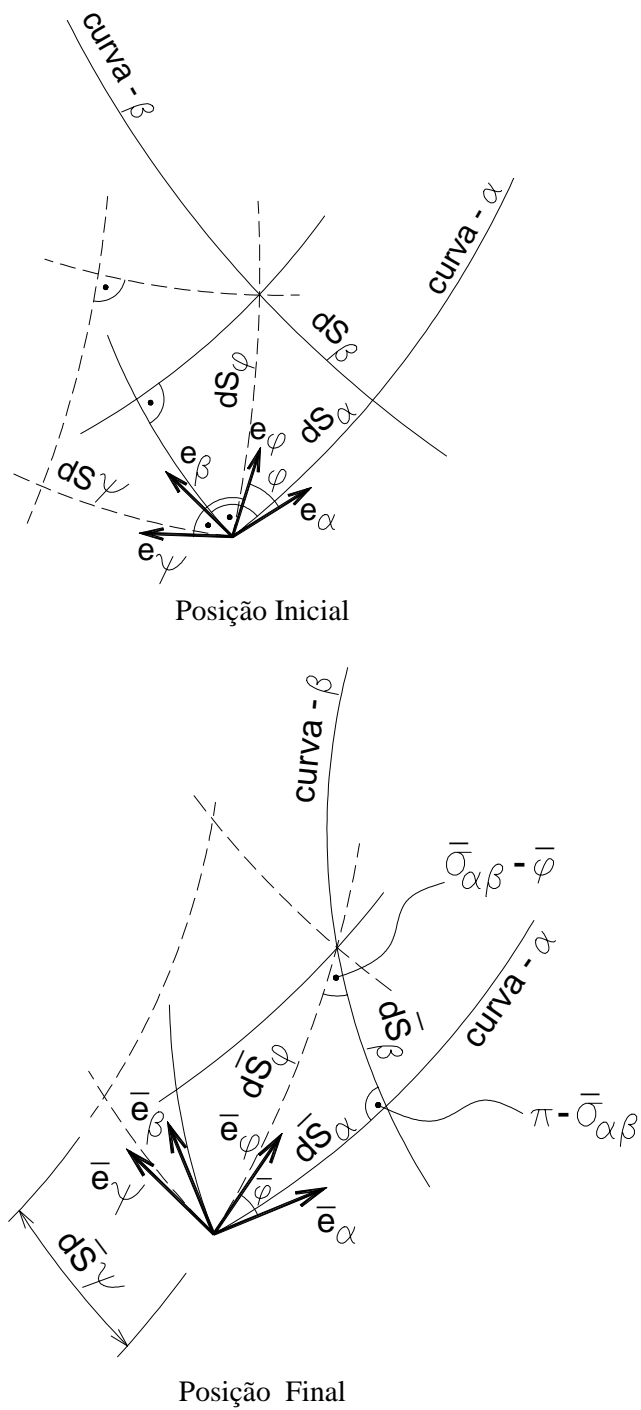


FIGURA 4.3.2: Elemento de membrana nas posições inicial e final (OTTO&TROSTEL, 1967).

Com as condições de equilíbrio, com as relações entre deformações e deslocamentos e com as relações entre esforços e deformações, finalmente podem-se determinar as equações que governam os deslocamentos da estrutura (teoria de primeira ordem).

### 4.3.2 Verificação da Pressão Interna

Os esforços de membrana, definidos no item anterior, estão contidos no plano tangente à superfície no ponto em questão e, geralmente, possuem componentes normais e cisalhantes neste plano. Entretanto, os valores destas componentes dependem do plano em consideração, ou seja, do ângulo de inclinação do plano em relação ao sistema de coordenadas.

No caso das estruturas pneumáticas, interessam-se determinar as tensões normais limites, para se assegurar a ausência de tensões de compressão em qualquer direção. Neste sentido, define-se o plano das tensões normais limites sabendo que, neste plano, as componentes cisalhantes são nulas. Pode-se observar, Fig. (4.3.3), os esforços de membrana atuantes na seção arbitrária,  $ds_\varphi$ .

Com o auxílio da Fig.(4.3.3), pode-se escrever a seguinte equação de equilíbrio em uma direção arbitrária,  $ds_\psi$ :

$$T_\varphi ds_\psi - T_\alpha ds_\beta - T_\beta ds_\alpha = 0 \tag{4.3.10}$$

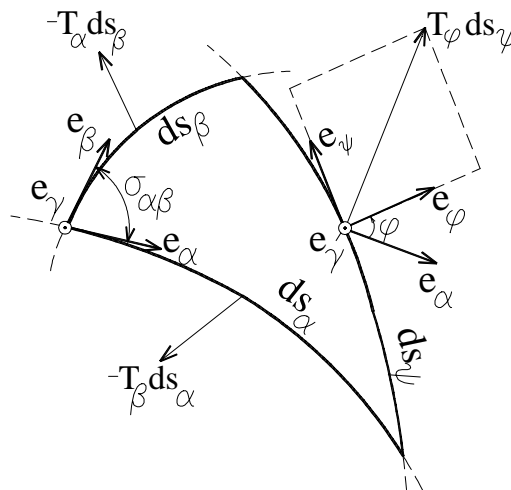


FIGURA 4.3.3: Esforços em uma direção arbitrária [adaptada de OTTO & TROSTEL(1967)].

A partir da lei dos senos, podem-se escrever

$$ds_{\alpha} = ds_{\psi} \frac{\text{sen} \left[ \frac{\pi}{2} - (\sigma_{\alpha\beta} - \varphi) \right]}{\text{sen} \sigma_{\alpha\beta}} = ds_{\psi} \frac{\cos(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi)}{\text{sen} \sigma_{\alpha\beta}} \quad (4.3.11a)$$

$$ds_{\beta} = ds_{\psi} \frac{\text{sen} \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi \right]}{\text{sen} \sigma_{\alpha\beta}} = ds_{\psi} \frac{\cos \varphi}{\text{sen} \sigma_{\alpha\beta}} \quad (4.3.11b)$$

então,

$$T_{\varphi} = T_{\beta} \frac{\cos(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi)}{\text{sen} \sigma_{\alpha\beta}} + T_{\alpha} \frac{\cos \varphi}{\text{sen} \sigma_{\alpha\beta}} \quad (4.3.12)$$

Os esforços  $T_{\varphi}$  podem ser escritos através de duas componentes relacionadas a seção  $ds_{\varphi}$ : uma tangencial e uma normal,  $\tau_{\varphi} e_{\psi}$  e  $\eta_{\varphi} e_{\varphi}$ , respectivamente. Ou seja,

$$T_{\varphi} = \eta_{\varphi} e_{\varphi} + \tau_{\varphi} e_{\psi} \quad (4.3.13)$$

onde, através do produto escalar obtêm-se

$$T_{\varphi} e_{\varphi} = \eta_{\varphi} = \frac{\cos(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi)}{\text{sen} \sigma_{\alpha\beta}} T_{\beta} e_{\varphi} + \frac{\cos \varphi}{\text{sen} \sigma_{\alpha\beta}} T_{\alpha} e_{\varphi} \quad (4.3.14a)$$

$$T_{\varphi} e_{\psi} = \tau_{\varphi} = \frac{\cos(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi)}{\text{sen} \sigma_{\alpha\beta}} T_{\beta} e_{\psi} + \frac{\cos \varphi}{\text{sen} \sigma_{\alpha\beta}} T_{\alpha} e_{\psi} \quad (4.3.14b)$$

Observando a Fig.(4.3.3), podem-se obter

$$e_{\alpha} \cdot e_{\varphi} = \cos \varphi \quad (4.3.15a)$$

$$e_{\beta} \cdot e_{\varphi} = \cos(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi) \quad (4.3.15b)$$

$$e_{\alpha} \cdot e_{\psi} = \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) = -\text{sen} \varphi \quad (4.3.15c)$$

$$e_{\beta} \cdot e_{\psi} = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \varphi - \sigma_{\alpha\beta} \right) = -\text{sen}(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi) \quad (4.3.15d)$$

Introduzindo as Eqs.(4.3.15) nas Eqs.(4.3.14), obtêm-se

$$\eta_{\varphi} = T_{\beta\beta} \frac{\cos^2(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi)}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} + T_{\alpha\alpha} \frac{\cos^2 \varphi}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} + 2T_{\alpha\beta} \frac{\cos \varphi \cos(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi)}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} \quad (4.3.16a)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi} = & T_{\beta\beta} \frac{\text{sen}(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi) \cos(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi)}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} - T_{\alpha\alpha} \frac{\text{sen } \varphi \cos \varphi}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} + \\ & + T_{\alpha\beta} \frac{\text{sen}(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi) \cos \varphi - \cos(\sigma_{\alpha\beta} - \varphi) \text{sen } \varphi}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} \end{aligned} \quad (4.3.16b)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \eta_{\varphi} = & \left( \frac{T_{\alpha\alpha} + T_{\beta\beta}}{2 \text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} + T_{\alpha\beta} \frac{\cos \sigma_{\alpha\beta}}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} \right) + \\ & + \left[ \frac{T_{\alpha\alpha} - T_{\beta\beta}}{2 \text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} + \frac{\cos \sigma_{\alpha\beta}}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} (T_{\beta\beta} \cos \sigma_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}) \right] \cos 2\varphi + \\ & + (T_{\beta\beta} \cos \sigma_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}) \text{sen } 2\varphi \end{aligned} \quad (4.3.17a)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi} = & - \left[ \frac{T_{\alpha\alpha} - T_{\beta\beta}}{2 \text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} + \frac{\cos \sigma_{\alpha\beta}}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} (T_{\beta\beta} \cos \sigma_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}) \right] \text{sen } 2\varphi + \\ & + (T_{\beta\beta} \cos \sigma_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}) \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (4.3.17b)$$

As Eqs.(4.3.17) e as Eqs.(4.2.35) e (4.2.33) são análogas.

As componentes  $\eta_{\varphi}$  e  $\tau_{\varphi}$  são as coordenadas de um ponto de um círculo, o Círculo de Mohr para tensões. A distância do centro do círculo à origem do eixo das tensões,  $\eta_m$ , é dada pela seguinte equação, análoga a Eq.(4.2.36a):

$$\eta_m = \frac{T_{\alpha\alpha} + T_{\beta\beta}}{2 \text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} + T_{\alpha\beta} \frac{\cos \sigma_{\alpha\beta}}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} \quad (4.3.18)$$

sendo  $r_1$  e  $r_2$  as coordenadas de um ponto do círculo, referente a um sistema de coordenadas cartesianas com origem no centro do círculo, escrevem-se

$$r_1 = \frac{T_{\alpha\alpha} - T_{\beta\beta}}{2 \text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} + \frac{\cos \sigma_{\alpha\beta}}{\text{sen } \sigma_{\alpha\beta}} (T_{\beta\beta} \cos \sigma_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}) \quad (4.3.19a)$$

$$r_2 = T_{\beta\beta} \cos \sigma_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta} \quad (4.3.19b)$$

o raio do círculo é dado por

$$R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad (4.3.19c)$$

Portanto, as tensões normais extremas ( tensões normais principais) são

$$\eta_{1,2} = \eta_m \pm R \quad (4.3.20a)$$

e atuam nos planos definidos pelos seguintes ângulos com a direção  $e_\alpha$

$$\varphi_{01} = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (4.3.20b-c)$$

$$\omega_{02} = \varphi_{01} + \frac{\pi}{2}$$

Portanto, obtêm-se a condição de não formação de rugas na membrana:

$$\eta_{min} = \eta_2 \geq 0.$$

A aplicação do Processo Analítico torna-se relativamente simples nos casos de membranas com superfície simétrica submetidas a ações simétricas, como pode-se verificar nos itens seguintes.

## 4.4 Formulação para as Estruturas Pneumáticas Simétricas

### 4.4.1 Observações Gerais

Na Fig.(4.4.1) podem-se observar os meridianos ( $\varphi = constante$ ) e os círculos latitudinais ( $\theta = constante$ ), os quais podem ser tomados como as curvas paramétricas, sendo  $\theta$  o ângulo de inclinação da normal da superfície ao eixo de simetria.

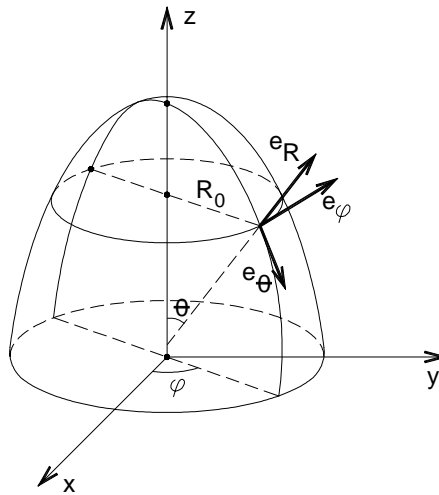


FIGURA 4.4.1: Superfície de revolução [adaptada de OTTO & TROSTEL(1967)].

Os versores diretores podem ser expressos em componentes de um sistema de coordenadas cartesianas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e_\alpha = e_\theta &= \{\cos \theta \cos \varphi; \cos \theta \sin \varphi; -\sin \theta\} \\ e_\beta = e_\varphi &= \{-\sin \varphi; \cos \varphi; 0\} \\ e_\gamma = e_R = e_\theta \times e_\varphi &= \{\sin \theta \cos \varphi; \sin \theta \sin \varphi; \cos \theta\} \end{aligned} \tag{4.4.1a-c}$$

Fazendo-se  $R_1 = R_1(\theta)$  o raio de curvatura principal ( $\varphi = \text{constante}$ ) e  $R_2 = R_2(\theta)$  o raio de curvatura transversal, a partir da Fig.(4.4.2), obtêm-se:

$$\begin{aligned} R_o &= R_2 \sin \theta \\ \frac{dR_o}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}(R_2 \sin \theta) = R_1 \cos \theta \end{aligned} \tag{4.4.2a,b}$$

onde  $R_o = R_o(\theta)$  é o raio do círculo latitudinal (paralelo).

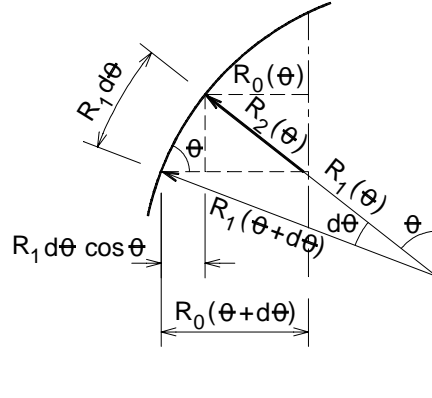


FIGURA 4.4.2: Raios de curvatura de uma superfície de revolução [adaptada de OTTO & TROSTEL(1967)].

Além disso, podem-se escrever:

$$\begin{aligned} dS_\theta &= R_1(\theta)d\theta && \text{(na curva - } \theta \text{)} \\ dS_\varphi &= R_o(\theta)d\varphi = R_2(\theta)\text{sen } \theta d\varphi && \text{(na curva - } \varphi \text{)} \end{aligned} \quad (4.4.3a,b)$$

Como anteriormente exposto,  $dS_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} d\alpha$  e  $dS_\beta = \sqrt{g_{\beta\beta}} d\beta$ . Sendo assim, fazendo  $\alpha = \theta$  e  $\beta = \varphi$ , têm-se:

$$\begin{aligned} R_1(\theta) &= \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \\ R_o(\theta) &= \sqrt{g_{\beta\beta}} = R_2(\theta)\text{sen } \theta \end{aligned} \quad (4.4.4a,b)$$

Com o objetivo de se determinar as componentes dos vetores de rotação no sistema de coordenadas, obtêm-se:

$$\frac{\partial e_\gamma}{\partial S_\alpha} = \frac{\partial e_R}{\partial S_\theta} = \frac{\partial e_R}{R_1 \partial \theta} = \frac{1}{R_1} \{ \cos \theta \cos \varphi; \cos \theta \text{sen } \varphi; -\text{sen } \theta \} \quad (4.4.5a)$$

$$\frac{\partial e_\gamma}{\partial S_\beta} = \frac{\partial e_R}{\partial S_\varphi} = \frac{1}{R_2 \text{sen } \theta} \frac{\partial e_R}{\partial \varphi} = \frac{1}{R_2 \text{sen } \theta} \{ -\text{sen } \theta \text{sen } \varphi; \text{sen } \theta \cos \varphi; 0 \} \quad (4.4.5b)$$

A partir da Eqs.(4.2.23) e (4.2.24), podem-se obter as componentes dos vetores de rotação (sabendo que para  $\sigma_{\alpha\beta} = \pi/2$ ,  $g_{\alpha\beta} = r_\alpha r_\beta = \cos \sigma_{\alpha\beta} = 0$  e  $\text{sen } \sigma_{\alpha\beta} = 1$ ):



$$\omega_{\alpha}^{(\alpha)} = -\omega_{\beta}^{(\beta)} = \omega_{\theta}^{(\theta)} = -\omega_{\varphi}^{(\varphi)} = 0 \quad (4.4.6a)$$

$$\omega_{\beta}^{(\alpha)} = \omega_{\varphi}^{(\theta)} = \frac{1}{R_1} \quad (4.4.6b)$$

$$\omega_{\gamma}^{(\alpha)} = \omega_R^{(\theta)} = 0 \quad (4.4.6c)$$

$$\omega_{\alpha}^{(\beta)} = \omega_{\theta}^{(\varphi)} = -\frac{1}{R_2} \quad (4.4.6d)$$

$$\omega_{\gamma}^{(\beta)} = \omega_R^{(\varphi)} = -\frac{1}{R_2} \cot g\theta \quad (4.4.6e)$$

O vetor dos deslocamentos,  $v$ , e o vetor das ações na superfície da membrana,  $p$ , podem ser representados da seguinte forma:

$$v = v_{\theta} e_{\theta} + v_{\varphi} e_{\varphi} + v_R e_R \quad (4.4.7a)$$

$$p = p_{\theta} e_{\theta} + p_{\varphi} e_{\varphi} + p_R e_R \quad (4.4.7b)$$

#### 4.4.2 Determinação dos Esforços

Tendo em vista as Eqs.(4.4.3-6), as condições de equilíbrio, representadas pelas Eqs.(4.3.5), podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (R_2 \operatorname{sen} \theta T_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (R_1 T_{\theta\varphi}) - R_1 \cos \theta T_{\varphi\varphi} + R_1 R_2 \operatorname{sen} \theta p_{\theta} = 0 \quad (4.4.8a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (R_2 \operatorname{sen} \theta T_{\theta\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (R_1 T_{\varphi\varphi}) + R_1 \cos \theta T_{\theta\theta} + R_1 R_2 \operatorname{sen} \theta p_{\varphi} = 0 \quad (4.4.8b)$$

$$\frac{T_{\theta\theta}}{R_1} + \frac{T_{\varphi\varphi}}{R_2} = p_R \quad (4.4.8c)$$

Para a resolução do sistema de equações anterior, a partir da Eq.(4.4.8c), isola-se  $T_{\varphi\varphi}$ :

$$T_{\varphi\varphi} = \left( p_R - \frac{T_{\theta\theta}}{R_1} \right) R_2 = R_2 p_R - \frac{R_2}{R_1} T_{\theta\theta} \quad (4.4.9a)$$

Introduzindo a Eq.(4.4.9a) nas Eqs.(4.4.8 a-b), obtêm-se:

$$\frac{1}{\text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (R_2 \text{sen}^2 \theta T_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (R_1 T_{\theta\varphi}) = R_1 R_2 (\text{sen } \theta p_\theta - \text{cos } \theta p_R) \quad (4.4.9b)$$

$$\frac{1}{R_2 \text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [(R_2 \text{sen } \theta)^2 T_{\theta\varphi}] - \frac{\partial}{\partial \varphi} (R_2 T_{\theta\theta}) = -R_1 R_2 (\text{sen } \theta p_\varphi + p_R) \quad (4.4.9c)$$

Com as condições de equilíbrio, determinam-se os esforços em membranas simétricas submetidas a ações simétricas através de integração simples.

▪ **Esforços devido às ações simétricas**

Neste caso todas os esforços dependem somente de  $\theta$  e integrando-se as Eqs.(4.4.9b,c), obtêm-se:

$$T_{\theta\theta}(\theta) = \frac{1}{R_2 \text{sen}^2 \theta} \left\{ \int_{\chi=0}^{\theta} R_1(\chi) R_2(\chi) \text{sen } \chi [p_R(\chi) \text{cos } \theta - p_\theta(\chi) \text{sen } \theta] d\chi + C_1 \right\} \quad (4.4.10a)$$

$$T_{\theta\varphi}(\theta) = -\frac{1}{R_2^2 \text{sen}^2 \theta} \left\{ \int_{\chi=0}^{\theta} [p_\varphi(\chi) R_1(\chi) R_2^2(\chi) \text{sen}^2 \theta] d\chi + C_2 \right\} \quad (4.4.10b)$$

As constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$  são obtidas das condições de equilíbrio de forças e momentos sobre o eixo de simetria, em uma seção  $z = \text{constante}$ .

$$C_1 = P_{z0} / 2\pi \quad (4.4.10c)$$

$$C_2 = M_{z0} / 2\pi \quad (4.4.10d)$$

Aqui  $P_{z0}$  e  $M_{z0}$  denota, respectivamente, uma força axial atuando no ápice  $\theta = 0$  e um torque atuando sobre o *eixo* -  $z$ . Tais ações concentradas singulares causam esforços de membrana (esforço na seção) infinitos, e sempre que possível, devem ser evitadas em estruturas de membrana.

O outro esforço na membrana,  $T_{\theta\varphi}$ , é obtido a partir da Eq.(4.4.9a) diretamente.

Consideram-se, a seguir, a ação da pressão interna e a ação do peso próprio, as quais são simétricas.

*Ação da pressão interna,  $p$*

A partir das Eqs.(4.4.10) e (4.4.9a), admitindo  $p_\theta = p_\varphi = 0$  e  $p_R = p$ , obtêm-se:

$$T_{\theta\theta_p}(\theta) = \frac{pR_2}{2} \quad (4.4.11a)$$

$$T_{\theta\varphi_p}(\theta) = 0 \quad (4.4.11b)$$

$$T_{\varphi\varphi_p} = pR_2 \left( 1 - \frac{R_2}{2R_1} \right) \quad (4.4.11c)$$

A partir das Eqs.(4.4.11), conclui-se que, apesar da atuação apenas da pressão interna,  $T_{\varphi\varphi_p} < 0$  é possível. Assim sendo, rugas podem aparecer na direção meridional. As formas possíveis, as quais podem sustentar a pressão interna sem o aparecimento de rugas, devem portanto satisfazer a seguinte inequação:

$$1 - \frac{R_2}{2R_1} > 0 \quad \Rightarrow \quad 2R_1 > R_2 \quad (4.4.12)$$

*Ação do peso-próprio,  $g$*

Sendo  $g$  o peso-próprio por unidade de área da membrana:  $g = \gamma h$ , na qual  $\gamma$  é o peso específico do material da membrana e  $h$  é a espessura da membrana.

Tendo em vista a Fig.(4.4.3), partir das Eqs.(4.4.10) e (4.4.9a), obtêm-se:

$$T_{\theta\theta_g}(\theta) = \frac{-g}{R_2 \sin^2 \theta} \int_{\chi=0}^{\theta} R_1(\chi) R_2(\chi) \sin \chi \, d\chi \quad (4.4.13a)$$

$$T_{\theta\varphi_g}(\theta) = 0 \quad (4.4.13b)$$

$$T_{\varphi\varphi_g}(\theta) = -g R_2 \cos \theta - \frac{R_2}{R_1} T_{\theta\theta_g} \quad (4.4.13c)$$

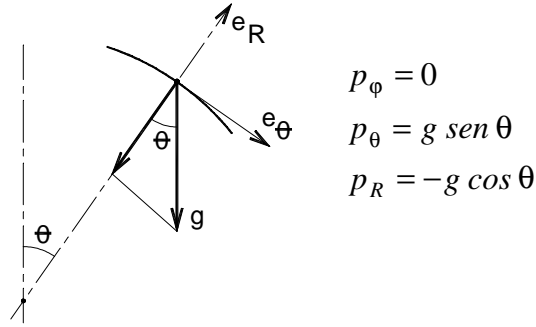


FIGURA 4.4.3: Componentes de  $g$  no sistema no sistema de coordenadas  $(\varphi, \theta, R)$  (OTTO & TROSTEL, 1967).

### 4.4.3 Determinação dos Deslocamentos

Os deslocamentos da membrana são obtidos a partir de suas deformações, levando em consideração as Eqs.(4.4.3-5). Assim sendo, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_R}{R_1} = \frac{T_{\theta\theta}}{E_\theta} - \frac{v_\varphi}{E_\varphi} T_{\varphi\varphi} \quad (4.4.14a)$$

$$\frac{1}{R_2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\cot g \theta}{R_2} v_\theta + \frac{1}{R_2} v_R = \frac{T_{\varphi\varphi}}{E_\varphi} - \frac{v_\theta}{E_\theta} T_{\theta\theta} \quad (4.4.14b)$$

$$\frac{1}{R_2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\cot g \theta}{R_2} v_\varphi = \frac{T_{\theta\varphi}}{E_{\theta\varphi}} \quad (4.4.14c)$$

A partir da Eq.(4.4.14a), obtém-se a equação de  $v_R$  :

$$v_R = R_1 \left( \frac{T_{\theta\theta}}{E_\theta} - \frac{v_\varphi}{E_\varphi} T_{\varphi\varphi} \right) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \quad (4.4.15a)$$

Introduzindo a Eq.(4.4.14a) na Eq.(4.4.14b), obtém-se:

$$\frac{\sin \theta}{R_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\theta}{\sin \theta} \right) - \frac{1}{R_2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{T_{\theta\theta}}{E_\theta} \left( \frac{R_1}{R_2} + v_\theta \right) - \frac{T_{\varphi\varphi}}{E_\varphi} \left( 1 + v_\varphi \frac{R_1}{R_2} \right) \quad (4.4.15b)$$

Desenvolvendo a eq.(4.4.14c), tem-se:

$$\frac{1}{R_2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{R_2}{R_1} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\varphi}{R_2 \operatorname{sen} \theta} \right) = \frac{T_{\theta\varphi}}{E_{\theta\varphi}} \quad (4.4.15c)$$

Os deslocamentos devido às deformações provocadas por carregamentos simétricos são independentes de  $\varphi$ .

▪ *Deslocamentos devido às ações simétricas*

Levando em consideração as Eqs.(4.3.9) e integrando as Eqs.(4.4.15b,c), obtêm-se:

$$\begin{aligned} v_\theta &= \left\{ C + \int \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \left[ \frac{T_{\theta\theta}}{E_\theta} (R_1 - v_\theta R_2) - \frac{T_{\varphi\varphi}}{E_\varphi} (R_2 + v_\varphi R_1) \right] d\theta \right\} \operatorname{sen} \theta \\ &= \operatorname{sen} \theta \left\{ C + \int \frac{R_1 \varepsilon_\theta - R_2 \varepsilon_\varphi}{\operatorname{sen} \theta} d\theta \right\} \end{aligned} \quad (4.4.16a)$$

$$v_\varphi = R_2 \operatorname{sen} \theta \left( D + \int \frac{T_{\varphi\theta}}{E_{\varphi\theta}} \frac{R_1}{\operatorname{sen} \theta R_2} d\theta \right) = R_2 \operatorname{sen} \theta \left( D + \int \frac{R_1 \gamma_{\varphi\theta}}{R_2 \operatorname{sen} \theta} d\theta \right) \quad (4.4.16b)$$

onde  $C$  e  $D$  são ainda constantes a determinar.

Ainda levando em consideração as Eqs.(4.3.9), a partir da Eq.(4.4.15a), obtêm-se:

$$\begin{aligned} v_R &= R_2 \left( \frac{T_{\varphi\varphi}}{E_\varphi} - \frac{v_\theta}{E_\theta} T_{\theta\theta} \right) - \\ &+ \cos \theta \left\{ C + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \int \left[ \frac{T_{\theta\theta}}{E_\theta} (R_1 + v_\theta R_2) - \frac{T_{\varphi\varphi}}{E_\varphi} (R_2 + v_\varphi R_1) \right] d\theta \right\} \\ &= R_2 \varepsilon_\varphi - v_\theta \cot g \theta \end{aligned} \quad (4.4.16c)$$

Para a determinação das constantes  $C$  e  $D$  impõem-se as condições de contorno, Fig.(4.4.4). Assumindo  $v_\varphi(\theta_0) = 0$ , determina-se a constante  $D$  e, então, obtêm-se:

$$v_\varphi(\theta) = -R_2 \operatorname{sen} \theta \int_{\chi=\theta}^{\theta_0} \frac{R_1 \gamma_{\varphi\theta}}{R_2 \operatorname{sen} \chi} d\chi = -R_2 \operatorname{sen} \theta \int_{\chi=\theta}^{\theta_0} \frac{T_{\varphi\theta}}{E_{\varphi\theta}} \frac{R_1}{R_2 \operatorname{sen} \chi} d\chi \quad (4.4.17)$$

As condições de contorno mostradas na Fig.(4.4.4a), no que se referem a  $v_R(\theta_0) = 0$  e  $v_\theta(\theta_0) = 0$ , não podem ser satisfeitas com a teoria linear. Sendo assim, na região do contorno os deslocamentos têm que ser adaptados para satisfazerem às condições de contorno. Assim sendo, Fig.(4.4.4b), se os deslocamentos radiais são permitidos, pode-se determinar a constante  $C$  a partir da condição seguinte

$$v_Z|_{\theta=\theta_0} = [v_R \cos \theta - v_\theta \sin \theta]|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad (4.4.18)$$

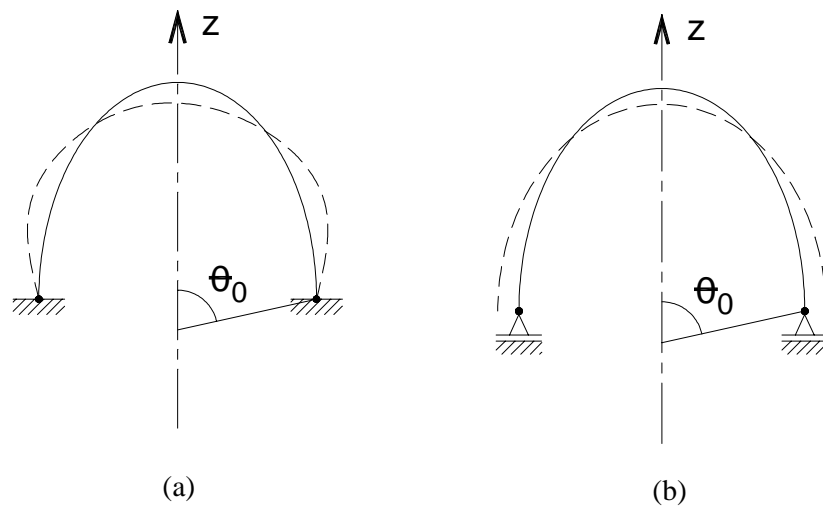


FIGURA 4.4.4: Condições de contorno da membrana (OTTO & TROSTEL, 1967).

Introduzindo a Eq.(4.4.18) nas Eqs.(4.4.15a,c), obtêm-se

$$C = R_2(\theta_0) \cos \theta_0 \left[ \frac{T_{\varphi\varphi}(\theta_0)}{E_\varphi} - \frac{v_\theta}{E_\theta} T_{\theta\theta}(\theta_0) \right] + \left. - \left\{ \int \frac{1}{\sin \theta} \left[ \frac{T_{\theta\theta}}{E_\theta} (R_1 + v_\theta R_2) - \frac{T_{\varphi\varphi}}{E_\varphi} (v_\varphi R_1 + R_2) \right] d\theta \right\} \right|_{\theta=\theta_0} \quad (4.4.19)$$

Introduzindo a Eq.(4.4.19) nas Eqs.(4.4.15a,c), obtêm-se as equações restantes para a definição dos deslocamentos da membrana apresentada na Fig.(4.4.4b):

$$v_\theta = \text{sen } \theta \left\{ R_2(\theta_0) \cos \theta_0 \left[ \frac{T_{\varphi\varphi}(\theta_0)}{E_\varphi} - \frac{v_\theta}{E_\theta} T_{\theta\theta}(\theta_0) \right] + \right. \\ \left. - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\text{sen } \chi} \left[ \frac{T_{\theta\theta}}{E_\theta} (R_1 + v_\theta R_2) - \frac{T_{\varphi\varphi}}{E_\varphi} (v_\varphi R_1 + R_2) \right] d\chi \right\} \quad (4.4.20)$$

$$v_R = R_2(\theta) \left( \frac{T_{\varphi\varphi}(\theta)}{E_\varphi} - \frac{v_\theta}{E_\theta} T_{\theta\theta}(\theta) \right) - v_\theta \cot g \theta \quad (4.4.21)$$

Portanto, os deslocamentos da membrana simétrica, submetida a ações simétricas, com as condições de contorno apresentadas na Fig.(4.4.4b), são definidos através das Eqs.(4.4.17), (4.4.20) e (4.4.21) apresentadas.

### 4.5 Formulação para as Estruturas Pneumáticas Esféricas

Torna-se simples o emprego do processo analítico para a análise do comportamento estático de estruturas pneumáticas esféricas submetidas a ações simétricas, por causa das simplificações possíveis.

Quando  $R_1 = R_2 = R$ , as equações apresentadas no item anterior reduzem às equações das membranas esféricas, Fig.(4.5.1). A seguir apresentam-se as expressões empregadas para a determinação dos esforços e deslocamentos e para a verificação da pressão interna nas membranas solicitadas pelo peso próprio e pela pressão interna.

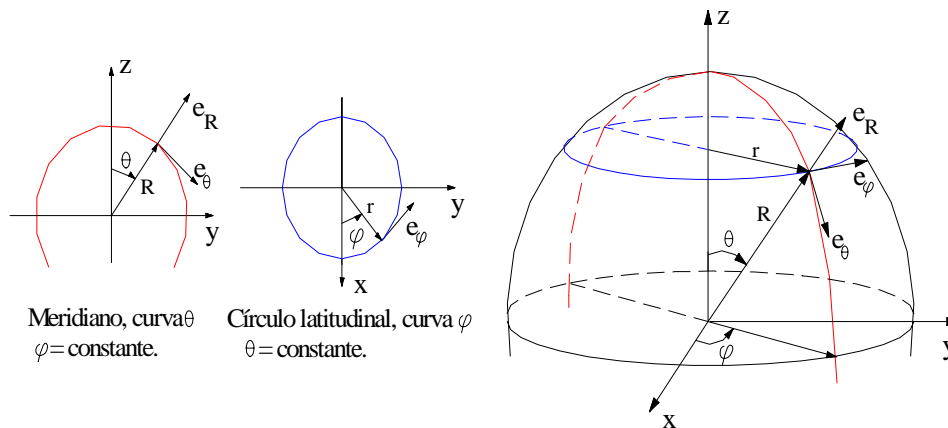


FIGURA 4.5.1: Estrutura pneumática esférica (figura da autora).

### 4.5.1 Determinação dos esforços

- *Ação da pressão interna,  $p$*

Para a ação da pressão interna, podem-se obter as componentes principais do tensor dos esforços a partir da Eq.(4.4.11):

$$T_{\theta p}(\theta) = \frac{pR}{2} \quad (4.5.1a)$$

$$T_{\theta\varphi p}(\theta) = 0 \quad (4.5.1b)$$

$$T_{\varphi p}(\theta) = \frac{pR}{2} \quad (4.5.1c)$$

As Eqs.(4.5.1) mostram que, para uma mesma pressão interna, os esforços na membrana dependem apenas do raio da superfície, sendo proporcionais a este. Assim sendo, para a cobertura de uma mesma área e adotando-se uma mesma pressão interna, pode-se usar: (a) ou uma superfície esférica com raio menor, cujos esforços originados pela pressão interna são menores, mas com maior incidência de ventos e com maior gasto de material de membrana, (b) ou uma superfície esférica com raio maior, cujos esforços originados pela pressão interna serão maiores, mas com incidência de vento menor e menor gasto de material da membrana.

- *Ação do peso próprio,  $g$*

Para a ação do peso próprio, podem-se obter as componentes principais dos esforços a partir das Eqs.(4.4.13):

$$T_{\theta g}(\theta) = -\frac{gR}{2\cos^2\theta/2} = gRa_g(\theta) \quad (4.5.2a)$$

$$T_{\varphi g}(\theta) = gR\left(\frac{1}{2\cos^2\theta/2} - \cos\theta\right) = gRc_g(\theta) \quad (4.5.2b)$$

$$T_{\theta\varphi g}(\theta) = 0 \quad (4.5.2c)$$



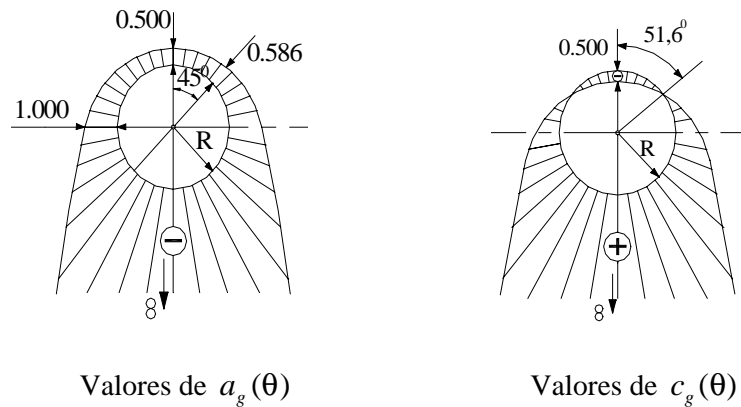


FIGURA 4.5.2: Ilustração dos valores dos coeficientes  $a_g(\theta)$  e  $c_g(\theta)$  [adaptada de OTTO&TROSTEL(1967)].

▪ **Esforços Totais devido a  $(p + g)$**

Portanto, para a ação conjunta da pressão interna e do peso próprio, a partir das Eqs.(4.5.1) e (4.5.2), podem-se escrever as componentes principais dos esforços totais:

$$T_{\theta pg}(\theta) = \frac{pR}{2} - \frac{gR}{2 \cos^2 \theta/2} = \frac{pR}{2} + g R a_g(\theta) \tag{4.5.3a}$$

$$T_{\varphi pg}(\theta) = \frac{pR}{2} + gR \left( \frac{1}{2 \cos^2 \theta/2} - \cos \theta \right) = \frac{pR}{2} + g R c_g(\theta) \tag{4.5.3b}$$

**4.5.2 Determinação dos Deslocamentos**

Para carregamentos simétricos, podem-se obter as equações dos deslocamentos da membrana esférica a partir das Eqs.(4.4.17), (4.4.20), (4.4.21):

$$v_{\theta}(\theta) = R \operatorname{sen} \theta \left\{ \cos \theta_o \left[ \frac{1}{E_{\varphi}} T_{\varphi}(\theta_o) - \frac{\nu_{\theta}}{E_{\theta}} T_{\theta}(\theta_o) \right] + \right. \\ \left. - \int_{\theta}^{\theta_o} \frac{1}{\operatorname{sen} \chi} \left[ \frac{(1 + \nu_{\theta})}{E_{\theta}} T_{\theta}(\chi) - \frac{(1 + \nu_{\varphi})}{E_{\varphi}} T_{\varphi}(\chi) \right] d\chi \right\} \tag{4.5.4a}$$

$$v_R(\theta) = R \left( \frac{1}{E_{\varphi}} T_{\varphi}(\theta) - \frac{\nu_{\theta}}{E_{\theta}} T_{\theta}(\theta) \right) - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} v_{\theta}(\theta) \tag{4.5.4a}$$

onde  $\chi$  é uma variável auxiliar,  $v_{\theta}(\theta)$  são os deslocamentos tangenciais aos meridianos e  $v_R(\theta)$  são os deslocamentos radiais.

Cabe ressaltar que os deslocamentos tangenciais aos paralelos,  $v_{\varphi}(\theta)$ , são nulos e que as Eqs.(4.5.4) satisfazem a condição de deslocamentos verticais nulos no contorno.

A partir das equações anteriores, obtêm-se os deslocamentos da membrana oriundos da atuação da pressão interna e do peso próprio.

▪ *Deslocamentos devido à pressão interna,  $p$*

$$v_{\theta p}(\theta) = R \operatorname{sen} \theta \left\{ \cos \theta_o \left[ \frac{1}{E_{\varphi}} T_{\varphi p}(\theta_o) - \frac{v_{\theta}}{E_{\theta}} T_{\theta p}(\theta_o) \right] + \right. \\ \left. - \left[ \frac{(1+v_{\theta})}{E_{\theta}} T_{\theta p}(\chi) - \frac{(1+v_{\varphi})}{E_{\varphi}} T_{\varphi p}(\chi) \right] \left[ \ln \operatorname{tag} \frac{\theta_o}{2} - \ln \operatorname{tag} \frac{\theta}{2} \right] \right\} \quad (4.5.5a)$$

$$v_{R p}(\theta) = R \left( \frac{1}{E_{\varphi}} T_{\varphi p}(\theta) - \frac{v_{\theta}}{E_{\theta}} T_{\theta p}(\theta) \right) - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} v_{\theta p}(\theta) \quad (4.5.5b)$$

$$v_{\varphi p}(\theta) = 0 \quad (4.5.5c)$$

- **Deslocamentos devido ao peso próprio,  $g$**

$$\begin{aligned}
 v_{\theta_g}(\theta) = R \operatorname{sen} \theta & \left\{ \cos \theta_o \left[ \frac{1}{E_\varphi} T_{\varphi_g}(\theta_o) - \frac{\nu_\theta}{E_\theta} T_{\theta_g}(\theta_o) \right] + \right. \\
 & + \frac{gR(1+\nu_\theta)}{4E_\theta} \left[ \frac{1+2\ln\left(\operatorname{tg} \frac{\theta_o}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta_o}{2}\right)} - \frac{1+2\ln\left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right] + \\
 & + \frac{gR(1+\nu_\varphi)}{4E_\varphi} \left[ \frac{1+2\ln\left(\operatorname{tg} \frac{\theta_o}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta_o}{2}\right)} - \frac{1+2\ln\left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right] + \\
 & \left. + \frac{gR(1+\nu_\varphi)}{E_\varphi} [-\ln(\operatorname{sen} \theta_o) + \ln(\operatorname{sen} \theta)] \right\} \tag{4.5.6a}
 \end{aligned}$$

$$v_{R_g}(\theta) = R \left( \frac{1}{E_\varphi} T_{\varphi_g}(\theta) - \frac{\nu_\theta}{E_\theta} T_{\theta_g}(\theta) \right) - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} v_{\theta_g}(\theta) \tag{4.5.6b}$$

$$v_{\varphi_g}(\theta) = 0 \tag{4.5.6c}$$

### 4.5.3 Verificação da Pressão Interna para a Ação do Peso Próprio

Sendo os carregamentos  $p$  e  $g$  simétricos, os esforços  $T_{\theta\varphi}$  são nulos e os esforços  $T_\theta$  e  $T_\varphi$  são os esforços principais. Então, para que não ocorra compressão na membrana escrevem-se:  $T_\theta \geq 0$  e  $T_\varphi \geq 0$ . Tendo em vista a Fig.(4.5.2) e as expressões dos esforços, pode-se escrever a condição necessária para a pressão interna:

$$p = p_g \geq \frac{g}{\cos^2 \theta_o / 2} \tag{4.5.7}$$

Convém acrescentar que se as tensões meridionais são positivas somente tensões de tração atuam no sistema, pois  $a_g(\theta) \leq c_g(\theta)$ .

## 4.6 Exemplo de Aplicação: Cobertura do Tipo *Air Supported*

A estrutura de membrana a ser estudada é uma cobertura esférica do tipo *air supported*,  $\theta_0 = 90^\circ$  e  $R = 15\text{m}$ , submetida às ações do peso próprio e pressão interna. A Fig.(4.6.1) mostra o esquema da cobertura em estudo, a qual é semelhante à cobertura apresentada na Fig.(2.3.39).

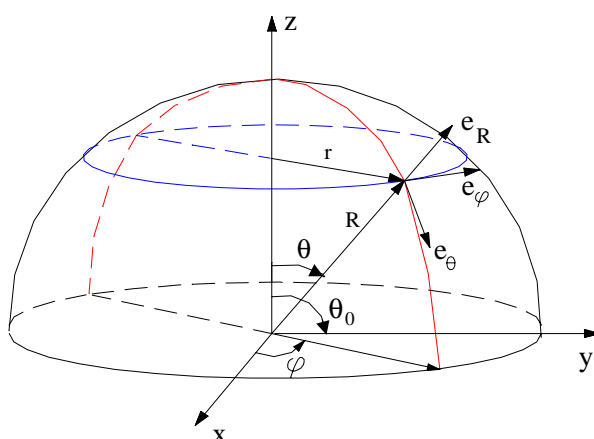


FIGURA 4.6.1: Esquema da cobertura semi-esférica do tipo *air supported* em estudo (figura da autora).

O elemento que vence a área livre coberta é a membrana estrutural. Emprega-se membrana com as seguintes características, Tab.(4.6.1).

TABELA 4.6.1: Características da membrana.

	Símbolo	Valor	Unidade
Módulo de Elasticidade	E	130000	N/m
Coefficiente de <i>Poisson</i>	$\nu$	0.3	-
Peso Específico	$\gamma$	5000	N/m <sup>3</sup>
Espessura	e	0.002	m

### 4.6.1 Definição das Ações

- *Peso próprio*,  $g$

$$g = \gamma e = 5000 * 0.002 = 10 \text{ N/m}^2$$

- **Pressão interna,  $p$**

Empregando a Eq.(4.5.7), obtém-se:

$$p = p_g \geq \frac{g}{\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} = \frac{10}{\cos^2\left(\frac{90^\circ}{2}\right)} = 20 \text{ N/m}^2, \text{ adota-se } p = 20 \text{ N/m}^2.$$

Cabe ressaltar que esta pressão é a suficiente para manter a membrana tracionada quando apenas estiver atuando seu peso próprio.

#### 4.6.2 Cálculo dos Esforços

- **Devido à Pressão Interna,  $p$**

Empregando a Eq.(4.5.1), obtém-se:

$$T_{\theta_p}(\theta) = \frac{pR}{2} = \frac{20 * 15}{2} = 150 \text{ N/m}$$

$$T_{\varphi_p}(\theta) = \frac{pR}{2} = \frac{20 * 15}{2} = 150 \text{ N/m}$$

- **Devido ao Peso Próprio,  $g$**

Empregando a Eq.(4.5.2a), tem-se:

$$T_{\theta_g}(\theta) = -\frac{gR}{2 \cos^2 \theta/2} = g R a_g(\theta) = 10 * 15 * a_g(\theta) = 150 * a_g(\theta),$$

onde:  $a_g(\theta) = -\frac{1}{2 \cos^2 \theta/2}.$

Portanto, com a variação de  $\theta$ , calculam-se os seguintes valores de  $a_g(\theta)$  e de  $T_{\theta_g}(\theta)$ .

TABELA 4.6.2: Valores de  $a_g(\theta)$  e de  $T_{\theta_g}(\theta)$ .

$\theta$	$a_g(\theta)$	$T_{\theta_g}(\theta) [N/m]$
0°	-0,500	-75,0
18°	-0,513	-76,9
36°	-0,553	-82,9
54°	-0,630	-94,5
72°	-0,764	-114,6
90°	-1,000	-150,0

Empregando a Eq.(4.5.2b), tem-se:

$$T_{\varphi_g}(\theta) = gR \left( \frac{1}{2\cos^2 \theta/2} - \cos \theta \right) = gR c_g(\theta) = 10 * 15 * c_g(\theta) = 150 * c_g(\theta),$$

$$\text{onde: } c_g(\theta) = \frac{1}{2\cos^2 \theta/2} - \cos \theta$$

Portanto, com a variação de  $\theta$ , calculam-se os seguintes valores de  $c_g(\theta)$  e de  $T_{\varphi_g}(\theta)$ .

TABELA 4.6.3: Valores de  $c_g(\theta)$  e de  $T_{\varphi_g}(\theta)$ .

$\theta$	$c_g(\theta)$	$T_{\varphi_g}(\theta) [N/m]$
0°	-0,500	-75,0
18°	-0,439	-65,8
36°	-0,256	-38,4
54°	0,042	6,3
72°	0,455	68,2
90°	1,000	150,0

▪ ***Esforços Totais, devido à pressão interna e ao peso próprio***

Portanto, com a variação de  $\theta$ , obtêm-se os seguintes esforços totais na membrana, Tab. (4.6.4).

TABELA 4.6.4: Valores de  $T_{\theta_{pg}}$  e  $T_{\varphi_{pg}}$ .

$\theta$	$T_{\theta_{pg}}(\theta) [N/m]$	$T_{\varphi_{pg}}(\theta) [N/m]$
0°	75,0	75,0
18°	73,1	84,2
36°	67,1	111,6
54°	55,5	156,3
72°	35,4	218,2
90°	0,0	300,0

Os resultados apresentados são ilustrados com o gráfico, Fig.(4.6.3).

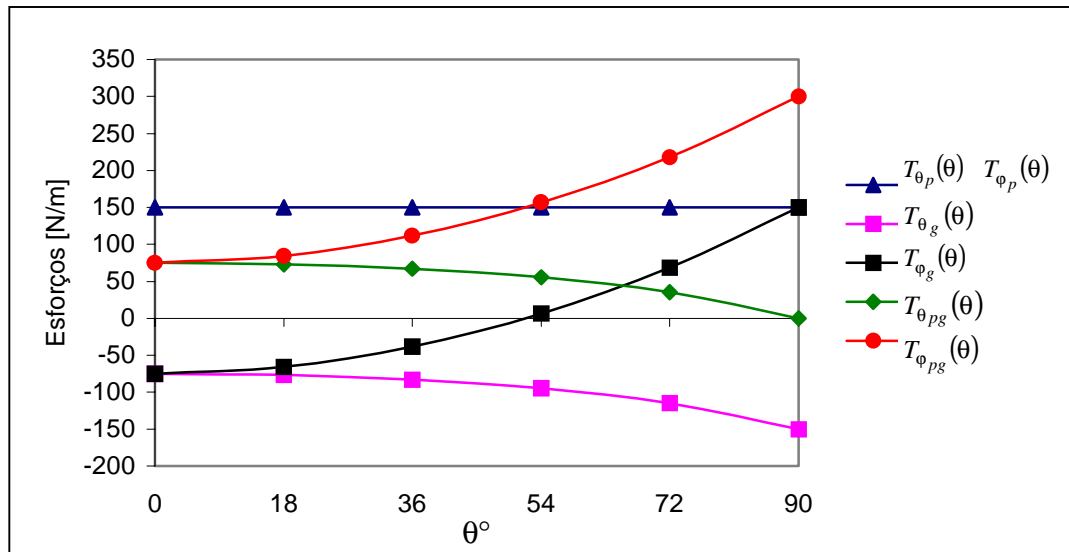


FIGURA 4.6.3: Esforços na membrana em função de  $\theta$ .

### 4.6.3 Cálculo dos Deslocamentos

- *Devido à Pressão Interna, p*

Empregando as eqs.(4.5.5), obtêm-se

$$\begin{aligned}
 v_{\theta_p}(\theta) &= R \operatorname{sen} \theta \left\{ \cos \theta_o \left[ \frac{1}{E_\phi} T_{\phi_p}(\theta_o) - \frac{\nu_\theta}{E_\theta} T_{\theta_p}(\theta_o) \right] + \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \frac{(1+\nu_\theta)}{E_\theta} T_{\theta_p}(\theta) - \frac{(1+\nu_\phi)}{E_\phi} T_{\phi_p}(\theta) \right] \left[ \ln \operatorname{tag} \frac{\theta_o}{2} - \ln \operatorname{tag} \frac{\theta}{2} \right] \right\} \\
 &= 15 * \operatorname{sen} \theta \left\{ \cos 90^\circ \left[ \frac{1}{130000} * 150 - \frac{0.3}{130000} * 150 \right] + \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \frac{(1+0.3)}{130000} * 150 - \frac{(1+0.3)}{130000} * 150 \right] \left[ \ln \operatorname{tag} \frac{90^\circ}{2} - \ln \operatorname{tag} \frac{\theta}{2} \right] \right\} = 0 \\
 v_{R_p}(\theta) &= R \left( \frac{1}{E_\phi} T_{\phi_p}(\theta) - \frac{\nu_\theta}{E_\theta} T_{\theta_p}(\theta) \right) - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} v_{\theta_p}(\theta) \\
 &= 15 * \left( \frac{1}{130000} * 150 - \frac{0.3}{130000} * 150 \right) - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} * 0 = 0.0121 \text{ m} \\
 v_{\phi_p}(\theta) &= 0
 \end{aligned}$$

Portanto,  $v_{\theta_p}(\theta)$  e  $v_{\varphi_p}(\theta) = 0$  são nulos e  $v_{R_p}(\theta)$  são iguais a 1,21 cm para qualquer  $\theta$ .

▪ **Devido ao Peso Próprio, g**

Empregando as Eqs.(4.5.6), obtêm-se

$$\begin{aligned}
 v_{\theta_g}(\theta) &= R \operatorname{sen} \theta \left\{ \cos \theta_o \left[ \frac{1}{E_\varphi} T_{\varphi_g}(\theta_o) - \frac{v_\theta}{E_\theta} T_{\theta_g}(\theta_o) \right] + \right. \\
 &+ \frac{gR(1+v_\theta)}{4E_\theta} \left[ \frac{1+2\ln\left(\operatorname{tg} \frac{\theta_o}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta_o}{2}\right)} - \frac{1+2\ln\left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right] + \\
 &+ \frac{gR(1+v_\varphi)}{4E_\varphi} \left[ \frac{1+2\ln\left(\operatorname{tg} \frac{\theta_o}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta_o}{2}\right)} - \frac{1+2\ln\left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right] + \\
 &+ \left. \frac{gR(1+v_\varphi)}{E_\varphi} [-\ln(\operatorname{sen} \theta_o) + \ln(\operatorname{sen} \theta)] \right\} \\
 &= 15 * \operatorname{sen} \theta * \left\{ \cos 90^\circ * \left[ \frac{1}{130000} * 150.0 - \frac{0.3}{130000} * 150.0 \right] + \right. \\
 &+ \frac{10 * 15(1+0.3)}{4 * 130000} * \left[ \frac{1+2\ln\left(\operatorname{tg} \frac{90^\circ}{2}\right) \cos^2\left(\frac{90^\circ}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{90^\circ}{2}\right)} - \frac{1+2\ln\left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right] + \\
 &+ \frac{10 * 15(1+0.3)}{4 * 130000} * \left[ \frac{1+2\ln\left(\operatorname{tg} \frac{90^\circ}{2}\right) \cos^2\left(\frac{90^\circ}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{90^\circ}{2}\right)} - \frac{1+2\ln\left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right] + \\
 &+ \left. \frac{10 * 15(1+0.3)}{130000} * [-\ln(\operatorname{sen} 90^\circ) + \ln(\operatorname{sen} \theta)] \right\}
 \end{aligned}$$



$$v_{R_g}(\theta) = 15 * \left( \frac{1}{130000} * T_{\varphi_g}(\theta) - \frac{0.3}{130000} * T_{\theta_g}(\theta) \right) - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} * v_{\theta_g}(\theta)$$

$$v_{\varphi_g}(\theta) = 0$$

Portanto,  $v_{\varphi_g}(\theta) = 0$  são nulos e com a variação de  $\theta$ , calculam-se os seguintes valores de  $v_{\theta_g}(\theta)$  e de  $v_{R_g}(\theta)$ .

TABELA 4.6.5: Valores de  $v_{\theta_g}(\theta)$  e  $v_{R_g}(\theta)$ .

$\theta^\circ$	$v_{\theta_g}(\theta)$ [m]	$v_{R_g}(\theta)$ [m]
0°	0,000	-0,033
18°	0,008	-0,030
36°	0,014	-0,021
54°	0,015	-0,007
72°	0,011	0,008
90°	0,000	0,023

▪ **Deslocamentos Totais devido à pressão interna e ao peso próprio**

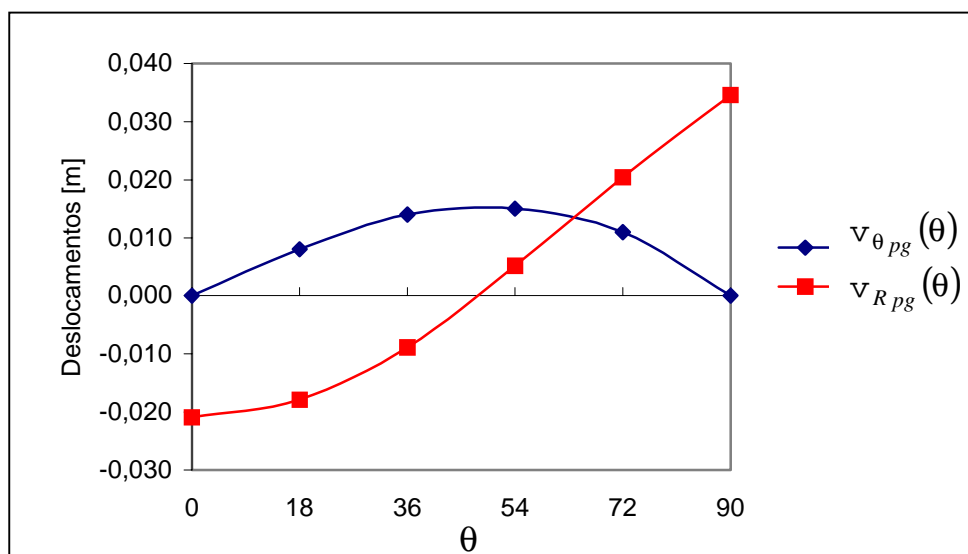
Portanto, com a variação de  $\theta$ , obtêm-se os seguintes deslocamentos totais na membrana, Tab.(4.6.6).

TABELA 4.6.6: Valores de  $v_{\theta_{pg}}(\theta)$ ,  $v_{R_{pg}}(\theta)$  e  $v_{\varphi_{pg}}(\theta)$ .

$\theta$	$v_{\theta_{pg}}(\theta)$ [m]	$v_{R_{pg}}(\theta)$ [m]	$v_{\varphi_{pg}}(\theta)$ [m]
0°	0,000	-0,021	0,000
18°	0,008	-0,018	0,000
36°	0,014	-0,009	0,000
54°	0,015	0,005	0,000
72°	0,011	0,020	0,000
90°	0,000	0,035	0,000

Pode-se observar que no apoio,  $\theta = 90^\circ$ , o deslocamento radial não é impedido,  $v_{R_{pg}}(90^\circ) = 0,035$  m, Tab.(4.6.6), conforme indicado na Fig.(4.4.4).

O gráfico seguinte mostra os deslocamentos totais na membrana, Fig.(4.6.4).

FIGURA 4.6.4: Deslocamentos Totais em função de  $\theta$ .

## 4.7 Considerações Finais

Apresentaram-se aspectos sobre o comportamento das estruturas de membrana com o emprego do processo analítico através da abordagem de OTTO & TROSTEL (1967).

A aplicação desse processo é bastante trabalhosa, mesmo na análise linear de membranas com formas simples e submetidas a carregamentos simples. Entretanto, o seu estudo e a sua aplicação, além de auxiliarem na fase de anteprojeto, colaboram para o entendimento do comportamento das estruturas de membrana.

Como exemplo de aplicação, apresentou-se o caso de uma estrutura pneumática com superfície semi-esférica submetida à ação do peso próprio e da pressão interna. Cabe ressaltar que o equilíbrio da estrutura é considerado na posição inicial previamente definida.

Assim sendo, para a comparação dos resultados obtidos com a formulação apresentada, faz-se a análise estrutural da referida cobertura com o emprego do ANSYS 5.4, elemento finito do tipo *shell 63* e análise não-linear geométrica. A Fig.(4.7.1) mostra a definição da forma inicial da membrana (semi-esférica), das restrições do contorno e das ações. As Figs.(4.7.2-4) apresentam os valores dos esforços e dos deslocamentos da membrana, os quais são obtidos da análise não-linear direta da estrutura submetida às restrições do contorno, à ação da pressão interna e à ação do peso próprio.

A observação dos resultados obtidos com as duas análises, permite concluir que, para este exemplo, a teoria apresentada possibilita o cálculo do máximo esforço de tração na

membrana, o qual vale 300 N/m, conforme apresentado na Tab.(4.6.4) e na Fig(4.7.2). É importante acrescentar que a estrutura está submetida a pequenos deslocamentos para o carregamento considerado: peso próprio da membrana e pressão interna, esta calculada a partir da verificação da pressão interna para a ação apenas do peso próprio (item. 4.6.1).

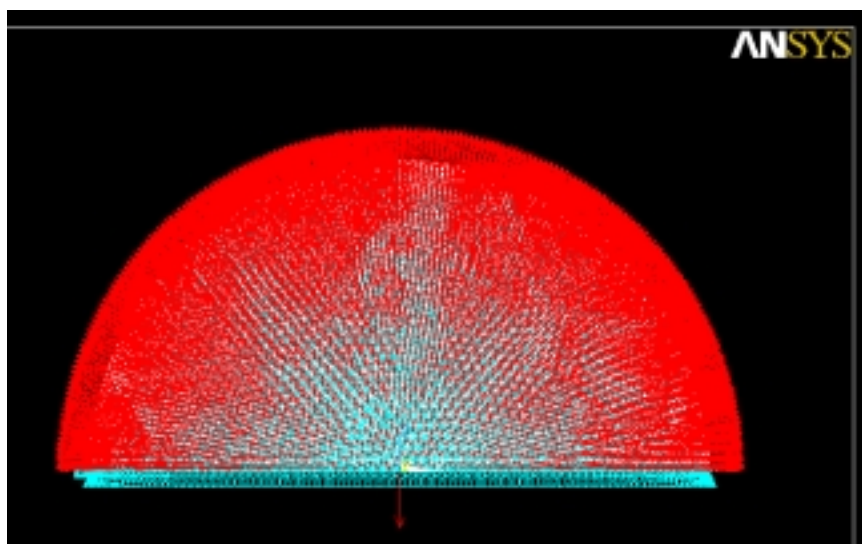


FIGURA 4.7.1: Definição do modelo estrutural.

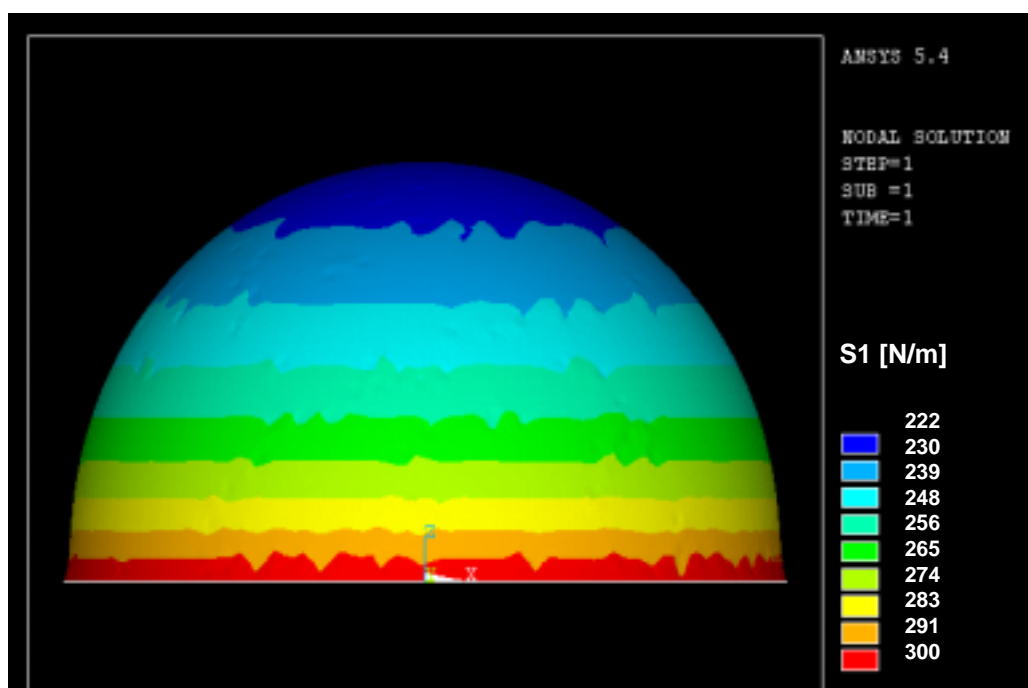


FIGURA 4.7.2: Esforços de membrana na direção principal 1, S1, devido à ação da pressão interna e do peso-próprio.

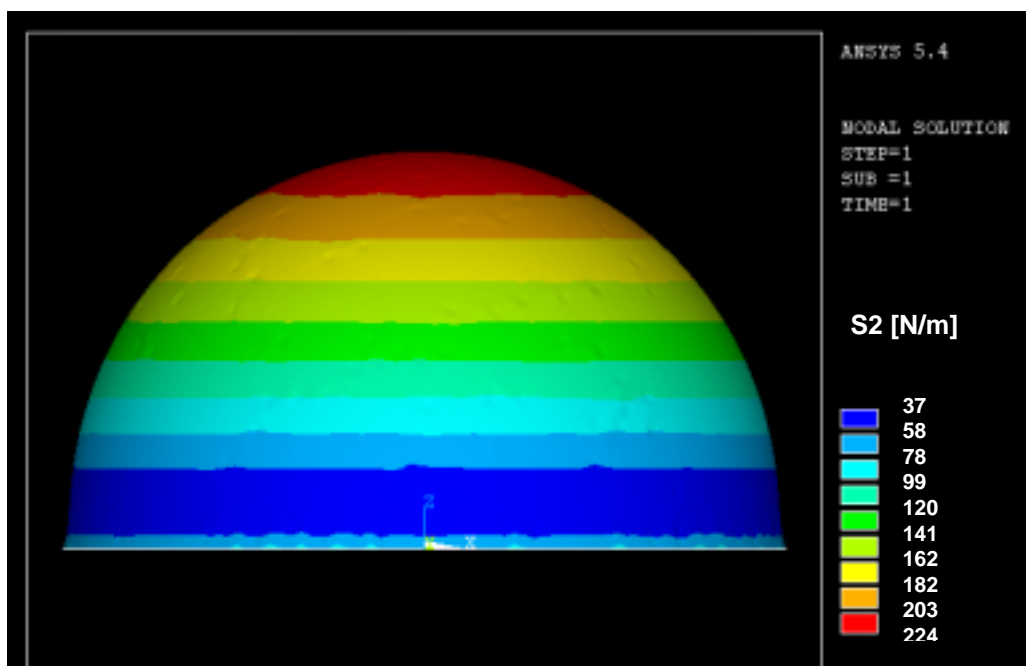


FIGURA 4.7.3: Esforços de membrana na direção principal 2, S2, devido à ação da pressão interna e do peso-próprio.

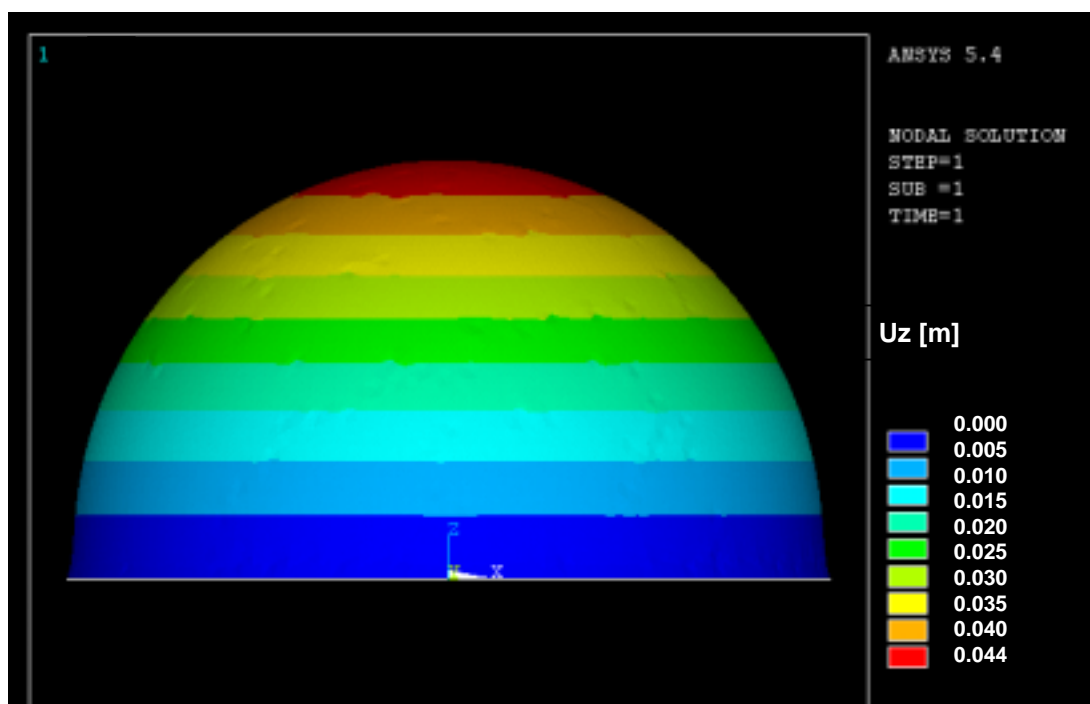


FIGURA 4.7.4: Deslocamentos verticais da membrana, Uz, devido à ação da pressão interna e do peso-próprio.

---

## CAPÍTULO 5

# ANÁLISE ESTRUTURAL: MÉTODOS NUMÉRICOS

### 5.1 Considerações Iniciais

Atualmente as pesquisas sobre a análise de estruturas de membrana estão voltadas principalmente aos métodos numéricos. Como anteriormente comentado, estas pesquisas estão basicamente divididas em três grupos: o primeiro grupo emprega o Método da Densidade de Força (MAURIN & MOTRO, 1998), o segundo grupo emprega o Método da Relaxação Dinâmica (BARNES, 1994) e o terceiro grupo emprega o Método da Análise Não-linear Direta (TABARROK & QIN, 1992). Estes métodos são abordados a seguir.

### 5.2 Método da Densidade de Força

O Método da Densidade de Força consiste do cálculo da posição de equilíbrio de um sistema estrutural submetido a estado de tensão (de tração) previamente definido.

Este método foi desenvolvido com o intuito de proporcionar ao usuário uma ferramenta simples, eficiente e segura para a resolução do problema da determinação da configuração inicial de equilíbrio de estruturas de membrana (MAURIN & MOTRO, 1998). Neste sentido, SCHEK (1973) desenvolveu uma forma de encontrar o equilíbrio da membrana modelando-a como uma rede de cabos.

A principal característica do método proposto por H. J. Schek (*Force density method*, FDM) encontra-se na prescrição de um Coeficiente de Densidade de Força, uma razão entre força por comprimento de cabo, para cada elemento de cabo. A forma que satisfaz ao equilíbrio da rede de cabo, de acordo com os coeficientes especificados, é então

rapidamente calculada e deve ser considerada como equivalente à forma de uma membrana equilibrada (MAURIN & MOTRO,1998).

### 5.2.1 Coeficiente de Densidade de Força Proposto por MAURIN & MOTRO (1998)

As componentes do tensor de tensões de Cauchy relativas a um sistema de coordenadas locais  $(\bar{x}, \bar{y})$  de um elemento finito de superfície podem ser escritas em função das suas componentes normais ( $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ ) e da sua componente tangencial ( $\sigma_{xy}$ ).

Um tensor de tensões isotrópico pode ser usado na obtenção da forma da membrana sem tensões de compressão e sem tensões cisalhantes. Isto é caracterizado por  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_o \geq 0$  e  $\sigma_{xy} = 0$ . Este tensor de tensões  $\{\sigma_o\}$  deve ser escrito em qualquer sistema de coordenadas cartesianas no plano definido pelos vetores locais  $(\bar{x}, \bar{y})$ ; o termo isotrópico é de fato aplicado ao caso bidimensional com  $\mathbf{s}_z = 0$ . Esse tensor de tensões reúne requisitos arquitetônicos por assegurar que áreas comprimidas não ocorram. Todos os elementos estarão submetidos a este tensor de tensões isotrópico durante o processo de determinação da forma.

Assim sendo, pode-se escrever para cada elemento a seguinte expressão

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_o \\ \sigma_o \\ 0 \end{Bmatrix} = \{\sigma_o\} \quad (5.2.1)$$

Para um elemento finito triangular na configuração de equilíbrio, a resultante das forças nodais pode ser relacionada a um tensor de tensões de Cauchy. Neste elemento triangular de membrana, Fig. (5.2.1), o equilíbrio pode ser assegurado por três forças nodais, nas quais as direções são ortogonais ao lado oposto e a relação entre  $T_i$  e  $\mathbf{s}_o$  é dada por

$$T_i = -\frac{1}{2} L_i t \sigma_o \quad (5.2.2)$$

onde  $t$  é a espessura da membrana.

O equilíbrio global da membrana é equivalente ao equilíbrio de todos os nós e pode ser escrito no sistema de coordenadas globais da estrutura ( $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ ).

Assim sendo, tendo em vista a Fig.(5.2.2), a força exercida pelo elemento de membrana no nó  $C$  pode ser escrita por:

$$\vec{T}_c = T_c \vec{n} = \frac{1}{2} L t \mathbf{S}_o \vec{n} \tag{5.2.3}$$

onde  $\vec{n}$  é um versor ortogonal ao lado oposto do nó em questão.

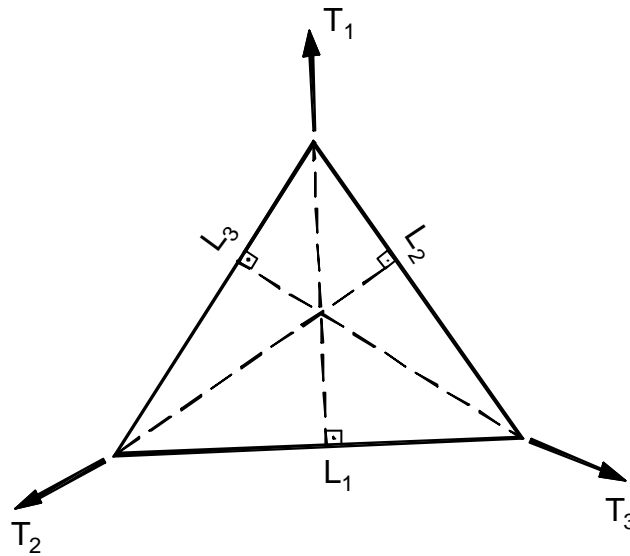


FIGURA 5.2.1: Forças nodais (MAURIN & MOTRO, 1998).

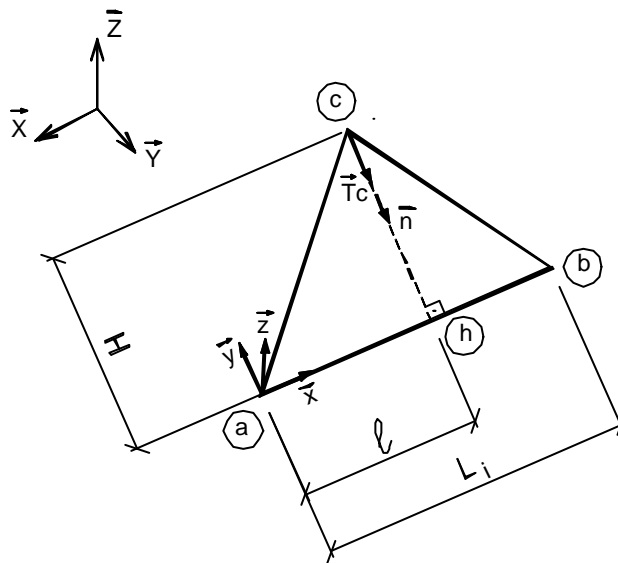


FIGURA 5.2.2: Força interna no nó C (MAURIN & MOTRO, 1998).

As coordenadas do ponto  $h$  são dadas por:

$$X_h = X_a + \frac{\ell}{L}(X_b + X_a) \quad (5.2.4a)$$

$$Y_h = Y_a + \frac{\ell}{L}(Y_b + Y_a) \quad (5.2.4b)$$

$$Z_h = Z_a + \frac{\ell}{L}(Z_b + Z_a) \quad (5.2.4c)$$

onde

$$L = |\vec{ab}| \quad (5.2.5a)$$

$$\ell = \frac{\vec{ab}}{L} \cdot \vec{ac} \quad (5.2.5b)$$

A distância entre o nó  $C$  e o ponto  $h$  é

$$H = \sqrt{(\vec{ac})^2 - \ell^2} \quad (4.3.6a)$$

e o versor  $\vec{n}$  pode ser escrito da seguinte forma

$$\vec{n} = \frac{c\vec{h}}{H} \quad (5.2.6b)$$

Então:

$$\vec{T}_c = \frac{1}{2}Lt\sigma_o\vec{n} = \frac{1}{2}Lt\sigma_o\frac{c\vec{h}}{H} \quad (5.2.6c)$$

portanto, para o elemento de área  $A$ , obtém-se:

$$\vec{T}_c = \left(\frac{\sigma_o}{A}\right)L^2\left(\frac{t}{4}\right)c\vec{h} \quad (5.2.6d)$$

O fator constante  $(t/4)$  é incluído na evolução de  $\sigma_o$  e pode ser então removido da equação anterior, como da seguinte forma:



$$\vec{T}_c = \frac{\mathbf{s}_o}{A} L^2 c\vec{h} \tag{5.2.7}$$

O termo  $\sigma_o/A$  proposto por MAURIN & MOTRO (1998), denominado coeficiente de densidade de força, é a razão entre a intensidade da tensão isotrópica e a área do elemento. Esta razão é similar à razão força/comprimento prescrita para cada elemento de cabo proposta por SCHEK (1973).

### 5.2.2 Equilíbrio Nodal segundo MAURIN & MOTRO (1998)

Considerando  $n$  elementos triangulares adjacentes no nó  $C$ , a força interna total expressa no sistema de coordenadas globais, Fig. (5.2.3), pode ser expressa da seguinte forma

$$\vec{F}_c = \sum_{i=1}^n \vec{T}_{ci} = \sum_{i=1}^n Q_{si} L^2 c\vec{h}_i \tag{5.2.8a}$$

onde

$$Q_{si} = \mathbf{s}_{oi} / A_i \tag{5.2.8b}$$

é especificado pelo projetista para cada elemento.

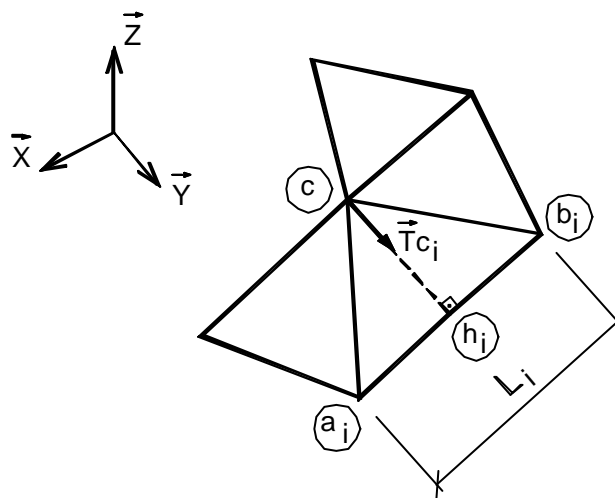


FIGURA 5.2.3: Equilíbrio do nó C (MAURIN & MOTRO, 1998).

Fazendo

$$N_x = \sum_{i=1}^n Q_{si} L_i^2 X_{hi} \quad (5.2.9a)$$

$$N_y = \sum_{i=1}^n Q_{si} L_i^2 Y_{hi} \quad (5.2.9b)$$

$$N_z = \sum_{i=1}^n Q_{si} L_i^2 Z_{hi} \quad (5.2.9c)$$

$$D = \sum_{i=1}^n Q_{si} L_i^2 \quad (5.2.9d)$$

obtêm-se as componentes de  $\vec{F}_c$ :

$$F_{cx} = N_x - DX_c \quad (5.2.10a)$$

$$F_{cy} = N_y - DY_c \quad (5.2.10b)$$

$$F_{cz} = N_z - DZ_c \quad (5.2.10c)$$

onde  $X_c$ ,  $Y_c$  e  $Z_c$  são as coordenadas do nó  $C$  no sistema global de coordenadas.

### 5.2.3 Equilíbrio Global da Membrana segundo MAURIN & MOTRO (1998)

A configuração de equilíbrio da membrana resulta do seguinte procedimento iterativo. A equação de equilíbrio estático ( $\vec{F}_c = 0$ ) para cada nó e equivalente a:

$$F_{cx} = F_{cy} = F_{cz} = 0 \quad (5.2.11)$$

e leva a uma nova posição do nó  $C$ , definida por:

$$X_c = \frac{N_x}{D} \quad (5.2.12a)$$

$$Y_c = \frac{N_y}{D} \quad (5.2.12b)$$

$$Z_c = \frac{N_z}{D} \quad (5.2.12c)$$

Pode-se então avaliar o vetor de força residual nesta nova posição com as Eqs.(5.2.12), onde os comprimentos  $L_i$  e também  $D$  permanecem constantes. Os termos

$X_{hi}$ ,  $Y_{hi}$  e  $Z_{hi}$  são modificados, assim como  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_z$ . As componentes da força residual são comparadas com um valor prescrito, se necessário, outras iterações são realizadas usando o mesmo procedimento. Este método converge a uma posição de equilíbrio para o nó  $C$  quando a força interna  $\vec{F}_c$  for considerada igual a zero. O equilíbrio da membrana é alcançado quando todos os nós estiverem em equilíbrio.

### 5.2.4 Convergência do Método segundo MAURIN & MOTRO (1998)

Na iteração  $(t + 1)$ , pode-se escrever

$$X_{c,t+1} = \frac{N_{x,t}}{D} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_{si} L_i^2 X_{hi,t}}{\sum_{i=1}^n Q_{si} L_i^2} \quad (5.2.13)$$

onde

$$X_{hi,t} = X_{ai} + \frac{l_{i,t}}{L_i} (X_{bi} - X_{ai}) = X_{ai} + \left[ (a_i \vec{b}_i \cdot a_i \vec{c}_i) \frac{(X_{bi} - X_{ai})}{L_i^2} \right] \quad (5.2.14)$$

Denominando

$$q_i = \frac{Q_{si}}{\sum_{i=1}^n Q_{si} L_i^2} \quad (5.2.15)$$

a Eq.(5.2.13) torna-se

$$X_{c,t+1} = A_{xx} X_{c,t} + A_{xy} Y_{c,t} + A_{xz} Z_{c,t} + B_x \quad (5.2.16)$$

onde

$$B_x = \sum_{i=1}^n q_i [(Y_{a_i} - Y_{b_i})(X_{b_i} Y_{a_i} - X_{a_i} Y_{b_i}) + (Z_{a_i} - Z_{b_i})(X_{b_i} Z_{a_i} - X_{a_i} Z_{b_i})] \quad (5.2.17a)$$

$$A_{xx} = \sum_{i=1}^n q_i [(X_{b_i} - X_{a_i})^2] \quad (5.2.17b)$$

$$A_{xy} = \sum_{i=1}^n q_i [(X_{b_i} - X_{a_i})(Y_{b_i} - Y_{a_i})] \quad (5.2.17c)$$

$$A_{xz} = \sum_{i=1}^n q_i [(X_{b_i} - X_{a_i})(Z_{b_i} - Z_{a_i})] \quad (5.2.17d)$$

De forma similar, escrevem-se as coordenadas nas direções Y e Z:

$$B_y = \sum_{i=1}^n q_i \left[ (Y_{a_i} - Y_{b_i}) (X_{a_i} Y_{b_i} - X_{b_i} Y_{a_i}) + (Z_{a_i} - Z_{b_i}) (Y_{b_i} Z_{a_i} - Y_{a_i} Z_{b_i}) \right] \quad (5.2.18a)$$

$$B_z = \sum_{i=1}^n q_i \left[ (X_{a_i} - X_{b_i}) (X_{a_i} Y_{b_i} - X_{b_i} Y_{a_i}) + (Y_{a_i} - Y_{b_i}) (Y_{b_i} Z_{a_i} - Y_{b_i} Z_{a_i}) \right] \quad (5.2.18b)$$

$$A_{yy} = \sum_{i=1}^n q_i \left[ (Y_{b_i} - Y_{a_i})^2 \right] \quad (5.2.18c)$$

$$A_{yz} = \sum_{i=1}^n q_i \left[ (Y_{b_i} - Y_{a_i}) (Z_{b_i} - Z_{a_i}) \right] \quad (5.2.19d)$$

$$A_{yx} = A_{xy} \quad (5.2.20e)$$

$$A_{zx} = A_{xz} \quad (5.2.21f)$$

$$A_{zy} = A_{yz} \quad (5.2.22g)$$

Estas equações podem ser colocadas na forma matricial, em coordenadas globais:

$$\begin{Bmatrix} X_{c,t+1} \\ Y_{c,t+1} \\ Z_{c,t+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{c,t} \\ Y_{c,t} \\ Z_{c,t} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{Bmatrix} \quad (5.2.23a)$$

ou seja,

$$\{X_{c,t+1}\} = [A]\{X_{c,t}\} + [B] \quad (5.2.23b)$$

onde  $[A]$  é uma matriz simétrica (3x3). Sendo  $[A]$  e  $[B]$  ambas dependentes da localização do nó  $C$  e vinculadas, para cada elemento adjacente ao nó  $C$ , pelos seus nós  $(a_i, b_i)$  e o coeficiente  $Q_{si}$  especificado para cada elemento (MAURIN & MOTRO, 1998). Neste trabalho, os autores mostram que  $\{X_{t+1}\} - \{X_t\} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , e que, portanto,  $\{X_t\}$  converge para a posição de equilíbrio do nó  $C$ .

Uma característica importante deste método é que se o projetista somente necessita de um projeto preliminar, o procedimento iterativo pode ser usado até um nível apropriado de

forças desbalanceadas. Esta posição depende somente dos diferentes coeficientes  $Q_{si}$  especificados.

No final do método, a área da superfície pode ser calculada a partir de cada elemento triangular e, conseqüentemente, a intensidade da tensão isotrópica usando a equação seguinte.

$$\mathbf{s}_{oi} = Q_{si} A_i \quad (5.2.24)$$

O mesmo procedimento é aplicado para cada nó livre da estrutura até a forma geométrica alcançar uma forma estável. O critério de convergência é meramente o reflexo de um nível prescrito inicial de forças desbalanceadas, permitindo ao projetista desenvolver uma grande quantidade de formas de superfícies com um mesmo contorno, especificando diferentes conjuntos de coeficientes  $Q_{si}$ .

### 5.2.5 Membrana Reforçadas por Cabos

Os cabos podem estar no contorno ou sobre a membrana. Nestes casos, pode-se empregar para cada elemento de cabo um coeficiente  $Q_l$  definido como a razão entre força/comprimento. A denominação  $Q_l$  ( $l$  para linear) é usada para fazer uma distinção com o coeficiente  $Q_s$ , ( $s$  para superfície, aplicado em um elemento triangular) (MAURIN & MOTRO, 1998).

A Fig.(5.2.4) ilustra uma configuração com  $n$  elementos triangulares de superfície e  $p$  elementos lineares de cabos, os quais são incidentes no nó  $C$ . As forças internas totais aplicadas no ponto  $C$  podem ser escritas da seguinte forma (MAURIN & MOTRO, 1998).

$$\vec{F}_c = \sum_{i=1}^n \vec{T}_{ci} + \sum_{j=1}^p \vec{R}_{cj} = \sum_{i=1}^n Q_{si} L_i^2 c \vec{h}_i + \sum_{j=1}^p Q_{lj} c \vec{d}_j \quad (5.2.25)$$

onde

$$Q_{lj} = \frac{R_{cj}}{L'_j} \quad (5.2.26)$$

sendo que  $Q_{lj}$  é o coeficiente de densidade de força para o elemento de cabo  $j$ .

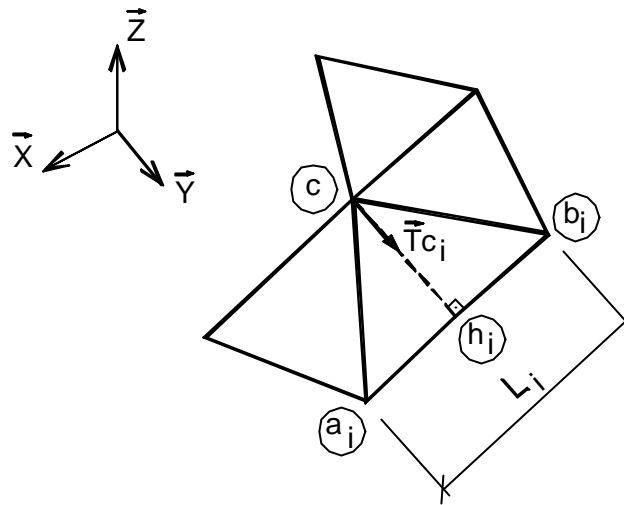


FIGURA 5.2.4: Elementos de membrana com elemento de cabo no contorno (MAURIN & MOTRO, 1998).

A equação de equilíbrio ( $\vec{F}_c = 0$ ), agora possui os seguintes termos dados pelas Eqs.(5.2.12) (MAURIN & MOTRO, 1998).

$$N_x = \sum_{i=1}^n Q_{si} L_i^2 X_{hi} + \sum_{j=1}^p Q_{lj} X_{dj} \quad (5.2.27a)$$

$$N_y = \sum_{i=1}^n Q_{si} L_i^2 Y_{hi} + \sum_{j=1}^p Q_{lj} Y_{dj} \quad (5.2.27b)$$

$$N_z = \sum_{i=1}^n Q_{si} L_i^2 Z_{hi} + \sum_{j=1}^p Q_{lj} Z_{dj} \quad (5.2.27c)$$

$$D = \sum_{i=1}^n Q_{si} L_i^2 + \sum_{j=1}^p Q_{lj} \quad (5.2.27d)$$

Como descrito no item anterior, também aqui, o processo iterativo consiste do cálculo da nova posição de equilíbrio para o nó C com o uso das Eqs.(5.2.12), da determinação do vetor de forças desbalanceadas e assim por diante até o critério de convergência ser respeitado (MAURIN & MOTRO, 1998).

Desta forma a nova posição do nó C em uma iteração (t+1) pode ser escrita da seguinte forma.

$$X_{c,t+1} = \frac{N_{x,t}}{D} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_{si} L_i^2 X_{hi,t} + \sum_{j=1}^p Q_{\ell j} X_{dj,t}}{\sum_{i=1}^n Q_{si} L_i^2 + \sum_{j=1}^p Q_{\ell j}} \quad (5.2.28)$$

Fazendo

$$q_i = \frac{Q_{si}}{\sum_{k=1}^n Q_{sk} L_k^2 + \sum_{k=1}^p Q_{\ell k}} \quad (5.2.29a)$$

$$q'_j = \frac{Q_{\ell j}}{\sum_{k=1}^n Q_{sk} L_k^2 + \sum_{k=1}^p Q_{\ell k}} \quad (5.2.29b)$$

obtem-se:

$$X_{c,t+1} = \sum_{i=1}^n q_i L_i^2 X_{hi,t} + \sum_{j=1}^p q'_j X_{dj,t} \quad (5.2.30)$$

Portanto deve-se acrescentar uma parcela ao termo  $B_x$

$$B_x = \sum_{i=1}^n q_i [(Y_{a_i} - Y_{b_i})(X_{b_i} Y_{a_i} - X_{a_i} Y_{b_i}) + (Z_{a_i} - Z_{b_i})(X_{b_i} Z_{a_i} - X_{a_i} Z_{b_i})] + \sum_{j=1}^p q'_j (X_{d_j}) \quad (5.2.31a)$$

e, analogamente, acrescentam-se aos termos de  $B_y$  e  $B_z$

$$B_y = \sum_{i=1}^n q_i [(Y_{a_i} - Y_{b_i})(X_{a_i} Y_{b_i} - X_{b_i} Y_{a_i}) + (Z_{a_i} - Z_{b_i})(Y_{b_i} Z_{a_i} - Y_{a_i} Z_{b_i})] + \sum_{j=1}^p q'_j (Y_{d_j}) \quad (5.2.31b)$$

$$B_z = \sum_{i=1}^n q_i [(X_{a_i} - X_{b_i})(X_{a_i} Y_{b_i} - X_{b_i} Y_{a_i}) + (Y_{a_i} - Y_{b_i})(Y_{b_i} Z_{a_i} - Y_{b_i} Z_{a_i})] + \sum_{j=1}^p q'_j (Z_{d_j}) \quad (5.2.31c)$$

Na conclusão dos cálculos, obtém-se a tensão isotrópica na membrana com a Eq.(5.2.24) e a tensão no elemento de cabo através da equação seguinte.

$$R_{cj} = Q_j L'_j \quad (5.2.32)$$

### 5.2.6 Estruturas Pneumáticas

Para a definição da forma de estruturas pneumáticas, deve-se incluir na expressão da força total no nó  $C$  a força nodal proveniente da pressão interna, a qual é proporcional às áreas atuais dos elementos adjacentes. Assim, a Eq.(5.2.8a) torna-se

$$\vec{F}_c = \sum_{i=1}^n \vec{T}_{ci} + \sum_{i=1}^n \frac{PS_i}{3} \vec{z}_i = \sum_{i=1}^n \left( Q_{si} L_i^2 c \vec{h}_i + \frac{PS_i}{3} \vec{z}_i \right) \quad (5.2.33)$$

onde:  $P$ , pressão interna, é constante em toda a superfície da membrana;  $S_i$  é a área atual do elemento em questão (elemento  $i$ );  $\vec{z}_i$ , versor normal à superfície do elemento, representa a terceira componente do sistema de coordenadas locais descrito no sistema global (MAURIN & MOTRO, 1998).

No final do processo, a área da superfície pode ser calculada a partir de cada elemento triangular e, conseqüentemente, a intensidade da tensão isotrópica através da Eq.(5.2.24).

## 5.3 Método da Relaxação Dinâmica

O método da relaxação dinâmica foi criado por A. Day (DAY, 1965). Entretanto, M. R. Barnes é o pesquisador que mais possui publicações nesta área, das quais destacam-se BARNES (1975), BARNES (1980), BARNES (1984), BARNES (1988a), BARNES (1988b), BARNES & WAKEFIELD(1988) e BARNES (1994). Atualmente, W. J. Lewis tem publicado trabalhos importantes, dos quais destacam-se LEWIS (1993) e LEWIS (1998).

BARNES (1975) faz um breve histórico do desenvolvimento do método e suas aplicações. BARNES & WAKEFIELD (1988) e BARNES (1988) descrevem uma metodologia baseada no método da relaxação dinâmica com amortecimento cinético para a



determinação da configuração inicial de equilíbrio, dos modelos de corte e da análise da estrutura submetida às ações. Comentam que a abordagem com amortecimento cinético garante a estabilidade da estrutura porque grandes modificações locais (tais como, geometria do contorno e tensões especificadas) são rapidamente dissipadas para toda a superfície da estrutura. Estes autores apresentam também exemplos ilustrativos de projetos com esta abordagem. Os recentes desenvolvimentos do método e suas aplicações são apresentados em BARNES (1994) e LEWIS (1993).

Segundo BARNES (1994), apesar de não haver nenhum livro publicado sobre o método, o qual é bastante empregado em projeto de estruturas tracionadas em diversos escritórios de cálculo, o mesmo já foi detalhadamente estudado em teses de doutoramento defendidas na Inglaterra (BARNES<sup>1</sup>, WAKEFIELD<sup>2</sup>, PAPADRAKAKIS<sup>3</sup>, TOPPING<sup>4</sup> *apud* BARNES, 1994).

A base do método é descrição passo a passo, para pequenos incrementos de tempo, do movimento de cada nó de uma estrutura até que, devido a um amortecimento artificial, a esta repouse em equilíbrio estático (BARNES, 1994). Na determinação da configuração inicial de equilíbrio, o cálculo é iniciado a partir de uma estrutura com forma inexata e arbitrária, a qual está submetida ao movimento causado pela imposição de um estado de tensão. Na análise da estrutura submetida às ações, o cálculo é iniciado a partir da estrutura na configuração inicial de equilíbrio, a qual repentinamente fica submetida ao movimento causado pelas ações (BARNES, 1994).

Usando uma matriz de rigidez concentrada nos pontos (*lumped stiffness*) de uma malha de diferenças finitas, o sistema de equações de equilíbrio é resolvido por relaxação dinâmica sucessiva de forças desbalanceadas (LEWIS, 1993).

Na forma original do método da relaxação dinâmica aplicou-se amortecimento proporcionais ao produto das velocidades nodais e das componentes da massa (amortecimento viscoso), sendo obtida mais rapidamente a convergência com o menor modo de vibração da estrutura (BARNES, 1994).

---

<sup>1</sup> BARNES, M. R. (1977). *Form-finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation*, Ph.D. thesis, The City University, London.

<sup>2</sup> WAKEFIELD, D. S. (1980). *Pretensioned networks supported by compression arches*, Ph.D. thesis, The City University, London.

<sup>3</sup> PAPADRAKAKIS, E. M. (1978). *Gradient and relaxation nonlinear techniques*, Ph.D. thesis, The City University, London.

<sup>4</sup> TOPPING, B. H. V. (1978). *The application of dynamic relaxation to design of modular space structures*, Ph.D. thesis, The City University, London.

Entretanto, devido às grandes alterações da geometria da estrutura, controles adicionais às vezes são necessários para se garantir a convergência do método. Um procedimento empregado é o denominado amortecimento cinético (*Kinetic damping*). Este consiste da imposição das componentes da velocidade nulas, quando for detectado um pico local na energia cinética da estrutura em movimento (e sem amortecimento). O cálculo da estrutura é reiniciado a partir da geometria atual, repetindo o procedimento descrito durante novo (usualmente decrescente) pico na energia cinética. Quando a energia cinética se dissipar, o equilíbrio estático da estrutura é alcançado (BARNES, 1994).

Atualmente no cálculo de estruturas de membrana, o método da relaxação dinâmica com amortecimento cinético é empregado nas fases de determinação da forma, na definição do modelo de corte e na análise estática da estrutura submetida às ações (BARNES, 1988; BARNES & WAKEFIELD, 1988).

### 5.3.1 Algoritmo da Relaxação Dinâmica segundo LEWIS (1993)

O método faz uso do princípio de D'Alembert em que as forças são relacionadas aos deslocamentos nodais via as equações de equilíbrio dinâmico:

$$P_{ji} - K_{ji}\delta_{ji} = M_{ji}\ddot{\delta}_{ji} + C\dot{\delta}_{ji} \quad (5.3.1)$$

onde: os índices  $ji$  referem-se ao  $j$ -ésimo nó na  $i$ -ésima direção;  $\ddot{\delta}_{ji}$  e  $\dot{\delta}_{ji}$  são as acelerações e velocidades nodais, respectivamente;  $K_{ji}$  e  $M_{ji}$  são a rigidez e massa, respectivamente, assumidas concentradas nos nós;  $P_{ji}$  é o vetor de cargas externas e,  $C$  é o coeficiente de amortecimento viscoso.

O lado esquerdo da Eq.(5.3.1) representa os resíduos, ou forças deslanceadas dos nós. Admitindo o coeficiente de amortecimento viscoso (*viscous damping*) nulo, a Eq.(5.3.1) é reduzida a

$$R_{ji} = M_{ji}\ddot{\delta}_{ji} \quad (5.3.2)$$

Neste caso, o amortecimento cinético é usado para controlar o solução, pelo monitoramento da energia cinética total do sistema e parando a iteração sempre que um pico de energia cinética for detectado. As iterações são então reiniciadas da geometria corrente,

mas com velocidade inicial assumida igual a zero. O processo é continuado, com deslocamentos acumulados, até os resíduos serem reduzidos a um valor mínimo.

O termo aceleração na Eq.(5.3.1) é definido como a variação da velocidade sobre o incremento de tempo  $\Delta t$ . Usando diferenças finitas centradas, tem-se

$$\ddot{\mathbf{d}}_{ji} = \frac{\dot{\mathbf{d}}_{ji}^{t+\Delta t/2} - \dot{\mathbf{d}}_{ji}^{t-\Delta t/2}}{\Delta t} \quad (5.3.3)$$

Combinando as Eqs.(5.3.2) e (5.3.3) obtém-se a seguinte equação atualizada para as velocidades

$$\dot{\delta}_{ji}^{t+\Delta t/2} = \dot{\delta}_{ji}^{t-\Delta t/2} + R_{ji}^t \frac{\Delta t}{M_{ji}} \quad (5.3.4)$$

e para os deslocamentos

$$\delta_{ji}^{t+\Delta t/2} = \delta_{ji}^{t-\Delta t/2} + \dot{\delta}_{ji}^{t+\Delta t/2} \Delta t \quad (5.3.5)$$

A seguinte relação foi sugerida para assegurar a estabilidade numérica (BARNES<sup>5</sup> *apud* LEWIS, 1993).

$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{2M_{ji}}{K_{ji}}} \quad (5.3.6)$$

Introduzindo a Eq.(5.3.6) na Eq.(5.3.4) observa-se que o tamanho do passo de iteração depende do valor do resíduo e da razão entre a massa e a rigidez. A aplicação desta formulação na determinação da forma da superfície inicial for “mal chutada” ou quando emprega-se um valor incorreto de rigidez, pode-se produzir deslocamentos tão grandes que podem contribuir para a instabilidade numérica da solução. Estudos da eficiência dos algoritmos da relaxação dinâmica mostraram que o uso de massas fictícias, proporcionais às componentes de rigidez nas direções x, y e z acelera a convergência das iterações (BARNES&WAKEFIELD<sup>6</sup> *apud* LEWIS, 1993).

<sup>5</sup> BARNES, M. R. (1976). Form-finding of minimum surface membranes. In: IASS WORLD CONFERENCE ON SPACE ENCLOSURES. Building Research Centre, Concordia University, Montreal, 115-124. *Proceeding*.

<sup>6</sup> BARNES, M. R.; WAKEFIELD, D. S. (1988) Form-finding, analysis and patterning of surface-stressed structures. In: 1<sup>st</sup> INTERNATIONAL OLEG KERENSKY CONFERENCE ON TENSION STRUCTURES, London, UK. Session4, p.8-15. *Proceedings*.

### 5.3.2 Formulação do Elemento segundo LEWIS (1993)

O contínuo é discretizado usando elementos triangulares com três graus de liberdade (BARNES<sup>7</sup> *apud* LEWIS, 1993). A preferência por este elemento para a determinação da forma e para a análise estática da membrana é devido a simplicidade da sua formulação, que ajuda na aplicação do algoritmo da relaxação dinâmica (LEWIS, 1993).

O elemento mostrado na Fig. (5.3.1) é representado pelo conjunto de três pseudo-cabos simulando as propriedades geométricas e mecânicas do elemento contínuo. A deformação  $\epsilon_i$  no lado  $i$  do elemento é dada como

$$\epsilon_i = \epsilon_x \cos^2 \theta_i + \epsilon_y \sin^2 \theta_i + \gamma_{xy} \sin \theta_i \cos \theta_i \tag{5.3.7}$$

onde: é assumido que as deformações são pequenas, que  $e_x$  e  $e_y$  são as deformação nas direções  $x$  e  $y$  e que  $g_{xy}$  é a deformação cortante.

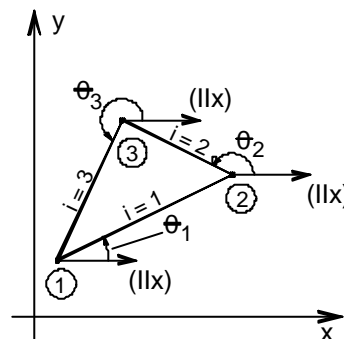


FIGURA 5.3.1: Elemento triangular com três graus de liberdade (LEWIS, 1993).

O vetor de deformações em cada lado do elemento pode ser expresso como:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{Bmatrix} \tag{5.3.8}$$

<sup>7</sup> BARNES, M. R. (1976). Form-finding of minimum surface membranes. In: IASS WORLD CONFERENCE ON SPACE ENCLOSURES. Building Research Centre, Concordia University, Montreal, 115-124. *Proceeding*.

onde os coeficientes da matriz  $[A]$  são:

$$a_i = \cos^2 \theta_i \tag{5.3.9a}$$

$$b_i = \sin^2 \theta_i \tag{5.3.9b}$$

$$c_i = \cos^2 \theta_i \sin^2 \theta_i \tag{5.3.9c}$$

e o lado direito da Eq.(5.3.8) é dado por:  $\epsilon_i = \delta_i / \ell_i$ , onde  $\ell_i$  é o comprimento inicial do pseudo-cabo  $i$ .

Resolvendo para  $e_x$ ,  $e_y$  e  $g_{xy}$  tem-se

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} \ell_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \ell_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ell_3^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = [B] \{\delta\} \tag{5.3.10}$$

onde  $[B]$  é a matriz de transformação da variação dos lados do elemento,  $\{\delta\}$ , em deformações locais dos elementos,  $\{\epsilon\}$ .

As tensões no elemento podem ser calculadas como:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D][B]\{\delta\} \tag{5.3.10}$$

Assumindo material isotrópico e estado plano de tensões, os coeficientes da matriz de elasticidade, relacionados às deformações do elemento e às tensões dos elementos são dados por

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{5.3.11}$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\nu$  é o coeficiente de *Poisson*.

A relação entre a deformação elástica do elemento e o vetor de forças nos lados do elemento pode ser obtida da seguinte equação.

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = [B]^T [D] [B] V \{ \mathbf{d} \} \quad (5.3.12)$$

onde  $V$  é o volume do elemento.

A matriz de rigidez elástica do elemento  $[K]$  é portanto

$$\{ K \} = [B]^T [D] [B] V \quad (5.3.13)$$

Durante a determinação da forma da estrutura de membrana é desejável conservar a tensão no elemento constante  $\{ \sigma_c \}$ , então

$$\{ T_i \} = [B]^T \{ \mathbf{s}_c \} V \quad (5.3.14)$$

no caso de forças nos pseudo-cabos (forças nos lados do elemento) serem dependentes somente da geometria do elemento, dada pela matriz  $[B]$ .

Após a determinação das forças nos pseudo-cabos, obtêm-se suas componentes nodais nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , levando em conta o cálculo das forças residuais. Os nós dos elementos coincidem com os pontos de interseção da malha de diferenças finitas. Subseqüentemente, o algoritmo de relaxação dinâmica pode ser empregado na obtenção da forma inicial da membrana. Na fase de determinação da forma de estruturas de membranas, a solução pode ser procedida com ou sem a inclusão da elasticidade, resultado no caso das Eq.(5.3.12), ou Eq.(5.3.14), respectivamente.

## 5.4 Método da Análise Não-linear Direta

É importante destacar que, neste item, não apresenta-se a formulação deste método, o qual compreende a teoria de análise não-linear de estruturas, usualmente empregada para as estruturas mais convencionais, com o método dos elementos finitos. Entretanto, no emprego desta teoria no caso particular das estruturas de membrana torna-se necessário o emprego de estratégias na definição da forma, as quais serão tratadas.

Na determinação da configuração inicial de equilíbrio, várias formas podem ser pesquisadas. Na análise da estrutura de membrana submetida aos carregamentos, verifica-se a segurança e a eficiência do projeto. Emprega-se o Método dos Elementos Finitos, usualmente com a utilização de um método do tipo Newton-Raphson na resolução do sistema de equações não lineares. Além dos elementos de membrana, devem-se inserir outros tipos de elementos para a análise global da estrutura (TABARROK & QIN, 1992; FUJIKAKE et al., 1989).

Devido à grande não-linearidade geométrica da estrutura de membrana, prefere-se usar malha densa de elementos de ordem inferior à malha grosseira realizada por elementos de ordem superior. Pode-se empregar, por exemplo, um elemento de membrana típico com três nós e nove graus de liberdade por elemento, TABARROK & QIN (1992), Fig.(5.4.1)

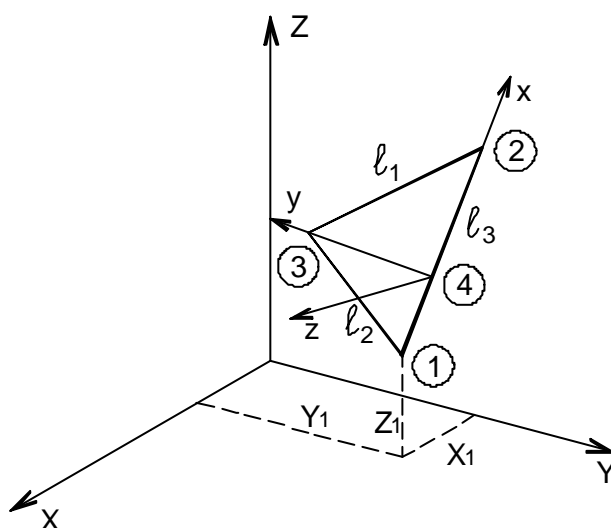


FIGURA 5.4.1: Elemento triangular típico no espaço 3D (TABARROK & QIN, 1992).

Segundo TABARROK & QIN (1992), neste método a determinação da configuração inicial de equilíbrio pode ser alcançada com as seguintes abordagens:

determinação de uma superfície com tensões uniformes; determinação de uma superfície com tensões não uniformes e determinação de uma superfície através da imposição de deslocamentos à estrutura (simulando o sistema de montagem das estruturas de membrana).

A determinação de uma superfície com tensões uniformes é alcançada com a abordagem que leva ao cálculo da superfície mínima. Para a determinação da superfície mínima, assume-se que a membrana tem um módulo de elasticidade muito pequeno e que a mesma está submetida a um estado de protensão (de tração) isotrópicas, (TABARROK & QIN, 1992; FUJIKAKE et al., 1989). A forma de equilíbrio da membrana sob condições de contorno geometricamente dadas é, então, calculada. As tensões na membrana mudam muito pouco, devido à suposição de um módulo de elasticidade muito pequeno. Assim sendo, as tensões isotrópicas especificadas continuam em equilíbrio na superfície calculada. Em outras palavras, a configuração de equilíbrio calculada será um estado de tensão próximo das tensões uniformes, isto é, próxima da superfície mínima (TABARROK & QIN, 1992).

A abordagem que leva ao cálculo de uma superfície de tensões não uniformes às vezes é desejável porque alguns requisitos de projeto podem não ser satisfeitos com superfícies mínimas. Nesta abordagem, um módulo de elasticidade muito pequeno é ainda assumido para a membrana, mas as tensões iniciais não são uniformemente distribuídas em toda a membrana. Neste caso, a forma de equilíbrio depende da distribuição inicial de tensões. Diversas tentativas de cálculo são usualmente necessárias para a determinação da forma de equilíbrio satisfatória, ajustando-se a razão entre as tensões especificadas (TABARROK & QIN, 1992).

Outra abordagem é a que leva ao cálculo de uma superfície com o emprego de deslocamentos sucessivos impostos em pontos da membrana. Isto pode ser necessário porque, em alguns casos, não é óbvio como se deve prefixar as tensões iniciais não uniformes. Começando com uma membrana plana submetida a tensões uniformes iniciais e usando o módulo de elasticidade com valor real, a membrana é deslocada por uma fração da distância entre a posição inicial e a posição final desejada. A configuração de equilíbrio resultante terá tensões não uniformes, as quais provavelmente são elevadas. Neste instante, as tensões devido às deformações são removidas e somente as tensões iniciais são mantidas. Depois outro deslocamento da cobertura é imposto. O processo é repetido até que alguns pontos da cobertura alcance a posição previamente estabelecida em projeto. As tensões no último acréscimo de deslocamento estarão em equilíbrio e serão usadas para calcular a membrana submetida às ações externas. Se a última iteração fornecer tensões elevadas, um



deslocamento menor é imposto após a liberação das tensões elásticas. Este efeito simula o processo de montagem das estruturas de membrana (TABARROK & QIN, 1992).

## 5.5 Considerações Finais

Como apresentado, o projeto de estruturas de membrana é composto da determinação da posição inicial de equilíbrio, da definição do modelo de corte e da análise da estrutura submetida às ações (LEWIS, 1998; TABARROK & QIN, 1992 e FUJIKAKE et al., 1989). Na resolução destes problemas, podem-se empregar métodos de análise estrutural, os quais são usualmente o Método da Densidade de Força (MAURIN & MOTRO, 1998), o Método da Relaxação Dinâmica (BARNES, 1994) e o Método da Análise Não-linear Direta (TABARROK & QIN, 1992).

O Método da Densidade de Força oferece ao projetista uma ferramenta simples, eficiente e segura para projetar estruturas de membranas, conservando o controle da forma e da distribuição de tensões. A especificação de um tensor de tensões isotrópico assegura a ausência de áreas comprimidas. Um grande número de opções de estruturas podem ser projetadas, tal como membranas com contornos rígidos ou flexíveis (MAURIN & MOTRO, 1998).

No Método da Relaxação Dinâmica o movimento dos nós da estrutura não está diretamente relacionado com a rigidez atual dos elementos, mas são dependentes das forças residuais e movimentos nodais da iteração anterior. O controle do método é feito através do amortecimento do movimento da estrutura até a mesma atingir o repouso. Sendo assim, as condições de equilíbrio e de compatibilidade são independentes até a determinação da configuração de equilíbrio, o que importante na análise de estruturas tracionadas. Além disso, a forma como o método é organizado permite com facilidade o controle dos níveis de tensão durante a fase de definição da forma e, ainda, permite a consideração de relações de tensão e deformação altamente não-lineares na fase de análise da estrutura submetida às ações (BARNES, 1994).

Por fim, com relação ao Método de Análise Não-linear Direta, pode-se concluir que é viável o emprego de um sistema computacional comercial (por exemplo o ANSYS) na análise de estruturas de membrana, entretanto, algumas estratégias específicas são necessárias.

---

## CAPÍTULO 6

# SISTEMATIZAÇÃO DO PROJETO

### 6.1 Considerações Iniciais

No Brasil há grande número de estruturas pneumáticas erguidas a partir do nível do piso a ser coberto (*ground-mounted air-supported structure*), empregadas em coberturas de armazéns industriais com planta retangular de aproximadamente 1000 m<sup>2</sup>, Fig.(6.1.1).



FIGURA 6.1.1: Armazém Industrial no Brasil [Fonte: Pistelli Engenharia Ltda (1997)].

A construção destas coberturas é usualmente realizada a partir de observações em obras similares realizadas no exterior. Entretanto, o projeto é muito importante para o desenvolvimento do produto em questão.

Sendo assim, a seguir apresenta-se a sistematização do projeto de estruturas de membrana do tipo mais empregado no Brasil, através da apresentação de recomendações de projeto e de estudo de caso.

## 6.2 Descrição do Caso

A estrutura pneumática a ser estudada é a cobertura cilíndrica de um armazém industrial com área coberta retangular, similar a cobertura apresentada na Fig.(6.1.1).

O elemento que vence a área livre coberta é a membrana estrutural. Emprega-se membrana de tecido com as características definidas na Tab.(6.2.1).

TABELA 6.2.1: Características da membrana.

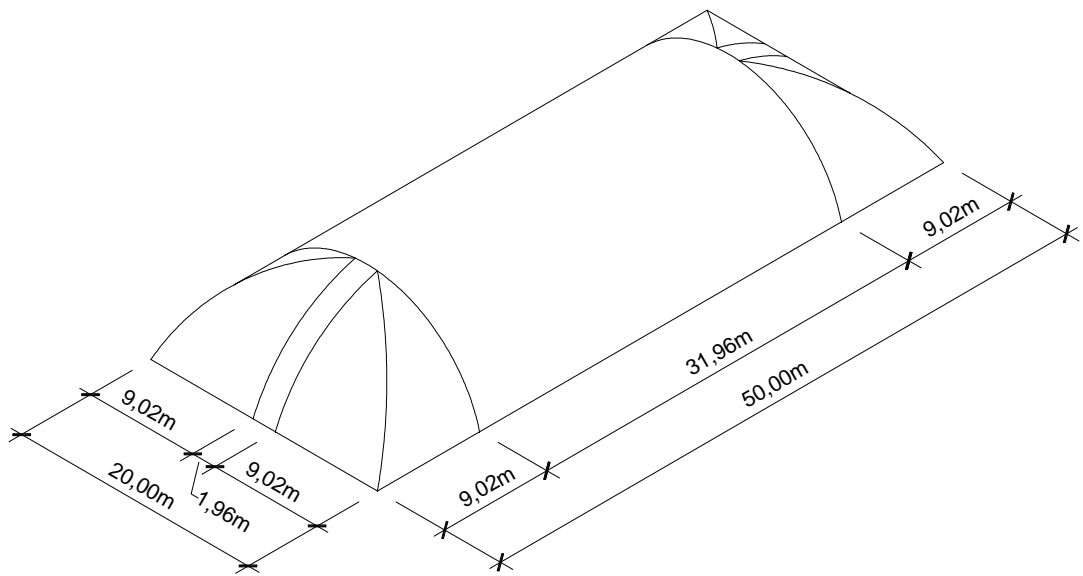
	Símbolo	Valor	Unidade
Módulo de Elasticidade	$E$	1700	KN/m
Resistência à Tração Nominal	$\sigma_t$	90	KN/m
Coefficiente de <i>Poisson</i>	$\nu$	0.3	-
Peso Específico	$\gamma$	10	KN/m <sup>3</sup>
Densidade	$d$	1000	Kg/m <sup>3</sup>
Largura	$\ell$	2.030	m
Espessura	$e$	0.90	mm

A membrana de tecido, encontrada comercialmente em rolo, deve ser cortada em faixas, as quais depois de emendadas formam os painéis que compõem o "envelope" da cobertura. A emenda das faixas e dos painéis são realizadas com solda de 35 mm de largura, definindo-se a largura útil da membrana.

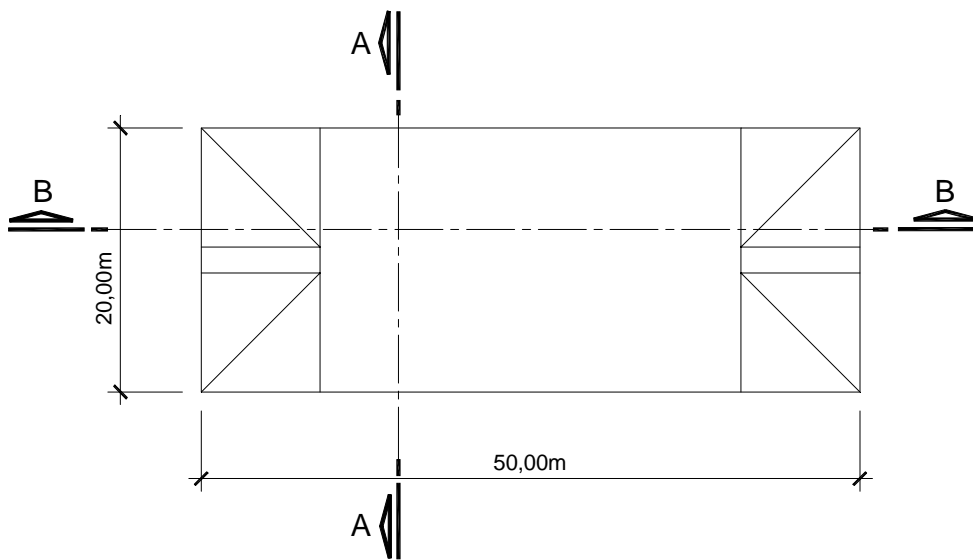
Com a atuação da pressão interna ao "envelope" da membrana, este é erguido a partir do perímetro da área a ser coberta.

## 6.3 Definição da Forma Inicial da Membrana

Tendo em mente estudos experimentais e a experiência em obras já executadas, a forma inicial da cobertura em questão é esquematizada a seguir.

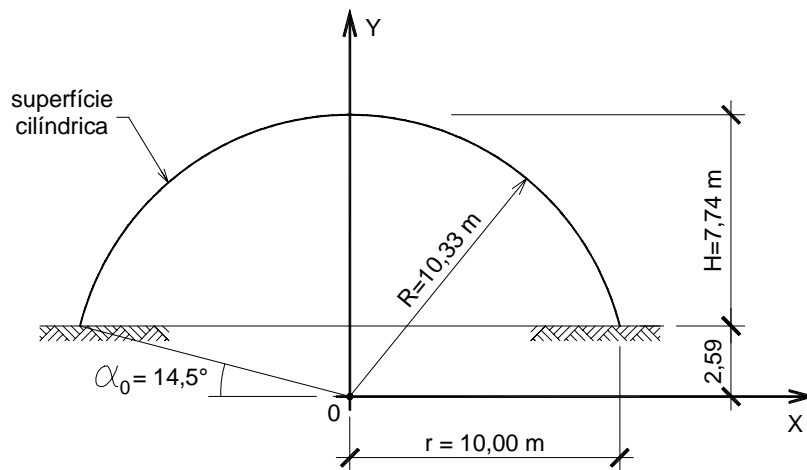


PESPECTIVA

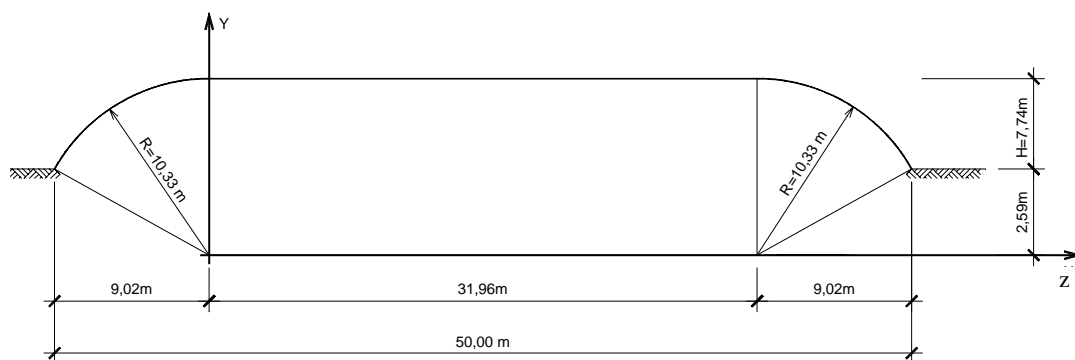


PLANTA

FIGURA 6.3.1: Esquema da Estrutura Pneumática em Estudo (continua).



CORTE A-A



CORTE B-B

FIGURA 6.3.1: Esquema da Estrutura Pneumática em Estudo (continuação).

A partir das características geométricas definidas na Fig.(6.3.1), define-se a forma inicial da superfície em três dimensões, a qual é apresentada na Fig.(6.3.2).

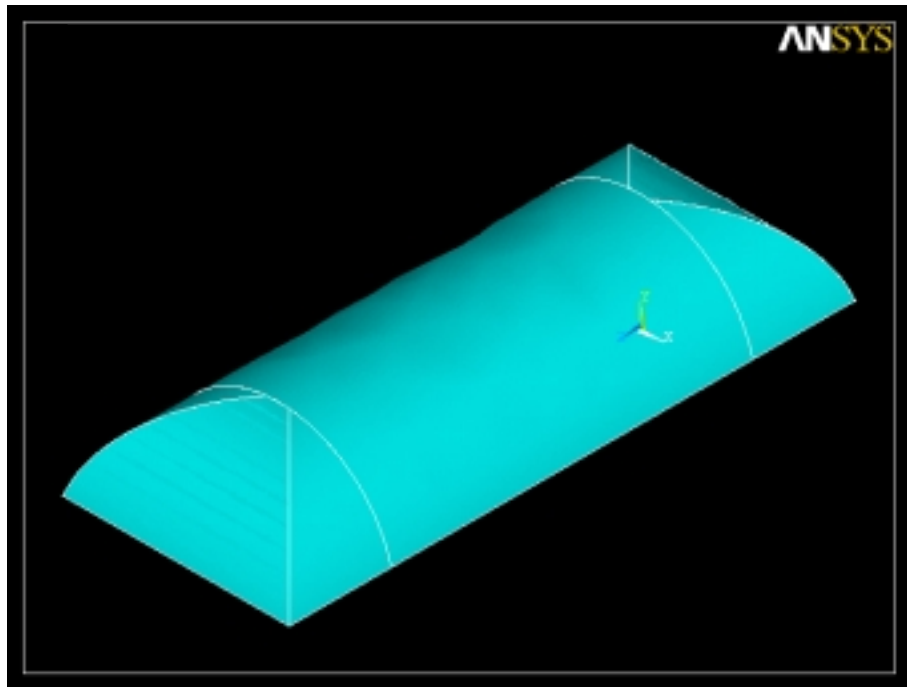


FIGURA 6.3.2: Definição da forma inicial da membrana cilíndrica em três dimensões.

As ações atuantes na cobertura são definidas a partir dessa superfície cilíndrica inicial.

## 6.4 Definição das Ações

### 6.4.1 Peso próprio, $g$

O peso próprio é uma ação permanente vertical, no sentido da aceleração da gravidade  $a_g$ , Fig.(6.4.1). Sendo  $\gamma$  o peso-específico da membrana e  $e$  a sua espessura, obtém-se o peso próprio da membrana,  $g$  :

$$g = \gamma e = 10000 * 0.0009 = 9 \text{ N/m}^2 \quad (6.4.1)$$

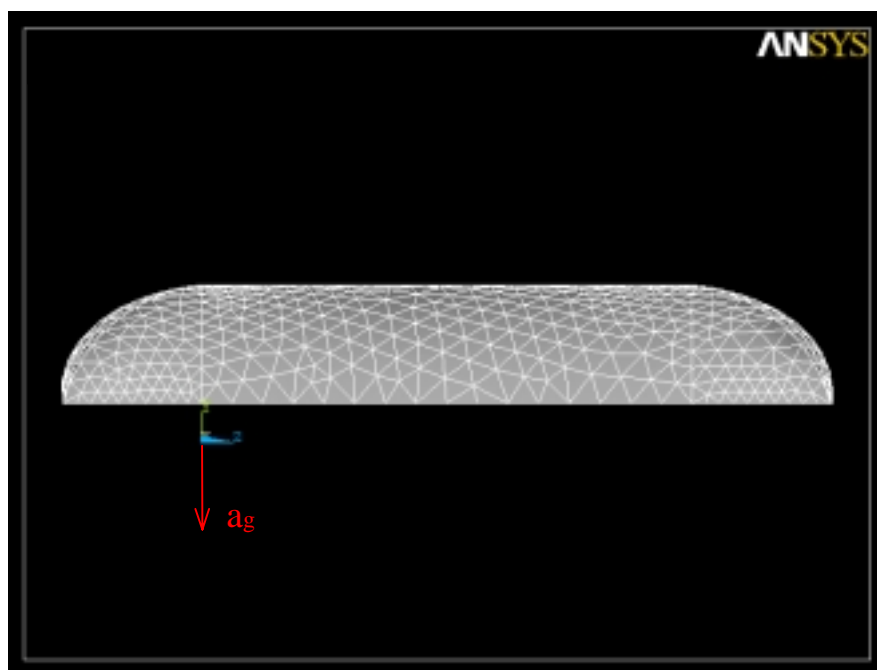


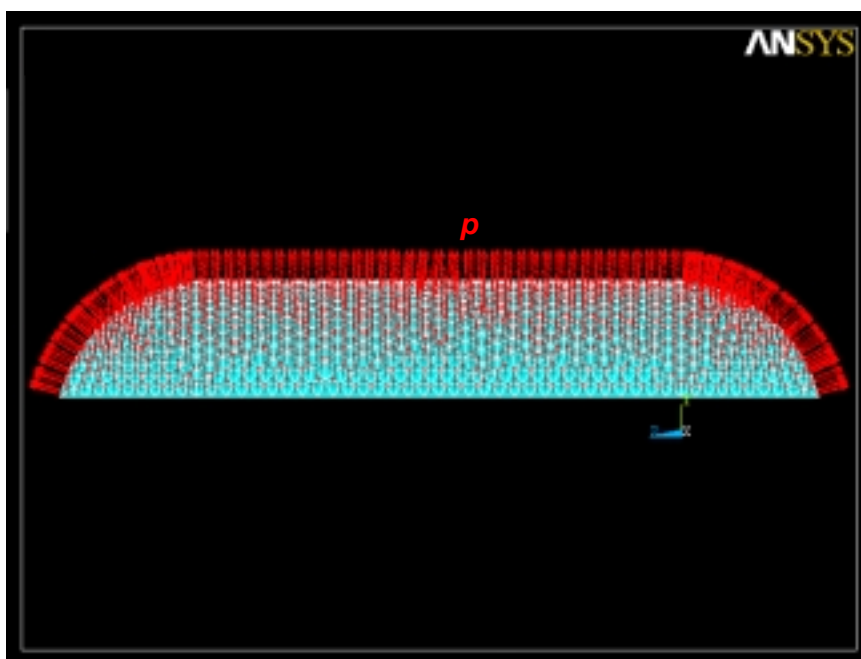
FIGURA 6.4.1: Definição do peso-próprio a partir da densidade do membrana,  $d$ , e da aceleração da gravidade,  $a_g$ .

#### 6.4.2 Pressão Interna, $p$

A pressão interna é uma ação permanente perpendicular à superfície da membrana, a qual é necessária para manter o equilíbrio da estrutura submetida às situações de carregamento, Fig.(6.4.2). A intensidade da pressão interna requerida depende da forma da membrana e das ações em que esta pode estar submetida. Em casos usuais, a pressão interna da maioria das estruturas de membrana do tipo *air supported* varia de 20 mm a 100 mm de coluna de água (TURKKAN&SRIVASTAVA, 1992). Para as estruturas de membrana do tipo *air supported* usuais, montadas a partir do nível do piso a ser coberto (*ground-mounted air-supported structure*), o valor da pressão interna se situa próximo ao limite inferior do intervalo apresentado acima.

Sendo assim, para o caso em questão, emprega-se a seguinte pressão interna.

$$p = 25 \text{ mm } H_2O = 250 \text{ N} / \text{m}^2 \quad (6.4.2)$$

FIGURA 6.4.2: Definição da pressão interna,  $p$ .

### 6.4.3 Vento

A ação do vento é uma ação dinâmica, cujo valor de pressão depende da sua velocidade, da altitude e da temperatura. Em condições normais de pressão atmosférica (1.0atm) e temperatura atmosférica (15°C), obtém-se a pressão dinâmica do vento através da seguinte equação

$$q = v^2 / 1.6 \quad (6.4.3)$$

onde:

$q$  é o valor da pressão dinâmica do vento, em  $N/m^2$  e

$v$  é velocidade do vento, em  $m/s$ , cujos valores segundo a NBR 6123 são definidos pela *velocidade característica do vento*  $v_k$  para diversas situações de projeto.

Em análises estáticas, obtém-se a pressão estática equivalente devido ao vento, segundo a equação seguinte

$$w = C_p q \quad (6.4.4)$$



onde:  $w$  é pressão estática equivalente devido ao vento,  $C_p$  é o coeficiente de pressão do vento e  $q$  é o valor da pressão dinâmica do vento. O valor de  $C_p$  é determinado através de testes em túnel de vento.

Segundo TURKKAN & SRIVASTAVA (1992) a equação do coeficiente de pressão do vento,  $C_p$ , que melhor retrata os resultados experimentais, para o caso do vento incidindo na direção perpendicular à estrutura pneumática cilíndrica, é a seguinte

$$C_p = 0.8^{p/q} (-0.7 + 0.3 \cos \alpha + \cos 2\alpha + 0.4 \cos 3\alpha - 0.1 \cos 4\alpha) \quad (6.4.5)$$

onde:  $\alpha$  é o ângulo indicado na Fig.(6.4.3),  $p$  é a mínima pressão interna de projeto e  $q$  é a pressão dinâmica do vento.

A Fig.(6.4.3) esboça a variação da distribuição do vento em estruturas de membrana flexíveis através da apresentação da variação do coeficiente de pressão  $C_p$  em função do ângulo  $\alpha$ , para o caso de vento incidindo na direção perpendicular à estrutura, segundo TURKKAN & SRIVASTAVA (1992).

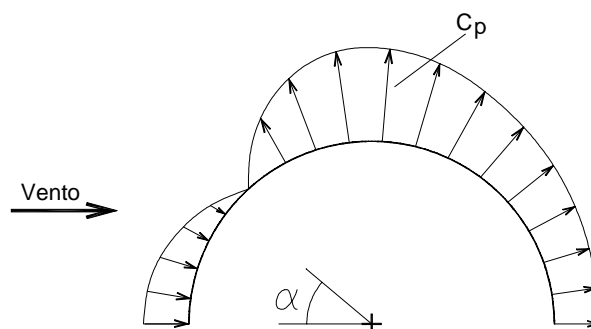


FIGURA 6.4.3: Ação do vento em estrutura pneumática do tipo *air supported* cilíndrica (TURKKAN & SRIVASTAVA, 1992).

Sendo assim, a seguir apresentam-se os cálculos necessários para a determinação da ação do vento na cobertura do caso em estudo.

***Determinação da Velocidade Característica***

Segundo a NBR6123, a velocidade característica do vento,  $v_k$ , é determinada pela multiplicação da velocidade básica,  $v_o$ , pelos fatores  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ :

→ velocidade básica — São Carlos, SP —  $v_o = 40 \text{ m/s}$

→ fator topográfico — caso a, terreno plano —  $S_1 = 1$

→ fator rugosidade do terreno, dimensões em planta e altura da edificação — categoria 3, pequenas cidades — classe B, maior dimensão excede 20m e não excede 50m —  
 $h \leq 3\text{m} \rightarrow S_2 = 0.60$ ,  $h = 5\text{m} \rightarrow S_2 = 0.65$  e  $h = 10\text{m} \rightarrow S_2 = 0.74$

→ fator estatístico — grupo 3, armazém industrial com baixo fator de ocupação, edificação não temporária —  $S_3 = 0.95$ .

Sendo assim, obtêm-se os valores da velocidade característica do vento  $v_k$  em função da altura da edificação  $h$  ( $h \leq 3\text{m}$ ,  $h = 5\text{m}$  e  $h = 10\text{m}$ ):

$$v_k^{(3)} = 1.0 * 0.60 * 0.95 * 40 = 22.80 \text{ m/s}$$

$$v_k^{(5)} = 1.0 * 0.65 * 0.95 * 40 = 24.70 \text{ m/s} \quad (6.4.6)$$

$$v_k^{(10)} = 1.0 * 0.74 * 0.95 * 40 = 28.12 \text{ m/s}$$

***Cálculo da Pressão Dinâmica do Vento***

Segundo a NBR 6123, a partir das Eqs.(6.4.6) obtêm-se os seguintes valores para a pressão dinâmica do vento  $q$  em função da altura da edificação ( $h \leq 3\text{m}$ ,  $h = 5\text{m}$  e  $h = 10\text{m}$ ):

$$q^{(3)} = 0.613 * 22.80^2 = 319 \text{ N/m}^2$$

$$q^{(5)} = 0.613 * 24.70^2 = 374 \text{ N/m}^2 \quad (6.4.7)$$

$$q^{(10)} = 0.613 * 28.12^2 = 485 \text{ N/m}^2$$

Neste projeto, a altura da edificação será dividida em três partes. Sendo assim, a partir das Eqs.(6.4.7) obtêm-se as pressões dinâmicas do vento  $q$  na cobertura, as quais são apresentadas na Fig.(6.4.4).

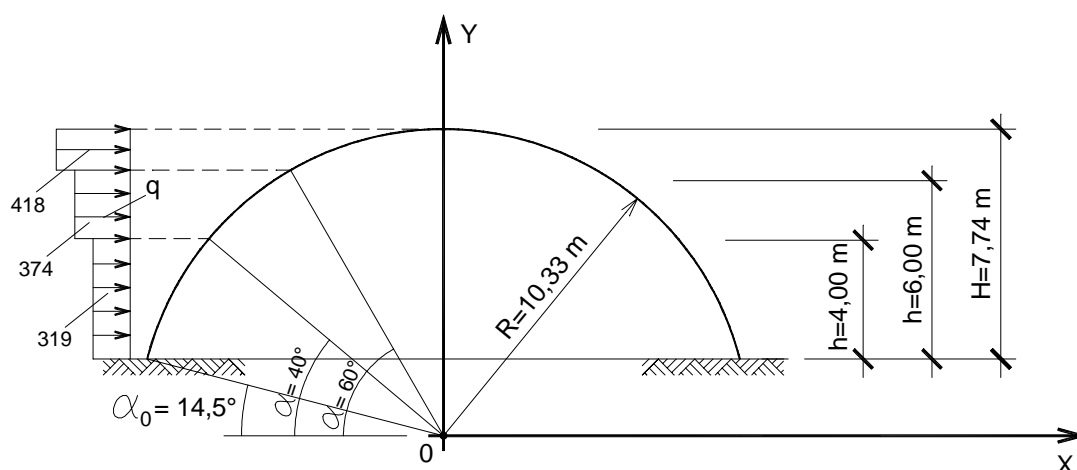


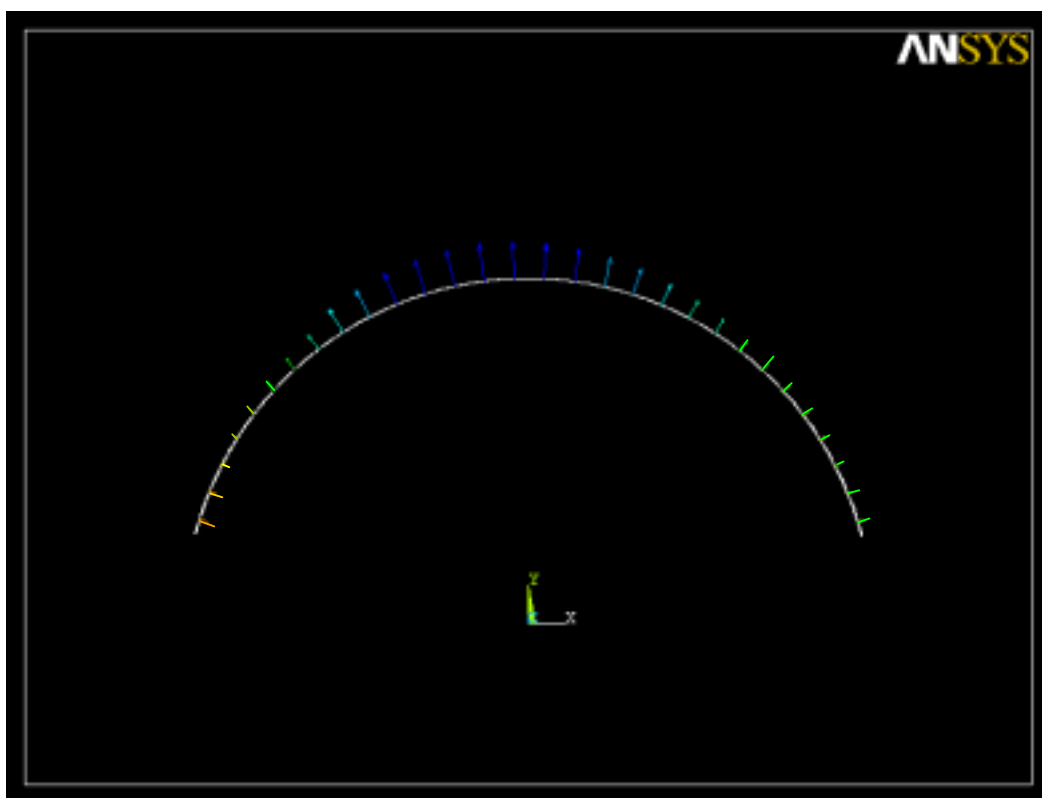
FIGURA 6.4.4: Valores de  $q$  [N/m<sup>2</sup>] em função da altura da edificação  $h$ .

### ***Cálculo da Pressão Estática Equivalente Devido ao Vento***

Obtêm-se os valores do coeficiente de pressão do vento  $C_p$  e os valores da pressão estática equivalente devido ao vento  $w$  a partir das Eqs.(6.4.4-5), dos valores da pressão do vento  $p$  definidos na Fig.(6.4.4) e do valor da pressão interna  $q$  definida na Eq.(6.4.2). A Tab.(6.4.1) mostra os valores de  $C_p$  e de  $w$  em função de  $\alpha$ ,  $p$  e  $q$ , e a Fig.(6.4.5) ilustra os valores de  $w$  ao longo da cobertura cilíndrica.

TABELA 6.4.1: Valores de  $C_p$  e de  $w$  em função de  $\alpha$ ,  $p$  e  $q$ 

$\alpha$	$q$ [N/m <sup>2</sup> ]	$p$ [N/m <sup>2</sup> ]	$C_p$	$w$ [N/m <sup>2</sup> ]
14,5°	319	-250	0,836	267
20°	319	-250	0,632	202
25°	319	-250	0,400	128
30°	319	-250	0,131	42
32,25°	319	-250	0,000	0
35°	319	-250	-0,166	-53
40°	374	-250	-0,467	-175
45°	374	-250	-0,779	-291
50°	374	-250	-1,083	-405
55°	374	-250	-1,369	-512
60°	418	-250	-1,600	-669
65°	418	-250	-1,811	-757
70°	418	-250	-1,974	-825
75°	418	-250	-2,081	-870
80°	418	-250	-2,130	-890
85°	418	-250	-2,121	-887
90°	418	-250	-2,057	-860
95°	418	-250	-1,944	-813
100°	418	-250	-1,792	-749
105°	418	-250	-1,612	-674
110°	418	-250	-1,417	-592
115°	418	-250	-1,218	-509
120°	418	-250	-1,028	-430
125°	374	-250	-0,872	-326
130°	374	-250	-0,727	-272
135°	374	-250	-0,614	-230
140°	374	-250	-0,537	-201
145°	319	-250	-0,505	-161
150°	319	-250	-0,488	-156
155°	319	-250	-0,495	-158
160°	319	-250	-0,516	-165
165,5°	319	-250	-0,547	-174

FIGURA 6.4.5: Ilustração de  $w$  ao longo da cobertura cilíndrica.

#### 6.4.4 Combinações das Ações

O caso em questão está submetido à ação do peso próprio  $g$ , à pressão interna  $q$  e ao vento  $w$ . Neste caso, segundo a ASCE 17-96, as seguintes combinações das ações são previstas, Tab.(6.4.2).

TABELA 6.4.2: Combinações de Ações Previstas pelo ASCE 17-96 para estruturas do tipo *air supported*.

Combinação 1	$1.4 g + 1.0 p$
Combinação 2	$0.9 g + 1.6 p$
Combinação 3	$0.9 g + 1.1 p + 1.3 w$

As combinações de ações apresentadas são para estruturas pneumáticas do tipo *air-supported* de uma forma geral (ASCE 17-96). Especificamente para o caso em questão, onde a pressão interna e o carregamento permanente tem pequena variabilidade, podem-se empregar coeficientes mais adequados.

## 6.5 Análise da Membrana Submetida às Ações

### 6.5.1 Cálculo da Resistência à Tração Admissível na Membrana

Segundo o ASCE 17-96, a resistência à tração admissível na membrana  $\bar{\sigma}_t$  é definida da seguinte forma:

$$\bar{\sigma}_t = \phi L_t \sigma_t \quad (6.5.1)$$

onde:

$\sigma_t=90\text{KN/m}$  é a resistência à tração nominal da membrana, definida na Tab.(6.2.1);  $\phi = 0.5$ , fator resistência e,  $L_t = 0.65$ , fator ciclo de vida para estruturas permanentes não submetidas à repetidas montagens.

Portanto, a partir da Eq.(6.5.1), obtém-se a resistência à tração admissível  $\bar{\sigma}_t$  na membrana do projeto:

$$\bar{\sigma}_t = 0.5 * 0.65 * 90 = 29 \text{ KN/m} \quad (6.5.2)$$

### 6.5.2 Determinação dos Esforços e dos Deslocamentos na Membrana

Nas Figs.(6.5.1-9) mostradas a seguir, apresentam-se os valores dos esforços e os deslocamentos na membrana submetida às combinações de ações definidas na Tab.(6.4.2). Empregou-se o ANSYS 5.4, elemento *shell63* e análise não-linear geométrica.

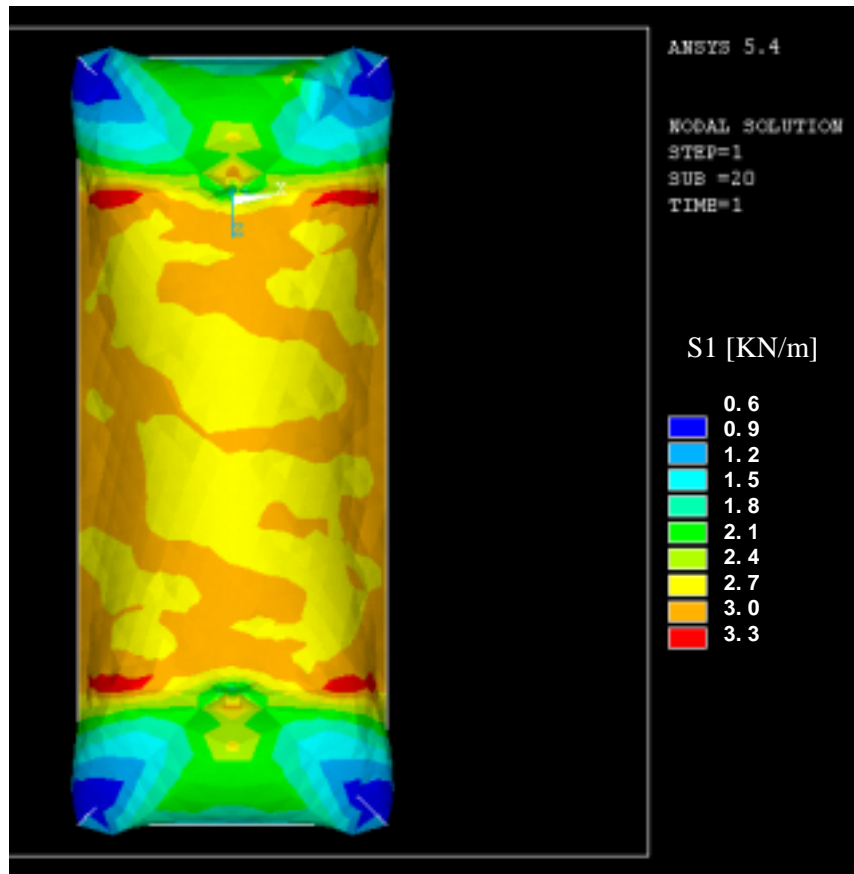


FIGURA 6.5.1: Esforços de membrana na direção principal 1, S1, devido à combinação de ações 1.

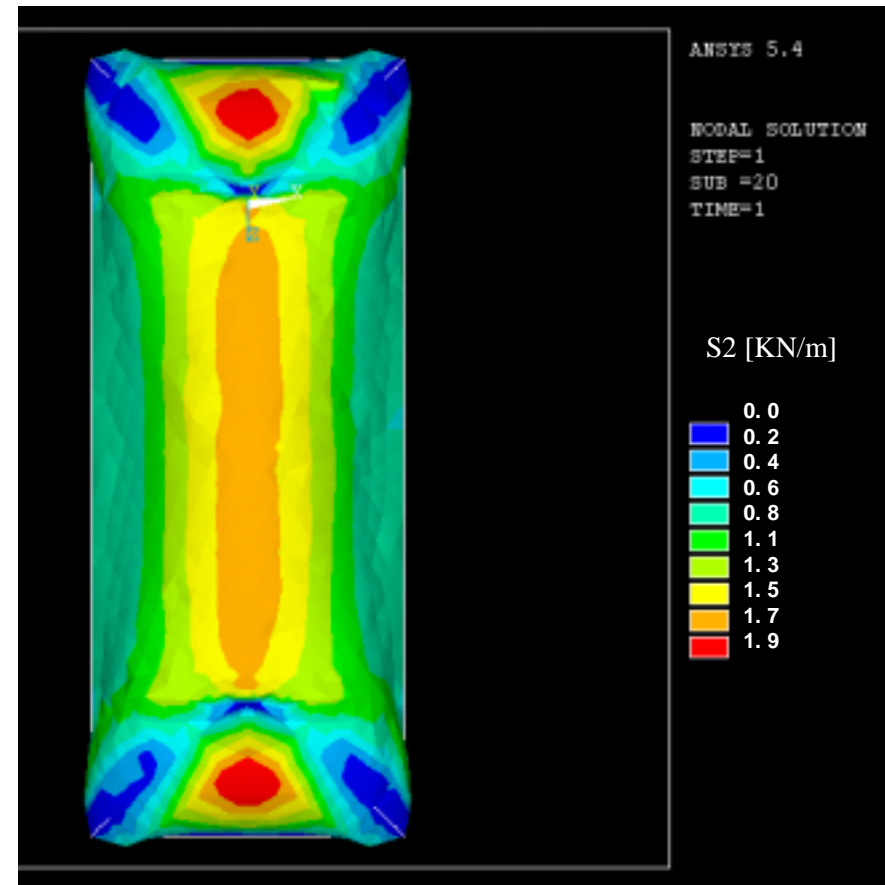


FIGURA 6.5.2: Esforços de membrana na direção principal 2, S2, devido à combinação de ações 1.

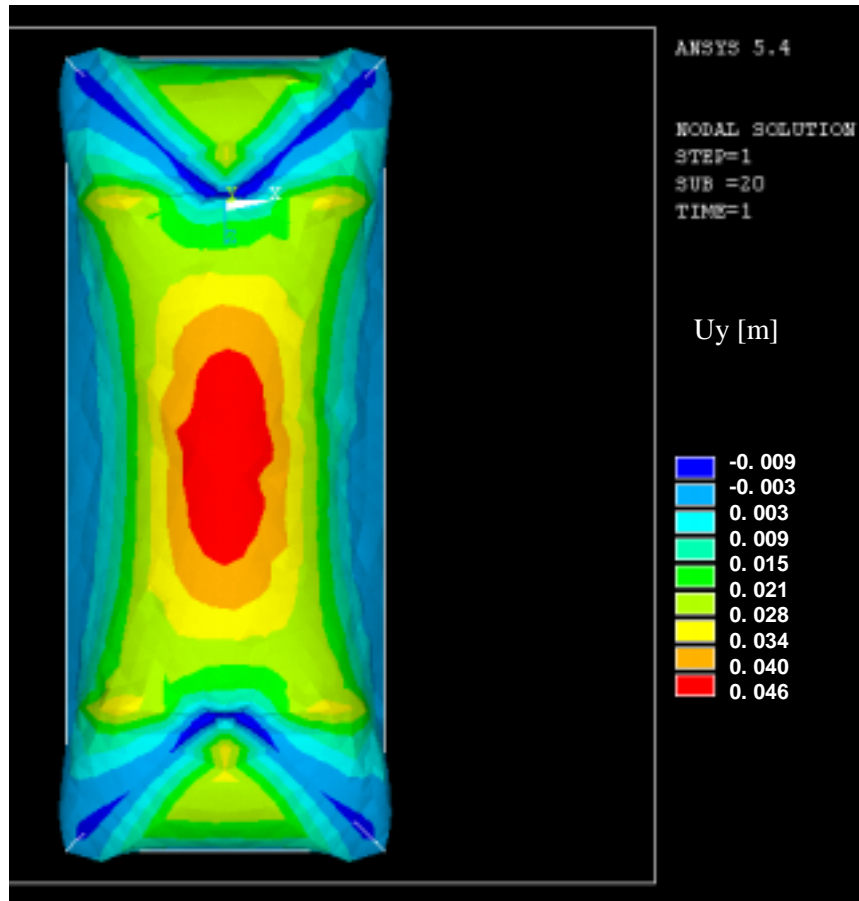


FIGURA 6.5.3: Deslocamentos Verticais da membrana,  $U_y$ , devido à combinação de ações 1.

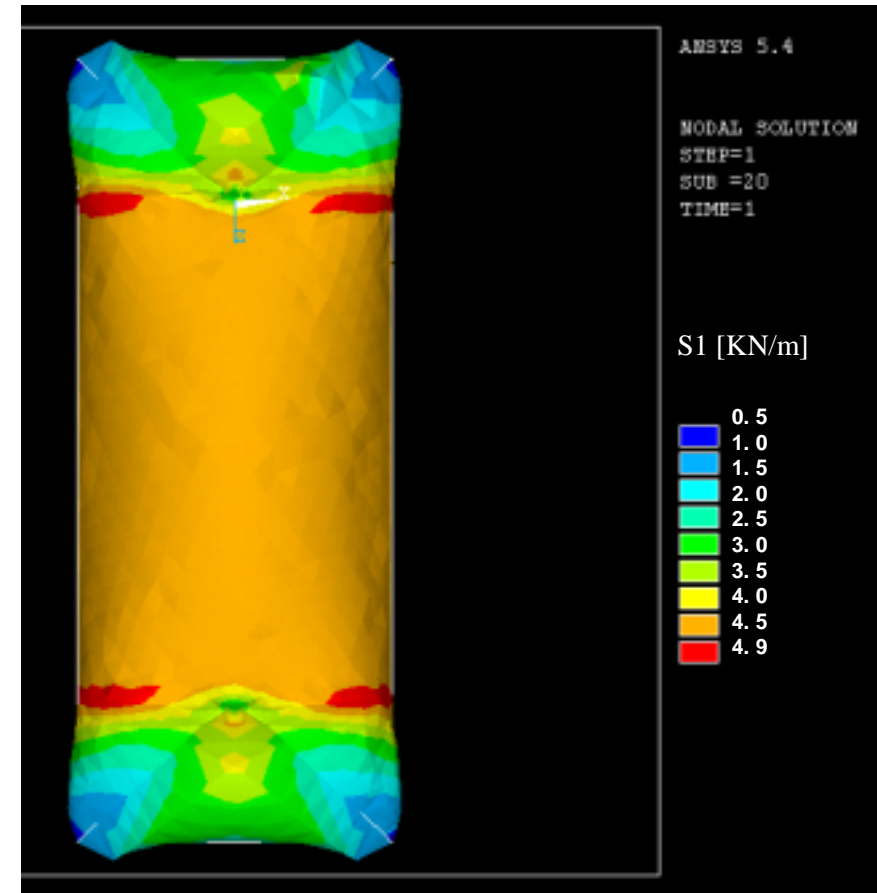


FIGURA 6.5.4: Esforços de membrana na direção principal 1,  $S_1$ , devido à combinação de ações 2.



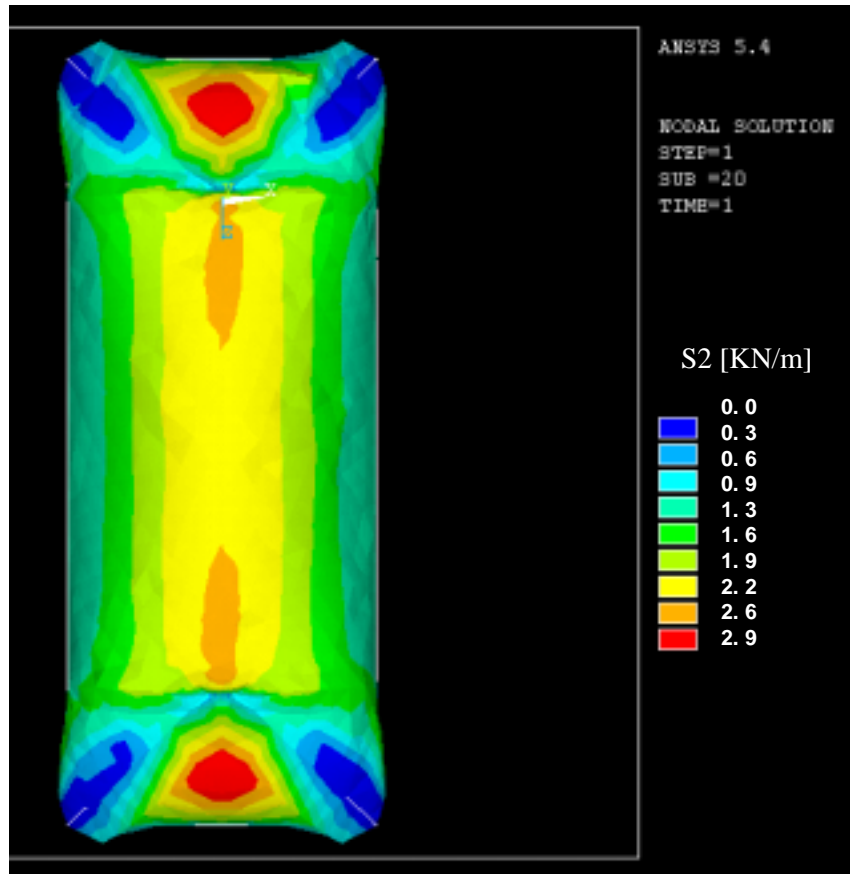


FIGURA 6.5.5: Esforços de membrana na direção principal 2, S2, devido à combinação de ações 2.

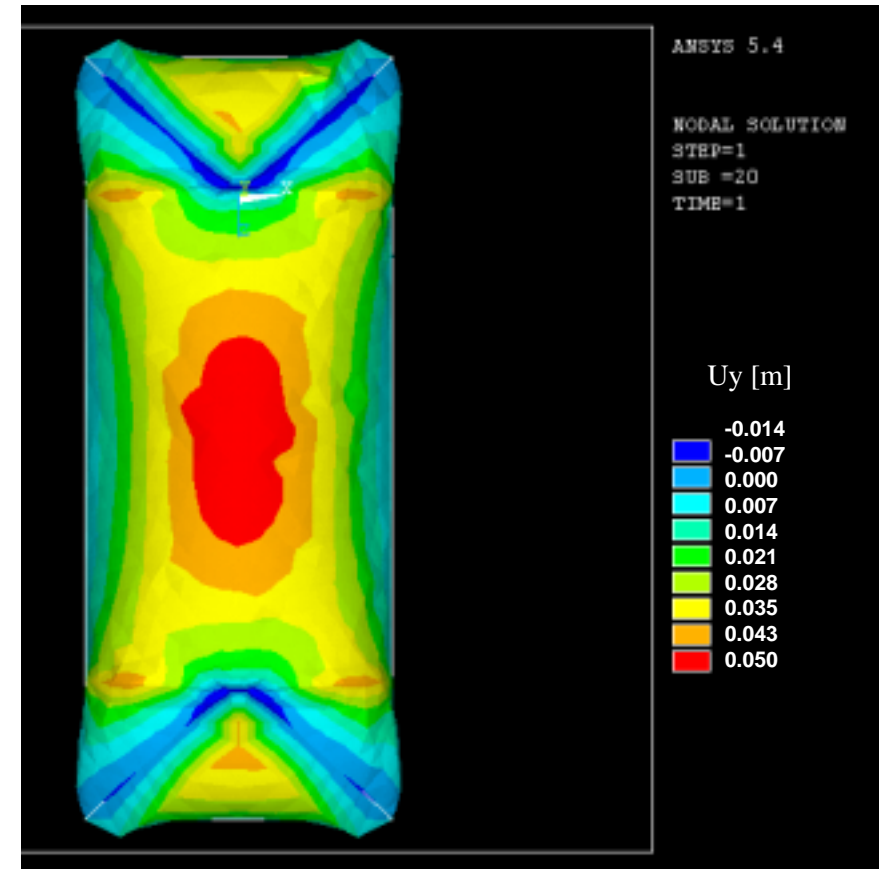


FIGURA 6.5.6: Deslocamentos Verticais da membrana, Uy, devido à combinação de ações 2.

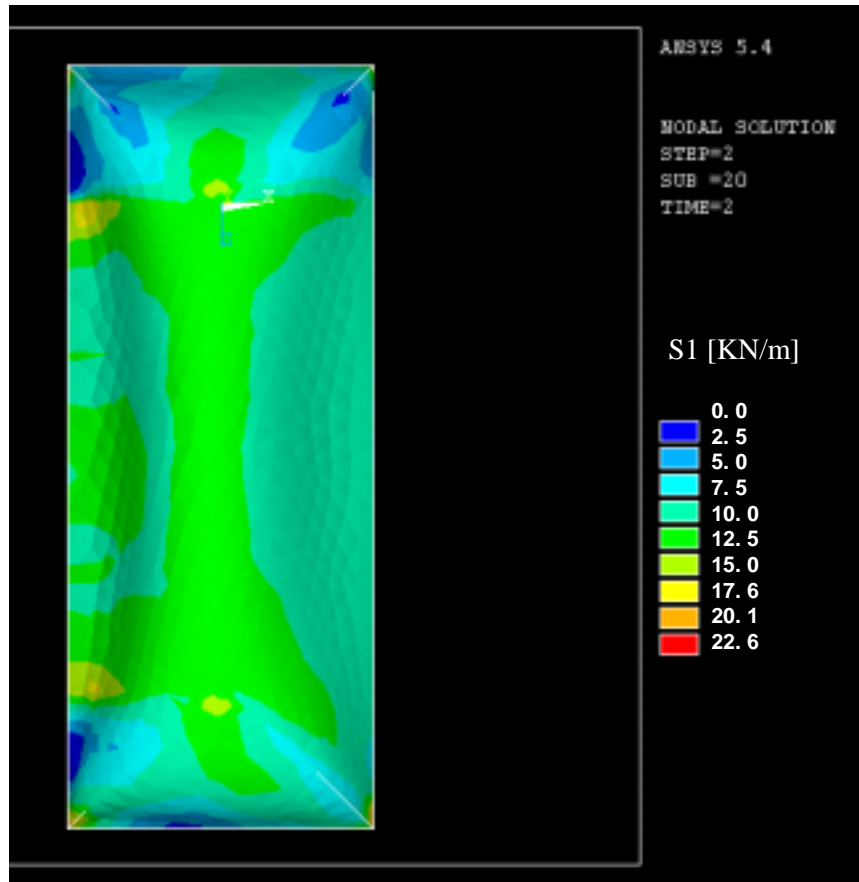


FIGURA 6.5.7: Esforços de membrana na direção principal 1, S1, devido à combinação de ações 3.

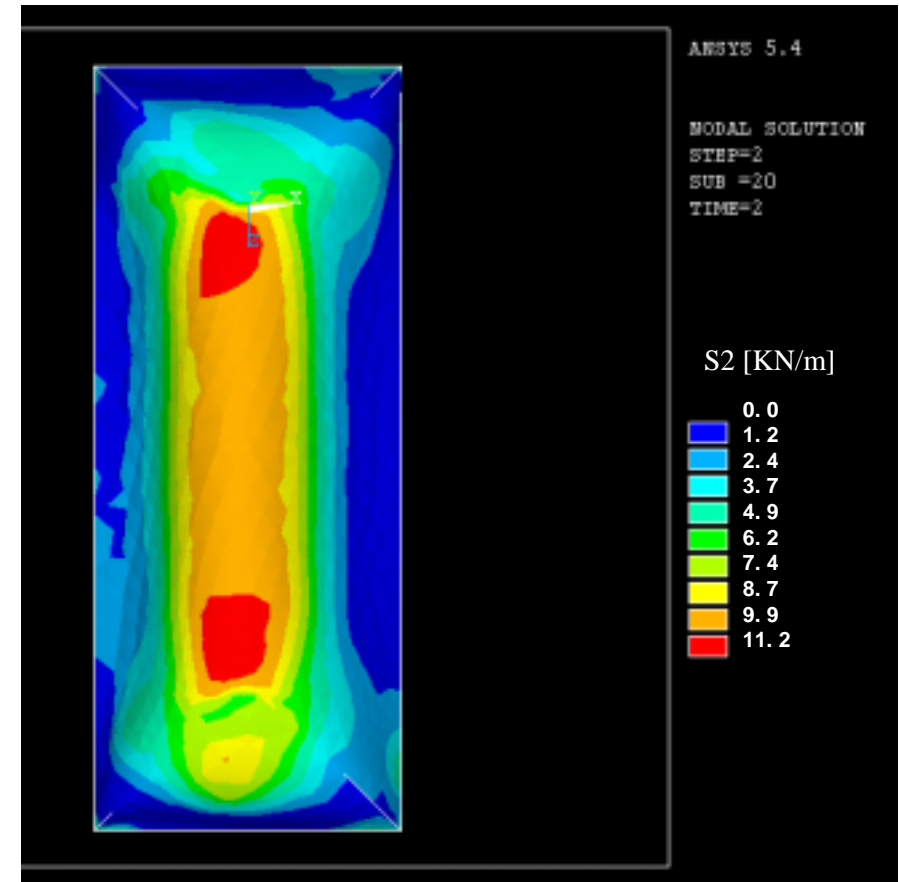


FIGURA 6.5.8: Esforços de membrana na direção principal 2, S2, devido à combinação de ações 3.

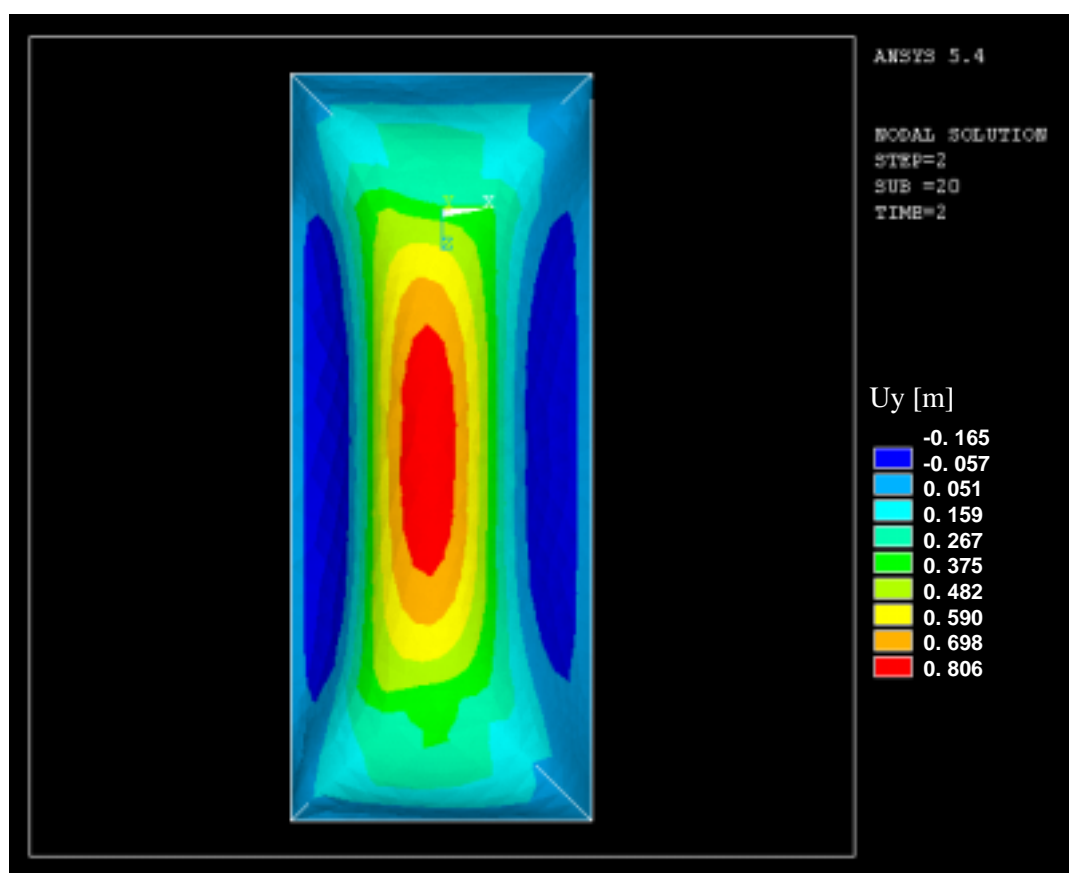


FIGURA 6.5.9: Deslocamentos Verticais da membrana,  $U_y$ , devido à combinação de ações 3.

### 6.5.3 Verificação das Tensões

Segundo o ASCE 17-96, os esforços na membrana devido às combinações das ações não podem ultrapassar a resistência à tração limite.

Assim sendo, pode-se observar

$$\bar{\sigma}_t = 29 \text{ KN/m} > S1 = 22.6 \text{ KN/m} \quad (6.5.3)$$

onde:  $\bar{\sigma}_t$  é a resistência à tração limite da membrana, definida na Eq.(6.5.2), e S1 é o máximo esforço de tração na membrana submetida às combinações de ação, Fig.(6.5.7).

Portanto, a membrana anteriormente definida, cujas características estão definidas na Tab.(6.2.1), pode ser empregada na cobertura do armazém em estudo.

## 6.6 Definição do Modelo de Corte da Membrana

O modelo de corte é definido a partir da forma inicial da membrana, buscando compatibilizar os requisitos de estética, os requisitos do processo de fabricação e a necessidade de minimizar o consumo de mão-de-obra e de material.

É importante ressaltar que a definição do modelo de corte aqui apresentada está de acordo com o sugerido por HERZOG (1977). Porém é interessante destacar que tal modelo é aplicado na Pistelli Engenharia Ltda.

Sendo assim, como mostram as Figs.(6.3.1-2) e (6.6.1), a superfície inicial da membrana é composta pela emenda de painéis cilíndricos, os quais, como mostram as Figs.(6.6.2), por suas vezes são compostos pela emenda de faixas de membrana.

O Painel 1, Fig.(6.6.1), denominado "corpo", é dividido em quatorze faixas  $a$ , três faixas  $b_1$  e duas faixas  $b_2$ . O Painel 2, denominado "canto", é dividido em cinco faixas  $d$ . Por fim, o Painel 3 corresponde à faixa  $c$ .

A superfície cilíndrica de cada painel pode ser transformada em uma superfície plana, denominada "superfície plana equivalente", a qual possui a mesma área da superfície cilíndrica original. As "superfícies planas equivalentes" dos Painéis 1 e 3 são retângulos. Entretanto, as "superfícies planas equivalentes" dos "cantos" (Painéis 2) são definidas pela interseção de cada "canto" com seus painéis adjacentes, como mostra a Fig.(6.6.3).

Após a definição da superfície plana de cada painel, definem-se os detalhes de corte de cada faixa, os quais são mostrados nas Figs.(6.6.4-10).

Cabe ressaltar que as faixas  $a$ ,  $c$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  e  $d_4$  possuem a largura nominal da membrana e que as faixas  $b_2$  e  $d_5$  possuem a largura suficiente para se completar os seus respectivos painéis. Destaca-se, ainda, que as faixas  $b_2$  são usualmente de cor diferente das demais faixas, buscando facilitar a orientação das pessoas no interior da cobertura, tendo em vista a melhor utilização do armazém. Neste caso as faixas  $b_2$  são azuis e as demais são brancas.

Finalizando o detalhamento do corte, a Tab.(6.6.1) mostra o resumo do consumo de membrana.

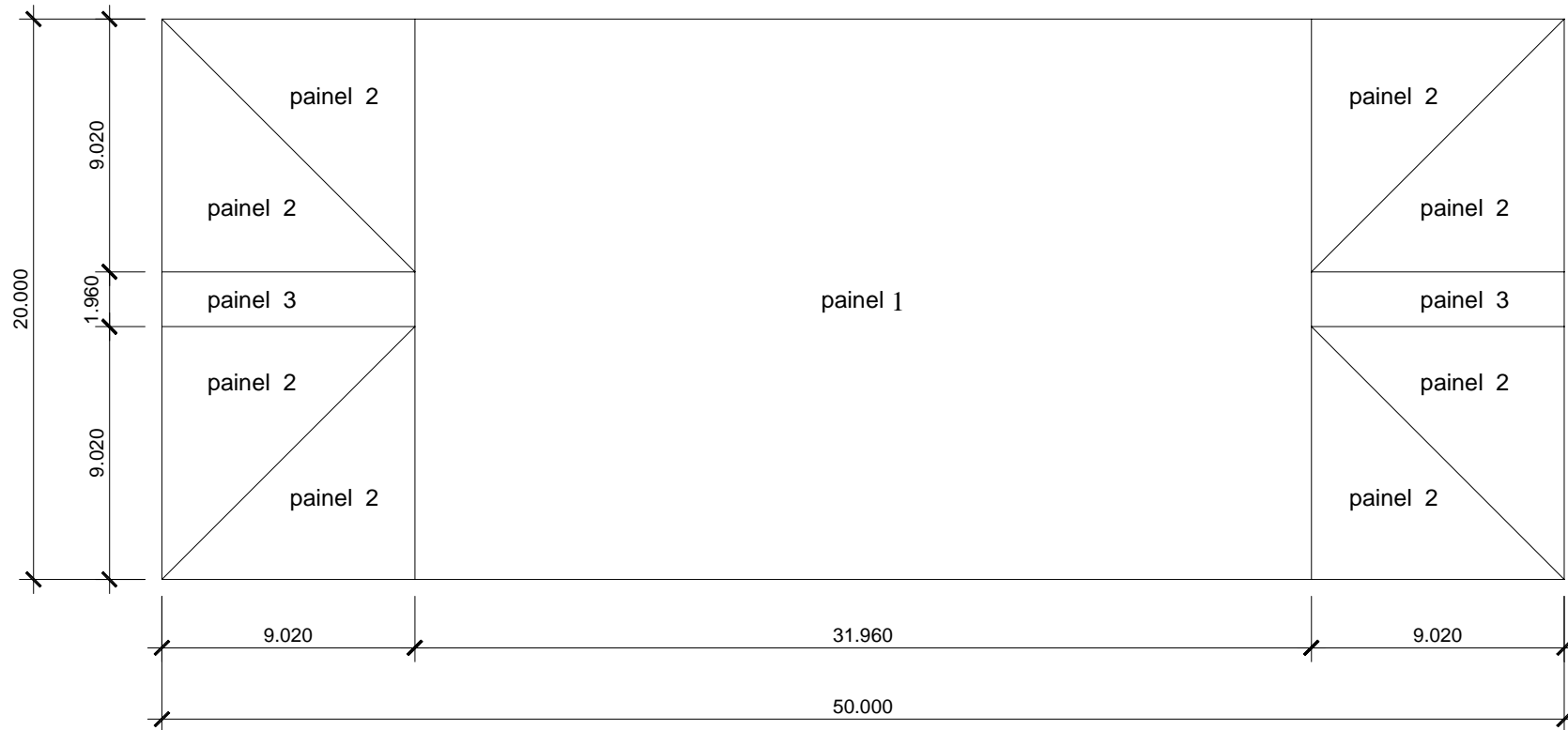


FIGURA 6.6.1: Definição dos painéis que compõem a superfície inicial da membrana.

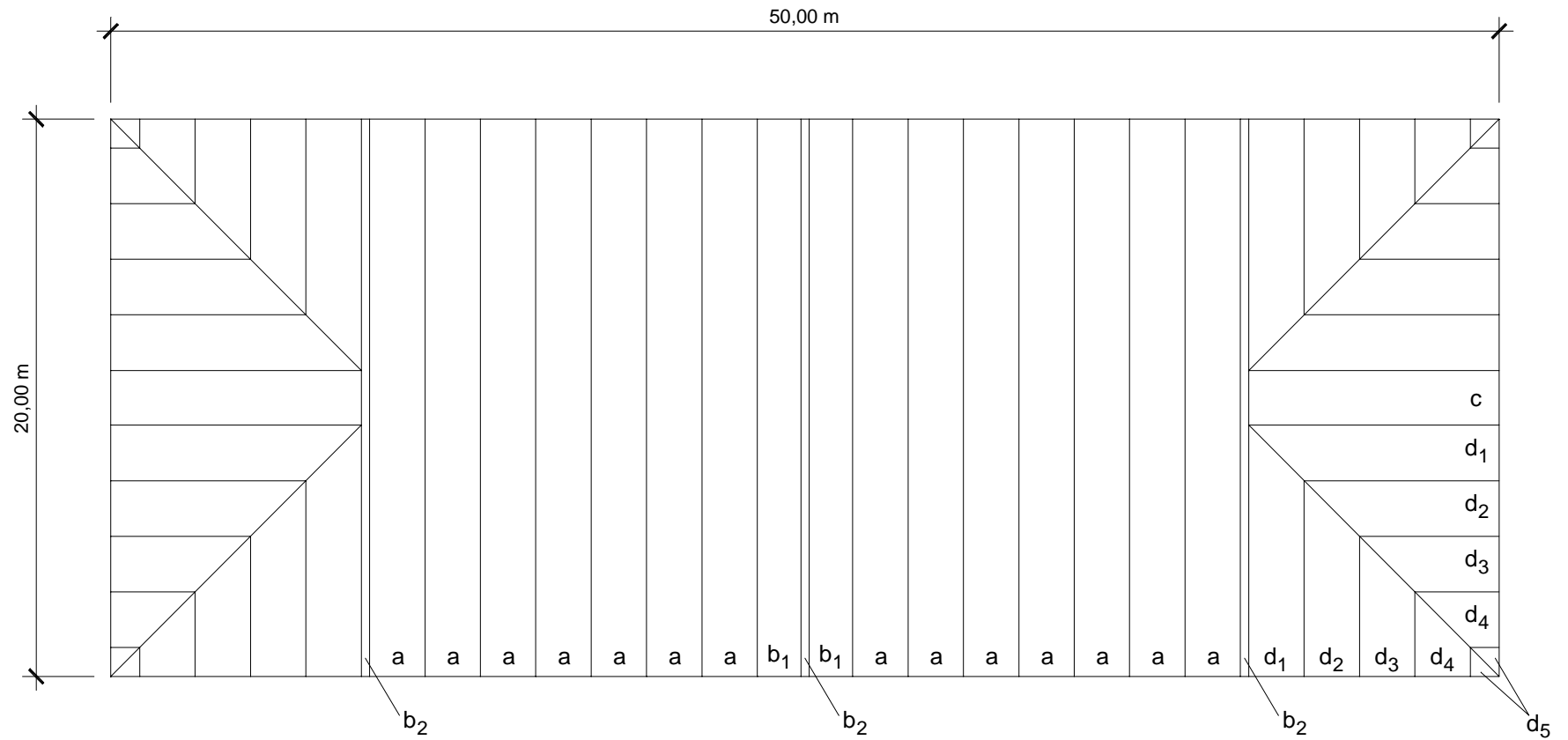


FIGURA 6.6.2: Definição das faixas que compõem os painéis.

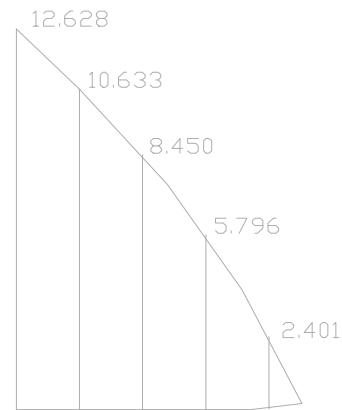
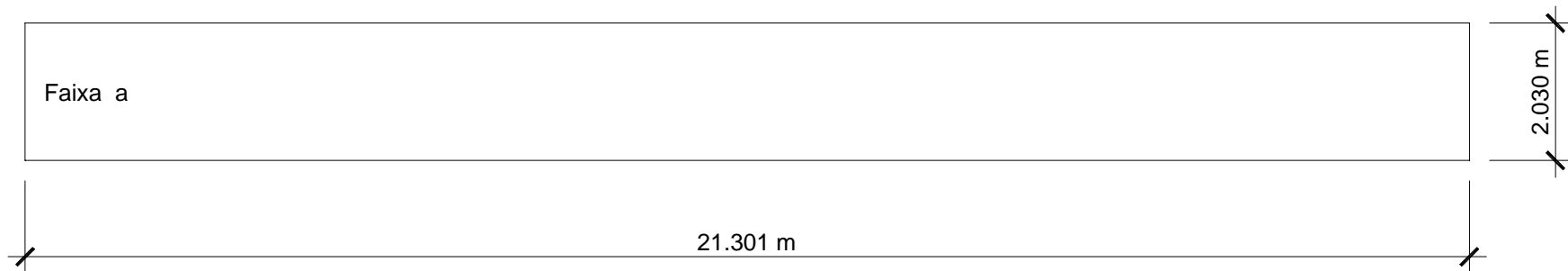
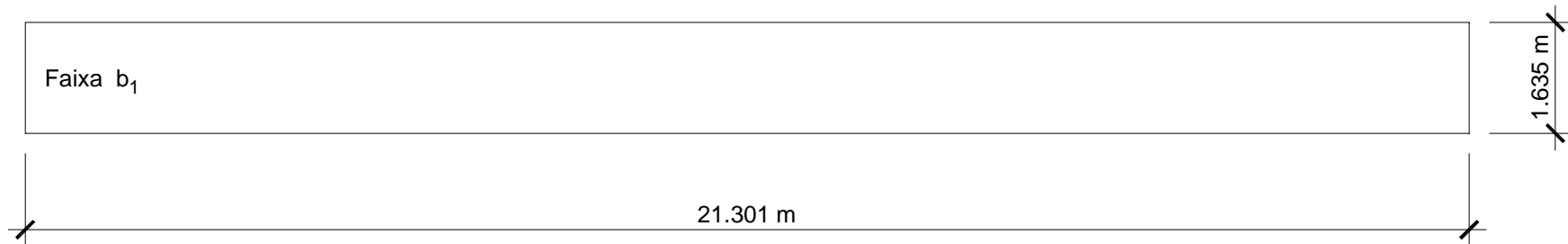


FIGURA 6.6.3: Definição da "superfície plana equivalente" dos painéis 2 ("contos").



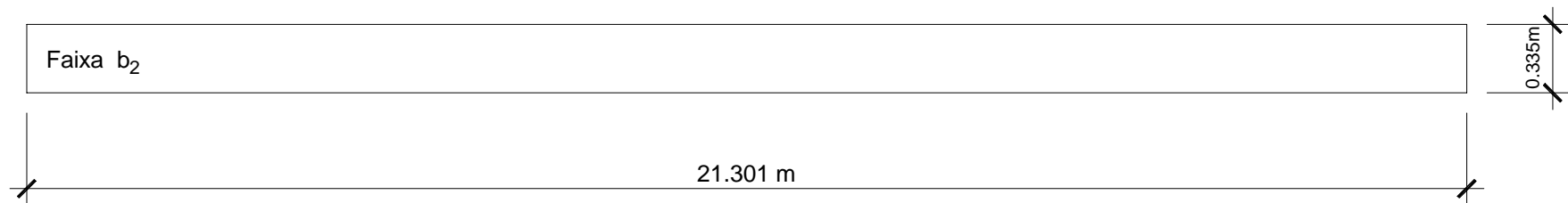
CORTAR 14 FAIXAS, comprimento=21.301m, largura=2.030m (PE 900-Branca)

FIGURA 6.6.4: Detalhamento do corte das faixas *a* do painel 1 ("corpo").



CORTAR 2 FAIXAS, comprimento=21.301 m, largura=1.635 m (PE 900-Branca)

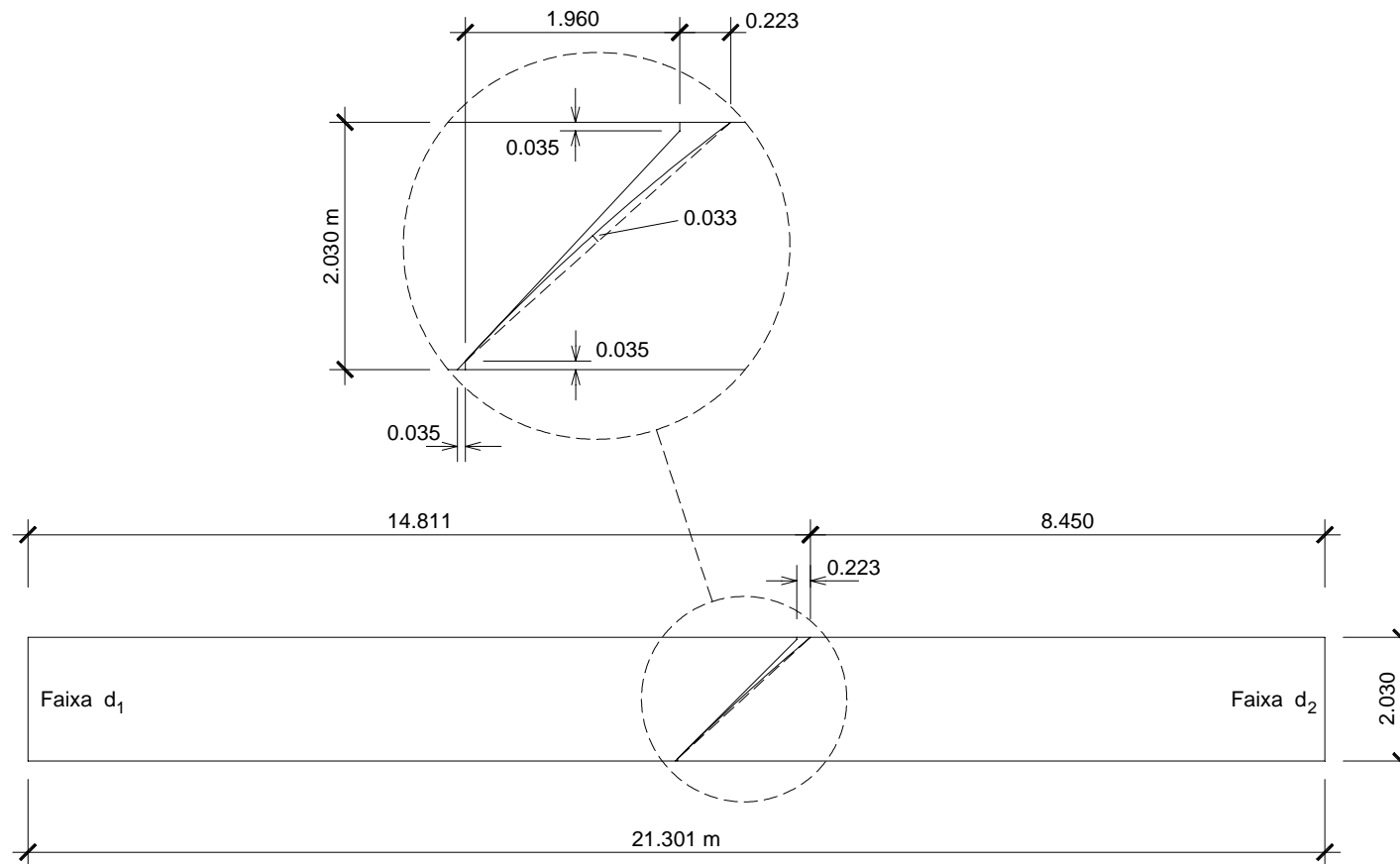
FIGURA 6.6.5: Detalhamento do corte das faixas  $b_1$  do painel 1 ("corpo").



CORTAR 3 FAIXAS, comprimento=21.301 m, largura=0.335 m (PE 900-Azul)

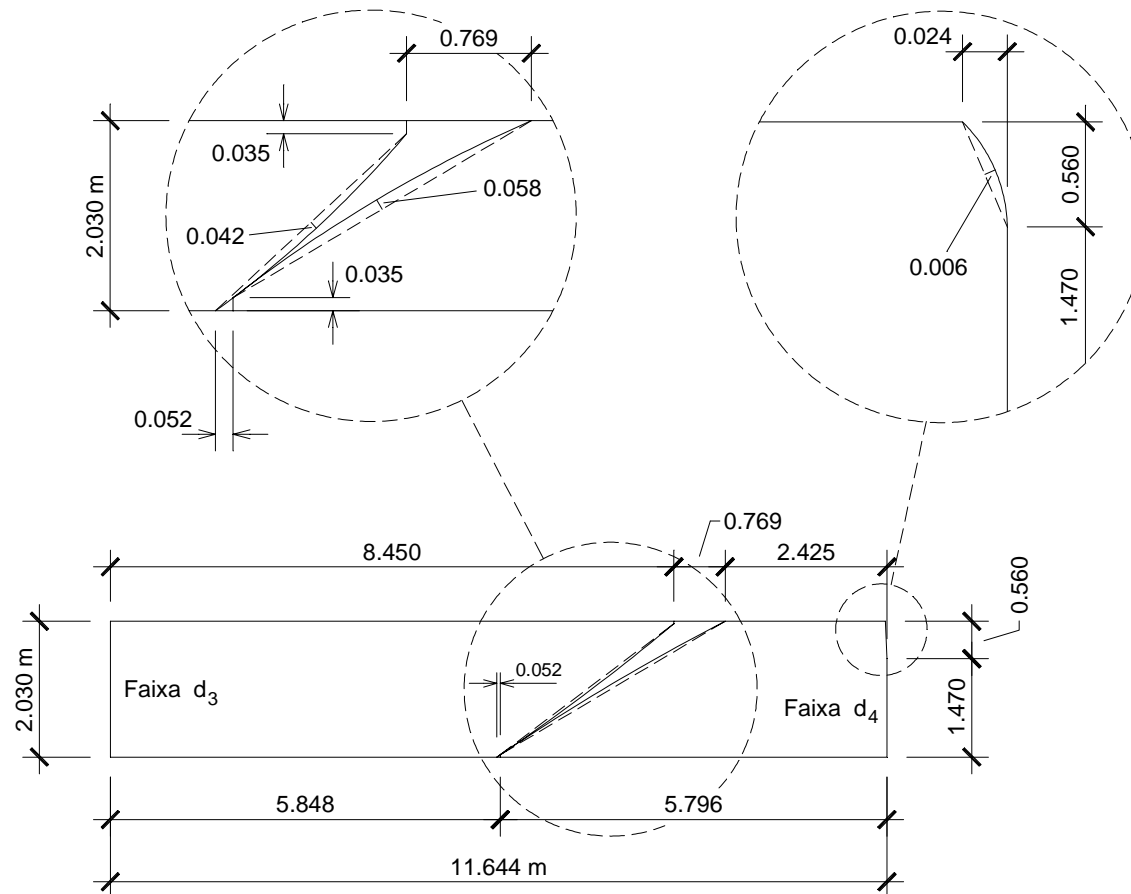
FIGURA 6.6.6: Detalhamento do corte das faixas  $b_2$  do Painel 1 ("corpo").





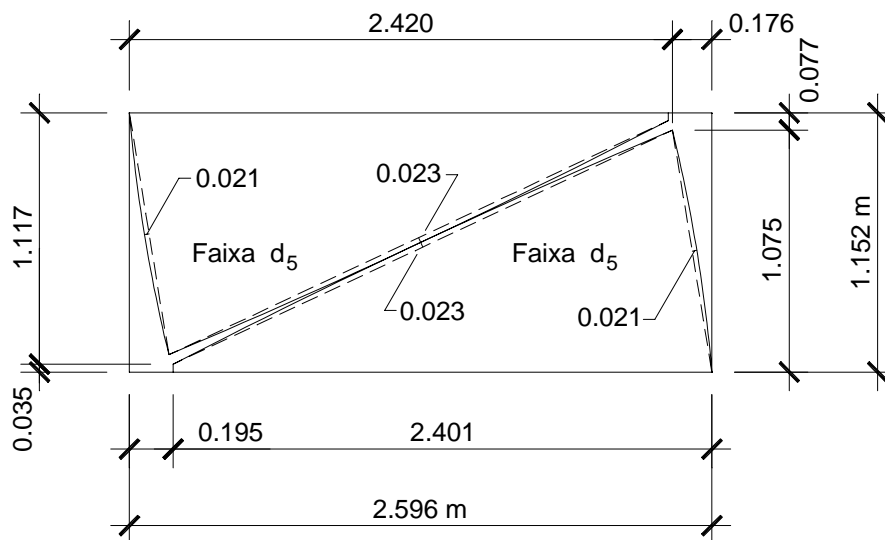
CORTAR 4 FAIXAS (lado direito), comprimento=21.301m, largura=2.030m (PE 900-Branca)  
 CORTAR 4 FAIXAS (lado avesso), comprimento=21.301m, largura=2.030m (PE 900-Branca)

FIGURA 6.6.7: Detalhamento do corte das faixas  $d_1$  e  $d_2$  dos painéis 2 ("cantos").



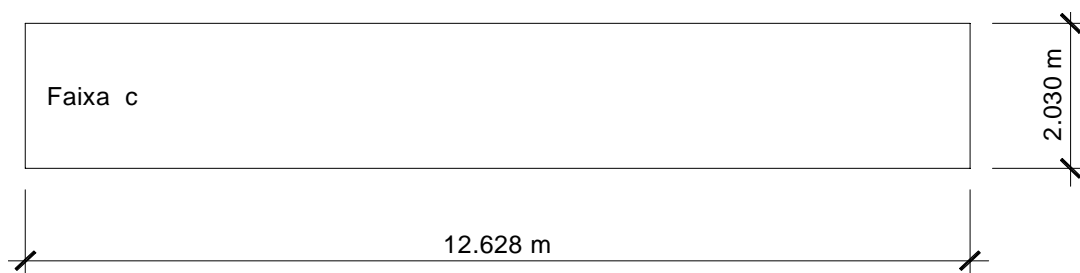
CORTAR 4 FAIXAS ( lado direito), comprimento=11.644m, largura=2.030m (PE 900-Branca)  
 CORTAR 4 FAIXAS ( lado avesso), comprimento=11.644m, largura=2.030m (PE 900-Branca)

FIGURA 6.6.8: Detalhamento do corte das faixas  $d_3$  e  $d_4$  dos painéis 2 ("cantos")



CORTAR 4 FAIXAS, comprimento=2.596m, largura=1.152m (PE 900-Branca)

FIGURA 6.6.9: Detalhamento do corte das faixas  $d_5$  dos painéis 2 ("cantos").



CORTAR 2 FAIXAS, comprimento=12.628m, largura=2.030m (PE 900-Branca)

FIGURA 6.6.10: Detalhamento do corte das faixas  $c$  dos painéis 3.

TABELA 6.6.1: Resumo do Consumo de Membrana na Cobertura.

Painel	Discriminação	Especificação	Quantidade	Comprimento[m]	Largura [m]	Consumo [m <sup>2</sup> ]
1 "Corpo"	Faixas $a$	PE 900 - Branca	14	27.216	2.03	773.45
	Faixas $b_1$	PE 900 - Branca	2	27.216	1.635	89.00
	Faixas $b_2$	PE 900 - Azul	3	27.216	0.335	27.35
2 "Cantos"	Faixas $d_1$ e $d_2$	PE 900 - Branca	8	21.301	2.03	345.93
	Faixas $d_3$ e $d_4$	PE 900 - Branca	8	11.644	2.03	189.10
	Faixas $d_5$	PE 900 - Branca	4	2.596	1.152	11.96
3	Faixas $c$	PE 900 - Branca	2	12.628	2.03	51.27

## 6.7 Considerações Finais

Apresentou-se o projeto de uma estrutura pneumática do tipo *air supported* típica. Foram empregadas as recomendações para o projeto de estruturas de membrana suportada pelo ar indicadas pelo ASCE-96. Observa-se que as recomendações do ASCE-96 foram respeitadas para o caso estudado.

É importante destacar que no projeto, considerou-se o caso do vento incidindo a 90°. A trabalho de TURKKAN & SRIVASTAVA(1992) descreve um *software* voltado para a análise e projeto de estruturas de membrana suportadas pelo ar cilíndricas, o qual leva em consideração apenas o vento incidindo a 90°. OTTO & TROSTEL(1967) também consideram apenas o vento incidindo perpendicularmente ao eixo das membranas pneumáticas cilíndricas. Entretanto, segundo SRIVASTAVA & TURKKAN (1995), a ação do vento em membranas cilíndricas leva a níveis de tensão maiores para o vento incidindo a 60°, enquanto, a ação do vento incidindo a 90° é mais crítica com relação à estabilidade da estrutura. Sendo assim, percebe-se a importância de estudo mais detalhado da ação do vento nas estruturas de membrana, mesmo em estruturas usuais. Neste sentido, TURKKAN & SRIVASTAVA (1995) estudam a distribuição do vento em estruturas pneumáticas do tipo *air supported* através da aplicação de redes neurais.

Deve-se ressaltar que, como indicam as Figs.(6.6.3), (6.6.8) e (6.6.9), é usual o encurtamento das faixas dos "cantos", através de uma curva suave. Este detalhe, usualmente empregado pelos fabricantes, não foi considerado no modelo empregado na análise estrutural. Entretanto, a partir da análise da estrutura submetida às ações, observando a configuração final da membrana, Figs.(6.5.1) e (6.5.5), pode-se perceber que existe excesso de material nos "cantos", para estas combinações de ações. Tal excesso, além de possibilitar uma configuração final de equilíbrio menos agradável esteticamente, pode levar ao aparecimento de rugas. Entretanto, para o caso em questão, sem o referido encurtamento das faixas, satisfizeram-se as condições de equilíbrio.

O projeto foi realizado com o emprego do ANSYS 5.4 para a modelagem da forma inicial da membrana em três dimensões (pré-definida) e para a verificação desta através da análise da membrana submetida às ações. O AUTO-CAD 15 foi empregado na detalhamento do modelo de corte em duas dimensões, os quais são necessários na confecção do "envelope" da cobertura.

---

## CAPÍTULO 7

# CONCLUSÃO

### 7.1 Considerações Iniciais

As estruturas de membrana empregadas em coberturas são sistemas construtivos formados principalmente pela membrana estrutural, que ainda tem a função de vedar. As membranas estruturais são folhas flexíveis que resistem às ações externas devido à sua forma, às suas características físicas e ao seu pré-tracionamento. Este pode ser alcançado, ou através do estiramento da membrana por meio de cabos (estruturas de membrana protendida por cabos), ou através da atuação da pressão de gases (estruturas pneumáticas).

A tecnologia envolvida no desenvolvimento das estruturas de membrana abrange a do sistema construtivo, a do processo de projetar e a dos métodos de análise estrutural a serem utilizados.

Os principais aspectos do sistema construtivo são aqueles ligados à confecção da membrana, à ancoragem, ao transporte, à montagem e, para o caso de estruturas pneumáticas, ao sistema de bombeamento de ar e ao sistema de acesso ao espaço pressurizado.

O projeto das estruturas de membrana é basicamente composto pela resolução de três problemas: definição da forma da membrana, definição do modelo de corte e análise do comportamento estrutural da membrana submetida às ações. O processo de projetá-las abrange a resolução destes três problemas, nos quais há grande interdependência entre os dados geométricos, mecânicos e de fabricação.

A análise estrutural usualmente requer uma abordagem específica. Na resolução daqueles problemas podem-se empregar métodos de análise estrutural, os quais são usualmente o Método da Densidade de Força, o Método da Relaxação Dinâmica e o Método da Análise Não-linear Direta. HABER & ABEL (1982c) sugerem que o projetista tenha diversos métodos à sua disposição, por não haver um método ótimo para todas as situações de projeto. Ainda segundo estes autores, os resultados de cálculo obtidos com um

determinado método podem ser usados como entrada de dados em subseqüentes análises com outros métodos, buscando o aperfeiçoamento do projeto final.

Sendo assim, apresentou-se uma abordagem integrada do sistema construtivo, do processo de projetar e dos métodos de análise das estruturas de membrana empregadas em coberturas. Esta abordagem consiste na sistematização do conhecimento científico existente sobre este sistema estrutural, abrangendo aspectos ligados ao desenvolvimento desta tecnologia, de questões relacionadas com a construção até as ligadas ao projeto.

A partir desta abordagem, pôde-se propor um modelo de pesquisa integrado voltado para o desenvolvimento dessa tecnologia no Brasil. Este modelo deve auxiliar a coordenação e a compatibilização dos esforços de investigação científica nas diversas áreas do conhecimento envolvidas no desenvolvimento das estruturas de membrana.

## 7.2 Modelo Integrado de Pesquisa em Estruturas de Membrana

A construção e o projeto das estruturas de membrana envolvem muitas áreas de conhecimento, as quais suportam a tomada de decisões e contribuem para o aumento da eficácia e da eficiência do processo de construí-las e do processo de projetá-las. Sendo assim, no desenvolvimento desses processos, devem-se explorar, em cada investigação científica ou tecnológica, as inter-relações entre as áreas de conhecimento envolvidas, buscando o compartilhamento de visões e de informações entre as mesmas.

Desse modo, pode-se concluir pela necessidade de implementação de um modelo integrado de pesquisa em estruturas de membrana, o qual está esquematizado na Fig. (7.2.1). Esta figura, análoga a um disco, é composta por quatro faixas. Ao centro, na primeira faixa, tem-se o projeto de pesquisa temático, o qual busca a integração das áreas de conhecimento nas investigações científicas ou tecnológicas a serem desenvolvidas. A segunda faixa é dividida em três setores, os quais representam as três linhas de pesquisa que compõem o modelo. A terceira faixa é dividida em treze setores, os quais representam os temas das pesquisas a serem executadas nas referidas linhas de pesquisa. A última faixa, contorna a figura esquemática do modelo de pesquisa, é dividida em seis setores, os quais representam as áreas de conhecimento que podem contribuir para o desenvolvimento das estruturas de membrana.

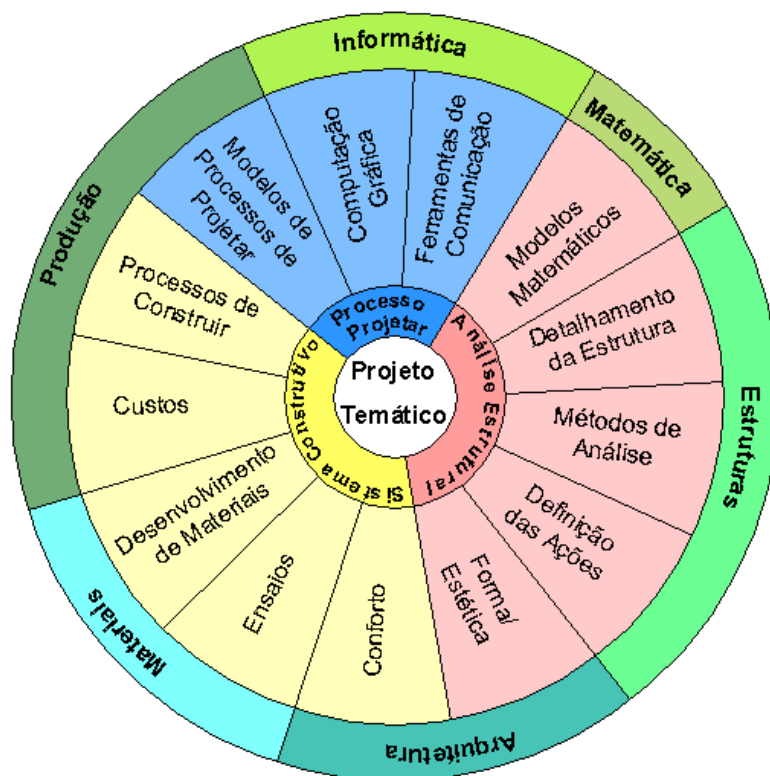


FIGURA 7.2.1: Modelo Integrado de Pesquisa em Estruturas de Membrana.

O projeto de pesquisa temático, o qual deve ser elaborado a partir de uma perspectiva global do processo de construir e do processo de projetar as estruturas de membrana, tem por objetivo o domínio da tecnologia envolvida nestes processos. Tendo em vista tal objetivo, na elaboração do referido projeto, deve-se buscar: a identificação dos requisitos necessários ao desenvolvimento destes processos; a identificação das lacunas existentes no conhecimento científico, tendo em vista o atendimento dos requisitos anteriormente definidos; a identificação das áreas de conhecimento que precisam ser envolvidas na eliminação destas lacunas e, por fim, a definição de mecanismos de coordenação das investigações científicas e tecnológicas em todas essas áreas de conhecimento, para se garantir a integração destas.

Durante o projeto de doutorado, a autora identificou alguns requisitos para o desenvolvimento da tecnologia, os quais devem ser vistos como uma primeira sugestão do desdobramento do presente modelo. Tais requisitos, foram agrupados em temas de pesquisa, e estes em linhas de pesquisa.

A primeira linha de pesquisa, **Desenvolvimento do Sistema Construtivo**, envolve principalmente as áreas de Produção, Materiais e Arquitetura. Esta linha, Fig. (7.2.1), é composta pelos seguintes temas:



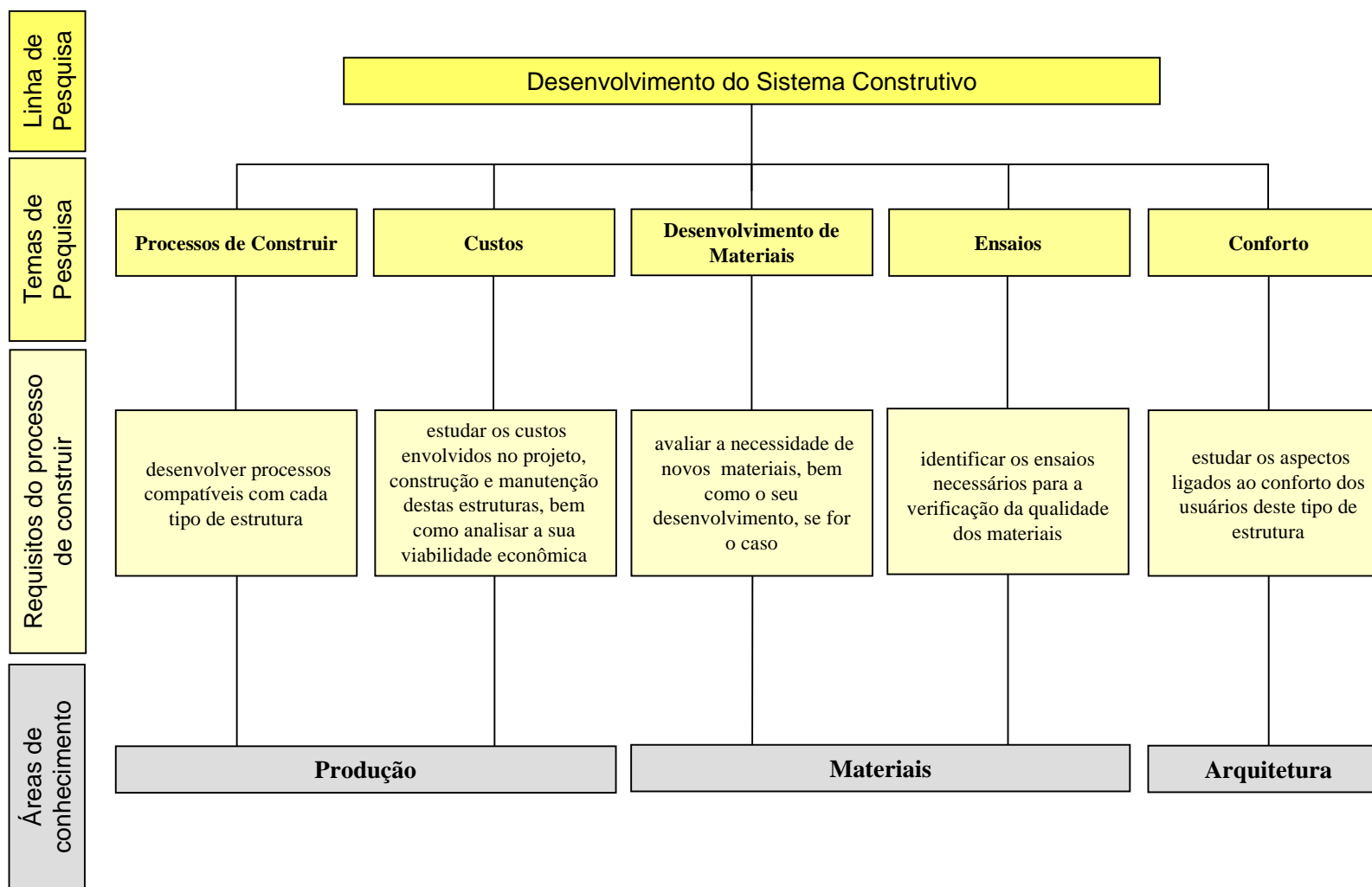


FIGURA 7.2.1: Desdobramento da Linha de Pesquisa 1, Desenvolvimento do Sistema Construtivo.

- *Processos de Construir*, no qual é requerido o desenvolvimento de processos compatíveis com cada tipo de estrutura, compreendendo o detalhamento dos principais procedimentos da sua construção;
- *Custos*, no qual deve-se estudar os custos envolvidos no projeto, construção e manutenção destas estruturas, bem como analisar a sua viabilidade econômica;
- *Desenvolvimento de Materiais*, que envolve a avaliação da necessidade de novos materiais específicos para as condições brasileiras, bem como seu desenvolvimento, se for o caso;
- *Ensaio*, no qual devem-se identificar os ensaios necessários para a verificação da qualidade dos materiais, tendo em seus requisitos de segurança e durabilidade, bem como as indicações das normas; e
- *Conforto*, que envolve estudar os aspectos ligados ao conforto dos usuários deste tipo de estrutura, principalmente aqueles ligados a circulação de ar nas pneumáticas do tipo *air supported*.

A segunda linha de pesquisa, **Desenvolvimento do Processo de Projetar**, envolve principalmente as áreas de Produção, Informática e Matemática. Esta linha de pesquisa, Fig. (7.2.2), é composta pelos seguintes temas:

- *Modelos de Processos de Projetar*, que envolve definir como projetar as estruturas de membrana e quais as tecnologias a serem empregadas no projeto, tendo em mente os diversos níveis de complexidade das estruturas;
- *Computação Gráfica*, deve-se estudar como disponibilizar os modelos das estruturas, tais como: o modelo da estrutura na forma inicial, o modelo de corte com os detalhes para a fabricação e o modelo da estrutura na configuração final;
- *Ferramentas de Comunicação* — como geralmente os processos de projetar envolvem a participação de clientes, arquitetos, engenheiros e fabricantes, as quais usualmente não estão em um mesmo espaço físico, deve-se dispor de ferramentas de comunicação para a elaboração do projeto através da colaboração destes atores.

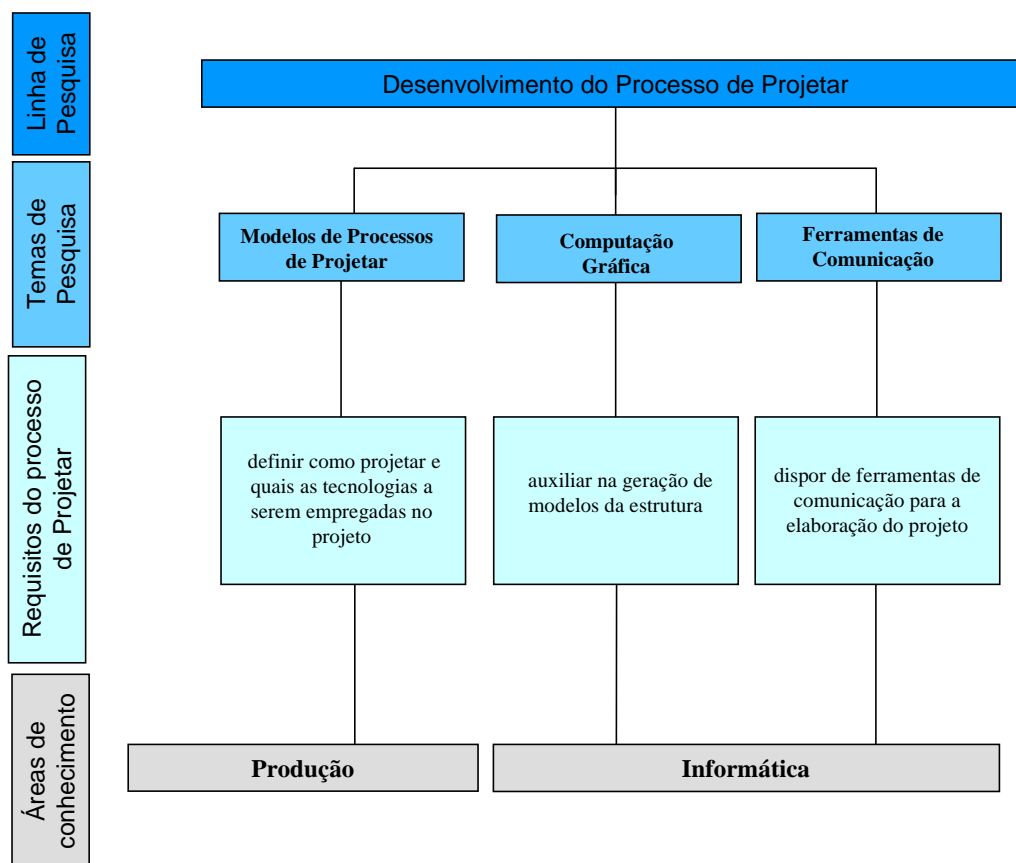


FIGURA 7.2.2: Desdobramento da Linha de Pesquisa 2, Desenvolvimento do Processo de Projetar.

Por fim, a terceira linha de pesquisa, **Desenvolvimento da Análise Estrutural**, envolve principalmente as áreas de Estruturas, Matemática e Arquitetura. Esta linha de pesquisa, Fig. (7.2.3), é composta pelos seguintes temas de pesquisa:

- *Métodos de Análise*, devem-se dominar os métodos existentes, desenvolver formulações condizentes com os níveis de complexidade das estruturas a serem projetadas e disponibilizá-los para a comunidade;
- *Detalhamento da Estrutura*, devem-se apresentar os detalhes das estruturas para a construção, onde atenção especial deve ser dada aos detalhes de corte e emenda da membrana e aos detalhes dos elementos a serem empregados na ancoragem da mesma;
- *Definição das Ações*, deve-se estudar, principalmente, a ação do vento através de ensaios em túnel do vento;
- *Modelos Matemáticos*, devem-se buscar as soluções dos problemas inerentes ao projeto das estruturas de membrana;
- *Forma/estética*, devem-se avaliar as diversas formas e os diversos modelos de corte da membranas possíveis.

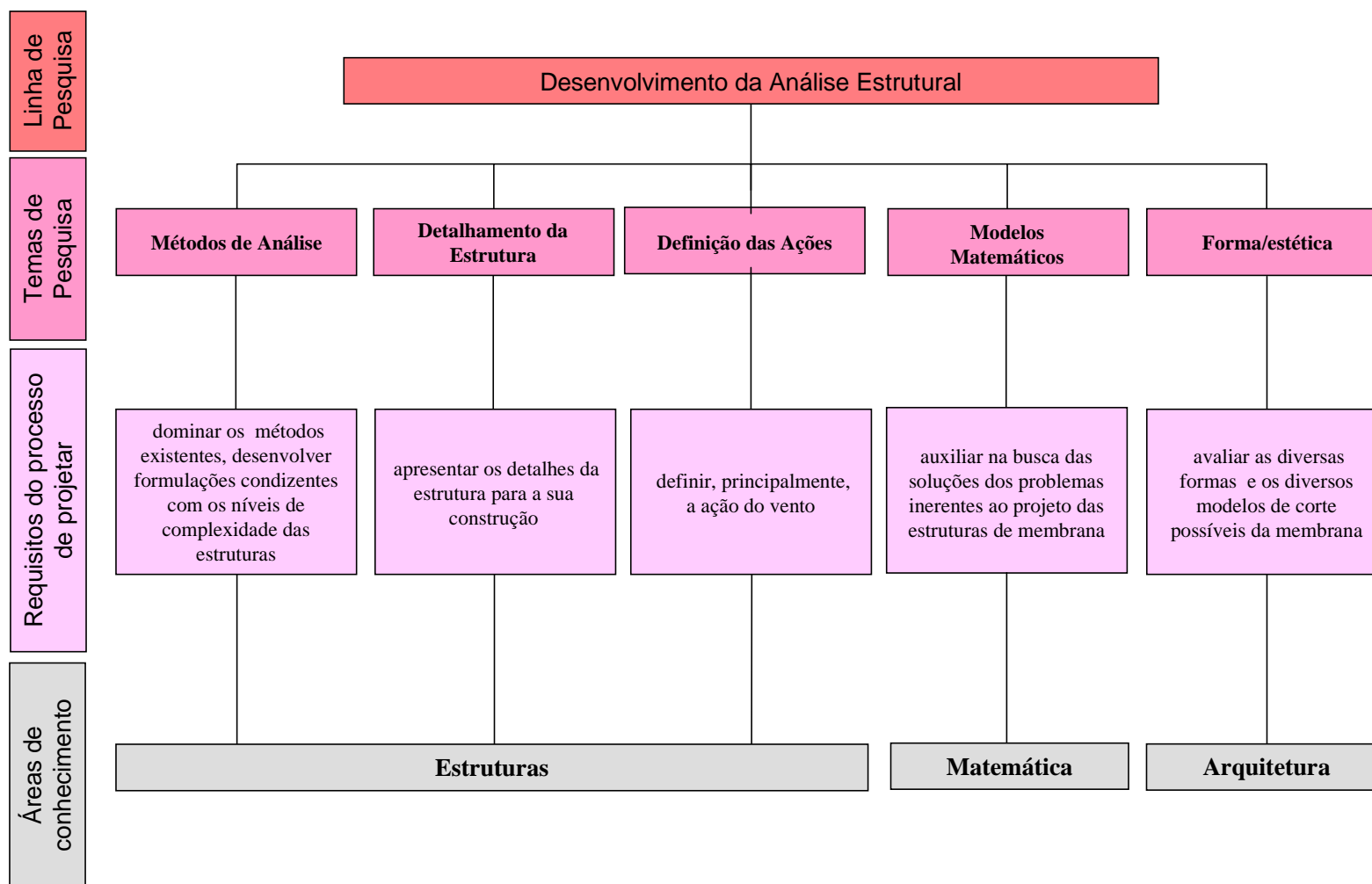


FIGURA 7.2.3: Desdobramento da Linha de Pesquisa 3, Desenvolvimento da Análise Estrutural.

Com relação às duas últimas linhas de pesquisa, as investigações científicas e tecnológicas devem resultar na elaboração de um sistema computacional voltado para a solução dos problemas inerentes ao projeto destas estruturas — determinação da forma da membrana, definição do modelo de corte e análise do comportamento estrutural da membrana submetida às ações. Neste sistema computacional devem-se disponibilizar diversos métodos de análise estrutural e recursos gráficos interativos e, ainda, devem-se envolver ferramentas de comunicação e conceitos de colaboração.

### 7.3 Considerações Finais

O desenvolvimento das pesquisas em estruturas de membrana de acordo com o modelo proposto deve ter como ponto de partida a sistematização dos conhecimentos desta tese de doutorado, da qual pode-se concluir que as principais publicações sobre o tema são as apresentadas no Quadro (7.3.1).

Inserida no modelo de pesquisa proposto, na continuação desta pesquisa de doutorado, a autora está desenvolvendo um programa de computador em linguagem FORTRAN com o método da densidade de força, o qual para ser concluído falta a implementação da parte gráfica. Os recursos gráficos viabilizam a análise dos resultados e facilitam a entrada de dados da experimentação numérica, a qual é necessária para se aferir os resultados. Este sistema computacional deve possibilitar a definição da forma e a definição dos modelos de corte de estruturas de membrana, sendo assim pode-se gerar os dados de entrada na análise da membrana submetida às ações com o emprego de *softwares* comerciais, como por exemplo o ANSYS.

A autora está direcionando seus esforços em pesquisa, também, na definição das estratégias necessárias para a utilização do ANSYS. A partir destas pesquisas, pôde-se perceber que é necessário algumas estratégias específicas na análise de estruturas de membrana, tais como: possibilidade de se adotar protensão de elementos (não apenas impondo deformações) e/ou a possibilidade de se mudar o módulo de elasticidade dos materiais durante a análise. O domínio do ANSYS necessário para se conseguir aplicar tais estratégias possibilita resolver o problema de uma forma mais geral, com o método de análise não-linear direta.

QUADRO 7.3.1: Principais trabalhos publicados sobre as estruturas de membrana.

<b>OBJETOS DE ESTUDO</b>		<b>PRINCIPAIS PUBLICAÇÕES</b>
<b>SISTEMA CONSTRUTIVO</b>		BIRDAIR (1998) ROBBIN (1996) VANDENBERG (1996) FORSTER (1994) DENT (1971) HERZOG (1977) OTTO & TROSTEL (1967)
<b>PROCESSO DE PROJETAR</b>		LEWIS (1998) VÉRON et al (1998a) VÉRON et al (1998b) ASCE 17-96 ADDIS (1994) MAKOWSKI (1993) KNUDSON (1991) MAJOWIECKI (1985) HERZOG (1977) LEONARD (1974)
<b>ANÁLISE ESTRUTURAL</b>	<b>Método da Densidade de Força</b>	MAURIN & MOTRO (1998) GRÜNDING & BAHNDORF (1988) SCHEK (1973)
	<b>Método da Relaxação Dinâmica</b>	BARNES (1994) LEWIS (1993) BARNES & WAKEFIELD (1988) DAY (1965)
	<b>Método da Análise Não-linear Direta</b>	TABARROK & QIN (1992) FUJIKAKE et al (1989) LEONARD (1988)
	<b>Ação do Vento</b>	SRIVASTAVA & TURKKAN (1995) TURKKAN & SRIVASTAVA (1995) TURKKAN & SRIVASTAVA (1992)
	<b>Processos Analíticos</b>	LEONARD (1988) HERZOG (1977) OTTO & TROSTEL (1967)

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADDIS, W. (1994). Design revolutions in the history of tension structures. *Structural Engineering Review*, v.6, n.1, p.1-10.
- AGUIAR, E. O.(1999). Contribuição ao estudo de estruturas de cabos para coberturas de grandes áreas livres, considerando as não linearidades física e geométrica. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- ALLISON, D. (1959). Those ballooning air buildings. *Architectural forum*, v.111, n.1, p.134-139
- AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. (1996). ASCE 17-96. *Air-Supported Structures - Standards*. New York. 30p.
- ARCHITECTURAL DESIGN. (1968). *Pneu World*. London, June.
- ARCHITECTURAL DESIGN. (1995). *Tensile Structures*. London, v.65, n.9/10.
- ARCHITECTURAL DESIGN. (1998). *Ephemeral/ Portable Architecture*. London, v.68, n.9/10, September - October.
- ARCHITECTURAL FABRIC STRUCTURES INSTITUTE. (1977). ASI-77. *Air structures design and standards manual*. Glenview, IL.
- ARGYRIS, J. H. et al. (1974). A general method for the shape finding of lightweight tension structures. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.3, p.135-149.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. (1980). NBR-6123 - *Forças devidas ao vento em edificações*. Rio de Janeiro, ABNT.
- BARBATO, R. L. A. (1972). *Sobre o comportamento estático de cabos de coberturas pênseis*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- BARBATO, R. L. A. (1975). *Contribuição ao estudo das coberturas pênseis em casca protendida de revolução*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- BARBATO, R. L. A. (1991). *Emprego de cabos livremente suspensos e cabos-treliça na construção de coberturas pênseis*. Tese (Livre-docência) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.

- BARNES, M. R. (1984). Form-finding, analysis and patterning of tension structures. In: 3<sup>rd</sup> INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURES, Guildford, p.730-736. *Proceedings*.
- BARNES, M. R. (1988a). Computer aided design of the shade membrane roofs for EXPO88. *Structural Engineering Review*, v.1, p.3-13
- BARNES, M. R. (1994). Form and stress engineering of tension structures. *Structural Engineering review*, v.6, n.3-4, p.175-202.
- BARNES, M. R.(1975). Applications of dynamic relaxation to the topological design and analysis of cable, membrane and pneumatic structures. In: 2<sup>rd</sup> INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURES, p.211-219. *Proceedings*.
- BARNES, M. R.(1980). Non-linear solution methods for static and dynamic analysis of tension structures. In: AIR SUPPORTED STRUCTURES: THE STATE OF THE ART, The Institution of Structural Engineers, p.38-56. *Proceedings*.
- BARNES, M. R.; WAKEFIELD, D. S. (1988) Form-finding, analysis and patterning of surface-stressed structures. In: 1<sup>st</sup> INTERNATIONAL OLEG KERENSKY CONFERENCE ON TENSION STRUCTURES, London, UK. Session4, p.8-15. *Proceedings*.
- BARNES, M.R. (1988)b. Form-finding and analysis of pre-stressed nets and membranes. *Computer and Structures*, v.30, n.3, p.685-695.
- BERGER, H.; DE PAOLA, E. M. (1992). Tensile terminal. *Civil engineering* (new York), v.62, n.11, p.40-43.
- BIRDAIR. (1998). *Air supported structures showcase*. <http://www.birdair.com/airsup.html> (09 mar).
- BULSON, P. S. (1973). Design principles of pneumatic structures. *The structural engineer*, v.51, n.6, p.209-215
- COBURN, N. (1955). *Vector and tensor analysis*. The Macmillan Company, New York.
- CONTRI, P. SCHREFLER, B. A. (1988). A geometrically nonlinear finite element analysis of wrinkled membrane surfaces by a no-compression material model. *Communications in applied numerical methods*, v.4, p.5-15.
- CRAIG, H. V.(1943). *Vector and tensor analysis*. McGraw-Hill, London and New York.
- CRISWELL, M. E; SADEH W. Z; ABARBANEL J. E. (1996). *Air inflated technology*. <http://www.lance.colostate.edu/~willy/inflatable/aas/..> (20/mai)
- DAVID, R. A . (1995). *Estudo de cestas protendidas pela técnica do meio contínuo*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.



- DAY, A. S. (1965). An introduction to dynamic relaxation. *The engineer*, p.218-221
- DENT, N. R. (1971). *Principles of pneumatic architecture*. London, The Architectural Press.
- DREW, P. (1979). *Tensile architecture*. London, Granada Publ. 237p.
- DUCATTI, V. A. (1986). *Análise estática de torres estaiadas* Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- EL DEBS, A. L. H. C. (1983). *Contribuição ao estudo das coberturas pênseis com cabos-treliça*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- FIRTH, I. P. T.(1993).Design construction and maintenance of air-supported membrane structures in the UK. In: FOUTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURAS, University of Surrey, Guildford, UK, 5-10 September. *Proceedings*.
- FORSTER, B. (1994). Cable and membrane roofs: a historical survey. *Structural Engineering Review*, v.6, n.3-4, p. 145-174.
- FUJIKAKE, M. KOJIMA, O.; FUKUSHIMA, S. (1989). Analysis of fabric tension structures. *Computer and structures*, v.32, n.3/4, p.537-547.
- GALASKO, G. et al. (1997) Textile structures: a comparison of several cutting pattern methods. *International journal of space structures*, v.12, n.1, p.9-18.
- GEA, H. C. (1996). Topology optimisation: a new microstructure-based design domain method. *Computer and structures*, v.61, n.5, p.781-788
- GEIGER, D. H. (1988). Cost comparison of roof systems for sports halls. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures*, v. 29, p.9-23.
- GOSLING, P. D.; LEWIS, W. J. (1996a). Optimal structural membranes I: formulation of a curved quadrilateral element for surface definition. *Computers and structures*, v.61, n.5, p.871-883.
- GOSLING, P. D.; LEWIS, W. J. (1996b). Optimal structural membranes II: form-finding of prestressed membranes using a curved quadrilateral finite element for surface definition. *Computers and structures*, v.61, n.5, p.885-895.
- GRÜNDING, L. (1988). Minimal surfaces for finding forms of structural membranes. *Computer and Structures*, v.30, n.3, p.679-683.
- GRÜNDING, L.; BAHNDORF, J. (1988). The design of wide-span roof structures using micro-computers. *Computer and Structures*, v.30, n.3, p.495-501.
- HABER, R. B.; ABEL, J.F. (1982a). Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes: part1 - formulations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.30, n.3, p.263-284.

- HABER, R. B.; ABEL, J.F. (1982b). Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes: part1 - implementation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.30, n.3, p.285-306.
- HABER, R. B.; ABEL, J.F. (1982c). Discrete transfinite mappings for the description and meshing of three-dimensional surfaces using iterative computer graphics. *International journal for numerical methods in engineering*, v.18, p.41-66.
- HAMILTON, K. P. ; CAMPBELL, D. M. ; GOSSEN, P. A. (1995). Air supported roof redux. *Civil Engineering*, v.65, n.5, p.64-67.
- HERZOG, T. (1977). *Pneumatic Structures: a handbook for the architect and engineer*. London, Crosby Lockwood Staples.
- HOPPE, D. S. (1993). The overlapping membrane structures of Ephesos and Carnuntum. In: FOURTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURAS, University of Surrey, Guildford, UK, 5-10 September. *Proceedings*.
- INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURES, 4<sup>th</sup>. (1993). University of Surrey, Guildford, UK, 5-10 september. *Proceeding*. London, Thomas Telford.
- KAMRASS, M. (1956). Pneumatic buildings. *Scientific American*, v.194, n.6.
- KANG, S. IM, S. (1997). Finite element analysis of wrinkling membranes. *Journal of applied mechanics of the American Society of Mechanical Engineers*, v.64, p.263-269
- KNUDSON, W. C. (1991). Recent advances in the field of long span tension structures. *Engineering Structures*, v.13, n.2, p.164-177.
- KRISHNA, P. (1978). *Cable-suspended roofs*. New York, McGraw-Hill.
- KRONENBURG, R. (1995). Tensile architecture. *Architectural design*, n.117,p.9-15.
- KUNIEDA, H. (1975). Flutter of hanging roofs and curved membrane roofs. *International journal of solids and structures*, v.11, n.4, p.477-492
- LEONARD, J. W. (1967a). Inflatable sells: pressurisation phase. *Journal of the engineering mechanics division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, v.93, n.EM2, p.207-227.
- LEONARD, J. W. (1967b). Inflatable sells: in-service phase. *Journal of the engineering mechanics division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, v.93, n.EM6, p.67-85.
- LEONARD, J. W. (1969). Dynamic response of initially-stressed membrane shells. *Journal of the engineering mechanics division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, v.95, n.EM5, p.1231-1253.
- LEONARD, J. W. (1974). State-of-the-art in inflatable shell research. *Journal of the engineering mechanics division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, v.100, n.EM1, p.17-25.

- LEONARD, J. W. (1988). *Tension Structures: behaviour and analysis*. New York, McGraw-Hill.
- LEONARD, J. W.; VERMA, V. K. (1976). Double-curved element for Mooney-Rivlin membranes. *Journal of the engineering mechanics division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, v.102, n.EM4, p.625-641
- LEVY, R.; SPILLERS, W.R. (1998). Practical methods of shape-finding for membranes and cable nets. *Journal of structural engineering*, v.124,n.4, p.465-468.
- LEWIS, W. J. (1993). Mathematical formulae as a medium for shaping membrane forms. In: FOUTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURES, University of Surrey, Guildford, UK, 5-10 september. *Proceeding*.
- LEWIS, W. J. (1998). Lightweight tension membranes: on overview. Proceedings of the Institution of civil engineers, *Civil Engineering*, v.126, n.4, p.171-181
- LI, C.; LEONARD, J.W. (1973). Finite element analysis of inflatable shells. *Journal of the engineering mechanics division*, v.99, n.EM3, p.495-514.
- LIDDELL, I. (1994). Minnesota Metrodome: a study on the behaviour of air supported roofs under environmental loads. *Structural Engineering Review*, v.6, n.3-4, p. 215-235.
- MAJOWIECKI, M. (1985). *Tensostrutture: projeto e verifica*. Milano, Cisia.
- MAKOWSKI, Z.S. (1993). Space structures: a review of the developments within the last decade. In: FOUTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURAS, University of Surrey, Guildford, UK, 5-10 September. *Proceedings*.
- MAURIN, B. ; MOTRO, R. (1998). The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes. *Engineering Structures*, v.20, n.8, p.712-719.
- MCCONVILLE, D. J. (1988). When winter comes: coping with cold weather construction. *The construction specifier* (English), v.41, n.10, p.42-49.
- MINAMI, H; OKUDA, Y.; KAWAMURA, S (1993) Experimental studies on the flutter behaviour of membranes in a wind tunnel. In: FOUTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURAS, University of Surrey, Guildford, UK, 5-10 September. *Proceedings*.
- MONCRIEFF, E.; TOPPING, B. H. V. (1990). Computer methods for the generation of membrane cutting patterns. *Computer and Structures*, v.37, n.4, p.441-450.
- NEW JERSEY INSTITUTE OF TECHNOLOGY, UNIVERSITY HEIGHTS NEWARK. (1998). *Air supported structures*. <http://koenig.njit.edu/civil/air.html> (03 Mar.)
- NEW JERSEY INSTITUTE OF TECHNOLOGY, UNIVERSITY HEIGHTS NEWARK. (1998). *Tension structures*. <http://koenig.njit.edu/civil/tension.html> (03 Mar.)
- NOHMURA, M. (1991). Development of fabric structures in Japan and in the United States. *Bulletin of the international association for shell and spatial structures*, v.33, n.107, p.156-164.

- OLIVEIRA, M. B.; BARBATO, R. L. A. (1998b). Análise de estruturas pneumáticas esféricas. In: III CONGRESSO DE ENGENHARIA CIVIL, Juiz de Fora, Brasil, 1998. *Anais*. Juiz de Fora, Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia. p. 89-98.
- OLIVEIRA, M. B.; BARBATO, R. L. A. (1998a). Coberturas pneumáticas. In: CONGRESSO LATINO AMERICANO TECNOLOGIA E GESTÃO NA PRODUÇÃO DE EDIFÍCIOS: Soluções para o Terceiro Milênio, São Paulo, 1998. *Anais*. São Paulo, EPUSP - Departamento de Engenharia de Construção Civil. v.1, p.183-190.
- OLIVEIRA, M. B.; BARBATO, R. L. A. (1999). Estruturas pneumáticas. *Revista engenharia estudo e pesquisa*. Juiz de Fora, Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia. v.2, n.3, jan.
- OLIVEIRA, M.B. (1995). *Estudo de cabos livremente suspensos*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- OSHIMA, E. (1987). *Cálculo de cabos-treliça mediante o emprego de computadores*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- OTTO, F.; TROSTEL, R. (1967) *Tensile structures: v.1 - pneumatic structures*, The MIT Press, Cambridge.
- POGORÉLOV, A . V. (1977). *Geometría diferencial*. Mir Moscú.
- QUEIROZ, S. F. (1993). *Estudo do comportamento estático do cabo livremente suspenso em cobertura pênsil*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- RIGITANO, A. C.(1991). *Cobertura pênsil em casca protendida de elementos pré-moldados: uma aplicação ao projeto de reservatórios cilíndricos de concreto armado*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- ROBBIN, T. (1996). *Engineering a new architecture*. United States of America, Quebecor - Eusy Press, Leominster, Massachusetts.
- SALES, J.J. (1988). *Projeto e viabilidade econômica de coberturas pênséis com cabos-treliças*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- SCHEK, H. J. (1973). The force density method for form finding and computation of general networks. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.3, p.115-134.
- SCHIERLE, G. G.; YIN, M. (1993). Anticlastic membrane correlation of form, prestress and behavior. In: FOURTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURAS, University of Surrey, Guildford, UK, 5-10 September. *Proceedings*.
- SCHLAICH, J.; BERGERMANN, R.; SOBEK, W. (1994). The air-inflated roof over the roman amphitheatre at Nîmes. *Structural Engineering Review*, v.6, n.3-4, p.203-214.

- SEOKWOO, K.; SEYOUNG, I. (1997). Finite element analysis of wrinkling membranes. *Journal of applied mechanics*, v.64, p.263-269.
- SRIVASTAVA, N. K.; TURKKAN, N. (1995). Experimental determination of wind pressure distribution of cylindrical and spherical flexible membrane structures. *Can. J. Civ. Eng.*, v.22, p.23-31
- STRUCTURAL ENGINEERING REVIEW. (1994). Tension structures. Great Britain, v.6, n.3-4.
- SYGULSKI, R. (1993). Vibrations of pneumatic structures interacting with air. *Computer and Structures*, v.49, n.5, p.867-876.
- SYGULSKI, R. (1995). Application of curvilinear elements with internal collocation points to air- pneumatic structure interaction. *Engineering analysis with boundary elements*, v.15, p.37-42.
- TABARROK, B.; QIN, Z. (1992). Nonlinear analysis of tension structures. *Computer and Structures*, v.45, n.5/6, p.973-984.
- TABARROK, B.; QIN, Z. (1997). Dynamic analysis of tension structures. *Computer and Structures*, v.62, n.3, p.467-474.
- TENSAR.(1999). *Golf domes*. <http://www.tensarind.com/golfdomes.html> (04 mai).
- THOMAS, T. Y. (1965). *Concepts from Tensor Analysis and Differential Geometry*. Academic Press, New York, London.
- TURKKAN, N.; SRIVATAVA, N. K. (1992). A microcomputer-based analysis and design of air-supported cylindrical membranes, *Can. J. Civ. Eng.*, v.19, p.1032-1040
- TURKKAN, N.; SRIVATAVA, N. K. (1995). Prediction of wind load distribution for air-supported structures using neural networks. *Can. J. Civ. Eng.*, v.22, p.453-461
- VANDENBERG, M. (1996). *Soft canopies*. Great Britain, Academy Editions. 64p.
- VERMA, V. K.; LEONARD, J. W. (1978). Nonlinear behaviour of cable-reinforced membranes. *Journal of the engineering mechanics division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, v.104, n.EM4, p.735-750
- VÉRON, P.; LÉON, J.; TROMPETTE, P.C. (1998)a. Design of textile structures: methodology and data architecture. *Computers and Structures*, n.67, p.309-317.
- VÉRON, P.; TROMPETTE, P.; LÉON, J.C. (1998)b. Integrated design and collaborative engineering of fabric structures. *Engineering with computers*, n.14, p.23-35.
- WAKEFIELD, D. S. (1984). Cutting pattern generation. In: SYMPOSIUM ON AIR SUPPORTED STRUCTURES, Institution of structural engineer. *Proceedings*. p.105-108.
- WOOD, W. R.; HUNTER, M. (1995). Domes in the U. S. desert. *Bulk solids handling*, v.15, n.3, p.391-394.