

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de São Carlos

Análise numérica de problemas de interação fluido-estrutura com vorticidade

Matheus Haubert Yokomizo

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

Matheus Haubert Yokomizo

**Análise numérica de problemas de interação fluido-estrutura
com vorticidade**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos da Universidade de São Paulo,
para obtenção do título de Mestre em Ciências
- Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche
Sanches

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

São Carlos

2024

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

Y54a Yokomizo, Matheus Haubert
Análise numérica de problemas de interação fluido-estrutura com vorticidade / Matheus Haubert Yokomizo; orientador Rodolfo André Kuche Sanches. São Carlos, 2024.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2024.

1. interação fluido-estrutura. 2. escoamento turbulento. 3. método dos elementos finitos. 4. large eddy simulation. 5. variational multi-scale. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel **MATHEUS HAUBERT YOKOMIZO**.

Título da dissertação: "Análise numérica de problemas de interação fluido-estrutura com vorticidade".

Data da defesa: 15/05/2024.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Associado Rodolfo André Kuche Sanches
(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC-USP)

Aprovado

Prof. Dr. Ricardo Afonso Angélico

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC-USP)

Aprovado

Prof. Dr. Francisco Augusto Aparecido Gomes

(Universidade Tecnológica Federal do Paraná/UTFPR)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Ricardo Carrazedo**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Carlos De Marqui Junior**

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus por me proporcionar a oportunidade de realizar o mestrado e me por dar forças para superar esse período.

Os meus mais profundos agradecimentos à minha mãe, Dulce Aline Haubert Yokomizo, e ao meu pai, Tsuyoshi Yokomizo, por todo o amor e carinho que me deram ao longo de toda minha vida. Todo o apoio que me deram foi fundamental para que eu pudesse chegar até aqui. Agradeço também ao meu irmão, Kenzo Haubert Yokomizo, que me escutou em meus momentos bons e ruins. Sem vocês nada disso teria sido possível, amo vocês.

Agradeço ao meu orientador, professor Dr. Rodolfo André Kuche Sanches, por me proporcionar uma excelente orientação durante todo o mestrado. Muito obrigado por todo o apoio, paciência e dedicação que teve comigo durante esse período.

Agradeço aos meus amigos, especialmente à Katriny Kauany Amaral dos Santos e ao Evandro Ceciliano Mazer pelo apoio, conselhos e momentos de descontração que temos juntos.

Agradeço também aos meus amigos do Departamento de Engenharia de Estruturas (SET), que me ajudaram tanto em aspectos técnicos quanto emocionais, especialmente à Juliana, Yuiti, Deborah e Naomi. Vocês tornaram todo o processo muito mais leve e divertido.

Ao SET, pela infraestrutura fornecida para a realização do trabalho, assim como aos funcionários pelo ótimo atendimento e auxílio que me deram.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa concedida para o desenvolvimento da pesquisa.

RESUMO

YOKOMIZO, M. H. **Análise numérica de problemas de interação fluido-estrutura com vorticidade**. 2024. 160 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Os problemas de interação fluido-estrutura estão amplamente presentes na engenharia e devem ser adequadamente considerados durante o projeto estrutural, no entanto, apresentam diversos desafios à simulação computacional. Com o objetivo principal de desenvolver e avaliar metodologias para lidar com esses desafios, este trabalho apresenta um estudo sobre ferramentas computacionais para simulação numérica de problemas de interação fluido-estrutura (IFE) com foco em escoamentos incompressíveis com efeitos de vorticidade e turbulência interagindo com estruturas elásticas sujeitas a grandes deslocamentos. Primeiramente, explora-se uma formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) para escoamentos incompressíveis com estabilização dos termos convectivos (SUPG) e da pressão (PSPG), empregando a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (ALE) para permitir a movimentação da interface fluido-estrutura. Na sequência, implementa-se a formulação variacional multiescala (VMS) e o modelo *Large Eddy Simulation* (LES) para capturar os efeitos de turbulência, buscando simulações mais realistas e eficientes. As estruturas são modeladas por elementos de casca de Reissner-Mindlin, permitindo a simulação de diversos problemas com estruturas esbeltas ou espessas. Emprega-se uma formulação do MEF baseada em posições, a qual naturalmente engloba os efeitos da não linearidade geométrica. A malha do fluido é deformada dinamicamente empregando-se um modelo baseado na equação de Laplace, de modo a permitir a conformidade com a interface fluido-estrutura preservando a qualidade da malha. O acoplamento fluido-estrutura é realizado de forma particionada forte, permitindo a solução do problema não linear acoplado de forma bloco-iterativa e conferindo modularidade ao código computacional. Os resultados obtidos foram comparados com resultados da literatura, demonstrando a eficácia e a aplicabilidade das metodologias estudadas no contexto da engenharia estrutural e fluidodinâmica. Nota-se que o emprego do VMS melhora ligeiramente os resultados em comparação com a simulação direta empregado SUPG/PSPG. Já a aplicação do LES melhora significativamente a qualidade dos resultados, principalmente em problemas com número de Reynolds elevados, permitindo a obtenção de solução estável mesmo com uma discretização menos refinada na região de maiores gradientes de velocidade.

Palavras-chave: interação fluido-estrutura; escoamento turbulento; método dos elementos finitos; *large eddy simulation*; *variational multi-scale*.

ABSTRACT

YOKOMIZO, M. H. **Numerical analysis of fluid-structure interaction problems with vorticity**. 2024. 160 p. Dissertation (Master) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Fluid-structure interaction (FSI) problems are widely present in engineering and must be adequately considered during structural design, however, they pose several challenges to computational simulation. With the main objective of developing and evaluating methodologies to address these challenges, this work presents a study on computational tools for numerical simulation of fluid-structure interaction (FSI) problems focusing on incompressible flows with vorticity and turbulence effects interacting with elastic structures subjected to large deformations. Firstly, a formulation of the Finite Element Method (FEM) for incompressible flows with advective stabilization (SUPG) and pressure stabilization (PSPG) is explored, employing the Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) description to enable the movement of the fluid-structure interface. Subsequently, a variational multiscale (VMS) formulation and Large Eddy Simulation (LES) model are implemented to capture turbulence effects, aiming for more realistic and efficient simulations. The structures are modeled using Reissner-Mindlin shell elements, allowing the simulation of various problems with slender or thick structures. A position-based FEM formulation is employed, which naturally incorporates the effects of geometric nonlinearity. The fluid mesh is dynamically deformed using a Laplace equation-based model to maintain conformity with the fluid-structure interface while preserving mesh quality. The fluid-structure coupling is performed in a strongly partitioned manner, enabling the solution of the coupled nonlinear problem in a block-iterative fashion and providing modularity of the computational code. The obtained results are compared with literature results, demonstrating the effectiveness and applicability of the studied methodologies in the context of structural and fluid dynamics engineering. It is noted that the use of VMS slightly improves results compared to direct simulation employing SUPG/PSPG. On the other hand, the application of LES significantly enhances result quality, particularly in problems with high Reynolds numbers, enabling stable solutions even with less refined discretization in regions of higher velocity gradients.

Keywords: fluid-structure interaction; turbulent flow; finite element method; large eddy simulation; variational multi-scale.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Taxa de fluxo de massa em um elemento infinitesimal permeável.	45
Figura 2 – Fluxo de quantidade de movimento em um elemento infinitesimal permeável.	47
Figura 3 – Componentes de forças atuantes no elemento infinitesimal na direção y_1	47
Figura 4 – Domínio e condições de contorno para os problemas de mecânica dos fluidos.	48
Figura 5 – Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária.	50
Figura 6 – Elementos Taylor-Hood.	54
Figura 7 – Função teste de Galerkin e de SUPG.	56
Figura 8 – Disposição dos nós para elementos finitos P2P1, P1P1 e P2P2.	60
Figura 9 – Comportamento dos filtros apresentados na Tabela 2.	69
Figura 10 – Efeito da filtragem sobre um campo de velocidade u	70
Figura 11 – Amplitude da energia espectral.	72
Figura 12 – Cavity bidimensional - Desenho esquemático	74
Figura 13 – Cavity bidimensional - Malhas utilizadas.	74
Figura 14 – Cavity bidimensional - distribuição de velocidade sobre as linhas médias.	76
Figura 15 – Cavity bidimensional - Campo de velocidade em regime estacionário.	77
Figura 16 – Cavity bidimensional - Malhas utilizadas para a análise de dependência.	78
Figura 17 – Cavity bidimensional - Valores do campo de velocidade sobre as linhas médias para as malhas m_1 e m_2	78
Figura 18 – Cavity tridimensional - Malha utilizada.	79
Figura 19 – Cavity tridimensional - Valores do campo de velocidade sobre as linhas médias.	80
Figura 20 – Cavity tridimensional - Campo de velocidade na face de simetria.	81
Figura 21 – Escoamento em degrau invertido - Desenho esquemático.	81
Figura 22 – Escoamento em degrau invertido - Malha utilizada.	82
Figura 23 – Escoamento em degrau invertido - Perfis de velocidade.	83
Figura 24 – Escoamento em degrau invertido - Distribuição de pressões.	84
Figura 25 – Escoamento em degrau invertido - Perfis de velocidade para $Re = 800$	85
Figura 26 – Escoamento em degrau invertido - Distribuição de pressões para $Re = 800$	85
Figura 27 – Escoamento sobre cilindro - Malha utilizada.	86
Figura 28 – Escoamento sobre cilindro - Coeficiente de arrasto ao longo do tempo.	88
Figura 29 – Escoamento sobre cilindro - Coeficiente de sustentação ao longo do tempo.	89
Figura 30 – Escoamento sobre cilindro - Malha utilizada para simulação com malha mais grosseira.	91
Figura 31 – Escoamento sobre cilindro - Coeficiente de arrasto ao longo do tempo para malha mais grosseira.	92

Figura 32 – Escoamento sobre cilindro - Coeficiente de sustentação ao longo do tempo para malha mais grosseira.	93
Figura 33 – Escoamento em torno de um aerofólio NACA 0012 - Domínio de simulação.	94
Figura 34 – Escoamento em torno de um aerofólio NACA 0012 - Malha bidimensional. .	95
Figura 35 – Escoamento em torno de um aerofólio NACA 0012 - Malha tridimensional.	95
Figura 36 – Escoamento em torno de um aerofólio NACA 0012 - Coeficiente de pressão.	96
Figura 37 – Escoamento em torno de um aerofólio NACA 0012 - Campos de pressão e de velocidade.	97
Figura 38 – Escoamento em torno de um aerofólio NACA 0012 - Isosuperfícies de critério Q nulo.	98
Figura 39 – Cilindro com deslocamento prescrito - Esquema do problema.	98
Figura 40 – Cilindro com deslocamento prescrito - Configuração inicial da malha. . . .	98
Figura 41 – Cilindro com deslocamento prescrito - Coeficiente de arrasto ao longo do tempo.	99
Figura 42 – Cilindro com deslocamento prescrito - Configuração da malha e campo de velocidade no instante $t = 18,9$	99
Figura 43 – Cilindro com deslocamento prescrito - Configuração da malha e campo de velocidade no instante $t = 21,0$	100
Figura 44 – Aerofólio com movimento de arfagem - Esquema do problema.	101
Figura 45 – Aerofólio com movimento de arfagem - Configuração inicial da malha. . . .	102
Figura 46 – Aerofólio com movimento de arfagem - Evolução temporal de C_D e C_L . . .	103
Figura 47 – Aerofólio com movimento de arfagem - Campos de vorticidade e de velocidade.	104
Figura 48 – Aerofólio com movimento de arfagem - Configuração da malha em frações de oscilação.	105
Figura 49 – Configurações inicial e atual de um corpo deformável.	107
Figura 50 – Mudança de volume de um elemento infinitesimal.	109
Figura 51 – Mudança de configuração em um prisma infinitesimal.	109
Figura 52 – Forças atuantes em um elemento infinitesimal na direção y_1	110
Figura 53 – Corpo submetido a forças conservativas concentradas e distribuídas.	113
Figura 54 – Mudança de configuração para um elemento de casca.	116
Figura 55 – <i>Scordelis-Lo roof</i> - Desenho esquemático.	122
Figura 56 – <i>Scordelis-Lo roof</i> - Malha utilizada.	122
Figura 57 – <i>Scordelis-Lo roof</i> - Campos de deslocamentos obtidos.	122
Figura 58 – <i>Scordelis-Lo roof</i> - Desvio relativo do deslocamento vertical do ponto A em função do tamanho do elemento.	123
Figura 59 – <i>Scordelis-Lo roof</i> - Malha utilizada no ANSYS.	124
Figura 60 – <i>Scordelis-Lo roof</i> - Deslocamento vertical ao longo da aresta livre.	124
Figura 61 – Cilindro biengastado em problema estático - Desenho esquemático.	125
Figura 62 – Cilindro biengastado em problema estático - Malha utilizada.	125

Figura 63 – Cilindro biengastado em problema estático - Campos de deslocamentos obtidos.	125
Figura 64 – Cilindro biengastado em problema estático - Malha utilizada no ANSYS.	126
Figura 65 – Cilindro biengastado em problema estático - Deslocamentos radiais.	126
Figura 66 – Viga engastada em problema dinâmico - Desenho esquemático.	127
Figura 67 – Viga engastada em problema dinâmico - Malha utilizada.	127
Figura 68 – Viga engastada em problema dinâmico - Malha utilizada no ANSYS.	127
Figura 69 – Viga engastada em problema dinâmico - Deslocamento vertical no ponto de aplicação da força ao longo do tempo.	127
Figura 70 – Viga biengastada em problema dinâmico - Desenho esquemático.	128
Figura 71 – Malha utilizada na simulação da viga biengastada.	128
Figura 72 – Viga biengastada em problema dinâmico - Malha utilizada no ANSYS.	128
Figura 73 – Viga biengastada em problema dinâmico - Deslocamento vertical no centro da viga biengastada ao longo do tempo.	129
Figura 74 – Domínio computacional do problema de IFE.	131
Figura 75 – Cavidade com fundo flexível.	135
Figura 76 – Cavidade com fundo flexível - Discretização	136
Figura 77 – Cavidade com fundo flexível - Deslocamento vertical do nó A.	136
Figura 78 – Cavidade com fundo flexível - Distribuição de pressão e linhas de corrente.	137
Figura 79 – Cavidade tridimensional - Discretização espacial.	138
Figura 80 – Cavidade tridimensional - Deslocamento vertical do centro da casca ao longo do tempo para o segundo caso.	139
Figura 81 – Cavidade tridimensional - Deslocamento vertical da casca.	139
Figura 82 – Cavidade tridimensional - Campo de pressão e de velocidade na cavidade.	140
Figura 83 – <i>Flutter</i> em painel - Desenho esquemático do problema.	141
Figura 84 – <i>Flutter</i> em painel - Malha utilizada para os domínios da simulação de painel.	142
Figura 85 – <i>Flutter</i> em painel - Deslocamento vertical na extremidade do painel ao longo do tempo.	143
Figura 86 – <i>Flutter</i> em painel - Magnitude do campo de velocidade.	143
Figura 87 – <i>Flutter</i> em painel - Campo de pressão.	144
Figura 88 – <i>Flutter</i> em painel - Configurações da malha.	145
Figura 89 – <i>Flutter</i> em painel - Malha pobre utilizada.	146
Figura 90 – <i>Flutter</i> em painel - Deslocamento vertical na extremidade para malha pobre.	146

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Quantidade de nós para interpolação dos campos de velocidade e pressão para elementos finitos P1P1, P2P1 e P2P2.	60
Tabela 2 – Filtros utilizados em <i>Large Eddy Simulation</i>	69
Tabela 3 – Propriedades dos filtros utilizados em LES.	70
Tabela 4 – Cavidade bidimensional - Características das malhas utilizadas.	74
Tabela 5 – Cavidade bidimensional - Características das malhas utilizadas para a análise de dependência.	77
Tabela 6 – Simulações conduzidas para o problema de escoamento sobre um cilindro. .	86
Tabela 7 – Escoamento sobre cilindro - Valores dos coeficientes e número de Strouhal para $Re = 100$	87
Tabela 8 – Escoamento sobre cilindro - Valores dos coeficientes e número de Strouhal para $Re = 150$	90
Tabela 9 – Escoamento sobre cilindro - Valores dos coeficientes e número de Strouhal para $Re = 200$	90
Tabela 10 – Escoamento sobre cilindro - Comparação de C_D , C_L e St para $Re = 100$. . .	91
Tabela 11 – Escoamento sobre cilindro - Comparação de C_D , C_L e St para $Re = 150$. . .	91
Tabela 12 – Escoamento sobre cilindro - Comparação de C_D , C_L e St para $Re = 200$. . .	94
Tabela 13 – Escoamento em torno de um aerofólio NACA 0012 - Distância do ponto de desprendimento e recolamento.	96
Tabela 14 – <i>Scordelis-Lo roof</i> - Análise da dependência da malha.	123
Tabela 15 – <i>Flutter</i> em painel - Propriedades da oscilação para malha pobre.	144

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ALE	Lagrangiana-Euleriana Arbitrária - <i>Arbitrary Lagrangian-Eulerian</i>
CFD	Dinâmica dos Fluidos Computacional - <i>Computational Fluid Dynamics</i>
CSD	Dinâmica dos Sólidos Computacional - <i>Computational Solid Dynamics</i>
DNS	Simulação Numérica Direta - <i>Direct Numerical Simulation</i>
DOF	Graus de liberdade - <i>Degree Of Freedom</i>
EDP	Equação Diferencial Parcial
GLS	Galerkin Least-Squares
IFE	Interação Fluido-Estrutura
IP	Problema de Interação - <i>Interaction Problem</i>
LBB	Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi
LES	Simulação de Grandes Vórtices - <i>Large Eddy Simulation</i>
LSIC	<i>Least-Squares on Incompressibility Constraint</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
PSPG	<i>Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin</i>
RANS	<i>Reynolds-Averaged Navier-Stokes</i>
RBVMS	<i>Residual-Based Variational Multi-Scale</i>
SGS	<i>Subgrid-Scales</i>
SUPG	<i>Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin</i>
SVK	Saint-Venant-Kirchhoff
VMS	Métodos Variacionais Multiescala - <i>Variational Multi-Scale</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Operadores

$\text{dev}(\cdot)$	Parte desviadora do tensor
$\det(\cdot)$	Determinante
$D(\cdot)/Dt$	Derivada material
H^1	Espaço de Sobolev de ordem 1
$\mathcal{H}(\cdot)$	Matriz Hessiana ($\nabla_{\mathbf{y}} \otimes \nabla_{\mathbf{y}}(\cdot)$)
L^2	Espaço das funções de quadrado integrável
$\text{tr}(\cdot)$	Traço de um tensor
$\nabla(\cdot)$	Gradiente
$\nabla \cdot (\cdot)$	Divergente
$\nabla^2(\cdot)$	Laplaciano
\cdot	Produto interno
$:$	Contração dupla
\vdots	Contração tripla
\times	Produto vetorial
\otimes	Produto tensorial
\sum	Somatório
\prod	Produtório
$\ (\cdot)\ $	Norma

Parâmetros Gerais

c	Força de corpo
\mathbf{F}^{res}	Resultante das forças externas
\mathbb{I}	Tensor identidade de quarta ordem
\mathbf{I}	Tensor identidade de segunda ordem

m	Massa
\mathbf{n}	Vetor normal à superfície na configuração atual
\mathbf{n}_0	Vetor normal à superfície na configuração inicial
N_a	Função de forma associada ao nó a
n_{sd}	Número de dimensões espaciais do problema
t	Tempo
V	Volume
V_0	Volume inicial
Δt	Intervalo discreto de tempo
ξ	Coordenada paramétrica
ρ	Densidade
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões de Cauchy
ϕ	Propriedade qualquer
Φ	Vetor que contém todos os graus de liberdade do problema
Ψ	Vetor que contém todos os valores nodais das funções teste
\emptyset	Conjunto vazio

Configurações do Contínuo

\mathbf{f}	Função mudança de configuração de $\Omega_0 \rightarrow \Omega$
$\tilde{\mathbf{f}}$	Função mudança de configuração de $\Omega_0 \rightarrow \hat{\Omega}$
$\hat{\mathbf{f}}$	Função mudança de configuração de $\hat{\Omega} \rightarrow \Omega$
\mathbf{f}^0	Função mudança de configuração de $\Omega_\xi \rightarrow \Omega_0$
\mathbf{f}^1	Função mudança de configuração de $\Omega_\xi \rightarrow \Omega$
\mathfrak{F}	Gradiente da função de mudança de configuração
$\tilde{\mathfrak{F}}$	Gradiente da função $\tilde{\mathbf{f}}$
$\hat{\mathfrak{F}}$	Gradiente da função $\hat{\mathbf{f}}$
\mathfrak{F}^0	Gradiente da função \mathbf{f}^0

\mathfrak{F}^1	Gradiente da função f^1
\boldsymbol{x}	Posição inicial (ou posição material)
$\hat{\boldsymbol{x}}$	Posição de referência
\boldsymbol{y}	Posição atual (ou posição espacial)
Γ	Fronteira do domínio de análise
Γ_D	Fronteira de Dirichlet
Γ_f	Fronteira fixa
Γ_m	Fronteira móvel
Γ_N	Fronteira de Neumann
Ω	Domínio de análise na configuração atual
Ω_0	Domínio de análise na configuração inicial
Ω_ξ	Domínio de análise no espaço paramétrico
$\hat{\Omega}$	Domínio de análise na configuração de referência

Dinâmica dos Fluidos Computacional

\mathfrak{D}	Tensor constitutivo de quarta ordem
\boldsymbol{f}	Força por unidade de massa
\boldsymbol{g}	Velocidades prescritas na fronteira de Dirichlet
\boldsymbol{h}	Forças de superfícies prescritas na fronteira de Neumann
p	Campo de pressão
q	Função teste relacionado à equação da continuidade
\boldsymbol{q}	Resultante das forças externas por unidade de volume
Re	Número de Reynolds
\mathcal{S}_u	Espaço de funções tentativas para o campo de velocidade
\mathcal{S}_p	Espaço de funções tentativas para o campo de pressão
\boldsymbol{u}	Campo de velocidade
$\hat{\boldsymbol{u}}$	Campo de velocidade da malha

$\tilde{\mathbf{u}}$	Velocidade da malha em relação à configuração inicial
$\dot{\mathbf{u}}$	Campo de acelerações
\mathcal{V}_u	Espaço de funções teste para o campo de velocidade
\mathcal{V}_p	Espaço de funções teste para o campo de pressão
w	Função teste relacionada à equação da conservação do momento
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Tensor de taxa de deformação
μ	Viscosidade dinâmica
ν	Viscosidade cinemática
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor de tensões desviadoras

Dinâmica dos Sólidos Computacional

\mathbf{c}^0	Forças de corpo na configuração inicial
\mathbf{C}	Tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green
$\boldsymbol{\mathcal{E}}$	Tensor constitutivo de quarta ordem
E	Módulo de elasticidade longitudinal (ou Módulo de Young)
\mathbf{E}	Medida de deformação de Green-Lagrange
\mathbf{F}_a	Força concentrada sobre o nó a
G	Módulo de elasticidade transversal
h_0	Espessura inicial da casca
\mathbf{H}	Matriz Hessiana
J	Jacobiano da mudança de configuração
\mathbb{K}	Energia cinética
\mathbb{P}	Energia das Forças Externas
\mathbf{P}	Tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie
\mathbf{S}	Tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie
S_0	Área da superfície na configuração inicial
S	Área da superfície na configuração atual

t	força distribuída sobre a superfície média
u_e	Energia específica de deformação
\mathbb{U}	Energia de deformação
\boldsymbol{w}^0	Vetor unitário normal à superfície média na configuração inicial
\boldsymbol{w}^1	Vetor generalizado na configuração atual
\boldsymbol{x}^m	Coordenada inicial de um ponto na superfície média
\boldsymbol{y}^m	Coordenada atual de um ponto na superfície média
$\dot{\boldsymbol{y}}$	Campo de velocidade
$\ddot{\boldsymbol{y}}$	Campo de acelerações
α	Taxa de variação da espessura
$\boldsymbol{\epsilon}$	Vetor resíduo
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformação linear
ε_V	Deformação volumétrica
λ_m	Constante de amortecimento
ν	Coefficiente de Poisson
Π	Energia total

Movimentação dinâmica da malha

\boldsymbol{B}	Matriz tangente do problema de Laplace
\boldsymbol{z}	Campo de deslocamentos da malha
\boldsymbol{Z}_a	Valor de \boldsymbol{z} sobre o nó a
\boldsymbol{z}_m	Valores prescritos de deslocamentos em Γ_m
$\Delta \boldsymbol{Z}$	Vetor de correção dos valores nodais de deslocamento
$\boldsymbol{\epsilon}_L$	Vetor resíduo do problema de Laplace
η	Amplificação de rigidez dos elementos menores
\boldsymbol{v}	Função teste relacionado ao problema de Laplace
$\boldsymbol{\Upsilon}_a$	Valor de \boldsymbol{v} sobre o nó a

Acoplamento Fluido-Estrutura

\mathcal{G} Soma de todas as equações diferenciais do problema

H Matriz tangente

ϵ Vetor resíduo

Variational Multi-Scale

ϵ_M Vetor de resíduo referente à equação da conservação da quantidade de movimento

ϵ_C Vetor de resíduo referente à equação da continuidade

P Vetor de pressões nodais

$r_C(\bar{\mathbf{u}})$ Resíduo da equação da continuidade

$r_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})$ Resíduo da equação da conservação da quantidade de movimento

U Vetor de velocidades nodais

\dot{U} Vetor de acelerações nodais

ν_{LSIC} Estabilizador LSIC

ϱ_∞ Raio espectral

τ_{SUPS} Estabilizador SUPS

$\bar{\phi}$ Valor de uma propriedade no subespaço de escalas grosseiras

ϕ' Valor de uma propriedade no subespaço de escalas finas

Large Eddy Simulation

C Tensor de termos cruzados

C_S Constante de Smagorinsky

$D_\Delta(\mathbf{y})$ Domínio de abrangência do filtro

$E(k)$ Amplitude espectral da energia cinética

\mathfrak{G} Filtro

k Número de onda no espaço de Fourier

L Tensor de Leonard

\mathbf{R}	Tensor SGS de Reynolds
\bar{S}	Taxa de deformação em grandes escalas
\mathbf{T}	Tensor SGS
\mathbf{T}_S	Tensor SGS de Smagorinsky
\mathbf{y}_Δ	Ponto na vizinhança de \mathbf{y} interno à $D_\Delta(\mathbf{y})$
α	Constante de Kolmogoroff
Δ	Tamanho da malha
ε	Dissipação turbulenta
ν_T	Viscosidade de vórtice
$\bar{\phi}$	Variável filtrada
ϕ'	Variável não filtrada

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	29
1.1	Estado da arte	31
1.1.1	Dinâmica das estruturas computacional	31
1.1.2	Dinâmica dos fluidos computacional	33
1.1.2.1	Efeitos de turbulência	35
1.1.2.1.1	<i>Reynolds-Averaged Navier-Stokes</i>	36
1.1.2.1.2	<i>Large-Eddy Simulation</i>	36
1.1.3	Interação fluido-estrutura	37
1.2	Objetivos	39
1.3	Metodologia	40
1.4	Justificativa	41
1.5	Organização do trabalho	43
2	ANÁLISE NUMÉRICA PARA MECÂNICA DOS FLUIDOS	45
2.1	Descrição Euleriana	45
2.1.1	Conservação da massa	45
2.1.2	Conservação da quantidade de movimento	46
2.1.3	Modelo constitutivo	48
2.2	Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária	50
2.2.1	Equações governantes na descrição ALE	52
2.3	Forma fraca das equações governantes	52
2.3.1	Formulação semi-discreta	54
2.3.2	Estabilização de problemas com termos convectivos dominantes	56
2.3.3	Estabilização do campo de pressão	57
2.3.4	Integração temporal	58
2.3.5	Elementos finitos utilizados	59
2.4	Movimentação da malha do fluido	59
2.5	Formulação variacional multiescala	63
2.5.1	Procedimento iterativo	66
2.6	Modelo de turbulência - <i>Large Eddy Simulation</i>	67
2.7	Estudo numéricos de escoamentos incompressíveis	73
2.7.1	Cavidade bidimensional	73
2.7.2	Escoamento em degrau invertido	80
2.7.3	Escoamento sobre cilindro	86
2.7.4	Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012	94
2.7.5	Cilindro com deslocamento prescrito	97

2.7.6	Aerofólio com movimento de arfagem	100
3	ANÁLISE NUMÉRICA PARA DINÂMICA NÃO LINEAR DOS SÓLIDOS	107
3.1	Cinemática para sólidos deformáveis	107
3.2	Equação da quantidade de movimento em descrição Lagrangiana	110
3.3	Princípio da estacionariedade da energia	111
3.3.1	Energia de deformação elástica	112
3.3.2	Energia potencial das forças externas	113
3.3.3	Energia cinética	114
3.4	Método dos elementos finitos posicional aplicado a elementos de casca .	115
3.4.1	Cinemática de Reissner-Mindlin	115
3.5	Exemplos de verificação	120
3.5.1	Problema de <i>Scordelis-Lo roof</i>	120
3.5.2	Cilindro biengastado em problema estático	123
3.5.3	Viga engastada com carregamento de impacto	126
3.5.4	Viga biengastada com carregamento de impacto	128
4	ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA	131
4.1	Exemplos para verificação	134
4.1.1	Cavidade com fundo flexível	134
4.1.2	Cavidade tridimensional com fundo flexível	137
4.1.3	<i>Flutter</i> em painel flexível	141
5	CONCLUSÃO	147
	REFERÊNCIAS	151

1 INTRODUÇÃO

Problemas de interação fluido-estrutura (IFE) ocorrem quando o escoamento do fluido em contato com a estrutura afeta o comportamento da mesma, e vice-versa. Essa interação pode ser entendida levando-se em conta que as forças desenvolvidas na estrutura em decorrência do escoamento (pressão e tensões viscosas do fluido atuando na interface fluido-estrutura) causam a movimentação da estrutura (deformação), que por sua vez, altera o escoamento, modificando a pressão e as tensões viscosas na interface fluido-estrutura. Assim, o estudo desse tipo de problema envolve a análise multicampo, na qual os diferentes meios físicos (sólido e fluido), que embora sujeitos às mesmas leis da mecânica, apresentam relações constitutivas muito diferentes. Isso faz com que a análise numérica de problemas de IFE seja um tema bastante desafiador e interdisciplinar, envolvendo três tópicos principais: a mecânica dos sólidos, a mecânica dos fluidos e o problema de interação.

Esses problemas ocorrem em diversas situações, como tais como em turbinas eólicas, pontes, edifícios de grande altitudes, estruturas *offshore*, aeronaves, escoamento em vasos sanguíneos, entre outros. A análise adequada desses problemas é de grande importância em diversos projetos de engenharia, uma vez que podem levar a falhas catastróficas, como o colapso de pontes ou edifícios, ou a perda de controle de uma aeronave.

Uma das formas de se estudar os problemas de IFE é através da abordagem experimental por meio de ensaios de modelos em escala real ou reduzida em túneis de vento, canais ou tanques de ensaio. No entanto, essa abordagem apresenta limitações, uma vez que demanda grandes investimentos com infraestrutura, além de que os resultados aplicam-se especificamente e somente aos casos ensaiados (Fernandes, 2020).

Outra forma é a modelagem matemática desses problemas, que se mostra como uma opção mais viável, uma vez que dispensa grandes investimentos com material, espaço e equipamentos de ensaios, e possui grande flexibilidade de aplicações, podendo ser utilizado em diversos tipos de análises. Todavia, os modelos matemáticos conduzem a sistemas de equações que, ou não apresentam solução analítica, ou apresentam apenas para casos simples e com uso de hipóteses simplificadoras que deixam a solução menos geral, demandando assim soluções numéricas.

A solução dos problemas de dinâmica dos sólidos computacional (CSD) e de dinâmica dos fluidos computacional (CFD), isoladamente já podem apresentar elevado grau de complexidade, de forma que a análise numérica do problema acoplado, a despeito do número de trabalhos que já foram desenvolvidos nessa área, ainda apresenta diversos desafios a serem superados, sendo o alto custo computacional de muitos problemas um desses desafios. Tal custo torna a simulação numérica da IFE impraticável para diversos problemas usuais de engenharia, que

exigem respostas mais ágeis para serem utilizadas em elaborações de projetos.

Os fluidos se diferenciam dos sólidos por apresentarem pouca, ou, no caso dos fluidos Newtonianos, nenhuma resistência ao cisalhamento, de modo que qualquer valor de tensão de cisalhamento provoca escoamento. Dessa forma, tradicionalmente é empregada a descrição Euleriana (ou espacial) para as equações da mecânica dos fluidos, implicando em domínio espacial fixo e indeformável, enquanto para os sólidos é empregada a descrição Lagrangiana (ou material), implicando em domínio espacial deformável que segue os pontos materiais da estrutura.

O primeiro desafio da análise numérica de IFE é combinar essas duas descrições diferentes de maneira consistente. Uma forma robusta de se fazer isso é empregar a descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (ALE) (Donea; Giuliani; Halleux, 1982) para o fluido. Ao contrário da descrição Euleriana, a qual considera um domínio fixo no espaço, a descrição ALE permite uma movimentação arbitrária desse domínio. Isso permite que a malha do fluido seja movimentada dinamicamente para acomodar a movimentação da interface fluido-sólido.

Os escoamentos de fluidos viscosos podem ser classificados, dentre outras formas, em função do número de Reynolds, o qual é um coeficiente adimensional definido como a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas, resultando em três regimes de escoamento. O primeiro regime é denominado laminar, onde o escoamento se dá de forma similar ao escorregamento de lâminas paralelas entre si, sem que haja uma mistura macroscópica entre elas. Já o segundo regime é chamado regime de transição, caracterizado pelo surgimento de algumas flutuações esporádicas no campo de velocidade, porém ainda de forma não tão significativa. Já o último é denominado regime turbulento, apresentando flutuações constantes no campo de velocidade, resultando no surgimento de estruturas denominadas de vórtices.

Assim, em casos de escoamentos turbulentos, ocorrem desprendimentos de vórtices, que podem estar localizados em pontos da interface fluido-estrutura, causando vibrações induzidas pelas flutuações dos campos de velocidade e pressão. Também podem ocorrer, por exemplo, aumento da força de arrasto ou queda da força de sustentação em estruturas aerodinâmicas devido à formação de bolhas de desprendimento.

As estruturas turbulentas, podem se manifestar tridimensionalmente de maneira instável, desordenada e em diversas escalas. Isso torna a turbulência um fator com importante contribuição ao alto custo computacional das simulações numéricas de problemas de IFE. Esse custo deve-se à formação de vórtices até nas menores escalas, a qual necessita de uma discretização muito refinada, ao mesmo tempo que algumas simulações demandam um domínio computacional consideravelmente grande.

Buscando soluções mais competitivas diversos trabalhos foram desenvolvidos de forma a reduzir o custo computacional, seja pelo aumento da ordem de convergência dos problemas, ou pela possibilidade de se utilizar malhas menos refinadas nas simulações. Dentre as possibilidades

existentes destacam-se os métodos multiescala (VMS), os quais partem da premissa de decomposição dos campos de velocidade e de pressão em parcelas de pequenas e de grandes escalas, introduzindo termos estabilizadores capazes de estabilizar tanto o campo de pressão, quanto problemas dominados pelos termos convectivos. Assim ocorre uma melhora na convergência, além de se dispensar o refinamento da malha em regiões onde há predominância dos termos convectivos.

Outros trabalhos também foram desenvolvidos no sentido de permitir o uso de malha mais pobres em regiões de alta vorticidade, onde estruturas turbulentas se formam. Dessa forma, surgem as simulações de grandes vórtices (LES) (Smagorinsky, 1963), as quais fazem a decomposição dos campos a partir da consideração de um filtro, fazendo com que a turbulência gerada na subescala seja considerada a partir da adição de uma viscosidade de vórtice no escoamento.

Assim, visando a identificação de uma abordagem eficiente para simular de problemas de interação fluido-estrutura em escoamentos com presença de vorticidade, este trabalho propõe o estudo de formulações numéricas e sua respectiva implementação, a fim de se obter uma ferramenta capaz de aplicar diferentes métodos para redução do custo computacional.

1.1 Estado da arte

Na presente seção é apresentada uma breve revisão do estado da arte dos principais temas relacionados à análise numérica de IFE, tendo como ênfase os problemas com escoamentos turbulentos. São destacados os desenvolvimentos básicos para a dinâmica das estruturas computacional com grandes deslocamentos (1.1.1), para a dinâmica dos fluidos computacional (1.1.2) com contornos móveis, onde aborda-se também as técnicas de estabilização, assim como o modelo de estabilização variacional multiescala (VMS) e os modelos de turbulência (1.1.2.1), e para a solução de problemas de interação fluido-estrutura (1.1.3).

1.1.1 Dinâmica das estruturas computacional

A mecânica dos sólidos busca descrever o comportamento de elementos estruturais quando sujeitos a solicitações externas, identificando os campos de tensão, deformação e deslocamento. A utilização de métodos computacionais para a solução desses problemas iniciou-se principalmente com o método das diferenças finitas, mas no decorrer do tempo, o Método dos Elementos Finitos (MEF), cujo nome foi cunhado por Clough (1960), se destacou como uma ferramenta mais versátil, sendo atualmente a ferramenta mais difundida na mecânica dos sólidos.

Em geral, problemas envolvendo a mecânica dos sólidos, são formulados numericamente empregando métodos energéticos, que buscam a imposição da conservação da energia. Isso se deve principalmente ao fato de as leis constitutivas elásticas possuírem um potencial energético adequado. No entanto, os métodos de resíduos ponderados, tais como Bubnov-Galerkin ou Petrov-Galerkin podem ser igualmente empregados. Cabe ressaltar que, para os problemas

elásticos clássicos, as equações governantes são elípticas (caso estático) ou parabólicas (caso dinâmico), permitindo o uso do método de Bubnov-Galerkin de forma estável, e conduzindo a sistemas com matrizes simétricas (Borst *et al.*, 2012).

Os primeiros trabalhos no âmbito da mecânica dos sólidos computacional são restritos aos casos de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, em regime elástico linear. No entanto, mesmo em casos em que as estruturas se comportem dentro do regime elástico, surgem situações onde torna-se necessário considerar a configuração correta (deformada) do equilíbrio, como é o caso de diversos problemas de IFE. Assim, logo as análises começaram a considerar situações de grandes deslocamentos, como observado no trabalho de Turner *et al.* (1960), surgindo o conceito de não linearidade geométrica, que foi explorada e tratada em diversos trabalhos importantes, tais como os de Bathe, Ramm e Wilson (1975), Brendel e Ramm (1980), Hughes e Liu (1981), Hughes e Carnoy (1983), Simo *et al.* (1986), Borst *et al.* (2012).

Tradicionalmente, as estruturas reticuladas têm sido representadas por elementos finitos que utilizam os deslocamentos e as rotações dos nós como graus de liberdade para a descrição do movimento (Reddy, 2005; Assan, 2020). No entanto, isso só se mostra eficiente para estruturas que desenvolvem pequenos deslocamentos e rotações. Isso deve-se ao fato de que não há comutatividade entre essas últimas grandezas.

Uma das abordagens que possibilitou a solução de diversos problemas de grandes deslocamentos é o MEF corrotacional, o qual decompõe o movimento de um sólido em uma parcela referente ao movimento de corpo rígido e outra referente à deformação do mesmo, sendo considerados os deslocamentos e as rotações nodais como graus de liberdade (*Degree of freedom* - DOF), como pode ser observado no trabalho de Wempner (1969), onde é estudado o comportamento de cascas em regime de grandes deslocamentos e pequenas deformações. Outros trabalhos relevantes a serem ressaltados nesse tema são os de Hughes e Liu (1981), Argyris (1982), Ibrahimbegovic e Taylor (2002), Pimenta, Campello e Wriggers (2004), Battini e Pacoste (2006) e Pimenta, Campello e Wriggers (2008).

Tendo isso em vista a necessidades de aproximações de rotações finitas na formulação corrotacional, bem como efeitos que podem tornar a matriz de massa ser variável, tornando o processo de integração temporal complexo (Sanches; Coda, 2013), Coda (2003), motivado pelo trabalho de Bonet *et al.* (2000), apresentou uma formulação alternativa do MEF, a qual baseia-se em posições. Tal abordagem possui vantagens ao se trabalhar com não linearidade geométrica, por ser independente das rotações nodais, assim como possui uma matriz de massa constante, o que facilita a análise dinâmicas das estruturas. Outro ponto a ser ressaltado é a simplicidade da formulação, assim como sua facilidade de implementação.

A formulação posicional do MEF tem sido amplamente empregada para problemas da mecânica dos sólidos e das estruturas, demonstrando bastante robustez e precisão. Isso é atestado pelos trabalhos de Coda e Greco (2004), o qual estudou a formulação posicional em elementos reticulados em análise estática, Coda e Paccola (2007), que estendeu a formulação

para elementos de casca, onde ainda foi adicionado um termo referente ao empenamento no trabalho de Coda e Paccola (2010), Coda (2009), que estudaram em um caso bidimensional o comportamento dinâmico de uma estrutura inflável, Coda e Paccola (2009), que utilizou a formulação em elementos de cascas em análises dinâmicas e Carrazedo e Coda (2010), que estudaram os efeitos de impactos termomecânicos em elementos de treliça.

A maior parte dos trabalhos referentes à formulação posicional do MEF para problemas dinâmicos, utiliza o integrador temporal de Newmark, que insere dois parâmetros livres que são escolhidos pelo usuário, modificando a forma da aproximação de velocidades de acelerações e conferindo diferentes características de estabilidade e dissipação. A formulação posicional resulta em uma matriz de massa constante, de forma que Sanches e Coda (2013) mostram que nesse cenário o integrador de Newmark conserva o momento linear e angular em análises dinâmicas e apresenta conservação da energia suficiente para os problemas de IFE considerados.

Uma alternativa ao método de Newmark é o método α -generalizado, introduzido por Chung e Hulbert (1993), sendo também um esquema de integração temporal implícito que se utiliza de valores de velocidades e acelerações em instantes intermediários para a determinação de valores futuros. A característica interessante dessa técnica está na possibilidade de se controlar facilmente a difusão numérica das altas frequências no processo de marcha no tempo por meio do ajuste de um único parâmetro. Alguns trabalhos mais recentes que aplicaram com sucesso o MEF posicional em conjunto com o método α -generalizado são Siqueira (2019), Moreira (2021), Avancini (2023).

Dentre as aplicações dinâmicas da formulação posicional do MEF, pode-se citar inicialmente o trabalho de Marques (2006), o qual analisa o comportamento de sólidos bidimensionais em situação de não linearidade geométrica. Na sequência aplica-se a formulação posicional à elementos de pórticos planos e sólidos tridimensionais por Maciel (2008). Também foi avaliado o comportamento de elementos de cascas em problemas estáticos (Coda; Paccola, 2007) e dinâmicos (Coda; Paccola, 2009).

No âmbito da IFE, destaca-se a necessidade de se utilizar metodologias que capturem eficientemente grandes deslocamentos, uma vez que são observados efeitos de não linearidade geométrica em problemas como: *flutter*, aplicações biomecânicas, estruturas infláveis (Karagiozis *et al.*, 2011), simulações de turbinas (Bazilevs *et al.*, 2011), dentre outros.

Já a utilização do MEF baseado em posições em problemas de IFE pode ser vista nos trabalhos de Sanches e Coda (2013), onde considera-se o acoplamento de estruturas de cascas com escoamentos compressíveis, Fernandes, Coda e Sanches (2019) onde considera-se acoplamento de cascas com escoamentos incompressíveis, Fernandes (2020), o qual aplicou a formulação em elementos reticulados, Avancini (2023), que utilizou a formulação em problemas de escoamento com superfície livre, dentre outros. Assim, percebe-se o bom desempenho dessa formulação nesse contexto. No entanto, a utilização dessa formulação em problemas de IFE com elevados números de Reynolds ainda não foi explorada.

1.1.2 Dinâmica dos fluidos computacional

Ao contrário dos problemas da mecânica dos sólidos, que possuem um estado inicial bem definido, os fluidos, em especial os Newtonianos, não o possuem, uma vez que são incapazes de resistir a tensões desviadoras, deformando-se, assim, indefinidamente quando sujeitos à essas tensões. Dessa forma, torna-se apropriada a utilização de uma descrição Euleriana para seu equacionamento, os graus de liberdade são, em geral, velocidade e pressão (Fernandes, 2020).

Quando aplicado o método de Bubnov-Galerkin às equações da mecânica dos fluidos em descrição Euleriana, os termos convectivos (hiperbólicos) à medida em que se tornam dominantes sobre os termos dissipativos, induzem oscilações espúrias na solução (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013; Brooks; Hughes, 1982). Isso contribuiu para que o método dos elementos finitos fosse preterido no início dos estudos de CFD, tendo sido largamente empregados outros métodos como os das diferenças finitas e dos volumes finitos, como pode ser visto, por exemplo, em Anderson e Wendt (1995), Chung (2002).

No entanto, com o passar do tempo, surgiram trabalhos que buscaram estabilizar os efeitos dos termos convectivos no MEF de forma eficiente, sendo o mais empregado o método *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) (Brooks; Hughes, 1982), que se baseia na adição do resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado por uma função desenvolvida para introduzir estabilização na direção das linhas de corrente. Outras alternativas importantes são baseadas em mínimo quadrados (*Galerkin Least-Squares* - GLS (Hughes; Franca; Hulbert, 1989; Tezduyar, 1991)) ou na ideia de análise multiescala (por exemplo o *Subgrid Scales* - SGS (Piomelli, 1999; Hughes; Mazzei; Jansen, 2000) e *Variational Multiscale Method* - VMS (Hughes, 1995; Hughes *et al.*, 1998; Hughes; Mazzei; Jansen, 2000)). Assim, dadas às suas vantagens como ferramenta de discretização espacial e facilidades para imposições de condições de contorno, o MEF passou a ser bastante explorado também no contexto da CFD.

No caso da aplicação do MEF para escoamentos incompressíveis, a escolha dos espaços aproximadores para pressão e velocidade pode conduzir a resultados espúrios para o campo de pressão. Para que se obtenha resposta estável, essa escolha deve atender às condições de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB), sendo que uma condição necessária, porém não suficiente, aponta que a ordem do espaço de aproximação para o campo de pressão deve ser inferior à do espaço de aproximação de velocidades (Brezzi; Fortin, 1991; Donea; Huerta, 2003; Fernandes, 2020).

Visando conferir maior flexibilidade aos métodos, permitindo mesma ordem de aproximação para velocidade e pressão, foram desenvolvidas formulações estabilizadas, tais como os métodos *Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin* (PSPG), que parte de uma ideia similar ao SUPG, adicionando um termo estabilizador à forma fraca do problema e melhorando a estabilidade do método no campo de pressão, e *Galerkin/Least-Squares* (GLS), o qual adiciona resíduos na forma de mínimos quadrados ao método de Galerkin, obtendo, dessa forma, resultados estáveis

ao mesmo tempo que a precisão do método não é afetada (Hughes; Franca; Hulbert, 1989; Tezduyar; Sathe, 2003).

Outro problema que surge à medida em que o número de Reynolds do escoamento aumenta, passando de um regime laminar de escoamento para um regime turbulento, é a formação e desprendimento de vórtices. Esses fenômenos podem se apresentar nas mais variadas escalas, podendo demandar a geração de uma malha muito refinada para capturar os vórtices e solucionar o problema de forma estável. Isso ocasiona um aumento radical no custo computacional da análise. Como espera-se que um método numérico seja capaz de apresentar soluções acuradas para os problemas, independentemente do nível de discretização, diversos trabalhos foram conduzidos a fim de desenvolverem formulações estáveis para escoamentos com elevados números de Reynolds, buscando minimizar os custos computacionais, destacando-se os métodos *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS) (Speziale, 1991; Alfonsi, 2009; Ling; Templeton, 2015), que parte da ideia de decompor as variáveis envolvidas em parcela média e parcela de flutuações, em que a média das variáveis pode ser tomada de diferentes maneiras, a depender da natureza do problema, e as Simulações de Grandes Vórtices (*Large Eddy Simulation* - LES) (Germano *et al.*, 1991; Piomelli, 1999; Hughes; Mazzei; Jansen, 2000; Šekutkovski *et al.*, 2021), as quais decompõem as parcelas em uma parte filtrada e outra não filtrada a partir do produto convolucional dos campos analisados com o filtro adotado.

O método Variacional Multiescala (*Variational Multi-Scale* - VMS) (Hughes, 1995; Hughes *et al.*, 1998; Hughes; Oberai, 2002; Bazilevs; Akkerman, 2010; Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013), por sua vez, visa garantir ao mesmo tempo estabilização para os efeitos não viscosos, para o campo de pressão, e para o problemas de vorticidade. Esse modelo faz uso dos princípios variacionais, em que tanto os espaços tentativas quanto os espaços testes são divididos em parcela de grandes escalas e e parcela de pequenas escalas. Com isso se faz a modelagem do espaço de pequenas escalas em termos de resíduos das equações de conservação de massa e de conservação da quantidade de movimento. Dessa forma obtém-se uma formulação consistente, onde os termos estabilizantes das formulações PSPG e SUPG se fazem presentes, ao mesmo tempo em que outros termos consistentes surgem (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013; Sondak *et al.*, 2015).

1.1.2.1 Efeitos de turbulência

Para se compreender as estruturas de um regime de escoamento, é comum empregar um parâmetro adimensional dado pela razão entre as forças inerciais e viscosas, denominado de número de Reynolds. Os escoamentos podem se apresentar de três formas distintas a medida em que o seu número de Reynolds evolui. Primeiramente (a baixos números de Reynolds) observa-se o regime de escoamento laminar, caracterizado por um escoamento ordenado, tendo sua movimentação semelhante a lâminas deslizando independentemente entre si, sem mistura macroscópica entre as camadas de fluido (Popiolek, 2005; Shaughnessy; Katz; Schaffer, 2005).

Conforme o número de Reynolds aumenta, o escoamento passa por um momento de transição, com a formação esporádica de vórtices. Já quando o número de Reynolds se torna elevado, o escoamento passa a ser classificado como turbulento, sendo caracterizado por uma mistura intensa entre as camadas de fluido, com vórtices de diferentes escalas e formados de maneira desordenada.

As equações de Navier-Stokes são capazes de descrever esses escoamentos, no entanto, sua solução numérica passa a apresentar alto grau de complexidade. Por exemplo, no contexto do MEF, podem ser necessárias discretizações muito refinadas para a obtenção de uma resposta estável e consistente (Neto, 2002).

A aplicação direta do MEF sobre as equações de Navier-Stokes para a simulação de problemas turbulentos é conhecida como *Direct Numerical Simulation* (DNS). Essa abordagem resolve diretamente em todas as escalas presentes, sendo, portanto uma abordagem precisa para se simular escoamentos turbulentos, mas que necessita de discretização muito refinada, sendo utilizado em trabalhos como os de Yokokawa *et al.* (2002), Picano, Breugem e Brandt (2015), Olad *et al.* (2022), Marioni *et al.* (2021). No entanto, o custo computacional acaba por restringir sua aplicação a problemas pequenos e de geometria simples, sendo muito empregado para verificação de modelos numéricos que sejam mais viáveis (Piomelli, 1999; Yokokawa *et al.*, 2002).

Sendo assim surge a necessidade de se utilizar modelos de turbulência, como aqueles baseados na decomposição de Reynolds, ou na simulação de grandes vórtices. Com isso os modelos de turbulência podem ser classificados, dentre outras formas, como: modelos simples onde se obtém expressões algébricas para o cálculo de viscosidade de vórtice, onde se assume que a geração e dissipação de estruturas turbulentas ocorrem no mesmo local; modelos que adicionam equações diferenciais para o cálculo da viscosidade de vórtice; e modelos que adicionam equações de transporte para o cálculo das tensões de Reynolds (Souza *et al.*, 2011; Alfonsi, 2009; Teixeira, 2001).

Em geral o que se busca com a aplicação dos modelos de turbulência é a decomposição das variáveis envolvidas, que pode ser feita de diferentes maneiras a depender do modelo adotado, de forma a se modelar as parcelas turbulentas e resolver diretamente a parcela resultante. Isso faz com que seja possível a utilização de malhas mais grosseiras, reduzindo o custo computacional.

1.1.2.1.1 *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*

Uma maneira alternativa de se tratar os escoamentos turbulentos é o *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS), cujos conceitos iniciais foram introduzidos por Reynolds (1895). A principal premissa desse modelo diz que é possível separar as variáveis envolvidas no escoamento em duas parcelas: uma relacionada à média, sendo essa a parcela predominante e a principal a ser determinada, e outra relacionada a variações no espaço-tempo.

A maneira como a média é tomada nesse caso pode variar de acordo com a natureza do problema, podendo ser uma média temporal, apropriada para escoamentos estacionários, uma média espacial, apropriada para escoamentos com distribuição homogênea de estruturas turbulentas, e uma média de conjunto de experimentos, adequado para casos mais gerais (Speziale, 1991; Alfonsi, 2009).

Isso introduz ao equacionamento um termo adicional relacionado às interações entre as parcelas flutuantes, que representa a interferência dos efeitos turbulentos na propriedade média. Por conta dessa relação existente entre as parcelas médias e de flutuações, surge a necessidade de adicionar mais equações ao problema, de forma a fechá-lo. Assim, diferentes abordagens se mostram possíveis e que podem ser classificadas em função da quantidade de equações de transporte adicionadas, sendo elas: modelos de zero equações, uma equação, duas equações e modelos de tensões (Piomelli, 1999; Alfonsi, 2009; Bazilevs; Akkerman, 2010; Ling; Templeton, 2015).

1.1.2.1.2 *Large-Eddy Simulation*

Outra forma de abordar tais problemas é com o emprego do modelo de *Large-Eddy Simulation* (LES), introduzido pelo trabalho de Smagorinsky (1963), que o propôs no intuito de se estudar simulações de camadas limite atmosféricas. Esse modelo considera a separação das grandezas em duas parcelas: uma parcela filtrada, a qual captura os grandes vórtices, possíveis de ser calculada diretamente por meio das equações de Navier-Stokes filtradas; e outra não-filtrada, a qual representa os pequenos vórtices, que apesar de não poder ser calculada diretamente, possui um comportamento isotrópico, viabilizando sua modelagem. Uma possível forma de se modelar os termos não-filtrado baseia-se no modelo de *Sub-Grid Scale* (SGS), que faz a interação entre os campos de grandes e de pequenas escalas, sendo aprimorada de forma a capturar os efeitos turbulentos em função do tamanho dos elementos (Ghosal; Moin, 1995; Hughes; Mazzei; Jansen, 2000; Moeng; Sullivan, 2015).

Outra possibilidade se baseia no modelo de Smagorinsky, o qual faz a consideração das estruturas formadas na subescala por meio da adição de um termo de viscosidade de vórtice, inserindo no problema uma constante, denominada de constante de Smagorinsky. Posteriormente, Deardorff (1971) estimou o coeficiente de Smagorinsky ao estudar escoamentos em canais. A ideia central do modelo parte da consideração de que o escoamento pode ser bem caracterizado por meio de uma separação de escalas, na qual as grandes escalas são responsáveis pela transferência da energia cinética, sendo influenciadas diretamente pela natureza do escoamento, assim como pelas condições de contorno, enquanto as pequenas escalas são responsáveis pela dissipação dessa energia e possuem propriedades isotrópicas e homogêneas no escoamento. Assim, o modelo de Smagorinsky consiste em uma decomposição do campo de velocidade em duas parcelas, uma de grandes escalas e outra de pequenas escalas, sendo a parcela de

pequenas escalas modelada por um termo viscoso, o qual é determinado a partir de um modelo de viscosidade de vórtice.

1.1.3 Interação fluido-estrutura

A solução numérica de problemas de IFE compreende a solução de 3 subproblemas, sendo esses a CFD, a CSD e o Problema de Interação (*Interaction Problem - IP*). Fazer o acoplamento adequado entre CFD e CSD pode se tornar uma tarefa complexa, pois o problema se caracteriza pela multidisciplinaridade (Hou; Wang; Layton, 2012), onde pode ser necessário lidar com descrições e métodos diferentes para cada problema, por exemplo a utilização de uma descrição Lagrangiana para modelar o sólido e uma descrição Euleriana para o fluido. Além disso, as variáveis incógnitas em cada um dos dois problemas são, em geral, distintas, como deslocamentos ou posições em sólidos e velocidades e pressões no fluido.

Outra questão a ser observada em problemas de IFE é que, devido à movimentação da estrutura, deve-se realizar algum procedimento para que o domínio do fluido perceba essa movimentação. Nesse sentido, alguns dos métodos disponíveis são: os métodos de malha móvel, onde a malha do fluido é conforme ao contorno da estrutura, sendo dinamicamente deformada, os métodos de malhas fixas, onde a malha do fluido não é conforme ao contorno do sólido e permanece fixa (indeformável) durante a análise, e os métodos híbridos, que se utiliza de superposição de malhas fixa e móvel (Fernandes, 2020).

Nos métodos de malhas móveis, demanda-se a solução de um problema adicional para movimentar/deformar a malha do fluido de forma a acomodar a nova configuração da estrutura. Esse tipo de técnica é bastante precisa e robusta, já que permite a utilização de uma malha razoavelmente complexa próxima à interface fluido-estrutura para se obter resultados mais precisos nessa região. No entanto, é importante notar que em casos em que haja grande distorção do domínio do fluido, ou mudanças topológicas do mesmo (ex. contato entre sólidos) é necessário o remalhamento do fluido (Terahara *et al.*, 2020). Nos trabalhos que empregam métodos de malhas móveis, destacam-se a utilização formulação Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian - ALE*) (Donea; Giuliani; Halleux, 1982; Kanchi; Masud, 2007; Fernandes; Coda; Sanches, 2019) e da formulação Espaço Tempo (*Space-Time - ST*) (Takizawa; Tezduyar, 2011; Terahara *et al.*, 2020; Takizawa *et al.*, 2011) para permitir a movimentação da malha do fluido de forma independente do movimento das partículas.

Por sua vez, os métodos de malhas não-conformes consideram as condições de interface impostas diretamente nas equações governantes, em geral através de técnicas de contorno imerso, permitindo que a malha do sólido se mova imersa na malha do fluido, a qual permanece fixa. Essa técnica evita os problemas relacionados à movimentação excessiva da malha, sendo adequada para problemas com mudanças topológicas do domínio. Porém, em certos casos de problemas de geometria complexa, a economia com os custos de remalhamento pode não compensar a perda de precisão próxima à interface (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013; Hou; Wang; Layton, 2012;

Bazilevs *et al.*, 2015).

No âmbito dos acoplamentos com malhas fixas, nota-se a utilização de técnicas baseadas em contornos imersos em diversos trabalhos, como: o de Zhao *et al.* (2016), o qual analisou os resultados da técnica por comparação com respostas analíticas, numéricas e experimentais, tendo obtido bons resultados; o de Zheng *et al.* (2020), que utilizou uma formulação modificada de um método de contornos imersos, comparando os resultados com os obtidos experimentalmente em situações simétricas e assimétricas, obtendo resultados satisfatórios; o de Xiao *et al.* (2022), sendo estudado escoamentos com transferência de massa, calor e momento, e também são apontadas pelos autores as dificuldades provenientes, dentre outras causas, da não conformidade da malha, especialmente em problemas com alto número de Reynolds; dentre outros, como de Wang *et al.* (2011), Ruess *et al.* (2013), Yan *et al.* (2021).

Como pode ser visto em Hou, Wang e Layton (2012), existem diferentes possibilidades de se impor as condições de acoplamento na solução numérica de problemas de IFE, podendo resultar em acoplamento monolítico, onde os meios sólido e fluido são tratados como uma única entidade, levando a um único sistema de equações; ou particionado, onde sólido e fluido são solucionados separadamente com as condições de interface sendo transferidas de um meio para o outro como condições de contorno.

O acoplamento monolítico é muito robusto e elimina problemas de estabilidade que podem surgir com a solução particionada. No entanto, é pouco flexível do ponto de vista de permitir diferentes métodos para os domínios fluido e sólido, além de resultar num sistema de equações maior e que pode ser mal condicionado. Como exemplos de trabalhos que adotam o modelo monolítico pode-se citar os trabalhos de Michler *et al.* (2004), Hron e Mádlík (2007), Wick e Wollner (2021) e Avancini (2023).

Já os acoplamentos particionados podem ser subdivididos em modelos fortes, ou implícitos, e modelos fracos, ou explícitos (Felippa; Park; Farhat, 2001). Nos acoplamento fracos, as condições de acoplamento são transmitidas de um meio para o outro a cada passo de tempo, sendo vantajoso principalmente em casos de escoamentos compressíveis quando o passo de tempo precisa ser muito pequeno para capturar propagações de ondas de choque (Sanches, 2011; Sanches; Coda, 2014; Sanches; Coda, 2013). No entanto, especialmente em problemas incompressíveis, o acoplamento fraco pode conduzir a efeitos numéricos indesejáveis, conduzindo a respostas erradas ou instáveis (Felippa; Park; Farhat, 2001; Fernandes; Coda; Sanches, 2019). No acoplamento forte por sua vez, as condições de interface são transmitidas dentro de um processo iterativo de solução dos sistemas não lineares para sólido e fluido, levando a uma solução acurada. No entanto, essa técnica pode apresentar dificuldade de convergência em algumas situações, especialmente à medida em que as massas específicas do sólido e do fluido se aproximam, onde os problemas são considerados fortemente acoplados e a pequena perturbação em um dos meios causa grandes mudanças no equilíbrio do outro. Para contornar esses problemas existem técnicas como o emprego de relaxações de processo iterativo baseado em Gauss-Seidel com relaxações de

Aitken (Fernandes; Coda; Sanches, 2019) ou a técnica *augmented A22* (Tezduyar *et al.*, 2005). Como exemplos de trabalhos que empregam o modelo particionado pode-se citar: Sanches e Coda (2013), Sanches e Coda (2014), Fernandes, Coda e Sanches (2019).

A principal vantagem do modelo particionado está na modularidade do código e na redução do custo computacional, ao se resolver sistemas menores e mais bem condicionados (Sanches, 2011; Fernandes, 2020). Por outro lado, o modelo monolítico apresenta como vantagens melhor precisão e evita problemas de instabilidade e convergência (Avancini, 2023).

1.2 Objetivos

Esta proposta tem como objetivo principal o estudo de formulações numéricas e a implementação computacional de modo a se obter ferramentas computacionais eficientes e precisas para a simulação de problemas de interação fluido-estrutura com elevados números de Reynolds, onde possa haver efeitos de turbulência. Dentro desse escopo, alguns objetivos específicos devem ser alcançados:

- Estudo das formulações estabilizadas do método dos elementos finitos para escoamentos incompressíveis com contornos móveis, com destaque para as estabilizações SUPG, LSIC, PSPG e VMS;
- Estudo da formulação posicional do MEF para análise dinâmica de sólidos e cascas com grandes deslocamentos;
- Estudo das técnicas de acoplamento particionado fluido-estrutura com malhas móveis;
- Estudo dos modelos de turbulência *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* e *Large Eddy Simulation* aplicados ao contexto do MEF;
- Implementação da formulação estabilizada *Variational Multi-Scale*;
- Implementação do modelo *Large Eddy Simulation*;
- Acoplamento do código para mecânica dos fluidos com programa para análise não linear de estruturas de cascas;
- Estudo comparativo dos modelos implementados através da simulação de exemplos disponíveis na literatura.

1.3 Metodologia

Tendo em vista a complexidade dos problemas em estudo, delimita-se este trabalho aos estudos dos problemas de interação fluido-estrutura considerando escoamento incompressível viscoso, interagindo com estruturas de casca com grandes deslocamentos. Adota-se acoplamento particionado forte do tipo bloco-iterativo, com método de malha móvel para o fluido

baseado na descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (ALE). Essa abordagem é adotada por ser reconhecidamente robusta, modular e amplamente utilizada para análises de IFE.

Assim como os problemas a serem estudados, as implementações necessárias também são bastante complexas, sendo importante a adoção de uma metodologia de programação que aproveite os códigos disponíveis e ao mesmo tempo facilite alterações de tipos de elementos, modelos constitutivos, métodos de solução de sistemas e operações algébricas, e, mais importante no contexto desta proposta, diferentes métodos de estabilização e modelos de turbulência.

Dessa forma adota-se a linguagem de programação C++ orientada a objeto, uma vez que se é possível aproveitar diversos códigos já desenvolvidos pelo grupo de pesquisa, *i.e.* programa de elementos finitos para análise de escoamentos incompressíveis com contornos móveis e programa para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas de casca finas ou espessas.

Para a solução da mecânica dos sólidos, emprega-se uma formulação o MEF baseada em posições, aproveitando-se um programa para análise de cascas com cinemática de Reissner-Mindlin, já desenvolvido pelo grupo de pesquisa. A formulação baseada em posições emprega uma descrição Lagrangiana Total, sendo adotado o modelo constitutivo de Saint-Venant Kirchhoff, com a medida de deformação de Green-Lagrange. O elemento de casca utilizado possui 7 graus de liberdade por nó, *i.e.* 3 componentes de posição nodal, 3 componentes de um vetor generalizado, inicialmente perpendicular à superfície média da casca, e 1 parâmetro de enriquecimento para permitir variação linear da deformação na direção da espessura. O programa emprega elementos finitos isoparamétricos triangulares de aproximação linear, quadrática ou cúbica, sendo a integração temporal realizada por meio do método de marcha no tempo α -generalizado, e o sistema não linear resultante é resolvido por meio do método de Newton-Raphson.

Já para a solução da mecânica dos fluidos, parte-se de um código computacional para escoamentos bidimensionais e tridimensionais empregando a formulação estabilizada SUPG/PSPG do MEF e descrição ALE, o que possibilita a representação de contornos móveis. São empregados elementos triangulares (2D) e tetraédricos (3D) com aproximações linear ou quadrática. Assim como no sólido, a aproximação temporal é dada pelo integrador α -generalizado e o método de Newton-Raphson é empregado para a solução do sistema não linear. Neste código é parte desta proposta a implementação de elementos Taylor-Hood, com aproximação quadrática para velocidades e linear para pressão, a implementação da técnica de estabilização *Least-Squares on Incompressibility Constraint* (LSIC) para captura de vórtices, assim como o modelo de turbulência LES e o modelo de estabilização VMS.

Após o estudo e a verificação isolada das ferramentas para solução do fluido e do sólido, parte-se para o acoplamento. Para isso adota-se um modelo de acoplamento particionado forte do tipo bloco-iterativo, sendo a movimentação da malha do fluido realizada com base na equação de Laplace, em que os elementos menores possuem rigidez mais elevada, para evitar distorções excessivas, enquanto os elementos maiores absorvem a maior parte das deformações.

Frente ao custo computacional dos problemas considerados, emprega-se o protocolo de processamento paralelo *Message Passing Interface* (MPI), com utilização da biblioteca PETSc (*Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation*) (Balay *et al.*, 2023), a qual é reconhecidamente eficiente para solução de sistemas esparsos que necessitem de alto desempenho computacional. As malhas são geradas a partir do programa Gmsh (Geuzaine; Remacle, 2009), e os resultados são interpretados graficamente por meio do visualizador Paraview (Ahrens; Geveci; Law, 2005) e por meio do programa gnuPlot, no caso da geração de gráficos de linha 2D ou 3D. Nota-se que se prioriza o uso de ferramentas computacionais livres e de código aberto para facilitar a distribuição e as atualizações da ferramenta computacional resultante.

1.4 Justificativa

Os avanços na área da engenharia colocam em evidência a necessidade cada vez maior de se determinar de forma precisa as variáveis necessárias ao dimensionamento de estruturas, sejam referentes à resistência dos materiais utilizados, ou às solicitações atuantes. Nesse sentido, em diversas ocasiões, os efeitos advindos da interação fluido-estrutura (IFE) são responsáveis por submeter estruturas a esforços consideráveis, o que demanda que esses efeitos sejam adequadamente estudados. Dessa forma, a análise desse tipo de problema via métodos computacionais se mostra promissor, uma vez que estudos experimentais normalmente são dispendiosos e pouco flexíveis quanto às suas aplicações.

Dentre os métodos empregados, pode-se destacar o dos Elementos Finitos (MEF), com aplicações tanto para modelar o sólido como para o fluido. Esse método ganha atenção, uma vez que pode se adequar com certa facilidade à problemas de geometria complexa, assim como facilita a aplicação de condições de contorno.

Embora no contexto da mecânica dos fluidos, a utilização do MEF segundo o método de Bubnov-Galerkin possa gerar oscilações espúrias, decorrentes dos termos convectivos, de ondas de choque nos casos compressíveis, ou da interpolação da pressão por espaços de funções inadequados nos casos incompressíveis, todos esses problemas já dispõem de técnicas consistentes para que sejam evitados. Como exemplos, destacam-se a técnica SUPG para estabilização de problemas com predominância do termo convectivo sobre os termos dissipativos, a técnica PSPG ou o uso de elementos Taylor-Hood para estabilização da pressão nos escoamentos incompressíveis e a introdução de operadores de captura de choque para os casos compressíveis.

Entretanto, mesmo que diversos trabalhos tenham sido realizados, resultando em grandes avanços na área, alguns desafios se mantêm, como o elevado custo computacional relacionado à simulações de IFE, o que demanda muito tempo pra a obtenção de resultados, inviabilizando sua aplicação na etapa de elaboração de muitos projetos usuais de engenharia. Nesse cenário, problemas de escoamento turbulentos se tornam ainda mais custosos, devido à alguns fenômenos como a manifestação de vórtices, geralmente tridimensionais, de forma desordenada, instável e em uma grande amplitude de escalas. Assim necessita-se de malhas muito refinadas para capturar

a ocorrência dessas estruturas. Para que a simulação desses problemas seja estável em qualquer nível de discretização, e possa resultar em respostas consistentes a custos computacionais aceitáveis, faz-se necessária a adoção de modelos de turbulência, como aqueles baseados na decomposição de Reynolds (RANS) ou em grandes vórtices (LES), ou de técnicas multiescala adequadas.

Já no contexto da mecânica dos sólidos, diversas técnicas são possíveis para abordar o problema, *e.g.* o MEF corrotacional. No entanto considerar rotações nodais finitas e uma matriz de massa variável podem dificultar a aplicação dessa abordagem. Sendo assim, a utilização do MEF baseado em posições se torna interessante, uma vez que considera intrinsecamente a não linearidade geométrica, além de possuir uma matriz de massa constante, facilitando o processo de integração temporal.

Para o acoplamento entre fluido e estrutura, o processo de acoplamento particionado se torna viável na presente proposta, uma vez que se pode utilizar diferentes códigos que funcionam independentemente entre si, tanto para solução de problemas de fluidos, quanto para problemas de sólidos, e que podem ser acoplados de maneira eficiente. Isso se justifica pela presença de códigos já desenvolvidos pelo grupo de pesquisa do Departamento de Engenharia de Estruturas (SET), capazes de resolver isoladamente problemas da mecânica dos sólidos e dos fluidos. Também se opta pelo processo de acoplamento particionado forte, uma vez que se mostra eficaz na resolução de problemas fortemente acoplados.

Além disso, a utilização de malhas móveis para o fluido, por meio da descrição ALE, se mostra como uma alternativa viável, uma vez que permite que a malha do fluido se movimente dinamicamente para acomodar a movimentação da interface fluido-sólido. Sendo a movimentação dada pelo esquema de movimentação suave de Laplace, com uma modificação que confere maior rigidez aos elementos menores da malha, o que previne distorções excessivas de elementos pequenos, mantendo, conseqüentemente, a qualidade da malha.

Sendo assim, o presente trabalho é justificado ao propor o desenvolvimento de uma ferramenta computacional eficiente e precisa, aplicada a problemas de IFE com escoamentos turbulentos com a opção de se aplicar modelo de turbulência para redução do custo computacional. Igualmente, fica justificado a proposta de estudar e comparar os diferentes modelos e estabilizações a serem implementadas quando da aplicação a problemas de IFE. A presente pesquisa visa ainda aprimorar as ferramentas computacionais que estão sendo desenvolvidas pelo grupo de pesquisa do SET da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC) da Universidade de São Paulo (USP), ampliando seu leque de aplicações.

1.5 Organização do trabalho

A presente dissertação está estruturada em 6 capítulos, os quais são brevemente descritos a seguir.

Capítulo 1 - Introdução: Apresenta a motivação para o desenvolvimento do trabalho, os objetivos, a justificativa para a realização do mesmo e a metodologia adotada. Introduz-se resumidamente as principais características e particularidades dos problemas de interação fluido-estrutura, bem como as dificuldades encontradas para a obtenção de soluções numéricas precisas para esses problemas. Na sequência é apresentado o estado da arte dos principais assuntos envolvidos, de forma a situar o leitor quanto aos principais desenvolvimentos, dando uma visão do panorama científico atual em relação aos métodos numéricos para análise de interação fluido-estrutura aplicados a escoamentos incompressíveis viscosos. Com isso o leitor estará apto a compreender a metodologia proposta e sua justificativa, as quais são apresentadas na sequência.

Capítulo 2 - Análise Numérica Para Mecânica Dos Fluidos: Inicialmente são apresentadas as equações governantes para escoamentos isotérmicos incompressíveis, tanto na descrição Euleriana quanto na descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária, que permite a simulação de problemas de escoamentos com contornos móveis. Em seguida, desenvolve-se a formulação numérica adotada para a solução dos problemas de escoamentos incompressíveis, a qual trata-se de uma formulação estabilizada do método dos elementos finitos com integração temporal por meio do método implícito de marcha no tempo α -generalizado. Na sequência se introduz o esquema adotado para a movimentação da malha para garantir a conformidade do domínio com os contornos móveis, o qual é baseado na equação de Laplace. Posteriormente é desenvolvida a formulação estabilizada de acordo com o VMS. Em seguida é introduzido o modelo de turbulência LES, com destaque para o emprego da viscosidade de Smagorinsky. Por fim, são apresentados exemplos de verificação para a formulação numérica proposta, tanto em problemas de contornos fixos, quanto de contornos móveis.

Capítulo 3 - Análise Numérica Para Dinâmica Não Linear Dos Sólidos: Apresenta-se primeiramente os conceitos básicos da dinâmica dos corpos deformáveis, onde se introduz as medidas fundamentais para o estudo desses meios, adotando-se uma descrição Lagrangiana Total. Em seguida, apresenta-se a formulação posicional do MEF para elementos de casca com cinemática de Reissner-Mindlin, empregando-se o método implícito α -generalizado para integração temporal. Finalmente são apresentados alguns exemplos para verificação do código empregado.

Capítulo 4 - Acoplamento Fluido-Estrutura: São apresentadas as condições que devem ser atendidas para garantir o acoplamento fluido-estrutura, assim como as técnicas de acoplamento particionado (fraco e forte) e suas particularidades. Na sequência, são estudados exemplos selecionados de problemas de IFE, explorando-se os efeitos de diferentes discretizações, diferentes espaços aproximadores, uso da formulação VMS e uso do modelo de turbulência LES.

Capítulo 5 - Conclusões: Com base nos resultados obtidos nos capítulos anteriores são apresentadas as conclusões do trabalho e, a partir disso, são propostas sugestões para trabalhos futuros.

2 ANÁLISE NUMÉRICA PARA MECÂNICA DOS FLUIDOS

No presente capítulo serão apresentadas as equações que governam os escoamentos isotérmicos incompressíveis. Inicialmente apresenta-se a formulação em descrição Euleriana, onde se considera um domínio fixo na configuração atual do escoamento (Seção 2.1). Em seguida essa formulação é expandida para a descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (ALE), a qual permite a movimentação da malha, independentemente da movimentação das partículas do fluido (Seção 2.2). Posteriormente, por meio do método dos resíduos ponderados, obtém-se a forma fraca para a solução do problema com uso da técnica dos elementos finitos (Seção 2.3).

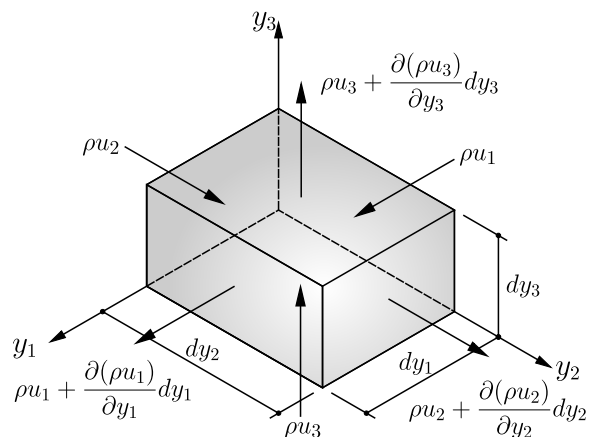
2.1 Descrição Euleriana

A descrição Euleriana toma como referência a configuração atual do contínuo, sendo apropriado para análises de domínios fixos. Na sequência serão apresentadas as equações da conservação da massa e da quantidade de movimento utilizando essa descrição, bem como o modelo constitutivo adotado para o fluido.

2.1.1 Conservação da massa

Em descrição Euleriana, é possível se obter uma expressão que defina a conservação de massa (também denominada como Equação da Continuidade) do fluido, considerando um elemento infinitesimal permeável, que definirá o volume de controle, conforme ilustrado na Figura 1, em que \mathbf{u} é o valor da velocidade na posição atual \mathbf{y} e ρ é a densidade do fluido nesse ponto.

Figura 1 – Taxa de fluxo de massa em um elemento infinitesimal permeável.



Fonte: Presente trabalho (2024).

A variação da massa contida neste elemento é dada por:

$$dm = dm_0 + \left. \frac{\partial dm}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} dt, \quad (2.1)$$

a partir de onde expressa-se o balanço de massa no elemento por:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} = \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.2)$$

sendo $D\rho/Dt$ a derivada material, definida para um escalar ϕ qualquer como:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{y}})\phi, \quad (2.3)$$

em que o ponto sobre a variável representa a derivada temporal da mesma, $\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\cdot)$ é o operador divergente e $\nabla_{\mathbf{y}}(\cdot)$ é o operador gradiente, que para uma função escalar g é definido por (2.4a) e para uma função vetorial é definido por (2.4b):

$$\nabla_{\mathbf{y}} g = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} \equiv \frac{\partial g}{\partial y_i} \quad , \text{ com } i = 1, 2, \dots, n_{sd} \text{ e} \quad (2.4a)$$

$$\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \equiv \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \quad , \text{ com } i \text{ e } j = 1, 2, \dots, n_{sd}, \quad (2.4b)$$

sendo $n_{sd} = 2$ ou 3 a dimensão do problema em análise.

Para escoamentos incompressíveis, Eq. (2.2) fica reduzida a:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.5)$$

denominada equação da continuidade ou condição de incompressibilidade.

2.1.2 Conservação da quantidade de movimento

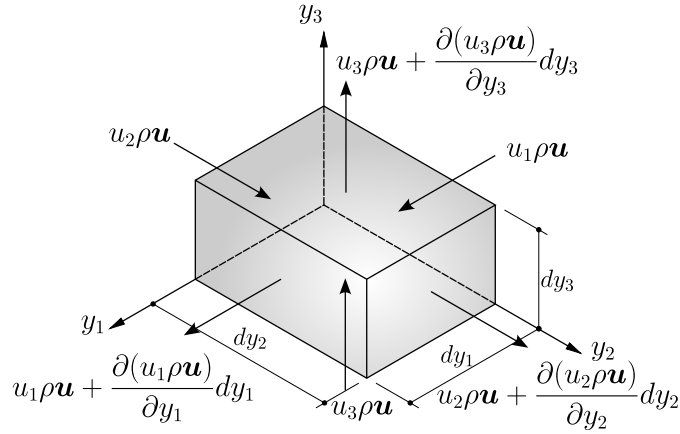
O fluxo da Quantidade de Movimento linear (ou de *Momentum Linear*) no elemento infinitesimal permeável é ilustrado na Figura 2.

Realizando-se o balanço da quantidade de movimento sobre este elemento, e aplicando-se o princípio da conservação da quantidade de movimento, pode-se escrever:

$$\left. \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

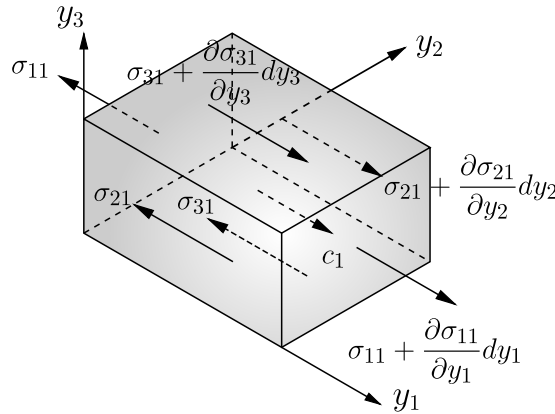
onde \mathbf{q} representa a força resultante por unidade de volume que atua no elemento, ou seja, $\mathbf{q} = d\mathbf{F}^{\text{res}}/dV$. Entretanto, não é de interesse escrever a equação (2.6) em termos desse vetor \mathbf{q} , mas em termos do tensor de tensões de Cauchy ($\boldsymbol{\sigma}$) e das forças de volume. Para isso,

Figura 2 – Fluxo de quantidade de movimento em um elemento infinitesimal permeável.



Fonte: Presente trabalho (2024).

considera-se o diagrama de corpo livre do elemento infinitesimal ilustrado na Figura 3, onde são representadas apenas as componentes de tensão e de forças de volume atuantes na direção y_1 .

Figura 3 – Componentes de forças atuantes no elemento infinitesimal na direção y_1 .

Fonte: Presente trabalho (2024).

Fazendo o equilíbrio de forças na direção de y_1 , obtém-se que:

$$q_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_3} + c_1, \quad (2.7)$$

procedendo-se analogamente para as demais direções, e sabendo-se da simetria de σ , tem-se que:

$$\mathbf{q} = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{c}. \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (2.6) e aplicando a condição de incompressibilidade, obtém-se a equação da conservação da quantidade de movimento escrita em termos de tensões:

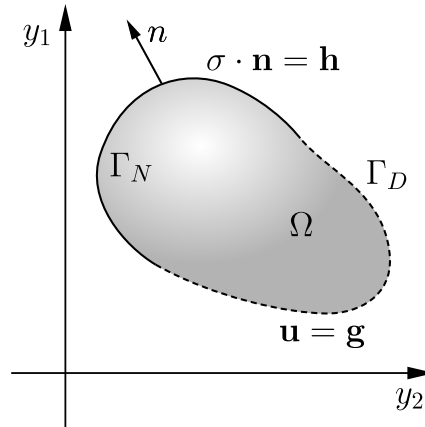
$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (2.9)$$

em que $\mathbf{c} = \rho \mathbf{f}$, tal que \mathbf{f} é uma força por unidade de massa. Além disso, também é possível escrever a equação (2.9) utilizando a notação de derivada material como:

$$\rho \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

Já o domínio em que essas equações são válidas pode ser definido como $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$, tal que Ω possui uma fronteira $\Gamma = \partial\Omega$, tal que a parte dessa fronteira onde se impõem condições de contorno essenciais é denominada como fronteira de Dirichlet (Γ_D) e a parte onde há prescrição de forças de superfície é denotada como fronteira de Neumann (Γ_N), conforme pode ser visualizado na Figura 4.

Figura 4 – Domínio e condições de contorno para os problemas de mecânica dos fluidos.



Fonte: Presente trabalho (2024).

Dessa forma, o problema a ser resolvido segue as equações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \text{em } \Omega, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} & \text{em } \Gamma_N, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{em } \Gamma_D, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

que governam os escoamentos incompressíveis de Navier-Stokes em descrição Euleriana (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013; Bazilevs; Akkerman, 2010; Bazilevs *et al.*, 2007; Hughes; Oberai, 2002; Hughes; Mazzei; Jansen, 2000).

2.1.3 Modelo constitutivo

O modelo constitutivo adotado para o fluido é o de escoamentos Newtonianos incompressíveis, o qual relaciona o tensor de tensões de Cauchy com a taxa de deformação e a pressão de acordo com:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}, \quad (2.12)$$

onde \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor de tensões viscosas (ou tensor desviador), que para fluidos Newtonianos é dado por:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathfrak{D} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (2.13)$$

em que \mathfrak{D} é o tensor constitutivo de quarta ordem:

$$\mathfrak{D} = 2\mu\mathbb{I} + \lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (2.14)$$

sendo \mathbb{I} o tensor identidade de quarta ordem, μ a viscosidade dinâmica do fluido e $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ o tensor de taxa de deformação, definido como:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{y}}^T \mathbf{u}). \quad (2.15)$$

Assim, o tensor desviador pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\tau} = (2\mu\mathbb{I} + \lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 2\mu\mathbb{I} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

resultando em:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \lambda \operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})\mathbf{I}, \quad (2.16)$$

sendo $\operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})$ o traço do tensor $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$.

Já para o caso de escoamentos incompressíveis, verifica-se que $\operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = 0$, fazendo com que (2.12) possa ser escrita como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu(\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{y}}^T \mathbf{u}) - p\mathbf{I}. \quad (2.17)$$

Logo é possível substituir o modelo constitutivo na equação da conservação da quantidade de movimento apresentada em (2.11) e realizar algumas manipulações algébricas para se obter:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{\nabla_{\mathbf{y}} p}{\rho} + \nu \nabla_{\mathbf{y}}^2 \mathbf{u}. \quad (2.18)$$

em que $\nabla_{\mathbf{y}}^2(\cdot) = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}(\cdot)$ é o operador laplaciano e $\nu = \mu/\rho$ a viscosidade cinemática.

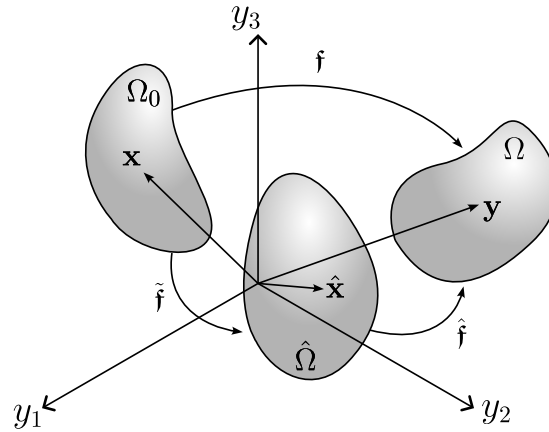
Essa equação representa a primeira lei de Euler (generalização da a segunda lei de Newton para um meio contínuo), sendo o lado esquerdo referente às acelerações, onde $\left. \partial \mathbf{u} / \partial t \right|_{\mathbf{y}}$ representa a taxa de variação local de velocidade em um elemento ao longo do tempo e $(\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{u}$ representa a aceleração convectiva, referente à variação de velocidade no espaço. Já o lado direito

representa as forças por unidade de massa, sendo \mathbf{f} devida às forças de corpo, $\nabla_y p / \rho$ devida à pressão interna do fluido e $\nu \nabla_y^2 \mathbf{u}$ devido às forças viscosas (ou forças de difusão).

2.2 Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária

A descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian* - ALE) originou-se do trabalho de Donea, Giuliani e Halleux (1982). São considerados 3 domínios, Ω_0 , Ω e $\hat{\Omega}$, que representam, respectivamente, os domínios do contínuo em sua configuração inicial e atual e o domínio da malha, que desenvolve movimento independente do movimento do contínuo, como ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária.



Fonte: Presente trabalho (2024).

As coordenadas \mathbf{x} , \mathbf{y} e $\hat{\mathbf{x}}$ representam as coordenadas de um ponto nos domínios Ω_0 , Ω e $\hat{\Omega}$, respectivamente. Já as funções $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$, $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)$ e $\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ são funções que mapeiam o domínio inicial do fluido para o atual, o domínio inicial do fluido para o domínio inicial da malha, e o domínio da malha para a configuração atual do fluido, que é coincidente com a configuração atual da malha.

Com isso, podem-se escrever os gradientes dessas funções:

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{y} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.19a)$$

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \frac{\partial(\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} & \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \text{ e} \quad (2.19b)$$

$$\hat{\mathfrak{F}} = \frac{\partial(\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial(\hat{\mathbf{x}}, t)} = \begin{bmatrix} \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{y} & \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.19c)$$

nos quais $\mathbf{u} = \partial \mathbf{y} / \partial t|_{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{u}} = \partial \hat{\mathbf{x}} / \partial t|_{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{y} / \partial t|_{\hat{\mathbf{x}}}$. Além disso, vale ressaltar que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t), t)$, portanto $\mathfrak{F} = \hat{\mathfrak{F}} \cdot \tilde{\mathfrak{F}}$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{y} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{y} & \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} & \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

que possui, como uma de suas consequências:

$$\mathbf{u} = \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{y} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}, \text{ ou} \quad (2.21)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \nabla_{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}). \quad (2.22)$$

Assim é possível definir a derivada material na descrição ALE. Para isso seja uma propriedade $\phi(\mathbf{y}, t)$ escrita em termos da configuração atual, igual a $\phi^*(\hat{\mathbf{x}}, t)$ quando escrita em termos da configuração de referência e igual a $\phi^{**}(\mathbf{x}, t) = \phi^*(\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t), t)$ quando escrita em termos da configuração inicial. Logo:

$$\frac{\partial \phi^{**}(\mathbf{x}, t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial \phi^*(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial(\hat{\mathbf{x}}, t)} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)}{\partial(\mathbf{x}, t)}, \text{ ou} \quad (2.23)$$

$$\left[\nabla_{\mathbf{x}} \phi^{**} \quad \frac{\partial \phi^{**}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \right] = \left[\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \phi^* \quad \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} \right] \cdot \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} & \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Portanto:

$$\frac{\partial \phi^{**}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \phi^* \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}}. \quad (2.25)$$

Substituindo 2.22 em 2.25, obtém-se que:

$$\frac{\partial \phi^{**}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \phi^* \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) + \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}}$$

$$\frac{\partial \phi^{**}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \phi^*$$

Dessa maneira, remove-se os sobrescritos * e ** e define-se a derivada material na descrição ALE como:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \phi. \quad (2.26)$$

2.2.1 Equações governantes na descrição ALE

Substituindo-se ϕ por ρ e aplicando-se a Eq. (2.26) na Eq. (2.2), a conservação da massa na descrição ALE é dada por:

$$\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \rho + \rho \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} \right) = 0, \quad (2.27)$$

que para escoamentos incompressíveis, onde $D\rho/Dt = 0$, implica em:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.28)$$

Já a Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na descrição ALE pode ser obtida fazendo $\phi = \mathbf{u}$ na Eq. (2.26) e substituindo em Eq. (2.10), resultando:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + ((\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.29)$$

Assim, os escoamentos de Navier-Stokes incompressíveis em descrição ALE são governados pelas equações (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013):

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + ((\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \text{em } \Omega, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} & \text{em } \Gamma_N \text{ e} \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{em } \Gamma_D. \end{cases} \quad (2.30)$$

2.3 Forma fraca das equações governantes

Para a obtenção da forma fraca das equações (2.30), parte-se do método dos resíduos ponderados. Assim, sejam os espaços de dimensões infinitas \mathcal{S}_u e \mathcal{S}_p das funções tentativas para os campos de velocidade e pressão, respectivamente, tal que (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013; Fernandes, 2020):

$$\mathcal{S}_u = \{ \mathbf{u} | \mathbf{u}(\cdot, t) \in H^1(\Omega), \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ em } \Gamma_D \} \text{ e} \quad (2.31)$$

$$\mathcal{S}_p = \left\{ p | p(\cdot) \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p d\Omega = 0 \text{ se } \Gamma = \Gamma_D \right\}, \quad (2.32)$$

em que $H^1(\Omega)$ representa o espaço de funções polinomiais com derivadas de quadrado integrável em Ω e $L^2(\Omega)$ representa o espaço de funções polinomiais de quadrado integrável em Ω , ou seja:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} \in L^2(\Omega) \right\} \text{ e} \quad (2.33)$$

$$L^2(\Omega) = \left\{ u \mid \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega < \infty \right\}. \quad (2.34)$$

Sejam ainda os espaços das funções testes para a conservação de massa e conservação da quantidade de movimento \mathcal{V}_p e \mathcal{V}_u , respectivamente, tais que:

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{S}_p \text{ e} \quad (2.35)$$

$$\mathcal{V}_u = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w}(\cdot) \in (H^1(\Omega))^{n_{sd}}, \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D \right\}. \quad (2.36)$$

Dessa forma, ponderando-se as equações (2.29) e (2.28) respectivamente por \mathbf{w} e q , tal que $q \in \mathcal{V}_p$ e integrando-se sobre o domínio Ω , obtém-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \left(\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + ((\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) d\Omega + \int_{\Omega} q \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0. \quad (2.37)$$

Separando-se a parcela que contém o tensor de tensões de Cauchy da primeira integral, tem-se que:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + ((\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega + \int_{\Omega} q \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0.$$

Fazendo a integração por partes da parcela que foi separada e considerando o Teorema da Divergência, chega-se a:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + ((\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma_N + \\ & \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} q \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Assim, o problema, fica definido como: dados \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{h} e $\hat{\mathbf{u}}$, em que $\mathbf{h} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ é o valor prescrito de força de superfície em Γ_N , determinar $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{S}_u \times \mathcal{S}_p$ tal que $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_u$ e $\forall q \in \mathcal{V}_p$ em um intervalo $t \in (0, T)$, a equação (2.38) seja satisfeita.

A solução desse problema, entretanto, pode levar à resultados com variações espúrias em problemas de termos convectivos dominantes caso seja considerado o método clássico de

Galerkin (Bubnov-Galerkin), como mencionado em (Fernandes, 2020; Donea; Huerta, 2003; Brooks; Hughes, 1982). Uma solução eficiente e consistente para isso é o emprego da técnica SUPG, como mencionado anteriormente. Além disso, vale observar que a adoção do grau de aproximação dos campos de velocidade e de pressão não pode ser feita de maneira descuidada, uma vez que, para conduzir a uma sistema com unicidade de solução, os espaços de funções para velocidade e pressão devem observar as condições *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB), que, como uma condição necessária, porém não suficiente, aponta a necessidade de se adotar funções para pressão de ordem inferior às adotadas para velocidade, tal que (Donea; Huerta, 2003):

$$\dim \mathcal{V}_p^h \leq \dim \mathcal{V}_u^h. \quad (2.39)$$

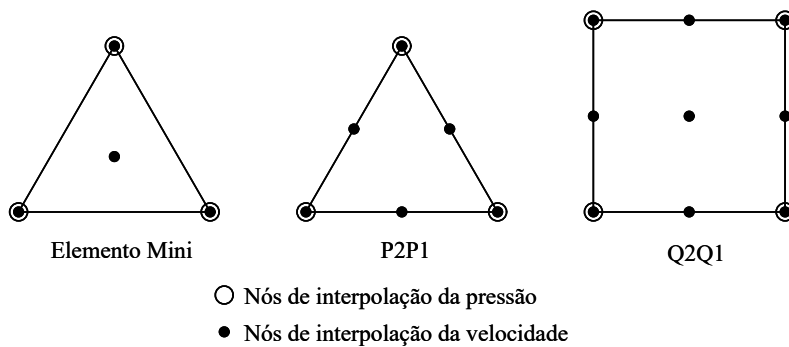
A escolha dos espaços de aproximação da velocidade e da pressão depende da seguinte condição suficiente:

$$\inf_{q^h \in \mathcal{V}_p^h} \sup_{\mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h} \frac{(q^h, \nabla \cdot \mathbf{w}^h)}{\|q\|_0 \|\mathbf{w}^h\|_1} \geq \beta > 0, \quad (2.40)$$

em que β é uma constante independente do tamanho da malha.

Como pode-se observar, a determinação de combinações de espaços de aproximações que atendam às condições LBB não é trivial, sendo que elementos estáveis são identificados em diferentes trabalhos. Donea e Huerta (2003) apresentam alguns elementos finitos que atendem às condições LBB (denominados de Elementos Taylor-Hood), sendo alguns ilustrados na Figura 6.

Figura 6 – Elementos Taylor-Hood.



Fonte: Fernandes (2020) - Adaptado.

Uma alternativa ao uso de Elementos Taylor-Hood, e que torna os métodos mais flexíveis, é o emprego de formulações estabilizadas, como a técnica PSPG (Tezduyar, 1991).

Outra formulação que é eficiente tanto para a estabilização do campo de pressão quanto de problemas dominados por termos convectivos, e que engloba os mesmos termos da estabilização SUPG/PSPG e ainda introduzindo outros termos estabilizantes de forma consistente, é a formulação VMS (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013).

2.3.1 Formulação semi-discreta

Para a discretização espacial do problema em descrição Euleriana pode-se realizar a separação da dependência espacial e temporal para as funções tentativas e testes como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}, t) = \sum_{\eta^s} \mathbf{U}^a(t) N_a^u(\mathbf{y}), \quad (2.41a)$$

$$p(\mathbf{y}, t) = \sum_{\eta^s} P^a(t) N_a^p(\mathbf{y}), \quad (2.41b)$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{y}) = \sum_{\eta^w} \mathbf{W}^a N_a^w(\mathbf{y}) \quad \text{e} \quad (2.41c)$$

$$q(\mathbf{y}) = \sum_{\eta^w} Q^a N_a^q(\mathbf{y}), \quad (2.41d)$$

onde N_a^u e N_a^p são as funções de forma para aproximação do campo de velocidade e de pressão, respectivamente, associadas ao nó a da malha e η^s o respectivo índice desse nó, assim como η^w são os índices referentes aos nós da malha para as funções teste.

Já para a descrição ALE as funções de forma $N_a(\mathbf{y}, t)$ são definidas com base na configuração de referência da malha como:

$$N_a(\mathbf{y}, t) = \hat{N}_a(\hat{\mathbf{f}}^{-1}(\mathbf{y}, t)), \quad (2.42)$$

onde $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, t)$ é a função de mudança de configuração da configuração de referência da malha para a configuração atual $\hat{\Omega} \rightarrow \Omega$, conforme apresentado no item 2.2, dada em sua forma discreta por:

$$\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \sum_{a \in \eta^s} (\hat{\mathbf{x}}_a + \Delta \hat{\mathbf{x}}_a(t)) \hat{N}_a(\hat{\mathbf{x}}), \quad (2.43)$$

sendo $\hat{\mathbf{x}}_a$ as posições nodais em $\hat{\Omega}$, $\Delta \hat{\mathbf{x}}(t)$ o deslocamento nodal e \hat{N}_a é a função de forma fixa da discretização de $\hat{\Omega}$. Nota-se, portanto, que as funções $N_a(\mathbf{y}, t)$ possuem dependência temporal devido à movimentação da malha.

Substituindo-se (2.41c) e (2.41d) em (2.38), e levando em conta a arbitrariedade de W^a e Q^a , a forma fraca espacialmente discreta fica:

$$\epsilon_M^a = \int_{\Omega} N_a^u \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + ((\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_a^u d\Omega - \quad (2.44a)$$

$$\int_{\Gamma_N} N_a^u \mathbf{h} d\Gamma_N = \mathbf{0},$$

$$\epsilon_C^a = \int_{\Omega} N_a^p \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad (2.44b)$$

Sendo os vetores $\mathbf{U} = [u_B]$, $\dot{\mathbf{U}} = [\dot{u}_B]$ e $\mathbf{P} = [p_B]$, que representam, respectivamente, os valores nodais de velocidade, sua primeira derivada temporal e os valores nodais de pressão, então o problema a ser resolvido consiste em: encontrar \mathbf{U} , $\dot{\mathbf{U}}$ e \mathbf{P} , tais que:

$$\epsilon_M(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \mathbf{P}) = 0 \text{ e} \quad (2.45a)$$

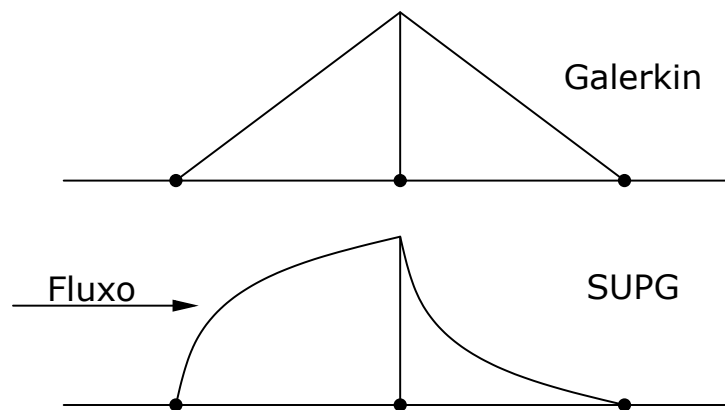
$$\epsilon_C(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \mathbf{P}) = 0. \quad (2.45b)$$

2.3.2 Estabilização de problemas com termos convectivos dominantes

A utilização do método de Bubnov-Galerkin para obtenção de soluções baseadas em elementos finitos para problemas de convecção-difusão pode levar a resultados com oscilações espúrias, principalmente em problemas de termos convectivos dominantes. Isso se deve à natureza do termo convectivo, o qual possui características hiperbólicas (Brooks; Hughes, 1982; John; Knobloch, 2006; Shilt; O'Hara; McNamara, 2021). Assim, soluções estáveis só são possíveis caso a malha seja refinada ao ponto em que os efeitos convectivos não sejam mais dominantes ao nível dos elementos. Entretanto, esta abordagem é inviável em muitos casos, já que o refinamento da malha deveria ocorrer apenas nas regiões de interesse.

Brooks e Hughes (1982) propuseram um método de estabilização denominado *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG), que consiste em adicionar à forma fraca da equação da quantidade de movimento, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado por uma função escolhida de modo a promover estabilização na direção das linhas de corrente. Esse processo é consistente, uma vez que adiciona-se o resíduo ponderado da equação da quantidade de movimento, e é equivalente a modificar as funções testes do processo de resíduos ponderados, que originalmente consideram igualmente as parcelas de derivadas tanto à montante quanto à jusante de um nó, de modo a dar maior peso às derivadas à montante, como ilustrado na Figura 7.

Figura 7 – Função teste de Galerkin e de SUPG.



Fonte: Brooks e Hughes (1982) - Adaptado.

Aplicando-se essa técnica na equação (2.38), resulta:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + ((\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma_N +$$

$$\int_{\Omega} q \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}, p) d\Omega^e = 0. \quad (2.46)$$

onde τ_{SUPG} é um parâmetro que tem como função garantir o bom condicionamento do sistema, e pode ser calculado como (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013):

$$\tau_{\text{SUPG}} = \left(\frac{1}{\tau_{\text{SUGN1}}^2} + \frac{1}{\tau_{\text{SUGN2}}^2} + \frac{1}{\tau_{\text{SUGN3}}^2} \right)^{-1/2} \mathbf{e} \quad (2.47)$$

onde:

$$\tau_{\text{SUGN1}} = \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} |(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_a| \right)^{-1}, \quad (2.48a)$$

$$\tau_{\text{SUGN2}} = \frac{\Delta t}{2}, \quad (2.48b)$$

$$\tau_{\text{SUGN3}} = \frac{h_{\text{RGN}}^2}{4\nu}, \quad (2.48c)$$

$$h_{\text{RGN}} = 2 \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} |\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_a| \right)^{-1} \mathbf{e} \quad (2.48d)$$

$$\mathbf{r} = \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|}{\|\nabla_{\mathbf{y}} \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|\|}. \quad (2.48e)$$

Essa técnica introduz, dentre outros termos, o termo:

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_a^u) \mathbf{r}_M(\mathbf{u}, p) d\Omega^e \quad (2.49)$$

na equação (2.44a), que estabiliza problemas com termos convectivos dominantes.

2.3.3 Estabilização do campo de pressão

No intuito de se flexibilizar a escolha dos espaços aproximadores para pressão e velocidades, Tezduyar (1991) propuseram um método de estabilização que semelhante ao SUPG, denominado *Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin* - PSPG, que consiste em adicionar à forma fraca da equação da continuidade, o resíduo da equação da quantidade de movimento, ponderado por uma função desenvolvida para introduzir estabilização ao campo de pressão, resultando em:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + ((\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma_N + \int_{\Omega} q \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{PSPG}} \frac{\nabla_{\mathbf{y}} q}{\rho} \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}, p) d\Omega^e = 0. \quad (2.50)$$

onde, segundo Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013), τ_{PSPG} pode adotado igual ao τ_{SUPG} já definido.

Dentre outros termos, a estabilização PSPG introduz na Equação 2.44b o termo:

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho} \nabla_{\mathbf{y}} N_a^p \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}, p) d\Omega^e, \quad (2.51)$$

que preenche o sub-bloco nulo do sistema de equações, e estabiliza o campo de pressão, permitindo o uso de mesmos espaços aproximadores para os campos de velocidade e de pressão.

2.3.4 Integração temporal

Para a completa discretização das equações governantes, ou seja, para que sejam discretas tanto no espaço quanto no tempo, torna-se necessária a devida discretização temporal das variáveis, que pode ocorrer de diferentes formas. Tal como apontado por Reddy e Gartling (2010), tem-se, por exemplo, integradores explícitos, como o integrador baseado em diferenças adiantadas, implícitos, como o baseado em diferenças finitas atrasadas, e os denominados semi-implícitos. Segundo o autor os integradores implícitos possuem vantagens sobre os explícitos, uma vez que se observa a implicidade natural da pressão em escoamentos incompressíveis e é possível obtenção de estabilidade incondicional do integrador temporal.

O integrador temporal utilizado no presente trabalho é o denominado integrador α -generalizado, desenvolvido por Chung e Hulbert (1993), no contexto da mecânica dos sólidos, e expandido por Jansen, Whiting e Hulbert (2000) para a mecânica dos fluidos. Tal integrador possui vantagens, como a capacidade de representar adequadamente problema de escoamentos incompressíveis, além de permitir a introdução de difusão numérica para as altas frequências de forma controlada (Fernandes, 2020).

Esse integrador parte da consideração de valores intermediários das variáveis do problema e de suas derivadas temporais em um intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ no n -ésimo passo de tempo, representados respectivamente por $\mathbf{U}^{n+\alpha_f}$ e $\dot{\mathbf{U}}^{n+\alpha_m}$:

$$\dot{\mathbf{U}}^{n+\alpha_m} = \dot{\mathbf{U}}^n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}^{n+1} - \dot{\mathbf{U}}^n) \quad (2.52a)$$

$$\mathbf{U}^{n+\alpha_f} = \mathbf{U}^n + \alpha_f (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n). \quad (2.52b)$$

Já para se relacionar a velocidade à aceleração, emprega-se a aproximação de Newmark (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013):

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t_n \left((1 - \gamma) \dot{\mathbf{U}}^n + \gamma \dot{\mathbf{U}}^{n+1} \right), \quad (2.53)$$

sendo α_m , α_f e γ valores escolhidos arbitrariamente, observando-se as necessidades de estabilidade e precisão do método.

De acordo com Chung e Hulbert (1993), Jansen, Whiting e Hulbert (2000), Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013), a precisão de segunda ordem dessa aproximação pode ser atingida uma vez que:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha_m - \alpha_f, \quad (2.54)$$

enquanto a estabilidade incondicional é obtida caso:

$$\alpha_m \geq \alpha_f \geq \frac{1}{2}. \quad (2.55)$$

Ainda é possível escrever, a partir da Equação (2.56), α_m e α_f em termos de um parâmetro arbitrário único ($0 \leq \varrho_\infty \leq 1$), que representa o raio espectral da matriz amplificação para $\Delta t \rightarrow \infty$, o qual é utilizado para controlar as dissipações de alta-frequência:

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \left(\frac{3 - \varrho_\infty}{1 + \varrho_\infty} \right) e \quad (2.56a)$$

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \varrho_\infty}. \quad (2.56b)$$

Para o caso de $\varrho_\infty = 1$ não ocorre a introdução de difusão numérica, enquanto para $\varrho_\infty = 0$ se tem a máxima dissipação de altas frequências (Fernandes, 2020).

Sendo assim, os resíduos obtidos anteriormente podem ser escritos em termos dos valores intermediários como:

$$\epsilon_M(\dot{\mathbf{U}}^{n+\alpha_m}, \mathbf{U}^{n+\alpha_f}, \mathbf{P}^{n+1}) = \mathbf{0} \quad (2.57a)$$

$$\epsilon_C(\dot{\mathbf{U}}^{n+\alpha_m}, \mathbf{U}^{n+\alpha_f}, \mathbf{P}^{n+1}) = \mathbf{0} \quad (2.57b)$$

2.3.5 Elementos finitos utilizados

Para a resolução dos problemas serão empregados elementos finitos de Taylor-Hood que aproximam quadraticamente o campo de velocidade e linearmente o campo de pressão,

denominados de elementos P2P1, permitindo simulações sem o emprego de estabilizações no campo de pressão.

Outras possibilidades de elementos finitos utilizados aproximam tanto o campo de velocidade quanto o campo de pressão de forma linear, denominados de elementos P1P1, ou de forma quadrática, denominados de elementos P2P2. Nesses casos é necessário o emprego de técnicas de estabilização para o campo de pressão.

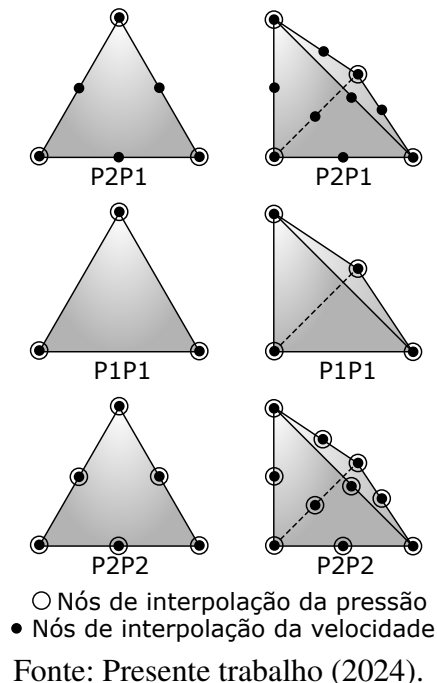
A Tabela 1 apresenta a quantidade de nós necessários para a interpolação dos campos de velocidade e de pressão para os elementos finitos P1P1, P2P1 e P2P2 em problemas bidimensionais e tridimensionais e a Figura 8 ilustra a disposição dos nós para esses elementos.

Tabela 1 – Quantidade de nós para interpolação dos campos de velocidade e pressão para elementos finitos P1P1, P2P1 e P2P2.

Elemento	Caso bidimensional		Caso tridimensional	
	Velocidade	Pressão	Velocidade	Pressão
P2P1	6	3	10	4
P1P1	3	3	4	4
P2P2	6	6	10	10

Fonte: Presente trabalho (2024).

Figura 8 – Disposição dos nós para elementos finitos P2P1, P1P1 e P2P2.



2.4 Movimentação da malha do fluido

Para a solução de problemas de IFE por meio da descrição ALE, se faz necessária a movimentação do domínio computacional do fluido de forma a acomodar a movimentação de estrutura. Tal tarefa deve ser realizada buscando-se preservar a qualidade da malha para os

passos de tempo posteriores, evitando distorções excessivas nos elementos, ao mesmo tempo que não deve ser um processo custoso computacionalmente (Kanchi; Masud, 2007). Assim, uma possibilidade para se realizar a movimentação da malha parte do emprego da equação Laplace, com algumas adequações para preservação da qualidade da malha, o qual foi proposto em casos bidimensionais por Masud, Bhanabhagvanwala e Khurram (2007) e tridimensionais por Kanchi e Masud (2007).

Nesse esquema, considere o domínio limitado aberto do fluido Ω_F , com uma fronteira suave por partes Γ . Logo, Γ pode ser decomposta em partes de fronteira fixa Γ_f e partes de fronteira móvel Γ_m , tais que:

$$\Gamma = \Gamma_m \cup \Gamma_f \text{ e} \quad (2.58a)$$

$$\emptyset = \Gamma_m \cap \Gamma_f. \quad (2.58b)$$

Dessa forma, define-se as condições de contorno do problema como:

$$\begin{cases} z = z_m & \text{em } \Gamma_m \text{ e} \\ z = \mathbf{0} & \text{em } \Gamma_f, \end{cases} \quad (2.59)$$

em que z é o campo de deslocamentos da malha e z_m é o deslocamento prescrito em Γ_f .

Em seu trabalho, Masud, Bhanabhagvanwala e Khurram (2007) apontam que a simples utilização de uma equação do tipo $\nabla_y^2 z = \mathbf{0}$ em Ω_F apresenta uma boa movimentação da malha em situação onde os elementos possuem tamanhos semelhantes entre si, assim como z_m não apresente uma ordem de grandeza muito superior ao tamanho dos elementos na interface Γ_m . No entanto, como destacado pelos autores, a malha do fluido demanda refinamento maior em áreas de interesse da análise, o que coincide, em muitos casos, com a região próxima à Γ_m . Assim, pode-se adotar uma modificação na formulação para que os elementos menores não sofram grandes distorções e inversões, ao passo que os elementos maiores absorverão tais distorções.

Assim, o esquema de movimentação proposto pelos autores é dado pelo problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} \nabla_x \cdot ([1 + \eta] \nabla_x) z = 0 & \text{em } \Omega_F, \\ z = z_m & \text{em } \Gamma_m \text{ e} \\ z = \mathbf{0} & \text{em } \Gamma_f, \end{cases} \quad (2.60)$$

em que:

$$\eta^e = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{V^e} \quad (2.61)$$

é um termo adicionado ao problema de maneira a aumentar a rigidez dos elementos menores, enquanto possibilita a movimentação dos elementos maiores, V_{\max} , V_{\min} e V^e são os volumes atuais do maior elemento, do menor elemento e do elemento e calculado.

Para a solução do problema (2.60), parte-se para o método dos resíduos ponderados, em que \mathbf{v} é a função teste:

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} [1 + \eta^e] \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{z} d\Omega^e = 0. \quad (2.62)$$

Integrando por partes e aplicando o teorema da divergência tem-se que:

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Gamma^e} [1 + \eta^e] \mathbf{v} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma^e - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} [1 + \eta] \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{z} d\Omega^e = 0. \quad (2.63)$$

Por se tratar de um problema de fronteira de Dirichlet, a primeira parcela é nula, o que reduz a:

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} [1 + \eta^e] \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{z} d\Omega^e = 0. \quad (2.64)$$

Fazendo a aproximação da função teste pelas funções de forma da discretização por elementos finitos, tem-se:

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \Upsilon_a \cdot \int_{\Omega^e} [1 + \eta^e] (\nabla_{\mathbf{x}} N_a \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{z} d\Omega^e, \quad (2.65)$$

sendo Υ_a e N_a o valor nodal da função teste e a função de forma sobre o nó a .

Devido à arbitrariedade de Υ_a , tem-se, portanto, a definição do vetor resíduo do problema de Laplace:

$$\epsilon_L^a = \int_{\Omega^e} [1 + \eta^e] (\nabla_{\mathbf{x}} N_a \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{z} d\Omega^e = 0. \quad (2.66)$$

Dessa forma, verifica-se que o problema (2.66) é linear. Logo sua solução pode ser obtida de maneira discreta a partir da abordagem do MEF, em que o sistema algébrico é dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{BZ} = \mathbf{0} & \text{em } \Omega_F, \\ \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_m, & \text{em } \Gamma_m \text{ e} \\ \mathbf{Z} = \mathbf{0} & \text{em } \Gamma_f, \end{cases} \quad (2.67)$$

no qual \mathbf{Z} é o vetor que contém os deslocamentos nodais da malha e \mathbf{B} é a matriz do problema, obtida pela combinação das matrizes \mathbf{B}^{ab} elementares:

$$\mathbf{B}^{ab} = \int_{\Omega^e} [1 + \eta^e] \nabla_{\mathbf{x}} N_a \cdot \nabla_{\mathbf{x}} N_b d\Omega^e \mathbf{I}. \quad (2.68)$$

Por fim, torna-se necessário apenas determinar os valores das derivadas temporais via integrador α -generalizado.

No entanto, a utilização desse esquema de movimentação de malha em problemas de IFE pode levar à oscilações espúrias no campo de aceleração da malha, refletindo, conseqüentemente, em oscilações no campo de velocidade da malha. Assim, a Eq. 2.60 pode ser modificada para a movimentação da malha via campo de acelerações, o que pode ser obtido a partir da seguinte equação:

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot ([1 + \eta] \nabla_{\mathbf{x}} \ddot{\mathbf{y}}) = \mathbf{0} & \text{em } \Omega_F, \\ \ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{y}}_m & \text{em } \Gamma_m \text{ e} \\ \ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{0} & \text{em } \Gamma_f. \end{cases} \quad (2.69)$$

Seguindo o procedimento análogo ao descrito anteriormente, obtém-se o seguinte sistema algébrico:

$$\begin{cases} \mathbf{B}\ddot{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}, & \text{em } \Omega_F, \\ \ddot{\mathbf{Y}} = \ddot{\mathbf{Y}}_m, & \text{em } \Gamma_m \text{ e} \\ \ddot{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}, & \text{em } \Gamma_f, \end{cases} \quad (2.70)$$

em que \mathbf{B} é calculada da mesma maneira que a matriz do problema (2.67). Dessa forma o campo de aceleração da malha é estabilizada, assim basta determinar as velocidades e acelerações nodais via integrador α -generalizado. Com isso o usuário possui a liberdade de escolher facilmente o esquema de movimentação da malha que melhor se adequa ao problema em questão.

2.5 Formulação variacional multiescala

O Método Variacional Multiescala, introduzido por Hughes (1995), Hughes *et al.* (1998), Hughes, Mazzei e Jansen (2000), é um modelo capaz de produzir solução estabilizada baseado na separação dos espaços tentativa e teste em subespaços que representam as escalas grosseiras, que se tratam de subespaços de dimensão finita, denotadas neste texto por uma barra sobrescrita, e subespaços que representam as escalas refinadas, que são subespaços de dimensão infinita e denotadas neste texto por um apóstrofe ('), ou seja:

$$\mathcal{S}_u = \overline{\mathcal{S}}_u \oplus \mathcal{S}'_u, \quad (2.71a)$$

$$\mathcal{S}_p = \overline{\mathcal{S}}_p \oplus \mathcal{S}'_p, \quad (2.71b)$$

$$\mathcal{V}_u = \overline{\mathcal{V}}_u \oplus \mathcal{V}'_u \text{ e} \quad (2.71c)$$

$$\mathcal{V}_p = \overline{\mathcal{V}}_p \oplus \mathcal{V}'_p. \quad (2.71d)$$

Assim, o sistema a ser resolvido parte do apresentado na Eq. (2.11), que em sua forma fraca se encontra em (2.38). Primeiramente realiza-se a separação dos membros em:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad (2.72a)$$

$$p = \bar{p} + p', \quad (2.72b)$$

$$\mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}' \text{ e} \quad (2.72c)$$

$$q = \bar{q} + q'. \quad (2.72d)$$

Segundo Bazilevs *et al.* (2007) adota-se $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}}$, $q = \bar{q}$ e assume-se que as parcelas em escala fina \mathbf{u}' e p' são modeladas como:

$$\mathbf{u}' = -\frac{\tau_{\text{SUPS}}}{\rho} \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) \text{ e} \quad (2.73a)$$

$$p' = -\rho \nu_{\text{LSIC}} r_C(\bar{\mathbf{u}}), \quad (2.73b)$$

onde τ_{SUPS} e ν_{LSIC} são termos estabilizadores, propostos por Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013) como:

$$\tau_{\text{SUPS}} = \left(\frac{4}{\Delta t^2} + (\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{G}(\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) + C_I \nu^2 \mathbf{G} : \mathbf{G} \right)^{-1/2} \text{ e} \quad (2.74a)$$

$$\nu_{\text{LSIC}} = (\text{tr } \mathbf{G} \tau_{\text{SUPS}})^{-1}, \quad (2.74b)$$

Já os termos $\mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})$ e $r_C(\bar{\mathbf{u}})$ são os resíduos da equação de conservação da quantidade de movimento e da equação da continuidade, respectivamente, ou seja,

$$\mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) = \rho \left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + ((\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \text{ e} \quad (2.75a)$$

$$r_C(\bar{\mathbf{u}}) = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}}. \quad (2.75b)$$

Outra forma de se determinar τ_{SUPS} e ν_{LSIC} , também apresentada em Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013), consiste em fazer:

$$\tau_{\text{SUPS}} = \left(\frac{1}{\tau_{\text{SUGN1}}^2} + \frac{1}{\tau_{\text{SUGN2}}^2} + \frac{1}{\tau_{\text{SUGN3}}^2} \right)^{-1/2} \text{ e} \quad (2.76a)$$

$$\nu_{\text{LSIC}} = \tau_{\text{SUPS}} \|\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}\|^2. \quad (2.76b)$$

Assim, obtém-se o problema do Método Variacional Multiescala Baseado em Resíduos (*Residual-Based Variational Multi-Scale - RBVMS*) que consiste em: determinar $\bar{\mathbf{u}} \in \bar{\mathcal{S}}_u$ e $\bar{p} \in \bar{\mathcal{S}}_p$, tais que para todo $\bar{\mathbf{w}} \in \bar{\mathcal{V}}_u$ e $\bar{q} \in \bar{\mathcal{V}}_p$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \bar{\mathbf{w}} \cdot \rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + ((\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{w}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{h}} d\Gamma_N + \\
& \int_{\Omega} \bar{q} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Omega - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \left(((\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \bar{\mathbf{w}} + \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \bar{q}}{\rho} \right) \cdot \mathbf{u}' d\Omega^e - \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{w}} p' d\Omega^e + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \bar{\mathbf{w}} \cdot ((\mathbf{u}' \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \bar{\mathbf{u}}) d\Omega^e - \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{w}} : (\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}') d\Omega^e = 0,
\end{aligned} \tag{2.77}$$

o que pode ser reescrito ainda, substituindo-se \mathbf{u}' e p' por (2.73):

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \bar{\mathbf{w}} \cdot \rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + ((\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{w}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{h}} d\Gamma_N + \\
& \int_{\Omega} \bar{q} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}} \left(((\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \bar{\mathbf{w}} + \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \bar{q}}{\rho} \right) \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega^e + \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{\text{LSIC}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{w}} r_C(\bar{\mathbf{u}}) d\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}} \bar{\mathbf{w}} \cdot ((\mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \bar{\mathbf{u}}) d\Omega^e - \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{w}}}{\rho} : ((\tau_{\text{SUPS}} \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})) \otimes (\tau_{\text{SUPS}} \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}))) d\Omega^e = 0.
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Fazendo a aproximação por função de forma e levando em conta a arbitrariedade das funções teste, obtém-se os seguintes vetores resíduo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}_M^a &= \int_{\Omega} N_a^u \rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + ((\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_a^u d\Omega - \\
& \int_{\Gamma_N} N_a^u \bar{\mathbf{h}} d\Gamma_N + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}} ((\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_a^u) \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega^e + \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{\text{LSIC}} \nabla_{\mathbf{y}} N_a^u r_C(\bar{\mathbf{u}}) d\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}} N_a^u ((\mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \bar{\mathbf{u}}) d\Omega^e - \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{\nabla_{\mathbf{y}} N_a^u}{\rho} \cdot ((\tau_{\text{SUPS}} \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})) \otimes (\tau_{\text{SUPS}} \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}))) d\Omega^e = 0,
\end{aligned} \tag{2.79a}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_C^a = \int_{\Omega} N_a^p \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}} \frac{\nabla_{\mathbf{y}} N_a^p}{\rho} \cdot \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega^e = 0 \tag{2.79b}$$

Logo o problema a ser resolvido consiste em: encontrar \mathbf{U} , $\dot{\mathbf{U}}$ e \mathbf{P} , tais que:

$$\boldsymbol{\epsilon}_M(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \mathbf{P}) = \mathbf{0} \text{ e} \quad (2.80a)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_C(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \mathbf{P}) = \mathbf{0}. \quad (2.80b)$$

Note que omitindo-se os dois últimos termos da equação (2.78) e adotando-se valores diferentes de τ para as equações de conservação da quantidade de movimento e da continuidade, chega-se à formulação estabilizada SUPG/PSPG (Tezduyar; Osawa, 2000; Tezduyar, 2003; Catabriga; Coutinho; Tezduyar, 2005; Catabriga; Coutinho; Tezduyar, 2006), dada por:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{\mathbf{w}} \cdot \rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + ((\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{w}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{h}} d\Gamma_N + \\ & \int_{\Omega} \bar{q} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPG}} ((\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega^e + \\ & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{PSPG}} \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \bar{q}}{\rho} \cdot \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega^e + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{\text{LSIC}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{w}} r_C(\bar{\mathbf{u}}) d\Omega^e = 0, \end{aligned} \quad (2.81)$$

onde, segundo Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013), adota-se $\tau_{\text{PSPG}} = \tau_{\text{SUPG}} = \tau_{\text{SUPS}}$ com sucesso para uma boa variedade de problemas.

2.5.1 Procedimento iterativo

O procedimento para minimizar os vetores resíduo obtido parte do método de Newton-Raphson, no qual os valores a serem corrigidos são os vetores de acelerações nodais ($\dot{\mathbf{U}}$) e de pressões nodais (\mathbf{P}). Dessa forma, o problema a ser resolvido para a correção dessas variáveis é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_M}{\partial \dot{\mathbf{U}}^{n+1}} & \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_M}{\partial \mathbf{P}^{n+1}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_C}{\partial \dot{\mathbf{U}}^{n+1}} & \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_C}{\partial \mathbf{P}^{n+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{U}}^{n+1} \\ \Delta \mathbf{P}^{n+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_M \\ \boldsymbol{\epsilon}_C \end{bmatrix}, \quad (2.82)$$

em que a matriz tangente elementar em descrição ALE é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \epsilon_M^a}{\partial (\dot{U}^b)^{n+1}} = & \alpha_m \int_{\Omega_\alpha} \rho \kappa^a N_b d\Omega_\alpha \mathbf{I} + \alpha_f \gamma \Delta t \int_{\Omega_\alpha} \rho \kappa^a \omega^b d\Omega_\alpha \mathbf{I} + \\
& \alpha_f \gamma \Delta t \int_{\Omega_\alpha} \mu \nabla_{\mathbf{y}} N_a \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_b d\Omega_\alpha \mathbf{I} + \alpha_f \gamma \Delta t \int_{\Omega_\alpha} \rho \kappa^a N_b \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}} d\Omega_\alpha + \\
& \alpha_f \gamma \Delta t \int_{\Omega_\alpha} (\mu (\nabla_{\mathbf{y}} N_b \otimes \nabla_{\mathbf{y}} N_a) + \rho \nu_{\text{LSIC}} (\nabla_{\mathbf{y}} N_a \otimes \nabla_{\mathbf{y}} N_b)) d\Omega_\alpha - \quad (2.83a) \\
& \alpha_m \int_{\Omega_\alpha} \rho \tau_{\text{SUPS}} N_a N_b \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}} d\Omega_\alpha - \\
& \alpha_f \gamma \Delta t \int_{\Omega_\alpha} \rho \tau_{\text{SUPS}} N_a (\omega^b \mathbf{I} + N_b \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}} d\Omega_\alpha,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \epsilon_M^a}{\partial (P^b)^{n+1}} = - \int_{\Omega_\alpha} N_b \nabla_{\mathbf{y}} N_a d\Omega_\alpha + \int_{\Omega_\alpha} \tau_{\text{SUPS}} (\omega^a \mathbf{I} - N_a \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_b d\Omega_\alpha, \quad (2.83b)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \epsilon_C^a}{\partial (\dot{U}^b)^{n+1}} = & \alpha_f \gamma \Delta t \int_{\Omega_\alpha} N_a \nabla_{\mathbf{y}} N_b d\Omega_\alpha + \alpha_m \int_{\Omega_\alpha} \tau_{\text{SUPS}} N_b \nabla_{\mathbf{y}} N_a d\Omega_\alpha + \\
& \alpha_f \gamma \Delta t \int_{\Omega_\alpha} \tau_{\text{SUPS}} (\omega^b \mathbf{I} + N_b \nabla_{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_a d\Omega_\alpha \mathbf{e} \quad (2.83c)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \epsilon_C^a}{\partial (P^b)^{n+1}} = \int_{\Omega_\alpha} \frac{\tau_{\text{SUPS}}}{\rho} \nabla_{\mathbf{y}} N_a \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_b d\Omega_\alpha, \quad (2.83d)$$

em que $\omega^a = (\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_a$, $\kappa^a = N_a + \tau_{\text{SUPS}} \omega^a \mathbf{e}$:

$$\Omega_\alpha = \{ \bar{\mathbf{x}} | \bar{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, t^{n+\alpha_f}) = \alpha_f \bar{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, t^{n+1}) + (1 - \alpha_f) \bar{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, t^n) \}. \quad (2.84)$$

Para uma descrição Euleriana, considera-se a velocidade da malha como nula na formulação apresentada.

Sendo assim, o algoritmo 1 mostra o procedimento para obtenção da solução aproximada.

2.6 Modelo de turbulência - Large Eddy Simulation

Como mencionado, um importante valor para a classificação dos escoamentos é o Número de Reynolds, o qual pode ser obtido por:

$$\text{Re} = \frac{\rho L \|\mathbf{u}_\infty\|}{\mu}, \quad (2.85)$$

em que L é o comprimento característico, definido individualmente para cada problema, e \mathbf{u}_∞ é a velocidade de referência. Nesse contexto, em escoamentos com elevados números de Reynolds observa-se a formação de vórtices em um amplo espectro de escalas, o que torna a simulação direta desses escoamentos computacionalmente inviável, uma vez que se exigem altas resoluções da malha do fluido para capturar todos os efeitos. Assim, a simulação de grandes vórtices (*Large*

Algoritmo 1: Algoritmo para a solução de escoamento incompressíveis via VMS.**Resultado:** Vetor de velocidades, acelerações e pressões nodais1 **para cada** passo de tempo **faça**

2 Previsão dos valores nodais:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}^{n+1} \\ U^{n+1} \\ P^{n+1} \end{bmatrix}^0 \leftarrow \begin{bmatrix} ((\gamma - 1)/\gamma)\dot{U}^n \\ U^n \\ P^n \end{bmatrix}$$

3 **para cada** iteração de Newton-Raphson **faça**4 **para cada** elemento **faça**

5 Interpolação das variáveis:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}^{n+\alpha_m} \\ U^{n+\alpha_f} \\ P^{n+1} \end{bmatrix}^{k+1} \leftarrow \begin{bmatrix} \alpha_m \dot{U}^{n+1} + (1 - \alpha_m)\dot{U}^n \\ \alpha_f U^{n+1} + (1 - \alpha_f)U^n \\ P^n \end{bmatrix}^{k-1}$$

6 Cálculo dos termos estabilizadores τ_{SUPS} e ν_{LSIC} (2.76);

7 Cálculo da matriz tangente (2.83) e dos vetores de resíduos (2.79);

8 **fim**

9 Montagem do sistema global e aplicação das condições de contorno;

10 Determinar as correções nodais pela solução do sistema (2.82);

11 Correção dos valores:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}^{n+1} \\ U^{n+1} \\ P^{n+1} \end{bmatrix}^{k+1} \leftarrow \begin{bmatrix} \dot{U}^{n+1} \\ U^{n+1} \\ P^{n+1} \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} \Delta \dot{U}^{n+1} \\ \gamma \Delta t \Delta \dot{U}^{n+1} \\ \Delta P^{n+1} \end{bmatrix}^k$$

12 Cálculo da medida de convergência: $\epsilon = \|\epsilon_M^k\|_{L^2}$ 13 **fim**14 **fim**

Eddy Simulation - LES) surge como uma alternativa para se obter resultados próximos aos da simulação direta, porém com um custo computacional reduzido.

O método segue o modelo de Smagorinsky, decompondo o campo de velocidade em duas parcelas, uma de grandes escalas e outra de pequenas escalas, sendo a parcela de pequenas escalas modelada por um termo viscoso, o qual é determinado a partir de um modelo de viscosidade de vórtice. A decomposição das variáveis do problema (ϕ) se dá por $\phi = \bar{\phi} + \phi'$, em que $\bar{\phi}$ é a parcela de grandes escalas e ϕ' é a parcela de pequenas escalas. Tal separação é dada a partir da consideração de um filtro, definido como a convolução integral de uma função \mathfrak{G} , com a variável ϕ (Germano *et al.*, 1991; Hughes; Mazzei; Jansen, 2000; Moeng; Sullivan, 2015; Katopodes, 2019):

$$\bar{\phi} = \int_{D_\Delta(\mathbf{y})} \mathfrak{G}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_\Delta, t) \phi(\mathbf{y}_\Delta, t) d\mathbf{y}_\Delta, \quad (2.86)$$

em que $D_\Delta(\mathbf{y})$ é um subdomínio de Ω que determina a abrangência do filtro, \mathbf{y}_Δ é um ponto na vizinhança de \mathbf{y} e \mathfrak{G} é o filtro. Hughes, Mazzei e Jansen (2000) apresentam ainda uma

possibilidade de abrangência de filtro dada por:

$$D_{\Delta}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{y}_{\Delta} \in \mathbb{R}^{n_{sd}} | \rho_{\Delta}(\mathbf{y}, \mathbf{y}_{\Delta}) < \Delta/2\}, \quad (2.87)$$

na qual $\Delta/2$ é o raio de abrangência do filtro centrado em \mathbf{y} e ρ_{Δ} é a distância Euclidiana de \mathbf{y}_{Δ} à \mathbf{y} ($\rho_{\Delta} = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\Delta}\|$).

Assim, um filtro \mathfrak{G} deve ser capaz de remover as altas frequências na representação de Fourier e deve ser escolhido de forma a obedecer algumas propriedades, *i.e.* a condição de homogeneidade: $\mathfrak{G}(\mathbf{y}, \mathbf{y}_{\Delta}, t) = \mathfrak{G}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\Delta}, t)$, a condição de isotropia: $\mathfrak{G}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\Delta}, t) = \mathfrak{G}(\rho_{\Delta}, t)$, a condição de normalização:

$$\int_{D_{\Delta}(\mathbf{y})} \mathfrak{G}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\Delta}, t) d\mathbf{y}_{\Delta} = 1 \quad (2.88)$$

e deve possuir um suporte compacto.

Dessa maneira, algumas propriedades são observadas, como a conversão da operação de convolução em multiplicação em um espaço de Fourier, a qual é dada por:

$$\overline{\phi}^{\mathcal{F}}(\mathbf{k}, t) = \mathfrak{G}^{\mathcal{F}}(\mathbf{k}, t) \phi^{\mathcal{F}}(\mathbf{k}, t) \text{ e} \quad (2.89a)$$

$$\phi'^{\mathcal{F}}(\mathbf{k}, t) = (1 - \mathfrak{G}^{\mathcal{F}}(\mathbf{k}, t)) \phi^{\mathcal{F}}(\mathbf{k}, t), \quad (2.89b)$$

em que a variável \mathbf{k} representa o número de onda e o sobrescrito \mathcal{F} representa a transformação de Fourier. Além disso, a filtragem é uma operação linear, ou seja, $\overline{\phi_1 + \phi_2} = \overline{\phi_1} + \overline{\phi_2}$ e $\overline{\alpha\phi} = \alpha\overline{\phi}$, em que α é uma constante. Já em domínios ilimitados, cujo filtro possui abrangência constante, tem-se a comutatividade da filtragem com a diferenciação, ou seja, $\overline{\nabla_{\mathbf{y}}\phi} = \nabla_{\mathbf{y}}\overline{\phi}$.

Katopodes (2019) apresenta algumas possibilidades de filtro, os quais são apresentados na Tabela 2, assim como sua respectiva transformada de Fourier. A Figura 9 apresenta graficamente o comportamento dos filtros apresentados na Tabela 2.

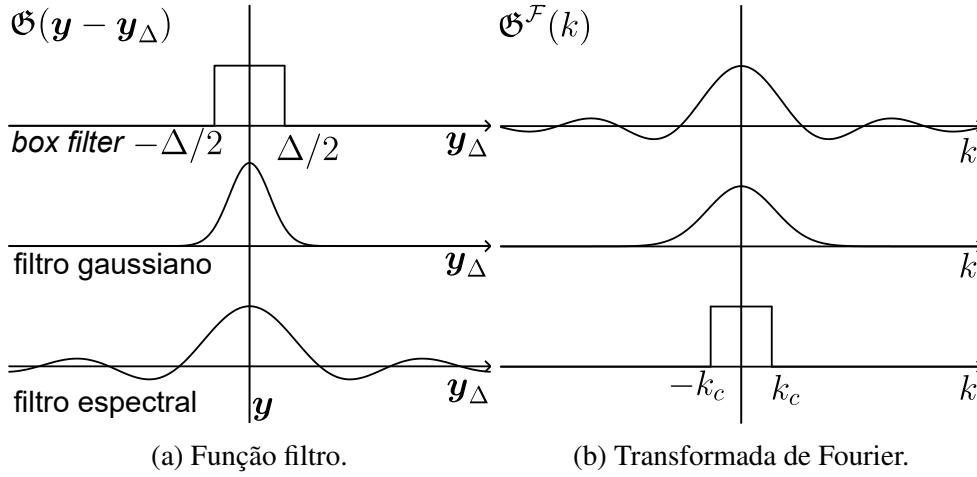
Tabela 2 – Filtros utilizados em *Large Eddy Simulation*.

Filtro	Função	Transformada de Fourier
<i>Box filter</i>	$\mathfrak{G}(\rho_{\Delta}) = \frac{1}{\Delta} \mathcal{H}\left(\frac{\Delta}{2} - \rho_{\Delta}\right)$	$\mathfrak{G}^{\mathcal{F}}(k) = \frac{\sin(k\Delta/2)}{k\Delta/2}$
Filtro gaussiano	$\mathfrak{G}(\rho_{\Delta}) = \sqrt{\frac{\gamma_g}{\pi\Delta^2}} \exp\left\{-\frac{\gamma_g\rho_{\Delta}^2}{\Delta^2}\right\}$	$\mathfrak{G}^{\mathcal{F}}(k) = \exp\left\{-\frac{k^2\Delta^2}{4\gamma_g}\right\}$
Filtro espectral	$\mathfrak{G}(\rho_{\Delta}) = \frac{\sin(k_c\rho_{\Delta})}{k_c\rho_{\Delta}}$	$\mathfrak{G}^{\mathcal{F}}(k) = \mathcal{H}(k_c - k)$

Fonte: Katopodes (2019) - Adaptado.

A função $\mathcal{H}(x)$ é a função de Heaviside, o valor γ_g observado no filtro gaussiano é uma constante, comumente atribuída com o valor de 6,0. Já o parâmetro k_c é o número de onda de corte, dado por $k_c = \pi/\Delta$. Dentre os filtros apresentados ainda é possível observar algumas propriedades, as quais são apresentadas na Tabela 3.

Figura 9 – Comportamento dos filtros apresentados na Tabela 2.



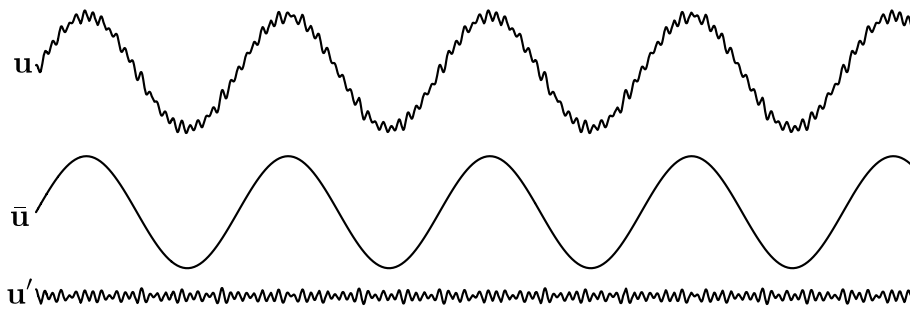
Fonte: Presente trabalho (2024).

Tabela 3 – Propriedades dos filtros utilizados em LES.

Filtro	Propriedade	Espaço físico	Espaço de Fourier
<i>Box filter</i>	Positividade	Sim	Não
	Suporte compacto	Sim	Não
Filtro gaussiano	Positividade	Sim	Sim
	Suporte compacto	Não	Não
Filtro espectral	Positividade	Não	Sim
	Suporte compacto	Não	Sim

Fonte: Presente trabalho (2024).

Dessa maneira, é possível separar os efeitos das grandes escalas e das pequenas escalas, o que é ilustrado na Figura 10 para uma distribuição de velocidade u .

Figura 10 – Efeito da filtragem sobre um campo de velocidade u .

Fonte: Hughes, Mazzei e Jansen (2000) - Adaptado.

Assim, em uma descrição Euleriana, considerando a densidade constante, pode-se obter a equação da conservação da quantidade de movimento filtrada:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\bar{u} \otimes \bar{u}) - \bar{\mathbf{f}} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \text{ em } \Omega. \quad (2.90)$$

Note que o termo convectivo impede a completa separação dos termos \bar{u} e u' devido à

sua natureza altamente não-linear. Por conta disso a parcela não filtrada não pode ser ignorada nesse problema, sendo necessário realizar algumas manipulações algébricas. Sabendo-se que $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$, pode-se reescrever a equação da conservação da quantidade de movimento como:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\overline{(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \otimes (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')}) - \bar{\mathbf{f}} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (2.91)$$

Nesse sentido, surgem termos cruzados entre $\bar{\mathbf{u}}$ e \mathbf{u}' , os quais são condensados em um tensor de subescala (*Subgrid-Scale* - SGS) \mathbf{T} dado por (Piomelli, 1999; Hughes; Mazzei; Jansen, 2000):

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} = -(\mathbf{L} + \mathbf{C} + \mathbf{R}), \quad (2.92)$$

no qual $\mathbf{L} = \overline{\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}} - \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}$ é o tensor de Leonard, que representa as interações entre as grandes escalas, podendo ser determinado explicitamente e utilizado para análise de erros, $\mathbf{C} = \overline{\bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{u}'} + \overline{\mathbf{u}' \otimes \bar{\mathbf{u}}}$ é o tensor de termos cruzados, representando a interação entre as grandes e pequenas escalas e $\mathbf{R} = \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$ é o tensor de tensões SGS de Reynolds, que representa a interação entre as pequenas escalas (Piomelli, 1999). Assim pode-se escrever:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{T} - \bar{\mathbf{f}} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} = 0. \quad (2.93)$$

Aplicando a incompressibilidade e substituindo-se $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ pelo modelo constitutivo (2.17), tem-se que:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \bar{\mathbf{u}} - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{T} - \bar{\mathbf{f}} \right) - \mu \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{u}}) + \nabla_{\mathbf{y}} p = 0, \quad (2.94)$$

ou, dividindo-se por ρ , usando a definição de derivada material na descrição Euleriana e fazendo algumas manipulações tem-se que:

$$\frac{D\bar{\mathbf{u}}}{Dt} + \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \bar{p}}{\rho} = \nu \nabla_{\mathbf{y}}^2 \bar{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{T} + \bar{\mathbf{f}}. \quad (2.95)$$

Assim, o problema fica governado por:

$$\begin{cases} \frac{D\bar{\mathbf{u}}}{Dt} + \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \bar{p}}{\rho} = \nu \nabla_{\mathbf{y}}^2 \bar{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{T} + \bar{\mathbf{f}} & \text{em } \Omega, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.96)$$

Ao substituir a derivada material pela sua definição em descrição ALE, se obtém as equações governantes filtradas segundo essa descrição:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + (\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}} + \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \bar{p}}{\rho} = \nu \nabla_{\mathbf{y}}^2 \bar{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{T} + \bar{\mathbf{f}} & \text{em } \Omega, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.97)$$

Com isso, há ainda a necessidade de se determinar um tensor \mathbf{T} , em especial o seu tensor desviador:

$$\text{dev } \mathbf{T} = \mathbf{T} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{T}) \mathbf{I}, \quad (2.98)$$

que descreva adequadamente as interações entre diferentes escalas. Isso pode se tornar problemático uma vez que não se possui solução para as pequenas escalas. Uma forma de se fazer isso é através do modelo de viscosidade de vórtice de Smagorinsky (Smagorinsky, 1963), resultando no tensor:

$$(\mathbf{T}_S) = 2\nu_T \bar{\mathbf{S}}, \quad (2.99)$$

sendo ν_T a viscosidade de vórtice SGS, dada por (Germano *et al.*, 1991; Piomelli, 1999; Hughes; Mazzei; Jansen, 2000; Bailly; Comte-Bellot, 2015; Katopodes, 2019):

$$\nu_T = (C_S \Delta)^2 \|\bar{\mathbf{S}}\|, \quad (2.100)$$

onde C_S é a constante de Smagorinsky e $\|\bar{\mathbf{S}}\|$ é a magnitude do tensor taxa de deformação em escala grosseira, dada por:

$$\|\bar{\mathbf{S}}\| = (2\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{S}})^{1/2}. \quad (2.101)$$

Note que o tensor \mathbf{T}_S é um tensor desviador, ou seja, $\mathbf{T}_S = \text{dev } \mathbf{T}_S$.

Para a determinação da constante de Smagorinsky, realiza-se inicialmente uma aproximação da amplitude espectral da energia cinética $E(k)$, dada sobre a superfície de uma esfera parametrizada de raio k , de acordo com (Hughes; Mazzei; Jansen, 2000):

$$E(k) \approx \alpha \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (2.102)$$

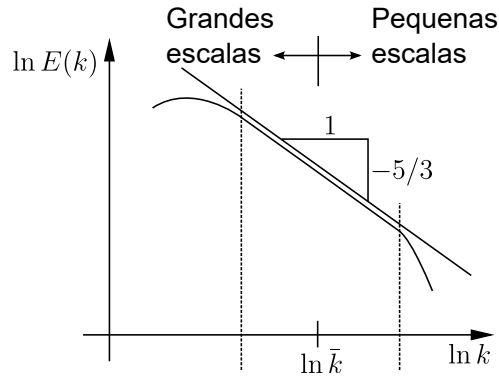
em que α é a constante de Kolmogoroff e ε é a dissipação turbulenta. A Figura 11 apresenta graficamente o comportamento da energia espectral em função de k .

O valor de $\|\bar{\mathbf{S}}\|$ é adotado como:

$$\frac{1}{2} \|\bar{\mathbf{S}}\| = \int_0^{k_c} k^2 E(k) dk, \quad (2.103)$$

sendo k_c o limite de resolução.

Figura 11 – Amplitude da energia espectral.



Fonte: (Hughes; Mazzei; Jansen, 2000) - Adaptado.

Substituindo (2.102) em (2.103), resolvendo a integral e fazendo algumas manipulações algébricas, tem-se que:

$$\|\bar{\mathbf{S}}\|^3 = \left(\frac{3\alpha}{2}\right)^{3/2} k_c^2 \varepsilon. \quad (2.104)$$

Com isso, considerando também que a dissipação de energia cinética é igual àquela produzida, realiza-se o balanço da energia, obtendo-se:

$$\varepsilon = \mathbf{T}_S : \bar{\mathbf{S}}. \quad (2.105)$$

Assim, fica possível obter expressões que relacionam os valores de C_S , Δ e ν_T com k_c :

$$C_S \Delta = \left(\frac{2}{3\alpha}\right)^{3/4} k_c^{-1} \varepsilon \quad (2.106)$$

$$\nu_T = \left(\frac{2}{3\alpha}\right) \varepsilon^{1/3} k_c^{-4/3}. \quad (2.107)$$

Segundo Bailly e Comte-Bellot (2015) o valor de k_c pode ser estimado como $k_c = \pi/\Delta$, o que leva à seguinte expressão para a constante de Smagorinsky:

$$C_S = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3\alpha}\right)^{3/4}. \quad (2.108)$$

Com isso, um possível valor para a constante Kolmogoroff é $\alpha = 1,4$, o que resulta em $C_S \approx 0,18$. No entanto, segundo Hughes, Mazzei e Jansen (2000), Bailly e Comte-Bellot (2015), Katopodes (2019), valores de C_S próximos à 0,10 conduzem a resultados mais realistas.

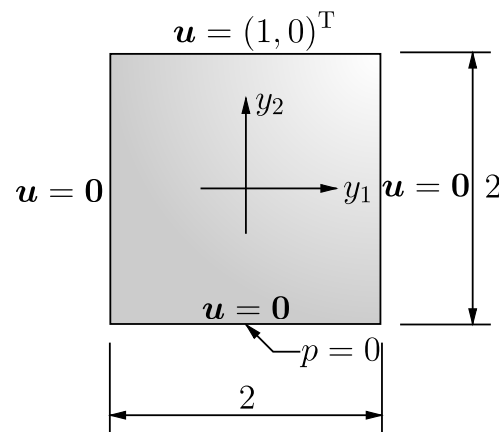
2.7 Estudo numéricos de escoamentos incompressíveis

Para verificação e estudo das características numéricas das formulações implementadas para a mecânica dos fluidos, são realizadas simulações de problemas cuja solução é bem estabelecida na literatura, adotando tanto com discretizações bidimensionais quanto tridimensionais. Inicia-se com o estudo de problemas com contornos fixos (velocidade da malha nula em todo o domínio), e posteriormente, simula-se também dois exemplos com contornos móveis.

2.7.1 Cavidade bidimensional

Este problema é comumente utilizado na literatura como *benchmark* para verificação de formulações numéricas para escoamentos incompressíveis, tratando-se de uma cavidade quadrada com paredes aderentes, onde o fluido encontra-se confinado e sujeito a uma velocidade horizontal prescrita u_∞ no topo devida ao deslizamento da parede, como apresentado na Figura 12. Devido ao fato do problema possuir apenas fronteiras de Dirichlet, o condicionamento da solução do campo de pressão é garantido pela aplicação de uma condição de pressão nula no centro da aresta inferior da cavidade. Também se observa que existe uma descontinuidade nas condições de contorno no encontro entre as paredes laterais da cavidade e o topo, podendo ser consideradas velocidades nulas ou igual à velocidade do topo. No problema em questão considerou-se que a velocidade nesse ponto é igual à u_∞ .

Figura 12 – Cavidade bidimensional - Desenho esquemático



Fonte: Presente trabalho (2024).

Considera-se o fluido com densidade unitária $\rho = 1,0$ e velocidade no topo também unitária para todas as análises, enquanto a viscosidade do fluido é modificada para obter-se diferentes números de Reynolds. São considerados os casos com número de Reynolds 100, 400, 1.000, 5.000, 7.500 e 10.000, tomando o lado da cavidade como comprimento característico. O problema parte do repouso em todas as simulações, sendo considerado o passo de tempo $\Delta t = 0,1$ com $\varrho_\infty = 0,0$ para o integrador temporal, sendo a simulação mantida até que a estacionariedade fosse alcançada.

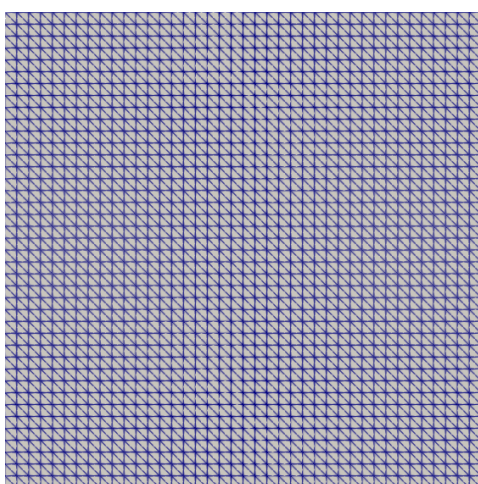
Inicialmente são empregadas 3 diferentes discretizações bidimensionais, utilizando elementos P1P1, P2P2 e P2P1, conforme as características apresentadas na tabela 4, onde n_u e n_p são os números de nós para interpolação dos campos de velocidade e de pressão, respectivamente. Essas malhas são ilustradas na figura 13.

Tabela 4 – Cavity bidimensional - Características das malhas utilizadas.

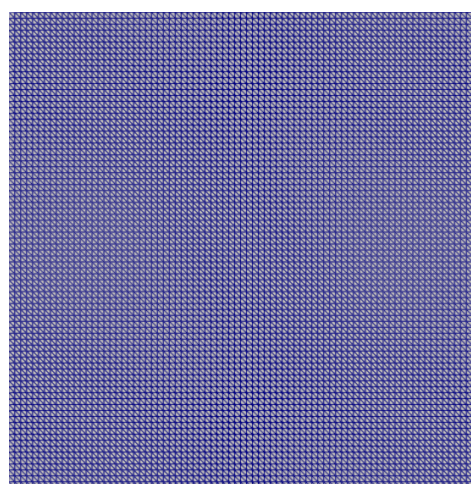
Malha	Elementos	n_u	n_p	Graus de liberdade
P1P1	12800	6561	6561	19683
P2P2	3200	6561	6561	19683
P2P1	3200	6561	1681	14803

Fonte: Presente trabalho (2024).

Figura 13 – Cavity bidimensional - Malhas utilizadas.



(a) Malha de elementos P2P2 e P2P1.



(b) Malha de elementos P1P1.

Fonte: Presente trabalho (2024).

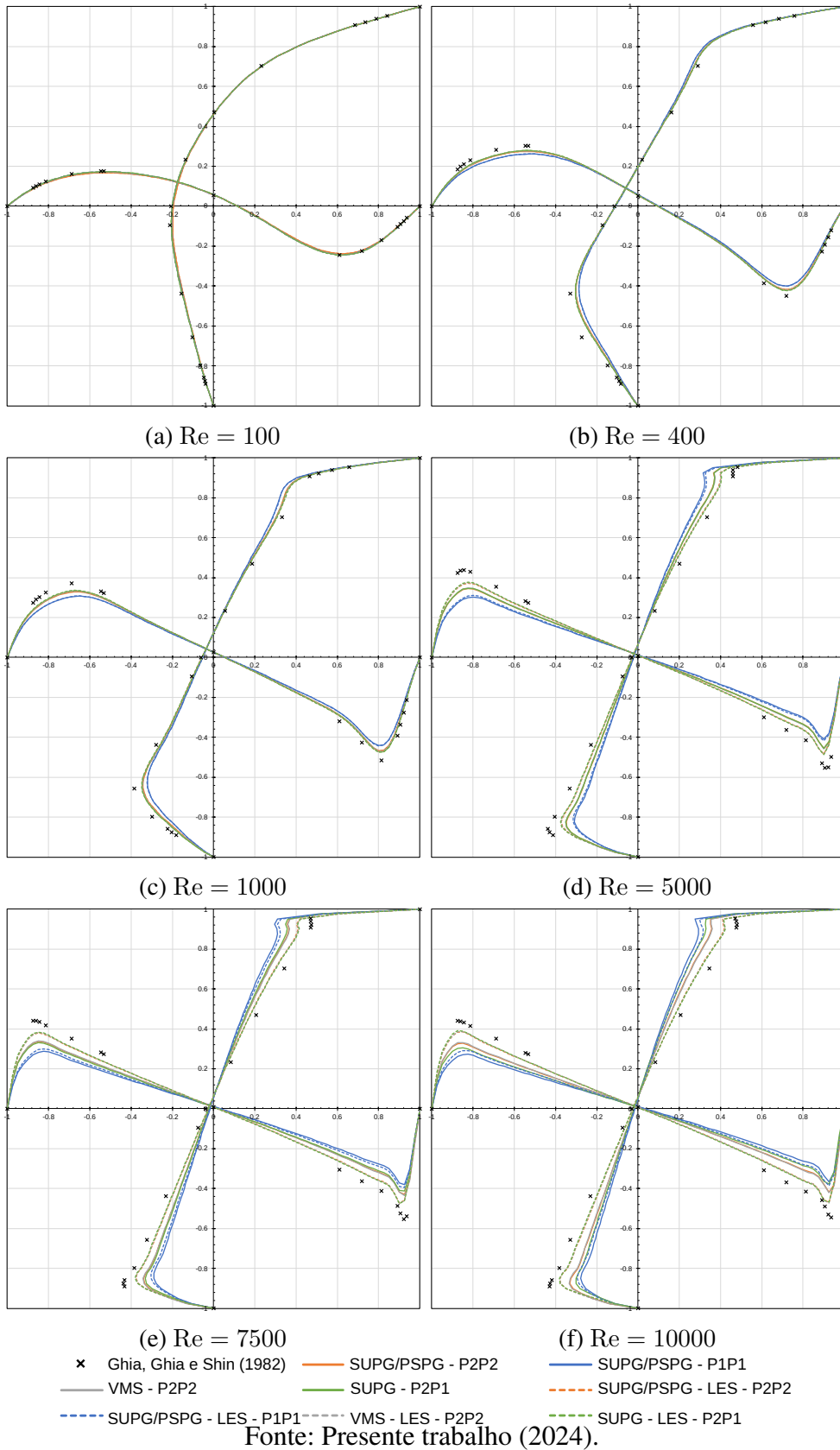
Assim, para cada número de Reynolds as simulações são realizadas considerando-se: 1) elementos finitos P1P1 com estabilização SUPG/PSPG; 2) elementos P2P2 com estabilização por SUPG/PSPG; 3) elementos P2P2 com formulação VMS; 4) elementos P2P1 estabilizados por SUPG, e 5) a combinação de cada um dos casos anteriores com o modelo de turbulência LES, adotando-se constante de Smagorinsky $C_S = 0,10$.

A Figura 14 apresenta os valores obtidos para velocidades sobre as linhas médias da cavity ($y_1 = 0$ e $y_2 = 0$) por cada uma das simulações, comparando-se os resultados obtidos com aqueles apresentados por Ghia, Ghia e Shin (1982).

Nota-se que a discretização com elementos P1P1, mesmo possuindo o mesmo número de graus de liberdade da discretização com elementos P2P2, apresenta resultados menos precisos. Isso se deve à representação mais pobre dos campos mecânicos pelos elementos P1P1.

Para todos os casos, à medida que o número de Reynolds aumenta, é possível notar que a aplicação do modelo LES melhorou a representação do campo de velocidade, o que deve-se à boa capacidade do modelo de capturar os efeitos turbulentos em escalas menores que os elementos

Figura 14 – Cavity bidimensional - distribuição de velocidade sobre as linhas médias.



da malha. Já o uso da formulação VMS, embora tenha sido muito eficiente para garantir a estabilização, não apresentou diferenças significativas em relação à formulação estabilizada

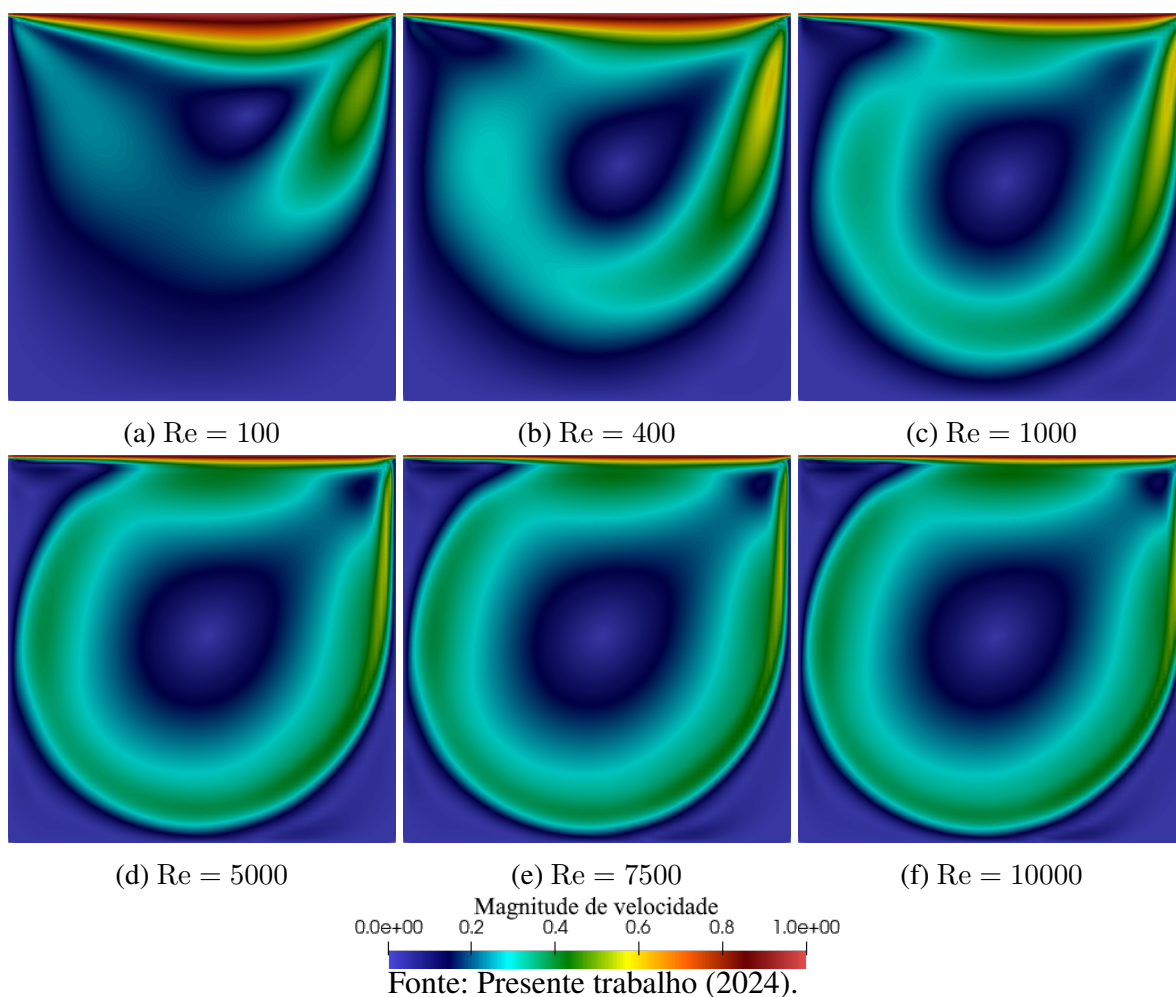
SUPG/PSPG.

O emprego dos elementos P2P1 sem modelo de turbulência mostrou-se muito boa para representar o campo de velocidade, com resultados ligeiramente inferiores aos dos elementos P2P2 em formulação SUPG/PSPG observáveis apenas para os $Re = 7.500$ e $Re = 10.000$.

Com relação ao tempo de processamento, para as simulações apenas com estabilização SUPG/PSPG, observa-se um tempo médio de 0,2285 segundos por iteração na solução do problema não linear para a simulação com elementos P1P1, enquanto para a simulação com elementos P2P2 o tempo médio foi de 0,2032 segundos por iteração, o que resulta em um tempo 12,466% maior para a simulação com elementos P1P1, ainda conduzindo a resultados menos precisos. Todavia, para a simulação com o modelo LES, o tempo médio de processamento foi de 0,2134 segundos por iteração em elementos P2P2, o que resulta em um tempo 5,028% maior que o caso anterior, o que mostra que o modelo LES pode apresentar um certo impacto no tempo de processamento.

A Figura 15 apresenta as distribuições do módulo da velocidade após o escoamento atingir seu estado estacionário, obtidas por meio da simulação com elementos P2P2 com VMS+LES.

Figura 15 – Cavity bidimensional - Campo de velocidade em regime estacionário.



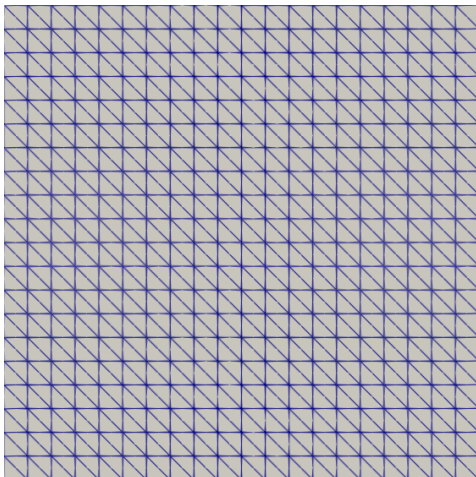
Como todas as simulações anteriores se mostram estáveis e consistentes para atingir a solução estacionária, são propostas as discretizações menos refinadas conforme a Tabela 5, ilustradas na Figura 16, para simulações do problema com $Re = 10.000$ empregando-se elementos P2P2 com estabilização SUPG/PSPG e elementos P2P1 estabilizados com SUPG, bem como a combinação desses casos com o LES. Descartaram-se as outras combinações por terem apresentado resultados inferiores ou sem diferenças significativas em relação aos casos considerados agora.

Tabela 5 – Cavity bidimensional - Características das malhas utilizadas para a análise de dependência.

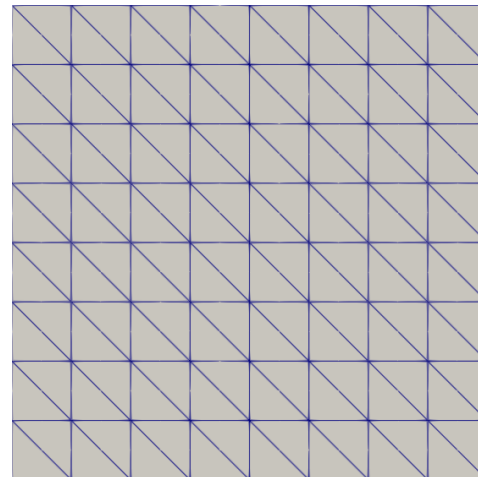
Malha	Elemento	Subdivisões	Elementos	n_u	n_p	DOF
m1	P2P2	20	800	1681	1681	5043
	P2P1	20	800	1681	441	3803
m2	P2P2	8	128	289	289	867

Fonte: Presente trabalho (2024).

Figura 16 – Cavity bidimensional - Malhas utilizadas para a análise de dependência.



(a) Malha m1.



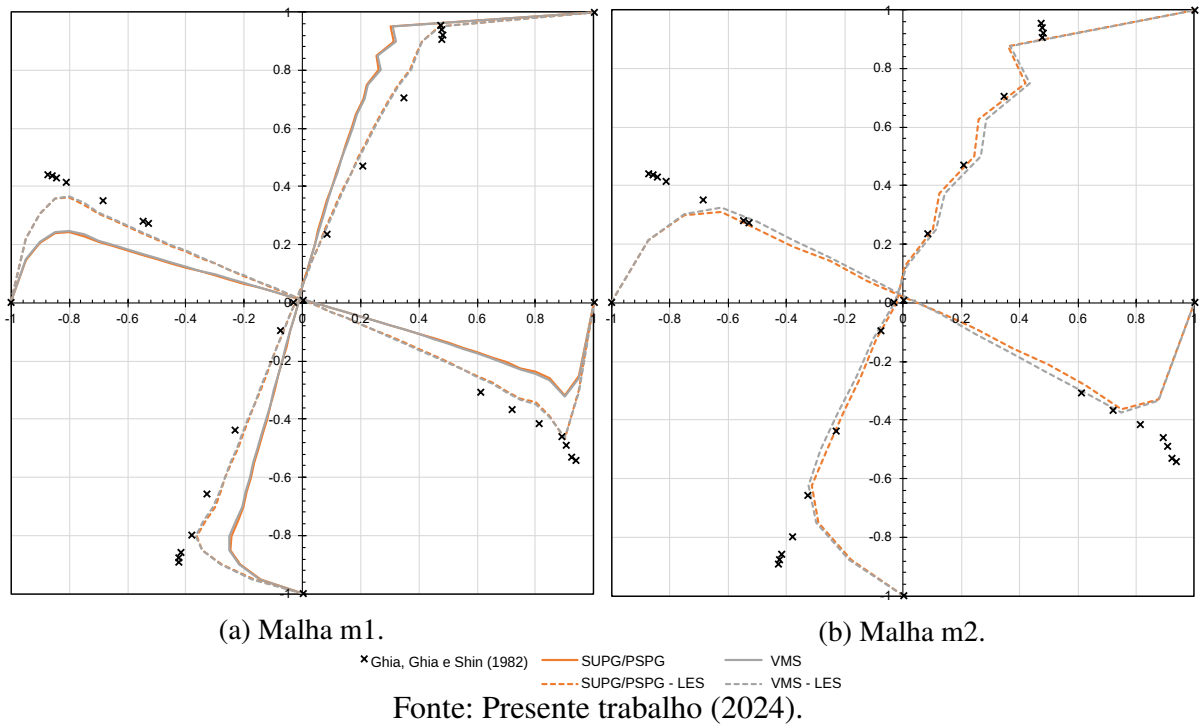
(b) Malha m2.

Fonte: Presente trabalho (2024).

Para essas simulações, o elemento P2P1 não apresentou convergência para a malha m1, mesmo com o emprego do modelo LES, o que pode ser explicado pela baixa ordem de aproximação do campo de pressão, que conduz à resultados mais imprecisos conforme a malha se torna mais pobre. Já para a malha m2 se observou a não convergência também para o caso de elementos P2P2 com estabilização SUPG/PSPG, enquanto a sua combinação com o LES se manteve estável durante toda a análise. Isso deve-se à introdução da viscosidade de vórtice do modelo LES, que induz uma dissipação numérica na região de maior gradiente de velocidade, melhorando a estabilidade da solução. A Figura 17 apresenta a distribuição de velocidade sobre as linhas médias da cavidade para as simulações que apresentaram convergência.

Com base nesses resultados, constata-se que a aplicação do modelo LES é capaz de melhorar a precisão e estabilidade mesmo para discretizações mais pobres. Também se observa

Figura 17 – Cavity bidimensional - Valores do campo de velocidade sobre as linhas médias para as malhas m1 e m2.



que a consideração dos demais termos estabilizadores da formulação VMS promoveu uma melhora pequena em relação à simulação estabilizada por SUPG/PSPG apenas nos casos de número de Reynolds mais elevados.

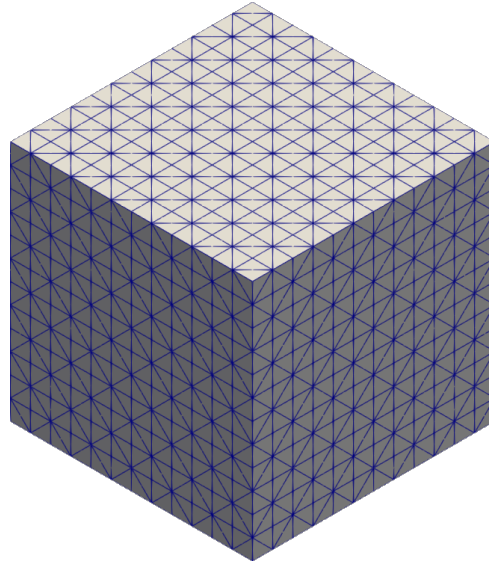
Por fim, estuda-se o mesmo problema considerando uma discretização tridimensional definida pelo domínio cúbico $\Omega = [-1,1]^3$, onde as condições impostas nas faces frontal e traseira são de paredes lisas. A malha utilizada nesse caso é estruturada apenas nas faces do cubo, como ilustrada na Figura 18, sendo composta por 8154 elementos P2P2, com 12557 nós e 50228 graus de liberdade.

O problema foi estudado para as estabilizações SUPG/PSPG, com e sem a aplicação de LES, para $Re = 100, 400$ e 1.000 . A Figura 19 apresenta a distribuição de velocidade sobre as linhas médias verticais e horizontais da cavity.

Pode-se perceber, então, que para números de Reynolds baixos o resultado não difere muito entre as diferentes simulações. No entanto, à medida que o número de Reynolds aumenta, a aplicação dos demais termos estabilizadores da formulação VMS melhorou a solução obtida em relação à simulação estabilizada por SUPG/PSPG. Já com relação à aplicação do LES, verifica-se que houve uma pequena melhora nos resultados, no entanto o Re ainda foi pequeno o suficiente para que sua aplicação não fosse tão significativa.

Em seguida realizou-se uma simulação com uma malha ainda mais pobre, com 2695 elementos P2P2 contendo 4360 nós e 17440 graus de liberdade para $Re = 10.000$, utilizando estabilização SUPG/PSPG, com e sem aplicação de LES, e VMS. A Figura 20 apresenta o campo

Figura 18 – Cavidade tridimensional - Malha utilizada.



Fonte: Presente trabalho (2024).

de velocidade obtido na face de simetria do problema para as diferentes simulações no instante $t = 450$.

Analisando qualitativamente os resultados, observa-se que a aplicação do LES, mesmo para uma malha tão pobre, foi capaz de melhorar a representação do campo de velocidade, enquanto a simulação sem aplicação do modelo de turbulência apresentou um resultado distante do esperado.

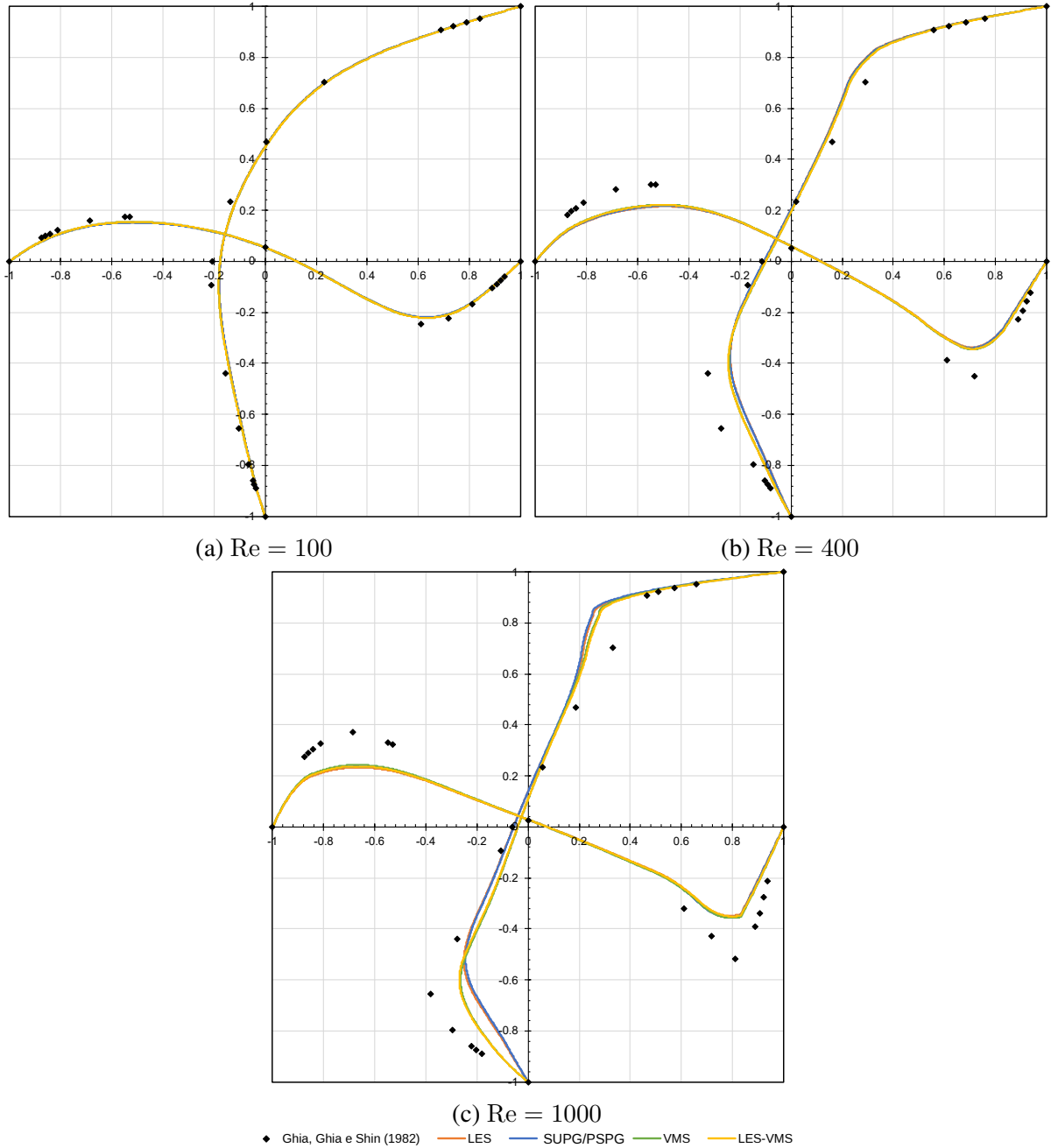
2.7.2 Escoamento em degrau invertido

O problema de escoamento em degrau invertido é um problema clássico de escoamento em dutos, sendo bastante utilizado como *benchmark* (Armaly *et al.*, 1983; Chiang; Sheu, 1999). O problema consiste em um escoamento advindo de um duto, cuja seção sofre um alargamento abrupto, conforme ilustrado na Figura 21. Tal problema tem sua origem nos estudos experimentais de Armaly *et al.* (1983) e posteriormente estudado numericamente em problemas tridimensionais por Chiang e Sheu (1999).

Em seu estudo numérico, Chiang e Sheu (1999) considerou um duto de largura constante B , uma altura de seção transversal a montante de h e comprimento L_u , e altura a jusante de $H = h + S$ com comprimento L_d . Nas laterais do duto considerou-se o efeito da viscosidade na parede, por meio da imposição de condição de paredes aderentes, ou seja, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, assim como nas faces do fundo e do topo do duto. Na face de entrada do duto considerou-se uma velocidade prescrita $\mathbf{u}_\infty = (u_1(y_2, y_3), 0, 0)^T$, tal que:

$$u_1(y_2, y_3) = \frac{48}{\alpha\pi^3} \beta(y_1, y_2), \quad (2.109a)$$

Figura 19 – Cavidade tridimensional - Valores do campo de velocidade sobre as linhas médias.



Fonte: Presente trabalho (2024).

$$\alpha = 1 - \frac{192B}{\pi^5} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh(\xi_i)}{i^5}, \quad (2.109b)$$

$$\beta(y_1, y_2) = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(i-1)/2} \left(1 - \frac{\cosh[(2y_2 - 1)\xi_i]}{\cosh(\xi_i)} \right) \frac{\cos(2y_3\xi_i)}{i^3} e \quad (2.109c)$$

$$\xi_i = \frac{\pi i}{2B}. \quad (2.109d)$$

Devido à simetria do problema, considerou-se somente metade da largura do duto, impondo-se uma condição de simetria ($u_3 = 0$) no plano $y_3 = 0$, o qual é utilizado para observar

Figura 20 – Cavidade tridimensional - Campo de velocidade na face de simetria.

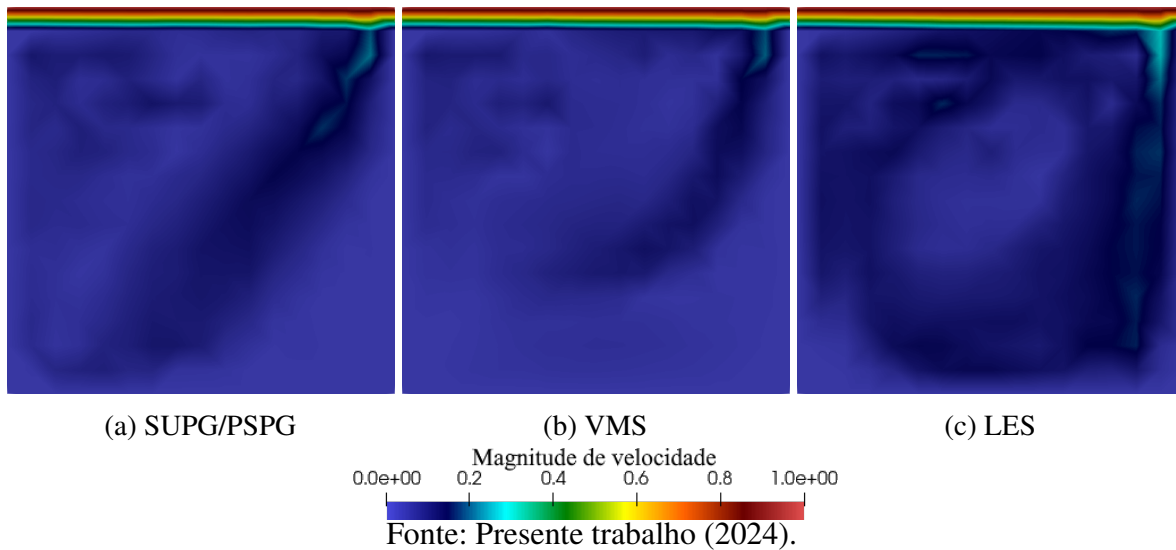
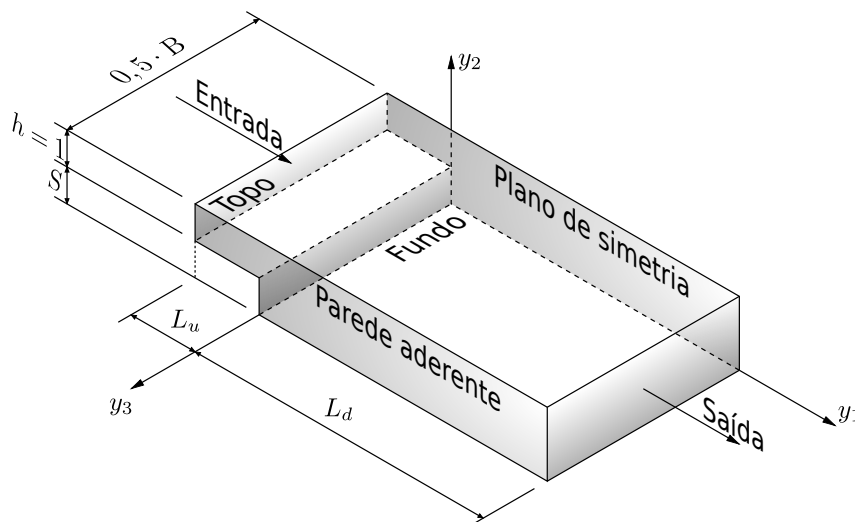


Figura 21 – Escoamento em degrau invertido - Desenho esquemático.



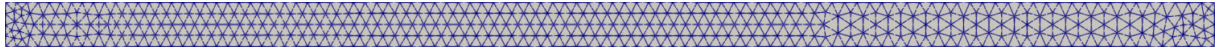
Fonte: Presente trabalho (2024).

os resultados do problema.

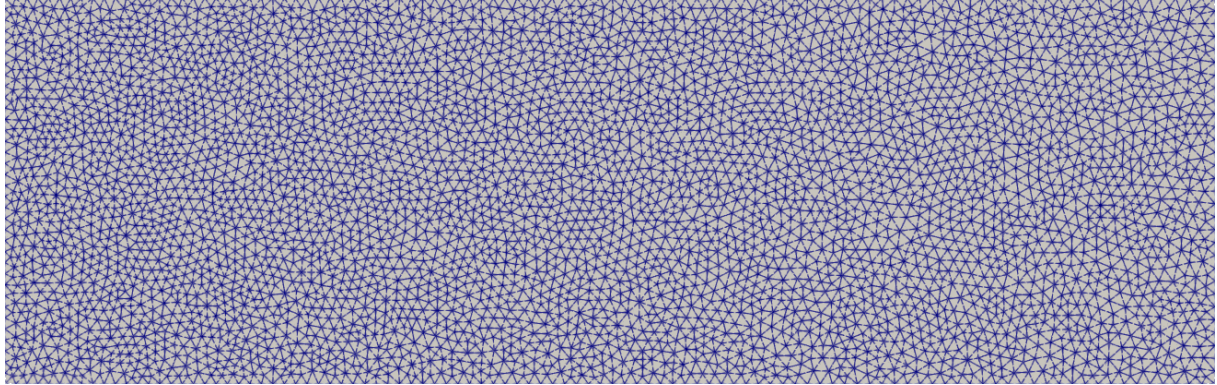
Para a simulação numérica, considerou-se valores adimensionais, conforme valores utilizados por Chiang e Sheu (1999), sendo a largura do duto $B = 35h$, altura $h = 1,0$, altura do degrau $S = 0,9423$ e comprimento $L_u = 0,0$ e $L_d = 55,0$. A malha utilizada na discretização do domínio foi construída a partir de elementos P2P2 e P2P1 de tamanho 0,5 na região de entrada do duto e 0,6 na região de saída. Assim obtém-se uma malha com 57173 elementos finitos, tendo 95334 nós para elementos P2P2 e 95334 nós para o campo de velocidade e 14227 nós para pressões em elementos P2P1, resultando em 381336 e 300229 graus de liberdade, respectivamente (conforme ilustrado na Figura 22).

O número de Reynolds do problema analisado é obtido a partir da equação (2.110):

Figura 22 – Escoamento em degrau invertido - Malha utilizada.



(a) Vista lateral.



(b) Vista superior.

Fonte: Presente trabalho (2024).

$$\text{Re} = \frac{\rho u_{\text{medio}}(2h)}{\mu}, \quad (2.110)$$

sendo $u_{\text{medio}} = 1,0$ a velocidade média na região de entrada do duto. Assim, sendo $\rho = 1,0$, considera-se os valores de viscosidade dinâmica $\mu = 0,02$, $5,1414 \times 10^{-3}$ e $2,0 \times 10^{-3}$, de modo a obter números de Reynolds de 100, 389 e 1000, respectivamente. O passo de tempo foi de $\Delta t = 0,1$ e a simulação foi mantida até que a estacionariedade do fluxo fosse alcançada, sendo o esquema de integração temporal obtido a partir de $\varrho_{\infty} = 0,0$. A simulação com elementos P2P2 foi estabilizada a partir da formulação SUPG/PSPG, enquanto a simulação P2P1 não foi estabilizada para $\text{Re} = 100$ e 389. Entretanto, para $\text{Re} = 1.000$ a simulação utilizando P2P1 tornou-se instável, sendo necessária a aplicação da estabilização SUPG.

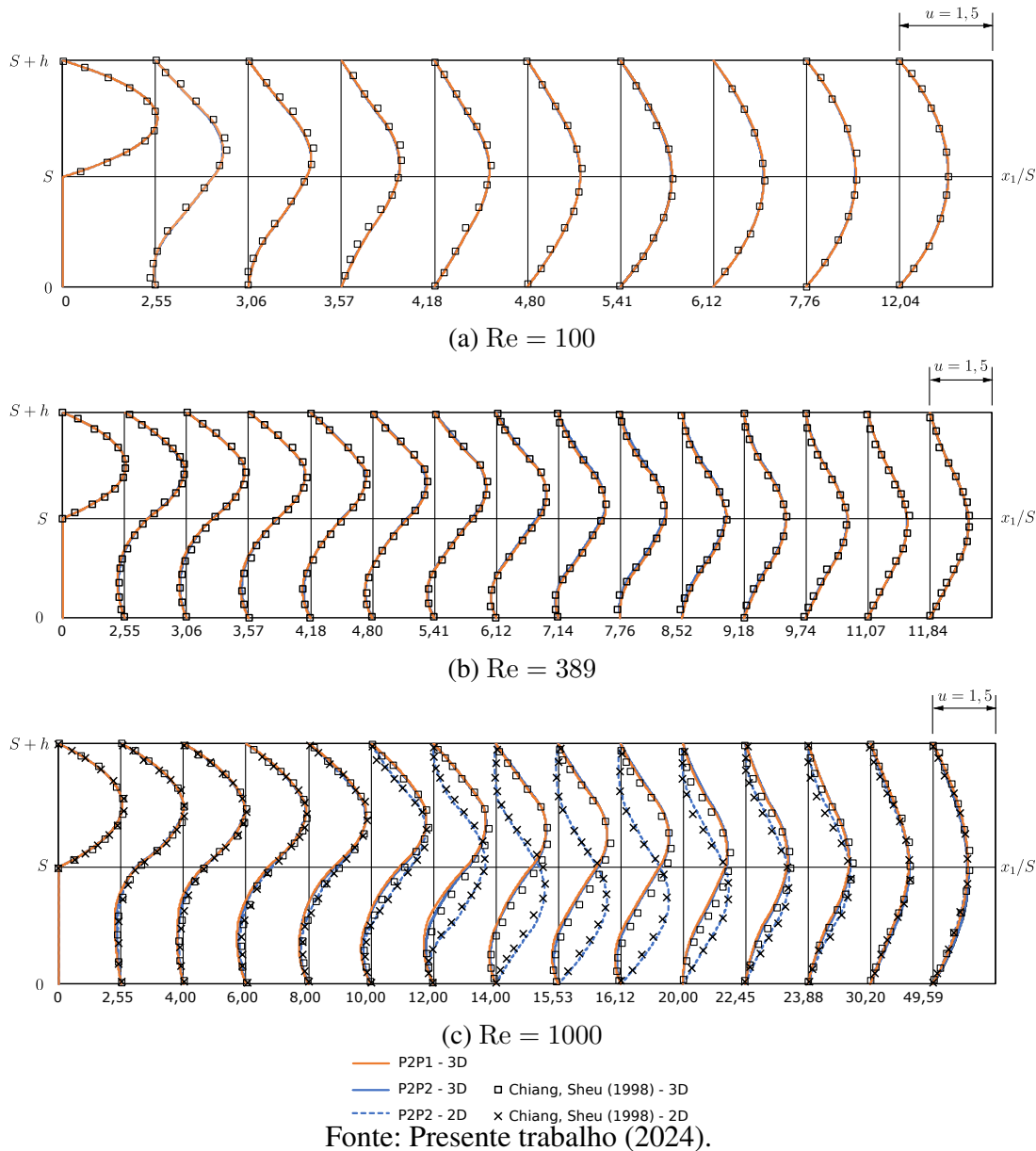
Além disso, uma simulação bidimensional foi conduzida para o $\text{Re} = 1.000$, uma vez que Chiang e Sheu (1999) observaram uma discrepância entre os valores de simulações bidimensionais e tridimensionais para esse número de Reynolds. Como mencionado pelos autores, essa diferença se dá pela influência da viscosidade na parede do duto, o que não é capturada pela simulação bidimensional.

A malha utilizada para a simulação bidimensional foi construída a partir de elementos P2P2 de tamanho 0,5 na região de entrada do duto e 0,6 na região de saída. Assim obtém-se uma malha com 836 elementos finitos e 1883 nós, resultando em 5649 graus de liberdade.

A Figura 23 apresenta os perfis de velocidade para diferentes distâncias ao longo da linha de fluxo para as três simulações conduzidas. Já a Figura 24 apresenta as distribuições de pressão ao longo do fundo e do topo do duto para as três simulações.

Outra simulação realizada trata-se do problema bidimensional com $S = 1$ e $\text{Re} = 800$, onde os autores observaram os perfis de velocidade para as distâncias $x_1 = 14$ e $x_1 = 30$, além

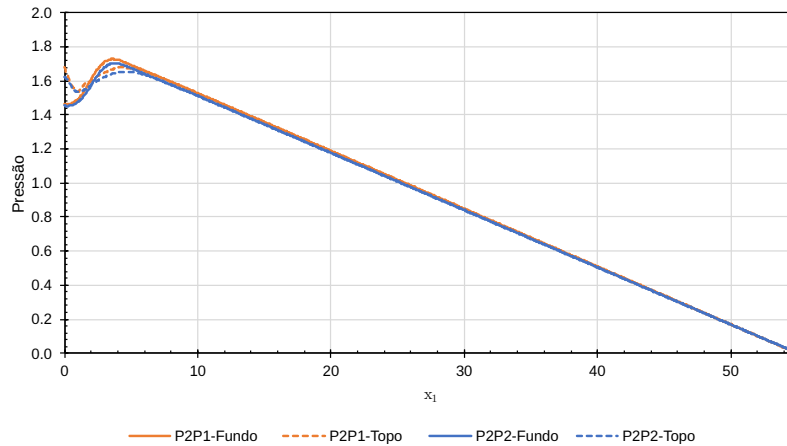
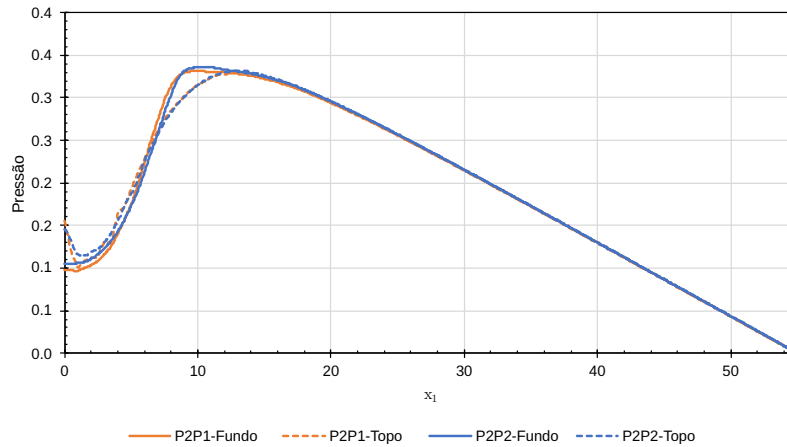
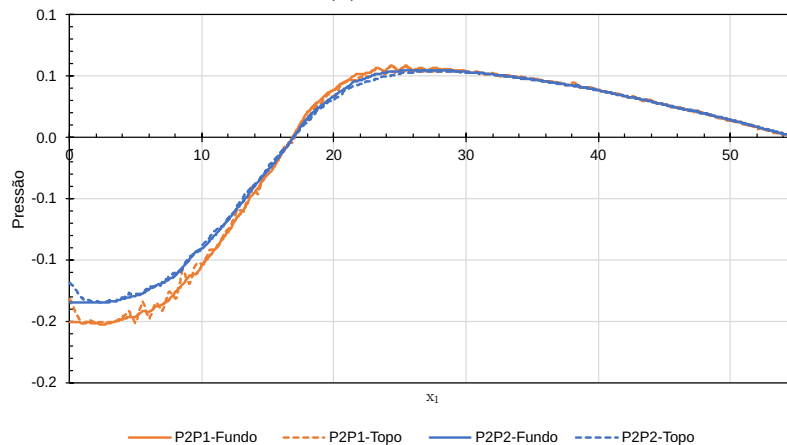
Figura 23 – Escoamento em degrau invertido - Perfis de velocidade.



da distribuição de pressões ao longo do fundo e do topo do canal. Como a pressão de estagnação do problema simulado é nula na face de saída do duto, foi apenas adicionada uma pressão constante nos resultados de referência para fins de comparação, de forma que as pressões sejam equivalentes nesse ponto especificado. As Figuras 25 e 26 apresentam os resultados obtidos para a simulação bidimensional.

Assim, percebe-se que, em relação ao campo de velocidade, todas as simulações possuíram resultados satisfatórios em todos os números de Reynolds analisados, tanto em simulações bidimensionais quanto tridimensionais. No entanto, para o campo de pressão, observa-se que os elementos P2P1 apresentaram oscilações espúrias, principalmente próximo à face de entrada, o que não é observado na simulação estabilizada por PSPG.

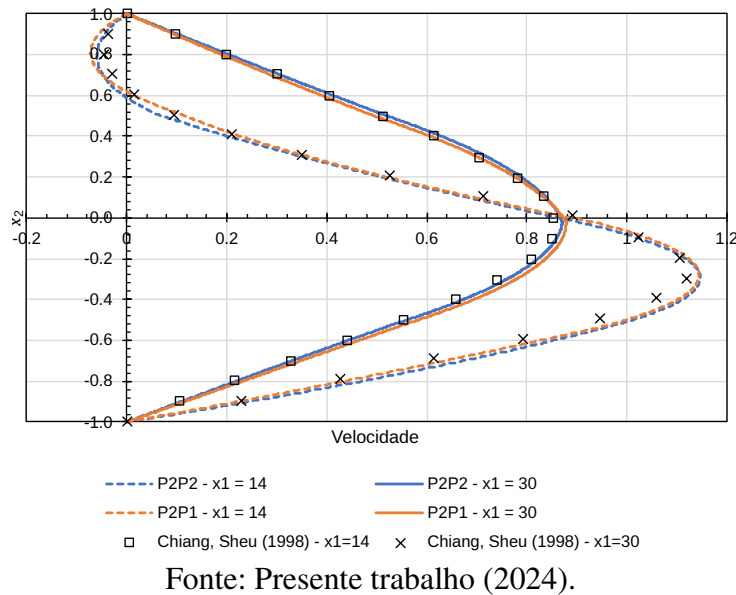
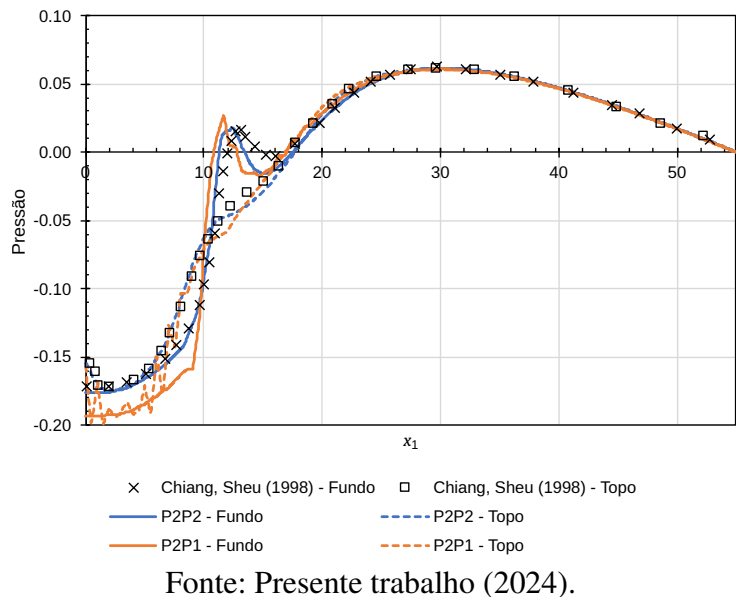
Figura 24 – Escoamento em degrau invertido - Distribuição de pressões.

(a) $Re = 100$ (b) $Re = 389$ (c) $Re = 1000$

Fonte: Presente trabalho (2024).

2.7.3 Escoamento sobre cilindro

Para o seguinte problema considerou-se um cilindro circular de raio $R = 0,5$ em um domínio retangular $\Omega = [0, 112R] \times [0, 100R]$, sendo o centro do cilindro posicionado sobre o ponto $(36, 50)R$, sendo todas as medidas adimensionais. As condições de contorno consideradas foram de entrada na face esquerda ($x_1 = 0$) do domínio ($\mathbf{u} = \{u_\infty, 0\}^T$) e condição de velocidade

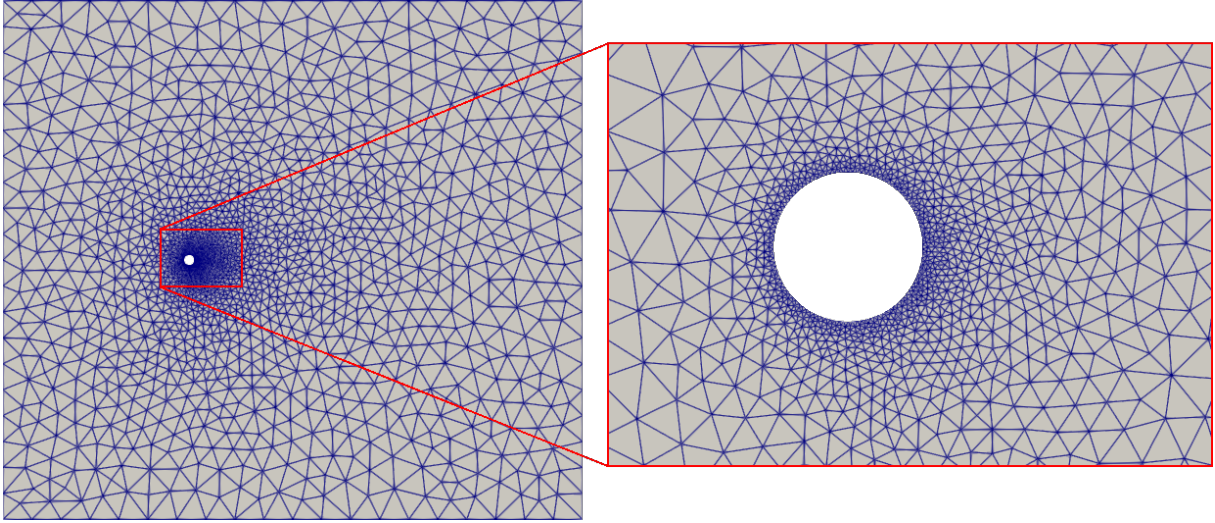
Figura 25 – Escoamento em degrau invertido - Perfis de velocidade para $Re = 800$.Figura 26 – Escoamento em degrau invertido - Distribuição de pressões para $Re = 800$.

vertical nula nas faces inferior e superior ($u_2 = 0$ em $x_2 = 0$ e $x_2 = 100R$). Como condição inicial aplicou-se uma velocidade $\mathbf{u} = \{u_\infty, 0\}^T$ em todo o domínio. A densidade do fluido foi de $\rho = 1,0$ e a velocidade $u_\infty = 1,0$. A viscosidade dinâmica do fluido foi de $\mu = 0,01$, $\mu = 6,6667 \times 10^{-3}$ e $\mu = 5 \times 10^{-3}$, de forma a se obter $Re = 100$, $Re = 150$ e $Re = 200$, respectivamente.

Para a simulação numérica considerou-se a malha apresentada na Figura 27, a qual possui 4656 elementos finitos. Assim, estudou-se o escoamento nas simulações apresentadas na Tabela 6. O intervalo de tempo foi de $t \in [0, 200]$ com passos de $\Delta t = 0,1$.

Para análise dos resultados determinou-se os coeficientes de arrasto (*Drag* - C_D) e de sustentação (*Lift* - C_L), dados respectivamente por:

Figura 27 – Escoamento sobre cilindro - Malha utilizada.



Fonte: Presente trabalho (2024).

Tabela 6 – Simulações conduzidas para o problema de escoamento sobre um cilindro.

Nome	Modelo	Elemento	Estabilização	Número de DOF
Sim1	-	P2P1	-	21417
Sim2	-	P2P2	SUPG/PSPG	28494
Sim3	-	P2P2	VMS	28494
Sim4	LES	P2P1	-	21417
Sim5	LES	P2P2	VMS	28494

Fonte: Presente trabalho (2024).

$$C_D = \frac{2F_D}{\rho \|\mathbf{u}_\infty\|^2 L} \mathbf{e} \quad (2.111a)$$

$$C_L = \frac{2F_L}{\rho \|\mathbf{u}_\infty\|^2 L}, \quad (2.111b)$$

em que F_D e F_L são as forças de arrasto e de sustentação, calculados como:

$$F_D = \int_{\Gamma_S} \sigma_{1j} n_j d\Gamma_S \mathbf{e} \quad (2.112a)$$

$$F_L = \int_{\Gamma_S} \sigma_{2j} n_j d\Gamma_S, \quad (2.112b)$$

sendo Γ_S a fronteira do cilindro e \mathbf{n} o vetor normal à Γ_S .

Outro parâmetro possível de se verificar é o número de Strouhal (St), que se trata de um número adimensional que busca relacionar a frequência de oscilação devido à formação de vórtices e a velocidade do fluido. Esse parâmetro pode ser determinado por:

$$St = \frac{f_v L}{\|\mathbf{u}_\infty\|}, \quad (2.113)$$

sendo f_v a frequência de desprendimento de vórtices, determinado a partir da transformação rápida de Fourier (FFT).

As Figuras 28 e 29 apresentam os coeficientes de arrasto e de sustentação obtidos em todas as simulações, respectivamente.

Os valores dos coeficientes de arrasto e de sustentação após o escoamento atingir o equilíbrio dinâmico, assim como o número de Strouhal e valores de referência, são apresentados nas Tabelas 7 a 9.

Tabela 7 – Escoamento sobre cilindro - Valores dos coeficientes e número de Strouhal para $Re = 100$.

Simulação	C_D	C_L	St
Sim1	$1,3458 \pm 0,0095$	$\pm 0,3283$	0,1642
Sim2	$1,3488 \pm 0,0094$	$\pm 0,3255$	0,1647
Sim3	$1,3480 \pm 0,0095$	$\pm 0,3279$	0,1650
Sim4	$1,3445 \pm 0,0093$	$\pm 0,3264$	0,1639
Sim5	$1,3466 \pm 0,0094$	$\pm 0,3259$	0,1646
Fernandes (2020)	$1,3700 \pm 0,0098$	$\pm 0,3422$	0,165
Najafi, Arefmanesh e Enjilela (2012)	1,47	$\pm 0,38$	
Ji, Munjiza e Williams (2012)	$1,4643 \pm 0,0107$	$\pm 0,3351$	0,1675
Liu, Zheng e Sung (1998)	$1,350 \pm 0,012$	$\pm 0,339$	0,165

Fonte: Presente trabalho (2024).

Tabela 8 – Escoamento sobre cilindro - Valores dos coeficientes e número de Strouhal para $Re = 150$.

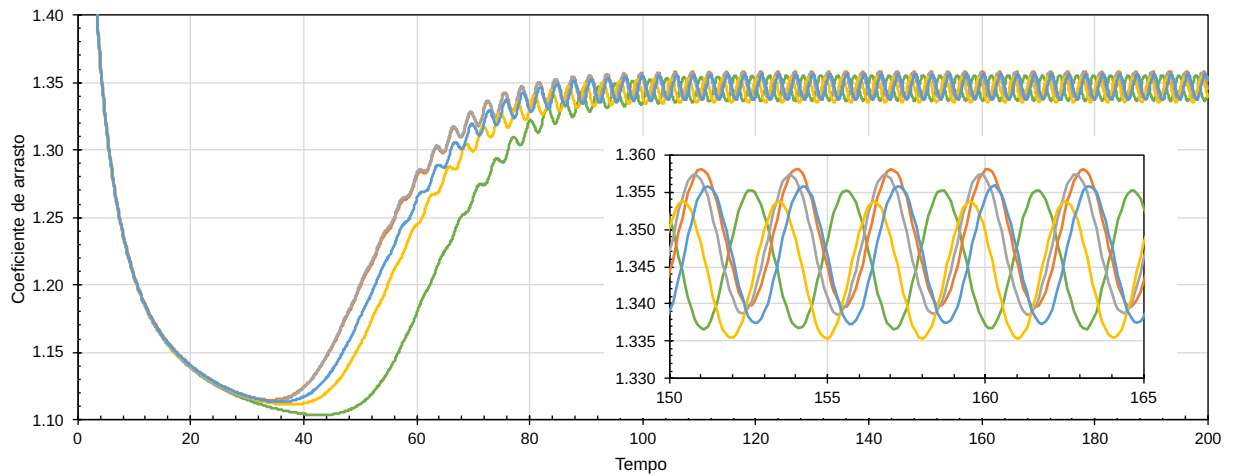
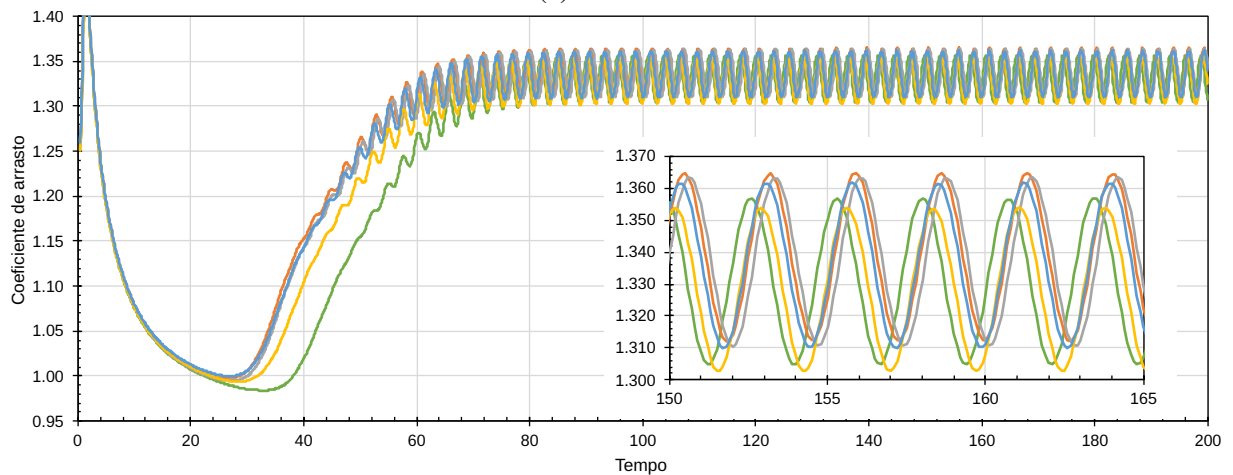
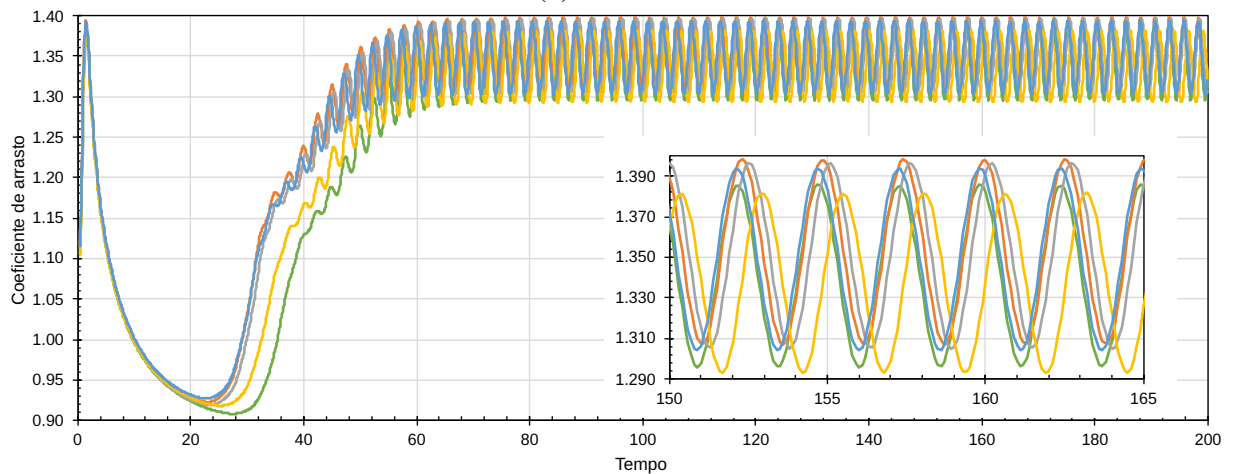
Simulação	C_D	C_L	St
Sim1	$1,3309 \pm 0,0262$	$\pm 0,5218$	0,1848
Sim2	$1,3384 \pm 0,0263$	$\pm 0,5231$	0,1852
Sim3	$1,3369 \pm 0,0265$	$\pm 0,5253$	0,1855
Sim4	$1,3283 \pm 0,0257$	$\pm 0,5184$	0,1843
Sim5	$1,3358 \pm 0,0259$	$\pm 0,5196$	0,1847
Najafi, Arefmanesh e Enjilela (2012)	1,45	$\pm 0,56$	
Ji, Munjiza e Williams (2012)	$1,4463 \pm 0,0261$	$\pm 0,5043$	0,1837
Liu, Zheng e Sung (1998)	$1,334 \pm 0,030$	$\pm 0,530$	0,182

Fonte: Presente trabalho (2024).

Assim, observa-se que todos os valores estão próximos aos valores de referência, sendo que as simulações baseadas em elementos P2P1 apresentaram valores ligeiramente inferiores aos demais conforme o número de Reynolds aumenta. A mínima diferença observada entre os valores calculados em uma simulação sem LES e aquela que em simulação com LES deve-se ao fato do número de Reynolds ser muito baixo, pois, como apontado por Fernandes (2020), esse tipo de escoamento (com Re entre 50 e 200) apresenta a formação de vórtices laminares, denominada de esteira de Von Kármán.

Em seguida partiu-se para uma análise com a consideração de uma malha mais grosseira, a qual é apresentada na Figura 30. A malha utilizada para a simulação foi construída a partir

Figura 28 – Escoamento sobre cilindro - Coeficiente de arrasto ao longo do tempo.

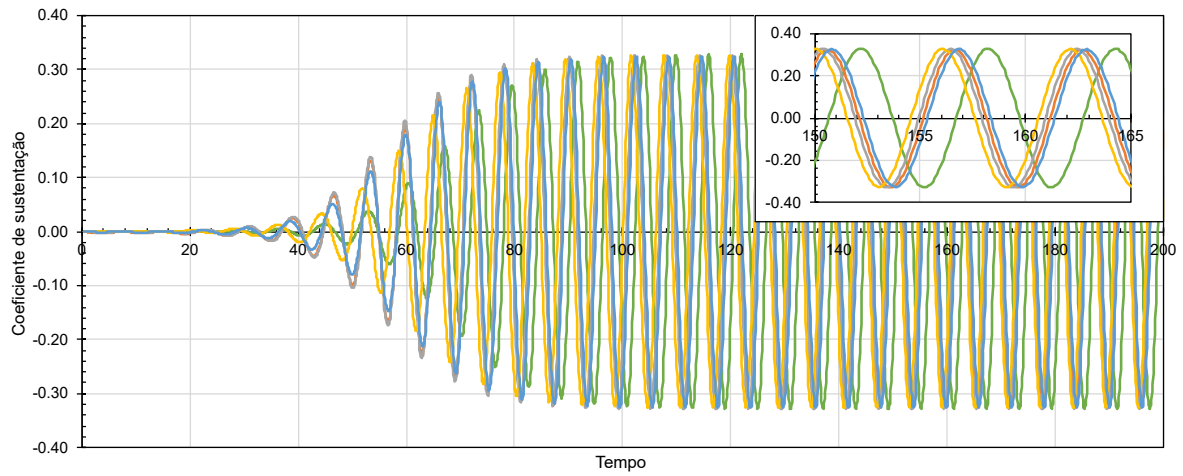
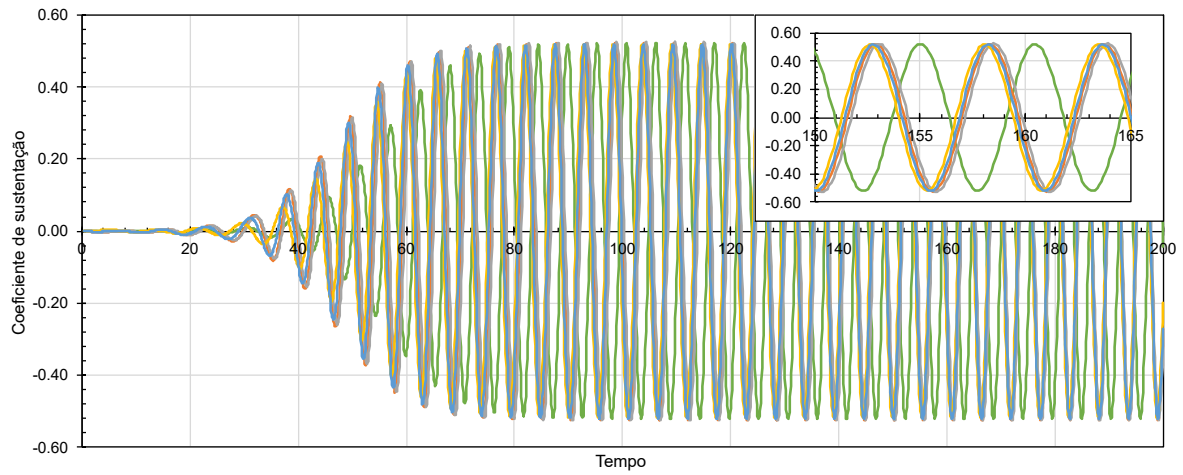
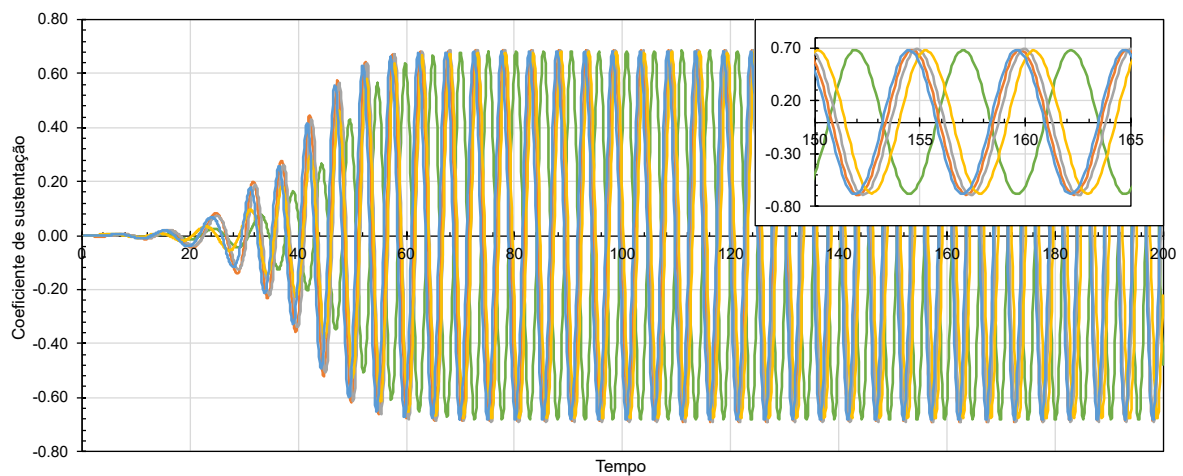
(a) $Re = 100$ (b) $Re = 150$ (c) $Re = 200$

— P2P1 — SUPG/PSPG-P2P2 — VMS-P2P2 — LES-P2P1 — LES-VMS-P2P2

Fonte: Presente trabalho (2024).

de elementos triangulares, possuindo 5004 graus de liberdade para a simulação de elementos P2P2 e 3771 para a simulação de elementos P2P1. Os valores dos coeficientes de arrasto e de sustentação são apresentados nas Figuras 31 e 32, respectivamente. A linha de referência é

Figura 29 – Escoamento sobre cilindro - Coeficiente de sustentação ao longo do tempo.

(a) $Re = 100$ (b) $Re = 150$ (c) $Re = 200$

— P2P1 — SUPG/PSPG-P2P2 — VMS-P2P2 — LES-P2P1 — LES-VMS-P2P2

Fonte: Presente trabalho (2024).

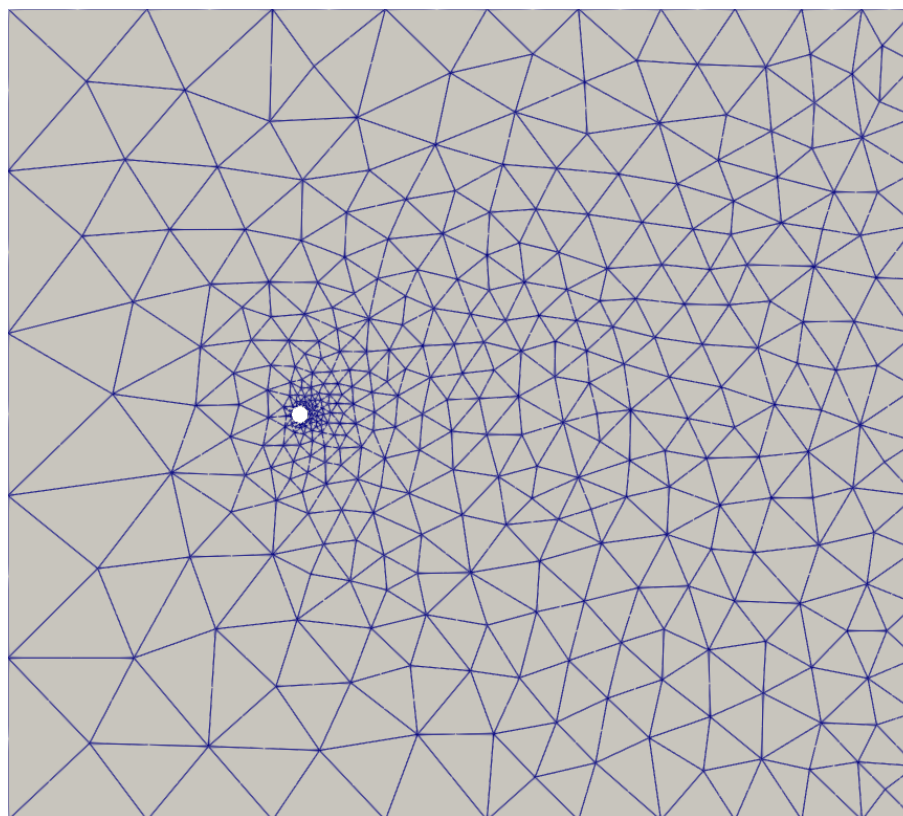
Tabela 9 – Escoamento sobre cilindro - Valores dos coeficientes e número de Strouhal para $Re = 200$.

Simulação	C_D	C_L	St
Sim1	$1,3409 \pm 0,0450$	$\pm 0,6833$	0,1987
Sim2	$1,3527 \pm 0,0456$	$\pm 0,6874$	0,1998
Sim3	$1,3506 \pm 0,0457$	$\pm 0,6892$	0,2001
Sim4	$1,3374 \pm 0,0442$	$\pm 0,6784$	0,1980
Sim5	$1,3490 \pm 0,0449$	$\pm 0,6825$	0,1990
Fernandes (2020)	$1,3787 \pm 0,0476$	$\pm 0,7134$	0,195
Najafi, Arefmanesh e Enjilela (2012)	1,46	$\pm 0,72$	
Ji, Munjiza e Williams (2012)	$1,4372 \pm 0,0417$	$\pm 0,6272$	0,1963
Liu, Zheng e Sung (1998)	$1,31 \pm 0,049$	$\pm 0,69$	0,192

Fonte: Presente trabalho (2024).

considerada como a obtida pela simulação LES-VMS da malha fina.

Figura 30 – Escoamento sobre cilindro - Malha utilizada para simulação com malha mais grossa.

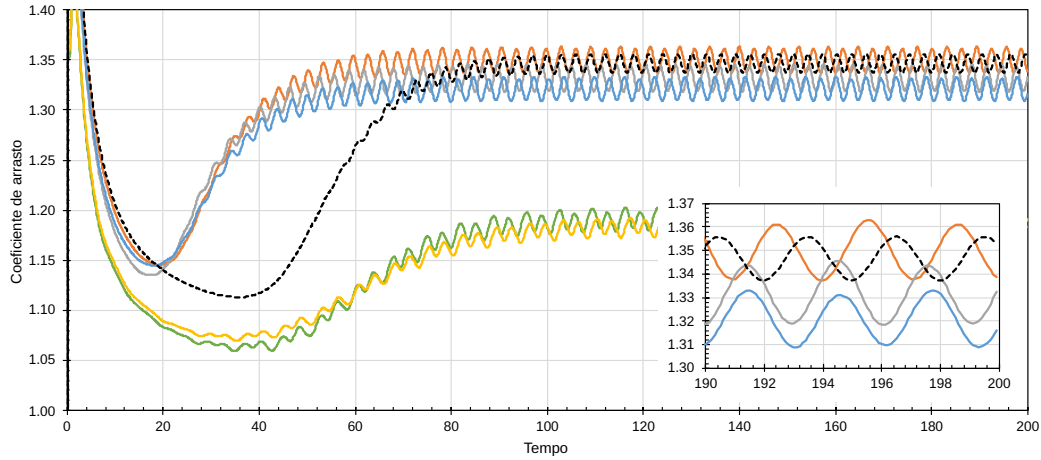


Fonte: Presente trabalho (2024).

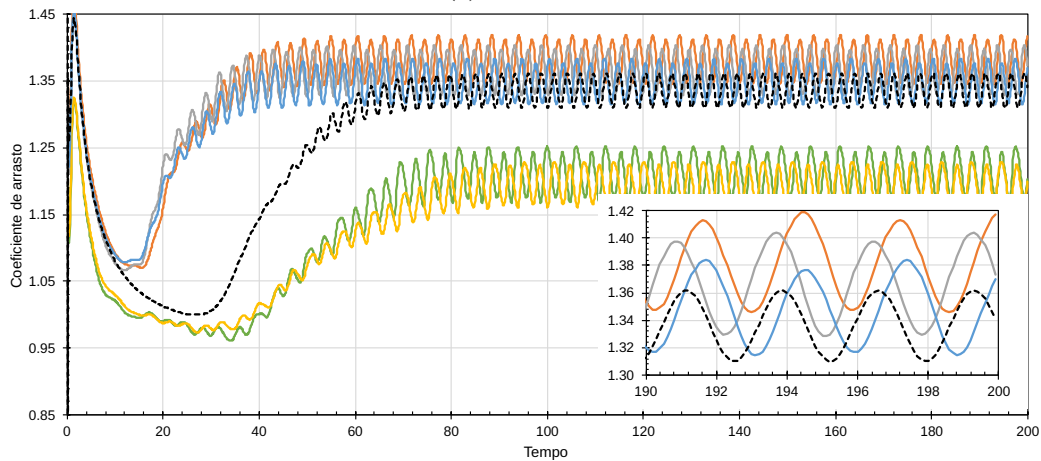
Os valores dos coeficientes de arrasto e de sustentação após o escoamento atingir o equilíbrio dinâmico, assim como o número de Strouhal e valores obtidos na simulação com malha fina, são apresentados na Tabela 10 a 12.

Como pode se observar, os valores obtidos a partir de elementos P2P1 tiveram valores muito abaixo do esperado, principalmente para o coeficiente de arrasto, independentemente

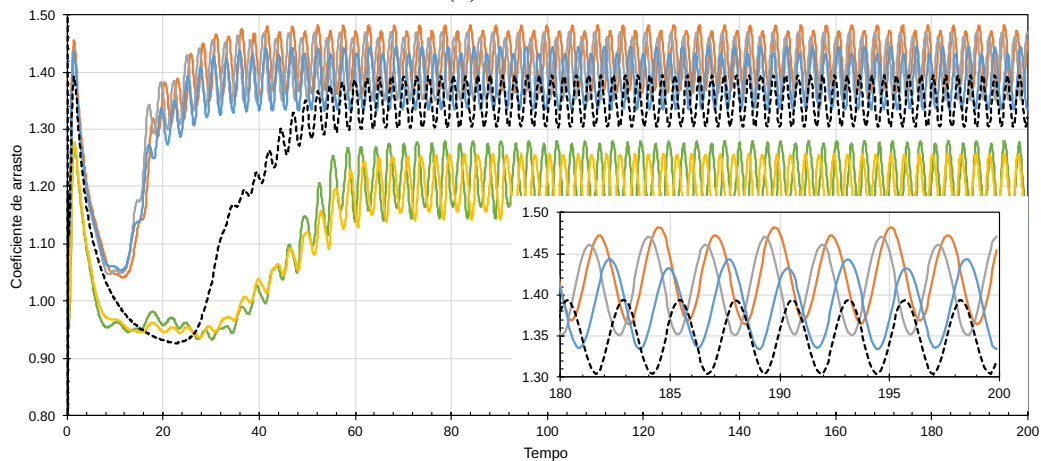
Figura 31 – Escoamento sobre cilindro - Coeficiente de arrasto ao longo do tempo para malha mais grosseira.



(a) $Re = 100$



(b) $Re = 150$



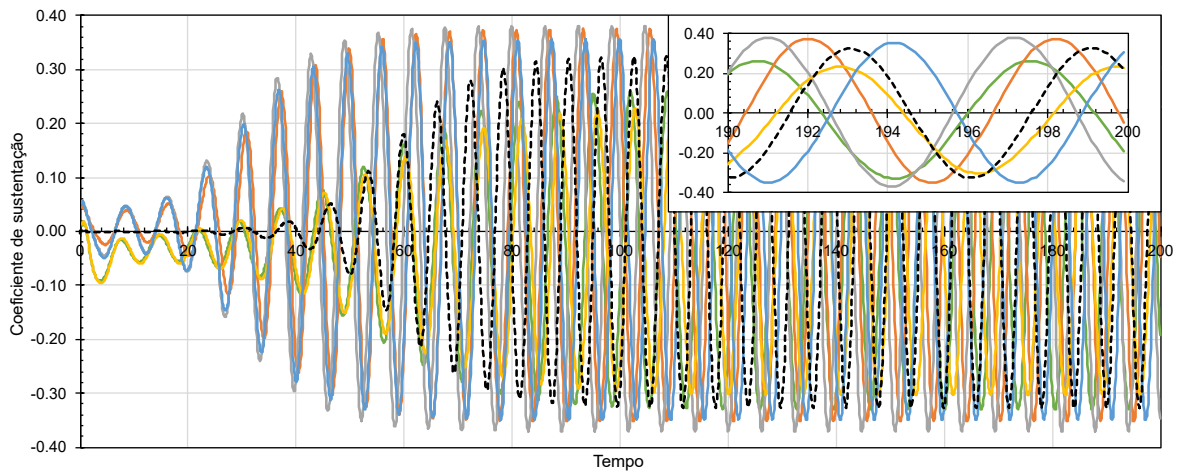
(c) $Re = 200$

— P2P1 — SUPG/PSPG-P2P2 — VMS-P2P2 — LES-P2P1 — LES-VMS-P2P2 - - - Referência

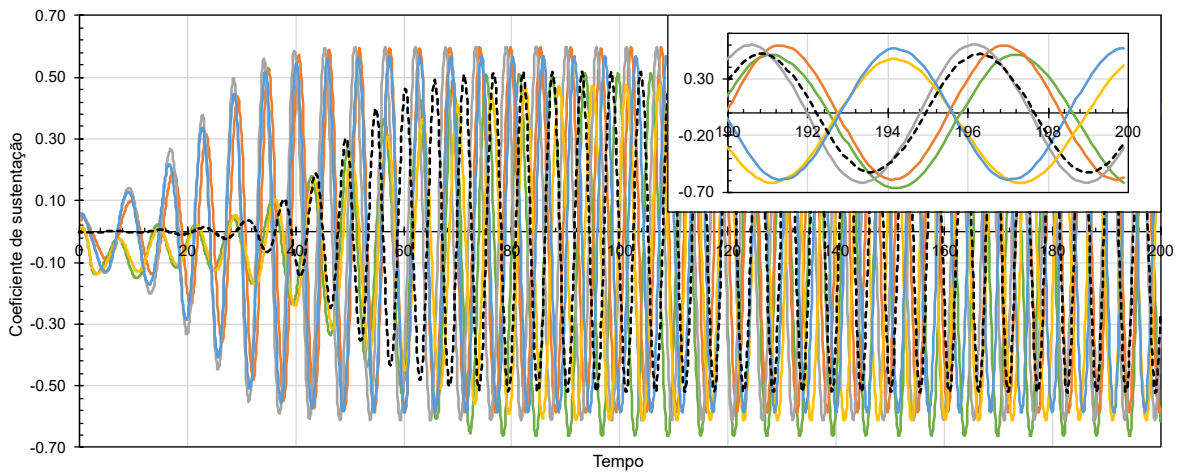
Fonte: Presente trabalho (2024).

da aplicação do LES. Já os valores obtidos a partir de elementos P2P2 apresentaram valores mais próximos aos obtidos na simulação com malha mais fina, em que a aplicação do LES se mostrou eficiente para descrever os coeficientes de arrasto e sustentação a partir de $Re = 150$. Já

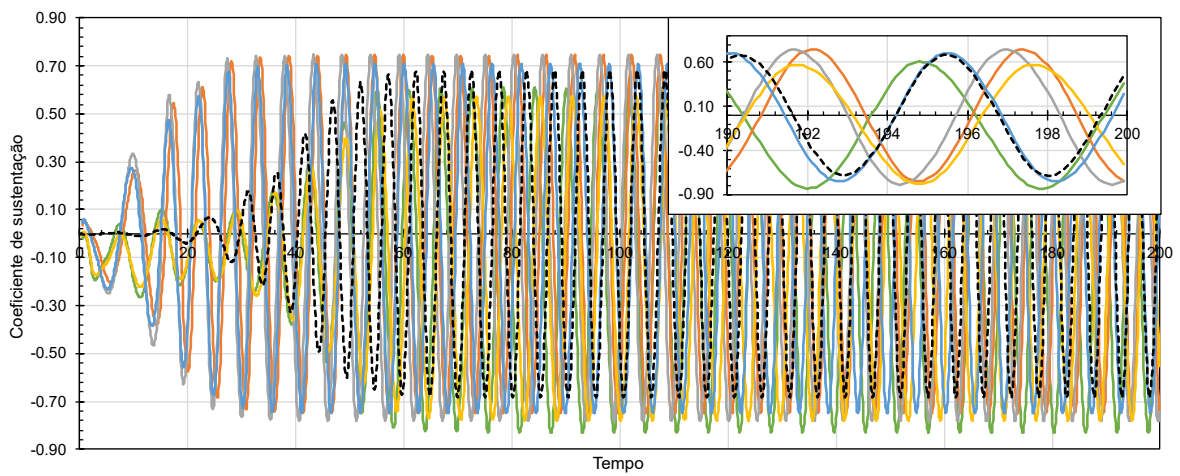
Figura 32 – Escoamento sobre cilindro - Coeficiente de sustentação ao longo do tempo para malha mais grosseira.



(a) $Re = 100$



(b) $Re = 150$



(c) $Re = 200$

— P2P1 — SUPG/PSPG-P2P2 — VMS-P2P2 — LES-P2P1 — LES-VMS-P2P2 - - - Referência

Fonte: Presente trabalho (2024).

Tabela 10 – Escoamento sobre cilindro - Comparação de C_D , C_L e St para $Re = 100$.

Simulação	Malha 1			Malha 2		
	C_D	C_L	St	C_D	C_L	St
Sim1	$1,3458 \pm 0,0095$	$\pm 0,3283$	0,1642	$1,1913 \pm 0,0120$	$\pm 0,2966$	0,1464
Sim2	$1,3488 \pm 0,0094$	$\pm 0,3255$	0,1647	$1,3502 \pm 0,0128$	$\pm 0,3637$	0,1614
Sim3	$1,3480 \pm 0,0095$	$\pm 0,3279$	0,1650	$1,3320 \pm 0,0136$	$\pm 0,3759$	0,1621
Sim4	$1,3445 \pm 0,0093$	$\pm 0,3264$	0,1639	$1,1832 \pm 0,0103$	$\pm 0,2683$	0,1442
Sim5	$1,3466 \pm 0,0094$	$\pm 0,3259$	0,1646	$1,3210 \pm 0,0121$	$\pm 0,3527$	0,1589

Fonte: Presente trabalho (2024).

Tabela 11 – Escoamento sobre cilindro - Comparação de C_D , C_L e St para $Re = 150$.

Simulação	Malha 1			Malha 2		
	C_D	C_L	St	C_D	C_L	St
Sim1	$1,3309 \pm 0,0262$	$\pm 0,5218$	0,1848	$1,2101 \pm 0,0416$	$\pm 0,5879$	0,1661
Sim2	$1,3384 \pm 0,0263$	$\pm 0,5231$	0,1852	$1,3822 \pm 0,0364$	$\pm 0,5915$	0,1821
Sim3	$1,3369 \pm 0,0265$	$\pm 0,5253$	0,1855	$1,3660 \pm 0,0378$	$\pm 0,6059$	0,1822
Sim4	$1,3283 \pm 0,0257$	$\pm 0,5184$	0,1843	$1,1952 \pm 0,0337$	$\pm 0,5433$	0,1626
Sim5	$1,3358 \pm 0,0259$	$\pm 0,5196$	0,1847	$1,3491 \pm 0,0346$	$\pm 0,5768$	0,1779

Fonte: Presente trabalho (2024).

Tabela 12 – Escoamento sobre cilindro - Comparação de C_D , C_L e St para $Re = 200$.

Simulação	Malha 1			Malha 2		
	C_D	C_L	St	C_D	C_L	St
Sim1	$1,3409 \pm 0,0450$	$\pm 0,6833$	0,1987	$1,2118 \pm 0,0672$	$\pm 0,7190$	0,1776
Sim2	$1,3527 \pm 0,0456$	$\pm 0,6874$	0,1998	$1,4232 \pm 0,7477$	$\pm 0,7477$	0,1947
Sim3	$1,3506 \pm 0,0457$	$\pm 0,6892$	0,2001	$1,4108 \pm 0,7646$	$\pm 0,7646$	0,1943
Sim4	$1,3374 \pm 0,0442$	$\pm 0,6784$	0,1980	$1,1997 \pm 0,6768$	$\pm 0,6768$	0,1735
Sim5	$1,3490 \pm 0,0449$	$\pm 0,6825$	0,1990	$1,3887 \pm 0,7283$	$\pm 0,7283$	0,1894

Fonte: Presente trabalho (2024).

o número de Strouhal foi levemente amortecido devido à aplicação do modelo.

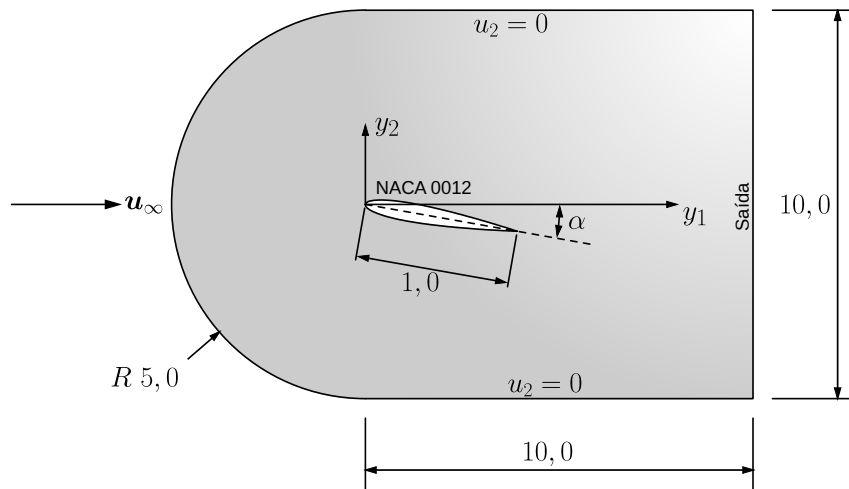
2.7.4 Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012

O seguinte exemplo trata-se de um escoamento em torno de um aerofólio NACA 0012, cujo comprimento da corda é unitário ($L = 1,0$). O domínio considerado para a simulação é apresentado na Figura 33, em que o ângulo de ataque $\alpha = 5^\circ$. O fluido possui densidade $\rho = 1,0$, viscosidade dinâmica $\mu = 2 \times 10^{-5}$ e a velocidade de entrada é de $\mathbf{u}_\infty = [1,0]^T$, resultando em o número de Reynolds de $Re = 5 \times 10^4$.

O problema foi estudado em situações bidimensionais e tridimensionais, sendo simulado tanto com e sem aplicação de LES. Em ambos os casos o problema foi estabilizado a partir da estabilização SUPG/PSPG.

A malha utilizada para a simulação bidimensional foi construída a partir de elementos P2P2, com tamanho 0,01 na superfície do aerofólio, 2,5 na região de entrada e 0,5 na região de

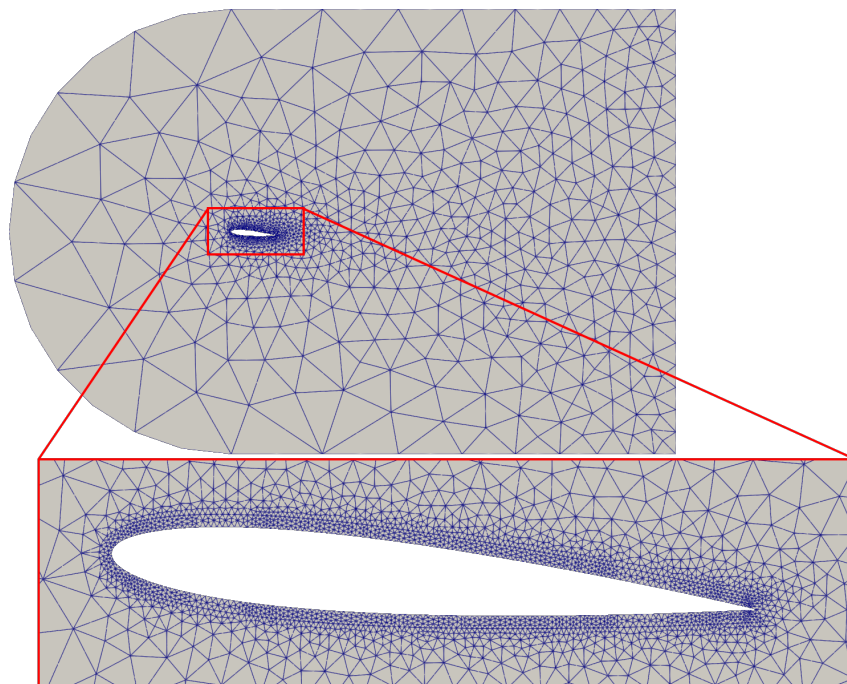
Figura 33 – Escoamento em torno de um aerofólio NACA 0012 - Domínio de simulação.



Fonte: Presente trabalho (2024).

saída. Assim obtém-se uma malha com 5247 elementos finitos, tendo 10817 nós, resultando em 32451 graus de liberdade (conforme ilustrado na Figura 34). O intervalo de tempo utilizado foi de $t \in [0,100]$ com passos de $\Delta t = 0,01$.

Figura 34 – Escoamento em torno de um aerofólio NACA 0012 - Malha bidimensional.

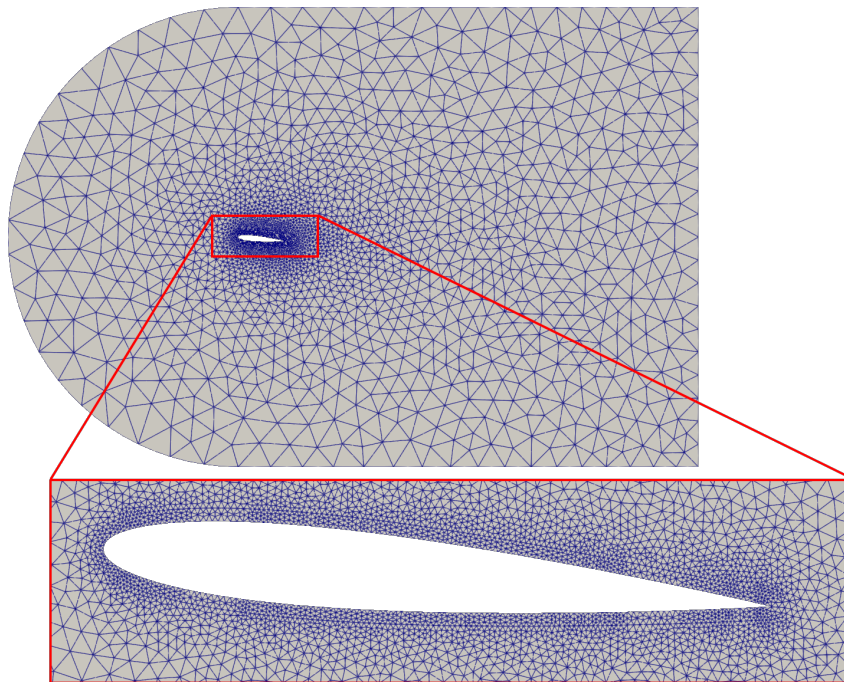


Fonte: Presente trabalho (2024).

Já para a simulação tridimensional, considerou-se uma espessura de 0,25 para o domínio, sendo admitida uma condição simétrica nas faces $x_3 = 0,00$ e $x_3 = 0,25$. Além disso, aumentou-se o refinamento da malha na região de entrada e de saída para 0,75 e 0,5, respectivamente. Assim, a malha possui 161540 elementos finitos, tendo 248298 nós, resultando em 993192 graus de liberdade (conforme ilustrado na Figura 35). O intervalo de tempo utilizado foi de $t \in [0,15]$

com passos de $\Delta t = 0,01$.

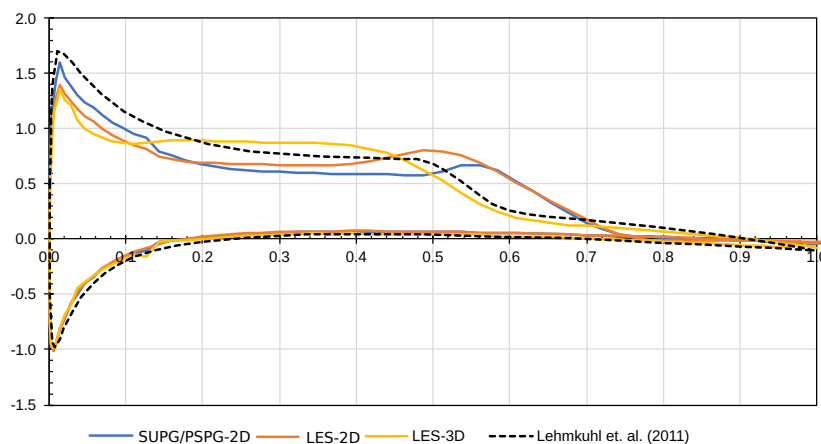
Figura 35 – escoamento em torno de um aerofólio NACA 0012 - Malha tridimensional.



Fonte: Presente trabalho (2024).

Para a simulação tridimensional, observou-se que a simulação sem aplicação do LES divergiu rapidamente, enquanto a simulação com LES apresentou resultados satisfatórios. Assim, os resultados obtidos foram comparados com os apresentados no trabalho de Lehmkuhl *et al.* (2011), o qual observou a média temporal do coeficiente de pressão ao longo do comprimento do aerofólio (Figura 36).

Figura 36 – escoamento em torno de um aerofólio NACA 0012 - Coeficiente de pressão.



Fonte: Presente trabalho (2024).

Assim, verifica-se que todas as simulações se aproximaram dos valores de referência, sendo a simulação LES tridimensional a que resultou na distribuição mais satisfatória. Isso se

deve ao fato dos vórtices se formarem tridimensionalmente no espaço, o que torna a simulação bidimensional inapropriada para tal magnitude de Re .

Outros valores observados são referentes aos coeficientes médios de sustentação (C_L) e de arrasto (C_D), além da distância do ponto de desprendimento (x_{sep}) e recolamento (x_{reat}) do fluxo ao longo do aerofólio. Esses valores são apresentados na Tabela 13 em comparação com os obtidos por Lehmkuhl *et al.* (2011) em simulação DNS.

Tabela 13 – Escoamento em torno de um aerofólio NACA 0012 - Distância do ponto de desprendimento e recolamento.

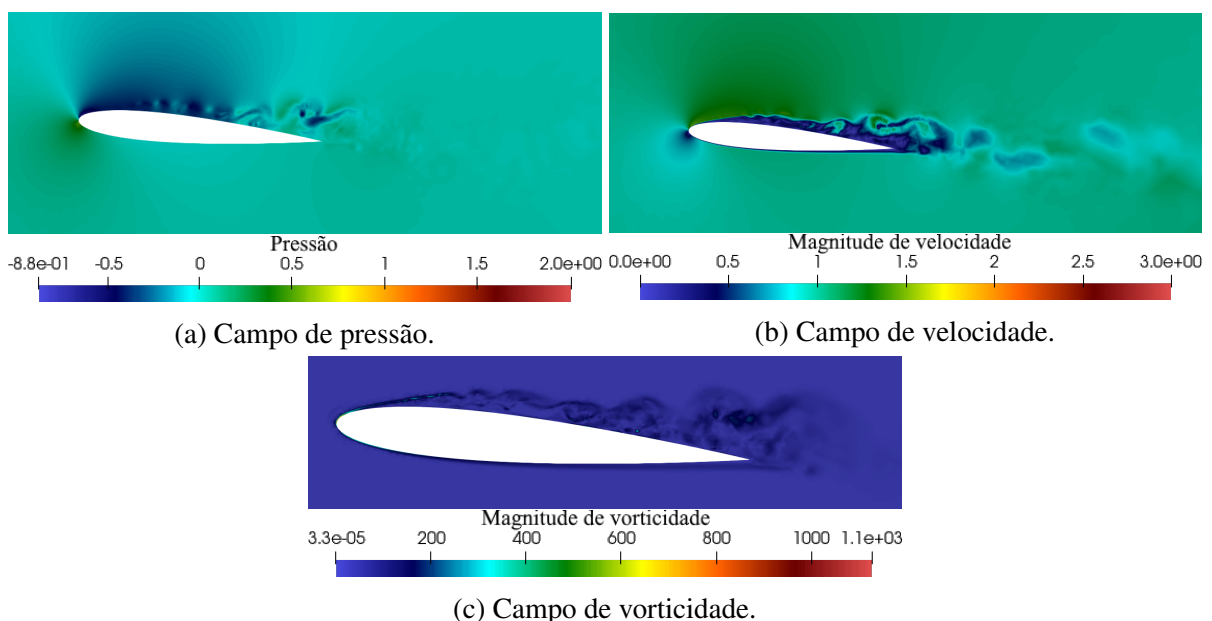
	Calculado	Lehmkuhl <i>et al.</i> (2011)	Desvio
C_D	0,0405	0,0291	0,0114
C_L	0,564	0,569	-0,005
x_{sep}	0,1258	0,0645	0,061
x_{reat}	0,553	0,566	-0,013

Fonte: Presente trabalho (2024).

Observa-se, portanto, que todos os valores estão muito próximos aos valores de referência, apontando a boa utilização do modelo. A boa estimativa dos pontos de desprendimento e de recolamento se torna importante, pois, como apontado pelo autor, esse desprendimento forma uma bolha sobre o aerofólio, o que pode causar uma perda de sustentação, além de aumentar o arrasto, impactando diretamente na eficiência do aerofólio.

A Figura 37 apresenta os campos de pressão, velocidade e vorticidade ($\omega = \nabla_{\mathbf{y}} \times \mathbf{u}$) em torno do aerofólio no instante $t = 5,0$, para a simulação tridimensional LES.

Figura 37 – Escoamento em torno de um aerofólio NACA 0012 - Campos de pressão e de velocidade.



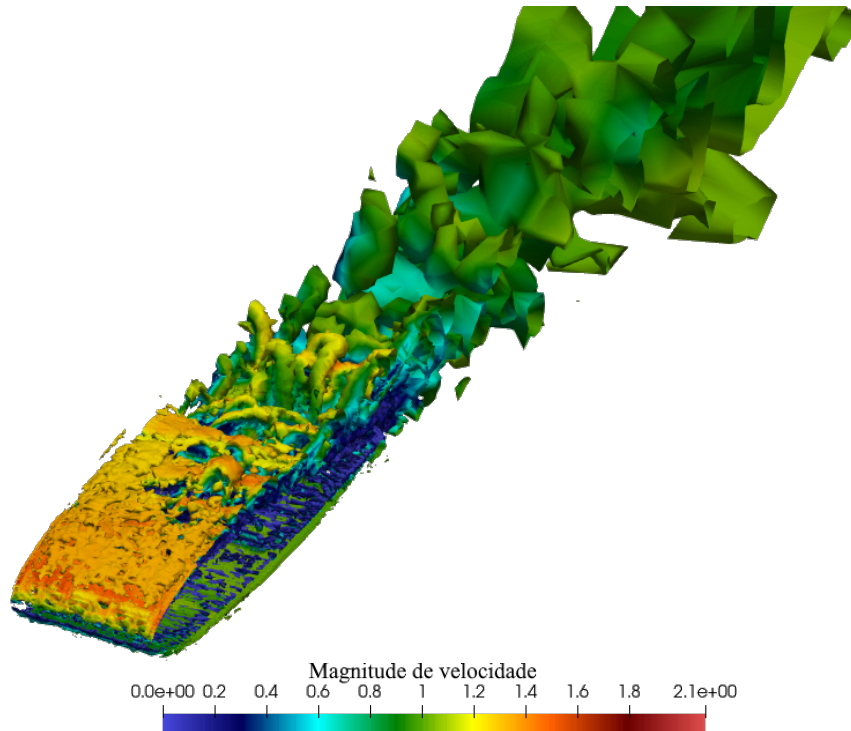
Fonte: Presente trabalho (2024).

A Figura 38 apresenta as isosuperfícies no instante $t = 5,0$ onde o critério Q é nulo. Esse parâmetro se trata de um invariante proposto por Hunt, Wray e Moin (1988), o qual pode ser calculado como:

$$Q = \frac{\nabla_y \mathbf{u} : \nabla_y^T \mathbf{u}}{2} = \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{R} : \mathbf{R}}{2}, \quad (2.114)$$

em que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ é o tensor taxa de deformação e \mathbf{R} é o tensor de rotação, dado como o tensor antissimétrico do gradiente de velocidades. Essa medida é comumente utilizada para identificar as regiões onde a vorticidade é dominante ($Q > 0$) e onde a taxa de deformação é dominante ($Q < 0$) (Hunt; Wray; Moin, 1988; Piomelli, 2000)

Figura 38 – Escoamento em torno de um aerofólio NACA 0012 - Isosuperfícies de critério Q nulo.

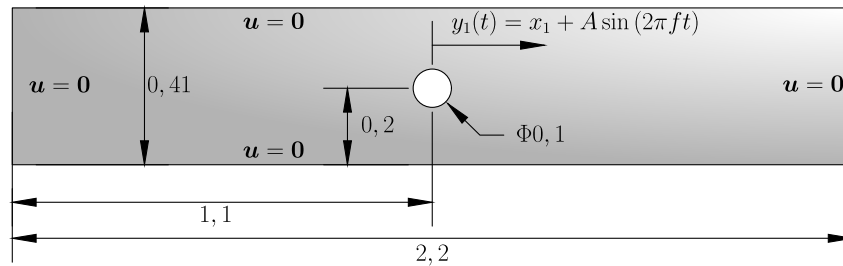


Fonte: Presente trabalho (2024).

2.7.5 Cilindro com deslocamento prescrito

O primeiro problema estudado é o cilindro com deslocamento prescrito, proposto por Wan e Turek (2007). Nesse problema, um cilindro de raio $R = 0,1$ m encontra-se confinado em um canal definido por $\Omega = [-L/2, L/2] \times [0, H]$, com $L = 2,2$ e $H = 0,41$, sendo o centro do cilindro posicionado em $(0, 0,2)$. O movimento do cilindro ao longo do tempo é determinado por $y_1(t) = x_1 + A \sin(2\pi ft)$, em que $A = 0,25$ e $f = 0,25$. As condições de contorno do problema são de paredes aderentes nas faces esquerda e direita do domínio, enquanto as faces superior e inferior são de paredes lisas. A Figura 39 apresenta o esquema do problema estudado.

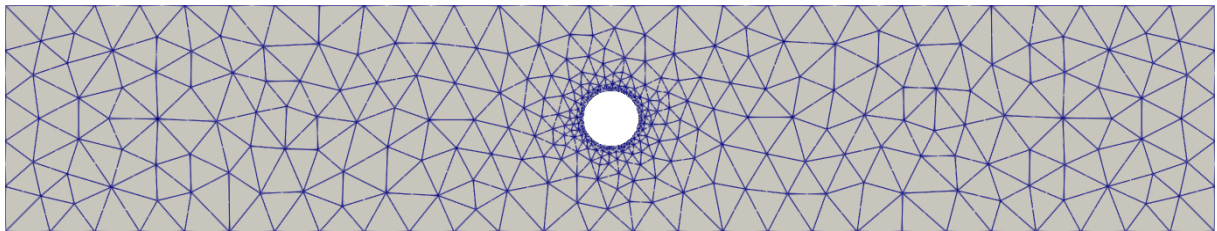
Figura 39 – Cilindro com deslocamento prescrito - Esquema do problema.



Fonte: Presente trabalho (2024).

O fluido possui viscosidade cinemática $\nu = 1 \times 10^{-3}$, densidade $\rho = 1,0$ e parte do repouso. O problema discretizado consiste na utilização de uma malha contendo 768 elementos P2P2, totalizando 1664 nós e 4992 graus de liberdade. A simulação foi estabilizada por meio de SUPG/PSPG com esquema de integração temporal dado por $\rho_\infty = 0,0$. O intervalo de tempo estudado é de $t \in [0,24]$ com passos de tempo $\Delta t = 0,005$. A Figura 40 apresenta a configuração inicial da malha utilizada para a solução do problema.

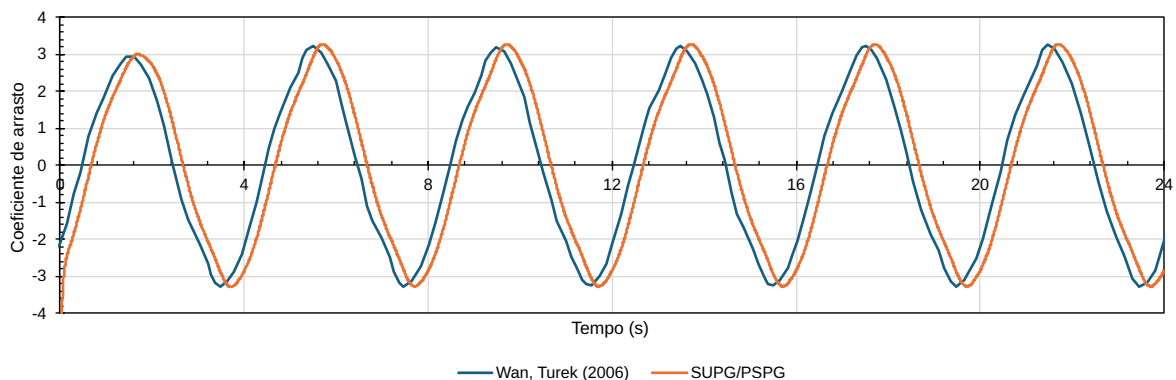
Figura 40 – Cilindro com deslocamento prescrito - Configuração inicial da malha.



Fonte: Presente trabalho (2024).

Assim, a malha é deformada no início de cada passo de tempo de forma a acomodar o movimento do cilindro. Assim, calcula-se o coeficiente de arrasto ao longo do tempo e compara-se com os resultados obtidos por Wan e Turek (2007). A Figura 41 apresenta a comparação entre os resultados obtidos.

Figura 41 – Cilindro com deslocamento prescrito - Coeficiente de arrasto ao longo do tempo.

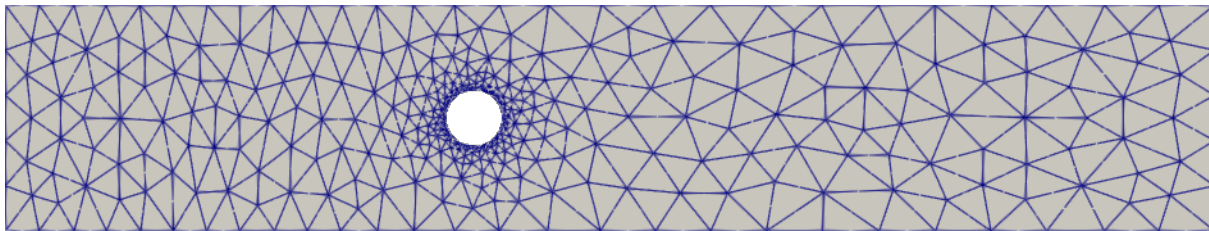


Fonte: Presente trabalho (2024).

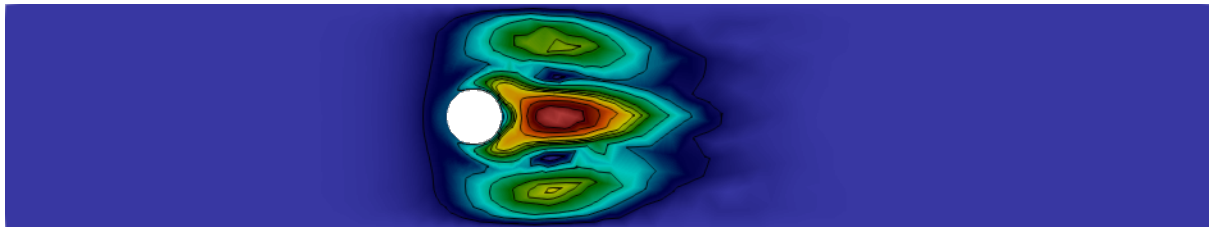
Verifica-se que os resultados obtidos possuem boa concordância com a referência, sendo observada apenas uma pequena diferença de fase entre os resultados, o que pode ser atribuído à diferença na condição inicial do problema.

As Figuras 42 e 43 apresentam as configurações da malha nos instantes $t = 18,9$ e $t = 21,0$, assim como os campos de velocidade obtidos nesses instantes.

Figura 42 – Cilindro com deslocamento prescrito - Configuração da malha e campo de velocidade no instante $t = 18,9$.



(a) Configuração da malha.



(b) Campo de velocidade.

Fonte: Presente trabalho (2024).

Observa-se, portanto, que o esquema de movimentação da malha foi capaz de acomodar adequadamente o movimento do cilindro, assim como apresentou resultados muito próximos aos valores de referência, apontando a boa utilização do esquema de movimentação.

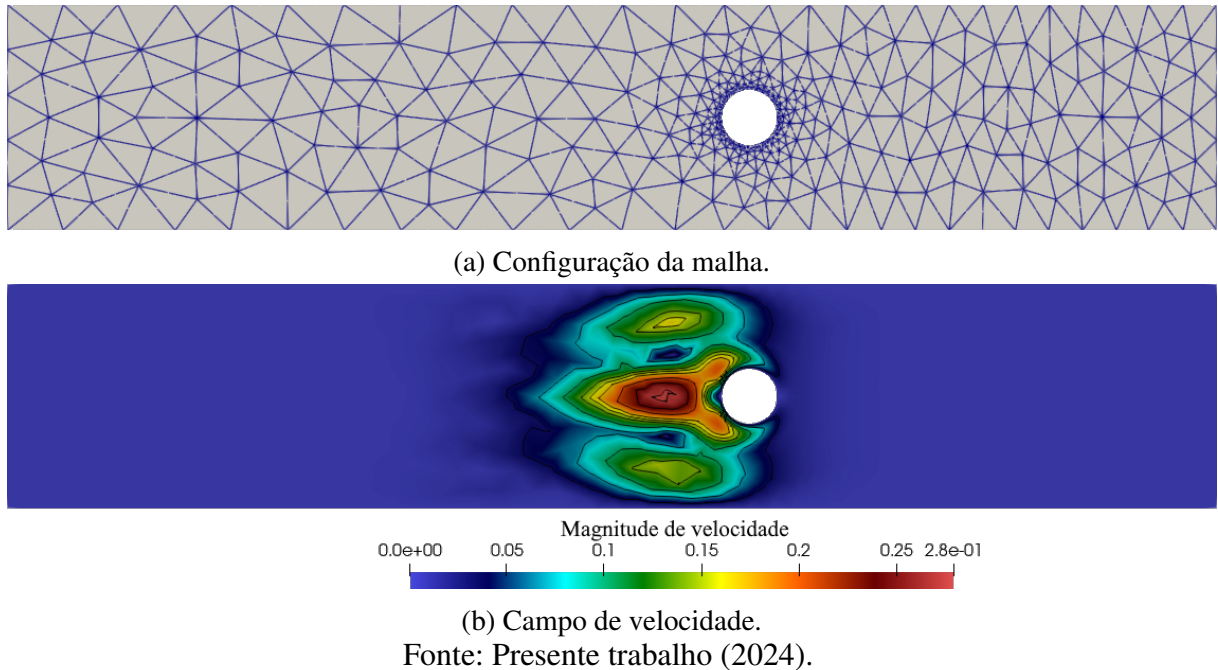
2.7.6 Aerofólio com movimento de arfagem

O exemplo seguinte se trata de um aerofólio NACA0012 com movimento de arfagem, proposto por Mittal e Tezduyar (1992), o qual aplica esse movimento como uma rotação prescrita do aerofólio em torno de um eixo. O domínio do problema é definido por $\Omega = [-9C, 21C] \times [-10C, 10C]$, com o centro geométrico do aerofólio posicionado em $(0,0)$. Inicialmente o aerofólio possui um ângulo de ataque (θ) de $10,0^\circ$ e cujo valor varia ao longo do tempo por meio de:

$$\theta(t) = \frac{\theta_{\max} + \theta_{\min}}{2} - \frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{2} \cos(\omega_f t), \quad (2.115)$$

em que $\theta_{\max} = 30,0^\circ$ e $\theta_{\min} = 10,0^\circ$ são os valores máximo e mínimo do ângulo de ataque e $\omega_f = 2\pi f_f$, sendo $f_f = 1,0$ a frequência de oscilação. O giro do aerofólio se dá em torno de seu

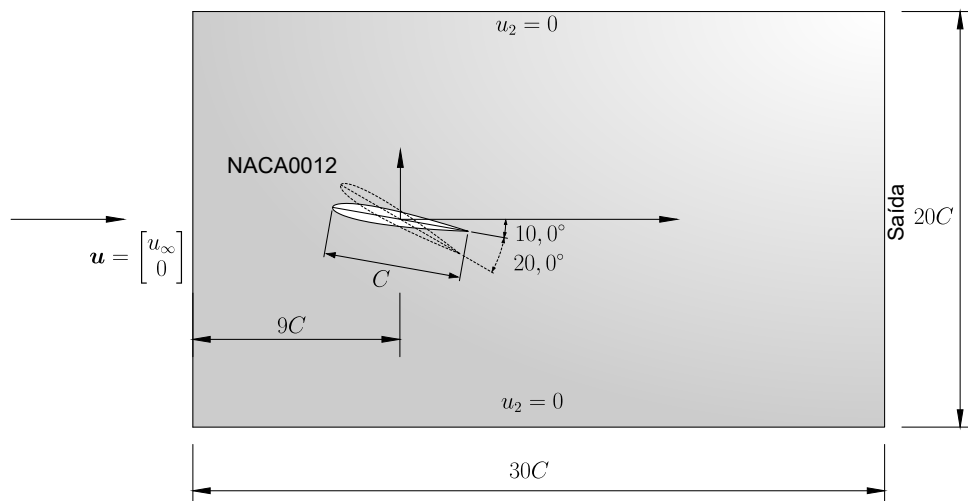
Figura 43 – Cilindro com deslocamento prescrito - Configuração da malha e campo de velocidade no instante $t = 21,0$.



centro geométrico.

As condições de contorno do problema são de entrada na face esquerda ($\mathbf{u} = \{u_\infty, 0\}^T$), saída à direita e condição de simetria nas faces superior e inferior. A Figura 45 apresenta o esquema do problema estudado.

Figura 44 – Aerofólio com movimento de arfagem - Esquema do problema.



Fonte: Presente trabalho (2024).

O número de Reynolds do problema, considerando o $C = 1,0$ o comprimento característico do problema e baseado na velocidade de entrada $u_\infty = 1,0$, é $Re = 1000$. Para se obter a condição inicial do problema, realizou-se uma simulação estática para cada malha, mantendo-se fixo o ângulo de ataque inicial, até que se atingisse o regime permanente.

Para esse estudo, considerou-se duas malhas distintas de elementos P2P2, a primeira (m1) contendo 3271 elementos, 6691 nós e 20073 graus de liberdade, e a segunda (m2) contendo 2743 elementos, 5597 nós e 16791 graus de liberdade. A malha m1 foi simulada sem aplicação do LES (estabilizada por SUPG/PSPG), enquanto a m2 foi realizada tanto sem LES (estabilizada por SUPG/PSPG e VMS) quanto em LES (estabilizado por SUPG/PSPG). O esquema de integração temporal dado por $\varrho_\infty = 0,0$, o intervalo de tempo estudado é de $t \in [0,30]$ com passos de tempo $\Delta t = 0,02$. A Figura 45 apresenta as configurações iniciais da malha utilizada para ambas as simulações.

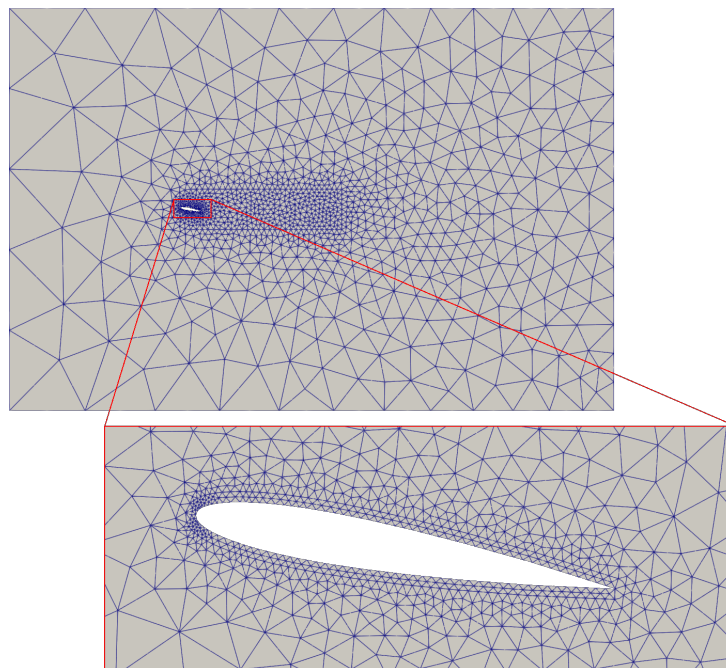
Dessa maneira, observou-se os valores dos coeficientes de arrasto e de sustentação ao longo do tempo e comparou-se com os apresentados por Mittal e Tezduyar (1992). A Figura 46 apresentam a comparação entre os resultados obtidos.

Pode-se observar que em todas as simulações os resultados foram muito satisfatório, se aproximando dos valores de referência. A pequena variação entre os resultados deve-se ao nível de refinamento da malha ainda ser bem adequado ao problema.

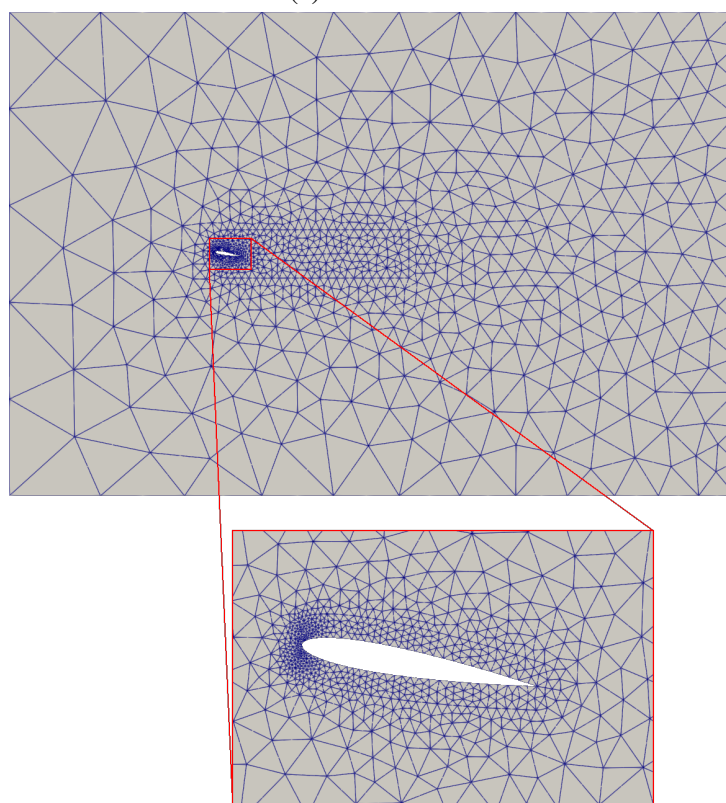
A Figura 47 apresenta os campos de vorticidade e de velocidade no instante $t = 8,0$ e frações de período a partir desse instante.

Observando qualitativamente os campos são muito semelhantes aos obtidos por Mittal e Tezduyar (1992). A Figura 48 apresenta a configuração de ambas as malhas nos instantes $t = 8,0$, $8,2$ e $8,4$.

Figura 45 – Aerofólio com movimento de arfagem - Configuração inicial da malha.

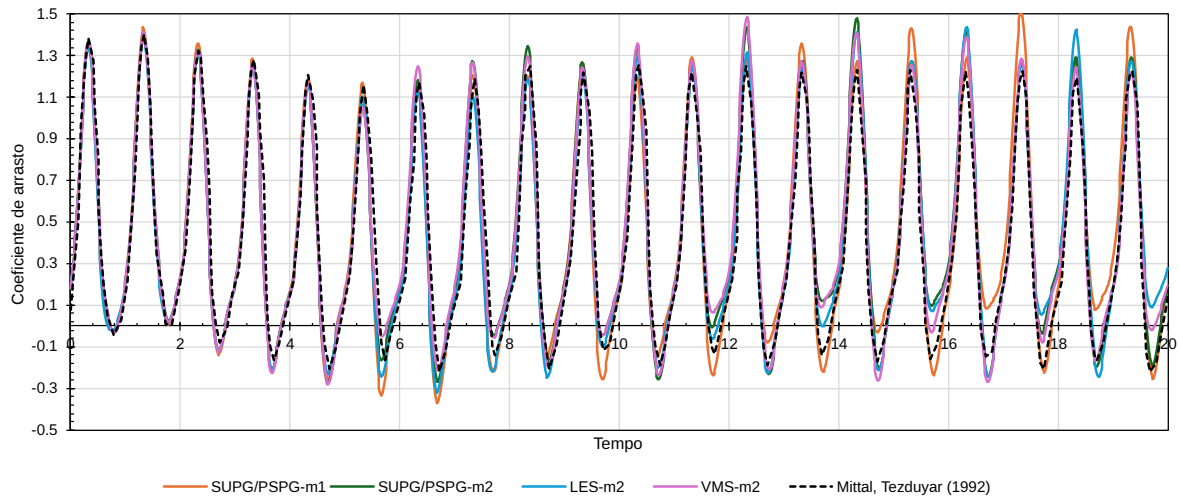


(a) Malha m1.

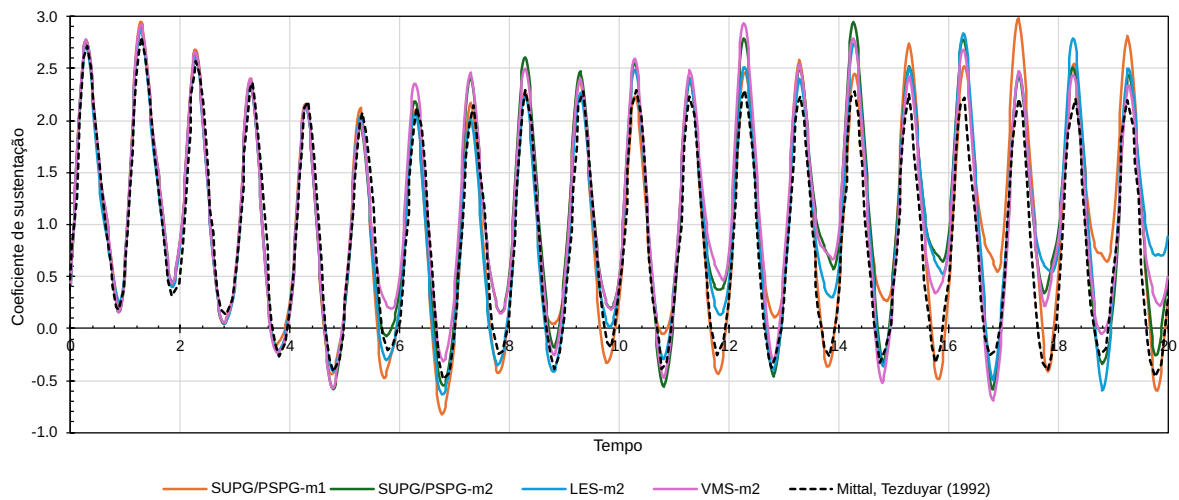


(b) Malha m2.

Fonte: Presente trabalho (2024).

Figura 46 – Aerofólio com movimento de arfagem - Evolução temporal de C_D e C_L .

(a) Coeficiente de arrasto.



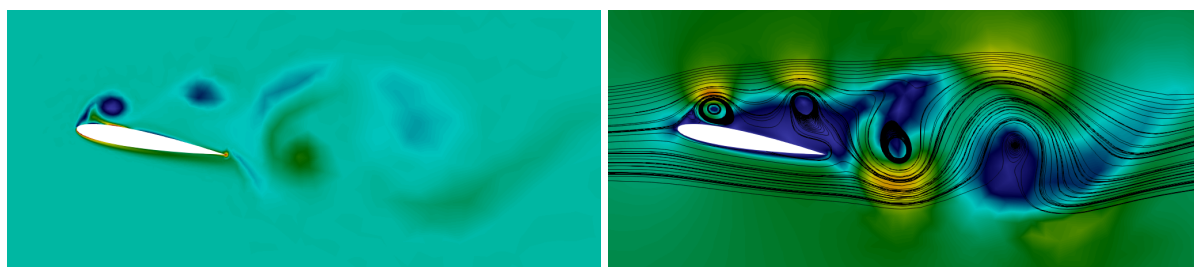
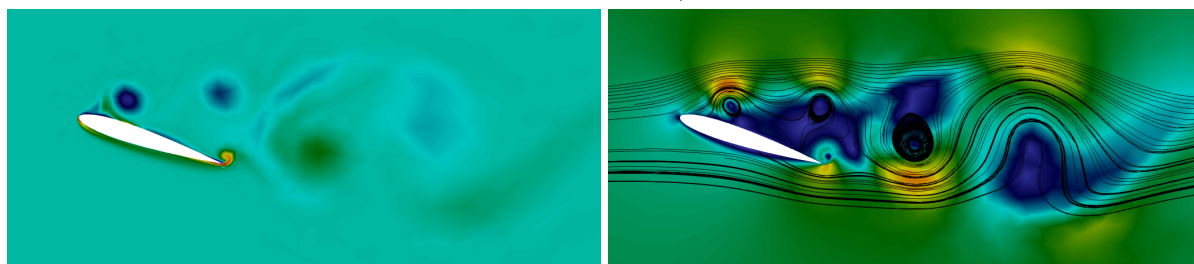
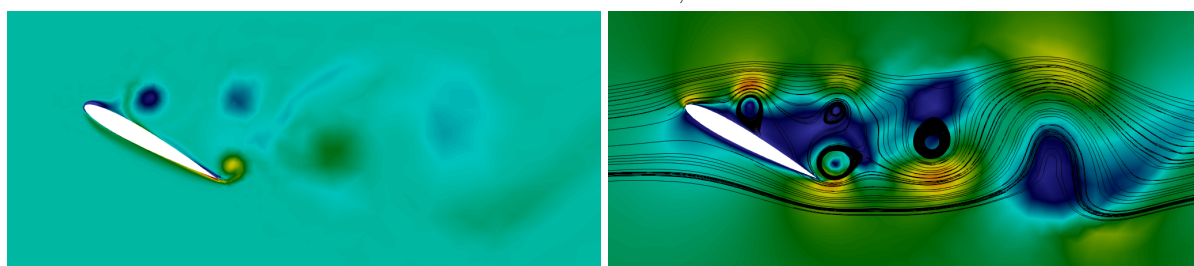
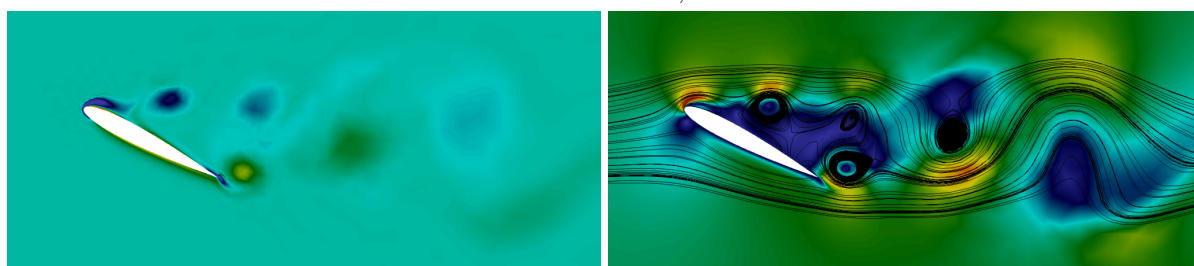
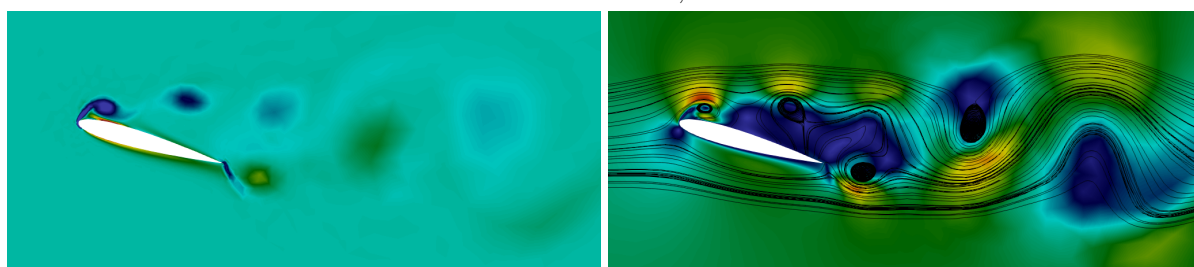
(b) Coeficiente de sustentação.

Fonte: Presente trabalho (2024).

Figura 47 – Aerofólio com movimento de arfagem - Campos de vorticidade e de velocidade.

Campo de vorticidade.

Campo de velocidade.

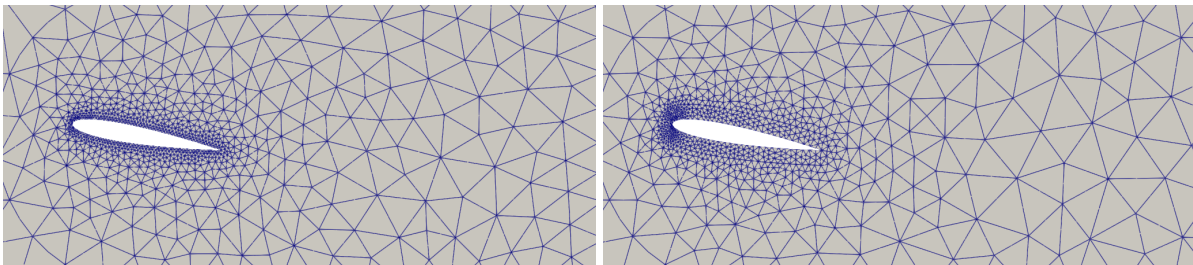
Instante $t = 8,0$.Instante $t = 8,2$.Instante $t = 8,4$.Instante $t = 8,6$.Instante $t = 8,8$.

Fonte: Presente trabalho (2024).

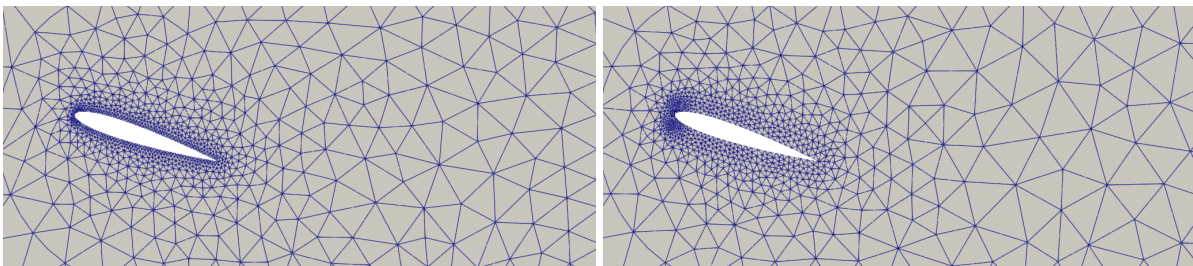
Figura 48 – Aerofólio com movimento de arfagem - Configuração da malha em frações de oscilação.

Malha m1.

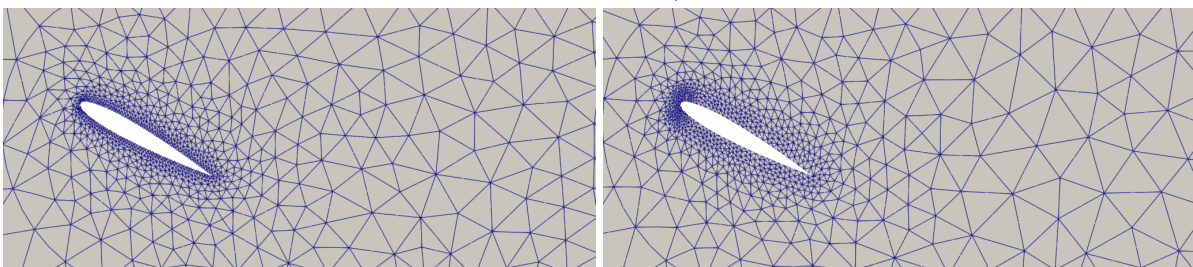
Malha m2.



Instante $t = 8,0$.



Instante $t = 8,2$.



Fonte: Presente trabalho (2024).

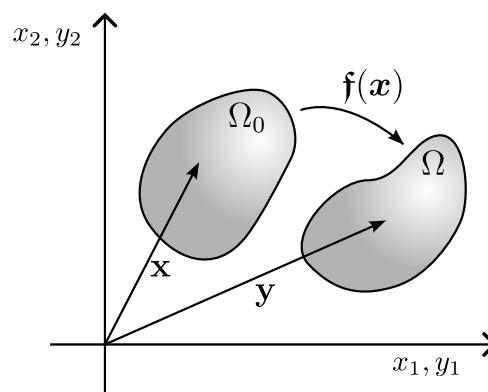
3 ANÁLISE NUMÉRICA PARA DINÂMICA NÃO LINEAR DOS SÓLIDOS

O presente capítulo apresenta brevemente a formulação matemática e a análise numérica para a solução de problemas de dinâmica não linear dos sólidos. Para tal, são apresentados os conceitos fundamentais da mecânica dos sólidos deformáveis (Seção 3.1), o equacionamento da quantidade de movimento segundo a descrição Lagrangiana Total, o que culmina na equação do equilíbrio local nessa descrição (Seção 3.2), o Princípio da Estacionariedade da Energia, onde são apresentadas as parcelas de energia consideradas nas análises, *i.e.* a energia de deformação, a energia potencial devido às forças externas e a energia cinética (Seção 3.3), e a formulação do método dos elementos finitos para a solução de problemas de dinâmica não linear dos sólidos utilizando elementos de casca a partir da cinemática de Reissner-Mindlin (Seção 3.4). Por fim, são apresentados exemplos numéricos para ilustrar a aplicação dos conceitos apresentados (Seção 3.5).

3.1 Cinemática para sólidos deformáveis

Seja considerado um corpo deformável, idealizado como um meio contínuo que, em sua configuração inicial seu domínio é denotado por Ω_0 e em sua configuração atual é denotado por Ω , conforme ilustrado na Figura 49. Para se mapear os pontos que compõem o corpo em relação a uma origem preestabelecida utiliza-se \mathbf{x} e \mathbf{y} como sendo as coordenadas de Ω_0 e Ω , respectivamente. Já para se mapear as coordenadas atuais de cada ponto \mathbf{y} , em função da coordenada inicial \mathbf{x} , emprega-se a função mudança de configuração \mathbf{f} tal que $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Figura 49 – Configurações inicial e atual de um corpo deformável.



Fonte: Presente trabalho (2024).

Para um ponto \mathbf{x} na vizinhança de \mathbf{x}_0 , pode-se dizer que:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}|_{\mathbf{x}_0} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.1)$$

em que $\mathfrak{F} = \nabla_x \mathbf{f}$ é o gradiente de mudança de configuração na referência Lagrangiana. Assim, pode-se obter uma expressão que transforme um vetor $d\mathbf{x}$ na configuração inicial em um vetor $d\mathbf{y}$ na atual:

$$d\mathbf{y} = \mathfrak{F} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.2)$$

o que permite escrever o quadrado da norma de $d\mathbf{y}$ como:

$$\|d\mathbf{y}\|^2 = dy^2 = d\mathbf{y}^T \cdot d\mathbf{y} = (\mathfrak{F} \cdot d\mathbf{x})^T \cdot (\mathfrak{F} \cdot d\mathbf{x}) = d\mathbf{x}^T \cdot \mathfrak{F}^T \cdot \mathfrak{F} \cdot d\mathbf{x}$$

Subtraindo-se $dx^2 = \|d\mathbf{x}\|^2$ de ambos os lados da igualdade obtém-se:

$$dy^2 - dx^2 = d\mathbf{x}^T \cdot (\mathfrak{F}^T \cdot \mathfrak{F} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.3)$$

em que \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem e $\mathbf{C} = \mathfrak{F}^T \cdot \mathfrak{F}$ é o tensor alongamento à direita de Cauchy-Green. Dessa maneira, pode-se substituir \mathbf{C} em (3.3) e dividir por $2dx^2$, obtendo-se:

$$\frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{x}}{dx^2}.$$

Tomando um versor \mathbf{u} na direção de $d\mathbf{x}$ ($\mathbf{u} = d\mathbf{x} / \|d\mathbf{x}\|$), tem-se que:

$$\frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2} = \mathbf{u}^T \cdot \left(\frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \right) \cdot \mathbf{u}. \quad (3.4)$$

O termo entre parênteses na Eq. (3.4) é uma medida de deformação Lagrangiana e objetiva, ou seja, que não registra deformações em situação de movimento de corpo rígido. Esse termo é conhecido como o tensor de deformação de Green-Lagrange:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (3.5)$$

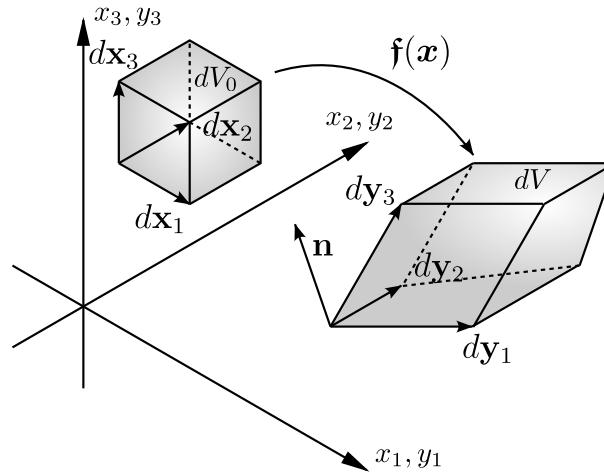
Também é interessante descrever a variação volumétrica durante a mudança de configuração. Para tal, considera-se o elemento infinitesimal em suas configurações inicial e atual ilustrado na Figura 50.

O volume do elemento em ambas as configurações pode ser obtido por meio do produto misto dos vetores que definem o paralelepípedo, ou seja:

$$dV_0 = d\mathbf{x}_1 \cdot (d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3), \quad (3.6a)$$

$$dV = d\mathbf{y}_1 \cdot (d\mathbf{y}_2 \times d\mathbf{y}_3), \quad (3.6b)$$

Figura 50 – Mudança de volume de um elemento infinitesimal.



Fonte: Presente trabalho (2024).

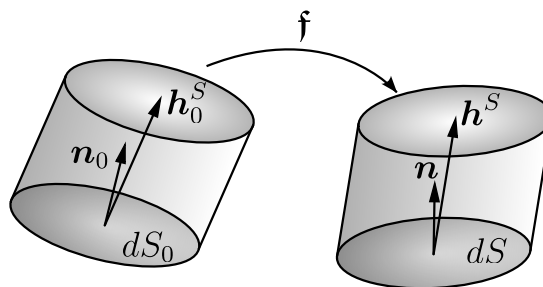
Conhecendo a transformação expressa em (3.2) e fazendo as devidas simplificações obtém-se que:

$$dV = \det(\mathfrak{F})dV_0 = JdV_0, \quad (3.7)$$

em que $J = \det(\mathfrak{F})$ é o Jacobiano da mudança de configuração.

Para completar a descrição cinemática, deve-se ainda descrever a variação das superfícies durante a mudança de configuração. Para tal, considera-se um prisma de base infinitesimal nas configurações inicial e atual, conforme ilustrado na figura 51.

Figura 51 – Mudança de configuração em um prisma infinitesimal.



Fonte: Presente trabalho (2024).

A área vetorial da base, entendida como o valor absoluto da área na direção de sua normal, na configuração inicial é $dS_0 = dS_0\mathbf{n}_0$ e na configuração atual $dS = dS\mathbf{n}$. Logo o volume do cilindro nas configurações inicial e atual é $dV_0 = dS_0 \cdot h_0^S$ e $dV = dS \cdot h^S$. Dessa forma, conhecendo as relações (3.2) e (3.7), pode-se escrever:

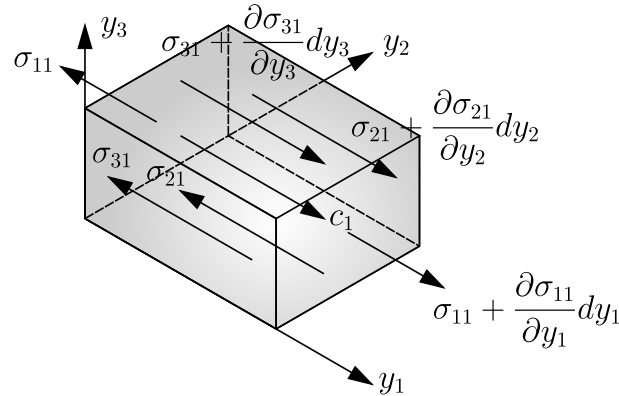
$$\mathbf{n}dS = J\mathfrak{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0dS_0, \quad (3.8)$$

que é conhecida como a Equação de Nanson.

3.2 Equação da quantidade de movimento em descrição Lagrangiana

Para se obter a equação do equilíbrio local de um elemento na descrição Euleriana, considera-se um elemento infinitesimal sujeito à ação de uma força de corpo (ou de volume) c , conforme ilustrado no diagrama de corpo livre da Figura 52, que apresenta somente as componentes de forças atuantes na direção y_1 .

Figura 52 – Forças atuantes em um elemento infinitesimal na direção y_1 .



Fonte: Presente trabalho (2024).

Fazendo o equilíbrio das forças nessa direção, realizando as devidas simplificações e levando-se em conta a Segunda Lei de Newton, tem-se:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_3} + c_1 = \rho \ddot{y}_1,$$

que, expandindo analogamente para as demais direções tem-se:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{c} = \rho \ddot{\mathbf{y}}, \quad (3.9)$$

a qual representa a equação do equilíbrio local na descrição Euleriana.

Integrando a equação (3.9) em Ω e aplicando o teorema da divergência obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{c} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{y}} d\Omega, \quad (3.10)$$

onde $\Gamma = \partial\Omega$ é a fronteira do domínio de análise. Essa equação representa o equilíbrio global na descrição Euleriana.

Já para se obter uma descrição Lagrangiana Total, é necessário transformar os termos dependentes da configuração atual para outros dependentes da configuração inicial. Assim, pode-se reescrever a Equação (3.10) levando em consideração as Equações (3.7) e (3.8):

$$\int_{\Gamma_0} J \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\mathfrak{F}}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} J \mathbf{c} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} J \rho \ddot{\mathbf{y}} d\Omega_0. \quad (3.11)$$

Sendo $\mathbf{c}^0 = J\mathbf{c}$ as forças de corpo na configuração inicial, $\rho_0 = J\rho$ a densidade inicial e $\mathbf{P} = J\mathfrak{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ o primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, tem-se que:

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{n}_0 d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{c}^0 d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} d\Omega_0, \quad (3.12)$$

que representa a equação global da quantidade de movimento na descrição Lagrangiana Total.

Retornando a integral sob a fronteira Γ_0 para Ω_0 por meio do Teorema da Divergência, considerando-se continuidade, escreve-se a forma local da equação da quantidade de movimento na descrição Lagrangiana Total:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{c}^0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{y}}. \quad (3.13)$$

3.3 Princípio da estacionariedade da energia

Em se tratando de sólidos de comportamento hiperelástico, dada a natureza das leis constitutivas e à adequação da descrição Lagrangiana, é conveniente o uso de abordagens energéticas de modo a obter o equacionamento em forma fraca, seguido da aplicação da técnica de elementos finitos e de processos para solução numérica do sistema resultante. Para tal, deve-se primeiramente definir a energia total (Π) de um sistema, que pode ser entendida como a soma de todas as parcelas de energia relevantes ao problema. Nos casos mais comuns da mecânica dos sólidos, tem-se uma parcela de energia potencial das forças externas atuantes no corpo (\mathbb{P}), uma parcela de energia de deformação elástica (\mathbb{U}) e uma parcela de energia cinética (\mathbb{K}). Dessa forma, o funcional de energia total é dado por:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K}. \quad (3.14)$$

Busca-se encontrar a configuração de equilíbrio do sólido, e para tal, a conservação da energia deve ser respeitada. Dessa forma postula-se o primeiro teorema variacional, que aponta que, para que haja equilíbrio em um sólido sujeito a forças externas conservativas, a primeira variação da energia total deve ser nula para qualquer variação admissível nas incógnitas do problema (Φ), ou seja:

$$\delta^{(1)}\Pi = 0 \forall \delta\Phi | \delta\Phi = 0 \text{ em } \Gamma_D, \quad (3.15)$$

em que Γ_D é a parcela da fronteira onde os deslocamentos são prescritos. Já o segundo teorema trata-se da estabilidade desse equilíbrio, onde para se atingir o equilíbrio estável a segunda variação da energia total deve ser positiva para qualquer variação admissível, ou seja:

$$\delta^{(2)}\Pi > 0 \forall \delta\Phi | \delta\Phi = 0 \text{ em } \Gamma_D. \quad (3.16)$$

Sendo assim, primeiramente procura-se anular a primeira variação da energia total:

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{K} = 0, \quad (3.17)$$

o que leva à necessidade de se determinar a primeira variação das parcelas envolvidas.

3.3.1 Energia de deformação elástica

Para a determinação da energia de deformação elástica, é necessária a consideração de um modelo constitutivo que permita, juntamente com as demais equações da cinemática do modelo estrutural, descrever a evolução da energia de deformação em função das variáveis principais do problema.

Um modelo constitutivo capaz de representar diversos materiais elásticos em regime de deformações pequenas a moderadas é o de Saint-Venant-Kirchhoff, dado por, para o qual a energia de deformação específica (por unidade de volume) é dada por:

$$u_e^{\text{SVK}} = \frac{\mathbf{S} : \mathbf{E}}{2}, \quad (3.18)$$

no qual \mathbf{S} é o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, calculado como:

$$\mathbf{S} = \mathfrak{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = J\mathfrak{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathfrak{F}^{-T}, \quad (3.19)$$

Ou ainda, da Eq. (3.18), nota-se que \mathbf{S} é energeticamente conjugado da deformação de Green, tal que:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial u_e^{\text{SVK}}}{\partial \mathbf{E}} = \boldsymbol{\mathfrak{C}} : \mathbf{E}, \quad (3.20)$$

sendo $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$ o tensor constitutivo de quarta ordem:

$$\boldsymbol{\mathfrak{C}} = 2G\mathbb{I} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (3.21)$$

em que ν é o coeficiente de Poisson e G é o módulo de elasticidade transversal, dado em função do módulo de elasticidade longitudinal (ou Módulo de Young) E como:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.22)$$

Assim, a parcelas de energia de deformação fica:

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \mathbf{E} d\Omega_0. \quad (3.23)$$

onde Ω_0 é o domínio de análise em sua configuração inicial.

A primeira variação da energia de deformação pode ser obtida como:

$$\delta\mathbb{U} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \delta[\mathbf{S} : \mathbf{E}] d\Omega_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (\mathbf{S} : \delta\mathbf{E} + \mathbf{E} : \delta\mathbf{S}) d\Omega_0. \quad (3.24)$$

Substituindo $\delta\mathbf{S}$ a partir modelo constitutivo apresentado em (3.20) tem-se:

$$\delta\mathbb{U} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (\mathbf{S} : \delta\mathbf{E} + \mathbf{E} : \mathbf{c} : \delta\mathbf{E}) d\Omega_0. \quad (3.25)$$

Devido à simetria do tensor constitutivo, é possível reescrever a equação acima como:

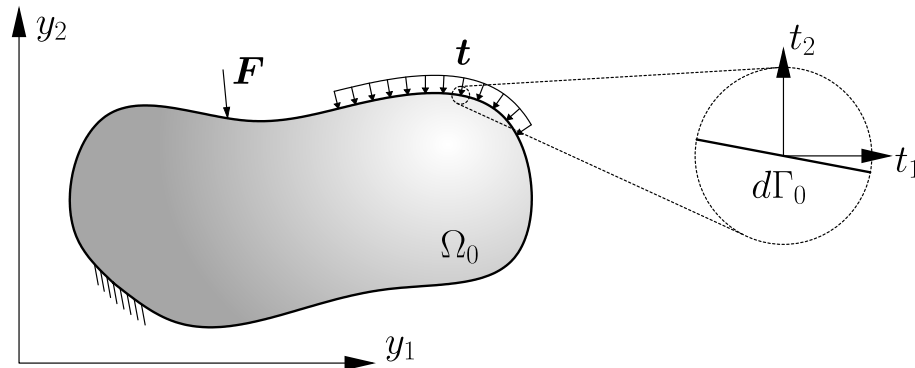
$$\delta\mathbb{U} = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} d\Omega_0, \quad (3.26)$$

a qual representa a primeira variação da energia de deformação.

3.3.2 Energia potencial das forças externas

Seja um corpo deformável submetido a um campo de forças externas conservativas apresentado na Figura 53.

Figura 53 – Corpo submetido a forças conservativas concentradas e distribuídas.



Fonte: Presente trabalho (2024).

Nesse cenário a energia potencial de uma força externa concentrada é definida como a capacidade de realizar trabalho. Assim, a energia potencial de uma força concentrada \mathbf{F}_a aplicada sobre um nó a , cuja posição atual é \mathbf{Y}_a , é dada por:

$$\mathbb{P}_a = -\mathbf{F}_a \cdot \mathbf{Y}_a. \quad (3.27)$$

No caso ilustrado pela figura 53, o corpo encontra-se em um espaço bidimensional, porém a formulação permanece válida para espaços tridimensionais. Além disso, caso haja a aplicação de duas ou mais forças concentradas, a energia potencial total é a soma das parcelas de cada força.

Já para forças distribuídas, considera-se um elemento infinitesimal da superfície do corpo sujeito a uma força distribuída \mathbf{t} . Dessa forma se obtém um infinitesimal de força dado por:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{t}d\Gamma_0, \quad (3.28)$$

em que $d\Gamma_0$ é a área do elemento na configuração inicial. Portanto a energia potencial de um infinitésimo de força é dada por:

$$d\mathbb{P} = -\mathbf{t} \cdot \mathbf{y}d\Gamma_0. \quad (3.29)$$

Assim, somando-se a contribuição de todos os infinitésimos de energia potencial, a energia potencial total das forças distribuídas é dada por:

$$\mathbb{P} = - \int_{\Gamma_0} \mathbf{t} \cdot \mathbf{y}d\Gamma_0. \quad (3.30)$$

Desprezando-se a contribuição de forças de corpo, a energia potencial total das forças externas é dada por:

$$\mathbb{P} = -\mathbf{F}_a \cdot \mathbf{Y}_a - \int_{\Gamma_0} \mathbf{t} \cdot \mathbf{y}d\Gamma_0. \quad (3.31)$$

A primeira variação da energia potencial das forças externas é obtida como:

$$\delta\mathbb{P} = -\mathbf{F}_a \cdot \delta\mathbf{Y}_a - \int_{\Gamma_0} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{y}d\Gamma_0. \quad (3.32)$$

3.3.3 Energia cinética

O termo à direita da Eq. (3.13) pode ser entendido como a parcela de forças de inércia por unidade de volume atuantes sobre um ponto do corpo. Logo, ao considerar um volume infinitesimal $d\Omega_0$ do corpo, as forças inerciais atuantes sobre esse volume são dadas por:

$$d\mathbf{f}^{\text{inerc}} = \rho_0\ddot{\mathbf{y}}d\Omega_0. \quad (3.33)$$

Dessa maneira, após transcorrido um intervalo de tempo infinitesimal dt esse elemento terá percorrido uma distância $d\mathbf{y}$. Assim, o trabalho realizado pelo elemento devido à força inercial nesse intervalo de tempo ($d\mathbb{W}$) é dado por:

$$d\mathbb{W} = \rho_0\ddot{\mathbf{y}} \cdot d\mathbf{y}d\Omega_0 = \rho_0\ddot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}}dtd\Omega_0 = \rho_0d\dot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}}d\Omega_0. \quad (3.34)$$

Note que $d\dot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} = d(\dot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}})/2$, então:

$$d\mathbb{W} = \rho_0 \frac{d(\dot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}})}{2} d\Omega_0. \quad (3.35)$$

Portanto, a partir do teorema do trabalho-energia, a energia cinética é obtida integrando $d\mathbb{W}$ resultando em:

$$\mathbb{K} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} d\Omega_0. \quad (3.36)$$

Com isso, pode-se obter a primeira variação da energia cinética como:

$$\delta\mathbb{K} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 \delta[\dot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}}] d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{\mathbf{y}} \cdot \delta\dot{\mathbf{y}} d\Omega_0, \quad (3.37)$$

o que resulta em:

$$\delta\mathbb{K} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{\mathbf{y}} \cdot \delta\dot{\mathbf{y}} d\Omega_0. \quad (3.38)$$

3.4 Método dos elementos finitos posicional aplicado a elementos de casca

Os elementos de casca podem ser entendidos como elementos estruturais definidos por uma superfície média 3D, e cuja dimensão perpendicular a essa superfície é muito menor que as demais. Assim, é possível tomar como referência a superfície média do elemento para mapear os pontos que o compõem, facilitando a descrição.

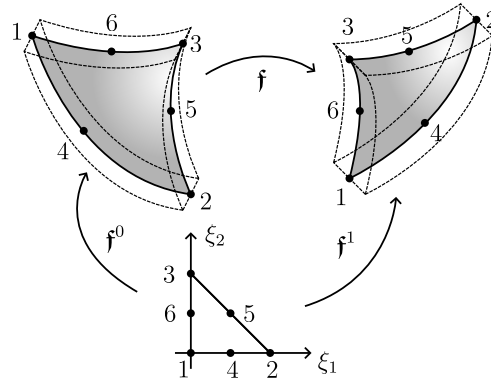
A formulação apresentada a seguir segue a cinemática de Reissner-Mindlin, levando em consideração, de maneira aproximada, as deformações causadas pelas tensões de cisalhamento nas direções transversais ao elemento. Essa formulação de elementos finitos baseada em posições foi proposta por Coda e Paccola (2007), já tendo sido aplicada com sucesso ao contexto da interação fluido-estrutura por Sanches (2011), Sanches e Coda (2013) e Fernandes, Coda e Sanches (2019).

3.4.1 Cinemática de Reissner-Mindlin

As configurações inicial a atual de um elemento de casca podem ser descritas mapeando-se um elemento definido em um espaço de coordenadas paramétricas adimensionais (ξ), onde o mesmo encontra-se plano e com medidas adimensionais unitárias. Para tal, empregam-se as funções de forma polinomiais definidas no espaço de coordenadas ξ , como ilustrado na Figura 54.

Realiza-se primeiramente o mapeamento dos pontos da superfície média do elemento na configuração auxiliar para a configuração inicial de coordenadas x^m e para a configuração atual, de coordenadas y^m , por meio de:

Figura 54 – Mudança de configuração para um elemento de casca.



Fonte: Presente trabalho (2024).

$$\mathbf{f}^{m0} = \mathbf{x}^m = \mathbf{X}_a N_a(\xi_1, \xi_2), \quad (3.39a)$$

$$\mathbf{f}^{m1} = \mathbf{y}^m = \mathbf{Y}_a N_a(\xi_1, \xi_2), \quad (3.39b)$$

onde \mathbf{f}^{m0} e \mathbf{f}^{m1} são as funções de mapeamento da superfície média para as configurações inicial e atual, respectivamente, \mathbf{X}_a e \mathbf{Y}_a são as coordenadas dos nós a , pertencentes à superfície média nas configurações inicial e atual, respectivamente, e $N_a(\xi_1, \xi_2)$ é a função de forma associada ao nó a .

Já os pontos fora da superfície média, são mapeados com auxílio de vetores generalizados \mathbf{v}^0 e \mathbf{v}^1 , sendo as funções de mapeamento para qualquer ponto, para as configurações inicial e atual, dadas por:

$$\mathbf{f}^0 = \mathbf{x}^m(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{v}^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \text{ e} \quad (3.40a)$$

$$\mathbf{f}^1 = \mathbf{y}^m(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{v}^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (3.40b)$$

onde \mathbf{v}^0 é normal à superfície média inicial ao ponto mapeado, e enquanto \mathbf{v}^1 é o vetor, não necessariamente normal à superfície média, que liga o ponto da superfície média de coordenadas (ξ_1, ξ_2) ao ponto mapeado na configuração atual. Empregando-se as mesmas funções de forma do elemento plano para representar esses vetores, escrevem-se as aproximações:

$$\mathbf{v}^0 = \frac{h_0}{2} \mathbf{w}^0 \xi_3 \text{ e} \quad (3.41a)$$

$$\mathbf{v}^1 = \frac{h_0}{2} \mathbf{w}^1 [\xi_3 + \alpha \xi_3^2], \quad (3.41b)$$

sendo h_0 a espessura inicial da casca, \mathbf{w}^0 e \mathbf{w}^1 os vetores generalizados adimensionais na configuração inicial e atual, respectivamente, e α é um enriquecimento nodal inserido ao problema

com a finalidade de evitar travamento volumétrico, o qual representa a taxa de variação linear da deformação na direção da espessura. Essas variáveis podem ser aproximadas via funções de forma como:

$$\mathbf{w}^0(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{V}_a^0 N_a(\xi_1, \xi_2), \quad (3.42a)$$

$$\mathbf{w}^1(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{V}_a^1 N_a(\xi_1, \xi_2) \text{ e} \quad (3.42b)$$

$$\alpha(\xi_1, \xi_2) = A_a N_a(\xi_1, \xi_2), \quad (3.42c)$$

em que \mathbf{V}_a^0 , \mathbf{V}_a^1 e A_a são os valores nodais das variáveis associados ao nó a (Sanches; Coda, 2013; Sanches; Coda, 2014). É importante notar que \mathbf{w}^0 é unitário e normal à superfície média, enquanto \mathbf{w}^1 não é mais necessariamente normal à superfície média nem unitário.

Sendo assim, o problema possui como graus de liberdade as posições nodais atuais da superfície média (\mathbf{Y}_a), os valores nodais do vetor generalizado adimensional na configuração atual (\mathbf{V}_a^1) e o valor nodal da taxa de variação linear de deformação na direção da espessura (A_a).

Para se determinar o gradiente da função mudança de configuração $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}^1((\mathbf{f}^0)^{-1}, t)$, inicia-se com o cálculo dos gradientes das funções de mapeamento \mathbf{f}^0 e \mathbf{f}^1 , definidas nas Eqs. (3.43):

$$\mathfrak{F}^0 = \nabla_{\xi} \mathbf{f}^0 \text{ e} \quad (3.43a)$$

$$\mathfrak{F}^1 = \nabla_{\xi} \mathbf{f}^1, \quad (3.43b)$$

de modo que o gradiente \mathfrak{F} é obtido por:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^1 \cdot (\mathfrak{F}^0)^{-1}. \quad (3.44)$$

Deste ponto em diante, é possível calcular a deformação de Green em qualquer ponto da discretização por elementos de casca, bem como todos os termos do funcional de energia da Eq. (3.14).

Considerando-se o princípio da conservação da energia, tem-se que:

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi_0}{\partial \Phi} \cdot \delta \Phi = 0, \quad (3.45)$$

em que Φ representa o vetor que contém todas as finitas variáveis do problema espacialmente discreto. Dada a arbitrariedade de $\delta \Phi$, o princípio da estacionariedade da energia escrito em função das posições nodais e vetores generalizados fica:

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \mathbf{Y}_a} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{Y}_a} + \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} N_a d\Omega_0 - \mathbf{F}_a - \int_{\Gamma_0} \mathbf{t} N_a d\Gamma_0 = \mathbf{0}, \quad (3.46a)$$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \mathbf{V}_a^1} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{V}_a^1} + \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{h_0}{2} (\xi_3 + \alpha \xi_3^2) \dot{\mathbf{y}} N_a d\Omega_0 = \mathbf{0}, \quad (3.46b)$$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial A^a} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial A^a} + \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{h_0}{2} N_a \xi_3^2 (\mathbf{w}^1 \cdot \dot{\mathbf{y}}) d\Omega_0 = 0, \quad (3.46c)$$

sendo possível definir um vetor resíduo $\boldsymbol{\epsilon}$, que pode ser interpretado como um vetor de desbalançamento mecânico, como:

$$\boldsymbol{\epsilon}_a(\mathbf{Y}_b, \mathbf{V}_b^1, A_b) = \mathbf{F}_a^{\text{int}} + \mathbf{F}_a^{\text{inerc}} - \mathbf{F}_a^{\text{ext}} = \mathbf{0}, \quad (3.47)$$

em que $\mathbf{F}_a^{\text{int}}$ o vetor nodal equivalente de forças internas, $\mathbf{F}_a^{\text{inerc}}$ o vetor nodal equivalente de forças inerciais e $\mathbf{F}_a^{\text{ext}}$ o vetor nodal equivalente de forças externas, assumidas conservativas, tal que:

$$\mathbf{F}_a^{\text{int}} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial u_e}{\partial \Phi_a} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \Phi_a} d\Omega_0, \quad (3.48a)$$

$$\mathbf{F}_a^{\text{inerc}} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{\mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \Phi_a} d\Omega_0 \mathbf{e} \quad (3.48b)$$

$$\mathbf{F}_a^{\text{ext}} = \mathbf{F}_b \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}_b}{\partial \Phi_a} + \int_{\Gamma_0} \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}^m}{\partial \Phi_a} d\Gamma_0. \quad (3.48c)$$

Portanto o problema a ser resolvido é descrito como: para todos os nós a e b , determinar \mathbf{Y}_b , \mathbf{V}_b^1 e A_b tais que $\boldsymbol{\epsilon}_a(\mathbf{Y}_b, \mathbf{V}_b^1, A_b) = \mathbf{0}$.

Como é possível perceber, o cálculo de $\boldsymbol{\epsilon}_a$ é dependente não somente dos graus de liberdade, mas também das derivadas temporais de \mathbf{y} . Sendo assim, se faz necessária a consideração de um integrador temporal, o qual será utilizado o integrador α -generalizado, conforme apresentado em 2.3.4. Assim, se faz a aproximação das posições e suas derivadas temporais em um instante intermediário como:

$$\mathbf{y}^{n+\alpha_f} = \mathbf{y}^n + \alpha_f (\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n), \quad (3.49a)$$

$$\dot{\mathbf{y}}^{n+\alpha_f} = \dot{\mathbf{y}}^n + \alpha_f (\dot{\mathbf{y}}^{n+1} - \dot{\mathbf{y}}^n) \mathbf{e} \quad (3.49b)$$

$$\ddot{\mathbf{y}}^{n+\alpha_m} = \ddot{\mathbf{y}}^n + \alpha_m (\ddot{\mathbf{y}}^{n+1} - \ddot{\mathbf{y}}^n). \quad (3.49c)$$

A aproximação para \mathbf{y} e sua primeira derivada temporal $\dot{\mathbf{y}}$ em um instante $n + 1$ são obtidas a partir da aproximação de Newmark:

$$\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{y}^n + \dot{\mathbf{y}}^n \Delta t + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{y}}^n + \beta \ddot{\mathbf{y}}^{n+1} \right) \mathbf{e} \quad (3.50a)$$

$$\dot{\mathbf{y}}^{n+1} = \dot{\mathbf{y}}^n + \Delta t \left((1 - \gamma) \ddot{\mathbf{y}}^n + \gamma \ddot{\mathbf{y}}^{n+1} \right), \quad (3.50b)$$

na qual Δt o passo de tempo discreto, e β e γ parâmetros calculados de forma a garantir a precisão de segunda ordem e estabilidade incondicional do método como (Chung; Hulbert, 1993):

$$\beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_f) \mathbf{e} \quad (3.51a)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_f + \alpha_m. \quad (3.51b)$$

Dessa forma, as forças nodais equivalentes são reescritas como:

$$\mathbf{F}_a^{\text{int}} = \int_{\Omega_0} \mathbf{S}^{n+\alpha_f} : \frac{\partial \mathbf{E}^{n+\alpha_f}}{\partial \Phi_a} d\Omega_0, \quad (3.52a)$$

$$\mathbf{F}_a^{\text{inerc}} = \alpha_f \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{\mathbf{y}}^{n+\alpha_m} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}^{n+1}}{\partial \Phi_a} d\Omega_0 \mathbf{e} \quad (3.52b)$$

$$\mathbf{F}_a^{\text{ext}} = \alpha_f \mathbf{F}_b \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}_b^{n+1}}{\partial \Phi_a} + \alpha_f \int_{\Gamma_0} \mathbf{t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{y}^m)^{n+1}}{\partial \Phi_a} d\Gamma_0, \quad (3.52c)$$

em que a derivada da medida de deformação $\mathbf{E}^{n+\alpha_f}$ em relação aos graus de liberdade é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{E}^{n+\alpha_f}}{\partial \Phi_a} = \frac{\alpha_f}{2} \left((\mathfrak{F}^{n+\alpha_f})^T \cdot \frac{\partial \mathfrak{F}^{n+1}}{\partial \Phi_a} + \frac{\partial (\mathfrak{F}^{n+1})^T}{\partial \Phi_a} \cdot \mathfrak{F}^{n+\alpha_f} \right). \quad (3.53)$$

Já para procurar valores de Φ que anulem ϵ , utiliza-se o Método de Newton-Raphson, o qual parte da aproximação por série de Taylor truncada no termo de primeira ordem:

$$\epsilon(\Phi + \Delta \Phi) = \epsilon(\Phi) + \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \Phi} \right|_{\Phi} \cdot \Delta \Phi = 0. \quad (3.54)$$

Dessa forma, necessita-se do cálculo de uma matriz Hessiana (\mathbf{H}_{ab}):

$$\mathbf{H}_{ab} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \Phi_a \otimes \partial \Phi_b} = \frac{\partial \epsilon_a}{\partial \Phi_b}. \quad (3.55)$$

Substituindo-se as derivadas temporais do integrador α -generalizado em ϵ e realizando as devidas simplificações, pode-se escrever, em notação indicial:

$$\begin{aligned}
H_{ij}^{ab} = & \int_{\Omega_\alpha} \left(\frac{\partial S_{kl}^{n+\alpha_f}}{\partial \Phi_j^b} \frac{\partial E_{kl}^{n+\alpha_f}}{\partial \Phi_i^a} + S_{kl}^{n+\alpha_f} \frac{\partial^2 E_{kl}^{n+\alpha_f}}{\partial \Phi_i^a \partial \Phi_j^b} \right) d\Omega_\alpha + \\
& \frac{\alpha_m \alpha_f}{\beta \Delta t} \int_{\Omega_\alpha} \rho_0 \frac{\partial y_k^{n+1}}{\partial \Phi_j^b} \frac{\partial y_k^{n+1}}{\partial \Phi_i^a} d\Omega_\alpha + \alpha_f \int_{\Omega_\alpha} \rho_0 \frac{\partial^2 y_k^{n+1}}{\partial \Phi_i^a \partial \Phi_j^b} \ddot{y}_k^{n+\alpha_m} d\Omega_\alpha.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Note que a derivada mista de y_k^{n+1} em relação a Φ_i^a e Φ_j^b só possuirá valores não-nulos apenas quando for derivada de forma cruzada em relação a V^1 e A.

Com isso, encontra-se um vetor de correções dos graus de liberdade ($\Delta\Phi$) como a solução do sistema:

$$H\Delta\Phi = -\epsilon, \tag{3.57}$$

tendo como medida de convergência:

$$\frac{\|\Delta\mathbf{Y}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq \text{tol}, \tag{3.58}$$

em que \mathbf{X} o vetor de posições nodais iniciais e tol uma tolerância admitida.

Assim, o algoritmo utilizado para solução do elemento de casca é dado pelo pseudocódigo 2.

3.5 Exemplos de verificação

Para o melhor conhecimento e para verificação do código a ser utilizado para a dinâmica das estruturas, foram selecionados e simulados os problemas estáticos de *Scordelis-Lo roof* e de um cilindro elástico biengastado, e os problemas dinâmicos de uma viga em balanço e de uma viga bi-engastada submetidas a carregamento de impacto.

Deve-se notar que as análises não têm por finalidade validar o programa de casca, uma vez que este é apenas uma ferramenta utilizada neste trabalho e que já foi validado e testado em outros trabalhos do grupo.

3.5.1 Problema de *Scordelis-Lo roof*

O primeiro exemplo simulado trata-se de um problema comumente empregado para validação de programas para análise de cascas, denominado de *Scordelis-Lo roof*, conforme ilustrado na Figura 55. Esse exemplo se caracteriza por uma cobertura curva sujeita a um carregamento gravitacional q , distribuído por unidade de área, na direção x_3 para baixo. Os parâmetros geométricos adimensionais adotados são: comprimento $L = 50$, raio de curvatura $R = 25$, espessura $t = 0,25$ e ângulo $\theta = 40^\circ$. O valor da carga adimensional aplicada é $q = 90$. O material que constitui a cobertura possui módulo de Young adimensional $E = 4,32 \times 10^8$ e

Algoritmo 2: Algoritmo utilizado para o cálculo das posições nodais.

Resultado: Vetor global de graus de liberdade

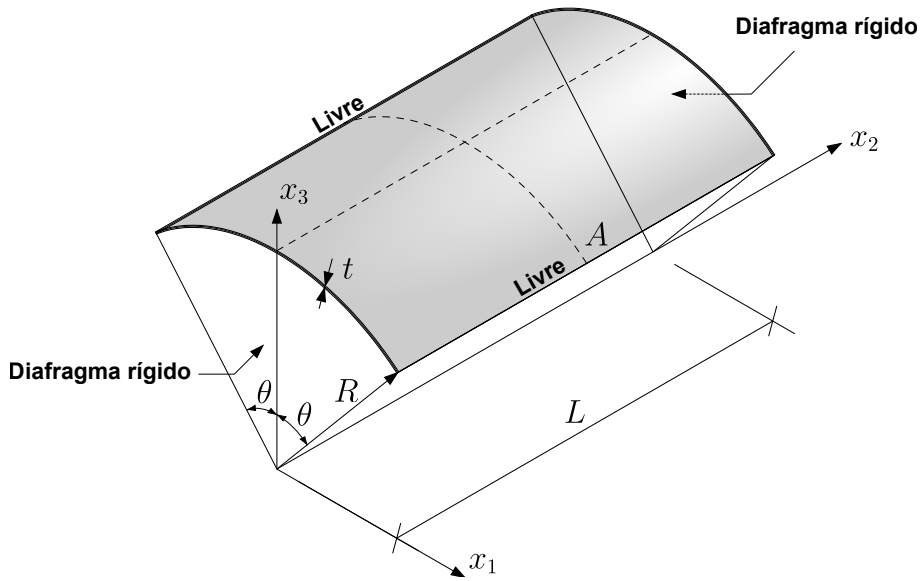
- 1 Previsão inicial: $\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}$;
- 2 **para** $t_i \leftarrow 0$ **até** t_f **faça**
- 3 **para cada** passo de carga **faça**
- 4 **para cada** elemento **faça**
- 5 **para cada** nó a do elemento **faça**
- 6 Somar contribuição de $\mathbf{F}_a^{\text{ext}}$ (3.48c) sobre o vetor global;
- 7 **fim**
- 8 **fim**
- 9 Somar a contribuição das forças concentradas sobre o vetor global;
- 10 **para cada** iteração de Newton-Raphson **faça**
- 11 **para cada** elemento **faça**
- 12 Interpolar variáveis em Ω_a ;
- 13 Calcular \mathfrak{F}^0 , $(\mathfrak{F}^0)^{-1}$, $(\mathfrak{F}^1)^{n+1}$ e $(\mathfrak{F}^1)^{n+\alpha_f}$;
- 14 Calcular $\mathfrak{F}^{n+1} = (\mathfrak{F}^1)^{n+1} \cdot (\mathfrak{F}^0)^{-1}$ e $\mathfrak{F}^{n+\alpha_f} = (\mathfrak{F}^1)^{n+\alpha_f} \cdot (\mathfrak{F}^0)^{-1}$;
- 15 Calcular $\mathbf{C}^{n+1} = (\mathfrak{F}^{n+1})^T \cdot \mathfrak{F}^{n+1}$ e $\mathbf{C}^{n+\alpha_f} = (\mathfrak{F}^{n+\alpha_f})^T \cdot \mathfrak{F}^{n+\alpha_f}$;
- 16 Calcular $\mathbf{E}^{n+\alpha_f}$ (3.5) e $\mathbf{S}^{n+\alpha_f}$ (3.20);
- 17 **para cada** nó a do elemento **faça**
- 18 Calcular $\partial \mathbf{y}^{n+1} / \partial \Phi_a$, $\partial \mathfrak{F}^{n+1} / \partial \Phi_a$, $\partial \mathbf{E}^{n+\alpha_f} / \partial \Phi_a$ e $\partial \mathbf{S}^{n+\alpha_f} / \partial \Phi_a$;
- 19 Calcular ϵ_a e somar a contribuição no vetor global;
- 20 **para cada** nó b do elemento **faça**
- 21 Calcular \mathbf{H}_{ab} (3.56) e somar contribuição na matriz global;
- 22 **fim**
- 23 **fim**
- 24 **fim**
- 25 Resolver o sistema global: $\mathbf{H}^k \Delta \Phi^k = -\epsilon^k$;
- 26 Atualizar os valores nodais: $\Phi^{k+1} \leftarrow \Phi^k + \Delta \Phi^k$;
- 27 Atualizar derivadas temporais;
- 28 Cálculo da medida de convergência (3.58);
- 29 **fim**
- 30 **fim**
- 31 Atualização dos valores passados;
- 32 **fim**

coeficiente de Poisson nulo. As extremidades estão presas por um diafragma rígido ($u_1 = u_3 = 0$). Os resultados são comparados com os obtidos por Belytschko *et al.* (1985), Zhou *et al.* (2022), Chau-Dinh (2023), os quais apontam que o deslocamento vertical do nó A é de 0,3024.

Para a simulação, aproveitou-se da simetria da cobertura, o que possibilita a modelagem de apenas um quarto do problema. Assim utiliza-se uma malha estruturada com orientação à esquerda contendo 512 elementos triangulares de aproximação quadrática, resultando em 7623 graus de liberdade. A malha é apresentada na Figura 56. O problema foi considerado em pequenos deslocamentos e deformações, ou seja, utilizou-se somente uma iteração de Newton-Raphson.

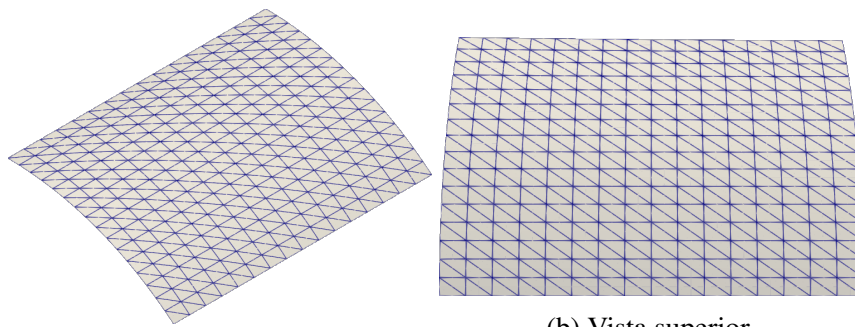
O deslocamento máximo obtido na análise é de 0,2997, representando um desvio de

Figura 55 – Scordelis-Lo roof - Desenho esquemático.



Fonte: Presente trabalho (2024).

Figura 56 – Scordelis-Lo roof - Malha utilizada.



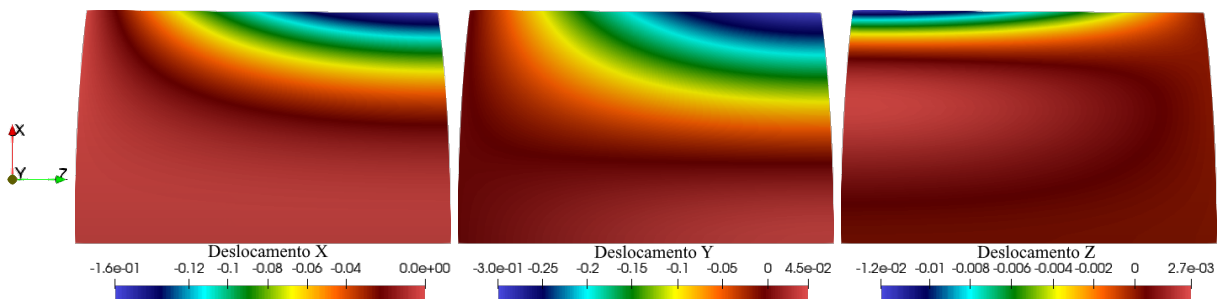
(a) Perspectiva isométrica.

(b) Vista superior.

Fonte: Presente trabalho (2024).

0,8965% em relação à referência. A Figura 57 apresenta o campo de deslocamentos obtido para um quadrante da cobertura.

Figura 57 – Scordelis-Lo roof - Campos de deslocamentos obtidos.



Fonte: Presente trabalho (2024).

Assim, observa-se que tais campos estão muito semelhantes aos apresentados por Zhou *et al.* (2022).

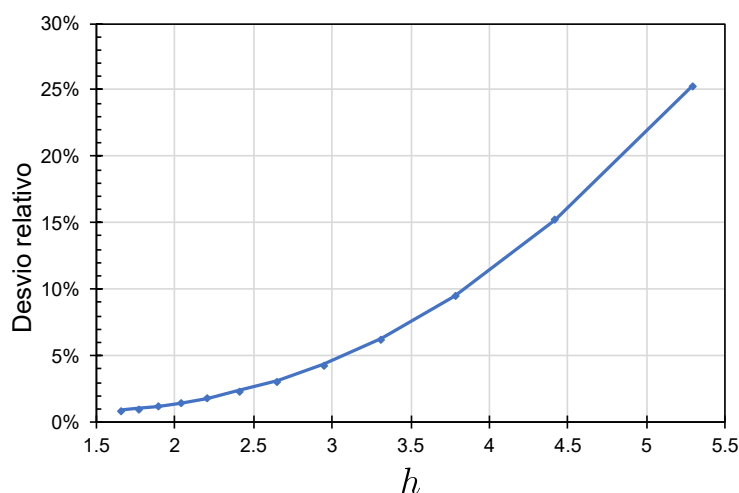
Também realizou-se uma análise quanto à dependência da malha, onde dividiu-se as arestas do problema em N partes. A Tabela 14 apresenta os resultados obtidos, sendo os valores do desvio relativo em função do tamanho do elemento (h) ilustrados na Figura 58.

Tabela 14 – *Scordelis-Lo roof* - Análise da dependência da malha.

N	h	Número de elementos	Graus de liberdade	Calculado	Desvio relativo
5	5,296	50	847	0,2258	25,3287%
6	4,413	72	1183	0,2563	15,2354%
7	3,783	98	1575	0,2736	9,5248%
8	3,310	128	2023	0,2835	6,2563%
9	2,942	162	2527	0,2893	4,3178%
10	2,648	200	3087	0,2930	3,1194%
11	2,407	242	3703	0,2953	2,3479%
12	2,207	288	4375	0,2968	1,8323%
13	2,037	338	5103	0,2979	1,4759%
14	1,891	392	5887	0,2987	1,2219%
15	1,765	450	6727	0,2993	1,0360%
16	1,655	512	7623	0,2997	0,8965%

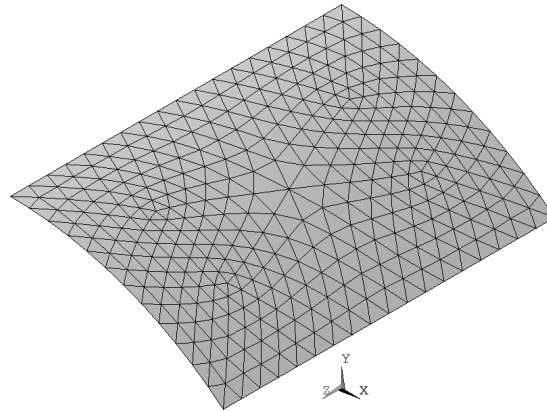
Fonte: Presente trabalho (2024).

Figura 58 – *Scordelis-Lo roof* - Desvio relativo do deslocamento vertical do ponto A em função do tamanho do elemento.

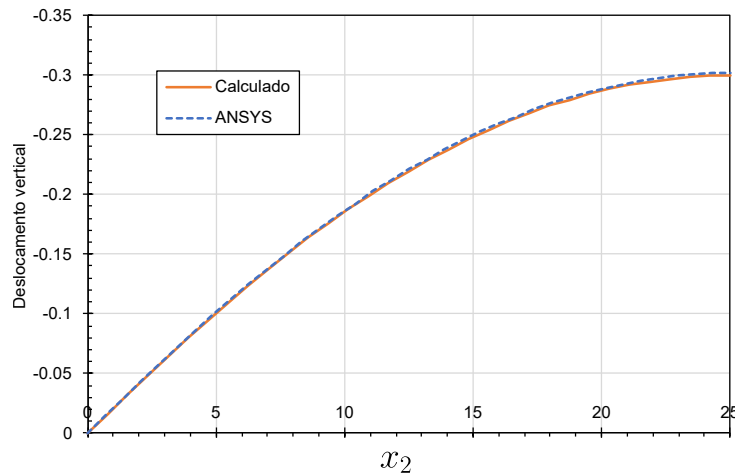


Fonte: Presente trabalho (2024).

Uma análise realizada por meio do *software* ANSYS, empregando-se uma malha com 648 elementos de casca do tipo *Shell 281*, a qual utiliza a cinemática de Reissner-Mindlin, e 1357 nós, resultando 8142 graus de liberdade (ver Fig. 59) resultou em deslocamento vertical máximo de 0,3016, o que representa um desvio relativo de 0,6300% em relação ao calculado pelo código implementado. Além disso, os deslocamentos verticais ao longo da aresta livre da cobertura, obtidos por meio do *software* ANSYS são comparados com os da formulação posicional na Figura 60, mostrando-se muito próximos.

Figura 59 – *Scordelis-Lo roof* - Malha utilizada no ANSYS.

Fonte: ANSYS (2024).

Figura 60 – *Scordelis-Lo roof* - Deslocamento vertical ao longo da aresta livre.

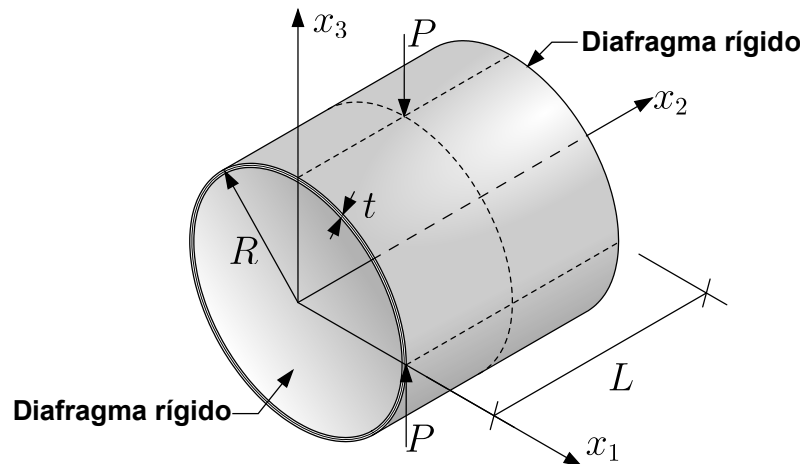
Fonte: Presente trabalho (2024).

3.5.2 Cilindro biengastado em problema estático

Este problema considera um cilindro sujeito a duas cargas concentradas diametralmente opostas, conforme visto na Figura 61. Todas variáveis são consideradas adimensionais, sendo a geometria definida por: comprimento $L = 600$, raio $R = 300$ e espessura $t = 3$. A carga aplicada é unitária ($P = 1$) e o material que constitui o cilindro possui módulo de elasticidade $E = 3 \times 10^6$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Ambas as extremidades do cilindro estão vinculadas a um diafragma rígido, ou seja, $u_1 = u_3 = \phi_2 = 0$. O resultado de referência adotado é de um deslocamento radial de $1,8248 \times 10^{-5}$ no ponto de aplicação da carga (Belytschko *et al.*, 1985; Chau-Dinh, 2023; Zhou *et al.*, 2022).

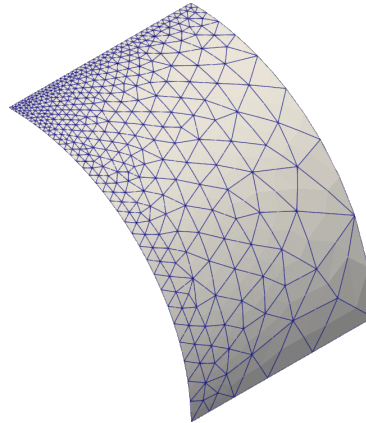
Pelo fato de o problema apresentar simetria, foi estudado somente um octante do problema. Assim utilizou-se uma malha não-estruturada, com refinamento maior próximo ao ponto de aplicação da força, contendo 810 elementos triangulares de aproximação quadrática, contando com um total de 11977 graus de liberdade. A malha utilizada é observada na Figura 62. Na simulação adotou-se uma única iteração de Newton-Raphson.

Figura 61 – Cilindro biengastado em problema estático - Desenho esquemático.



Fonte: Presente trabalho (2024).

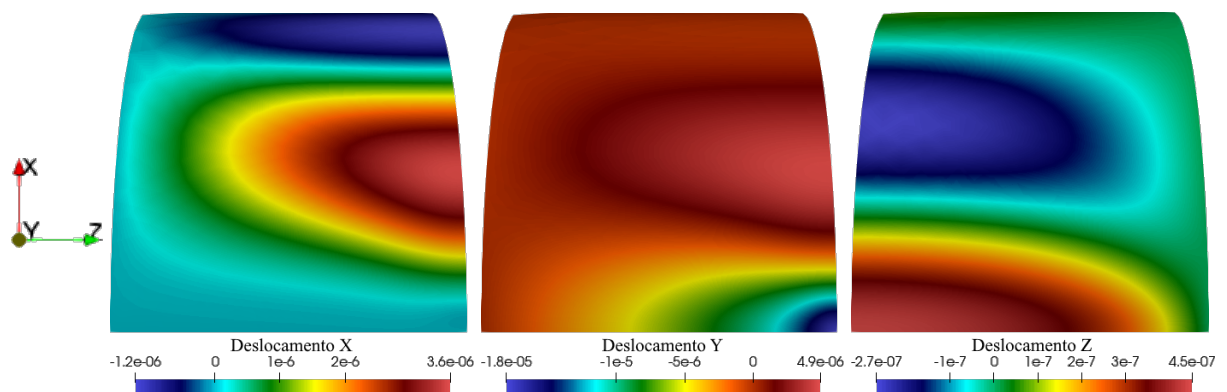
Figura 62 – Cilindro biengastado em problema estático - Malha utilizada.



Fonte: Presente trabalho (2024).

O resultado obtido para o deslocamento radial máximo é de $1,8135 \times 10^{-5}$, tendo, portanto, um desvio relativo de 0,6176% em relação à referência. Os campos de deslocamentos obtidos são apresentados na Figura 63, os quais são muito próximos aos apresentados por Zhou *et al.* (2022).

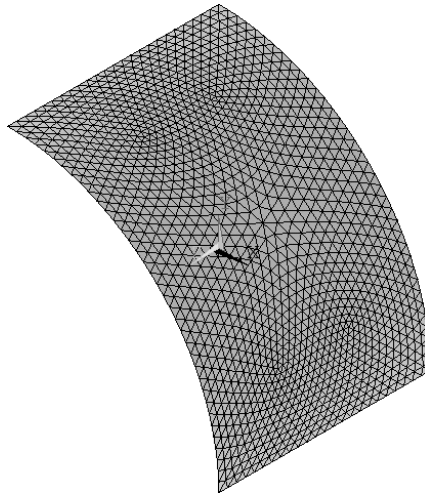
Figura 63 – Cilindro biengastado em problema estático - Campos de deslocamentos obtidos.



Fonte: Presente trabalho (2024).

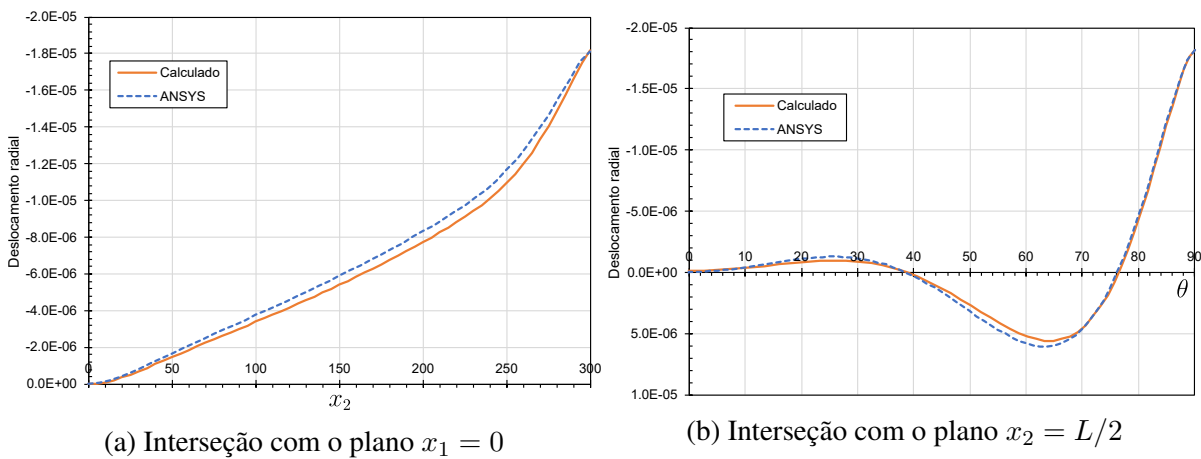
Também se comparou o resultado obtido com uma simulação executada no *software* ANSYS, empregando-se uma malha contendo 2592 elementos *Shell* 281, com um total de 5305 nós e 31830 graus de liberdade. A Figura 64 apresenta a malha utilizada. Assim obteve-se pelo ANSYS, um deslocamento radial máximo de $1,8142 \times 10^{-5}$, resultando em um desvio relativo de 0,03858% em relação à formulação posicional. Além disso, verificou-se o deslocamento radial ao longo das arestas compreendidas pela interseção do cilindro com o plano $x_1 = 0$ e com $x_2 = L/2$. A Figura 65 ilustra graficamente os resultados obtidos.

Figura 64 – Cilindro biengastado em problema estático - Malha utilizada no ANSYS.



Fonte: ANSYS (2024).

Figura 65 – Cilindro biengastado em problema estático - Deslocamentos radiais.



(a) Interseção com o plano $x_1 = 0$

(b) Interseção com o plano $x_2 = L/2$

Fonte: Presente trabalho (2024).

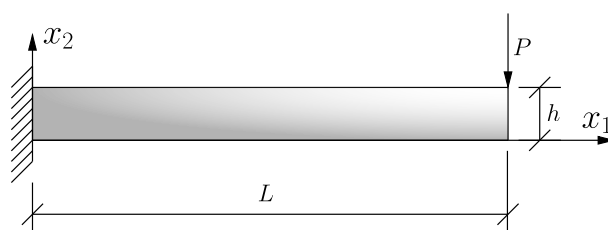
3.5.3 Viga engastada com carregamento de impacto

Para verificação do código implementado em problemas dinâmicos, estuda-se primeiramente o comportamento de uma viga engastada em uma de suas extremidades e sujeita a uma carga P subitamente aplicada na extremidade oposta, conforme ilustrado na Figura 66. As dimensões da viga são: comprimento $L = 60$ dm, altura $h = 3$ dm e largura $b = 1$ dm. A força

aplicada possui intensidade $P = 1,25 \times 10^{-4} \text{ Mg}\cdot\text{dm}/(\text{ms})^2$, sendo subitamente aplicada no instante $t = 0$.

O material que compõe a viga possui módulo de Young $E = 20 \text{ Mg}/[\text{dm}\cdot(\text{ms})^2]$, coeficiente de Poisson nulo e densidade $\rho = 7 \times 10^{-3} \text{ Mg}/\text{dm}^3$. O intervalo analisado foi $t \in [0; 675] \text{ ms}$ discretizado em passos de tempo $\Delta t = 0,3377 \text{ ms}$, sendo utilizado um raio espectral $\rho_\infty = 1,0$ para o integrador α -generalizado. A malha de elementos finitos utilizada conta com 32 elementos triangulares de aproximação quadrática, com um total de 99 nós e 693 graus de liberdade, como pode ser observada na Figura 67.

Figura 66 – Viga engastada em problema dinâmico - Desenho esquemático.



Fonte: Presente trabalho (2024).

Figura 67 – Viga engastada em problema dinâmico - Malha utilizada.



Fonte: Presente trabalho (2024).

A modelagem realizada considerou a altura H como a espessura do elemento de casca, sendo a força atuante nessa mesma direção. Assim, observou-se o deslocamento vertical no ponto de aplicação da força. Os resultados obtidos foram comparados com aqueles alcançados a partir de uma modelagem no *software* ANSYS utilizando 346 elementos do tipo *Shell* 281, totalizando 795 nós e 4770 graus de liberdade (Figura 68). a Figura 69 apresenta os resultados calculados.

Figura 68 – Viga engastada em problema dinâmico - Malha utilizada no ANSYS.



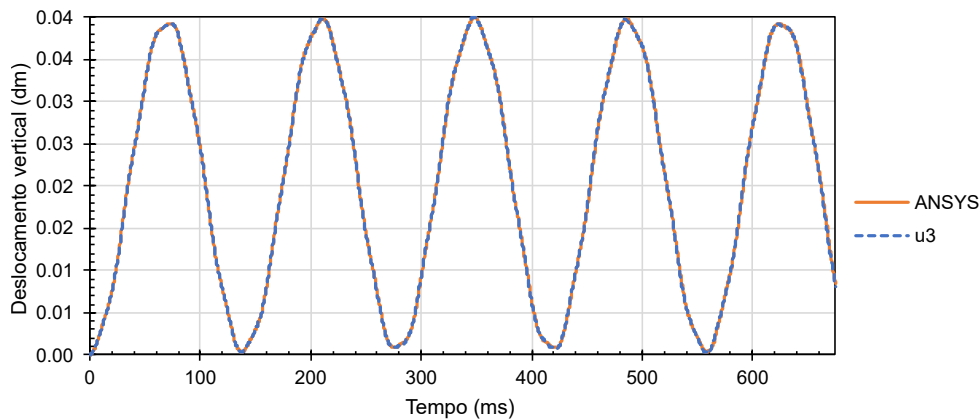
Fonte: ANSYS (2024).

Observa-se nesse caso uma boa concordância entre os resultados apresentados pelo ANSYS e os obtidos pelo código desenvolvido, sendo verificada a eficácia nesse exemplo.

3.5.4 Viga biengastada com carregamento de impacto

Neste exemplo considera-se de uma viga biengastada com uma carga concentrada aplicada no centro do vão, conforme mostrado na Figura 70. Os dados da geometria da viga são: comprimento $L = 20 \text{ in}$, seção transversal de $b \times h = 1,0 \times 0,125 \text{ in}^2$. O material que constitui

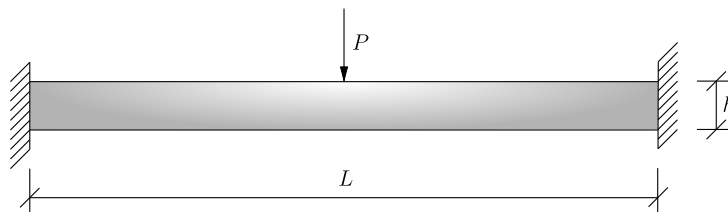
Figura 69 – Viga engastada em problema dinâmico - Deslocamento vertical no ponto de aplicação da força ao longo do tempo.



Fonte: Presente trabalho (2024).

a viga possui módulo de Young $E = 3 \times 10^7$ lbf/in², coeficiente de Poisson nulo e densidade $\rho = 2,6 \times 10^{-4}$ lb·s²/in⁴. A força aplicada é $P = 640$ lbf, mantida constante durante todo o período de análise, de $t \in [0; 5]$ ms, o qual é discretizado em passos de tempo $\Delta t = 25$ μ s. Considerar $\rho_\infty = 1,0$ para o integrador temporal α generalizado, sendo que a malha de elementos finitos empregada (Figura 71) possui 132 elementos triangulares de aproximação quadrática, totalizando 333 nós e 2331 graus de liberdade. A espessura do elemento de casca é considerada como a direção da altura H da viga.

Figura 70 – Viga biengastada em problema dinâmico - Desenho esquemático.



Fonte: Presente trabalho (2024).

Figura 71 – Malha utilizada na simulação da viga biengastada.

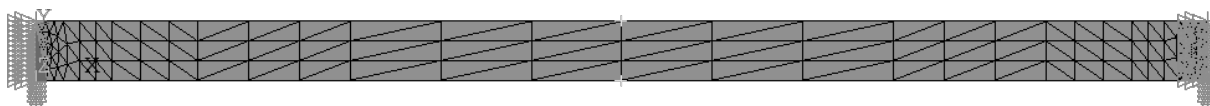


Fonte: Presente trabalho (2024).

Os resultados calculados foram comparados com os apresentados pelo ANSYS, a partir de 234 elementos do tipo *Shell 281*, resultando em 541 nós e 3246 graus de liberdade (Figura 72), e por (Mondkar; Powell, 1977). A Figura 73 exibe os resultados obtidos.

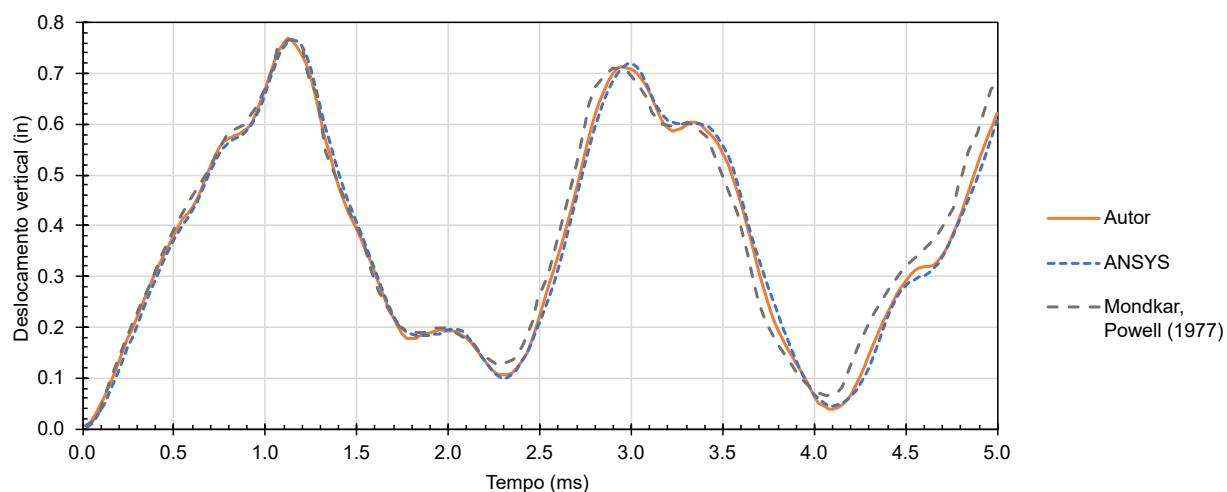
Verifica-se uma boa concordância entre os resultados obtidos pela análise por ambos os valores de referência.

Figura 72 – Viga biengastada em problema dinâmico - Malha utilizada no ANSYS.



Fonte: ANSYS (2024).

Figura 73 – Viga biengastada em problema dinâmico - Deslocamento vertical no centro da viga biengastada ao longo do tempo.

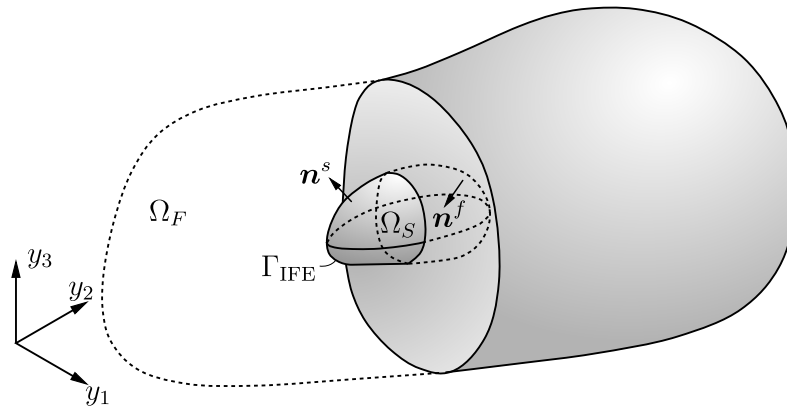


Fonte: Presente trabalho (2024).

4 ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA

Para se descrever o problema acoplado, seja Ω_F o domínio do fluido, Ω_S o domínio da estrutura, $\Omega_{IFE} = \Omega_F \cup \Omega_S$ o domínio do problema de IFE e $\Gamma_{IFE} = \Omega_F \cap \Omega_S$ a interface de fluido/estrutura, conforme ilustrado na Figura 74.

Figura 74 – Domínio computacional do problema de IFE.



Fonte: Presente trabalho (2024).

Richter (2017) apontam três condições que devem ser satisfeitas no acoplamento: a Condição Cinemática, que diz respeito à movimentação dos domínios analisados, devendo ser compatíveis em Γ_{IFE} , ou seja, a componente normal ao movimento deve ser igual em ambos os meios, assim como a componente tangencial em caso de condição de aderência do fluido à estrutura; a Condição Dinâmica, que aponta a continuidade das forças internas, observadas no tensor de tensões de Cauchy; e a Condição Geométrica, que exige a necessidade de ambos os domínios coincidirem em Γ_{IFE} , não havendo sobreposições nem formação de vazios.

Numericamente, há diversas possibilidades para que essas condições sejam impostas de forma exata ou aproximada, sendo possível acoplamento monolítico ou acoplamento particionado, com o último ainda subdividido em particionado fraco e forte, como mencionado em 1.1.3.

Nas formulações adotadas para CFD e CSD, é comumente empregado o Método de Newton-Raphson para o cálculo das variáveis incógnitas. O mesmo pode ser aplicado quando do acoplamento direto, monolítico, entre os dois meios. Para isso a matriz tangente (\mathbf{H}) pode ser obtida por (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013; Sanches, 2022):

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \Psi \otimes \partial \Phi}, \quad (4.1)$$

sendo \mathcal{G} a soma de todas as equações diferenciais do problema em sua forma fraca, Ψ o vetor com todos os parâmetros nodais das funções teste e Φ o vetor com todos os parâmetros nodais incógnitas do problema. Assim, obtém-se a correção dos valores das variáveis por meio da solução do sistema:

$$\mathbf{H}\Delta\Phi = -\epsilon, \quad (4.2)$$

em que $\epsilon = \partial\mathcal{G}/\partial\Psi$ é o vetor resíduo.

Expandindo a matriz em submatrizes a fim de visualizar a contribuição de cada parcela no sistema global tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\Phi_1 \\ \Delta\Phi_2 \\ \Delta\Phi_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

sendo os subíndices 1, 2 e 3 referentes às variáveis do fluido, da estrutura e da malha, respectivamente.

Já o acoplamento particionado trata o sistema de forma a eliminar os termos cruzados da matriz tangente, resultando em blocos de sistema que podem ser resolvidos independentemente (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\Phi_1 \\ \Delta\Phi_2 \\ \Delta\Phi_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Note que o método continua sendo consistente, uma vez que apenas a matriz tangente do método de Newton-Raphson foi modificada, no entanto, a convergência não é garantida. Para aprimorar os resultados, em cada iteração k do processo de Newton-Raphson, pode-se resolver sequencialmente os blocos e atualizar os valores calculados em um bloco para o cálculo do próximo, sendo obtido pelo procedimento apresentado no Algoritmo 3, tornando o processo de solução análogo ao método de Gauss-Seidel. Essa forma de acoplamento é denominada acoplamento particionado forte, onde, havendo convergência, a mesma resposta do acoplamento monolítico deve ser alcançada.

Caso os blocos sejam resolvidos em processos iterativos separados, sem que haja atualização das variáveis de um problema para o outro dentro de cada processo iterativo, fazendo a atualização apenas ao final de cada passo no tempo, tem-se um modelo de acoplamento denominado acoplamento particionado fraco. Para construir um acoplamento particionado fraco, pode-se assumir que o problema do fluido depende das variáveis do sólido e da malha em um instante t e das variáveis do fluido em um instante $t + 1$, já o problema do sólido depende do valor das variáveis do fluido e do sólido em um tempo $t + 1$ e, por fim, o problema da malha depende das variáveis do sólido e da malha em um instante $t + 1$. Assim, o cálculo é realizado segundo o Algoritmo 4, no qual k_f , k_s e k_m são as iterações das soluções dos problemas de fluido, estrutura e malha, respectivamente (Sanches, 2022). Ainda é observado que a movimentação da malha segue um problema linear, sendo seu resultado obtido diretamente em uma iteração.

Algoritmo 3: Processo de acoplamento particionado forte

```

1 para cada passo de tempo faça
2   Atualizar valores passados do fluido, sólido e malha;
3   para cada iteração  $k$  de Newton-Raphson faça
4     Resolver fluido:  $H_{11}^k(\Phi_1^k, \Phi_2^k, \Phi_3^k)\Delta\Phi_1^k = -\epsilon_1^k(\Phi_1^k, \Phi_2^k, \Phi_3^k)$ 
5     Atualizar valores atuais do fluido:  $\Phi_1^{k+1} \leftarrow \Phi_1^k + \Delta\Phi_1^k$ 
6     Atualizar forças de superfície no sólido:  $t^s = -\sigma^f \cdot n^f$ 
7     Calcular medida de convergência  $\epsilon_f$ ;
8     Resolver sólido:  $H_{22}^k(\Phi_1^{k+1}, \Phi_2^k, \Phi_3^k)\Delta\Phi_2^k = -\epsilon_2^k(\Phi_1^{k+1}, \Phi_2^k, \Phi_3^k)$ 
9     Atualizar valores atuais do sólido:  $\Phi_2^{k+1} \leftarrow \Phi_2^k + \Delta\Phi_2^k$ 
10    Atualizar velocidades e acelerações do fluido em  $\Gamma_{IFE}$ ;
11    Atualizar deslocamentos e acelerações na malha em  $\Gamma_{IFE}$ ;
12    Calcular medida de convergência  $\epsilon_s$ ;
13    Resolver malha:  $H_{33}^k(\Phi_1^{k+1}, \Phi_2^{k+1}, \Phi_3^k)\Delta\Phi_3^k = -\epsilon_3^k(\Phi_1^{k+1}, \Phi_2^{k+1}, \Phi_3^k)$ 
14    Atualizar valores atuais da malha:  $\Phi_3^{k+1} \leftarrow \Phi_3^k + \Delta\Phi_3^k$ 
15    Calcular medida de convergência  $\epsilon_m$ ;
16    se  $\epsilon_f < \text{tol}_f$ ,  $\epsilon_s < \text{tol}_s$  e  $\epsilon_m < \text{tol}_m$  então Sair do loop;
17  fim
18 fim

```

Algoritmo 4: Processo de acoplamento particionado fraco

```

1 para cada passo de tempo faça
2   Atualizar valores passados do fluido, sólido e malha;
3   para cada iteração  $k_f$  de Newton-Raphson faça
4     Resolver fluido:
5      $H_{11}((\Phi_1^{k_f})^{t+1}, (\Phi_2)^t, (\Phi_3)^t)\Delta(\Phi_1^{k_f})^{t+1} = -\epsilon_1((\Phi_1^{k_f})^{t+1}, (\Phi_2)^t, (\Phi_3)^t);$ 
6     Atualizar valores:  $(\Phi_1^{k_f+1})^{t+1} \leftarrow (\Phi_1^{k_f})^{t+1} + \Delta(\Phi_1^{k_f})^{t+1};$ 
7     se  $\epsilon_f < \text{tol}_f$  então Sair do loop;
8   fim
9   Atualizar forças de superfície no sólido:  $t^s = -\sigma^f \cdot n^f$ 
10  para cada iteração  $k_s$  de Newton-Raphson faça
11    Resolver sólido:  $H_{22}((\Phi_1)^{t+1}, (\Phi_2^{k_s})^{t+1})\Delta(\Phi_2^{k_s})^{t+1} = -\epsilon_2((\Phi_1)^{t+1}, (\Phi_2^{k_s})^t);$ 
12    Atualizar valores:  $(\Phi_2^{k_s+1})^{t+1} \leftarrow (\Phi_2^{k_s})^{t+1} + \Delta(\Phi_2^{k_s})^{t+1};$ 
13    se  $\epsilon_s < \text{tol}_s$  então Sair do loop;
14  fim
15  Atualizar velocidades e acelerações do fluido em  $\Gamma_{IFE}$ ;
16  Atualizar deslocamentos e acelerações na malha em  $\Gamma_{IFE}$ ;
17  para cada iteração  $k_m$  de Newton-Raphson faça
18    Resolver malha:  $H_{33}((\Phi_3^{k_m})^{t+1}, (\Phi_2)^t)\Delta(\Phi_3^{k_m})^{t+1} = -\epsilon_3((\Phi_3^{k_m})^{t+1}, (\Phi_2)^t);$ 
19    Atualizar valores:  $(\Phi_3^{k_m+1})^{t+1} \leftarrow (\Phi_3^{k_m})^{t+1} + \Delta(\Phi_3^{k_m})^{t+1};$ 
20    se  $\epsilon_m < \text{tol}_m$  então Sair do loop;
21  fim
22 fim

```

Por dispensar etapas de correção, esse método possui um custo computacional menor em relação ao particionado forte, no entanto exige a adoção de passos de tempo pequenos e fica sujeito a problemas de instabilidades como mencionado em Felippa, Park e Farhat (2001). Nota-se que esse tipo de acoplamento é mais adequado a problemas com escoamento compressível, onde um passo de tempo pequeno é necessário para se capturar a propagação de ondas de choque ao mesmo tempo em que a densidade do fluido costuma ser muito menor que a do sólido.

Por outro lado, a convergência do processo de acoplamento particionado forte pode ficar prejudicada, especialmente à medida em que a densidade do fluido e do sólido se aproximam, ou em outros problemas fortemente acoplados, onde uma pequena perturbação do fluido pode produzir grandes perturbações na estrutura e vice-versa. Como meios de garantir convergência nessa situação, mantendo o acoplamento particionado, pode-se adotar relaxações de Aitken, destinadas melhorar a convergência no método de Gauss-Seidel, na atualização das variáveis (Fernandes; Coda; Sanches, 2019) ou aplicar um fator de escala sobre a matriz de massa do sólido (técnica *Augmented A₂₂*) (Tezduyar *et al.*, 2005). Por simplicidade, neste trabalho, em um exemplo onde foi necessário, adotou-se a segunda técnica.

4.1 Exemplos para verificação

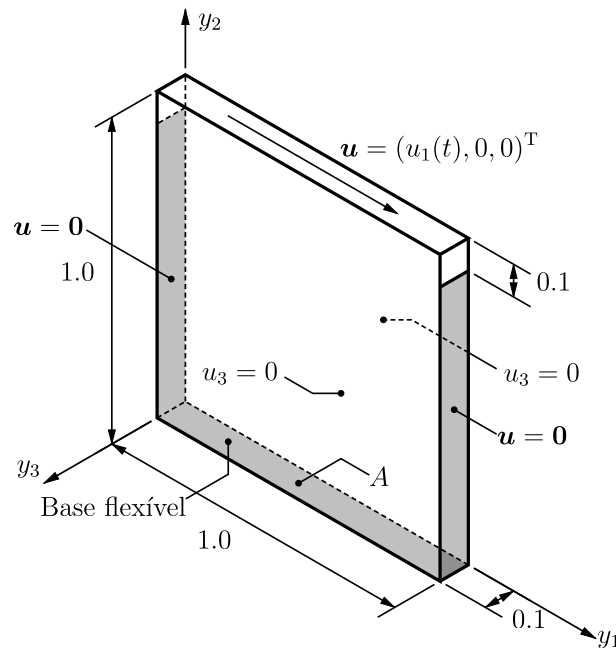
Na presente as formulações implementadas são aplicadas à simulação de problemas de interação fluido-estruturas selecionados para a verificação do código computacional, bem como para o estudo das características das formulações implementadas quando aplicadas à análise de IFE.

4.1.1 Cavidade com fundo flexível

O primeiro exemplo utilizado para verificação do acoplamento IFE forte tipo bloco-iterativo, trata-se de uma cavidade semelhante à do exemplo 2.7.1, porém com velocidade tangencial oscilatória no topo e com fundo flexível, como ilustrado na Figura 75. Tal exemplo, embora seja caracterizado pelo comportamento bidimensional, é simulado aqui por discretização 3D, sendo aplicadas condições de paredes lisas nas faces paralelas ao escoamento, e condição de simetria (componente do vetor generalizado na direção 3 restrita) para a casca. Esse problema foi estudado por Gerbeau e Vidrascu (2003), sendo que a estrutura apresenta: densidade $\rho_S = 500$, módulo de Young $E = 250$, coeficiente de Poisson $\nu = 0$ e espessura $h = 0,002$. Já o fluido apresenta: densidade $\rho_F = 1$ e viscosidade dinâmica $\mu = 0,01$. A velocidade variável ao longo do tempo, imposta na direção horizontal da face superior, é dada por $u_1(t) = 1 - \cos(0,4\pi t)$, de forma que, tomando-se o comprimento característico o tamanho do lado da cavidade, o número de Reynolds varia dinamicamente de 0 a 200.

Considerou-se o intervalo total $t \in [0,60]$ para a simulação, discretizado em passos $\Delta t = 0,1$, e considerando-se $\varrho_\infty = 0$. A escolha por $\varrho_\infty = 0$ foi feita buscando-se melhor estabilidade, uma vez que, de acordo com o relato de Förster, Wall e Ramm (2007), integradores

Figura 75 – Cavidade com fundo flexível.



Fonte: Presente trabalho (2024).

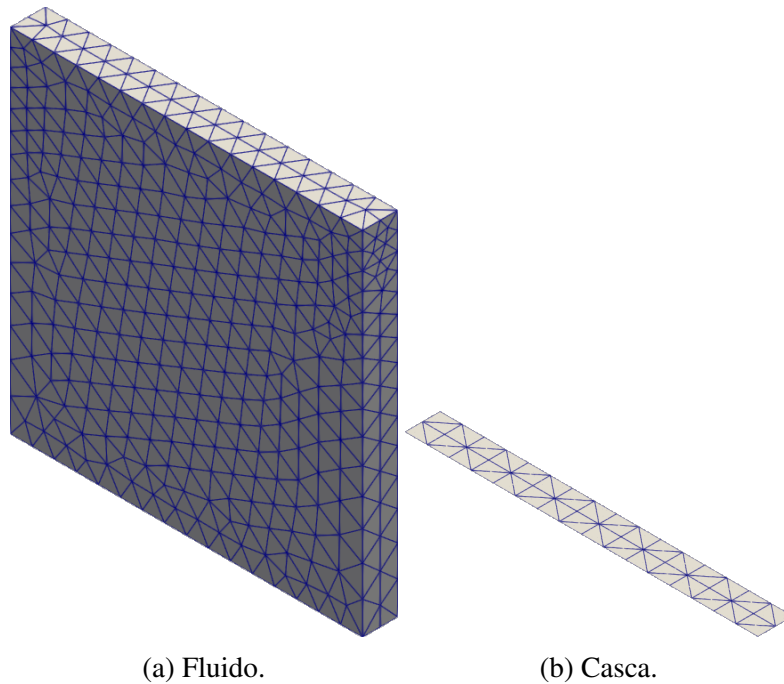
temporais de segunda ordem clássicos levaram a instabilidades imediatas. No entanto, dadas as diferenças nas formulações, não se pode descartar que outros valores de raio espectral possam conduzir a resultados estáveis e precisos.

Uma primeira simulação é conduzida apenas para verificar o acoplamento fluido-estrutura, não sendo considerados os modelos VMS nem LES. São consideradas as seguintes combinações de discretização espacial e formulação numérica: 1) malha com 1957 elementos tetraédricos P1P1, resultando em 707 nós e 2828 graus de liberdade com estabilização SUPG/PSPG; 2) malha com 1957 elementos P2P2, resultando em 4071 nós e 16284 graus de liberdade, com estabilização SUPG/PSPG; 3) malha com 1957 elementos P2P1, com 707 nós para interpolação do campo de pressão e 4071 nós para interpolação do campo de velocidade, resultando em 12920 graus de liberdade, sem estabilização. Nota-se que todas as malhas para o domínio do fluido são coincidentes, alterando-se apenas os nós e as funções de forma. Já o domínio computacional da casca foi discretizado da mesma maneira para todos os casos, sendo formada por 64 elementos, 165 nós, resultando em 1155 graus de liberdade. Ambas as discretizações, do sólido e do fluido, são apresentadas na Fig. 76.

Nota-se na figura 76 que as malhas do estrutura e do fluido são coincidentes na interface fluido-estrutura Γ_{FE} , facilitando a transferência das condições de acoplamento, bem como das condições para a movimentação da malha.

Este problema mostrou-se fortemente acoplado, apresentando dificuldade de convergência para a solução bloco-iterativa. Para garantir a convergência, seguindo a técnica *Augmented A22* (Tezduyar *et al.*, 2005), multiplicou-se a parcela da matriz tangente referente à matriz de massa da estrutura por 2,0, o que foi suficiente para garantir boa convergência de forma

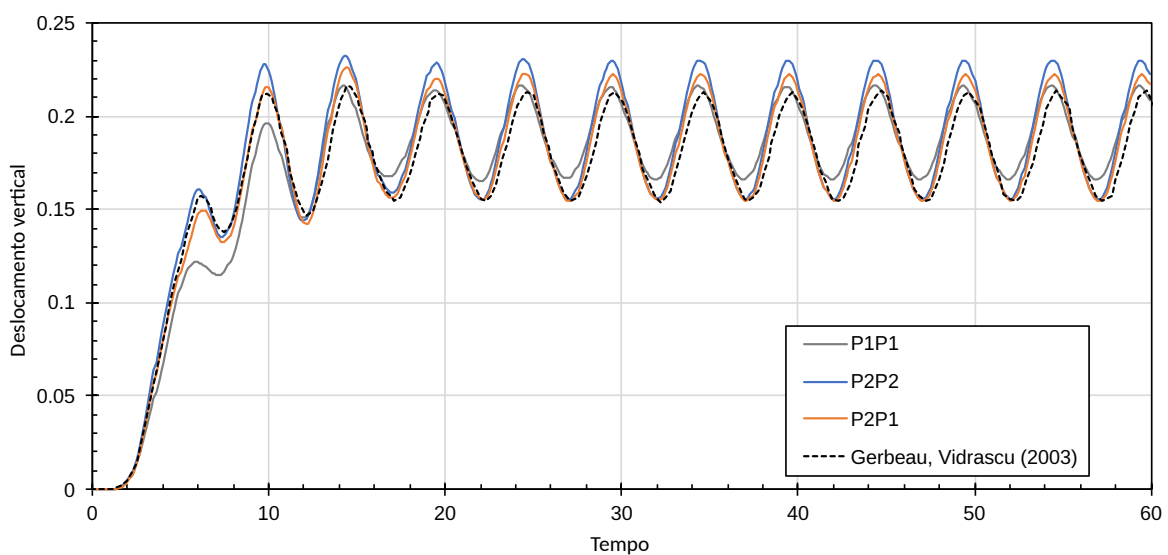
Figura 76 – Cavity com fundo flexível - Discretização



Fonte: Presente trabalho (2024).

consistente.

O deslocamento vertical do ponto *A*, localizado no centro da casca como ilustrado na Fig. 76, é monitorado em todas as análises, sendo a sua história apresentada na Figura 77, onde também são comparadas com a solução obtida por Gerbeau e Vidrascu (2003).

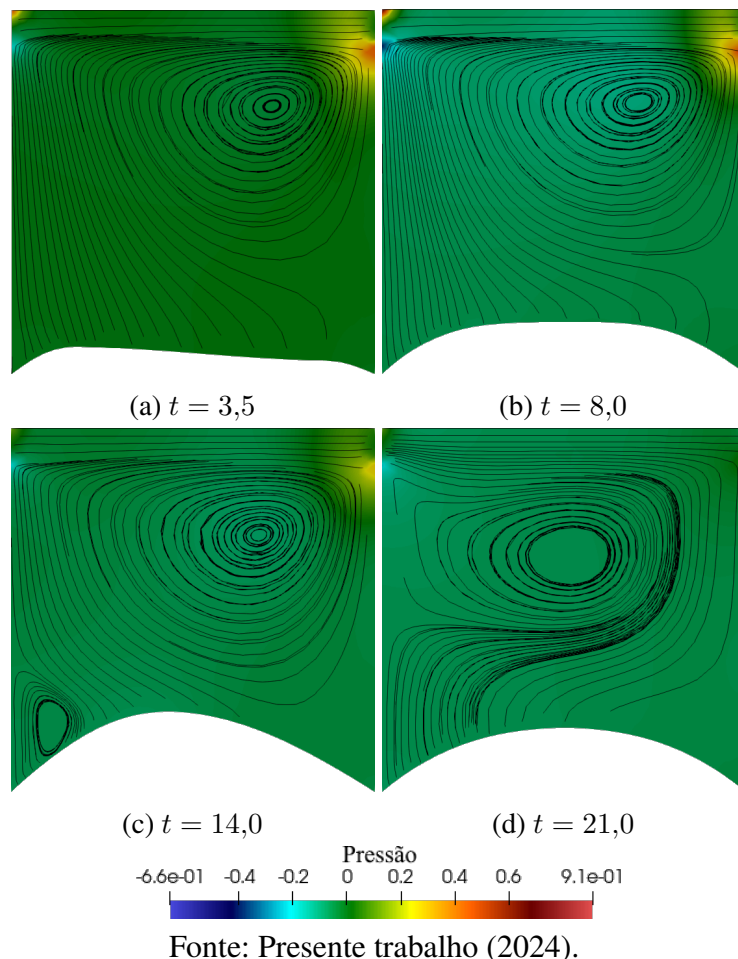
Figura 77 – Cavity com fundo flexível - Deslocamento vertical do nó *A*.

Fonte: Presente trabalho (2024).

A Figura 78 apresenta o campo de pressão, assim como as linhas de corrente, para a simulação empregando-se elementos P2P2 com estabilização SUPG/PSPG nos instantes $t = 3,5$,

8,0, 14,0 e 21,0, os quais mostram-se qualitativamente condizentes com a solução encontrada em Fernandes (2016).

Figura 78 – Cavity com fundo flexível - Distribuição de pressão e linhas de corrente.



Esses resultados permitem evidenciar qualitativamente a consistência do acoplamento proposto.

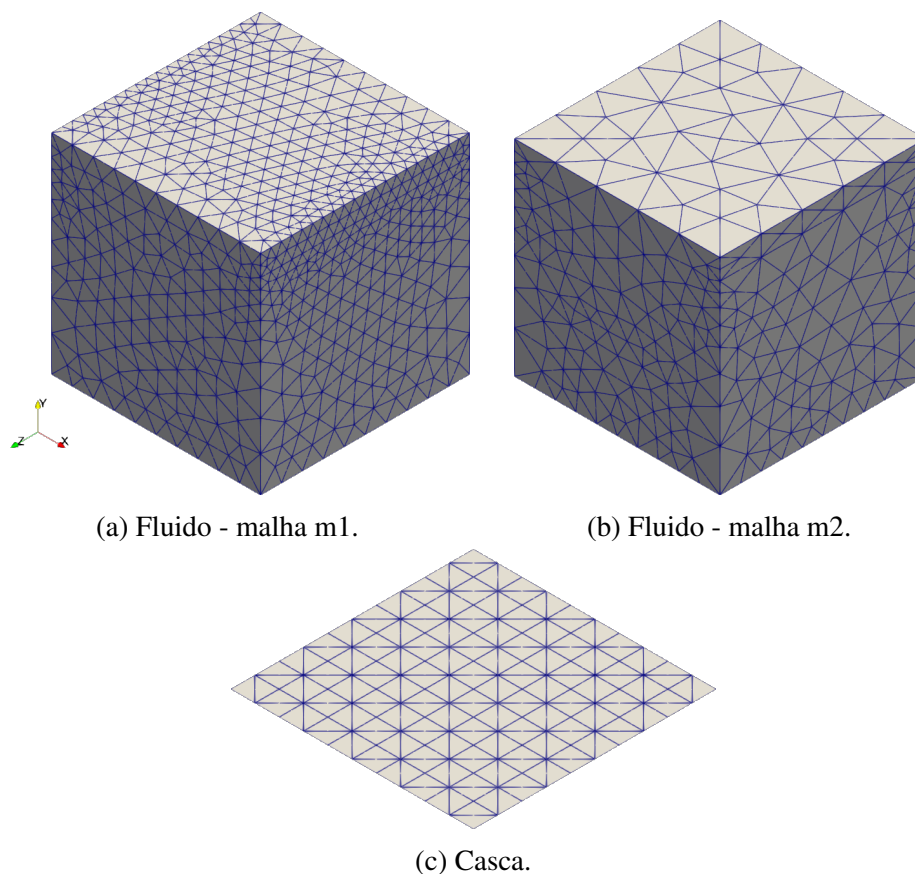
4.1.2 Cavity tridimensional com fundo flexível

Este exemplo foi estudado por Vázquez (2007) e pode ser entendido como uma extensão do exemplo da exemplo 4.1.1, em que o domínio de análise é um cubo de lado unitário cuja base é flexível. Todas as propriedades físicas, tanto do fluido quanto da casca são mantidas as mesmas. As condições de contorno no domínio do fluido também se mantém as mesmas em relação ao exemplo anterior, enquanto as condições de contorno da casca agora são de apoio nos quatro lados, ou seja, os deslocamentos em todas as direções são impedidos, enquanto as rotações (os vetores generalizados) são livres.

Nesse caso, verifica-se também o desempenho dos modelos VMS e LES, no entanto considera-se apenas a formulação estabilizada com elementos P2P2. A discretização do domínio do fluido se dá de duas formas: 1) malha refinada (m1) empregando 7306 elementos P2P2, com

11824 nós e 47296 graus de liberdade; 2) malha mais pobre (m2) contendo 2460 elementos P2P2, 4339 nós e 17356 graus de liberdade. Já o domínio da casca foi discretizado com 200 elementos, 441 nós e 3087 graus de liberdade. A Figura 79 apresenta a malha utilizada para cada um dos meios. O intervalo de tempo analisado foi $t \in [0,30]$ discretizado em passos de tempo $\Delta t = 0,10$, sendo empregado $\varrho_\infty = 0,0$ para o integrador temporal.

Figura 79 – Cavity tridimensional - Discretização espacial.

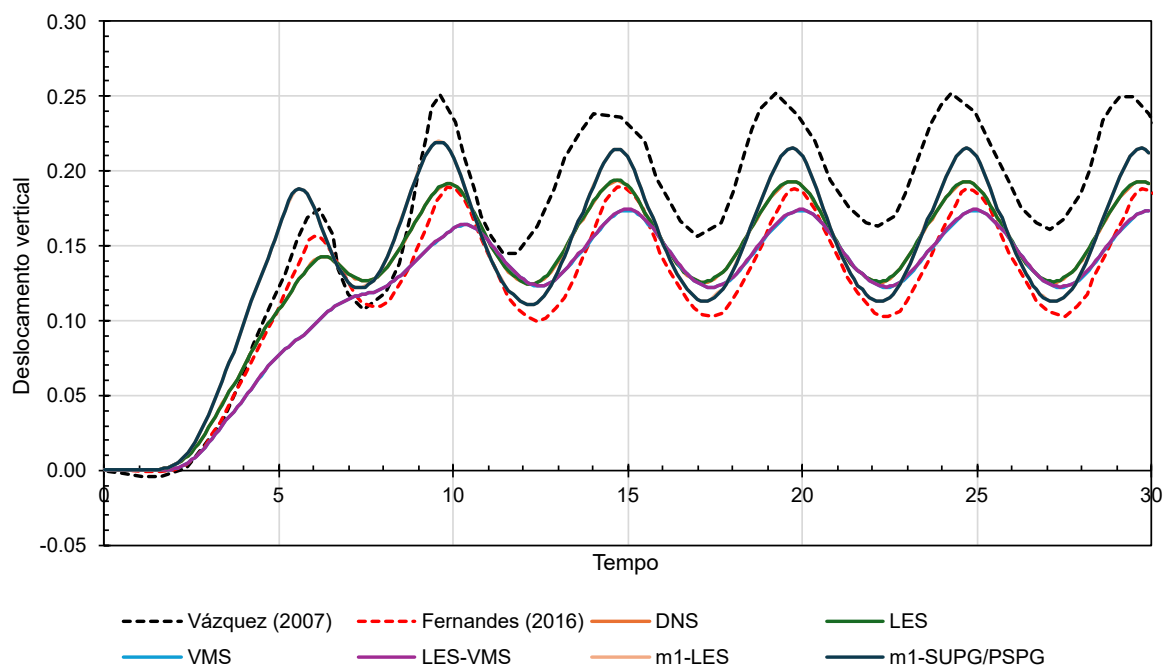


Fonte: Presente trabalho (2024).

Observou-se a influência que cada tipo de estabilização causa na solução, onde simulou-se com as estabilizações SUPG/PSPG e VMS para a malha m2, enquanto a malha m1 foi estabilizada por SUPG/PSPG como referência. Também foram simulados os problemas com e sem a aplicação do modelo LES, para analisar os efeitos que este causa na solução. A Figura 80 apresenta o deslocamento vertical do centro da casca ao longo do tempo, comparando-se com os resultados obtidos por Vázquez (2007) e por Fernandes (2016) e com a simulação com malha mais fina.

Verifica-se que a aplicação dos demais termos estabilizadores presentes na formulação VMS levaram a uma solução mais amortecida em relação ao SUPG/PSPG. No entanto, a aplicação do modelo LES não surtiu efeito na solução encontrada, o que se deve ao fato do número de Reynolds do problema ser baixo, além de possuir gradientes de velocidade também muito pequenos.

Figura 80 – Cavidade tridimensional - Deslocamento vertical do centro da casca ao longo do tempo para o segundo caso.

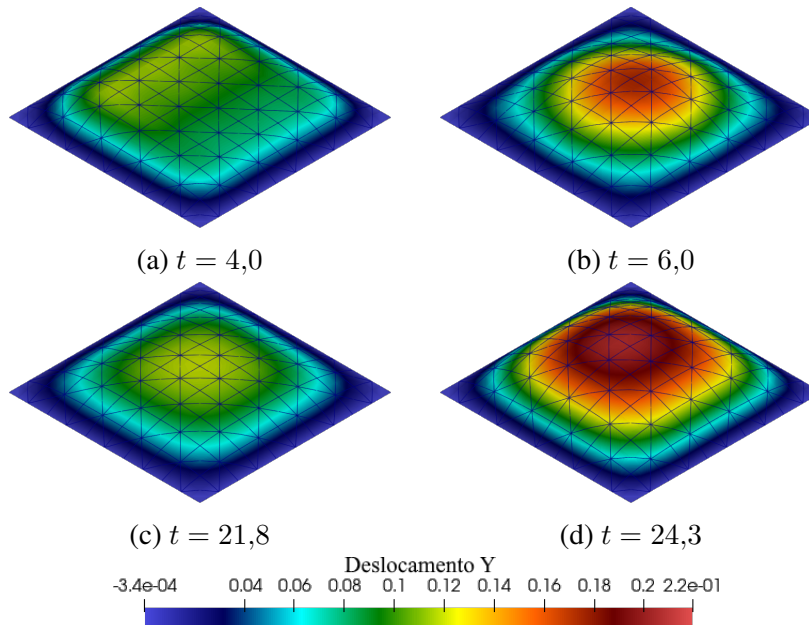


Fonte: Presente trabalho (2024)

Nota: A linha referente à simulação LES sobrepõe a de SUPG/PSPG; e a linha referente à LES-VMS sobrepõe a VMS.

A Figura 81 apresenta a distribuição de deslocamentos verticais sobre a casca deformada nos instantes $t = 4,0, 6,0, 21,8$ e $24,3$ para a simulação empregando a malha m1, os quais são bem próximos aos obtidos por Vázquez (2007). A figura 82 apresenta o campo de pressão e de velocidade para os mesmos instantes de tempo.

Figura 81 – Cavidade tridimensional - Deslocamento vertical da casca.



Fonte: Presente trabalho (2024).

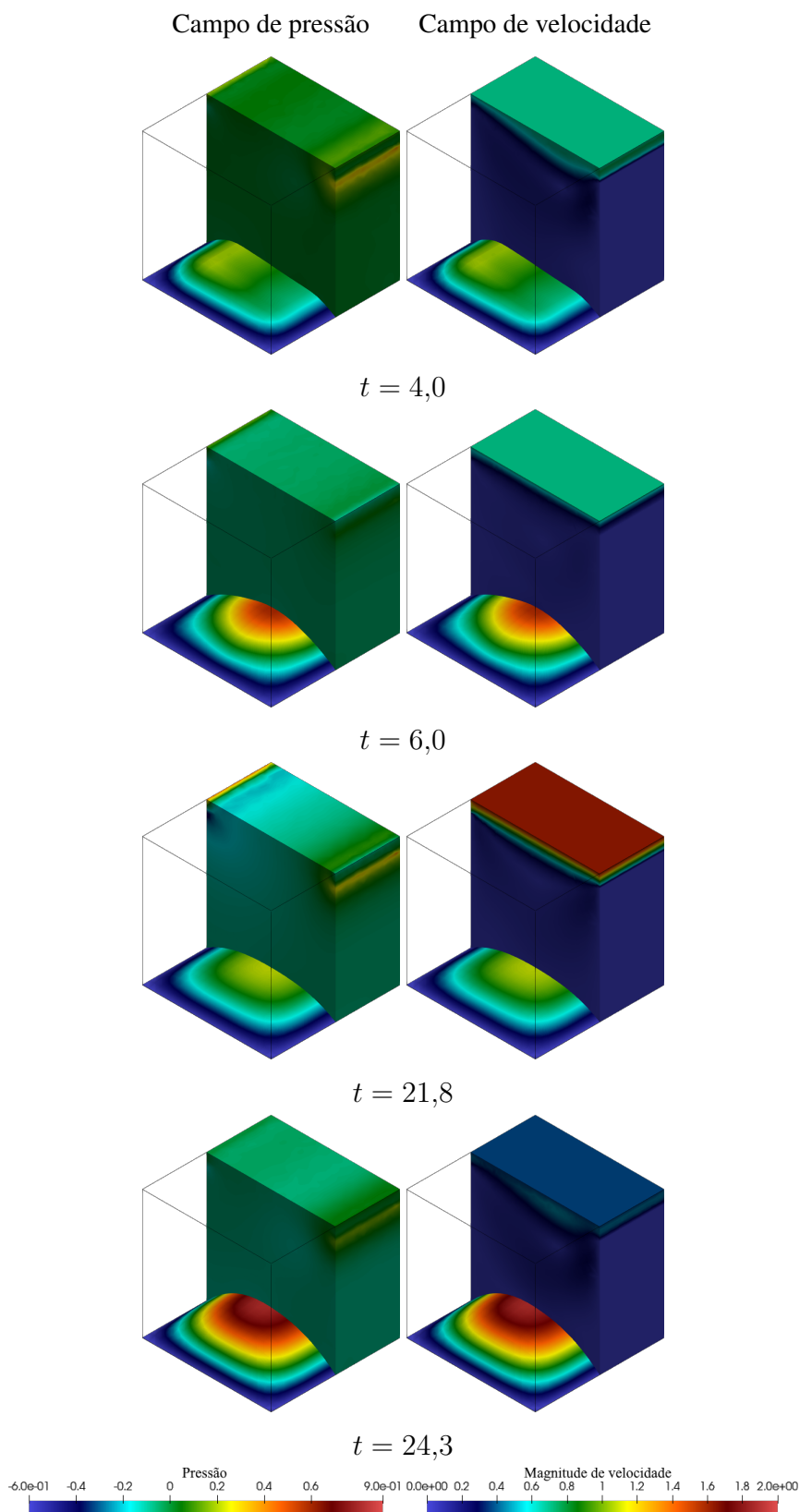
4.1.3 Flutter em painel flexível

Outro problema comumente simulado para a verificação de formulações para análise de interação fluido-estrutura, proposto por Wall (1998), trata-se de um painel engastado a um prisma quadrado rígido, como observado na Figura 83. Tal problema possui comportamento fortemente acoplado, além de apresentar certa complexidade, uma vez que o desprendimento de vórtices ocasionado pelo escoamento em torno do prisma que gera perturbações no escoamento de forma a induzir vibrações na estrutura, chegando a grandes deslocamentos.

O painel possui comprimento $L = 4$ cm e espessura $h_0 = 0,06$ cm, sendo engastado em um bloco rígido de dimensões 1×1 cm², sua densidade é $\rho_S = 0,1$ g/cm³ e seu módulo de Young $E = 2,5 \times 10^6$ g/(cm·s²). O coeficiente de Poisson desse problema foi considerado nulo, de forma a representar melhor a solução da referência que emprega simulação bidimensional com elementos de biga de Euler-Bernoulli. O fluido que envolve a estrutura possui densidade $\rho_f = 1,18 \times 10^{-3}$ g/cm³ e viscosidade dinâmica $\mu = 1,82 \times 10^{-4}$ g/(cm·s), modelado em um domínio $\Omega = [0,21] \times [0,12]$ cm², com uma velocidade de entrada constante $u_\infty = 51,3$ cm/s na direção 1, o que resulta em um número de Reynolds de 333, ao considerar o comprimento característico o lado do prisma. Esse problema é conhecido pelo comportamento bidimensional das variáveis envolvidas, no entanto a simulação foi realizada considerando um problema tridimensional, assim foi considerada uma espessura $esp = 0,1$ cm para o domínio computacional, assim como imposição de deslocamento nulo do painel na terceira direção e do travamento dessa componente no vetor generalizado, enquanto no fluido foi considerada uma condição de simetria nas faces frontal e traseira do domínio.

O domínio computacional do fluido foi discretizado em 3423 elementos tetraédricos

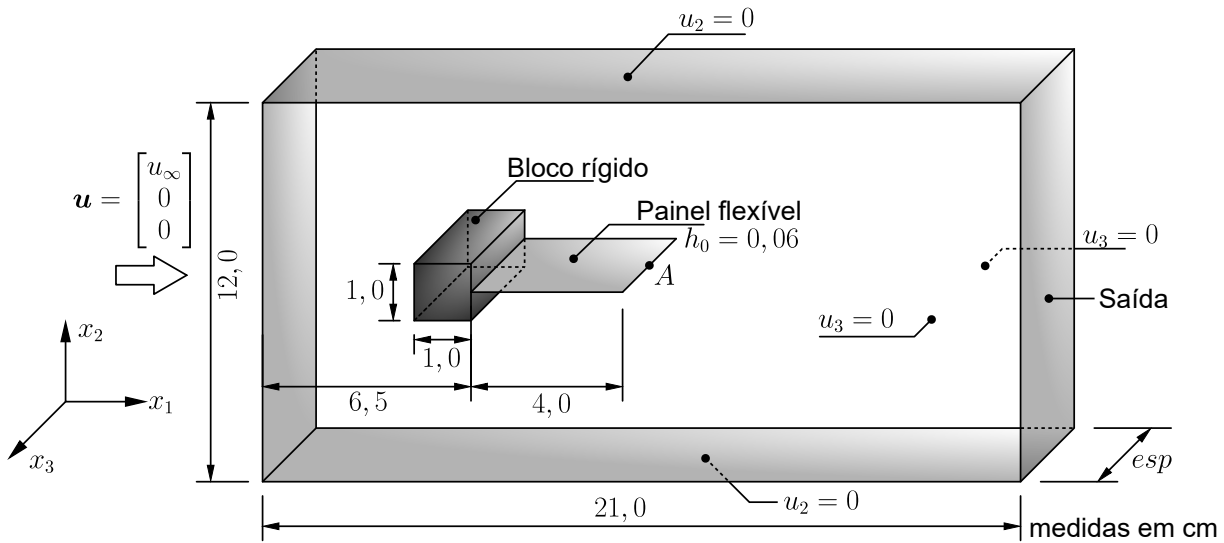
Figura 82 – Cavidade tridimensional - Campo de pressão e de velocidade na cavidade.



Fonte: Presente trabalho (2024).

de aproximação quadrática, possuindo 7088 nós e 28352 graus de liberdade. Já o domínio computacional da casca foi discretizado em 54 elementos e 165 nós, resultando em 1155 graus

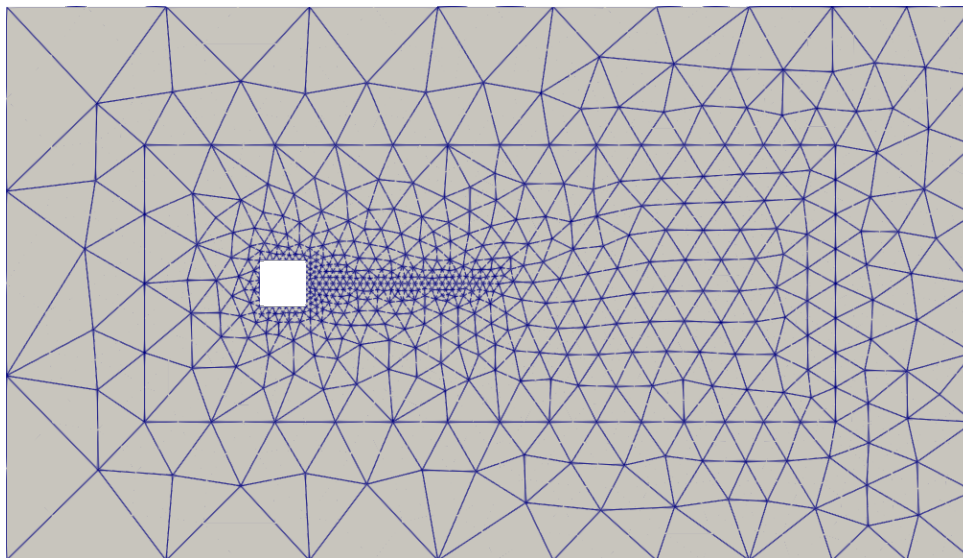
Figura 83 – Flutter em painel - Desenho esquemático do problema.



Fonte: Presente trabalho (2024).

de liberdade. A Figura 84 apresenta as malhas utilizadas em ambos os domínios. O intervalo de tempo analisado foi $t \in [0,5]$, discretizado em passos de tempo $\Delta t = 1,65 \times 10^{-3}$. O esquema de integração temporal foi dado considerando um raio espectral $\varrho_\infty = 0,0$ e os termos estabilizadores adotados foram da formulação SUPG/PSPG.

Figura 84 – Flutter em painel - Malha utilizada para os domínios da simulação de painel.



(a) Malha do fluido.



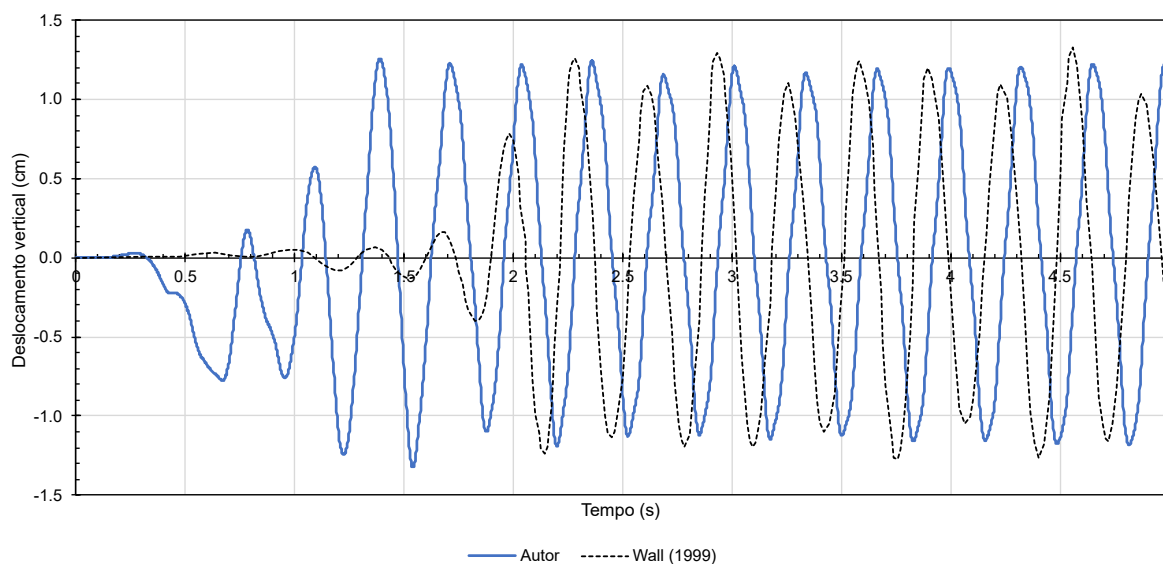
(b) Malha da casca.

Fonte: Presente trabalho (2024).

O gráfico apresentado na Figura 85 indica o deslocamento vertical da extremidade do painel ao longo do tempo em comparação com os resultados obtidos por Wall (1999). Esse deslocamento possui caráter oscilatório com amplitude de 1,26 cm e frequência de 3,03 Hz

(Período de 0,33 s), se aproximando aos valores de referência.

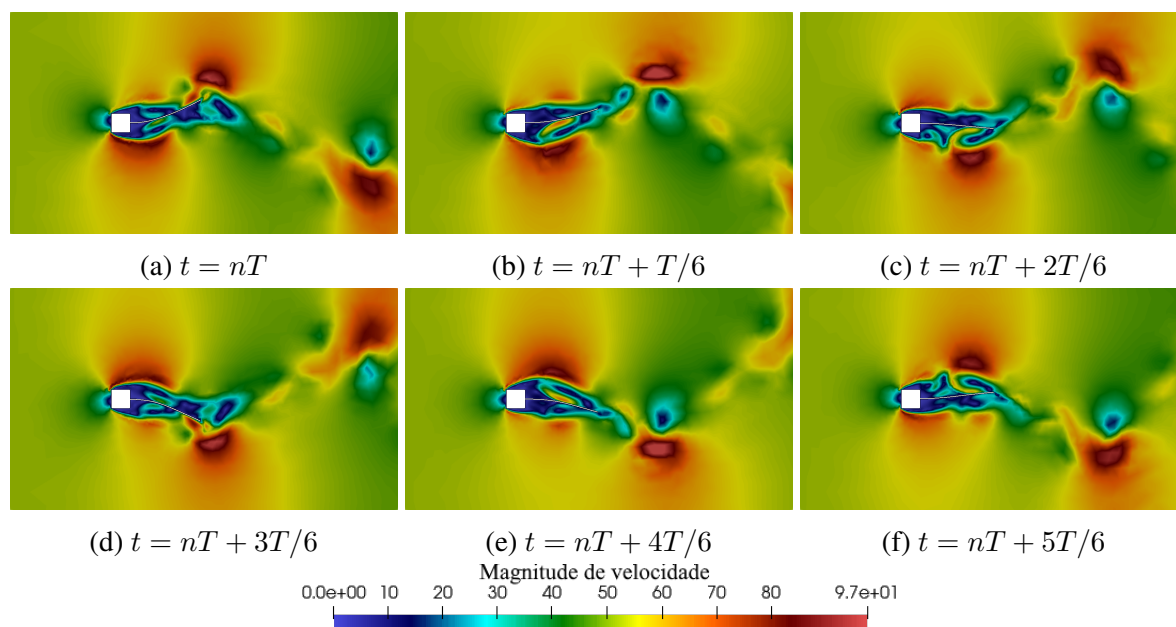
Figura 85 – *Flutter* em painel - Deslocamento vertical na extremidade do painel ao longo do tempo.



Fonte: Presente trabalho (2024).

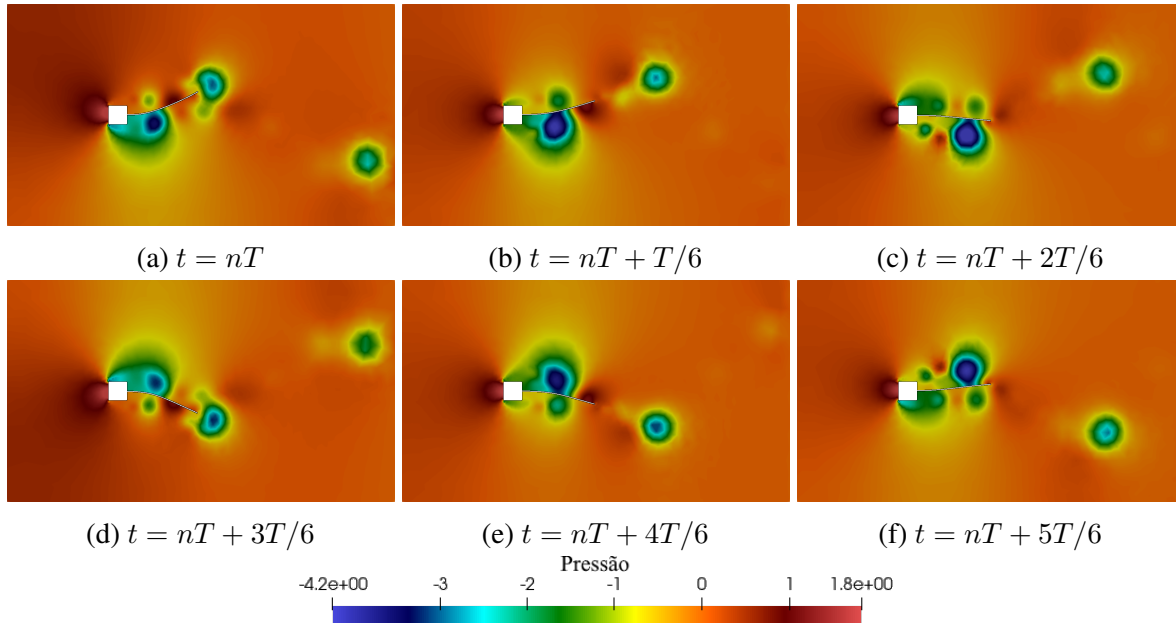
As Figuras 86 a 88 apresentam os campos de velocidade, pressões e a configuração da malha para frações $T/6$ do período, respectivamente.

Figura 86 – *Flutter* em painel - Magnitude do campo de velocidade.



Fonte: Presente trabalho (2024).

Figura 87 – Flutter em painel - Campo de pressão.



Na sequência estudou-se o comportamento do painel quando modelado por uma malha pobre em um domínio de maior espessura. Assim, utilizou-se uma espessura $esp = 4,0$, de forma que o painel possua uma geometria quadrada. Além disso também foi liberado o deslocamento do painel na terceira direção. Com isso, obtém-se uma malha de fluido contendo 6794 elementos quadráticos, com 11806 nós e 47224 graus de liberdade, enquanto a casca possui 200 elementos quadráticos, 441 nós e 3087 graus de liberdade. A Figura 89 apresenta as malhas utilizadas em ambos os domínios.

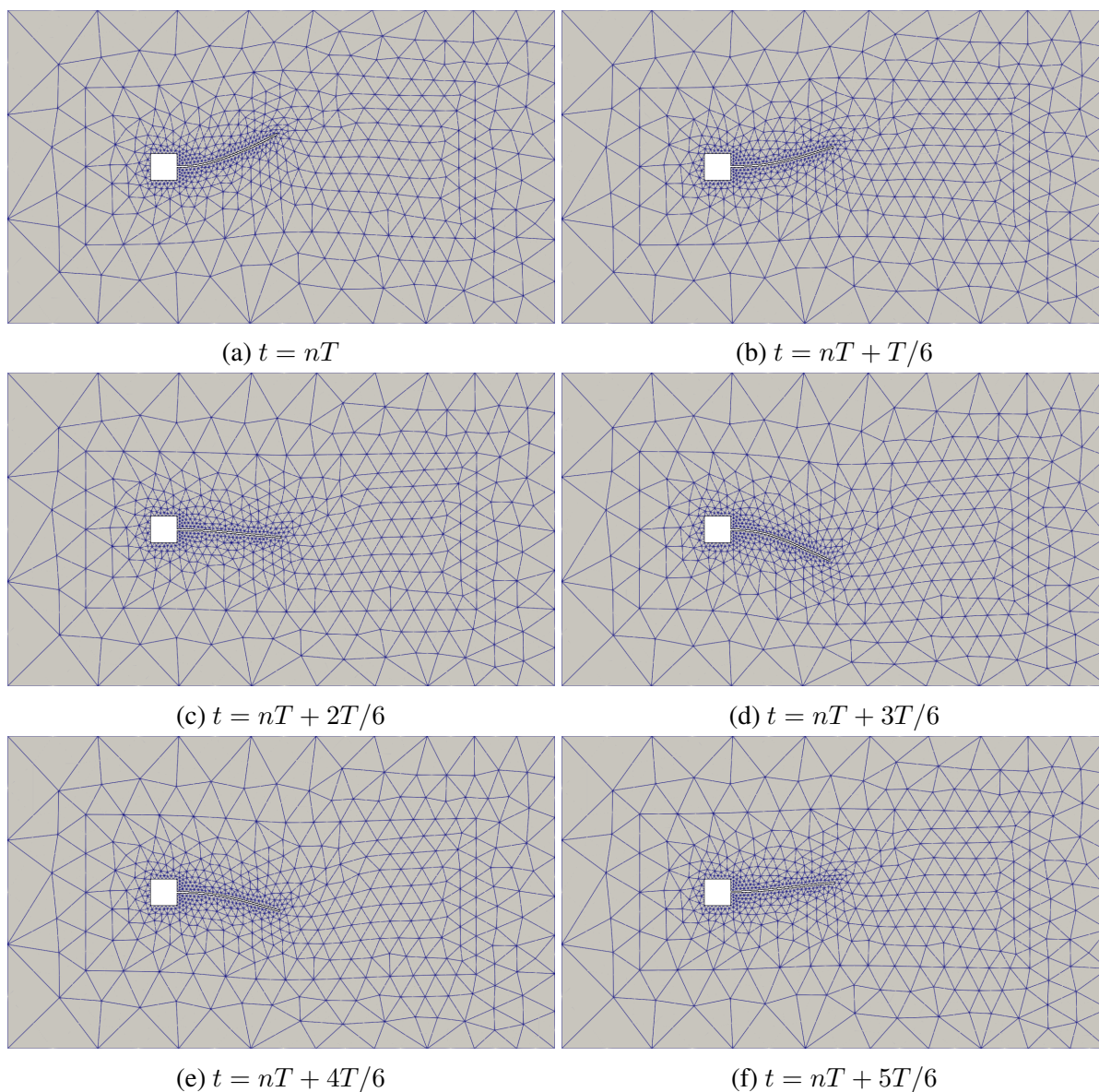
O problema foi simulado com a aplicação das estabilizações SUPG/PSPG e VMS, com e sem aplicação do modelo LES. A Figura 90 apresenta o deslocamento vertical da extremidade do painel ao longo do tempo para as diferentes simulações em comparação com os resultados obtidos por Wall (1999). A Tabela 15 apresenta os valores de amplitude, período e frequência da oscilação após o problema atingir o equilíbrio dinâmico.

Tabela 15 – Flutter em painel - Propriedades da oscilação para malha pobre.

Modelo	Amplitude (cm)	Período (s)	Frequência (Hz)
SUPG/PSPG	-	-	-
SUPG/PSPG+LES	1,379	0,330	3,028
VMS	1,358	0,315	3,179
VMS+LES	1,384	0,327	3,062

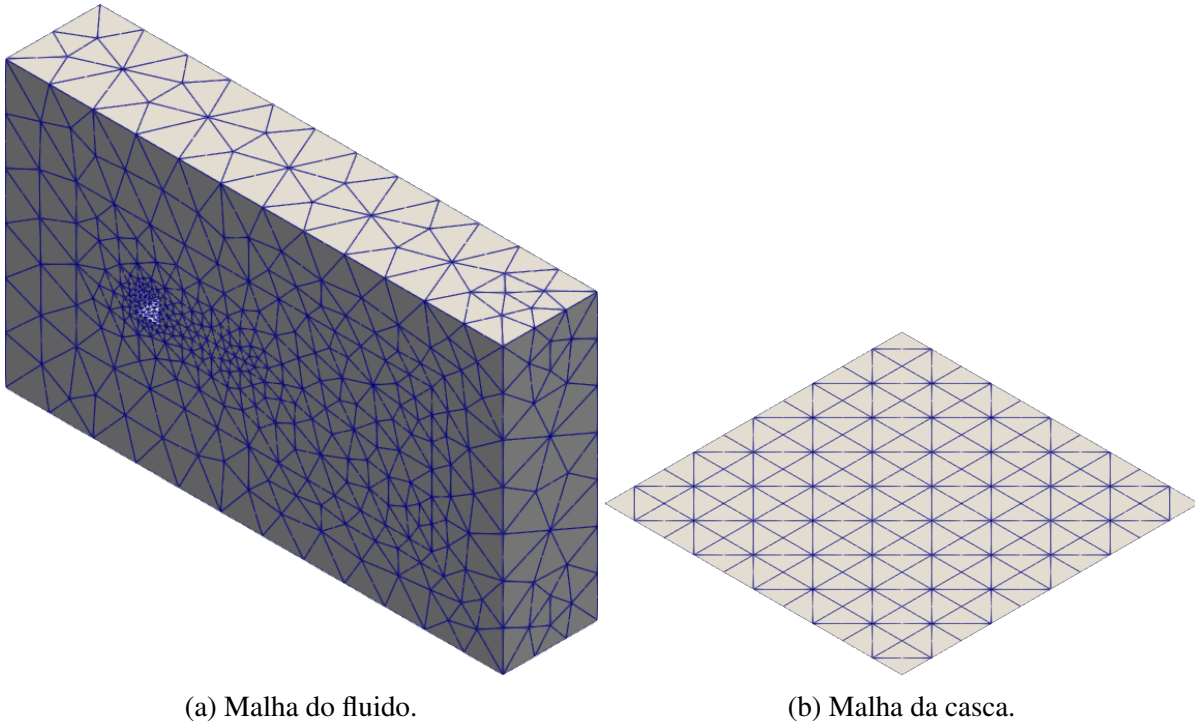
Fonte: Presente trabalho (2024).

Verifica-se que o problema simulado com SUPG/PSPG não atingiu o equilíbrio dinâmico, com uma taxa de aumento da amplitude de deslocamento muito baixa. Já a simulação utilizando a mesma estabilização e o modelo LES já foi capaz de capturar corretamente o comportamento

Figura 88 – *Flutter* em painel - Configurações da malha.

Fonte: Presente trabalho (2024).

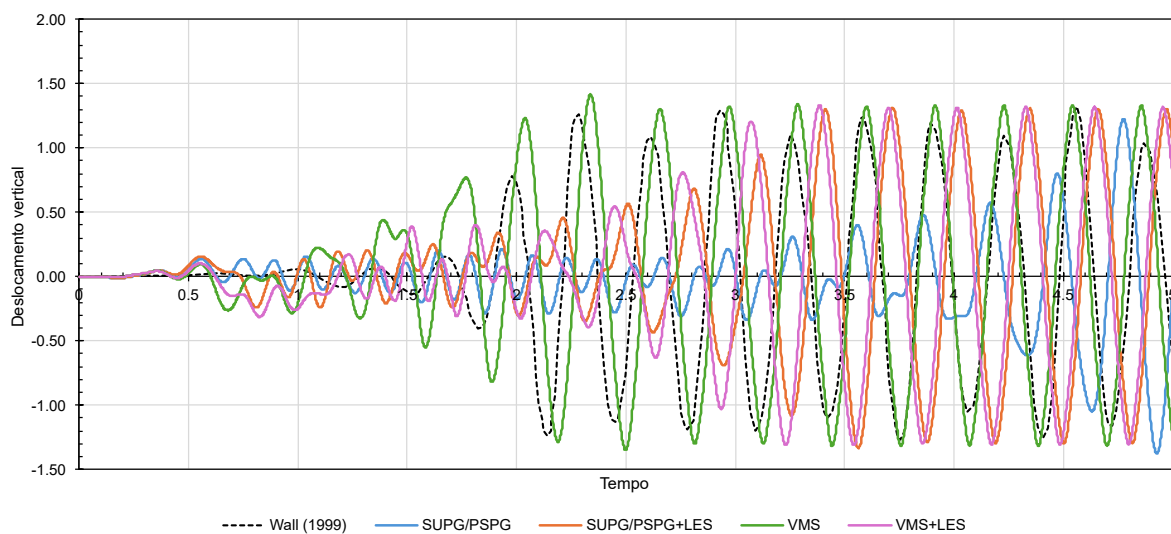
da estrutura. Por fim, tanto a simulação utilizando estabilização VMS, com e sem o LES, foi capaz de descrever adequadamente o comportamento da estrutura.

Figura 89 – *Flutter* em painel - Malha pobre utilizada.

(a) Malha do fluido.

(b) Malha da casca.

Fonte: Presente trabalho (2024).

Figura 90 – *Flutter* em painel - Deslocamento vertical na extremidade para malha pobre.

Fonte: Presente trabalho (2024).

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho objetivou o estudo de ferramentas computacionais eficientes e precisas para a simulação numérica de problemas de interação fluido-estrutura com elevados números de Reynolds. Especificamente, são considerados os casos de escoamentos incompressíveis Newtonianos interagindo com estruturas com comportamento elástico em grandes deslocamentos. Embora os problemas de interação fluido-estrutura estejam muito presentes na engenharia, e as pesquisas relativas aos métodos numéricos para os estudos desses problemas tenham atingido certa maturidade, há ainda diversos desafios que geram custo computacional muito elevado para diversas situações, sendo os escoamentos com turbulência uma das fontes deste custo computacional. Neste trabalho tomou-se como referência uma formulação do método dos elementos finitos para escoamentos incompressíveis com estabilização dos termos convectivos SUPG e com estabilização da pressão PSPG, em descrição ALE. Foram então implementados a formulação variacional multiescala VMS, e o modelo de turbulência LES, ambos em descrição ALE. Para a modelagem da estrutura, empregou-se uma abordagem do método dos elementos finitos baseada em posições para a análise não linear geométrica de estruturas de casca, sendo o acoplamento com o escoamento feito de forma particionada forte.

Partiu-se de códigos já desenvolvidos pelo grupo de pesquisa, sendo esses um programa básico para análise de escoamentos Newtonianos incompressíveis em descrição ALE, e um programa para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas de casca com cinemática de Reissner.

Inicia-se com o estudo da formulação estabilizada do MEF para a simulação de escoamentos incompressíveis, a qual é obtida partindo-se do método dos resíduos ponderados para a obtenção da forma fraca das equações governantes. Nesse ponto, observa-se que o emprego do método clássico de Galerkin (Bubnov-Galerkin) pode conduzir a soluções com variações espúrias e problemas de instabilidades. Uma das fontes de instabilidades advém da escolha dos espaços aproximadores e teste para velocidade e pressão, a qual deve atender as condições de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB) para garantir a estabilidade do campo de pressão. No entanto, a satisfação dessas condições restringe consideravelmente a escolha dos espaços aproximadores, o que motiva o uso de elementos estabilizados, como a estabilização *Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin* (PSPG). Outra fonte de instabilidade surge quando o termo convectivo é dominante sobre o termo dissipativo, aumentando o caráter hiperbólico da equação, sendo necessário o uso de métodos de estabilização, como o *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG). Combinando-se a formulação estabilizada SUPG/PSPG, aplicada à descrição ALE das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis, com o método α -generalizado de marcha no tempo, obtém-se a formulação numérica de referência adotada para a mecânica dos fluidos neste trabalho.

A descrição ALE demanda um modelo de movimentação da malha que garanta a conformidade do domínio computacional do fluido com os contornos móveis, bem como consistência da malha no interior do domínio. Assim, emprega-se um modelo baseado equação de Laplace, a qual é modificada de maneira a tornar os elementos menores mais rígidos em comparação com os maiores. Essa modificação visa manter a qualidade da malha, uma vez que evita distorções elevadas nos elementos menores, fazendo com que os elementos maiores sejam os principais responsáveis por absorver as deformações.

Na sequência, implementa-se o método variacional multiescala (VMS). Esse modelo faz a separação das grandes escalas do problema das pequenas escalas, e produz uma formulação estabilizada que engloba os mesmos termos decorrentes da estabilização SUPG/PSPG, além de introduzir termos adicionais, que atuam inclusive sobre problemas decorrentes de vorticidade.

Visando a obtenção de uma formulação mais eficiente para tratar os problemas decorrentes da turbulência, é implementado o modelo LES, que faz a decomposição dos campos envolvidos em parcelas filtrada e não filtrada, a partir da consideração de um filtro aplicado sobre as variáveis do problema como uma convolução integral. O modelo faz a consideração de que as variáveis não filtradas do escoamento possuem características isotrópicas e homogêneas, permitindo assim a sua modelagem. O modelo de filtro adotado é o modelo de viscosidade de Smagorinsky, adicionando-se um termo de viscosidade de vórtice ao problema, dada em função da taxa de deformação do campo filtrado.

Por meio do estudo de exemplos de análises numéricas de escoamento com contornos fixos, verificou-se a influência da utilização do modelo VMS em comparação ao SUPG/PSPG, ambos com e sem a aplicação de LES, assim como a utilização de elementos finitos Taylor-Hood P2P1 que dispensam a estabilização da pressão. Nota-se que a aplicação do VMS melhora ligeiramente os resultados em relação à formulação SUPG/PSPG. Já a aplicação do LES melhora significativamente a qualidade dos resultados, principalmente à medida em que o número de Reynolds aumenta. Além disso também constata-se que o LES melhora a estabilidade do método em problemas com discretização espacial mais pobre. Também é possível observar que a utilização de elementos P2P1 leva a resultados de menor qualidade em comparação com a formulação PSPG, demandando uma discretização mais refinada para chegar a resultados semelhantes.

Com relação a problemas com contornos móveis, são considerados os exemplos de um cilindro com deslocamento prescrito e de um aerofólio com movimento oscilatório prescrito. Esses problemas são muito empregados para a verificação de programas para escoamentos com contornos móveis, e permitiram notar que as formulações implementadas são eficientes na simulação desses problemas. No entanto, por não apresentarem número de Reynolds muito elevados, não se observa grande influência do LES, sendo possível apenas notar de maneira qualitativa resultados levemente mais estáveis com o emprego do LES do que com a simulação direta. Já a simulação VMS apresentou uma diferença sutil nos resultados em relação ao SUPG/PSPG, no

entanto, mais próximo aos resultados de referência.

Para permitir a compreensão da abordagem adotada para a solução da mecânica das estruturas, permitindo um acoplamento adequado, a formulação posicional do MEF para cascas de Reissner-Mindlin é descrita. Essa formulação baseia-se na aplicação do princípio da estacionariedade da energia considerando-se as posições nodais e vetores generalizados como parâmetros nodais. Escolhe-se o elemento finito triangular com funções de forma quadráticas do tipo polinômios de Lagrange. Exemplos numéricos são simulados e os resultados comparados com a literatura e com simulações feitas no programa ANSYS (2024), empregando o elemento *shell* 281, o qual também emprega a cinemática de Reissner-Mindlin. Nota-se que todos os problemas, tanto em análise estática quanto dinâmica, resultam em valores muito próximos aos de referência. Conclui-se que a formulação e o elemento adotados são adequados para o tipo de problema de IFE que é abordado aqui. Embora nos exemplos analisados a casca seja esbelta, com a adoção da cinemática de Reissner-Mindlin, é possível considerar também elementos espessos.

Por fim, seguindo Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013), parte-se do sistema de equações esperado para o problema monolítico de IFE, e, desprezando-se parcelas da matriz tangente, constrói-se um modelo particionado de acoplamento forte. Esse modelo resulta em solução do tipo Gauss-Seidel do problema acoplado, com 3 blocos que são resolvidos sequencialmente em cada iteração, um para o fluido, outro para a estrutura e outro para a malha, permitindo a utilização de códigos independentes de maneira facilitada. Nota-se que, como o resíduo do problema acoplado não é modificado, havendo convergência, ela ocorre sempre para a solução exata do modelo numérico, no entanto, como a matriz tangente é modificada, não há garantia sobre a ordem de convergência, podendo, inclusive, não haver convergência a depender das características físicas dos meios fluido e sólido considerado, que podem conduzir a um problema fortemente acoplado (quando pequenas perturbação em um dos meios gera grandes perturbações no outro). Há na literatura maneiras eficientes de se tratar esse problema, mas que não fazem parte do escopo deste trabalho, notando-se o método *Augmented* A22, ou relaxações de Aitken.

Considerou-se três exemplos numéricos de interação fluido-estrutura, todos com formação de vórtices, iniciando-se com problemas mais simples e partindo-se para casos mais complexos. No problema 4.1.1, que trata-se de uma cavidade com fundo flexível, notou-se que a formulação apenas com as estabilizações SUPG e PSPG é suficiente para a simulação precisa e estável do problema, sendo que nem o modelo multiescala VMS e nem o modelo de turbulência LES influenciaram significativamente nos resultados obtidos. Já para o problema de *flutter* em painel flexível (4.1.3) foi possível observar que, em simulação com malhas pobres, a simulação SUPG/PSPG, sem a aplicação do LES, não atingiu a convergência, enquanto, ao se aplicar o LES ao problema, essa solução já se aproximou mais dos valores de referência. Por sua vez, em simulação LES-VMS houve um atraso para que o ciclo limite fosse atingido em relação à simulação somente com VMS, porém ainda se manteve coerente com o esperado. Já, comparando-se as simulações sem aplicação de LES, a simulação VMS apresentou resultados

mais próximos dos valores de referência, enquanto a SUPG/PSPG não atingiu a convergência.

Conclui-se que aplicação do LES em problemas de interação-fluido estrutura permite a utilização de malhas mais grosseiras, sem perda significativa de qualidade nos resultados, assim como uma melhora na estabilidade do método, reduzindo, conseqüentemente, o custo computacional.

Para a continuidade da pesquisa, sugere-se como trabalhos futuros a implementação de um modelo de turbulência mais sofisticado, como o *Dynamic Smagorinsky Model* (DSM) (Germano *et al.*, 1991), o qual trata o coeficiente de Smagorinsky não mais como uma constante, mas como função do espaço e do tempo, por meio da adoção de um novo filtro aplicado também sobre as funções teste. Assim esse coeficiente se adapta dinamicamente ao problema analisado, sem a necessidade de calibração por parte do usuário e minimizando a influência do LES próximo à paredes, ou em regiões de relaminarização.

Sugere-se ainda a consideração de outras técnicas de discretização, como o uso da análise isogeométrica, tanto para o fluido como para o sólido, além do emprego de outros elementos para representar a estrutura, tal como elementos sólidos, barras e outros elementos de casca, tornando a ferramenta computacional mais geral. Por fim, sugere-se a aplicação dos modelos de turbulência juntamente com métodos de malhas fixas (com contorno imerso) para interação fluido-estrutura, ampliando-se a gama de problemas que podem ser simulados.

REFERÊNCIAS

AHRENS, J.; GEVECI, B.; LAW, C. Paraview: An end-user tool for large data visualization. **The visualization handbook**, v. 717, n. 8, 2005.

ALFONSI, G. Reynolds-averaged navier–stokes equations for turbulence modeling. **Applied Mechanics Reviews**, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 62, n. 4, 2009.

ANDERSON, J. D.; WENDT, J. **Computational fluid dynamics**. [S.l.: s.n.]: Springer, 1995. v. 206.

ANSYS. **ANSYS Parametric Design Language**. 2024. Acesso em: 11 de abril de 2024. Disponível em: <https://www.ansys.com/>.

ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 32, n. 1-3, p. 85–155, 1982.

ARMALY, B. F. *et al.* Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. **Journal of fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 127, p. 473–496, 1983.

ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos**. 3. ed. [S.l.: s.n.]: Editora da Unicamp, 2020. ISBN 978-8526815179.

AVANCINI, G. **Formulação unificada para análise tridimensional de interação fluido-estrutura com escoamento de superfície livre: Uma abordagem Lagrangiana baseada em posições**. 2023. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2023.

BAILLY, C.; COMTE-BELLOT, G. **Turbulence**. [S.l.: s.n.]: Springer, 2015.

BALAY, S. *et al.* **PETSc Web page**. 2023. <https://petsc.org/>. Disponível em: <https://petsc.org/>.

BATHE, K.-J.; RAMM, E.; WILSON, E. L. Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 9, n. 2, p. 353–386, 1975.

BATTINI, J.-M.; PACOSTE, C. On the choice of the linear element for corotational triangular shells. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 195, n. 44-47, p. 6362–6377, 2006.

BAZILEVS, Y.; AKKERMAN, I. Large eddy simulation of turbulent taylor–couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 229, n. 9, p. 3402–3414, 2010.

BAZILEVS, Y. *et al.* Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 197, n. 1-4, p. 173–201, 2007.

BAZILEVS, Y. *et al.* 3d simulation of wind turbine rotors at full scale. part i: Geometry modeling and aerodynamics. **International journal for numerical methods in fluids**, Wiley Online Library, v. 65, n. 1-3, p. 207–235, 2011.

- BAZILEVS, Y. *et al.* Ale–vms formulation for stratified turbulent incompressible flows with applications. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, World Scientific, v. 25, n. 12, p. 2349–2375, 2015.
- BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. **Computational fluid-structure interaction: methods and applications**. [S.l.: s.n.]: John Wiley & Sons, 2013.
- BELYTSCHKO, T. *et al.* Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 51, n. 1, p. 221–258, 1985. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782585900350>.
- BONET, J. *et al.* Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000.
- BORST, R. D. *et al.* **Nonlinear finite element analysis of solids and structures**. [S.l.: s.n.]: John Wiley & Sons, 2012.
- BRENDEL, B.; RAMM, E. Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells. **Computers & structures**, Elsevier, v. 12, n. 4, p. 549–558, 1980.
- BREZZI, F.; FORTIN, M. Mixed and hybrid finite element methods. *In: Vol. 15 of Springer Series in Computational Mathematics*. New York: Springer, 1991.
- BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/ Petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 32, n. 1-3, p. 199–259, 1982.
- CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional fem applied to thermomechanical impact of truss structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010.
- CATABRIGA, L.; COUTINHO, A. L.; TEZDUYAR, T. Compressible flow supg parameters computed from element matrices. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 21, n. 9, p. 465–476, 2005.
- CATABRIGA, L.; COUTINHO, A. L.; TEZDUYAR, T. E. Compressible flow supg stabilization parameters computed from degree-of-freedom submatrices. **Computational Mechanics**, Springer, v. 38, p. 334–343, 2006.
- CHAU-DINH, T. Analysis of shell structures by an improved 3-node triangular flat shell element with a bubble function and cell-based strain smoothing. **Thin-Walled Structures**, v. 182, p. 110222, 2023. ISSN 0263-8231. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823122007741>.
- CHIANG, T.; SHEU, T. W. A numerical revisit of backward-facing step flow problem. **Physics of fluids**, American Institute of Physics, v. 11, n. 4, p. 862–874, 1999.
- CHUNG, J.; HULBERT, G. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- α method. 1993.
- CHUNG, T. J. **Computational fluid dynamics**. [S.l.: s.n.]: Cambridge university press, 2002.

- CLOUGH, R. **The Finite Element Method in Plane Stress Analysis**. [S.l.: s.n.]: American Society of Civil Engineers, 1960.
- CODA, H. Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no mef. **Volume II, Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos**, 2003.
- CODA, H. B. Two dimensional analysis of inflatable structures by the positional fem. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 6, n. 3, p. 187–212, 2009.
- CODA, H. B.; GRECO, M. A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 193, n. 33-35, p. 3541–3557, 2004.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional fem formulation for geometrically non-linear analysis of shells: curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**, Springer, v. 40, n. 1, p. 185–200, 2007.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. **Mathematical problems in engineering**, Hindawi, v. 2009, 2009.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3d laminate frame analysis including warping for any cross-section. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, 2010.
- DEARDORFF, J. On the magnitude of the subgrid scale eddy coefficient. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 7, n. 1, p. 120–133, 1971.
- DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J.-P. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 33, n. 1-3, p. 689–723, 1982.
- DONEA, J.; HUERTA, A. **Finite element methods for flow problems**. [S.l.: s.n.]: John Wiley & Sons, 2003.
- FELIPPA, C. A.; PARK, K. C.; FARHAT, C. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 24-25, p. 3247 – 3270, 2001. ISSN 0045-7825.
- FERNANDES, J. W. D. **Interação fluido-estrutura com escoamentos incompressíveis utilizando o método dos elementos finitos**. 2016. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2016.
- FERNANDES, J. W. D. **Técnica de superposição de modelos estabilizada para análise de interação fluido-estrutura**. 2020. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2020.
- FERNANDES, J. W. D.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. Ale incompressible fluid–shell coupling based on a higher-order auxiliary mesh and positional shell finite element. **Computational Mechanics**, Springer, v. 63, n. 3, p. 555–569, 2019.
- FÖRSTER, C.; WALL, W. A.; RAMM, E. Artificial added mass instabilities in sequential staggered coupling of nonlinear structures and incompressible viscous flows. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 196, n. 7, p. 1278–1293, 2007.

- GERBEAU, J.-F.; VIDRASCU, M. A quasi-newton algorithm based on a reduced model for fluid-structure interaction problems in blood flows. **ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis**, EDP Sciences, v. 37, n. 4, p. 631–647, 2003.
- GERMANO, M. *et al.* A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics**, American Institute of Physics, v. 3, n. 7, p. 1760–1765, 1991.
- GEUZAINÉ, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009.
- GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. **Journal of computational physics**, Elsevier, v. 48, n. 3, p. 387–411, 1982.
- GHOSAL, S.; MOIN, P. The basic equations for the large eddy simulation of turbulent flows in complex geometry. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 118, n. 1, p. 24–37, 1995.
- HOU, G.; WANG, J.; LAYTON, A. Numerical methods for fluid-structure interaction—a review. **Communications in Computational Physics**, Cambridge University Press, v. 12, n. 2, p. 337–377, 2012.
- HRON, J.; MÁDLÍK, M. Fluid-structure interaction with applications in biomechanics. **Nonlinear analysis: real world applications**, Elsevier, v. 8, n. 5, p. 1431–1458, 2007.
- HUGHES, T. J. Multiscale phenomena: Green’s functions, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 127, n. 1-4, p. 387–401, 1995.
- HUGHES, T. J.; CARNOY, E. Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strains. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 39, n. 1, p. 69–82, 1983.
- HUGHES, T. J. *et al.* The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 166, n. 1-2, p. 3–24, 1998.
- HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Viii. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 73, n. 2, p. 173–189, 1989.
- HUGHES, T. J.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part i. three-dimensional shells. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 26, n. 3, p. 331–362, 1981.
- HUGHES, T. J.; MAZZEI, L.; JANSEN, K. E. Large eddy simulation and the variational multiscale method. **Computing and visualization in science**, Springer, v. 3, n. 1, p. 47–59, 2000.
- HUGHES, T. J.; OBERAI, A. A. The variational multiscale formulation of les with application to turbulent channel flows. *In: Geometry, mechanics, and dynamics*. [S.l.: s.n.]: Springer, 2002. p. 223–239.

HUNT, J. C.; WRAY, A. A.; MOIN, P. Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. **Studying turbulence using numerical simulation databases, 2. Proceedings of the 1988 summer program**, 1988.

IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R. L. On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 191, n. 45, p. 5159–5176, 2002.

JANSEN, K. E.; WHITING, C. H.; HULBERT, G. M. A generalized- α method for integrating the filtered navier–stokes equations with a stabilized finite element method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 190, n. 3-4, p. 305–319, 2000.

JI, C.; MUNJIZA, A.; WILLIAMS, J. A novel iterative direct-forcing immersed boundary method and its finite volume applications. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 231, n. 4, p. 1797–1821, 2012.

JOHN, V.; KNOBLOCH, P. A computational comparison of methods diminishing spurious oscillations in finite element solutions of convection-diffusion equations. **Programs and Algorithms of Numerical Mathematics**, Institute of Mathematics AS CR, p. 122–136, 2006.

KANCHI, H.; MASUD, A. A 3d adaptive mesh moving scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Wiley Online Library, v. 54, n. 6-8, p. 923–944, 2007.

KARAGIOZIS, K. *et al.* A computational study of supersonic disk-gap-band parachutes using large-eddy simulation coupled to a structural membrane. **Journal of Fluids and Structures**, Elsevier, v. 27, n. 2, p. 175–192, 2011.

KATOPODES, N. Free-surface flow, chapter 8-turbulent flow. **Environmental Fluid Mechanics**, p. 566–650, 2019.

LEHMKUHL, O. *et al.* Direct numerical simulation and large-eddy simulations of the turbulent flow around a naca-0012 airfoil. *In: 7th International conference on computational heat and mass transfer*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 1–8.

LING, J.; TEMPLETON, J. Evaluation of machine learning algorithms for prediction of regions of high reynolds averaged navier stokes uncertainty. **Physics of Fluids**, AIP Publishing LLC, v. 27, n. 8, p. 085103, 2015.

LIU, C.; ZHENG, X.; SUNG, C. Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows. **Journal of Computational physics**, Elsevier, v. 139, n. 1, p. 35–57, 1998.

MACIEL, D. N. **Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. 2008. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2008.

MARIONI, Y. F. *et al.* A machine learning approach to improve turbulence modelling from dns data using neural networks. **International Journal of Turbomachinery, Propulsion and Power**, MDPI, v. 6, n. 2, p. 17, 2021.

MARQUES, G. C. d. S. C. **Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais**. 2006. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2006.

- MASUD, A.; BHANABHAGVANWALA, M.; KHURRAM, R. A. An adaptive mesh rezoning scheme for moving boundary flows and fluid–structure interaction. **Computers & fluids**, Elsevier, v. 36, n. 1, p. 77–91, 2007.
- MICHLER, C. *et al.* A monolithic approach to fluid–structure interaction. **Computers & fluids**, Elsevier, v. 33, n. 5-6, p. 839–848, 2004.
- MITTAL, S.; TEZDUYAR, T. E. A finite element study of incompressible flows past oscillating cylinders and aerofoils. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Wiley Online Library, v. 15, n. 9, p. 1073–1118, 1992.
- MOENG, C.-H.; SULLIVAN, P. P. Large-eddy simulation. **Encyclopedia of atmospheric sciences**, Citeseer, v. 2, p. 232–240, 2015.
- MONDKAR, D.; POWELL, G. Ansa-a general purpose computer program for analysis of nonlinear structural response. IASMiRT, 1977.
- MOREIRA, D. H. F. R. **Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura com contato estrutural**. 2021. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2021.
- NAJAFI, M.; AREFMANESH, A.; ENJILELA, V. Meshless local petrov–galerkin method-higher reynolds numbers fluid flow applications. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 36, n. 11, p. 1671–1685, 2012.
- NETO, A. d. S. Fundamentos da turbulência nos fluidos. **Turbulência. Rio de Janeiro, RJ: Associação Brasileira de Ciências Mecânicas ABCM**, p. 1–48, 2002.
- OLAD, P. *et al.* Towards best practice recommendations for turbulence modelling of high-pressure homogenizer outlet chambers–numerical validation using dns data. **Chemical Engineering Science**, Elsevier, v. 258, p. 117748, 2022.
- PICANO, F.; BREUGEM, W.-P.; BRANDT, L. Turbulent channel flow of dense suspensions of neutrally buoyant spheres. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 764, p. 463–487, 2015.
- PIMENTA, P.; CAMPELLO, E.; WRIGGERS, P. A fully nonlinear multi-parameter shell model with thickness variation and a triangular shell finite element. **Computational Mechanics**, Springer, v. 34, n. 3, p. 181–193, 2004.
- PIMENTA, P. d. M.; CAMPELLO, E. d. M. B.; WRIGGERS, P. An exact conserving algorithm for nonlinear dynamics with rotational dofs and general hyperelasticity. part 1: Rods. **Computational Mechanics**, Springer, v. 42, n. 5, p. 715–732, 2008.
- PIOMELLI, U. Large-eddy simulation: achievements and challenges. **Progress in aerospace sciences**, Elsevier, v. 35, n. 4, p. 335–362, 1999.
- PIOMELLI, U. Large-eddy and direct simulation of turbulent flows. **Lecture series-van Karemán Institute for fluid dynamics**, Van Karemán Institute, v. 4, p. G1–G70, 2000.
- POPIOLEK, T. L. **Análise de escoamentos incompressíveis utilizando simulação de grandes escalas e adaptação de malhas**. 2005.
- REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method**. [S.l.: s.n.]: McGraw-Hill New York, 2005. v. 3.

- REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. **The finite element method in heat transfer and fluid dynamics**. [S.l.: s.n.]: CRC press, 2010.
- REYNOLDS, O. Iv. on the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. **Philosophical transactions of the royal society of london.(a.)**, The Royal Society London, n. 186, p. 123–164, 1895.
- RICHTER, T. **Fluid-structure interactions: models, analysis and finite elements**. [S.l.: s.n.]: Springer, 2017. v. 118.
- RUESS, M. *et al.* Weakly enforced essential boundary conditions for nurbs-embedded and trimmed nurbs geometries on the basis of the finite cell method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 95, n. 10, p. 811–846, 2013.
- SANCHES, R. A. **Métodos numéricos para interação fluido-estrutura**. 2022.
- SANCHES, R. A.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to fluid structure interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 259, p. 177–196, 2013.
- SANCHES, R. A. K. **Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o método dos elementos finitos**. 2011. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. On fluid–shell coupling using an arbitrary lagrangian–eulerian fluid solver coupled to a positional lagrangian shell solver. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 38, n. 14, p. 3401–3418, 2014.
- ŠEKUTKOVSKI, B. *et al.* A partitioned solution approach for the fluid–structure interaction of thin-walled structures and high-reynolds number flows using rans and hybrid rans–les turbulence models. **Aerospace Science and Technology**, Elsevier, v. 113, p. 106629, 2021.
- SHAUGHNESSY, E. J.; KATZ, I. M.; SCHAFFER, J. P. **Introduction to fluid mechanics**. [S.l.: s.n.]: Oxford University Press New York, 2005. v. 8.
- SHILT, T.; O’HARA, P. J.; MCNAMARA, J. J. Stabilization of advection dominated problems through a generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 383, p. 113889, 2021.
- SIMO, J. *et al.* Finite deformation post-buckling analysis involving inelasticity and contact constraints. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 23, n. 5, p. 779–800, 1986.
- SIQUEIRA, T. M. **Ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais pelo método dos elementos finitos posicional**. 2019. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2019.
- SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with the primitive equations: I. the basic experiment. **Monthly weather review**, American Meteorological Society, v. 91, n. 3, p. 99–164, 1963.
- SONDAK, D. *et al.* A new class of finite element variational multiscale turbulence models for incompressible magnetohydrodynamics. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 295, p. 596–616, 2015.

SOUZA, J. F. A. d. *et al.* Uma revisão sobre a turbulência e sua modelagem. **Revista Brasileira de Geofísica**, SciELO Brasil, v. 29, p. 21–41, 2011.

SPEZIALE, C. G. Analytical methods for the development of reynolds-stress closures in turbulence. **Annual review of fluid mechanics**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 23, n. 1, p. 107–157, 1991.

TAKIZAWA, K. *et al.* Stabilized space–time computation of wind-turbine rotor aerodynamics. **Computational Mechanics**, Springer, v. 48, p. 333–344, 2011.

TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. Multiscale space–time fluid–structure interaction techniques. **Computational Mechanics**, Springer, v. 48, n. 3, p. 247–267, 2011.

TEIXEIRA, P. R. d. F. Simulação numérica da interação de escoamentos tridimensionais de fluidos compressíveis e incompressíveis e estruturas deformáveis usando o método de elementos finitos. 2001.

TERAHARA, T. *et al.* Heart valve isogeometric sequentially-coupled fsi analysis with the space–time topology change method. **Computational Mechanics**, Springer, v. 65, p. 1167–1187, 2020.

TEZDUYAR, T.; SATHE, S. Stabilization parameters in supg and pspg formulations. **Journal of Computational and Applied Mechanics**, v. 4, n. 1, p. 71–88, 2003.

TEZDUYAR, T. E. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. **Advances in applied mechanics**, Elsevier, v. 28, p. 1–44, 1991.

TEZDUYAR, T. E. Computation of moving boundaries and interfaces and stabilization parameters. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Wiley Online Library, v. 43, n. 5, p. 555–575, 2003.

TEZDUYAR, T. E.; OSAWA, Y. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 190, n. 3-4, p. 411–430, 2000.

TEZDUYAR, T. E. *et al.* Finite element modeling of fluid–structure interactions with space–time and advanced mesh update techniques. *In: Proceedings of the 10th international conference on numerical methods in continuum mechanics (CD-ROM), Zilina, Slovakia.* [S.l.: s.n.], 2005.

TURNER, M. *et al.* Large deflections of structures subjected to heating and external loads. **Journal of the Aerospace Sciences**, v. 27, n. 2, p. 97–106, 1960.

VÁZQUEZ, J. G. V. Nonlinear analysis of orthotropic membrane and shell structures including fluid-structure interaction. Universitat Politècnica de Catalunya, 2007.

WALL, W. A. Fluid-structure interaction based upon a stabilized (ale) finite element method. *In: Computational Mechanics (World Congress), New Trends and Applications, 1998.* [S.l.: s.n.], 1998.

WALL, W. A. Fluid-struktur-interaktion mit stabilisierten finiten elementen. 1999.

WAN, D.; TUREK, S. Fictitious boundary and moving mesh methods for the numerical simulation of rigid particulate flows. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 222, n. 1, p. 28–56, 2007.

- WANG, K. *et al.* Algorithms for interface treatment and load computation in embedded boundary methods for fluid and fluid–structure interaction problems. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Wiley Online Library, v. 67, n. 9, p. 1175–1206, 2011.
- WEMPNER, G. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. **International Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 2, p. 117–153, 1969. ISSN 0020-7683. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768369900250>.
- WICK, T.; WOLLNER, W. Optimization with nonstationary, nonlinear monolithic fluid–structure interaction. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 122, n. 19, p. 5430–5449, 2021.
- XIAO, W. *et al.* Immersed boundary method for multiphase transport phenomena. **Reviews in Chemical Engineering**, De Gruyter, v. 38, n. 4, p. 363–405, 2022.
- YAN, B. *et al.* A three-dimensional immersed boundary method based on an algebraic forcing-point-searching scheme for water impact problems. **Ocean Engineering**, Elsevier, v. 233, p. 109189, 2021.
- YOKOKAWA, M. *et al.* 16.4-tflops direct numerical simulation of turbulence by a fourier spectral method on the earth simulator. In: IEEE. **SC’02: Proceedings of the 2002 ACM/IEEE Conference on Supercomputing**. [S.l.: s.n.], 2002. p. 50–50.
- ZHAO, X. *et al.* Numerical modeling of wave interactions with coastal structures by a constrained interpolation profile/immersed boundary method. **International journal for numerical methods in fluids**, Wiley Online Library, v. 81, n. 5, p. 265–283, 2016.
- ZHENG, K. *et al.* Numerical simulation of water entry of a wedge using a modified ghost-cell immersed boundary method. **Journal of Marine Science and Technology**, Springer, v. 25, p. 589–608, 2020.
- ZHOU, J. *et al.* An alternative three-node triangular composite shell element in terms of reddy-type higher-order theory. **Thin-Walled Structures**, v. 170, p. 108568, 2022. ISSN 0263-8231. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823121006534>.

