UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Departamento de Engenharia de Estruturas

DIMENSIONAMENTO DE PILARES DE ACORDO COM A NBR 6118:2003

Murilo Alessandro Scadelai

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Libânio Miranda Pinheiro

São Carlos, 28 de dezembro de 2004

À minha mãe Maria Aparecida, meu pai Moacyr (em memória), minha irmã Érica e minha noiva Glaucia, dedico este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a DEUS, por ter me dado sabedoria, oportunidade e força sem as quais eu não poderia realizar este trabalho.

A Universidade de São Paulo por ter me oferecido a oportunidade de ampliar conhecimentos e adquirir maior experiência.

Ao Prof Dr Libânio Miranda Pinheiro, pelo exemplo profissional, orientação, dedicação, disciplina, organização, compreensão, respeito, amizade e, acima de tudo, confiança.

Aos professores Roberto Chust Carvalho e Ana Lúcia Homce de Cresce El Debs, pelas contribuições indispensáveis.

Aos meus pais, Maria Aparecida Duarte Scadelai e Moacyr Aparecido Scadelai (em memória), pelo incentivo ao estudo e por todos os anos de luta, trabalho, esforço, preocupação, suporte moral e financeiro, crédito e amor.

A minha irmã Érica Fernanda Scadelai, pelos momentos de carinho e dedicação que me foram ofertados durante esses anos.

À minha amada noiva Glaucia Brisolla de Almeida, por todos os momentos de apoio, compreensão, amor, carinho e preocupação.

Aos amigos: Luciano Carlos Montedor, Ricardo Marks, Walter Luiz, Jerônymo Peixoto, Cláudius Barbosa, Márcio Cardoso Flório, Rogério de Ávila Junqueira, Thadeu de Ávila Junqueira e a todos os outros, que me deram apoio em vários momentos durante o mestrado.

A todos funcionários, professores e colegas do Departamento de Engenharia de Estruturas que colaboraram para o desenvolvimento deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pela bolsa de estudo no início do mestrado.

À Fapesp - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pela bolsa de estudos e reserva técnica, que permitiram o desenvolvimento deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACI	American Concrete Institute
CA	Concreto Armado
CAR	Concreto de Alta Resistência
CARs	Concretos de Alta Resistência
CAD	Concreto de Alto Desempenho
CEB	Comité Euro-International du Béton
CG	Centro de Gravidade
EESC	Escola de Engenharia de São Carlos
EUROCODE	European Code
FIP	Fédération Internationale de la Précontrainte
LN	Linha Neutra
NBR	Norma Brasileira Registrada
USP	Universidade de São Paulo

RESUMO

SCADELAI, M.A. (2004). *Dimensionamento de pilares de acordo com a NBR 6118:2003*. São Carlos, 2004. 124 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Este trabalho apresenta o dimensionamento de pilares, de acordo com a nova NBR 6118:2003 – Projeto de Estruturas de Concreto. É considerado o estado limite último de instabilidade, possível de ocorrer em configurações de equilíbrio de peças de concreto armado submetidas a solicitações normais. Esse estudo torna-se fundamental para que seja possível propor soluções estruturais seguras e economicamente viáveis, de modo a suprir os questionamentos que possam surgir aos projetistas de estruturas e profissionais da área, além constituir uma bibliografia básica de consulta com relação a esse tema. O objetivo é pesquisar os itens relacionados ao dimensionamento de pilares, e investigar a validade dos processos aproximados, através de exemplos abrangendo as situações possíveis dentro do campo de aplicação proposto, de forma a criar um conteúdo de "Prática Recomendada", mais acessível aos profissionais da área e envolvendo critérios práticos de dimensionamento, colocando à disposição um resumo do que existe na Norma e o que é importante que seja seguido. Inicialmente, mostra-se o cálculo do comprimento equivalente do pilar, enquanto elemento isolado da estrutura, e do índice de esbeltez limite, abaixo do qual os efeitos de 2ª ordem podem ser desprezados. Em seguida, os diferentes processos para determinação dos efeitos locais de 2ª ordem são comparados entre si.

Palavras-chave: concreto armado, pilares, normalização, instabilidade, dimensionamento.

ABSTRACT

SCADELAI, M.A. (2004) *Computing of columns in accordance with the NBR 6118:2003*. São Carlos, 2004. 124 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This work presents the computing of columns, in accordance with the new NBR 6118:2003 – Project of Structures of Concrete. It's considered the ultimate limit state of instability, possible to occur in equilibrium configuration of reinforced concrete columns submitted to normal loads. This study has been fundamental to make possible to propose safe and economically reasonable structural solutions, in order to supply the questionings that can appear to the designers of structures and professionals of the area, beyond to constitute a basic bibliography of consultation with regard to this subject. The objective is research details related to the columns project, and investigate the validity of the approached processes, through examples enclosing the possible situations inside the application field, to created a content of "Recommended Practice", more accessible to the professionals of the area and involving practice criterions of computing, placing to the disposal a summary of that exists in the Norm and what is important to be followed. Initially, will be showed the calculation of the equivalent length of the column while isolated element and the limit of the index of slenderness, below of which reveals that the 2ª order effects can be rejected. After that, the different processes for determination of the local effects of 2ª order are compared between itself.

Key-words: reinforced concrete, columns, normalization, instability, computing.

1. INTRODUÇÃO

Capítulo 1

1.1. IMPORTÂNCIA DO ASSUNTO

Nos últimos anos, os avanços na tecnologia dos materiais resultaram na viabilidade de produção de concretos com elevadas resistências à compressão, normalmente designados como concretos de alto desempenho (CAD). A utilização de novos materiais tem resultado em elementos estruturais mais esbeltos, já que suas seções transversais têm diminuído consideravelmente. Com o aumento da esbeltez, ganham importância os efeitos de 2ª ordem. Há um acréscimo dos esforços solicitantes e, conseqüentemente, dos deslocamentos, aumentando o perigo de instabilidade da estrutura ou mesmo do seu colapso.

Por um lado, esses avanços permitiram a idealização de estruturas muito mais versáteis e ousadas, com projetos arrojados e ganhos com relação à área livre e liberdade de criação. No entanto, a conseqüência principal desses avanços está relacionada com a maior probabilidade de se atingir um estado limite de instabilidade da estrutura, principalmente dos pilares, elementos destinados a transmitir os esforços da estrutura para as fundações.

No caso de pilares de concreto armado, a instabilidade é um estado limite último que pode ser atingido nos elementos submetidos à flexo-compressão, resultado da atuação de um carregamento em que cessa sua capacidade portante antes que a estrutura atinja a ruína por ruptura do concreto ou por deformação plástica excessiva da armadura.

O comportamento estrutural de um pilar esbelto de concreto armado, em geral bastante complexo, é um comportamento tipicamente não-linear. A não-linearidade física, decorrente das equações constitutivas não-lineares do concreto e do aço, e a não-

linearidade geométrica, caracterizada pela substancial alteração sofrida pelas solicitações em função dos deslocamentos transversais do eixo do pilar, impõem a necessidade de uma análise detalhada desse elemento estrutural.

Salienta-se ainda, como motivação para o presente estudo, a nova NBR 6118:2003 – Projeto de Estruturas de Concreto, que apresenta, a respeito da instabilidade, uma abordagem muito mais sofisticada e complexa do que a antiga NBR 6118:1978 – Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado. Dessa forma, é muito importante desenvolver estudos e trabalhos que utilizem os novos conceitos apresentados pela Nova Norma, de modo a suprir os questionamentos que possam surgir aos projetistas de estruturas e profissionais da área, além constituir uma bibliografia básica de consulta com relação a este tema.

1.2. JUSTIFICATIVA

No dimensionamento de pilares, é indispensável a análise de sua estabilidade e a consideração, além das solicitações iniciais devidas às cargas aplicadas à estrutura e das solicitações devidas às excentricidades acidentais, também dos momentos decorrentes dos deslocamentos sofridos pela estrutura por ação desse carregamento, que caracterizam os efeitos de 2ª ordem.

Assim, os efeitos de 2ª ordem são aqueles que se somam aos obtidos em uma análise de 1ª ordem (em que o equilíbrio da estrutura é estudado na configuração geométrica inicial), quando a análise do equilíbrio passa a ser efetuada considerando a configuração deformada.

Segundo a NBR 6118:2003, a análise estrutural com efeitos de 2ª ordem deve assegurar que, para as combinações mais desfavoráveis das ações de cálculo, não ocorra perda de estabilidade, nem esgotamento da capacidade resistente de cálculo, devendo ser obrigatoriamente considerada a não-linearidade física, presente nas estruturas de concreto armado.

Dessa forma, a análise da instabilidade pode ser efetuada levando-se em conta as não-linearidades física e geométrica, através de métodos aproximados ou do método geral.

O cálculo pelo método geral consiste em efetuar uma análise não-linear de 2ª ordem, com discretização adequada da barra, consideração da relação momento-curvatura real em cada seção e consideração não aproximada da não-linearidade

geométrica. Portanto, a não-linearidade física é levada em conta a partir da consideração da relação momento-curvatura real em cada seção, enquanto que considerar a não-linearidade geométrica de maneira não aproximada requer o cálculo da curvatura, com os deslocamentos reais da estrutura.

Quanto aos métodos aproximados, a NBR 6118:2003 permite a utilização de alguns deles, como o do pilar-padrão e o do pilar-padrão melhorado, cujas aproximações são relativas às não-linearidades física e geométrica.

O "Método do pilar-padrão com curvatura aproximada" pode ser empregado apenas no cálculo de pilares com $\lambda \leq 90$, seção constante e armadura simétrica e constante ao longo do seu eixo. A não-linearidade geométrica é considerada de forma aproximada, supondo-se que a deformação da barra seja senoidal, e a não-linearidade física é levada em conta por meio de uma expressão aproximada da curvatura na seção crítica.

No "Método do pilar-padrão com rigidez *k* aproximada", aplicável a seções retangulares, valem as mesmas restrições que o método anterior ($\lambda \leq 90$, seção constante e armadura simétrica e constante ao longo do seu eixo) e o mesmo tratamento para a não-linearidade geométrica. Porém, a não-linearidade física deve ser considerada por meio de uma expressão aproximada da rigidez.

Já o "Método do pilar-padrão acoplado a diagramas M, N, 1/r" pode ser empregado no cálculo de pilares com $\lambda \leq 140$; entretanto, se $\lambda > 90$, é obrigatória a consideração dos efeitos da fluência. A determinação dos esforços locais de 2ª ordem pode ser feita utilizando-se para a curvatura da seção crítica valores obtidos de M, N, 1/r específicos para o caso.

O último método, denominado "Método do pilar-padrão para pilares de seção retangular submetidos à flexão composta oblíqua", pode ser utilizado quando $\lambda < 90$ nas duas direções principais. Nessas condições, pode ser aplicado o método do pilar-padrão com rigidez *k* aproximada, simultaneamente em cada uma das duas direções.

Portanto, tem-se como justificativa para este trabalho a necessidade de desenvolver estudos nesta área, com o intuito de tornar acessíveis, a engenheiros projetistas e pesquisadores, os procedimentos de cálculo constantes da NBR 6118:2003, de forma a permitir uma utilização mais eficaz e o conhecimento das características e limitações dessas ferramentas de cálculo, contribuindo para o desenvolvimento de um

projeto estrutural mais seguro e um melhor aproveitamento da capacidade do material concreto armado.

1.3. OBJETIVOS

Devido ao fato dos pilares apresentarem uma elevada suscetibilidade ao fenômeno da instabilidade, existe a tendência dos engenheiros projetistas de evitar, sempre que possível, pilares muito esbeltos. O interesse dos pesquisadores que trabalham nesta área é pois, tornar conhecido e acessível aos projetistas o comportamento desses elementos, para que deles possa ser aproveitada ao máximo sua capacidade resistente, sem comprometer a segurança.

Para isso, é necessário testar a viabilidade dos métodos existentes, a fim de propor soluções e, com isso, tornar mais amplo o uso de pilares de concreto armado, incentivando a adoção de projetos mais arrojados, com um grau de confiabilidade adequado, que permita a concepção de estruturas mais esbeltas. Além disso, é importante dar credibilidade aos chamados processos simplificados, já que eles são propostos pela Norma, dispensam o uso de software específico e fornecem resultados adequados, desde que observadas as suas condições de aplicação.

Com esse intuito, este trabalho tem como proposta estudar o comportamento de pilares de concreto armado submetidos à flexão composta, de acordo com as prescrições da NBR 6118:2003, com objetivo principal de investigar a validade dos processos aproximados de dimensionamento de pilares. Serão apresentados exemplos, dentro do campo de aplicação proposto, de forma a criar um conteúdo de "Prática Recomendada", mais acessível aos profissionais da área e envolvendo critérios práticos de dimensionamento.

1.4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Até por volta de 1960, os pilares eram dimensionados "à flambagem" simplificadamente, multiplicando-se a carga de trabalho, suposta axial, pelo coeficiente de segurança γ e um coeficiente de majoração ω, que dependia do índice de esbeltez, e tinha como base teórica a consideração da flambagem além do limite de proporcionalidade. Esse processo de cálculo era denominado Processo ω (Ômega). Nos

casos de flexão composta, calculava-se a armadura para esta solicitação e verificava-se depois o pilar com a força axial isoladamente, majorada por γ e ω.

Ao longo dos anos, foram desenvolvidos estudos que vêm aperfeiçoando o dimensionamento de pilares, por meio de análises envolvendo tipos variados de seções e solicitações. A complexidade envolvida nesse dimensionamento recai no fato do comportamento dos pilares ser tipicamente não-linear, ou seja, além da não-linearidade geométrica, caracterizada pela substancial alteração sofrida pelas solicitações decorrentes dos deslocamentos transversais do eixo do pilar, observa-se também a não-linearidade física, decorrente das equações constitutivas não-lineares do concreto e do aço.

No Brasil, a Universidade de São Paulo (USP) tem dado uma grande contribuição, por meio de trabalhos desenvolvidos nessa linha. Nos últimos anos, esse assunto vem sendo tratado visando o desenvolvimento de estudos e de programas computacionais, com o intuito de analisar o comportamento estrutural dos pilares e, com isso, otimizar o seu uso na Construção Civil.

AUFIERO (1977) apresenta um estudo sobre estabilidade de pilares solicitados à flexo-compressão normal, considerando a influência do comportamento inelástico do material concreto armado, do tipo de carregamento e da esbeltez, para fins de dimensionamento e definição da capacidade de carga, utilizando o processo simplificado do pilar-padrão, cujos resultados são comparados com valores apresentados pelo Boletim de Informação n º 103 do CEB, utilizando o método geral. Esse trabalho chama a atenção para o verdadeiro significado do fenômeno da flambagem que, para as publicações da época, era considerado como sendo sinônimo de perda de estabilidade na flexo-compressão.

O processo do pilar-padrão também consiste no processo utilizado por BUCHAIM (1979), para analisar os conceitos que intervêm na consideração dos efeitos de 2ª ordem e da instabilidade por divergência do equilíbrio, em pilares de concreto armado sob flexo-compressão.

Em MARCOTTI (1984), apresenta-se uma análise ampla do problema da instabilidade de pilares de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua, que inclui o cálculo de diagramas de curvatura e de interação, com consideração da esbeltez.

FRANÇA (1984) faz um estudo detalhado das relações momento versus curvatura, em seções poligonais quaisquer submetidas à flexo-compressão oblíqua.

PAULA (1988) apresenta um estudo sobre estabilidade das configurações de equilíbrio, de pilares esbeltos de concreto armado, submetidos a flexo-compressão normal e compressão axial, além de fazer um estudo comparativo entre pilares esbeltos em estado limite último, analisado por meio de algoritmos e programas baseados no método geral e no processo aproximado do pilar-padrão.

MENDES NETO (1991) apresenta um estudo sobre estabilidade de pilares de seção qualquer, solicitados à flexo-compressão oblíqua, através do processo do pilar-padrão.

Em FRANÇA (1991) discute-se a questão dos parâmetros que devem ser utilizados para definir o comportamento reológico das peças de concreto armado, necessários para a análise de segunda ordem. Nesse trabalho é proposta a troca da utilização das relações momento-normal-curvatura por relações momento-normal-rigidez.

BACARJI (1993) analisa os vários aspectos que devem ser levados em consideração no projeto estrutural e que estão relacionados ao cálculo de pilares. Apresenta também os métodos para a análise da estabilidade de peças comprimidas, na flexão normal composta, além de fornecer os conceitos e os critérios envolvidos no dimensionamento de pilares, incluindo-se as prescrições das normas brasileiras. Por fim, apresenta alguns exemplos visando avaliar e tirar conclusões sobre os estudos realizados.

No trabalho de CADAMURO JR. (1997) encontra-se um estudo geral sobre o dimensionamento de seções isoladas no estado limite último, como também, sobre pilares esbeltos de concreto armado solicitados à flexo-compressão oblíqua, levando-se em consideração as não-linearidades física e geométrica e o efeito da fluência, além de seção transversal de forma poligonal qualquer e disposição arbitrária da armadura.

Alguns autores têm incluído, em suas publicações sobre os vários aspectos das peças de concreto armado, considerações sobre o fenômeno da instabilidade de pilares esbeltos, como FUSCO (1981), SANTOS (1981,1994) e SÜSSEKIND (1987).

Revistas técnicas como o ACI Structural Journal, Journal of Structural Engineering, The Structural Engineer e Material and Structures têm, nos últimos anos, publicado trabalhos sobre o tema, mostrando o interesse e a preocupação de pesquisadores do mundo inteiro, por meio de trabalhos sobre métodos de análise de pilares, como BAZANT, CEDOLIN & TABBARA (1991) e EL-METWALLY (1994).

BORGES (1999) apresenta a análise de alguns aspectos que interferem no estudo da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado, através de uma abordagem envolvendo aspectos teóricos, como também aspectos práticos, incluindo a resolução de exemplos. Seu estudo é feito com base nos métodos geral e do equilíbrio, com os processos exato e do pilar-padrão, através do software desenvolvido por CADAMURO JR (1997).

SOUZA (2003) apresenta os resultados de estudos paramétricos de pilares de concreto armado, realizados com dois modelos computacionais em análise física e geometricamente não-linear, utilizando as recomendações da NBR 6118:1978 e da NBR 6118:2003. Versões anteriores desses estudos foram enviadas à comissão revisora da NBR:6118, que considerou os resultados apresentados na elaboração da Nova Norma.

KATAOKA (2003) apresenta, através de uma análise minuciosa, o estudo teórico do procedimento de cálculo da armadura longitudinal de pilares com espessura inferior a 20 cm, de acordo com as prescrições da NBR 6118:2003, comparando-as com as recomendações das normas estrangeiras vigentes.

Em seu trabalho, BANKI (2004) faz uma análise do processo simplificado que é introduzido pela NBR 6118:2003, para determinação dos efeitos locais de 2ª ordem em pilares de concreto armado, denominado "Método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada". É apresentada uma abordagem direta, evitando o procedimento iterativo sugerido pela Norma, e uma análise dos resultados obtidos em função do índice de esbeltez e da excentricidade de 1ª ordem.

2. CONCEITOS BÁSICOS

Capítulo 2

2.1. NÃO-LINEARIDADES

O estudo das não-linearidades física e geométrica é fundamental, pois interfere no comportamento das estruturas. Essa interferência é verificada através da relação entre momento e curvatura.

Segundo BORGES (1999), o conceito de linearidade, por vezes, é confundido com o conceito de elasticidade: se é dito que um determinado material tem comportamento elástico-linear, os conceitos elástico e linear são distintos. Uma barra é de material elástico quando, cessada a ação do carregamento aplicado, volta ao comprimento inicial; isso quer dizer que, quando a tensão retorna ao valor zero, a deformação também é nula, não havendo pois nenhuma deformação residual.

Além disso, para as barras sob carregamento monotônico, o conceito mais importante é o de linearidade, ficando o conceito de elasticidade como essencial ao estudo de barras sob carregamento cíclico.

A análise do conceito de elasticidade pode ser feita observando-se o diagrama da Figura 1: se, ao retirar o carregamento, a deformação resultante for nula, ou seja, a relação tensão-deformação retroceder pela curva em traço cheio, o comportamento do material será elástico, mas, se o caminhamento se der através da linha tracejada, existirá deformação residual, portanto, o material terá comportamento inelástico. O fato do diagrama ser curvo demonstra que o material não tem comportamento linear, ou seja, não existe proporcionalidade entre tensão e deformação.

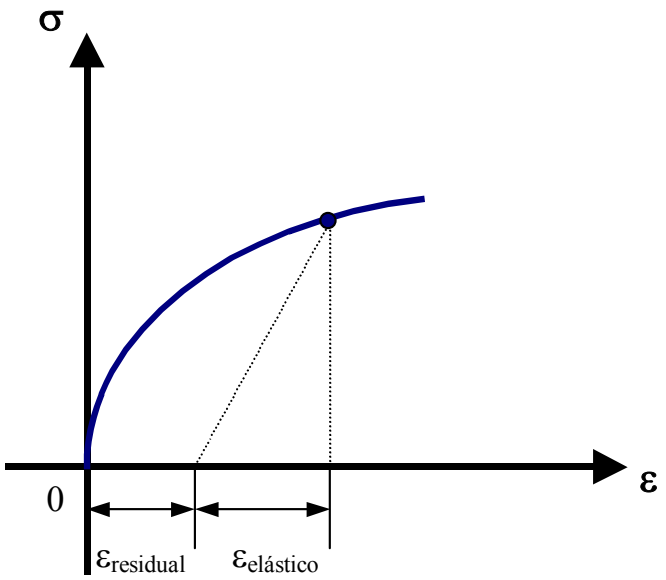

Figura 1. Diagrama tensão-deformação de um material não-linear: trechos de descarregamento

2.1.1. Não-Linearidade Geométrica

Ao se considerar, em uma análise estrutural, os efeitos da mudança de geometria da estrutura, a relação força-deslocamento deixa de ser linear. Essa não-linearidade, denominada geométrica, em geral pode ser desconsiderada quando a hipótese dos pequenos deslocamentos é admitida válida. No entanto, a não-linearidade geométrica torna-se relevante nos casos em que os deslocamentos, relativamente significativos, podem acentuar os problemas de instabilidade ou a interação do esforço axial com os momentos fletores. Nesses casos, devido à grandeza dos deslocamentos, surge a necessidade de se escreverem as equações de equilíbrio em relação à configuração deformada da estrutura. Mesmo que com deslocamentos relativamente pequenos, combinados com certas disposições de cargas na estrutura, podem ocorrer situações de instabilidade ou o surgimento de esforços adicionais.

Segundo BENJAMIN (1982), quando os efeitos não-lineares implicarem em enrijecimento da estrutura, a utilização de uma análise linear pode conduzir a estruturas mais seguras, porém antieconômicas. Por outro lado, se o comportamento não-linear implicar em perda de rigidez ou de estabilidade, a utilização de uma análise linear pode resultar ou induzir a uma falsa noção de segurança estrutural.

A determinação dos esforços solicitantes ao longo das seções transversais de uma peça é feita, geralmente, supondo a estrutura na sua posição indeformada, ou seja, desprezando-se as deformações da peça. Diz-se então que se trata da teoria de 1ª ordem.

A rigor, deve-se sempre considerar a posição deformada da estrutura – Teoria de 2ª ordem – para calcular os esforços solicitantes, já que isso significa grau mais elevado de aproximação. Porém, do ponto de vista prático, a diferença entre os resultados obtidos mediante as teorias da 1ª e da 2ª ordem pode ser tão pequena que não compensa executar um cálculo mais elaborado. Entretanto, no cálculo de pilares, um dos objetos de estudo deste trabalho, a não consideração desses efeitos pode causar discrepâncias consideráveis nos cálculos, sendo imprescindível a consideração da não-linearidade geométrica nos projetos de pilares.

2.1.2. Não-Linearidade Física

A não-linearidade geométrica prova que pode não haver proporcionalidade entre causa e efeito, mesmo quando o comportamento do material é elástico-linear. O problema se agrava quando o próprio material apresenta comportamento não-linear, o que caracteriza a não-linearidade física.

O comportamento do material é linear quando obedece à Lei de Hooke, ou seja, quando a tensão é proporcional à deformação. Caso contrário, o comportamento do material é não-linear.

Ao contrário da não-linearidade geométrica, a não-linearidade física é uma propriedade intrínseca do material, e acarreta não-proporcionalidade entre causa e efeito, mesmo na teoria de 1ª ordem. Considerando-se uma estrutura de concreto armado, a não-linearidade física resulta da resposta não-linear do aço e do concreto, conforme a Figura 2.

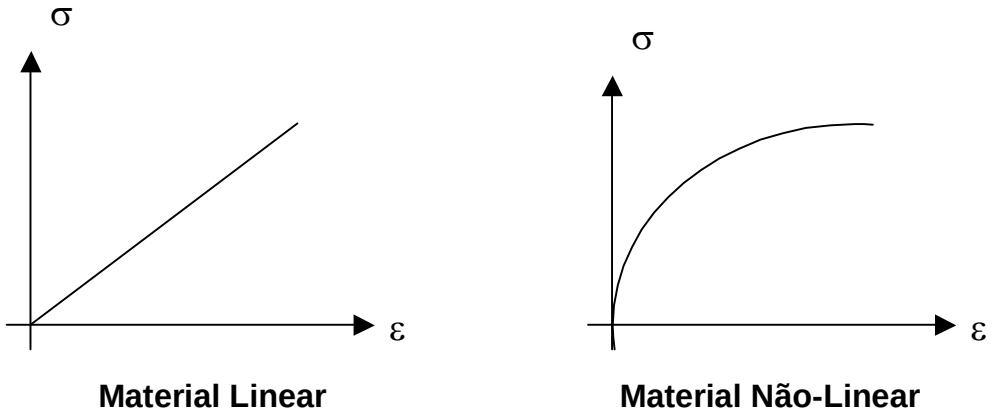

Figura 2. Diagramas tensão-deformação para materiais de comportamento linear e não-linear

2.2. COMPORTAMENTO DO CONCRETO

O concreto armado apresenta comportamento de difícil descrição, resultado da associação de dois materiais estruturais (aço e concreto). O diagrama *tensão-deformação* do concreto não é linear, e é variável para as várias classes de resistência. O concreto é considerado como um material elastoplástico, no entanto apresenta um comportamento aproximadamente elástico-linear para tensões da ordem de até 30% de sua máxima tensão de compressão. A partir desse valor, inicia-se a plastificação do concreto que, graficamente, é traduzida pela deflexão e, principalmente, pelo trecho descendente da curva ***tensão-deformação***.

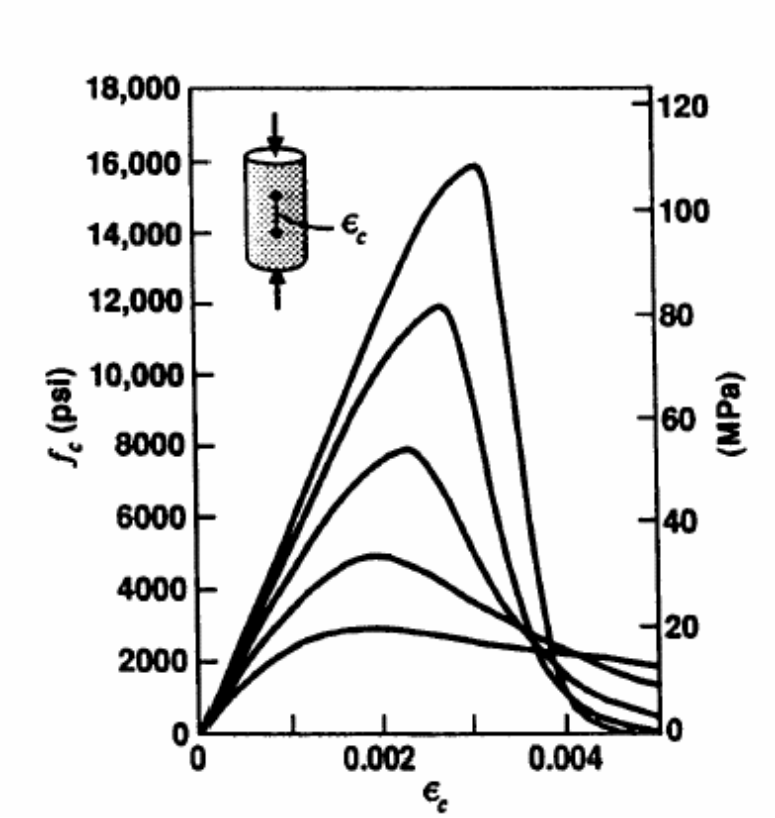

Figura 3. Diagramas tensão-deformação: compressão axial (COLLINS et alii., 1993)

Observando-se a Figura 3, tem-se a idéia de que, para concretos de baixa resistência, o pico das tensões no concreto ocorre em torno da deformação 2‰, enquanto que para concretos com resistência mais elevada, esse valor sofre um aumento gradativo. No entanto, sabe-se que a forma da curva *tensão-deformação* depende de vários fatores, entre os quais: idade do concreto, velocidade e duração do carregamento, além da resistência do concreto.

Segundo a NBR 6118:2003, para dimensionamentos de peças de concreto de seção qualquer, no estado limite último, pode ser empregado o diagrama tensão-deformação idealizado, mostrado na Figura 4, composto de uma parábola do 2º grau entre os valores de ε_c de zero a 2‰, cuja ordenada é $0{,}85.f_{cd}$, e de um trecho reto correspondente aos valores de ε_c entre 2‰ e 3,5‰.

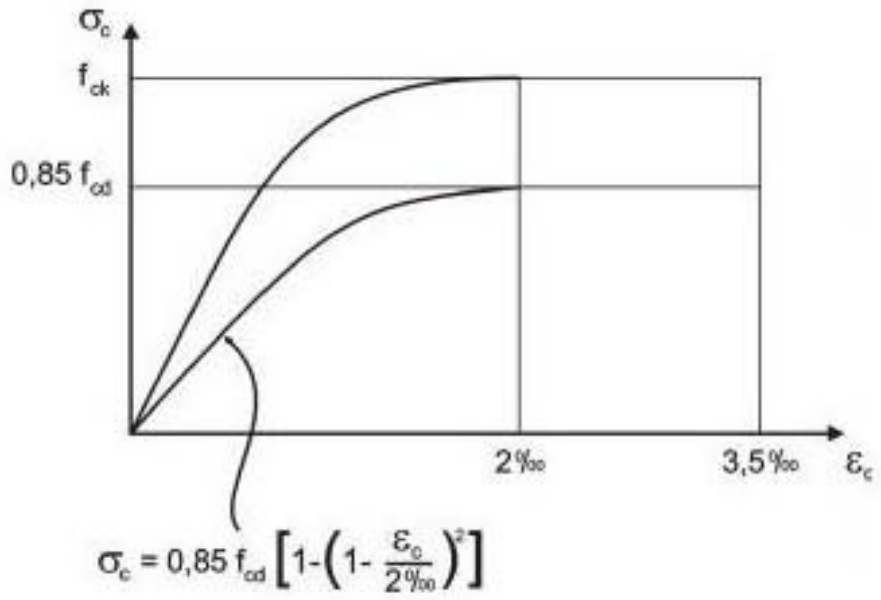

Figura 4. Diagrama tensão-deformação do concreto (NBR 6118:2003)

2.3. EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA LINHA ELÁSTICA

Ao ser solicitada à flexão simples ou composta, uma barra se deforma até atingir uma situação de equilíbrio, sendo a sua configuração deformada denominada linha elástica. Ela surge devido ao fato das seções transversais se deformarem ao longo da barra. Daí, desprezando-se as deformações axiais, e admitindo-se a hipótese de manutenção das seções planas, é possível, a partir da viga da Figura 5, chegar à equação diferencial da linha elástica.

Após a aplicação da carga, o eixo da viga, inicialmente retilíneo e horizontal, deforma-se e assume a forma curva. Para conhecer a forma dessa curva, ou seja, a equação $y = f(x)$ que determina essa curva, deve-se considerar um elemento dx da barra. Após a deformação, as seções transversais, distantes dx entre si, inicialmente paralelas, giram de um ângulo $d\theta$.

Admitindo-se que o material obedeça à Lei de Hooke, a curvatura numa seção genérica é dada pela expressão:

$$\frac{1}{r} = -\frac{M}{EI}$$

onde:

$\frac{1}{r}$ é a curvatura do eixo da barra na configuração deformada.

Uma vez que o momento ***M*** varia ao longo da barra, a linha elástica terá uma curvatura variável.

O próximo passo é estabelecer, a partir da Figura 5, uma relação entre os deslocamentos na direção ***y*** e o valor do momento ***M***, através da dedução do valor da curvatura ***1/r*** em função desses deslocamentos.

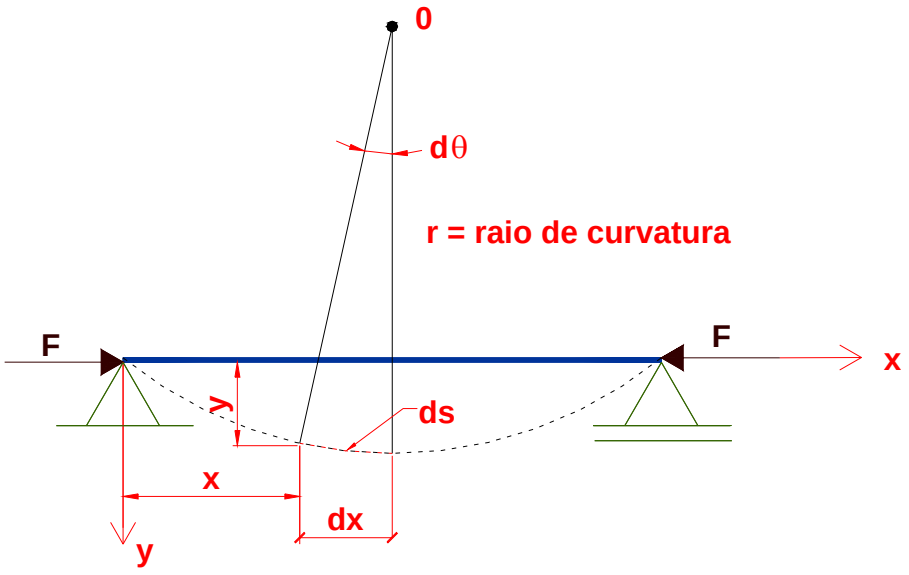

Figura 5. Deformação de uma viga de concreto armado sob flexão

Tem-se então:

$$ds = r \cdot d\theta$$

de onde se tira:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \tag{1}$$

Por outro lado:

$$tg\,\theta = \frac{dy}{dx} \rightarrow \theta = arc\,tg\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{2}$$

Derivando-se a eq. (2) em relação a x, tem-se:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \tag{3}$$

e ainda

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

resultando em:

$$\frac{ds}{dx} = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} \tag{4}$$

Portanto, substituindo as eq. (3) e (4) em (1), tem-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{M}{EI} \tag{5}$$

que é a equação diferencial completa da linha elástica.

Algumas simplificações podem ser feitas, por exemplo desprezando-se ***dy/dx,*** por ser uma parcela muito pequena comparada com as demais grandezas, chegando-se à equação simplificada da linha elástica, que tem a seguinte forma:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \tag{6}$$

Uma outra forma de se obter a equação simplificada é considerar rotações muito pequenas, de forma que, com grande aproximação, se tenha:

$$ds \cong dx \;\; e \;\; \theta \cong tg\,\theta \;\; \text{tal que} \;\; \theta \cong \frac{dy}{dx}$$

e portanto:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

Para barras com deformações muito pequenas, essas simplificações podem ser feitas porque ***dy/dx***, e em particular o seu quadrado, são praticamente desprezíveis, podendo ser desconsideradas sem que haja diferenças que comprometam os resultados obtidos.

Outra forma de se obter a curvatura é através das deformações de um elemento de barra de comprimento ***dx***, indicado na Figura 6, na qual se admite que a barra esteja em equilíbrio após a deformação e que ε seja a deformação relativa de uma fibra genérica distante ***z*** do eixo que passa pelo CG da seção.

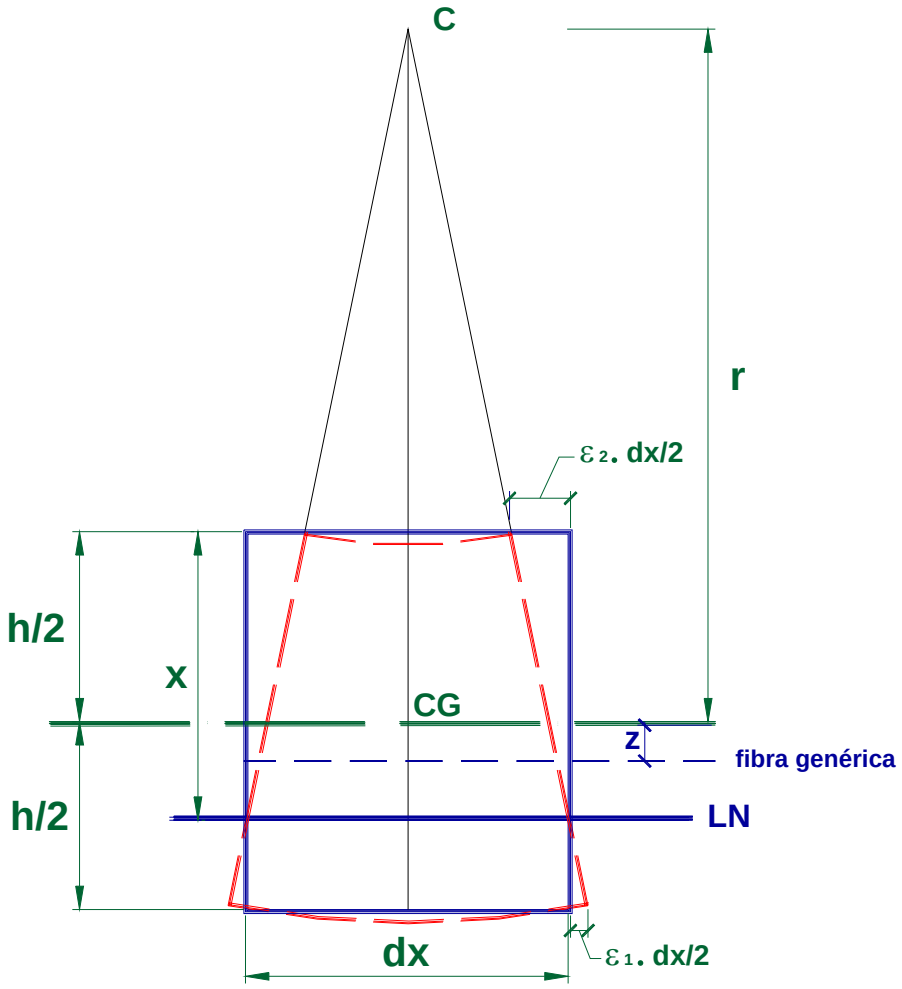

Figura 6. Elemento de barra de comprimento elementar dx

Da condição de permanência das seções planas, tem-se:

$$\frac{-\varepsilon_1 \cdot \frac{dx}{2}}{h-x} = \frac{\varepsilon_2 \cdot \frac{dx}{2}}{x} = \frac{\frac{dx}{2} \cdot (1-\varepsilon)}{r+z}$$

ou:

$$\frac{-\varepsilon_1}{h-x} = \frac{\varepsilon_2}{x} = \frac{1-\varepsilon}{r+z} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h}$$

As expressões anteriores podem ser simplificadas, pelo fato de que $\varepsilon << 1$ e $z << r$; ou seja, pode-se admitir que:

$$\frac{1-\varepsilon}{r+z} = \frac{1}{r}$$

Com essa simplificação, pode-se reescrever a equação anterior, da seguinte forma:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h}$$

No caso de uma viga de concreto armado, com deformações extremas ε_c no concreto comprimido e ε_s na armadura de tração, resulta:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_s}{d} \tag{7}$$

A eq. (7) é uma expressão geral da curvatura, escrita em função das deformações, válida para casos de flexão composta com LN não só dentro como fora da seção, exigindo para a dedução apenas a validade da Lei de Bernoulli, que considera que as seções permanecem planas após a flexão.

2.4. RELAÇÕES MOMENTO – CURVATURA

Segundo BORGES (1999), as relações momento-curvatura são expressões que envolvem grandezas intimamente ligadas aos conceitos de não-linearidade. No caso da relação momento interno versus curvatura, o conceito mais importante é o de não-linearidade física e, no caso da relação momento externo versus curvatura, o de não-linearidade geométrica.

2.4.1. Relação Momento Interno – Curvatura

Considerando-se materiais de comportamento elástico-linear, a cada configuração da elástica corresponde uma certa distribuição de momentos fletores, ou seja, em cada seção o momento interno é dado pela eq. (8), o que corresponde dizer que, graficamente, o diagrama é linear.

$$M_{int} = \frac{1}{r} \cdot EI \tag{8}$$

No caso de materiais de comportamento não-linear, como o concreto armado, não existe proporcionalidade entre tensão e deformação, sendo necessária a obtenção do momento interno através do cálculo direto da resultante das tensões correspondentes ao momento, devido ao fato de que a não-linearidade física do material acarreta não-linearidade entre momento interno e curvatura, ou seja, o resultado é um diagrama curvo, conforme a Figura 7.

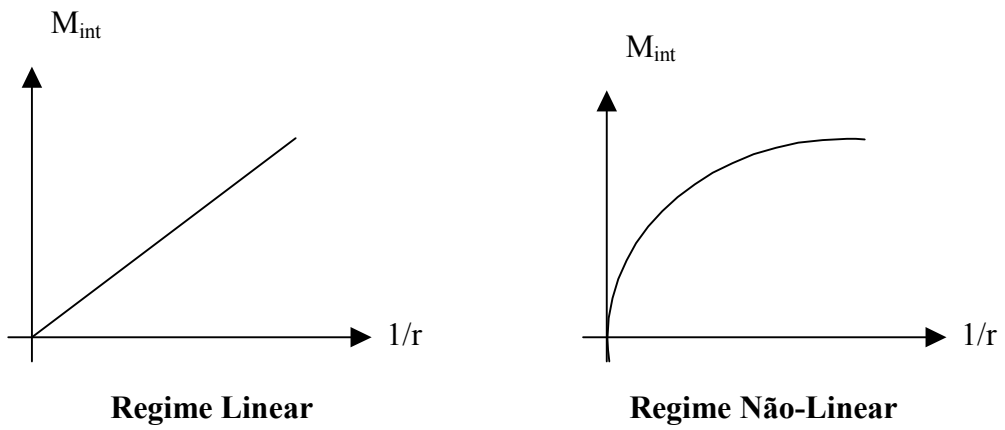

Figura 7. Diagrama Momento Interno versus Curvatura

2.4.2. Relação Momento Externo – Curvatura

A utilização da equação diferencial completa da linha elástica afeta diretamente a determinação do momento externo, tanto na compressão axial como na flexo-compressão. Para a compressão axial, só é possível considerar os efeitos de 2ª ordem quando da utilização da equação completa, que possibilita o cálculo dos deslocamentos que surgem para cargas maiores que a crítica. Na flexo-compressão é possível, através da equação simplificada, obter valores para os deslocamentos, embora não sejam estes os verdadeiros.

Em ambos os casos a expressão do momento externo depende dos valores dos deslocamentos, que são obtidos a partir das equações diferenciais.

Para a compressão axial, tem-se:

$$M_{ext} = F \cdot y \tag{9}$$

e, para flexo-compressão:

$$M_{ext} = F \cdot (e_i + y) \tag{10}$$

onde:

y é o deslocamento num ponto qualquer ao longo da altura da barra;

$\mathbf{e_i}$ é a excentricidade inicial.

Considerando as eq. (9) e (10), e a eq. (5) que contém a equação completa da linha elástica, chega-se a uma relação não-linear *momento externo versus curvatura*, cujos diagramas têm a forma indicada na Figura 8.

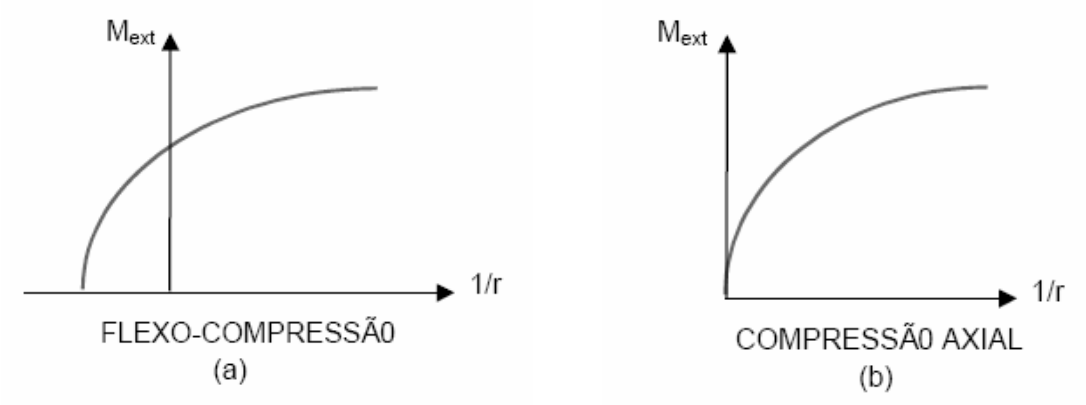

Figura 8. Diagramas momento externo versus curvatura (BORGES, 1999)

Com a utilização da eq. (6), que é a equação simplificada da linha elástica, só é possível chegar a alguma relação na flexão composta, e que resultará em uma relação linear, como mostra a Figura 9.

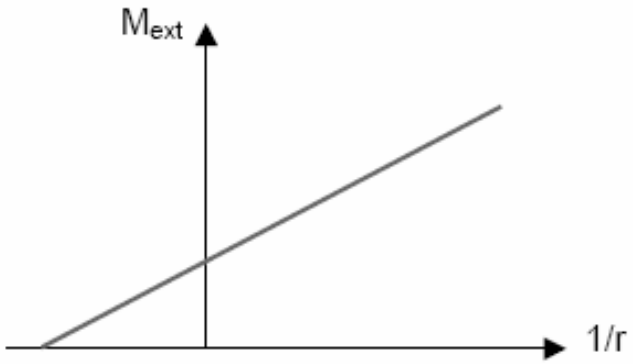

Figura 9. Diagrama momento externo versus curvatura - equação simplificada (BORGES, 1999)

2.5. DIAGRAMA (M,N,1/r)

Segundo BORGES (1999), os problemas de instabilidade, assim como outros problemas da Engenharia, baseiam-se em equações de equilíbrio e de compatibilidade. Essas equações referem-se a estados de deformação, desde solicitações muito baixas até atingir a ruína, seja por esgotamento da resistência do concreto ou por deformação excessiva da armadura, seja por perda de estabilidade. Isso se dá porque os diagramas de ε numa seção podem não pertencer aos domínios de deformação, mas serem constituídos por uma reta qualquer, correspondente a uma situação de serviço ou a uma fase intermediária entre uma situação de serviço e uma de ruína.

A análise de pilares de concreto armado submetidos a flexo-compressão envolve a consideração da teoria de 2ª ordem, sendo essencial definir uma relação entre a curvatura e os esforços, através de diagramas de interação força normal - momento fletor - curvatura. Esses diagramas são a ferramenta básica de qualquer cálculo de verificação da estabilidade.

O diagrama (M,N,1/r) define graficamente uma relação entre essas três grandezas, porém é de execução trabalhosa. Como a curvatura está relacionada com as deformações, e estas se ligam às tensões através das equações constitutivas, sendo conhecidas as tensões, a deformação ε_c e a curvatura 1/r, tem-se todos os elementos para calcular o esforço normal e o momento fletor.

Considere-se um pilar esbelto de concreto armado sujeito a força de compressão excêntrica N, sendo conhecidos: dimensões, quantidade e distribuição da armadura, tipo de aço e concreto e vinculações. Do estudo feito até então, conclui-se ser de fundamental importância determinar o máximo momento interno que a seção pode desenvolver, em função da curvatura da deformada naquela mesma seção.

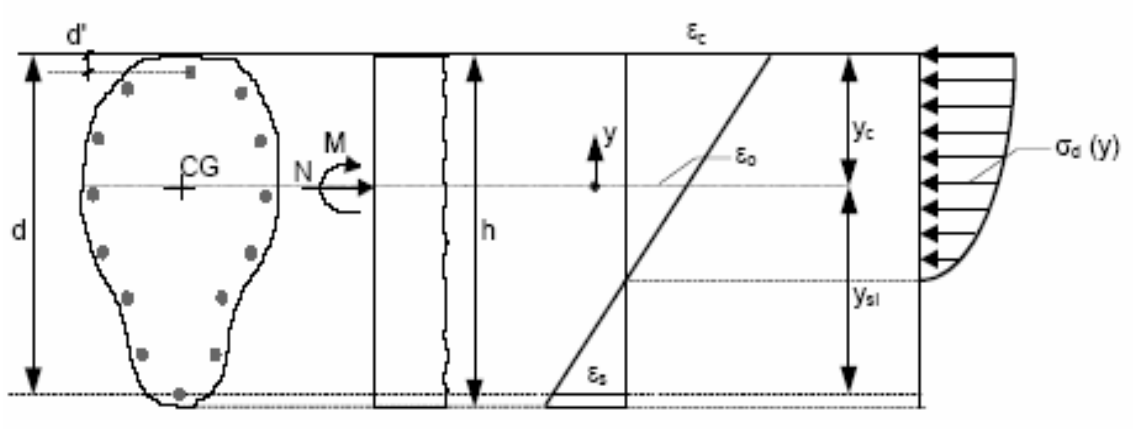

Figura 10. Seção submetida a flexão (BORGES, 1999)

Seja a seção fletida da Figura 10, com armadura conhecida. Rearranjando a eq. (7), tem-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{|\varepsilon_c| - |\varepsilon_s|}{d}$$

Por semelhança de triângulos, tem-se:

$$|\varepsilon_c| = \left|\varepsilon_0 + \frac{y_c}{r}\right|$$

$$|\varepsilon_s| = \left|\varepsilon_0 - \frac{y_{si}}{r}\right|$$

Os estados limites últimos relativos ao material não serão atingidos, enquanto forem obedecidos os limites:

$$|\varepsilon_c| = \left|\varepsilon_0 + \frac{y_c}{r}\right| \leq 3{,}5‰$$

$$|\varepsilon_s| = \left|\varepsilon_0 - \frac{y_{si}}{r}\right| \leq 10‰$$

Assim, a seção, para uma dada curvatura 1/r, não esgotará sua capacidade resistente enquanto não se chegar a um valor $(\varepsilon_o)_{max}$ tal que faça ser atingida, no concreto ou no aço, suas deformações específicas limites. Desse modo, para cada par de valores (1/r, ε_o) tem-se definidos os valores de cálculo dos esforços N_d e M_d capazes de serem resistidos pela seção.

Desta forma, para cada curvatura arbitrada ($1/r_i$), estabelecem-se os vários pares de valores (M_d, N_d) correspondentes a essa curvatura, ou seja, obtém-se, para uma dada curvatura, os grupos de valores interligados ($1/r_i$, M_d, N_d), referentes às variações de ε_o, até se atingir $\varepsilon_{o,max}$. Feito isso, tem-se conhecido o terno (M,N,1/r). Adotando-se outros valores da curvatura e mantendo-se fixos os demais dados, obtém-se o diagrama (M,N,1/r).

2.6. EFEITOS DE 2ª ORDEM

Efeitos de 2ª ordem são aqueles que se somam aos obtidos numa análise de 1ª ordem, quando a análise do equilíbrio passa a ser efetuada considerando a configuração deformada. Esses efeitos podem ser desprezados quando não representem acréscimo superior a 10% nas reações e nas solicitações relevantes da estrutura.

Quando as estruturas são submetidas a ações verticais e horizontais, seus nós deslocam-se horizontalmente. Os esforços de 2ª ordem decorrentes desses deslocamentos são denominados **efeitos globais de 2ª ordem**. Nas barras da estrutura, os respectivos eixos não se mantêm retilíneos, surgindo aí **efeitos locais de 2ª ordem**, que afetam principalmente os esforços solicitantes ao longo dessas barras. Em princípio, todas as estruturas são deslocáveis. Por conveniência de análise, no entanto, elas são classificadas em estruturas de nós fixos e estruturas de nós móveis.

As **estruturas de nós fixos** são aquelas em que os deslocamentos horizontais dos nós são pequenos, e, por decorrência, os efeitos globais de 2ª ordem são desprezíveis (inferiores a 10% dos respectivos esforços de 1ª ordem). Nessas estruturas, basta considerar os efeitos locais de 2ª ordem. As **estruturas de nós móveis** são aquelas em que os deslocamentos horizontais dos nós não são pequenos, e, conseqüentemente, os efeitos globais de 2ª ordem são importantes (superiores a 10% dos respectivos esforços de 1ª ordem). Nessas estruturas, devem ser obrigatoriamente considerados tanto os esforços de 2ª ordem globais, como os locais.

Nas estruturas de nós fixos, permite-se considerar isoladamente cada elemento comprimido, como barra vinculada nas extremidades aos demais elementos estruturais que ali concorrem, onde se aplicam os esforços obtidos pela análise da estrutura segundo a teoria de 1ª ordem. Submetida às ações horizontais, a estrutura é sempre calculada como deslocável. O fato de a estrutura ser classificada como sendo de nós

fixos dispensa apenas a consideração dos esforços globais de 2ª ordem, mas não sua análise como estrutura deslocável.

A NBR 6118:2003 considera **elementos isolados**:

- os elementos estruturais isostáticos;
- os elementos contraventados;
- os elementos das estruturas de contraventamento de nós fixos;
- os elementos das subestruturas de contraventamento de nós móveis desde que, aos esforços nas extremidades, obtidos numa análise de 1ª ordem, sejam acrescentados os determinados por análise global de 2ª ordem.

3. CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS

Capítulo 3

3.1. COMPRIMENTO DE FLAMBAGEM

O comprimento de flambagem depende da vinculação na base e no topo do pilar. Para a determinação do comprimento de flambagem de um pilar, considera-se sua deformada de flambagem quando ele encontra-se submetido ao carregamento mais desfavorável. O comprimento de flambagem determinante corresponde, como indica a Figura 11, à distância entre pontos de inflexão da deformada de flambagem do pilar.

Conforme o grau de engastamento, o ponto de inflexão situa-se mais ou menos próximo do nó, podendo inclusive coincidir com ele, em algumas situações. Portanto, para os casos mais usuais de vinculações, o valor de ℓ e varia de $0{,}5\ell$ a 2ℓ.

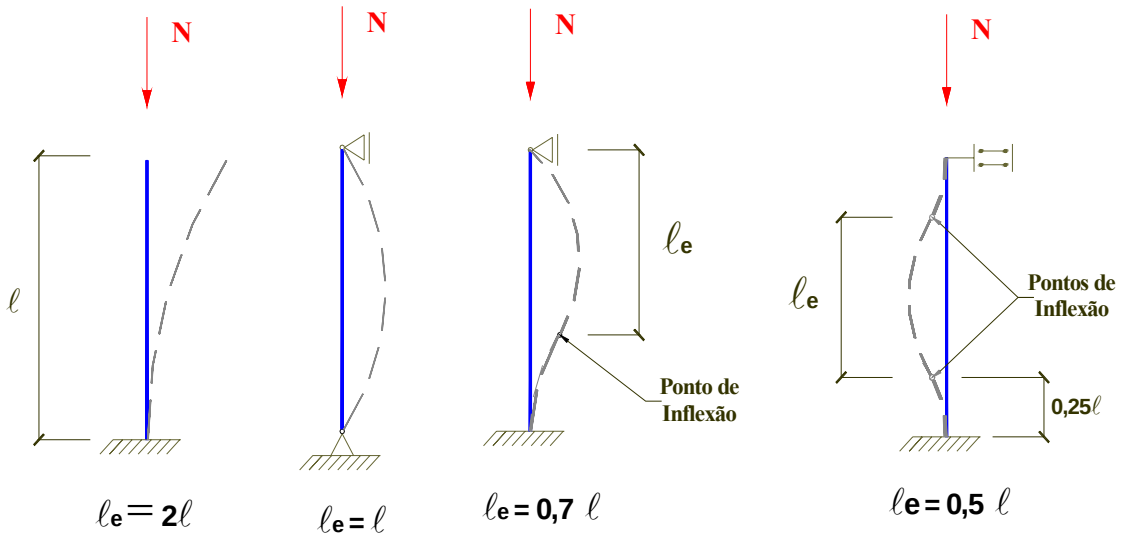

Figura 11. Comprimentos de Flambagem

3.2. DIMENSÕES MÍNIMAS

Com o objetivo de evitar um desempenho inadequado e propiciar boas condições de execução, a NBR 6118:2003, no seu item 13.2.3, estabelece que a seção transversal dos pilares, qualquer que seja a sua forma, não deve apresentar dimensão menor que 19 cm. Em casos especiais, permite-se a consideração de dimensões entre 19 cm e 12 cm, desde que no dimensionamento se multipliquem as ações por um coeficiente adicional γ_n, indicado na Tabela 1, onde:

$$\gamma_n = 1{,}95 - 0{,}05 \cdot b$$

b é a menor dimensão da seção transversal do pilar, em cm.

Tabela 1. Valores do coeficiente adicional γ_n em função de b (NBR 6118:2003)

b (cm)	≥ 19	18	17	16	15	14	13	12
γ_n	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35

Portanto, o coeficiente γ_n deve majorar os esforços solicitantes finais de cálculo nos pilares, quando de seu dimensionamento.

Todas as recomendações referentes aos pilares são válidas nos casos em que a maior dimensão da seção transversal não exceda cinco vezes a menor dimensão ($h \leq 5b$). Quando esta condição não for satisfeita, o pilar deve ser tratado como pilar-parede.

Em qualquer caso, não se permite pilar com seção transversal de área inferior a 360 cm².

3.3. COMPRIMENTO EQUIVALENTE

Segundo a NBR 6118:2003, o comprimento equivalente ℓ_e pilar, suposto vinculado em ambas extremidades, é o menor dos seguintes valores:

$$\ell_e \leq \begin{cases} \ell_0 + h \\ \ell \end{cases}$$

ℓ_0 é a distância entre as faces internas dos elementos estruturais, supostos horizontais, que vinculam o pilar (Figura 12);

h é a altura da seção transversal do pilar, medida no plano da estrutura;

ℓ é a distância entre os eixos dos elementos estruturais aos quais o pilar está vinculado.

No caso de pilar engastado na base e livre no topo, $\ell_e = 2\ell$.

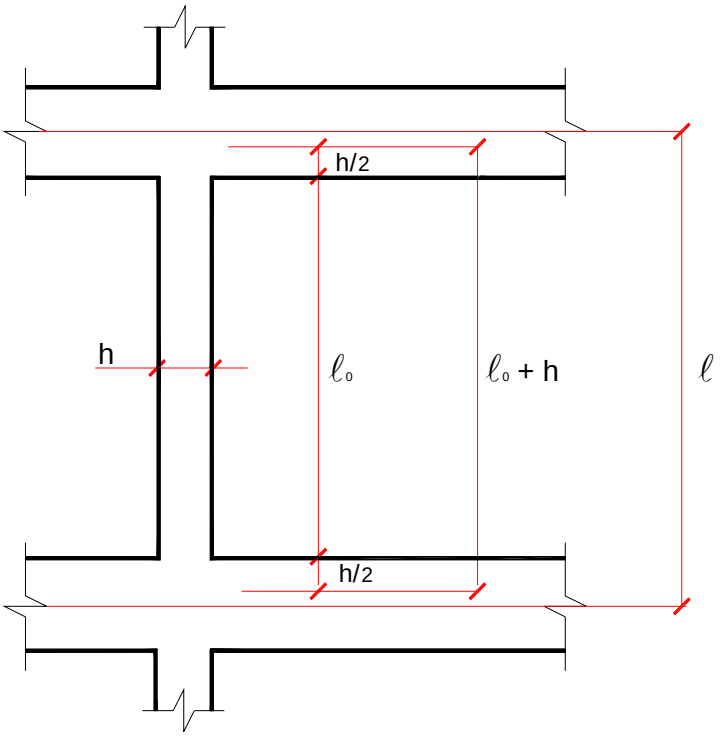

Figura 12. Distâncias ℓ_0 e ℓ

3.4. PILARES INTERNOS, DE BORDA E DE CANTO.

Os pilares podem ser classificados com relação às solicitações iniciais, como é mostrado na Figura 13.

Serão considerados pilares internos aqueles submetidos a compressão simples, ou seja, que não apresentam excentricidades iniciais.

Nos pilares de borda, as solicitações iniciais correspondem a flexão composta normal, ou seja, há excentricidade inicial em uma direção. Para seção quadrada ou retangular, a excentricidade inicial ocorre na direção perpendicular à borda.

Pilares de canto são submetidos a flexão oblíqua. As excentricidades iniciais ocorrem nas direções das bordas.

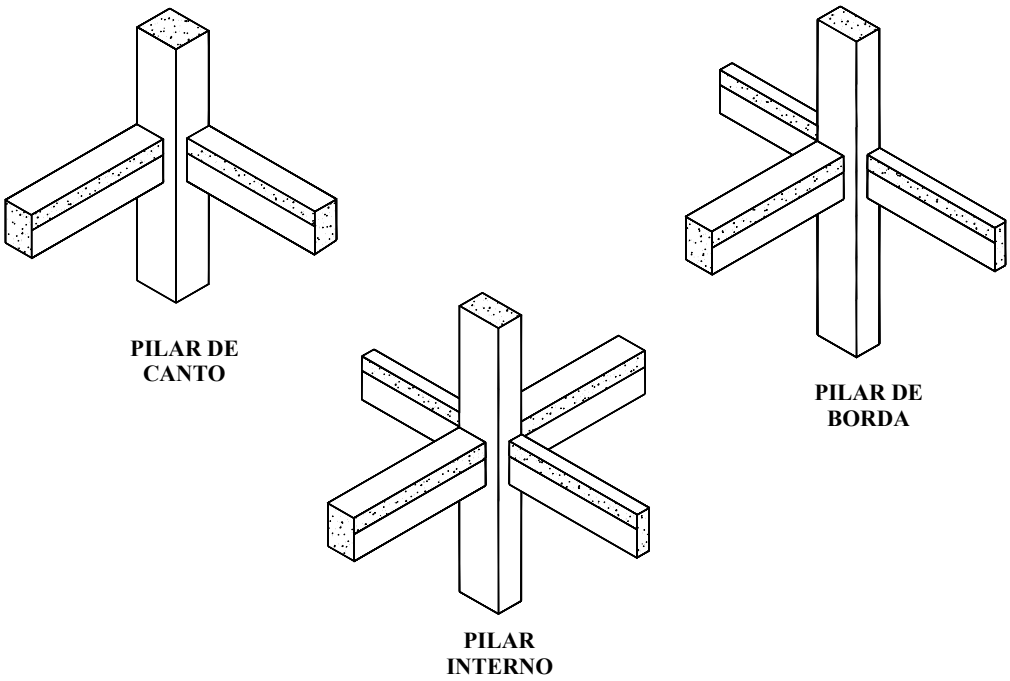

Figura 13. Classificação quanto às solicitações iniciais

3.5. CLASSIFICAÇÃO QUANTO À ESBELTEZ

O índice de esbeltez é definido pela relação:

$$\lambda = \ell_e / i$$

ℓ_e é o comprimento equivalente do elemento isolado (ver item 3.3);

i é o raio de giração mínimo da seção bruta de concreto.

De acordo com o índice de esbeltez (λ), os pilares podem ser classificados em:

- pilares robustos ou pouco esbeltos $\rightarrow \lambda \leq \lambda_1$
- pilares de esbeltez média $\rightarrow \lambda_1 < \lambda \leq 90$
- pilares esbeltos ou muito esbeltos $\rightarrow 90 < \lambda \leq 140$
- pilares excessivamente esbeltos $\rightarrow 140 < \lambda \leq 200$

O valor de λ_1 será considerado no item seguinte. A NBR 6118:2003 não admite, em nenhum caso, pilares com índice de esbeltez λ superior a 200.

3.6. ESBELTEZ LIMITE

O conceito de esbeltez limite surgiu a partir de análises teóricas de pilares, considerando material elástico-linear. Corresponde ao valor da esbeltez a partir do qual os efeitos de 2ª ordem começam a provocar uma redução da capacidade resistente do pilar no estado limite último, quando comparada com a capacidade resistente obtida de acordo com a teoria de 1ª ordem. Segundo SOUZA (2003), o valor dessa redução é definido arbitrariamente, não devendo ser superior a 5% no ACI:1995, ou a 10% no CEB:1990. Os principais fatores que influenciam essa redução da capacidade resistente são:

- a excentricidade relativa de 1ª ordem e_1/h;
- a vinculação dos extremos do pilar isolado;
- a magnitude e a forma do diagrama de momentos de 1ª ordem.

A influência desses fatores sobre a resistência de pilares de concreto foi quantificada por SOUZA (1992), através de uma análise paramétrica de pilares isolados. Os resultados obtidos permitiram a obtenção de equações para o cálculo da redução da capacidade resistente dos pilares sob flexo-compressão normal. Essas equações são válidas para os casos de pilares isolados, com excentricidades iguais e de mesmo sentido nos extremos (curvatura única), de seção retangular, com armaduras iguais e distribuídas ao longo de dois lados opostos. Para o cálculo da esbeltez limite em pilares de concreto armado, SOUZA (1992) deduziu uma equação válida quando a excentricidade relativa de 1ª ordem e_1/h é menor que 0,6, e admitindo-se uma perda máxima de 10% na capacidade resistente do pilar:

$$\lambda_1 = 100 \cdot \sqrt{\frac{0{,}06}{(0{,}4 - 0{,}1 \cdot \omega) \cdot (1 + 3 \cdot e_1/h)}} \qquad (11)$$

ω é a taxa mecânica de armadura;

e_1/h é a excentricidade relativa de 1 ª ordem, de igual valor e sentido nos extremos do pilar.

Posteriormente, SOUZA et al. (1995 e 1998) apud SOUZA (2003) desenvolveram um estudo de casos de pilares de seção retangular, excentricidades iguais e de mesmo sentido e armaduras iguais e distribuídas ao longo de dois lados opostos, analisando e simulando 115 pilares, para diferentes índices de esbeltez, amplitudes de excentricidades, taxas de armadura e relação entre as excentricidades extremas.

Baseado nos resultados obtidos nesses dois trabalhos, SOUZA et al. (1995 e 1998) apud SOUZA (2003) propuseram as seguintes equações, que permitem a avaliação do valor de λ_1 para diversos casos práticos:

$$\lambda_1 = \alpha \cdot \left(42 - 50 \cdot {e_{1a}}/{h}\right) \qquad \text{para } {e_{a1}}/{h} \leq 0{,}34 \tag{12}$$

$$\lambda_1 = 25 \cdot \alpha \qquad \text{para } 0{,}34 < {e_{a1}}/{h} < 0{,}75 \tag{13}$$

$$\lambda_1 = \alpha \cdot \left(13 + 16 \cdot {e_{1a}}/{h}\right) \qquad \text{para } {e_{a1}}/{h} \geq 0{,}75 \tag{14}$$

$$\lambda_1 \leq 80 \tag{15}$$

$\mathbf{e_{1a}}$ é a maior das excentricidades de 1ª ordem nos extremos do pilar;

$\boldsymbol{\alpha}$ é o coeficiente que leva em conta a influência da forma do diagrama de momentos de 1ª ordem ao longo do pilar no valor de λ_1.

O limite indicado na eq. (15) foi arbitrado de forma a limitar o índice de esbeltez máximo absoluto para a dispensa dos efeitos de 2ª ordem. Para a determinação do coeficiente α, SOUZA et al. (1995 e 1998) apud SOUZA (2003) utilizou uma metodologia semelhante à utilizada para a determinação de λ_1, ou seja, considerando uma perda de 10% da capacidade resistente do pilar, obtiveram as seguintes equações:

$$\alpha = 1{,}35 - 0{,}35 \cdot {e_{1b}}/{e_{1a}} \qquad \text{para } {e_{1a}}/{h} = 0{,}05 \tag{16}$$

$$\alpha = 1{,}60 - 0{,}60 \cdot {e_{1b}}/{e_{1a}} \qquad \text{para } {e_{1a}}/{h} = 0{,}10 \tag{17}$$

Para efeito prático, deve-se fixar a equação de α de acordo com a excentricidade mínima adotada no projeto dos pilares. Para o caso da NBR 6118:2003, caso seja respeitado o momento mínimo de $0{,}10.h.N_d$, a excentricidade e_{1a}/h seria no mínimo igual a 0,10, podendo-se utilizar a eq. (17).

Em estruturas de nós fixos, dificilmente um pilar de pórtico, não muito esbelto, terá seu dimensionamento afetado pelos efeitos de 2ª ordem, pois o momento fletor total máximo provavelmente será apenas o de 1ª ordem, num de seus extremos.

Segundo a NBR 6118:2003, item 15.8.2, os esforços locais de 2ª ordem em elementos isolados podem ser desprezados quando o índice de esbeltez λ for menor que o valor limite λ_1, que pode ser calculado pelas expressões:

$$\lambda_1 = \frac{(25 + 12{,}5 \cdot e_1/h)}{\alpha_b} \tag{18}$$

$$35 \le \lambda_1 \le 90 \tag{19}$$

sendo e_1 a excentricidade de 1ª ordem. A NBR 6118:2003 não deixa claro como se adota este valor. Na dúvida, pode-se admitir, no cálculo de λ_1, e_1 igual ao menor valor da excentricidade de 1ª ordem, no trecho considerado.

O valor de α_b deve ser obtido conforme estabelecido a seguir:

a) Pilares biapoiados sem forças transversais

$$\alpha_b = 0{,}60 + 0{,}40\frac{M_B}{M_A} \ge 0{,}40 \quad , \qquad \text{sendo :} \quad 0{,}4 \le \alpha_b \le 1{,}0$$

M_A é o momento fletor de 1ª ordem no extremo A do pilar (maior valor absoluto ao longo do pilar biapoiado);

M_B é o momento fletor de 1ª ordem no outro extremo (B) do pilar (toma-se para M_B o sinal positivo, se tracionar a mesma face que M_A, e negativo em caso contrário).

b) Pilares biapoiados com forças transversais significativas, ao longo da altura

$$\alpha_b = 1$$

c) Pilares em balanço

$$\alpha_b = 0{,}80 + 0{,}20\frac{M_C}{M_A} \geq 0{,}85 \quad , \qquad \text{sendo:} \quad 0{,}85 \leq \alpha_b \leq 1{,}0$$

M_A é o momento fletor de 1ª ordem no engaste;

M_C é o momento fletor de 1ª ordem no meio do pilar em balanço.

d) Para pilares biapoiados ou em balanço com momentos fletores menores que o mínimo

$$\alpha_b = \mathbf{1}$$

Segundo SOUZA (2003), nos pilares considerados isoladamente, a excentricidade de 2ª ordem varia ao longo da reta que liga os seus extremos, nestes se anulando. A Figura 14 mostra a variação desta excentricidade para os pilares com curvatura única e reversa.

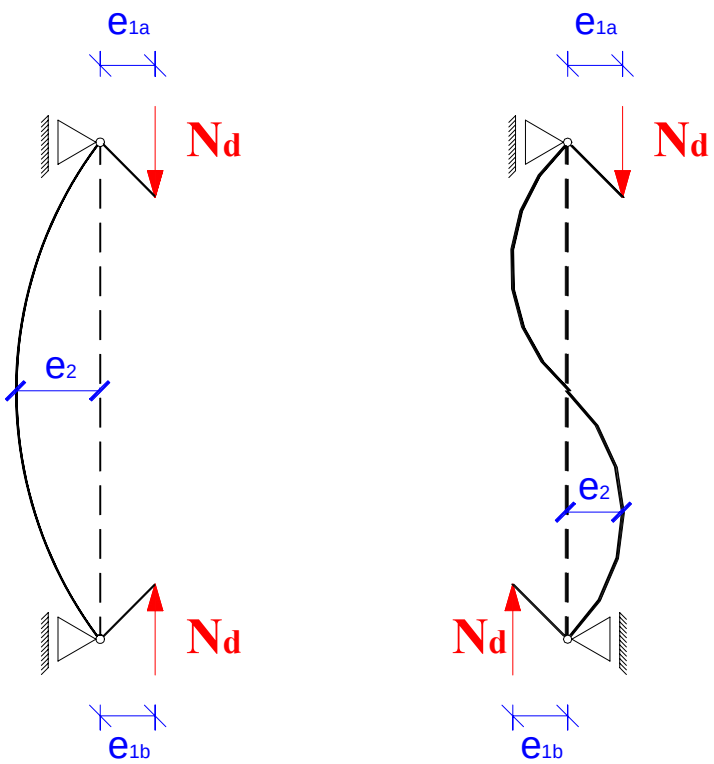

Figura 14. Pilar com efeito de 2ª ordem em curvatura única ($e_{1b}/e_{1a} \geq 0$) e reversa ($e_{1b}/e_{1a} < 0$)

Verifica-se pela Figura 14 que para os pilares com curvatura única e excentricidades de 1ª ordem iguais nos extremos, $e_{1a} = e_{1b}$, a excentricidade de 1ª

ordem, e_1, e a excentricidade de 2ª ordem, e_2, são aditivas em todos os pontos ao longo do pilar. A determinação da seção crítica no dimensionamento é imediata e corresponde à seção do meio do vão, pois é onde se situa o ponto de máximo da soma de e_1 com e_2.

Entretanto, quando os pilares estão submetidos a excentricidades ou momentos desiguais nas duas extremidades, a curvatura da peça é diferente e a determinação da seção crítica deixa de ser imediata. Para este caso, a NBR 6118 (2003), em seu item 15.8.2.a, utiliza a eq. (20) originária das normas americanas de estruturas de aço.

$$\alpha_b = 0{,}6 + 0{,}4\left(e_{1b} / e_{1a} \right) \geq 0{,}4 \qquad (20)$$

Em estudos anteriores, SOUZA (1992) e SOUZA et al. (1993), apud SOUZA (2003), propõem que o limite inferior de 0,4 para o valor de α_b poderia ser desconsiderado. Cabe salientar ainda que o CEB (1990) também desconsidera o limite inferior de 0,4, enquanto que SALMON & JOHNSON (1996), citando vários estudos sobre pilares metálicos, concluem que a adoção de um limite inferior de 0,4 na equação de α_b é "um procedimento muito conservador".

SOUZA (2003) apresenta ainda em seu trabalho uma comparação dos valores propostos pela NBR 6118:2003 para λ_1 com outras normas e estudos, considerando-se sempre o mesmo comprimento de flambagem (Tabela 2). Deve-se observar que este procedimento pode resultar em algumas discrepâncias, já que algumas normas permitem reduzir o comprimento de flambagem dos pórticos de nós móveis, ou de nós fixos, para cerca de 75% do comprimento livre (BS-8110, 1985). No método proposto, foi adotado e_{1a}/h igual a 0,05 ou 0,10, sendo α calculado sempre pela eq. (17) em função da relação e_{1b}/e_{1a}.

Os valores grifados da Tabela 2 correspondem aos maiores valores encontrados para λ_1 em cada situação estudada.

Tabela 2. Comparação entre diversas normas e propostas para valores de λ_1 (SOUZA, 2003)

Método	$e_{1b}/e_{1a} = 1,0$		$e_{1b}/e_{1a} = 0,5$		$e_{1b}/e_{1a} = 0$		$e_{1b}/e_{1a} = -0,5$		$e_{1b}/e_{1a} = -1,0$	
	e_{1a}/h 0,05	e_{1a}/h 0,10	e_{1a}/h 0,05	e_{1a}/h 0,10	e_{1a}/h 0,05	e_{1a}/h 0,10	e_{1a}/h 0,05	e_{1a}/h 0,10	e_{1a}/h 0,05	e_{1a}/h 0,10
NBR 6118 (2003)[1]	-	35	-	44	-	58	-	88	-	88
NBR 6118 (1978)	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
CEB/90[2] (1990)	12	12	18	18	24	24	30	30	36	36
EuroCode 2 (1989)	25	25	37,5	37,5	50	50	62,5	62,5	75	75
ACI-318 (1995)	22	22	28	28	34	34	40	40	46	46
BS-8110[3] (1985)	52	52	52	52	52	52	52	52	52	52
MacGregor[4] (1993)	a) 13 b) 35	13 35	19 35	19 35	25 35	25 35	31 35	31 35	31 35	31 35
Santos (1991)	12,5	14,6	-	-	33,6	39,2	-	-	74	82
Souza[5] (1992)	37,3	35,1	43,8	41,2	50,4	47,4	56,9	53,5	63,4	59,7
França[6] (1994)	30	30	37,5	37,5	45	45	52,5	52,5	60	60
Souza et al (1995 e 1998)	39,5	37	46,4	43,5	53,3	50	60,2	56,4	67,2	62,9

Observações:
1 – Recomenda excentricidade mínima de h / 10
2 – Equação para ν maior que 0,39
3 – Para o caso de colunas pertencentes a pórticos de nós fixos
4 – a) Pórticos indeslocáveis b) Pórticos deslocáveis
5 – Para α dado pela equação 1.7 e ω igual a 0,2436
6 – Recomenda excentricidade mínima de h / 10

Os valores mostrados na Tabela 2 indicam que para os valores da relação e_{1b}/e_{1a} maiores ou iguais a zero os valores de λ_1 recomendados pela NBR 6118:2003 são os maiores, entre as referências pesquisadas.

4. EXCENTRICIDADES

Capítulo 4

4.1. EXCENTRICIDADES DE 1ª ORDEM

4.1.1. Excentricidade Inicial

Em estruturas de edifícios de vários andares, ocorre um monolitismo nas ligações entre vigas e pilares que compõem os pórticos de concreto armado. A excentricidade inicial, oriunda das ligações dos pilares com as vigas neles interrompidas, ocorre em pilares de borda e de canto. A partir das ações atuantes em cada tramo do pilar, as excentricidades iniciais no topo e na base são obtidas pelas expressões (Figura 15):

$$e_{i,topo} = \frac{M_{topo}}{N} \quad \text{e} \quad e_{i,base} = \frac{M_{base}}{N}$$

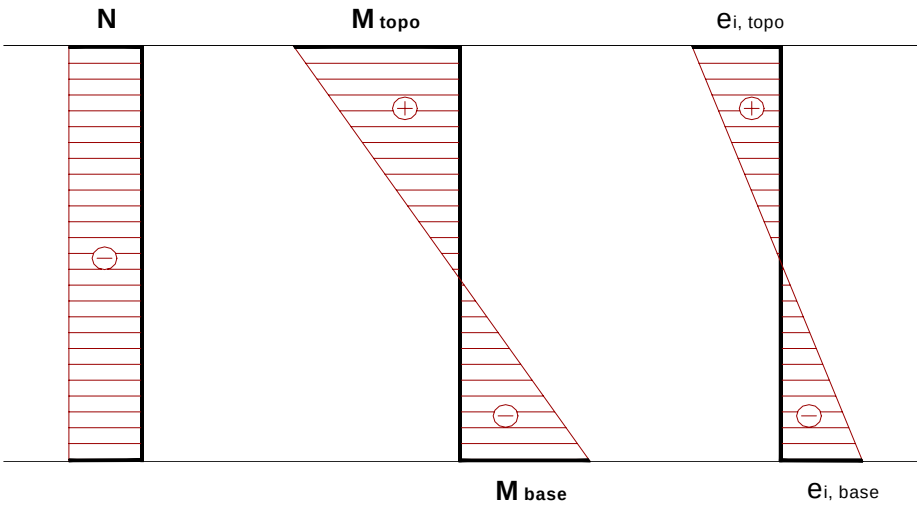

Figura 15. Excentricidades iniciais no topo e na base do pilar (SILVA & PINHEIRO, 2002)

O cálculo do momento atuante no topo e na base do pilar é realizado segundo esquema estático apresentado na Figura 16.

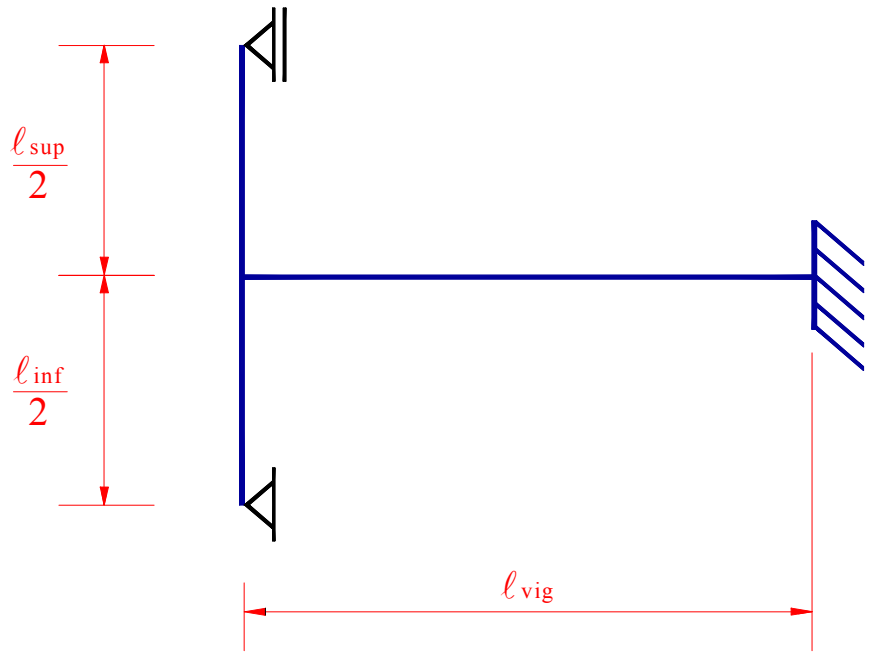

Figura 16. Esquema estático

Quando não for realizado o cálculo exato da influência da solidariedade dos pilares com a viga, deve ser considerado, nos apoios extremos, momento fletor igual ao momento de engastamento perfeito multiplicado pelos coeficientes estabelecidos na NBR 6118:2003 pelas seguintes relações:

- na viga: $$\frac{r_{inf} + r_{sup}}{r_{vig} + r_{inf} + r_{sup}} \quad (21)$$
- no tramo superior do pilar:: $$\frac{r_{sup}}{r_{vig} + r_{inf} + r_{sup}} \quad (22)$$
- no tramo inferior do pilar: $$\frac{r_{inf}}{r_{vig} + r_{inf} + r_{sup}} \quad (23)$$

sendo $\mathbf{r_i}$ a rigidez do elemento **i** no nó considerado, avaliada conforme indicado na Figura 16, dada por:

$$r_i = \frac{I_i}{\ell_i}$$

Deve-se atentar para o fato de que as eq. (21), (22) e (23), dados pela NBR 6118:2003, não são válidos para o esquema estático apresentado na Figura 16, presente na norma. Apesar de estar a favor da segurança, os coeficientes são os mesmos utilizados pela NBR 6118:1978, quando os apoios extremos dos pilares eram considerados como engaste e utilizava-se no cálculo todo o comprimento do pilar. Portanto, com essas alterações, os coeficientes corretos seriam:

- na viga: $$\frac{3r_{inf} + 3r_{sup}}{4r_{vig} + 3r_{inf} + 3r_{sup}} \quad (24)$$

- no tramo superior do pilar:: $$\frac{3r_{sup}}{4r_{vig} + 3r_{inf} + 3r_{sup}} \quad (25)$$

- no tramo inferior do pilar: $$\frac{3r_{inf}}{4r_{vig} + 3r_{inf} + 3r_{sup}} \quad (26)$$

A NBR 6118:2003 considera indiretamente o valor da excentricidade e_{iC}, que é a excentricidade inicial no centro do pilar, no cálculo do coeficiente α_b.

4.1.2. Excentricidade Acidental

Segundo a NBR 6118:2003, na verificação do estado limite último das estruturas reticuladas, devem ser consideradas as imperfeições do eixo dos elementos da estrutura descarregada. Essas imperfeições podem ser divididas em dois grupos: imperfeições globais e imperfeições locais.

Muitas das imperfeições podem ser cobertas apenas pelos coeficientes de ponderação, mas as imperfeições dos eixos das peças não. Elas devem ser explicitamente consideradas porque têm efeitos significativos sobre a estabilidade da construção.

O conceito das imperfeições locais foi uma modificação importante da nova norma, e substitui o da excentricidade acidental da NBR 6118:1978.

a) Imperfeições globais

Na análise global das estruturas reticuladas, sejam elas contraventadas ou não, deve ser considerado um desaprumo dos elementos verticais, conforme Figura 17:

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{\ell}} \tag{27}$$

$$\theta_a = \theta_1 \sqrt{\frac{1 + 1/n}{2}} \tag{28}$$

ℓ é a altura total da estrutura em metros;

n é o número total de elementos verticais contínuos;

$\boldsymbol{\theta_{1min}}$ = 1/400 para estruturas de nós fixos ou 1/300 para estruturas de nós móveis e imperfeições locais.

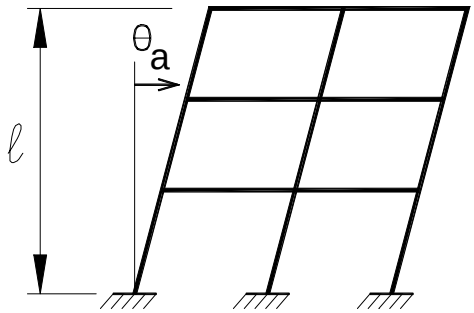

Figura 17. Imperfeições geométricas globais (NBR 6118:2003)

Esse desaprumo não precisa ser superposto ao carregamento de vento. Entre os dois, vento e desaprumo, pode ser considerado apenas o mais desfavorável (que provoca o maior momento total na base de construção). O valor máximo de θ_1 será de 1/200.

b) Imperfeições locais

Na análise local de elementos dessas estruturas reticuladas, devem também ser levados em conta efeitos de imperfeições geométricas locais. Para a verificação de um lance de pilar deve ser considerado o efeito do desaprumo ou da falta de retilinidade do eixo do pilar (Figura 18).

Admite-se que, nos casos usuais, a consideração da falta de retilinidade seja suficiente. Assim, a excentricidade acidental e_a pode ser obtida pela expressão:

$$e_a = \theta_1 \cdot \ell/2$$

No caso de elementos, usualmente vigas e lajes, que ligam pilares contraventados a pilares de contraventamento, deve ser considerada a tração decorrente do desaprumo do pilar contraventado (Figura 18). Para pilar em balanço, obrigatoriamente deve ser considerado o desaprumo, ou seja:

$$e_a = \theta_1 \cdot \ell$$

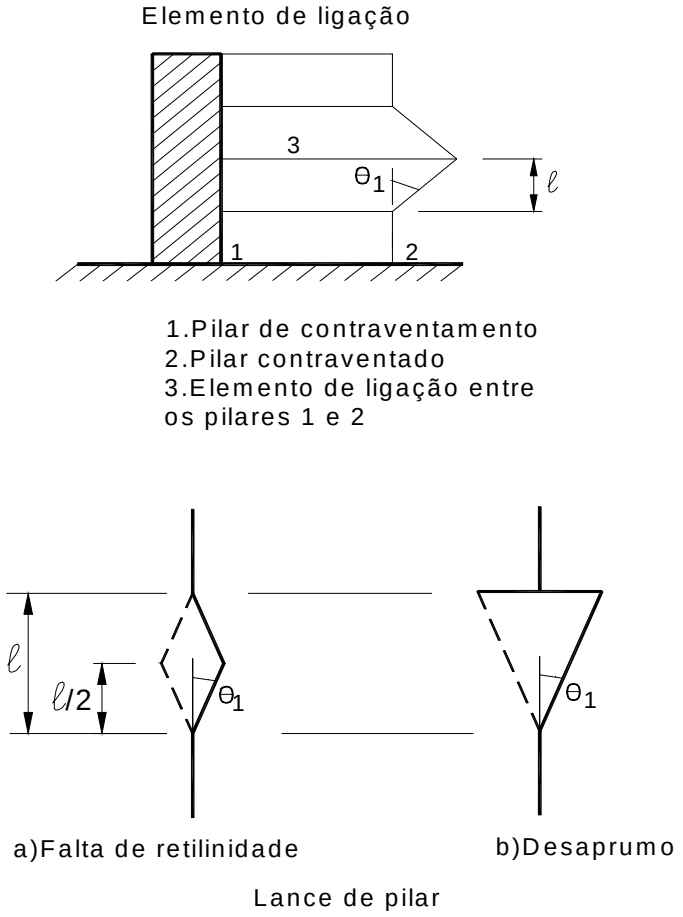

Figura 18. Imperfeições geométricas locais (NBR 6118:2003)

4.1.3. Momento mínimo

Segundo a NBR 6118:2003, item 11.3.3.4.3, o efeito das imperfeições locais nos pilares pode ser substituído em estruturas reticuladas pela consideração do momento mínimo de 1ª ordem dado a seguir:

$$M_{1d,Min} = N_d(0{,}015 + 0{,}03h) \tag{29}$$

h é a altura total da seção transversal na direção considerada, em metros.

Nas estruturas reticuladas usuais admite-se que o efeito das imperfeições locais esteja atendido se for respeitado esse valor de momento total mínimo. A esse momento mínimo devem ser acrescidos os momentos de 2ª ordem. A imposição desse momento mínimo implica na consideração de uma excentricidade mínima de 1ª ordem.

No caso de pilares submetidos à flexão composta oblíqua, esse mínimo deve ser respeitado em cada uma das direções principais, separadamente; isto é, o pilar deve ser verificado à flexão composta oblíqua e, em cada verificação, pelo menos um dos momentos deve respeitar o valor mínimo indicado.

4.1.4. Excentricidade devida à fluência

Segundo a NBR 6118:2003, a consideração da fluência deve obrigatoriamente ser realizada em pilares com índice de esbeltez $\lambda > 90$ e pode ser efetuada de maneira aproximada acrescentando à excentricidade de 1ª ordem, a excentricidade adicional e_{cc} dada a seguir:

$$e_{cc} = \left(\frac{M_{Sg}}{N_{Sg}} + \theta_1 \cdot \frac{\ell_e}{2} \right) \cdot \left(2{,}718^{\frac{\phi \cdot N_{Sg}}{N_e - N_{Sg}}} - 1 \right) \qquad (30)$$

sendo:

$$N_e = \frac{10 \cdot E_c \cdot I_c}{\ell_e^2}$$

$\mathbf{I_c}$ é o momento de inércia do pilar;

$\mathbf{E_c}$ é o módulo de elasticidade secante do concreto;

θ_1 é o desaprumo, dado conforme item 4.1.2.a);

$\mathbf{M_{sg}}$ e $\mathbf{N_{sg}}$ são os esforços solicitantes devidos à combinação quase permanente, calculados conforme as tabelas 11.2 e 11.4 da NBR 6118:2003;

ϕ é o coeficiente de fluência.

4.2. EXCENTRICIDADE DE 2ª ORDEM

A força normal atuante no pilar, sob as excentricidades de 1ª ordem (excentricidade inicial), provoca deformações que dão origem a uma nova excentricidade, denominada excentricidade de 2ª ordem.

A determinação dos efeitos locais de 2ª ordem, segundo a NBR 6118:2003, em barras submetidas à flexo-compressão normal, pode ser feita pelo método geral ou por métodos aproximados.

A consideração da fluência é obrigatória para índice de esbeltez $\lambda > 90$, acrescentando-se ao momento de 1ª ordem M_{1d} a parcela relativa à excentricidade suplementar e_c.

5. MÉTODOS UTILIZADOS

Capítulo 5

5.1. MÉTODO GERAL

O método denominado Método Geral envolve equações diferenciais que geralmente não têm solução direta conhecida e, portanto, é necessário empregar soluções aproximadas para o cálculo, como os métodos iterativos (carregamento ou excentricidade incremental). Ainda assim, o método iterativo, apesar de haver a possibilidade de algumas simplificações tais como o processo de equilíbrio, requer um considerável esforço de cálculo, dificultando o cálculo manual e exigindo a utilização de softwares específicos para dimensionamento de pilares.

O método consiste em estudar o comportamento das estruturas de concreto armado, à medida que se dá o aumento do carregamento ou da excentricidade do carregamento na barra. O método geral é aplicável a qualquer tipo de pilar, inclusive nos casos em que as dimensões da peça, a armadura ou a força aplicada são variáveis ao longo do seu comprimento.

Este processo justifica sua utilização pela qualidade dos seus resultados, que retratam com maior precisão o comportamento real da estrutura, pois considera a não-linearidade geométrica de maneira bastante precisa.

De acordo com BORGES (1999), o método geral, quanto ao rigor, faz duas concessões: admite ser a curvatura igual à segunda derivada da equação da linha elástica e, já que para sua execução necessita de processos numéricos, precisa da subdivisão da peça em elementos, tornando os resultados dependentes do número de elementos considerado. A precisão será, portanto, tanto maior quanto maior for o número de subdivisões da peça.

Portanto, para a determinação da carga crítica pelo método geral, deve-se proceder por etapas. O carregamento é aplicado por incrementos progressivos e, para cada etapa, é calculado o deslocamento correspondente de uma determinada seção que corresponde ao deslocamento característico do efeito de 2ª ordem, essencial para cálculo do momento da etapa posterior. O carregamento crítico é obtido através do valor crítico da carga, para o qual tende assintoticamente o diagrama *carga x deslocamento* (Figura 19).

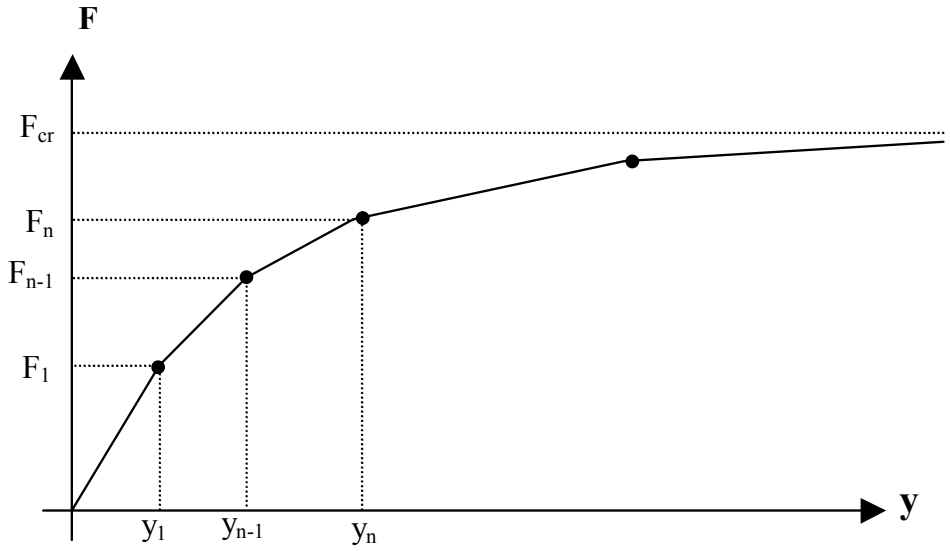

Figura 19. Método geral aplicado através do carregamento progressivo

Para a aplicação do método geral através de acréscimos de carga, deve-se utilizar uma ferramenta para o cálculo dos deslocamentos, sendo suficiente o conhecimento dos diagramas (*M, N, 1/r*).

Outra forma de aplicação do método geral se dá através da utilização de acréscimos de excentricidade. Nesse processo o cálculo obedece a mesma seqüência, mas ao invés de excentricidades constantes e variação do módulo da força aplicada, utilizam-se cargas constantes e variam-se os valores das excentricidades de 1ª ordem. O valor crítico da excentricidade é obtido como o valor assintótico do diagrama *excentricidade x deslocamento* (Figura 20).

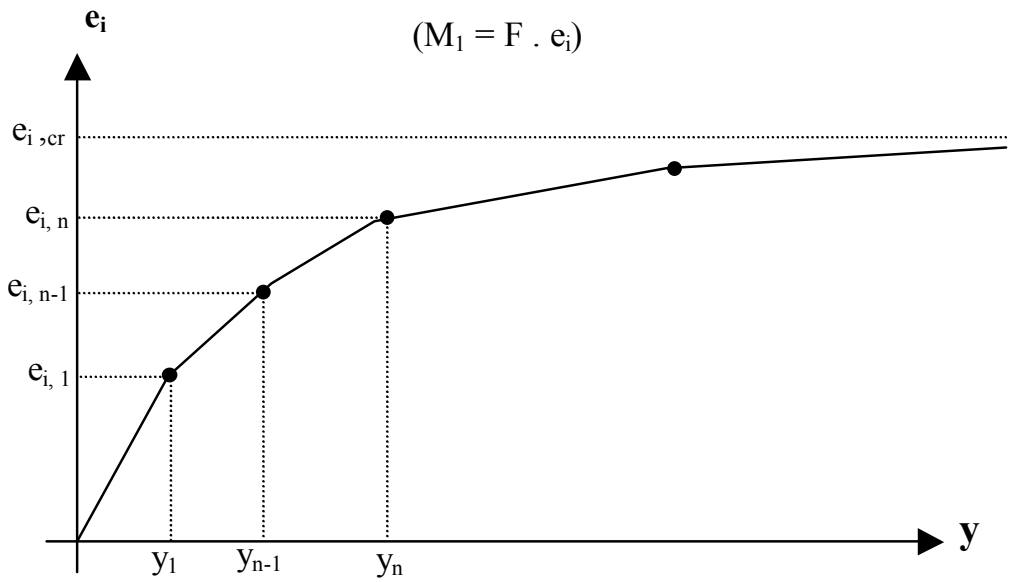

Figura 20. Método geral aplicado através de excentricidades progressivas

Um outro método que permite a verificação da estabilidade é o método do equilíbrio. Esse método consiste em garantir a segurança contra o estado limite de instabilidade, através da verificação de que, sob a ação do carregamento de cálculo ou da excentricidade de cálculo, o deslocamento de uma seção de referência corresponde a uma configuração estável de equilíbrio.

No entanto, como no método do equilíbrio a verificação da segurança contra o estado limite último de instabilidade é feita através da constatação da existência de um possível estado de equilíbrio, onde o esforço é maior que a solicitação, o método garante a segurança, mas não dá a melhor solução.

Em resumo, o intuito da aplicação do método do equilíbrio é reduzir o problema ao cálculo de apenas um ponto do diagrama *ação x deslocamento*. Já o método geral tem o compromisso de analisar cada ponto do diagrama *ação x deslocamento*. Portanto, pode-se perceber que o método geral consiste em se aplicar várias vezes o método do equilíbrio.

5.2. PRINCÍPIO DO MÉTODO GERAL

Considere-se o pilar da Figura 21, engastado na base e livre no topo, sujeito à força excêntrica de compressão N_d.

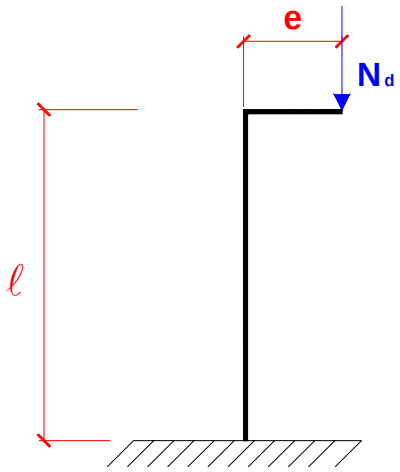

Figura 21. Pilar sujeito à compressão excêntrica

Sob a ação do carregamento, o pilar apresenta uma deformação que, por sua vez, gera um momento incremental $\mathbf{N_d.y}$ nas seções, provocando novas deformações e novos momentos. Se as ações externas (N_d e M_d) forem menores que a capacidade resistente da barra, essa interação continua até que seja atingido um estado de equilíbrio para todas as seções da barra. Tem-se, portanto, uma forma fletida estável (Figura 22.a). Caso contrário, se as ações externas forem maiores que a capacidade resistente da barra, o pilar perde estabilidade (Figura 22.b). A verificação que se deve fazer é quanto à existência da forma fletida estável.

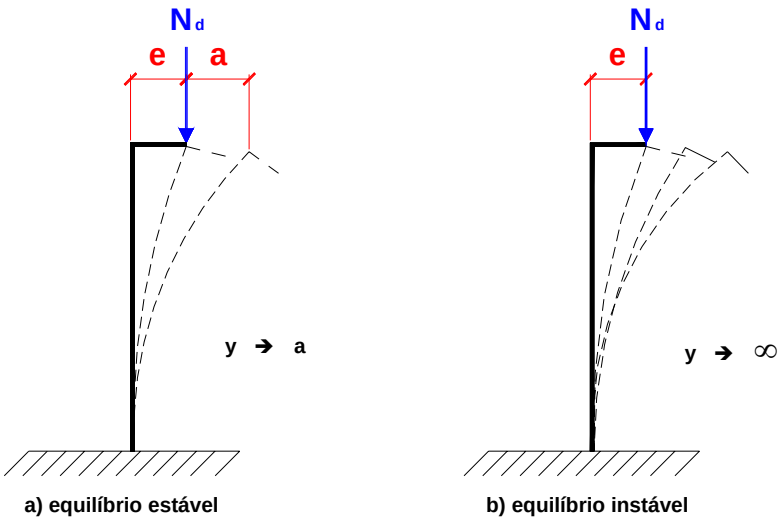

Figura 22. Configurações fletidas

A estabilidade será atingida quando o pilar parar numa forma deformada estável, como mostra a Figura 23, de flecha **a**, com equilíbrio alcançado entre esforços internos e externos, respeitada a compatibilidade entre curvaturas, deformações e posições da linha neutra, assim como as equações constitutivas dos materiais e sem haver, na seção crítica, deformação convencional de ruptura do concreto ou deformação plástica excessiva do aço.

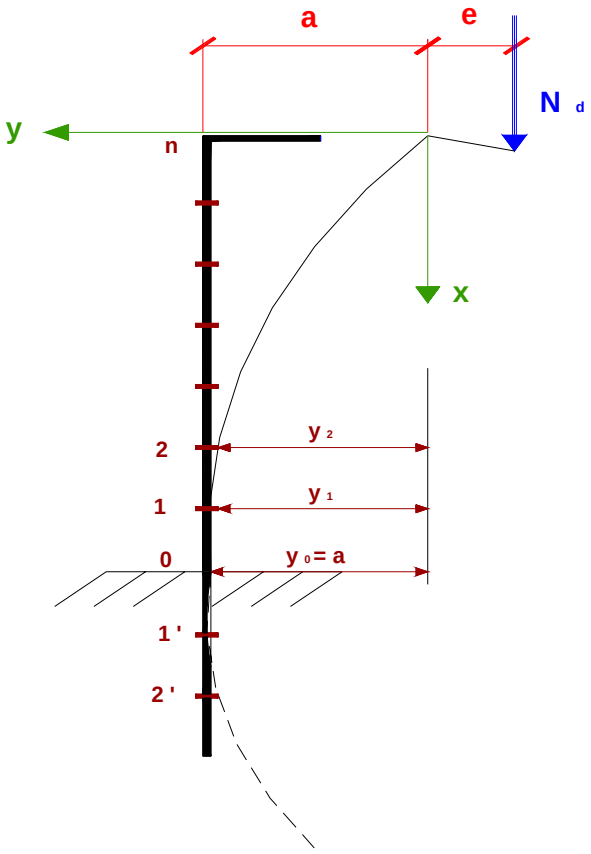

Figura 23. Deformada estável

5.2.1. Método Geral com variação da flecha a

Segundo BACARJI (1993), como não é conhecida a flecha **a** e nem a expressão **y=y(x)** da deformada, o problema deve ser resolvido por tentativas. Para tanto, deve-se seguir o seguinte roteiro:

a) Divide-se o pilar em **n** trechos de comprimento:

$$\Delta x = \ell / n \tag{31}$$

b) Arbitra-se um valor para a flecha **a**:

$$y_o = a \tag{32}$$

c) Conhecendo-se a força normal $\mathbf{N_d}$, calcula-se o momento de 2ª ordem no engastamento:

$$(M_{2d})_o = N_d.a \tag{33}$$

d) Conhecendo-se a excentricidade inicial $\mathbf{e_1}$, calcula-se o momento fletor total na seção engastada:

$$M_o = M_{1d} + M_{2d} \tag{34}$$

que em termos de adimensionais torna-se:

$$\boldsymbol{\mu_0 = (\mu_1 + \mu_2)_0} \tag{35}$$

e) A partir do diagrama **(μ, ν, 1/r)**, para **ν**, **ω** e $\boldsymbol{\mu_o}$ conhecidos, obtém-se a correspondente curvatura $\mathbf{1/r_o}$.

f) Usando-se a fórmula aproximada da curvatura e com o emprego das diferenças finitas, obtém-se $\mathbf{y_1}$:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_o = \frac{y_1 - 2\cdot y_o + y_1}{\Delta x^2} = -\left(\frac{1}{r}\right)_o \quad \therefore \quad y_1 = -\frac{\Delta x^2}{2}.\left(\frac{1}{r}\right)_o + y_o \tag{36}$$

g) De posse de $\mathbf{y_1}$, repete-se o processo a partir do item ***c)***:

$$(M_{2d})_1 = N_d.y_1 \tag{37}$$

$$\boldsymbol{\mu_1 = (\mu_1 + \mu_2)_1} \tag{38}$$

h) Utilizando novamente o diagrama **(μ, ν, 1/r)**, obtém-se a curvatura $\left(\frac{1}{r}\right)_1$.

i) Calcula-se $\mathbf{y_2}$ através da expressão:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 = \frac{y_o - 2\cdot y_1 + y_2}{\Delta x^2} = -\left(\frac{1}{r}\right)_1 \quad \therefore y_2 = -\Delta x^2 \cdot \left(\frac{1}{r}\right)_1 - y_o + 2\cdot y_1 \tag{39}$$

j) Continua-se o processo para as demais seções utilizando-se a expressão genérica.

$$y_{i+1} = 2 \cdot y_i - y_{i-1} - \Delta x^2 \cdot \left(\frac{1}{r}\right)_i \tag{40}$$

k) Chegando-se à seção do topo deve-se ter $\mathbf{y_n = 0}$; caso contrário, recomeçam-se as tentativas arbitrando-se novo valor da flecha **a**.

Para $y_n = 0$, tem-se a forma fletida estável.

5.3. MÉTODOS APROXIMADOS

A NBR 6118:2003, no item 15.8.3.3 (Métodos Aproximados), estabelece que a determinação dos efeitos locais de 2ª ordem pode ser feita por métodos aproximados, como o do pilar-padrão e do pilar-padrão melhorado, explicitando os seguintes processos:

- Método do pilar-padrão com curvatura aproximada;
- Método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada;
- Método do pilar-padrão acoplado a diagramas *M, N, 1/r*;
- Método do pilar-padrão para pilares da seção transversal submetidos à flexão composta oblíqua.

Segundo BORGES (1999), a desvantagem do processo do pilar-padrão reside no fato de que seus resultados são precisos apenas nos casos em que a seção é constante, inclusive armadura, e o carregamento não é composto por forças transversais, ou seja, o método do pilar-padrão só conduz a bons resultados se a linha elástica for muito próxima da senoidal. Para os casos em que isso não acontece, pode-se optar pelo processo do pilar-padrão melhorado, cujo objetivo é estender a aplicação do processo a casos de barras submetidas a carregamento transversal, através de uma correção no método, resultado de uma linearização do diagrama (*M, N, 1/*r).

Resumindo, enquanto que no método geral a determinação da carga crítica exige o traçado de uma curva, seja ela *carga x deslocamento*, no caso de carregamento progressivo, ou *excentricidade x deslocamento*, no caso de excentricidades progressivas, o processo do pilar-padrão exige apenas o traçado do diagrama *momento x curvatura*, que é de obtenção mais simples que os demais.

5.3.1. Método do pilar-padrão com curvatura aproximada

O método do pilar-padrão com curvatura aproximada é permitido para pilares de seção constante e de armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo e $\lambda \leq 90$. A não-linearidade geométrica é considerada de forma aproximada, supondo-se que a configuração deformada da barra seja senoidal. A não-linearidade física é levada em conta através de uma expressão aproximada da curvatura na seção crítica. A excentricidade de segunda ordem e_2 é dada pela seguinte equação:

$$e_2 = \frac{\ell_e^2}{10} \cdot \frac{1}{r} \tag{41}$$

1/r é a curvatura na seção crítica, que pode ser avaliada pela expressão:

$$\frac{1}{r} = \frac{0{,}005}{h(\nu + 0{,}5)} \leq \frac{0{,}005}{h} \tag{42}$$

h é a altura da seção na direção considerada;

$\boldsymbol{\nu} = N_{Sd} / (A_c f_{cd})$ é a força normal adimensional.

Assim, o momento total máximo no pilar é dado por:

$$M_{d,tot} = \left(\alpha_b M_{1d,A} + N_d \cdot \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} \right) \geq M_{1d,A} \geq M_{1d,Mín} \tag{43}$$

5.3.2. Método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada

Segundo a NBR 6118:2003, item 15.8.3.3.3, o método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada pode ser empregado apenas no cálculo de pilares com $\lambda \leq 90$, seção retangular constante, armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo. A não-linearidade geométrica deve ser considerada de forma aproximada, supondo-se que a deformação da barra seja senoidal. A não-linearidade física deve ser levada em conta através de uma expressão aproximada da rigidez.

O momento total máximo no pilar deve ser calculado pela expressão:

$$M_{d,tot} = \frac{\alpha_b M_{1d,A}}{1 - \dfrac{\lambda^2}{120\kappa/\nu}} \geq M_{1d,A} \tag{44}$$

κ é valor da rigidez adimensional, dado aproximadamente pela expressão:

$$\kappa = 32\left(1 + 5.\frac{M_{d,tot}}{h.N_d}\right)\cdot \nu \qquad (45)$$

h é a altura da seção na direção considerada

$\nu = N_{Sd}/(A_c f_{cd})$ é a força normal adimensional

$M_{1d,\,A} \geq M_{1d,\,min}$ (ver item 4.1.3)

O momento $M_{1d,A}$ e o coeficiente α_b têm as mesmas definições dadas no item 3.6, sendo $M_{1d,\,A}$ o valor de cálculo de 1ª ordem do momento M_A.

Observa-se que o valor da rigidez adimensional κ é necessário para o cálculo de $M_{d,tot}$, e para o cálculo de κ utiliza-se o valor de $M_{d,tot}$. Assim, a solução somente pode ser obtida por tentativas (usualmente duas ou três iterações são suficientes).

a) Processo direto de solução

Segundo BANKI (2004) a abordagem iterativa da Norma não é fundamentalmente necessária à aplicação do processo, uma vez que o termo independente ($M_{d,tot}$) aparece apenas em funções polinomiais que podem ser resolvidas diretamente.

Desta forma, substituindo-se a eq. (45) na eq. (44) e considerando $k_1 = 1 - \frac{\lambda^2}{3840}$, obtém-se:

$$5\cdot M_{d,tot}^2 + \left(k_1\cdot h\cdot N_d - 5\cdot\alpha_b\cdot M_{1d,A}\right)\cdot M_{d,tot} - h\cdot N_d\cdot\alpha_b\cdot M_{1d,A} = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, adotando $M_1 = \alpha_b\cdot M_{1d,A}$ e $k_2 = k_1\cdot h\cdot N_d$ (Anexo I), resulta:

$$M_{d,tot} = \frac{5\cdot M_1 - k_2 + \sqrt{k_2^2 + 10\cdot M_1\cdot\left(2\cdot h\cdot N_d - k_2\right) + 25\cdot M_1^2}}{10} \qquad (46)$$

A eq. (46) fornece de forma direta o valor de $M_{d,\,tot}$, pelo método do pilar-padrão com rigidez aproximada, sem a necessidade de utilizar procedimento iterativo.

b) Excentricidade de 2ª ordem

BANKI (2004) conclui ainda que uma forma mais usual de calcular os efeitos locais de 2ª ordem é a determinação de uma "excentricidade adicional de 2ª ordem" (e_2), sendo esta uma maneira mais compacta de apresentar a eq. (45), obtendo-se os mesmos resultados.

Dessa forma, dividindo-se os dois lados da eq. (45) por N_d, tem-se:

$$\frac{M_{d,tot}}{N_d} = \frac{5\cdot\frac{M_1}{N_d} - k_1\cdot h + \sqrt{k_1^2\cdot h^2 + 10\cdot\frac{M_1}{N_d}\cdot h\cdot(2-k_1) + 25\cdot\left(\frac{M_1}{N_d}\right)^2}}{10}$$

Com isso, pode-se obter uma expressão em função apenas das excentricidades:

$$e_{tot} = \frac{5\cdot e_1 - k_1\cdot h + \sqrt{k_1^2\cdot h^2 + 10\cdot e_1\cdot h\cdot(2-k_1) + 25\cdot e_1^2}}{10} \tag{47}$$

$$e_{tot} = \frac{M_{d,tot}}{N_d} \qquad \text{e} \qquad e_1 = \frac{M_1}{N_d}$$

Definindo a excentricidade de 2ª ordem de forma usual $e_{tot} = e_1 + e_2 \Rightarrow e_2 = e_{tot} - e_1$, pode-se reescrever a eq. (46) para se obter e_2:

$$e_2 = \frac{\sqrt{k_1^2\cdot h^2 + 10\cdot e_1\cdot h\cdot(2-k_1) + 25\cdot e_1^2} - 5\cdot e_1 - k_1\cdot h}{10} \tag{48}$$

c) Análise paramétrica

Segundo BANKI (2004), embora a eq. (48) já permita a aplicação do método do pilar-padrão com rigidez aproximada da maneira direta, pode-se ainda sintetizar um pouco mais essa expressão, colocando-a em termos de excentricidades relativas (e/h), a fim de analisar os resultados que podem ser obtidos.

Assim, definindo-se $e_1' = e_1/h$ e $e_2' = e_2/h$, tem-se:

$$e_2' = \frac{\sqrt{k_1^2 + 10 \cdot e_1' \cdot (2 - k_1) + 25 \cdot e_1'^2} - k_1 - 5 \cdot e_1'}{10}$$

Rearranjando:

$$e_2' = \sqrt{\left(\frac{k_1}{10} - \frac{e_1'}{2}\right)^2 + \frac{e_1'}{5}} - \left(\frac{k_1}{10} + \frac{e_1'}{2}\right) \tag{49}$$

A eq. (49) representa a dependência entre os valores de e_2 e e_1 (efeitos de 2ª ordem em relação aos efeitos de 1ª ordem) em função apenas do parâmetro λ, tendo sido todos os demais eliminados pela manipulação algébrica. Pode-se notar que a expressão tem resultado válido para qualquer valor de λ ou e_1 (supostos positivos), o que prova que o processo sempre será convergente.

A Figura 24 apresenta os valores obtidos para diversos índices de esbeltez.

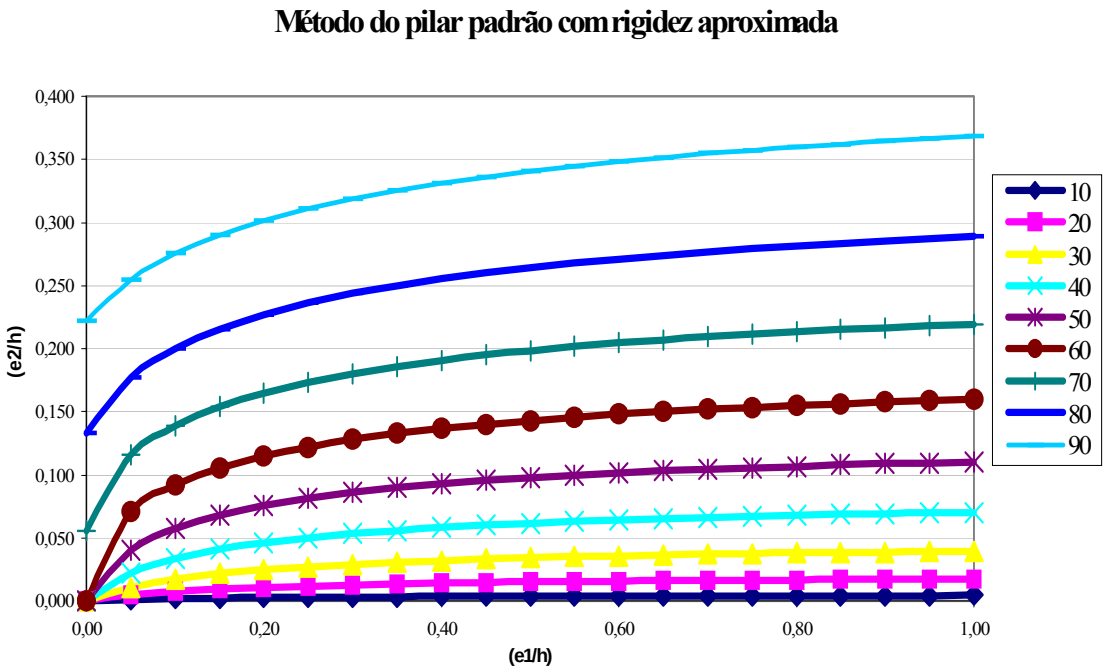

Figura 24. Comparação entre as excentricidades relativas de 1ª e 2ª ordem

Analisado a Figura 24, pode-se observar como as excentricidades de 2ª ordem são influenciadas pelo valor da excentricidade de 1ª ordem.

Para efeito de comparação, pode-se desenvolver de maneira semelhante a expressão de $M_{d,tot}$ no método do pilar-padrão com curvatura aproximada, obtendo-se como excentricidade relativa de 2ª ordem:

$$e_2' = \frac{\lambda^2}{24000 \cdot (\nu + 0{,}5)} \leq \frac{\lambda^2}{24000} \tag{50}$$

A eq.(50) não é função da excentricidade de 1ª ordem, mas sim da força normal adimensional ν. Assim, não é possível comparar diretamente as eq. (49) e (50), mas pode-se visualizar, na Figura 25, a variação em função da esbeltez.

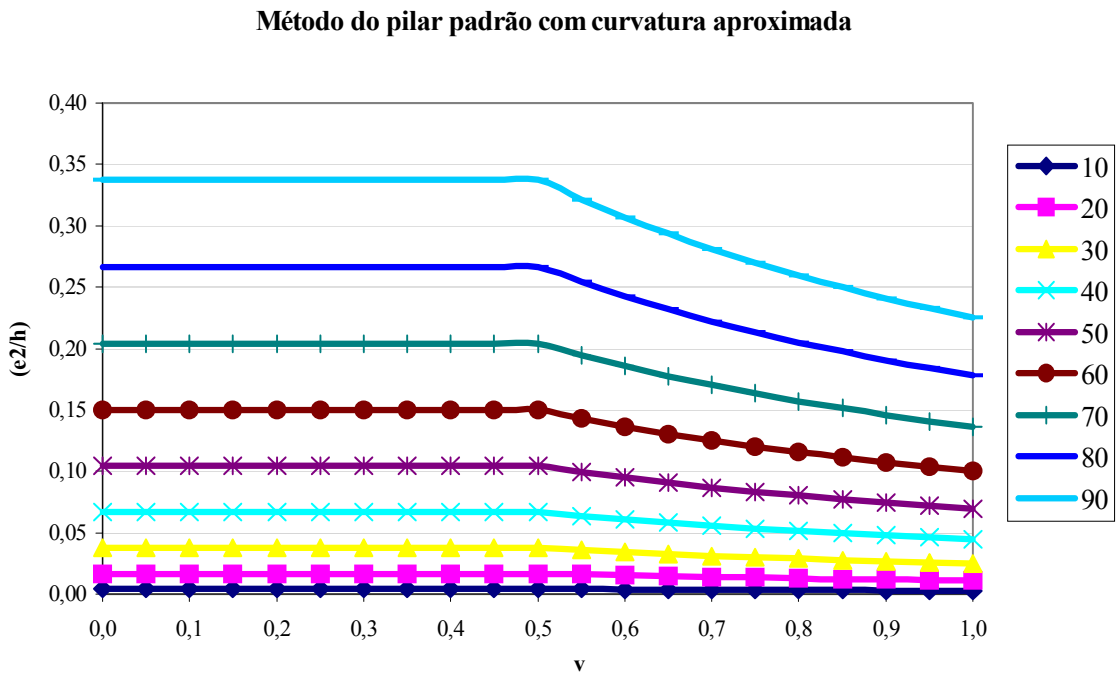

Figura 25. Comparação entre a força normal adimensional ν e a excentricidade relativa de 2ª ordem

Como os gráficos apresentados na Figura 24 e na Figura 25 não possuem a mesma abscissa, não é possível a sobreposição, no entanto pode-se verificar que, para o caso mais crítico, onde λ = 90, o método do pilar-padrão com rigidez aproximada resulta em valores variando entre 0,222 e 0,368, enquanto que o método do pilar-padrão com curvatura aproximada resulta em valores variando entre 0,225 e 0,338. Pode-se supor que, nos projetos correntes, a diferença encontrada na aplicação de um ou outro processo será bastante pequena.

5.3.3. Método do pilar-padrão acoplado a diagramas *M, N, 1/r*

Segundo a NBR 6118:2003, item 15.8.3.3.4, a determinação dos esforços locais de 2ª ordem em pilares com λ ≤ 140 pode ser feita pelo método do pilar-padrão ou pilar-

padrão melhorado, utilizando-se para a curvatura da seção crítica valores obtidos de diagramas M, N, 1/r específicos para o caso. Podem ser utilizados, também, diagramas *μ, η, 10³d/r*, com grandezas adimensionais, como o indicado na Figura 26, em que $\nu = N_{Sd}/(A_c f_{cd})$, $\mu = \nu e/h$ e $\omega = A_S f_{yd}/(A_c f_{cd})$.

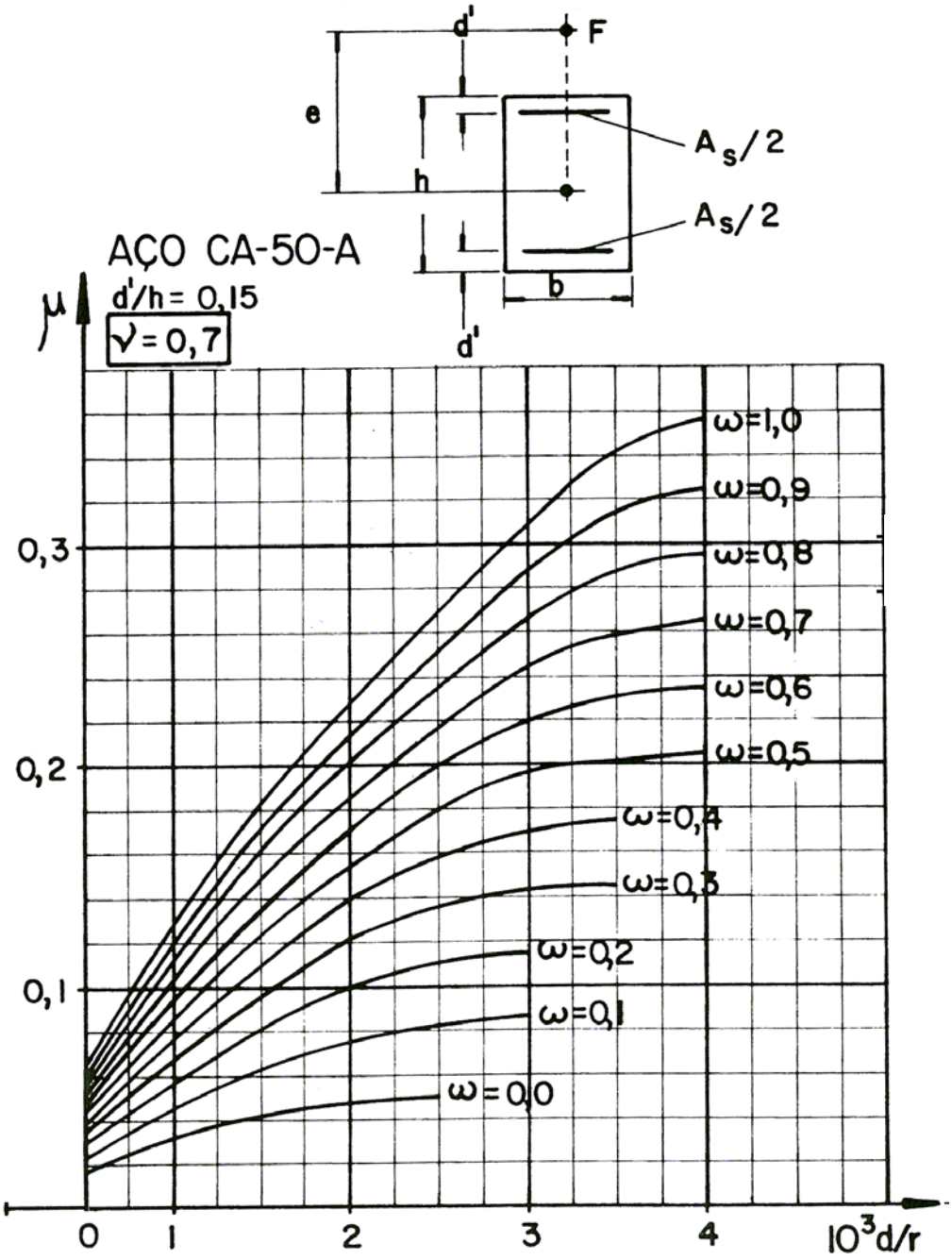

Figura 26. Diagrama μ, η, 10³d/r (Extraído de FUSCO, 1981)

5.3.4. Método do pilar-padrão para pilares de seção retangular submetidos à flexão composta oblíqua

O último método, denominado "Método do pilar-padrão para pilares de seção retangular submetidos à flexão composta oblíqua", pode ser utilizado quando $\lambda < 90$ nas duas direções principais. Nessas condições, pode ser aplicado o método do pilar-padrão com rigidez *k* aproximada simultaneamente em cada uma das duas direções.

Obtida a distribuição de momentos totais, de 1ª e 2ª ordem, em cada direção, deve-se verificar, para cada seção ao longo do eixo, se a composição desses momentos solicitantes fica dentro da envoltória de momentos resistentes para a armadura escolhida.

5.4. CÁLCULO SIMPLIFICADO

A NBR 6118:2003, item 17.2.5, apresenta processos simplificados para dimensionamento à flexão composta normal e à flexão composta oblíqua.

5.4.1. Flexão composta normal

O cálculo para o dimensionamento de seções retangulares ou circulares com armadura simétrica, sujeitas a flexo-compressão normal, em que a força normal reduzida (ν) seja maior ou igual a 0,7, pode ser realizado como um caso de compressão centrada equivalente, onde:

$$N_{Sd,eq} = N_{Sd}\left(1+\beta\frac{e}{h}\right) \text{ e } M_{Sd,eq} = 0$$

$$\nu = \frac{N_{Sd}}{A_c f_{cd}} \qquad \frac{e}{h} = \frac{M_{Sd}}{N_{Sd} h}$$

$$\beta = \frac{1}{(0{,}39 + 0{,}01\alpha) - 0{,}8\frac{d'}{h}}$$

sendo o valor de α dado por:

$\alpha = -1/\alpha_S$, se $\alpha_S < 1$ em seções retangulares;

$\alpha = \alpha_S$, se $\alpha_S \geq 1$ em seções retangulares;

$\alpha = 6$, se $\alpha_S > 6$ em seções retangulares;

$\alpha = -4$, em seções circulares.

Supondo que todas as barras sejam iguais, α_S é dado por:

$$\alpha_S = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)}$$

O arranjo de armadura adotado para detalhamento (Figura 27) deve ser fiel aos valores pressupostos de α_S e d'/h.

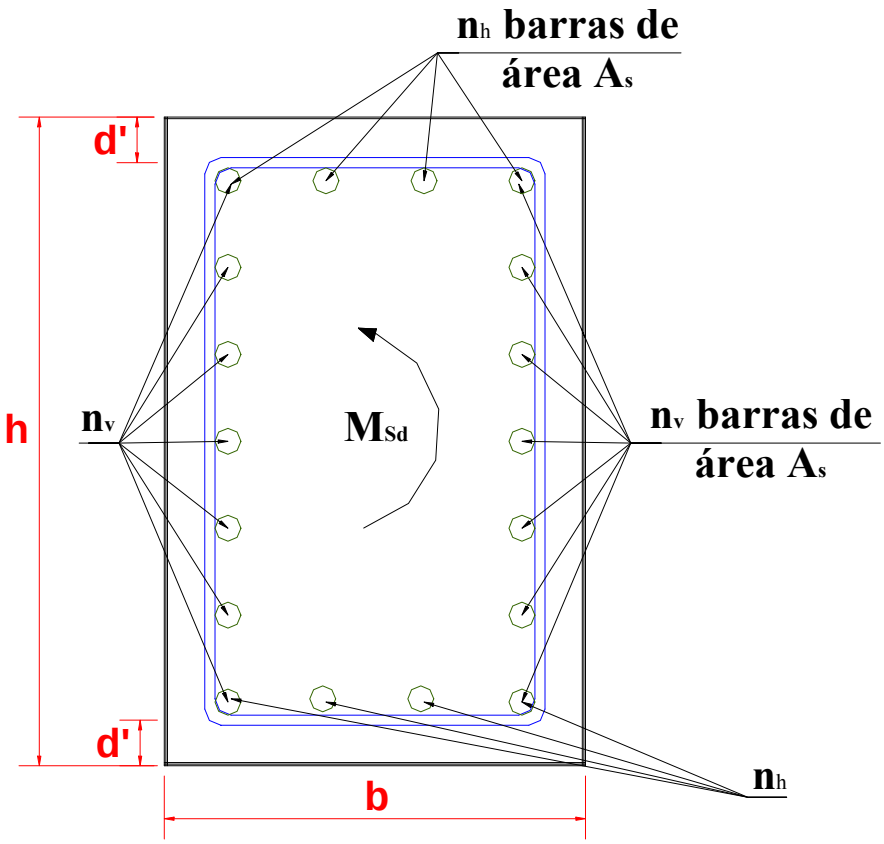

Figura 27. Arranjo de armadura caracterizado pelo parâmetro α_S (Figura 17.2 da NBR 6118:2003)

5.4.2. Flexão composta oblíqua

Nas situações de flexão simples ou composta oblíqua, pode ser adotada a aproximação dada pela expressão de interação:

$$\left[\frac{M_{Rd,x}}{M_{Rd,xx}}\right]^{\alpha} + \left[\frac{M_{Rd,y}}{M_{Rd,yy}}\right]^{\alpha} = 1$$

$\mathbf{M_{Rd,x}}$; $\mathbf{M_{Rd,y}}$ são as componentes do momento resistente de cálculo em flexão oblíqua composta, segundo os dois eixos principais de inércia x e y, da seção bruta, com um esforço normal resistente de cálculo N_{Rd} igual à normal solicitante N_{Sd}. Esses são os valores que se deseja obter;

$\mathbf{M_{Rd,xx}}$; $\mathbf{M_{Rd,yy}}$ são os momentos resistentes de cálculo segundo cada um dos referidos eixos em flexão composta normal, com o mesmo valor de N_{Rd}. Esses valores são calculados a partir do arranjo e da quantidade de armadura em estudo;

α é um expoente cujo valor depende de vários fatores, entre eles o valor da força normal, a forma da seção, o arranjo da armadura e de suas porcentagens. Em geral pode ser adotado $\alpha = 1$, a favor da segurança. No caso de seções retangulares, pode-se adotar $\alpha = 1{,}2$.

6. DISPOSIÇÕES CONSTRUTIVAS

Capítulo 6

6.1. COBRIMENTO DAS ARMADURAS

O cobrimento das armaduras é considerado no item 7.4.7 da NBR 6118:2003. Cobrimento mínimo é o menor valor que deve ser respeitado ao longo de todo o elemento considerado. Para garantir o cobrimento mínimo (c_{min}), o projeto e a execução devem considerar o cobrimento nominal (c_{nom}), que é o cobrimento mínimo acrescido da tolerância de execução (Δc). Assim, as dimensões das armaduras e os espaçadores devem respeitar os cobrimentos nominais, estabelecidos na Tabela 3, para Δc = 10 mm.

$$c_{nom} = c_{min} + \Delta c$$

Tabela 3. Valores de c_{nom} em pilares de concreto armado para Δc = 10 mm. (NBR 6118:2003)

Classe de agressividade	I	II	III	IV
c_{nom} (mm)	25	30	40	50

As classes de agressividade, que segundo a NBR 6118:2003 estão relacionadas às ações físicas e químicas que atuam sobre as estruturas de concreto, independentemente das ações mecânicas, das variações volumétricas de origem térmica, da retração hidráulica e outras previstas no dimensionamento das estruturas de concreto podem ser avaliadas segundo a Tabela 4.

Tabela 4. Classes de agressividade ambiental (NBR 6118:2003)

Classe de agressividade ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto	Risco de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural	Insignificante
		Submersa	
II	Moderada	Urbana	Pequeno
III	Forte	Marinha	Grande
		Industrial	
IV	Muito forte	Industrial	Elevado
		Respingos de maré	

Nas obras correntes, o valor de Δc deve ser maior ou igual a 10 mm. Quando houver um adequado controle de qualidade e rígidos limites de tolerância da variabilidade das medidas durante a execução, pode ser adotado o valor $\Delta c = 5$ mm, mas a exigência de controle rigoroso deve ser explicitada nos desenhos de projeto. Permite-se, então, redução de 5 mm dos cobrimentos nominais prescritos na Tabela 3.

Os cobrimentos são sempre referidos à superfície da armadura externa, em geral à face externa do estribo. O cobrimento nominal deve ser maior que o diâmetro da barra.

A dimensão máxima característica do agregado graúdo utilizado não pode superar em 20% o cobrimento nominal, ou seja:

$$d_{\max} \leq 1{,}2 \cdot c_{nom}$$

6.2. DESTACAMENTO DO COBRIMENTO

O aumento da espessura do cobrimento da armadura, imposto pela NBR 6118:2003, em comparação com a antiga NBR 6118:1978, tem como principal objetivo o aumento da durabilidade das estruturas, que é altamente dependente da espessura e da qualidade do concreto do cobrimento da armadura.

No entanto, é importante observar que esse aumento pode acarretar problemas referentes ao destacamento da região do cobrimento, durante a aplicação das cargas de projeto, já que esta é uma região mais frágil, principalmente por não apresentar armadura. Esse problema pode ser observado em ensaios experimentais, em que normalmente o rompimento dos pilares ocorre por destacamento do cobrimento, o que

pode ser verificado nos trabalhos de LIMA (1997), GUIMARÃES (1999) e VANDERLEI (1999).

Além disso, COLLINS et alii (2003) explica que, em virtude da baixa permeabilidade dos CARs, a secagem do cobrimento ocorre primeiro do que a do concreto do núcleo. Esse fenômeno gera um gradiente de tensões dentro da massa do concreto, que resulta na formação de planos de ruptura responsáveis pelo destacamento. FOSTER et alii (1998), por meio de análise com Elementos Finitos, mostraram que as deformações laterais do núcleo são inferiores às do cobrimento, uma vez que a armadura transversal impede a expansão lateral do núcleo (Figura 28). Esse gradiente de deformações gera tensões de tração entre o núcleo e o cobrimento que, quando atinge a resistência do concreto à tração, ocasiona o surgimento de fissuras na interfase núcleo-cobrimento, as quais ocasionam a separação entre as duas partes. Ainda segundo os autores citados, para acontecer o destacamento do cobrimento, é preciso não só o surgimento das fissuras, mas também outros mecanismos, como a flexão e a expansão da armadura longitudinal, e a instabilidade lateral a que fica sujeito o cobrimento, devido a sua baixa esbeltez. A fissuração na interface núcleo-cobrimento também ocorre nos pilares de concreto de resistência usual, porém o destacamento não acontece de forma brusca, imediatamente após o início da fissuração. Dessa forma, o cobrimento perde sua capacidade de carga de forma gradual durante a ativação do confinamento passivo.

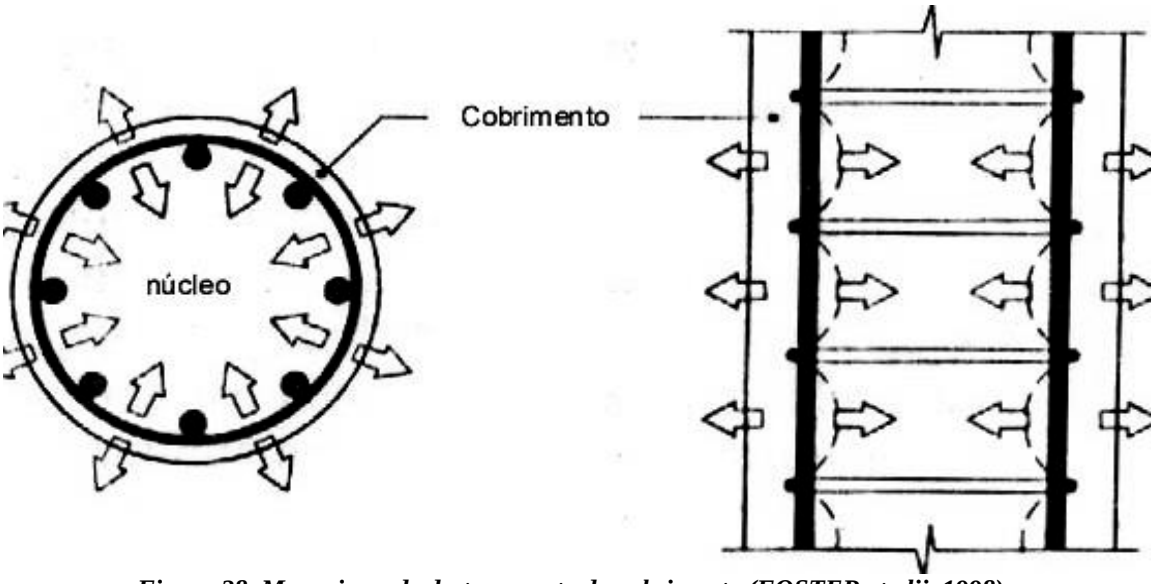

Figura 28. Mecanismo de destacamento do cobrimento (FOSTER et alii, 1998)

Para PAULTRE et al. (1996), o comportamento de pilares em CAD é caracterizado pela ruptura rápida e repentina do cobrimento de concreto. Contribuindo para este fenômeno está a fragilidade na interface do concreto confinado com o não confinado (cobrimento), criado pela armadura. Acredita-se que a adição de fibras à mistura de concreto de alta resistência pode prevenir a separação prematura do cobrimento de concreto. Desse modo, o efeito das fibras casualmente posicionadas na massa de concreto atrasa essa ruptura antes do pilar atingir o colapso. O destacamento prematuro do cobrimento de concreto nos pilares em CAD é observado quando são usados concretos com resistências superiores a 80 MPa ou mais.

A Figura 29 ilustra a flambagem que sofre a chapa de concreto que constitui o cobrimento de armadura, quando da aplicação da força nos pilares. Esse comportamento é reportado em LANGLOIS & PAULTRE (1996), apud GUIMARÃES (1999). Com um mínimo de adição de fibras ao concreto, essa flambagem do cobrimento não ocorre, já que as fibras "costuram" o cobrimento junto ao núcleo, mas sem fazer com que a seção transversal total seja mais resistente à força aplicada no pilar.

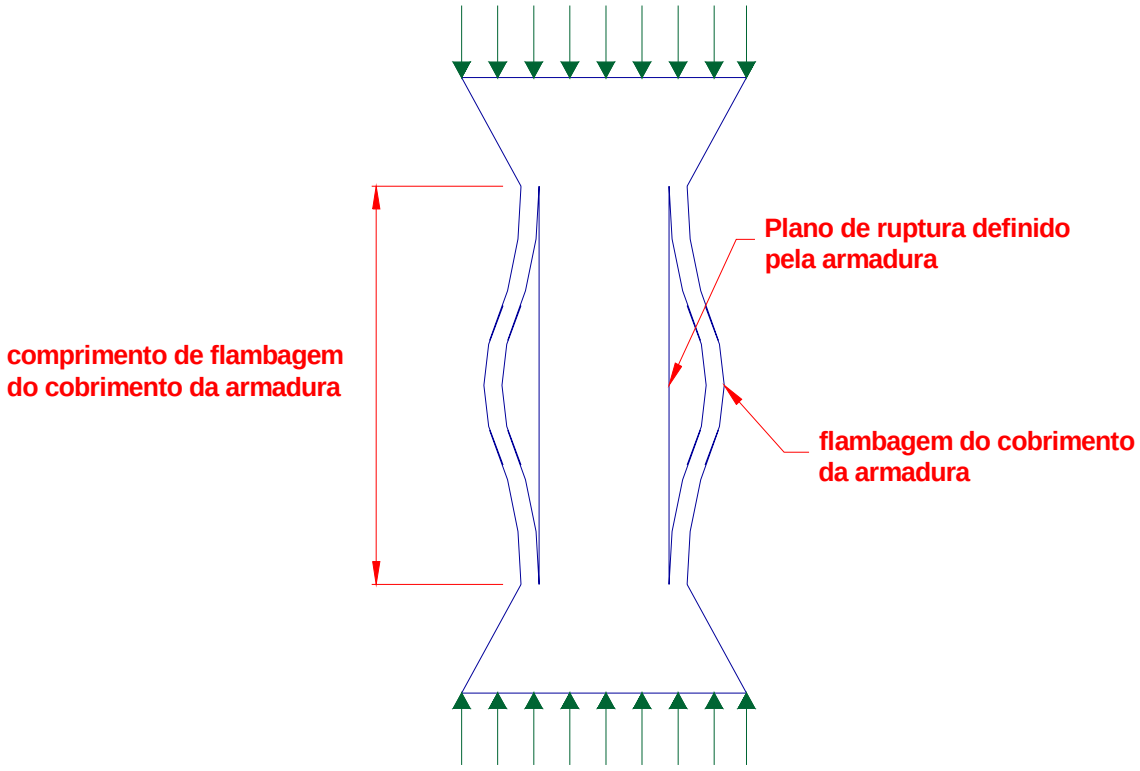

Figura 29. Destacamento do cobrimento da armadura.(LANGLOIS & PAULTRE, 1996)

Segundo GUIMARÃES (1999), as fibras têm a qualidade de controlar a fissuração, de forma que o seu emprego impede o destacamento prematuro do cobrimento dos pilares carregados, enquanto aumenta a ductilidade e a resistência ao meio agressivo. O aumento da ductilidade de elementos estruturais é uma qualidade muito procurada em projetos de estruturas, para suportar ações sísmicas.

Segundo LIMA (1997), que ensaiou pilares à compressão centrada, na série com taxa de armadura transversal ρ_w = 2,02%, que era o dobro da taxa utilizada nas demais séries, ficou a impressão de que a maior taxa de armadura transversal realmente confina melhor e inclusive impede a flambagem das armaduras longitudinais, que só ocorreriam com o escoamento dos estribos (Figura 30). Evidentemente não mais existia cobrimento das armaduras, pois já ocorrera destacamento do concreto, mesmo sem ocorrer a flambagem das armaduras longitudinais.

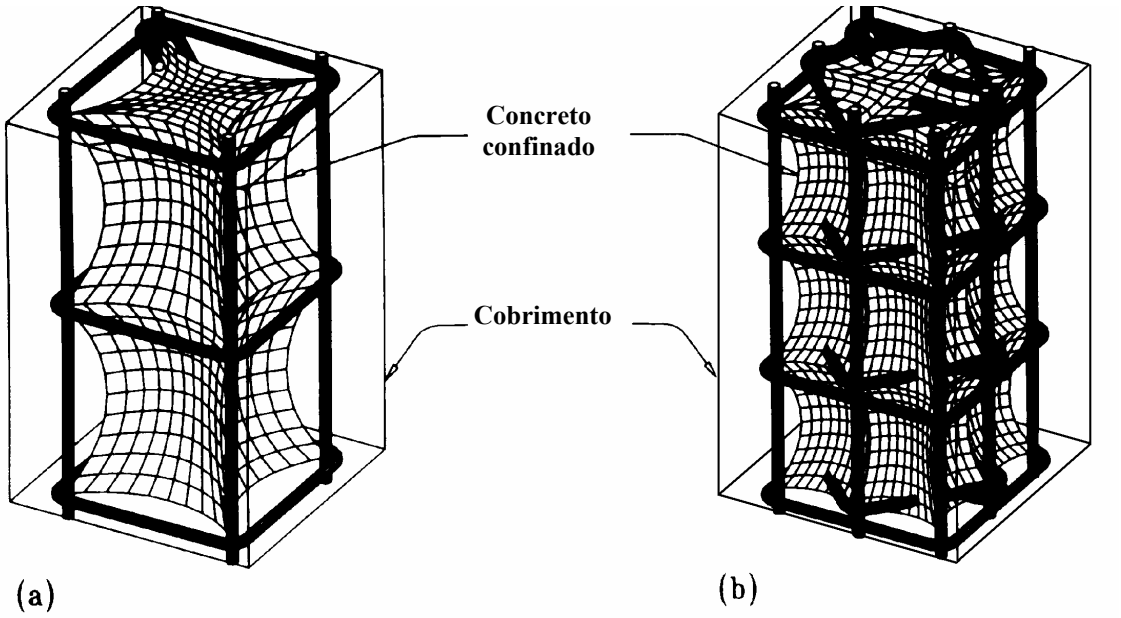

Figura 30. Efeito das armaduras no confinamento (CUSSON & PAULTRE, 1994)

KÖNIG & SIMSCH (1996) verificaram que a ductilidade é aumentada com o acréscimo da armadura lateral e que uma clara superfície de ruptura se forma com o destacamento do cobrimento. Como proposta para a norma alemã, indicam que, para evitar o destacamento do cobrimento, a força de projeto deve ser menor que a capacidade última dos pilares dividida por um fator de segurança de 1,25.

$$F = \frac{f_{ck} \cdot A_c + f_{yk} \cdot A_s}{1{,}25} \tag{51}$$

f_{ck} é a resistência característica do concreto à compressão;

A_c é a área de concreto da seção transversal;

f_{yk} é o valor característico da resistência do aço ao escoamento;

A_s é a área de aço da seção transversal;

Nos ensaios de pilares de concreto armado solicitados à flexão composta normal, realizados por VANDERLEI (1999), os resultados indicaram que a ruptura das seções de concreto simples e pouco armadas são muito frágeis. Pilares com espaçamento dos estribos igual à menor dimensão do pilar romperam subitamente quando houve o destacamento do cobrimento de concreto. Uma seção bem confinada pode apresentar um comportamento dúctil, mantendo a força aplicada para grandes deformações.

Além disso, na análise dos gráficos ***força x deformação***, ocorre uma mudança na inclinação da curva quando a força atinge 55% da força de ruptura. VANDERLEI (1999) conclui que essa mudança pode ser proveniente do início do destacamento do cobrimento de concreto que envolvia a armadura, ocasionando uma acomodação da estrutura.

6.3. ARMADURAS LONGITUDINAIS

A escolha e a disposição das armaduras devem atender não só à função estrutural como também às condições de execução, particularmente com relação ao lançamento e adensamento do concreto. Os espaços devem permitir a introdução do vibrador e impedir a segregação dos agregados e a ocorrência de vazios no interior do pilar (item 18.2.1 da NBR 6118:2003).

As armaduras longitudinais colaboram para resistir à compressão, diminuindo a seção do pilar, e também resistem às tensões de tração. Além disso, têm a função de diminuir as deformações do pilar, especialmente as decorrentes da retração e da fluência.

O diâmetro das barras longitudinais não deve ser inferior a 10 mm e nem superior a 1/8 da menor dimensão da transversal (item 18.4.2.1 da NBR 6118:2003):

$$10 \text{ mm} \leq \phi_l \leq b/8$$

6.4. LIMITES DA TAXA DE ARMADURA LONGITUDINAL

Segundo o item 17.3.5.3 da NBR 6118:2003, a armadura longitudinal mínima deve ser:

$$\rho_{min} = 0,15 \cdot \frac{N_d}{f_{yd}} \geq 0,004 \cdot A_c$$

O valor máximo da área total de armadura longitudinal é dado por:

$$A_{s,max,tot} = 8,0\% A_c$$

A maior área de armadura longitudinal possível deve ser 8% da seção real, considerando-se inclusive a sobreposição de armadura nas regiões de emenda por transpasse. Assim, tem-se:

$$\rho_{min} \leq \rho \leq 8\%$$

6.5. NÚMERO MÍNIMO DE BARRAS

A NBR 6118:2003, no item 18.4.2.2, estabelece que as armaduras longitudinais devem ser dispostas de forma a garantir a adequada resistência do elemento estrutural. Em seções poligonais, deve existir pelo menos uma barra em cada vértice; em seções circulares, no mínimo seis barras distribuídas ao longo do perímetro. A Figura 31 apresenta o número mínimo de barras para alguns tipos de seção.

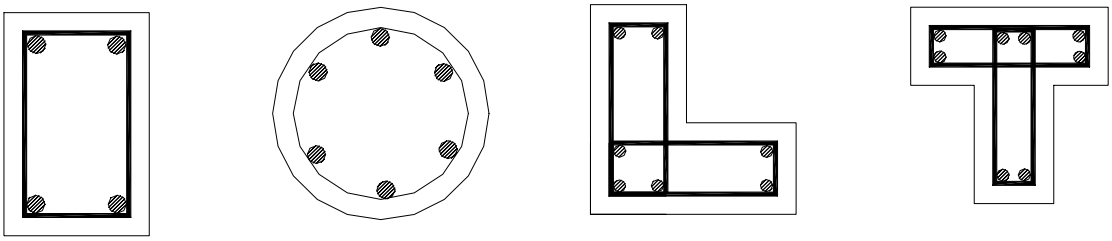

Figura 31. Número mínimo de barras

6.6. ESPAÇAMENTO DAS BARRAS LONGITUDINAIS

O espaçamento mínimo livre entre as faces das barras longitudinais, medido no plano da seção transversal, fora da região de emendas, deve ser igual ou superior ao maior dos seguintes valores (Figura 32):

$$a \geq \begin{cases} 20 \text{ mm} \\ \phi_\ell \\ 1{,}2 \cdot d_{max} \text{ (diâmetro máximo do agregado)} \end{cases}$$

Esses valores se aplicam também às regiões de emenda por traspasse.

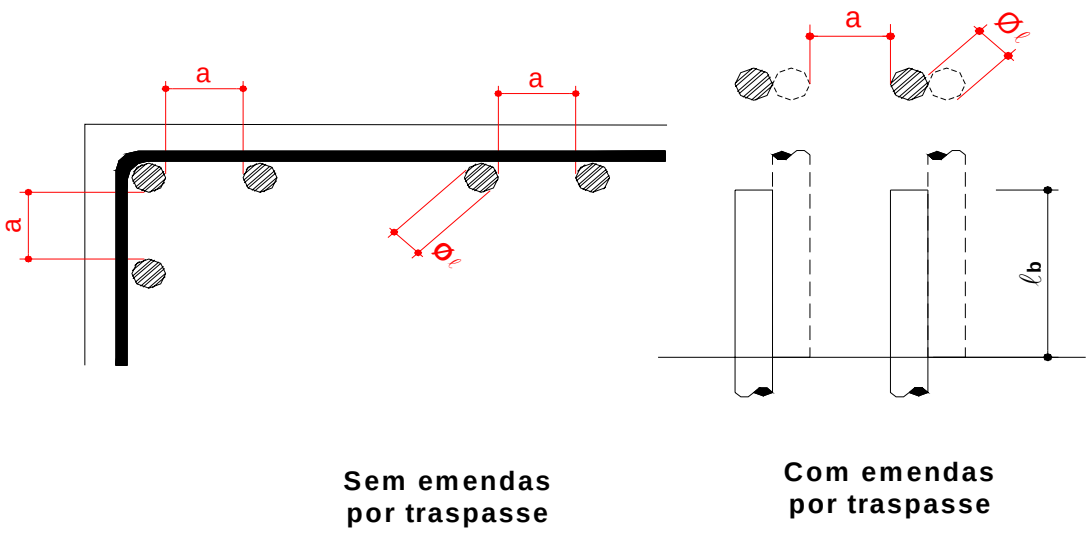

Figura 32. Espaçamento entre as barras da armadura longitudinal

Quando estiver previsto no plano de execução da concretagem o adensamento através de abertura lateral na face da fôrma, o espaçamento das armaduras deve ser suficiente para permitir a passagem do vibrador.

O espaçamento máximo s_ℓ entre os eixos das barras deve ser menor ou igual a duas vezes a menor dimensão da seção no trecho considerado, sem exceder 40 cm, ou seja:

$$s_\ell \leq \begin{cases} 2b \\ 40 \ cm \end{cases}$$

Para LEONHARDT & MÖNNIG (1978) esse espaçamento máximo não deve ser maior do que 30 cm. Entretanto, para pilares com dimensões até 40 cm, basta que existam as barras longitudinais nos cantos.

6.7. ARMADURAS TRANSVERSAIS

A armadura transversal de pilares, constituída por estribos e, quando for o caso, por grampos suplementares, deve ser colocada em toda a altura do pilar, sendo obrigatória sua colocação na região de cruzamento com vigas e lajes (item 18.4.3 da NBR 6118:2003). Os estribos devem ser fechados, geralmente em torno das barras de canto, ancorados com ganchos que se transpassam, colocados em posições alternadas.

Os estribos têm as seguintes funções:

a) garantir o posicionamento e impedir a flambagem das barras longitudinais;

b) garantir a costura das emendas de barras longitudinais;

c) confinar o concreto e obter uma peça mais resistente ou dúctil.

De acordo com a NBR 6118:2003, o diâmetro dos estribos em pilares não deve ser inferior a 5 mm nem a 1/4 do diâmetro da barra isolada ou do diâmetro equivalente do feixe que constitui a armadura longitudinal, ou seja:

$$\phi_t \geq \begin{cases} 5\ mm \\ \phi_\ell/4\ ou\ \phi_n/4 \end{cases}$$

Em pilares com momentos nas extremidades (portanto, nos pilares em geral), e nos pré-moldados, LEONHARDT & MÖNNIG (1978) recomendam que se disponham, nas suas extremidades, 2 a 3 estribos com espaçamento igual a $s_t/2$ e $s_t/4$ (Figura 33).

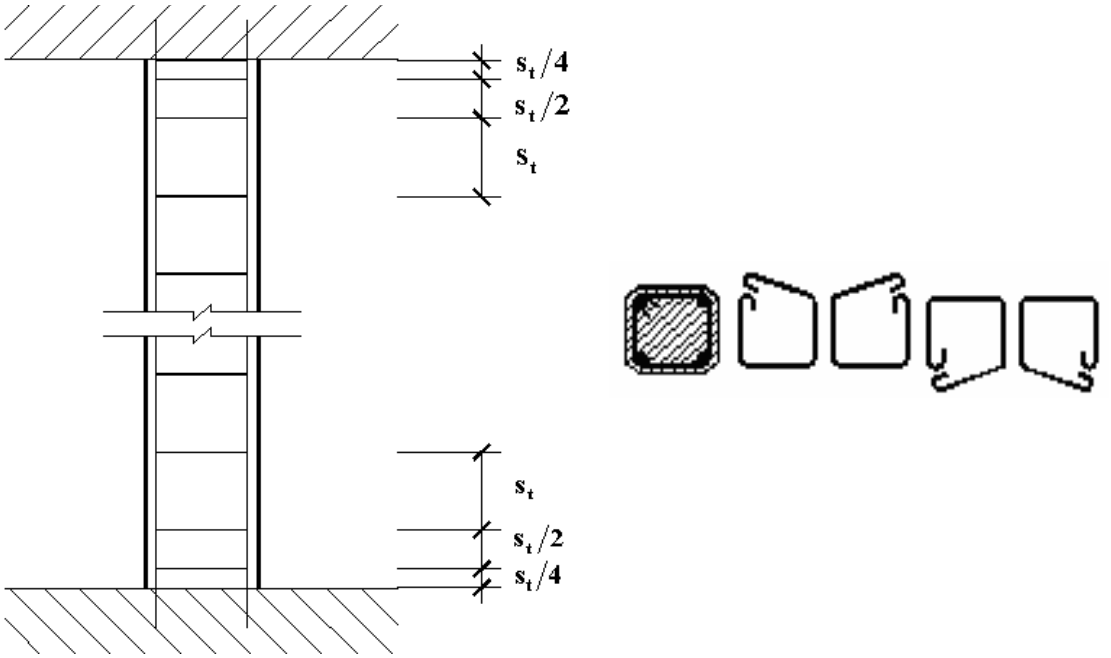

Figura 33. Estribos adicionais nos extremos e ganchos alternados (LEONHARDT & MÖNNIG, 1978)

FUSCO (1995) ainda comenta que, de modo geral, nos edifícios, os estribos não são colocados nos trechos de intersecção dos pilares com as vigas que neles se apóiam. Isso decorre do fato de a presença de estribos nesses trechos dificultar muito a montagem da armadura das vigas.

6.8. ESPAÇAMENTO MÁXIMO DOS ESTRIBOS

O espaçamento longitudinal entre estribos, medido na direção do eixo do pilar, deve ser igual ou inferior ao menor dos seguintes valores:

$$s_t \leq \begin{cases} 20 \text{ cm} \\ \text{menor dimensão da seção} \\ 12\phi_\ell \quad \text{para CA} - 50 \\ 25\phi_\ell \quad \text{para CA} - 25 \end{cases}$$

Permite-se adotar o diâmetro dos estribos $\phi_t < \phi_\ell/4$, desde que as armaduras sejam constituídas do mesmo tipo de aço e o espaçamento respeite também a limitação (f_{yk} em MPa):

$$s_{max} = 90.000 \cdot \left(\frac{\phi_t^2}{\phi_\ell}\right) \cdot \frac{1}{f_{yk}}$$

6.9. ESTRIBOS SUPLEMENTARES

Sempre que houver possibilidade de flambagem das barras da armadura, situadas junto à superfície, devem ser tomadas precauções para evitá-la. A NBR 6118:2003 (item 18.2.4) considera que os estribos poligonais garantem contra flambagem as barras longitudinais situadas em seus cantos e as por eles abrangidas, situadas no máximo à distância de $20\phi_t$ do canto, se nesse trecho de comprimento $20\phi_t$ não houver mais de duas barras, não contando a do canto (Figura 34).

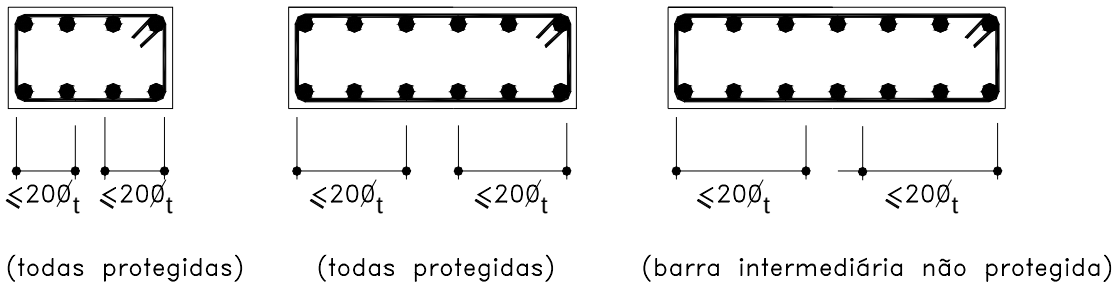

Figura 34. Proteção contra a flambagem das barras longitudinais (LEONHARDT & MÖNNIG, 1978)

Quando houver mais de duas barras no trecho de comprimento $20\phi_t$ ou barras fora dele, deve haver estribos suplementares. Se o estribo suplementar for constituído por uma barra reta, terminada em ganchos, ele deve atravessar a seção do pilar e os seus ganchos devem envolver a barra longitudinal. Se houver mais de uma barra longitudinal a ser protegida junto à extremidade do estribo suplementar, seu gancho deve envolver um estribo principal em um ponto junto a uma das barras, o que deve ser indicado no projeto de modo bem destacado (Figura 35). Essa amarra garantirá contra a flambagem essa barra encostada e mais duas no máximo para cada lado, não distantes dela mais de $20\phi_t$. No caso da utilização dessas amarras, para que o cobrimento seja respeitado, é necessário prever uma distância maior entre a superfície do estribo e a face do pilar.

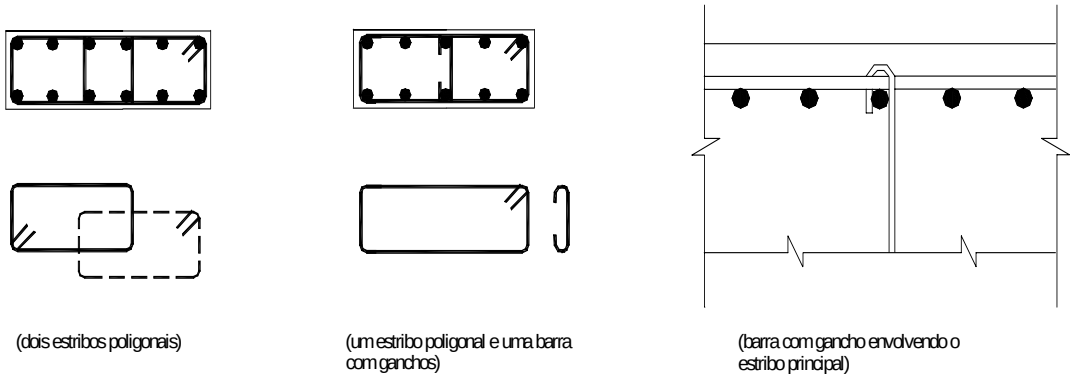

Figura 35. Estribos suplementares/ganchos para proteção contra flambagem das barras longitudinais

É oportuno comentar que a presença de estribos suplementares pode dificultar a concretagem. Uma alternativa seria concentrar as barras nos cantos, para evitar os estribos suplementares.

A NBR 6118:2003 comenta ainda que, no caso de estribos curvilíneos cuja concavidade esteja voltada para o interior do concreto, não há necessidade de estribos suplementares. Se as seções das barras longitudinais se situarem em uma curva de concavidade voltada para fora do concreto, cada barra longitudinal deve ser ancorada pelo gancho de um estribo reto ou pelo canto de um estribo poligonal.

7. EXEMPLO 1

Capítulo 7

Apresentam-se neste item alguns exemplos de dimensionamento de um pilar (Figura 36), utilizando-se os métodos da curvatura aproximada, da rigidez κ aproximada e acoplado a diagramas M, N, 1/r, segundo a NBR 6118:2003.

Dados:

- Concreto C25, aço CA 50;
- Cobrimento nominal C_{nom} = 2,5 cm e d'=4,0 cm;
- N_k = 930 kN;
- Comprimento do pilar: 675 cm;
- Seção transversal: 26 cm x 40 cm;

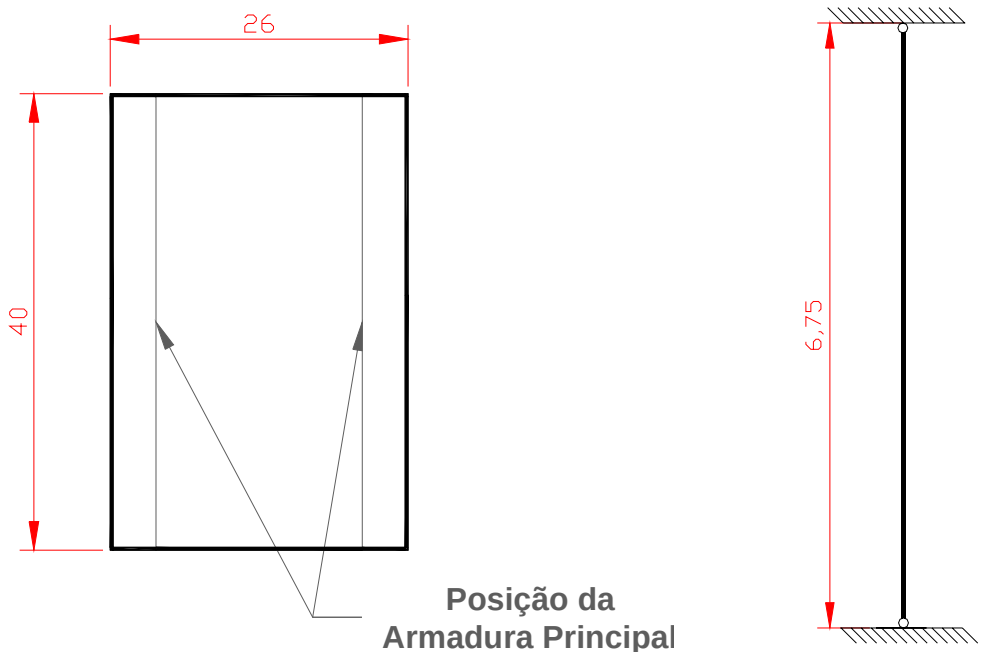

Figura 36. Detalhes do pilar

$$\nu = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{1{,}4 \cdot 930}{26 \cdot 40 \cdot \frac{2{,}5}{1{,}4}} \therefore \boldsymbol{\nu = 0{,}7}$$

$$i = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{26}{\sqrt{12}} \therefore \mathbf{i = 7{,}506}$$

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i} = \frac{675}{7{,}506} \therefore \boldsymbol{\lambda = 90}$$

Sendo o pilar biapoiado, com momentos aplicados nas duas extremidades, tem-se a configuração indicada na Figura 37. Para este exemplo, serão adotados momentos nas extremidades superior e inferior (M_A e M_B, respectivamente), com valor em módulo igual ao valor do momento mínimo dado pela eq. (29), para permitir que sejam utilizadas duas abordagens diferentes para resolução do mesmo problema, e sejam comparadas as respostas obtidas.

Portanto, o índice de esbeltez λ do pilar em estudo é 90. Considerando o pilar biapoiado e sem carregamento transversal, tem-se duas situações possíveis, no cálculo de α_b.

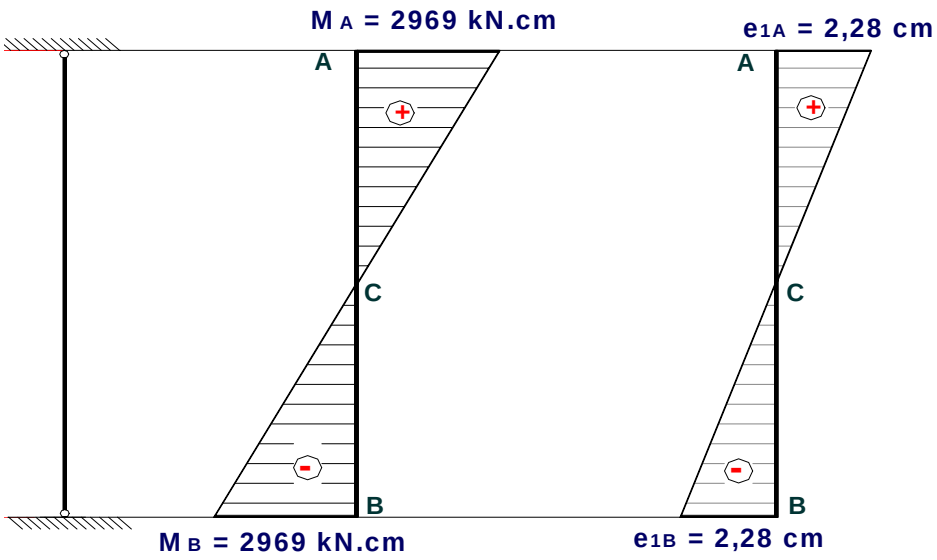

Figura 37. Momentos atuantes no pilar

7.1. PILARES BIAPOIADOS SEM FORÇAS TRANSVERSAIS

Para essa primeira situação, o valor de α_b é dado por:

$$\alpha_b = 0{,}60 + 0{,}40\frac{M_B}{M_A} \geq 0{,}40 \Rightarrow \alpha_b = 0{,}60 + 0{,}40 \cdot \frac{(-2969)}{2969} = 0{,}20 \geq 0{,}40 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_b = 0{,}40}$$

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12{,}5 \cdot e_1 / h}{\alpha_b} = \frac{25 + 12{,}5 \cdot 2{,}28/26}{0{,}4} \therefore \boldsymbol{\lambda_1 = 65{,}24}$$

$$35 \leq \lambda_1 \leq 90 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = 65{,}24}$$

Portanto, sendo $\lambda = 90 > \lambda_1 = 65{,}24$, devem ser considerados os efeitos de 2ª ordem.

7.1.1. Método do pilar-padrão com curvatura aproximada

$$M_{1d,min} = N_d(0{,}015 + 0{,}03h) = 1{,}4 \cdot 930 \cdot (0{,}015 + 0{,}03 \cdot 0{,}26) \Rightarrow \boldsymbol{M_{1d,min} = 29{,}69\ kN.m}$$

$$(M_{1d,A} = 29{,}69\ kN.m) \geq (M_{1d,mín} = 29{,}69\ kN.m) \therefore \boldsymbol{M_{1d,A} = 29{,}69\ kN.m}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{0{,}005}{h(\nu + 0{,}5)} \leq \frac{0{,}005}{h} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{0{,}005}{0{,}26(0{,}7 + 0{,}5)} = 0{,}016 \leq \frac{0{,}005}{0{,}26} = 0{,}0192 \therefore \boldsymbol{\frac{1}{r} = 0{,}016}$$

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \cdot \frac{\ell_e^2}{10} \cdot \frac{1}{r} = 0{,}40 \cdot 29{,}69 + 1{,}4 \cdot 930 \cdot \frac{6{,}75^2}{10} \cdot 0{,}016 \therefore \boldsymbol{M_{d,tot} = 106{,}8\ kN.m}$$

$$e_{tot} = \frac{M_{d,tot}}{N_d} = \frac{106{,}80}{1{,}4 \cdot 930} \Rightarrow \boldsymbol{e_{tot} = 8{,}20\ cm}$$

$$\mu = \frac{\nu \cdot e_{tot}}{h} = \frac{0{,}7 \cdot 8{,}20}{26} \therefore \boldsymbol{\mu = 0{,}22}$$

A partir do valor de μ, e utilizando o ábaco A-3 (Figura 38) de VENTURINI et al. (1987), obtém-se o valor de ω:

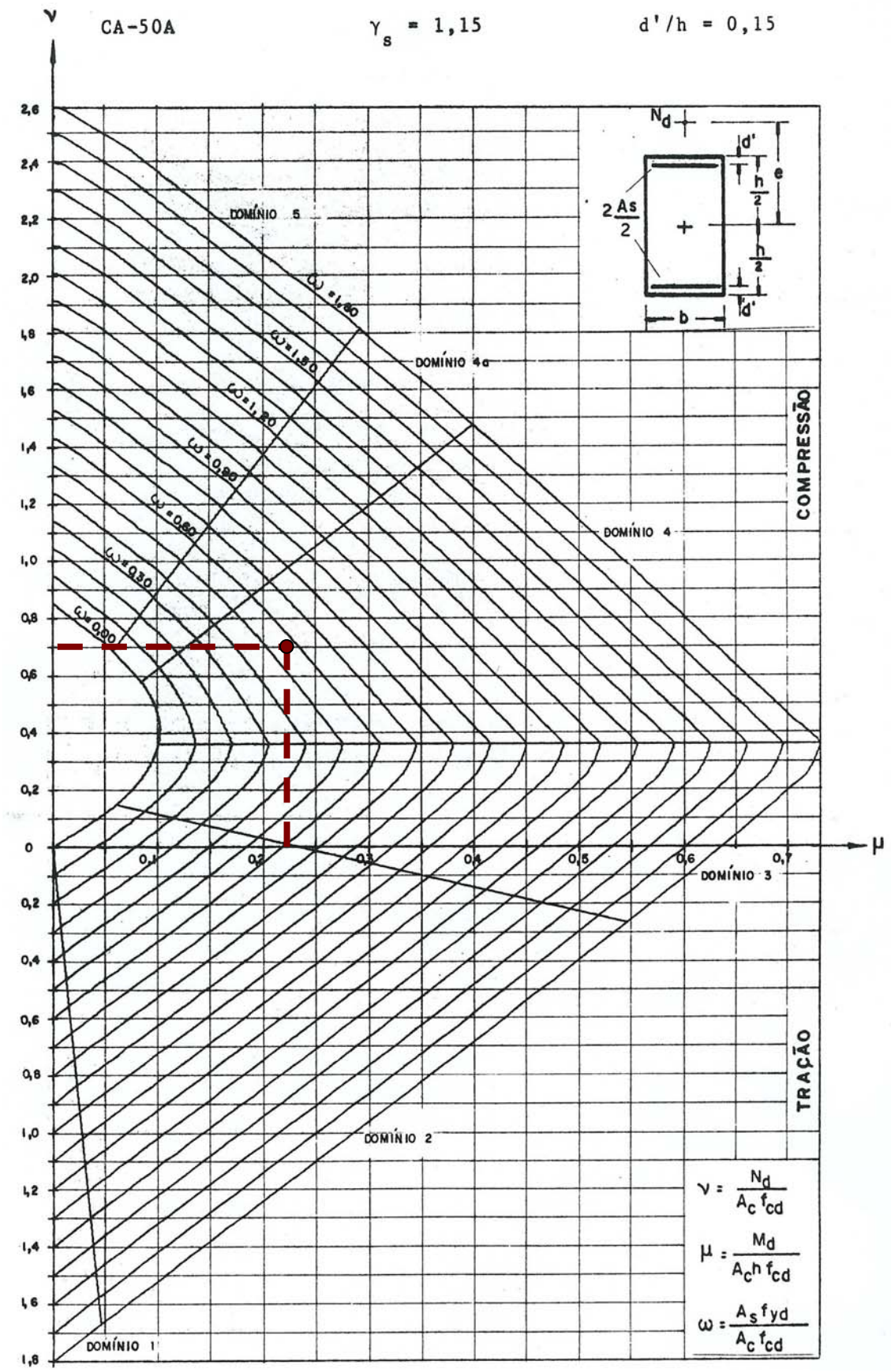

Figura 38. Ábaco A3 (Extraído de VENTURINI, 1987)

$$\omega = 0{,}56 \Rightarrow A_s = \frac{A_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}} \cdot \omega = \frac{26 \cdot 40 \cdot \frac{2{,}5}{1{,}4}}{\frac{50}{1{,}15}} = 42{,}71 \cdot \omega = 42{,}71 \cdot 0{,}56 \therefore \mathbf{A_s = 23{,}92\ cm^2}$$

Taxa de Armadura: $\rho = \dfrac{\mathbf{23{,}92}}{\mathbf{26 \cdot 40}} = \mathbf{2{,}30\%}$

Armadura adotada: **- 12 ϕ 16 mm (24,0 cm²)** (Figura 39)

- Alternativa: 8 ϕ 20 mm (25,20 cm²)

Será utilizado estribo duplo para evitar a flambagem das barras intermediárias, que não estariam protegidas no caso da utilização de estribo simples.

No cálculo dos estribos, serão respeitadas as especificações da NBR 6118:2003:

- **Diâmetro**

$$\phi_t \geq \begin{cases} \phi_\ell / 4 = 16/4 = 4\ \text{mm} \\ 5\ \text{mm} \end{cases}$$

Adotado $\phi_t = 5$ mm

- **Espaçamento**

$$\phi_t \geq \begin{cases} 26\ \text{cm}\ \ (\text{menor dimensão}) \\ 12\phi_\ell = 12 \cdot 1{,}6 = 19{,}2\ \text{cm} \\ 20\ \text{cm} \end{cases}$$

Adotado s = 19 cm

- **Estribos suplementares**

$$20\phi_t = 20 \cdot 0{,}5 = 10\ \text{cm}$$

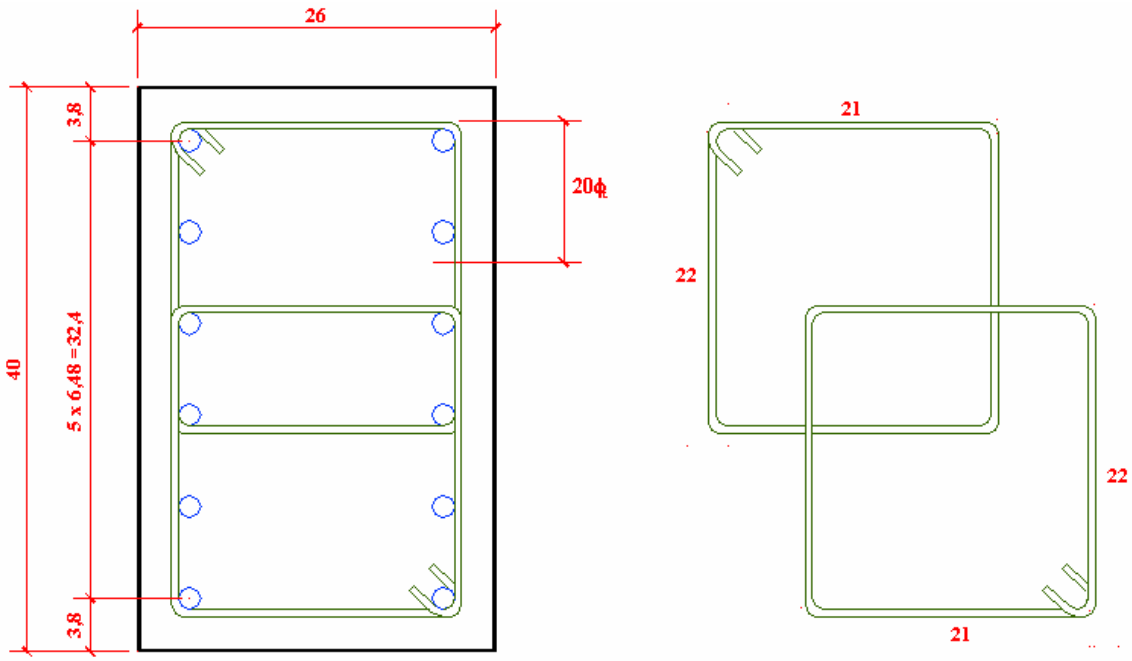

Figura 39. Detalhe da seção: 12 ϕ16 (24,0 cm²), estribos ϕ5 c/ 19

7.1.2. Método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada

Serão vistos dois processos: processo iterativo da NBR 6118:2003 e o processo direto, proposto por BANKI (2004).

a) Processo iterativo

Utilizando as eq. (44) e (45), tem-se:

- **1ª. Iteração:**

Será adotado para 1ª aproximação o valor do momento total obtido pelo método anterior.

$$\mathbf{(M_{d,tot})_{1.0} = 106{,}8\ kN.m} \Leftrightarrow \left(\kappa/\nu\right)_1 = 32\left(1+5\frac{106{,}8}{0{,}26\cdot 1{,}4\cdot 930}\right) \therefore \mathbf{\left(\kappa/\nu\right)_1 = 82{,}48}$$

$$(M_{d,tot})_{1.1} = \frac{0{,}40\cdot 29{,}69}{1-\dfrac{90^2}{120\cdot 82{,}48}} = 65{,}39\ kN.m$$

Para a próxima iteração, será considerada a média entre o valor inicial e final da iteração anterior, ou seja:

$$(M_{d,tot})_{2.0} = \frac{106{,}8+65{,}39}{2} \Rightarrow \mathbf{(M_{d,tot})_{2.0} = 86{,}10\ kN.m}$$

- **2ª. Iteração:**

$$\left(\mathbf{M_{d,tot}}\right)_{\mathbf{2.0}} = \mathbf{86{,}10\ kN.m} \Leftrightarrow \left(\kappa/\nu\right)_1 = 32\left(1+5\frac{86{,}10}{0{,}26\cdot 1{,}4\cdot 930}\right) \therefore \left(\kappa/\nu\right)_2 = \mathbf{72{,}69}$$

$$\left(M_{d,tot}\right)_{2.1} = \frac{0{,}40\cdot 29{,}69}{1-\dfrac{90^2}{120\cdot 72{,}69}} = 166{,}26\ \text{kN.m}$$

$$\left(M_{d,tot}\right)_{3.0} = \frac{86{,}10+166{,}26}{2} \Rightarrow \left(\mathbf{M_{d,tot}}\right)_{\mathbf{3.0}} = \mathbf{126{,}18\ kN.m}$$

- **3ª. Iteração:**

$$\left(\mathbf{M_{d,tot}}\right)_{\mathbf{3.0}} = \mathbf{126{,}18\ kN.m} \Leftrightarrow \left(\kappa/\nu\right)_1 = 32\left(1+5\frac{122{,}16}{0{,}26\cdot 1{,}4\cdot 930}\right) \therefore \left(\kappa/\nu\right)_3 = \mathbf{91{,}64}$$

$$\left(M_{d,tot}\right)_{3.1} = \frac{0{,}40\cdot 29{,}69}{1-\dfrac{90^2}{120\cdot 91{,}64}} = 45{,}09\ \text{kN.m}$$

$$\left(M_{d,tot}\right)_{4.0} = \frac{126{,}18+45{,}09}{2} \Rightarrow \left(\mathbf{M_{d,tot}}\right)_{\mathbf{4.0}} = \mathbf{85{,}63\ kN.m}$$

Como se pode observar, o problema parece que não está convergindo. No entanto, segundo BANKI (2004), pela relação entre as eq. (44) e (45), não há possibilidade do processo não convergir. A questão está na forma de aplicação do processo iterativo. Na primeira iteração, partiu-se de um valor arbitrário para $M_{d,tot}$ = 106,8 kN.m, obtendo um novo $M_{d,tot}$ = 65,39 kN.m. Estes valores definem um limite inferior e outro superior para o resultado esperado. Para a segunda iteração, pode-se adotar a média como um valor razoável, ou seja, $M_{d,tot}$ = 86,10 kN.m.

Partindo-se deste valor médio, obteve-se novo $M_{d,tot}$ = 166,26 kN.m. No entanto, estando este valor fora do intervalo definido na primeira iteração ($65{,}39 \le M_{d,tot} \le 106{,}8$), este resultado não deve ser adotado como parâmetro para a próxima iteração.

BANKI (2004) afirma que processo correto consiste em fazer uma pesquisa binária no intervalo. Dado o intervalo de pesquisa ($65{,}39 \le M_{d,tot} \le 106{,}8$), com seu valor médio $M_{d,Méd}$ = 86,10 kN.m, ao obter uma resposta superior à média, deve-se concluir simplesmente que o valor desejado encontra-se na parte superior do intervalo, ou seja, na faixa ($86{,}10 \le M_{d,tot} \le 106{,}8$). Para a próxima iteração, uma estimativa

correta deveria estar dentro do intervalo encontrado, podendo-se utilizar o valor médio $M_{d,Méd} = 96,45$.

Tem-se, portanto, o processo iterativo indicado na Tabela 5 e apresentado graficamente na Figura 40. Deve-se observar que na 1ª iteração é definido o intervalo de pesquisa, e a partir deste intervalo todo o processo iterativo é desenvolvido. Assim, o que está apresentado na Tabela 5 como 1ª iteração, na verdade se trata da 2ª iteração, já limitada pelo intervalo. Outra observação importante é a de que a definição do intervalo de pesquisa não impõe que o valor do momento total na próxima iteração esteja contido neste intervalo, mas apenas o descarta no caso de estar fora.

Tabela 5. Iterações do Método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada

Iterações	Intervalo de Pesquisa			k	Md,tot (kN.m)	Erro (%)
	Valor Mín.	Valor Máx.	Média			
1	65,38	106,80	86,09	72,69	166,27	93,13%
2	86,09	106,80	96,45	77,58	91,35	5,28%
3	86,09	96,45	91,27	75,14	116,81	27,98%
4	91,27	96,45	93,86	76,36	102,32	9,02%
5	93,86	96,45	95,15	76,97	96,48	1,40%
6	95,15	96,45	95,80	77,28	93,84	2,05%
7	95,15	95,80	95,48	77,13	95,14	0,35%
8	95,15	95,48	95,31	77,05	95,81	0,52%
9	95,31	95,48	95,39	77,09	95,47	0,08%
10	95,39	95,48	95,44	77,11	95,30	0,14%
11	95,39	95,44	95,41	77,10	95,39	0,03%
12	95,39	95,41	95,40	77,09	95,43	0,03%
13	95,40	95,41	95,41	77,10	95,41	0,00%

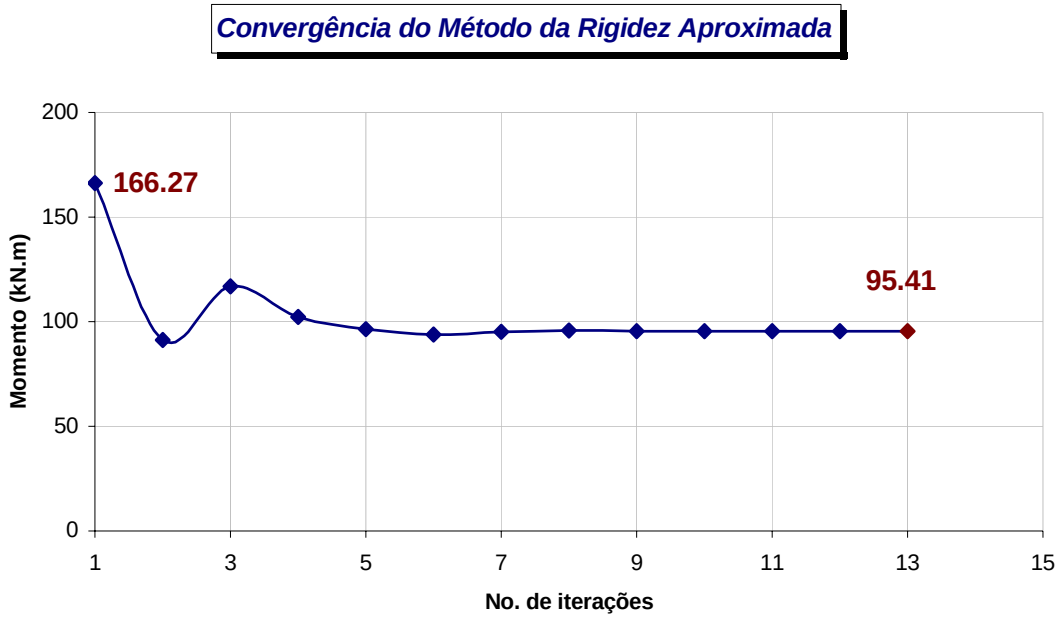

Figura 40. Convergência do Método da Rigidez Aproximada

Pode-se notar que, embora encontrado um valor com suficiente precisão (1,40%) de $M_{d,tot} = 96{,}48$ kN.m na 5ª iteração, este erro ainda flutua ligeiramente acima deste valor até convergir para o valor final de $M_{d,tot} = 95{,}41$ kN.m.

b) Processo direto

Utilizando-se o processo direto proposto por BANKI (2004), em que o processo iterativo proposto pela Norma é substituído pela eq. (46), tem-se:

$$k_1 = 1 - \frac{\lambda^2}{3840} = 1 - \frac{90^2}{3840} \Rightarrow \mathbf{k_1 = -1{,}11}$$

$$k_2 = k_1 \cdot h \cdot N_d = -1{,}11 \cdot 0{,}26 \cdot 1{,}4 \cdot 930 \Rightarrow \mathbf{k_2 = -375{,}55}$$

$$M_1 = \alpha_b \cdot M_{1d,A} = 0{,}4 \cdot 29{,}69 \Rightarrow \mathbf{M_1 = 11{,}87\ \ kN.m}$$

$$M_{d,tot} = \frac{5 \cdot M_1 - k_2 + \sqrt{k_2^2 + 10 \cdot M_1 \cdot (2 \cdot h \cdot N_d - k_2) + 25 \cdot M_1^2}}{10} \Rightarrow \mathbf{M_{d,tot} = 95{,}41\,kN.m}$$

Portanto, pode-se observar que o momento calculado pelo processo direto corresponde ao obtido pelo processo iterativo; no entanto foram necessárias várias iterações para se atingir o valor que pode ser obtido simplesmente pela utilização da eq. (46), o que demonstra ser muito mais viável e interessante o cálculo pelo processo

direto, que evita as dificuldades na aplicação do processo iterativo, como os comentados anteriormente, e facilita os cálculos.

Dando continuidade ao dimensionamento, tem-se:

$$\mathbf{M_{d,tot} = 95{,}41\,kN.m} \Rightarrow e_{tot} = \frac{M_{d,tot}}{N_d} = \frac{95{,}41}{1{,}4 \cdot 930}\ \mathbf{e_{tot}\,0{,}0733\,m = 7{,}33\,cm}$$

$$\mu = \frac{\nu \cdot e_{tot}}{h} = \frac{0{,}7 \cdot 7{,}33}{26} \therefore \boldsymbol{\mu = 0{,}20}$$

A partir do valor de μ, e utilizando o ábaco A-3 de VENTURINI et al. (1987), obtém-se o valor de ω:

$$\omega = 0{,}49 \Rightarrow A_s = \frac{A_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}} \cdot \omega = \frac{26 \cdot 40 \cdot \frac{2{,}5}{1{,}4}}{\frac{50}{1{,}15}} = 42{,}71 \cdot \omega = 42{,}71 \cdot 0{,}49 \therefore \mathbf{A_s = 20{,}93\,cm^2}$$

Taxa de Armadura: $\boldsymbol{\rho = \frac{20{,}93}{26 \times 40} = 2{,}01\%}$

Armadura adotada: **- 10 ϕ 16 mm (20 cm²)**

- Alternativa: 8 ϕ 20 mm (25,2 cm²)

Para o posicionamento da armadura longitudinal, como nem todas as barras estão protegidas pelo estribo contra a flambagem, e para manter a simetria da armação, será utilizado estribo duplo, conforme a Figura 41.

O cálculo dos estribos é análogo ao do caso anterior.

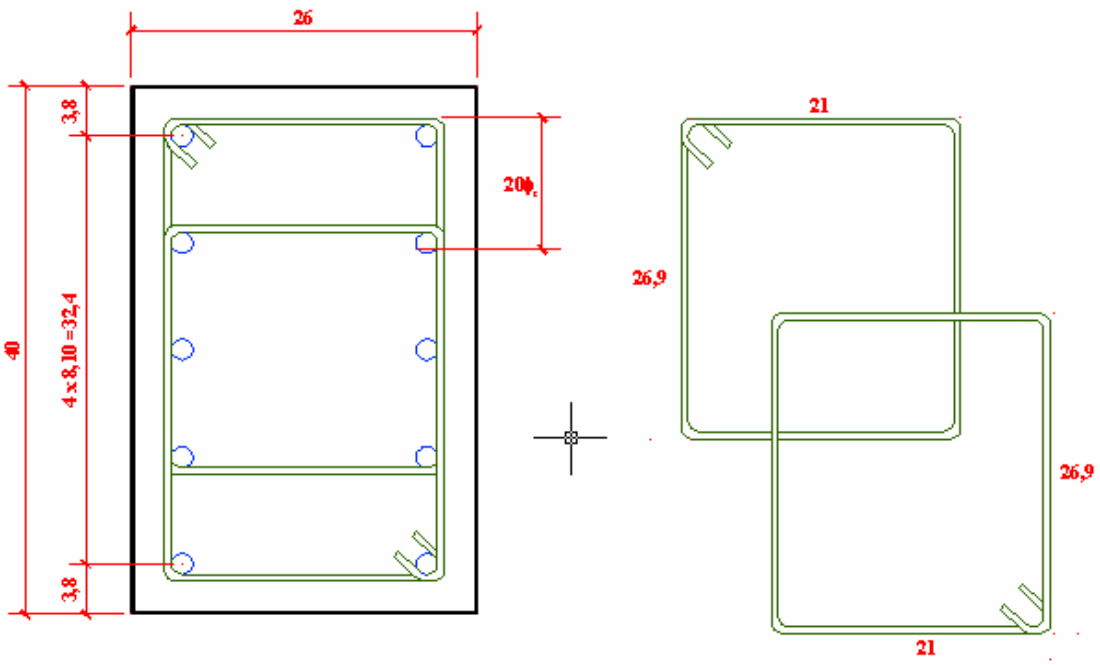

Figura 41. Detalhe da seção: 10 ϕ16 (20,0 cm²), estribos ϕ5 c/ 19

7.1.3. Método do Pilar-padrão acoplado a diagramas M-N-1/r

Consideram-se e_2 e μ_2 dados pelas equações:

$$e_2 = \frac{\ell_e^2}{10} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)_{base}$$

$$\mu_2 = \frac{\nu \cdot e_2}{h} = \frac{\nu}{h \cdot d} \cdot \frac{\ell_e^2}{10^4} \cdot \left(\frac{10^3 \cdot d}{r}\right) \Rightarrow \mu_2 = 0{,}05576 \cdot \left(10^3 \cdot \frac{d}{r}\right)$$

Para o cálculo do coeficiente μ_1, deve-se multiplicar a excentricidade de 1ª ordem e_1 por α_b, visto que para os demais métodos apresentados pela Norma, para o cálculo da excentricidade total, é utilizado este procedimento. Portanto, tem-se:

$$\mu_1 = \frac{\nu \cdot \alpha_b \cdot e_1}{h} = \frac{\nu}{h} \cdot 0{,}4 \cdot (0{,}015 + 0{,}03 \cdot h) \Rightarrow \mu_1 = 0{,}0246$$

Aproximação inicial: $10^3.d/r = 5$

$$\left.\begin{array}{l} \mu_2 = 0{,}05576 \cdot 5 = 0{,}2788 \\ \mu_1 = 0{,}0246 \end{array}\right\} \quad \boldsymbol{\mu_1 + \mu_2 = 0{,}3034}$$

Na Figura 42, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d'}{h} = 0{,}15 \\ \nu = 0{,}7 \end{array}\right\} \quad \text{Diagrama M-N-1/r: } \boldsymbol{\omega = 0{,}40 \;\Rightarrow\; A_s = 42{,}71 \cdot \omega = 17{,}08\,cm^2}$$

Taxa de Armadura: $\rho = \dfrac{\mathbf{17{,}08}}{\mathbf{26 \times 40}} = \mathbf{1{,}64\%}$

Armadura adotada: - **10 ϕ 16 mm (20 cm²)** (Figura 41)

- Alternativa: 6 ϕ 20 mm (18,90 cm²).

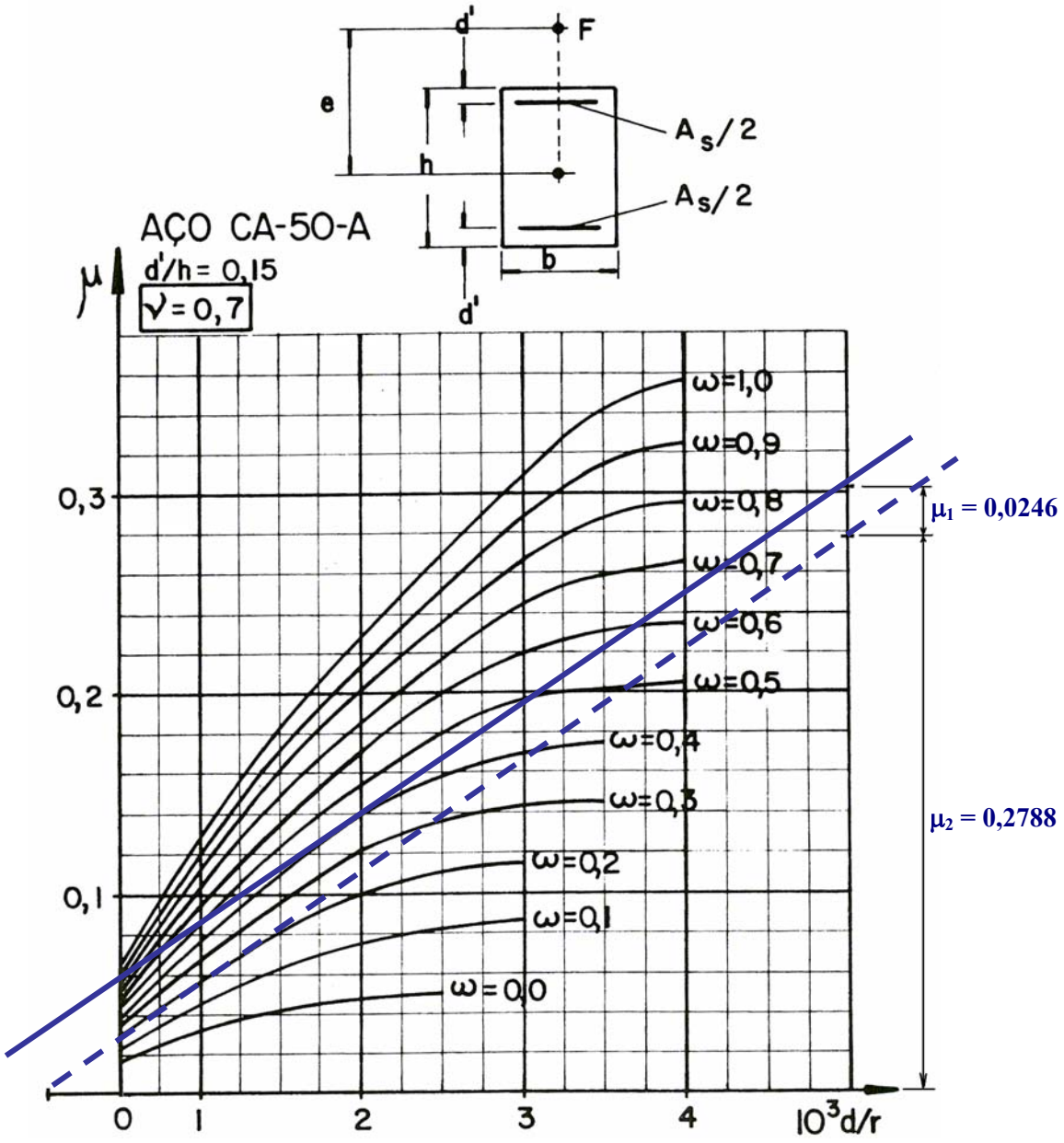

Figura 42. Diagrama μ , ν, 10^3 d/r (Extraído de FUSCO, 1981)

7.2. PILARES BIAPOIADOS OU EM BALANÇO COM MOMENTOS MENORES QUE O MOMENTO MÍNIMO

Para este caso, tem-se:

$$\boldsymbol{\alpha_b = 1}$$

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12{,}5 \cdot e_1 / h}{\alpha_b} = \frac{25 + 12{,}5 \cdot 2{,}28/26}{1{,}0} \therefore \boldsymbol{\lambda_1 = 26{,}10}$$

$$35 \le \lambda_1 \le 90 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = 35}$$

Portanto, sendo $\lambda = 90 > \lambda_1 = 35$, devem ser considerados os efeitos de 2ª ordem também para este segundo caso.

7.2.1. Método do Pilar-padrão com Curvatura Aproximada

$$M_{1d,min} = N_d(0{,}015 + 0{,}03h) = 1{,}4 \cdot 930 \cdot (0{,}015 + 0{,}03 \cdot 0{,}26) \Rightarrow \boldsymbol{M_{1d,min} = 29{,}69\ kN.m}$$

$$(M_{1d,A} = 29{,}69\ kN.m) \ge (M_{1d,mín} = 29{,}69\ kN.m) \therefore \boldsymbol{M_{1d,A} = 29{,}69\ kN.m}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{0{,}005}{h(\nu + 0{,}5)} \le \frac{0{,}005}{h} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{0{,}005}{0{,}26(0{,}7 + 0{,}5)} = 0{,}016 \le \frac{0{,}005}{0{,}26} = 0{,}0192 \therefore \boldsymbol{\frac{1}{r} = 0{,}016}$$

$$M_{d,tot} = \alpha_b M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10}\frac{1}{r} = 1{,}0 \cdot 29{,}69 + 1{,}4 \cdot 930 \frac{6{,}75^2}{10} 0{,}016 \therefore \boldsymbol{M_{d,tot} = 124{,}61\ kN.m}$$

$$e_{tot} = \frac{M_{d,tot}}{N_d} = \frac{124{,}61}{1{,}4 \cdot 930} \Rightarrow \boldsymbol{e_{tot} = 9{,}57\ cm}$$

$$\mu = \frac{\nu \cdot e_{tot}}{h} = \frac{0{,}7 \cdot 9{,}57}{26} \therefore \boldsymbol{\mu = 0{,}26}$$

A partir do valor de μ, e utilizando o ábaco A-3 de VENTURINI et al. (1987), obtém-se o valor de ω:

$$\omega = 0{,}68 \Rightarrow A_s = \frac{A_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}} \cdot \omega = \frac{26 \cdot 40 \cdot \frac{2{,}5}{1{,}4}}{\frac{50}{1{,}15}} = 42{,}71 \cdot \omega = 42{,}71 \cdot 0{,}68 \therefore \boldsymbol{A_s = 29{,}04\ cm^2}$$

Taxa de Armadura: $\boldsymbol{\rho = \frac{29{,}04}{26 \cdot 40} = 2{,}79\%}$

Armadura adotada: **- 10 ϕ 20 mm (31,50 cm²)**

- Alternativa: 16 ϕ 16 mm (32 cm²).

O cálculo dos estribos é análogo aos dos casos anteriores.

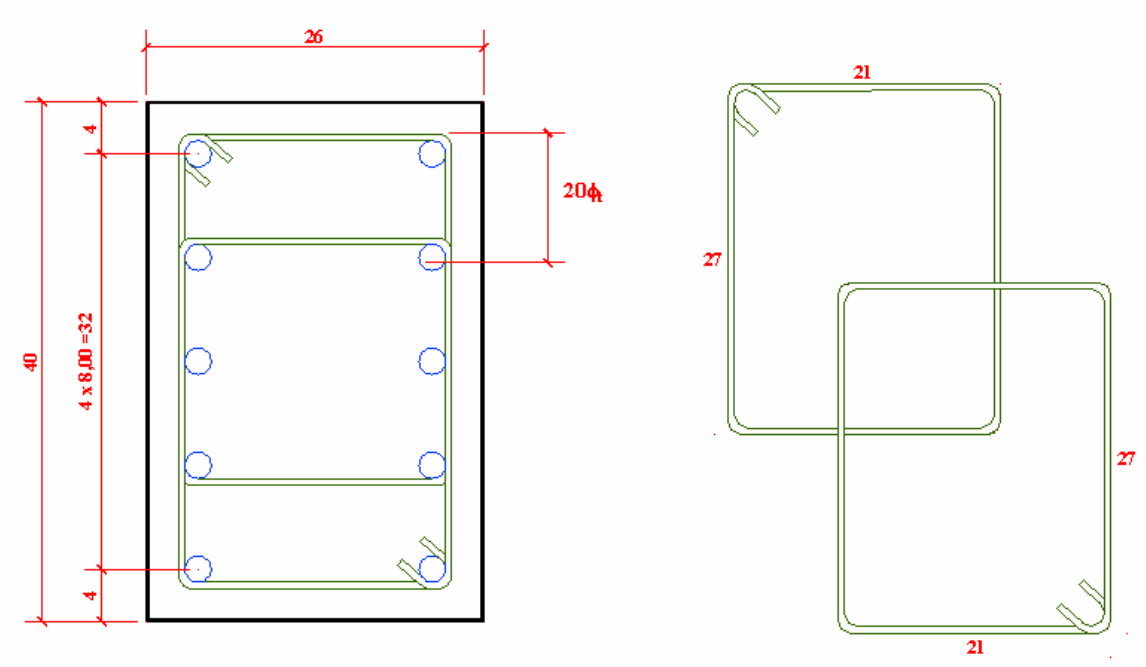

Figura 43. Detalhe da seção: 10 ϕ20 (31,5 cm²), estribos ϕ5 c/ 19

7.2.2. Método do Pilar-padrão com Rigidez κ Aproximada

Utilizando as eq. (44) e (45), tem-se:

- **1ª. Iteração:**

Será adotado para 1ª aproximação o valor do momento total obtido pelo método anterior.

$$\left(M_{d,tot}\right)_{1.0} = 124{,}61\,\text{kN.m} \Leftrightarrow \left(\kappa/\nu\right)_1 = 32\left(1+5\frac{124{,}61}{0{,}26\cdot 1{,}4\cdot 930}\right) \therefore \left(\kappa/\nu\right)_1 = \mathbf{91{,}08}$$

$$\left(M_{d,tot}\right)_{1.1} = \frac{1{,}0\cdot 29{,}69}{1-\dfrac{90^2}{120\cdot 91{,}08}} = 114{,}68\,\text{kN.m}$$

Para a segunda iteração, pode-se considerar como estimativa razoável a média entre os valores encontrados:

$$\left(M_{d,tot}\right)_{2.0} = \frac{124{,}61+114{,}68}{2} \Rightarrow \left(\mathbf{M_{d,tot}}\right)_{2.0} = \mathbf{119{,}84\,kN.m}$$

- **2ª. Iteração:**

$$\left(\mathbf{M_{d,tot}}\right)_{\mathbf{2.0}} = \mathbf{119{,}84\,kN.m} \Leftrightarrow \left(\kappa/\nu\right)_1 = 32\left(1+5\frac{119{,}84}{0{,}26\cdot 1{,}4\cdot 930}\right) \therefore \left(\kappa/\nu\right)_2 = \mathbf{88{,}64}$$

$$\left(M_{d,tot}\right)_{2.1} = \frac{1{,}0\cdot 29{,}69}{1-\dfrac{90^2}{120\cdot 88{,}64}} = 124{,}48\,\text{kN.m}$$

$$\left(M_{d,tot}\right)_{3.0} = \frac{119{,}84+124{,}48}{2} \Rightarrow \left(\mathbf{M_{d,tot}}\right)_{\mathbf{3.0}} = \mathbf{122{,}16\,kN.m}$$

- **3ª. Iteração:**

$$\left(\mathbf{M_{d,tot}}\right)_{\mathbf{3.0}} = \mathbf{122{,}16\,kN.m} \Leftrightarrow \left(\kappa/\nu\right)_1 = 32\left(1+5\frac{122{,}16}{0{,}26\cdot 1{,}4\cdot 930}\right) \therefore \left(\kappa/\nu\right)_3 = \mathbf{89{,}74}$$

$$\left(M_{d,tot}\right)_{3.1} = \frac{1{,}0\cdot 29{,}69}{1-\dfrac{90^2}{120\cdot 89{,}74}} = 119{,}81\,\text{kN.m}$$

$$\left(M_{d,tot}\right)_{4.0} = \frac{119{,}81+122{,}16}{2} \Rightarrow \left(\mathbf{M_{d,tot}}\right)_{\mathbf{4.0}} = \mathbf{121{,}0\,kN.m}$$

Novamente, utilizando-se o processo direto para comparação, substituindo o processo iterativo proposto pela Norma pela eq. (46), tem-se:

$$k_1 = 1-\frac{\lambda^2}{3840} = 1-\frac{90^2}{3840} \Rightarrow \mathbf{k_1 = -1{,}11}$$

$$k_2 = k_1\cdot h\cdot N_d = -1{,}11\cdot 0{,}26\cdot 1{,}4\cdot 930 \Rightarrow \mathbf{k_2 = -375{,}55}$$

$$M_1 = \alpha_b\cdot M_{1d,A} = 1{,}0\cdot 29{,}69 \Rightarrow \mathbf{M_1 = 29{,}69\ \ kN.m}$$

$$M_{d,tot} = \frac{5\cdot M_1 - k_2 + \sqrt{k_2^2 + 10\cdot M_1\cdot\left(2\cdot h\cdot N_d - k_2\right) + 25\cdot M_1^2}}{10} \Rightarrow \mathbf{M_{d,tot} = 121{,}36\,kN.m}$$

A pequena diferença ocorre porque o resultado do processo direto corresponde ao valor final obtido pelo processo iterativo, ou seja, após um número ***n*** de iterações tal que não ocorram mais mudanças no valor do momento, conforme pode ser observado na Figura 44.

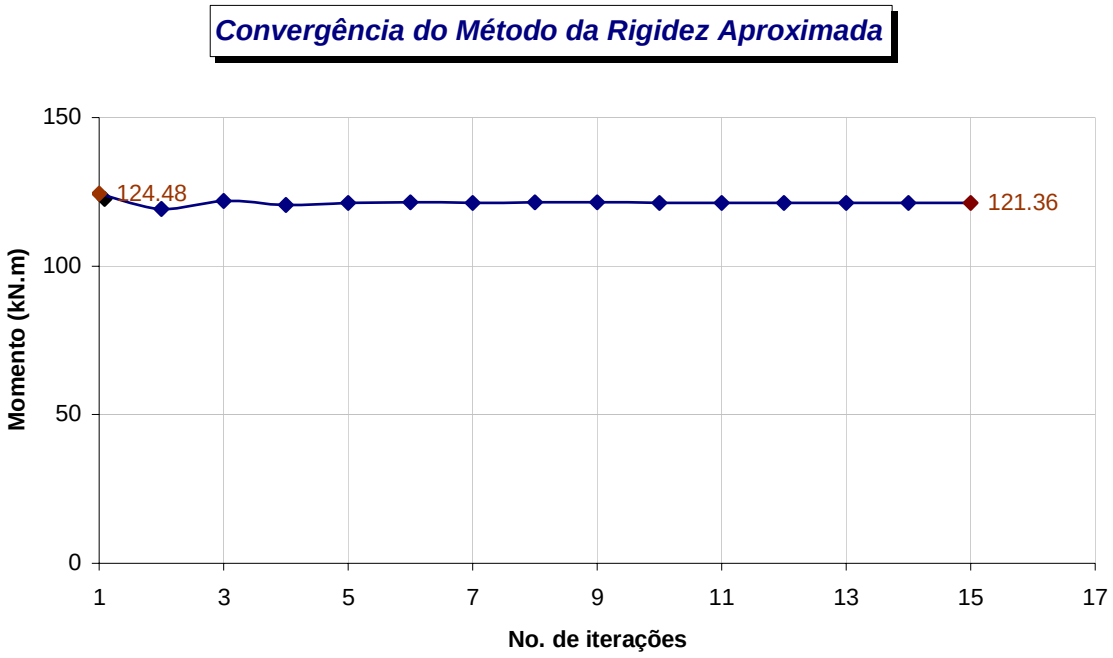

Figura 44. Convergência do Método da Rigidez Aproximada

Em relação à convergência, pode-se perceber que, para este exemplo (Figura 44), o processo iterativo convergiu mais rápido (três iterações) do que no exemplo anterior, em que foram necessárias seis iterações para se obter um valor adequado. Essa diferença deve-se principalmente ao valor adotado para 1ª aproximação do momento total, ou seja, quanto mais próximo este valor estiver da solução algébrica, menos iterações serão necessárias. Para exemplificar, serão apresentados dois casos de convergência do processo iterativo. Na Figura 45, o valor inicial adotado foi $M_{d,tot} = 1000\,kN.m$, bem acima do valor esperado e, na Figura 46, $M_{d,tot} = 60\,kN.m$, bem abaixo.

Analisando-se inicialmente a Figura 45, pode-se perceber que, no emprego de um valor inicial muito alto, a 1ª iteração resulta em um valor muito pequeno, no entanto o problema converge pois o resultado final está contido no intervalo. Na Figura 46, partindo-se de um valor baixo para o momento inicial, a 1ª iteração resulta em um valor alto, e a convergência também ocorre, pois o resultado final está contido no intervalo. Portanto, para que ocorra convergência, é necessário que a solução algébrica do problema, ou seja, o momento final, esteja contido no intervalo de pesquisa definido pela 1ª aproximação do momento total e o valor obtido na 1ª iteração.

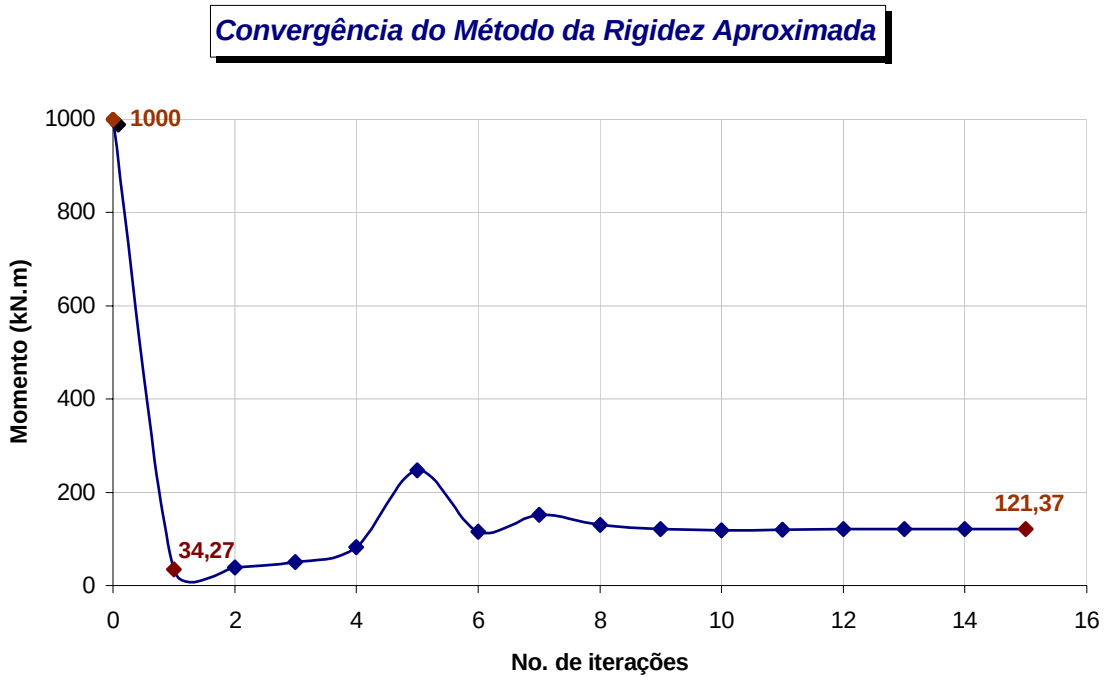

Figura 45. Convergência do Método da rigidez aproximada para momento inicial $M_{d,tot}$ = 1000 kN.m

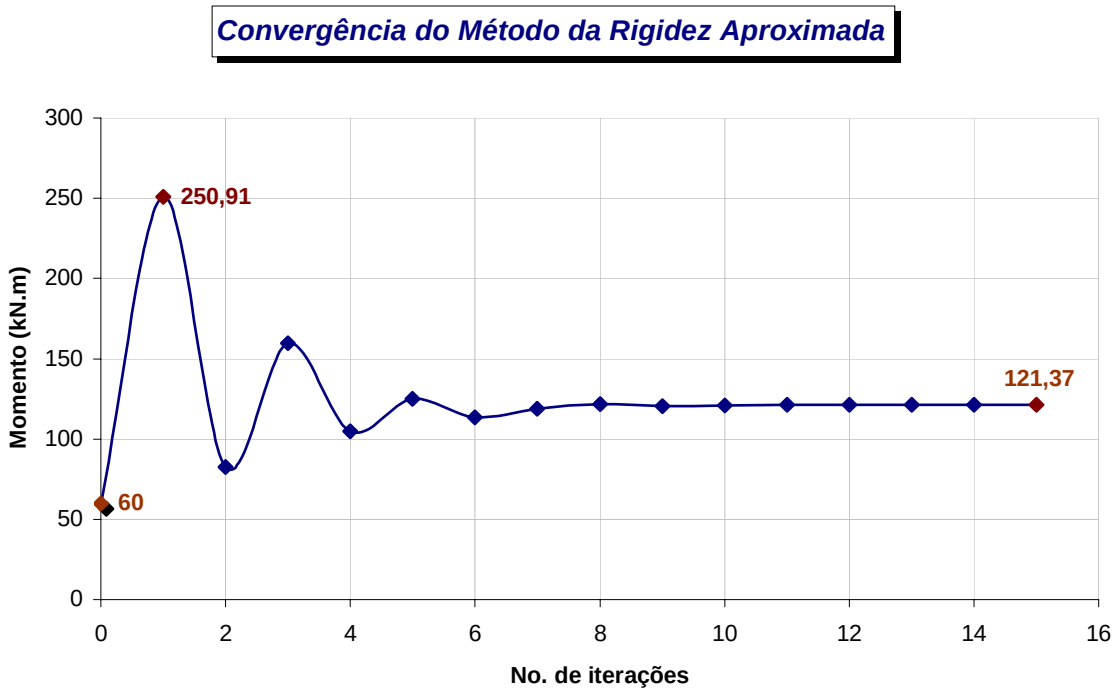

Figura 46. Convergência do Método da rigidez aproximada para momento inicial $M_{d,tot}$ = 60 kN.m

Dando continuidade ao dimensionamento, tem-se:

$$e_{tot} = \frac{M_{d,tot}}{N_d} = \frac{121{,}0}{1{,}4 \cdot 930} \therefore \mathbf{e_{tot}\, 0{,}0929\ m = 9{,}29\ cm}$$

$$\mu = \frac{\nu \cdot e_{tot}}{h} = \frac{0{,}7 \cdot 9{,}29}{26} \therefore \boldsymbol{\mu = 0{,}25}$$

A partir do valor de μ, e utilizando o ábaco A-3 de VENTURINI et al. (1987), obtém-se o valor de ω:

$$\omega = 0{,}65 \Rightarrow A_s = \frac{A_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}} \cdot \omega = \frac{26 \cdot 40 \cdot \frac{2{,}5}{1{,}4}}{\frac{50}{1{,}15}} = 42{,}71 \cdot \omega = 42{,}71 \cdot 0{,}65 \therefore \mathbf{A_s = 27{,}76\,cm^2}$$

Taxa de Armadura: $\boldsymbol{\rho = \frac{27{,}76}{26 \times 40} = 2{,}67\%}$

Armadura adotada: **- 14 ϕ 16 mm (28 cm²)** (Figura 48)

- 10 ϕ20 mm (31,5 cm²)

7.2.3. Método do Pilar-padrão acoplado a diagramas M-N-1/r

$$e_2 = \frac{\ell_e^2}{10} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)_{base}$$

$$\mu_2 = \frac{\nu \cdot e_2}{h} = \frac{\nu}{h \cdot d} \cdot \frac{\ell_e^2}{10^4} \cdot \left(\frac{10^3 \cdot d}{r}\right) \Rightarrow \mu_2 = 0{,}05576 \cdot \left(10^3 \cdot \frac{d}{r}\right)$$

$$\mu_1 = \frac{\nu \cdot e_1}{h} = \frac{\nu}{h} \cdot (0{,}015 + 0{,}03 \cdot h) \Rightarrow \mu_1 = 0{,}0614$$

Como para este caso $\alpha_b = 1$, a excentricidade de 1ª ordem e_1, multiplicada por este valor, não se altera. Adotando, em seguida, uma aproximação inicial para a utilização do diagrama *μ, η, 10³d/r*, tem-se: $10^3.d/r = 5$

$$\left.\begin{array}{l} \mu_2 = 0{,}05576 \cdot 5 = 0{,}2788 \\ \mu_1 = 0{,}0614 \end{array}\right\} \boldsymbol{\mu_1 + \mu_2 = 0{,}3402}$$

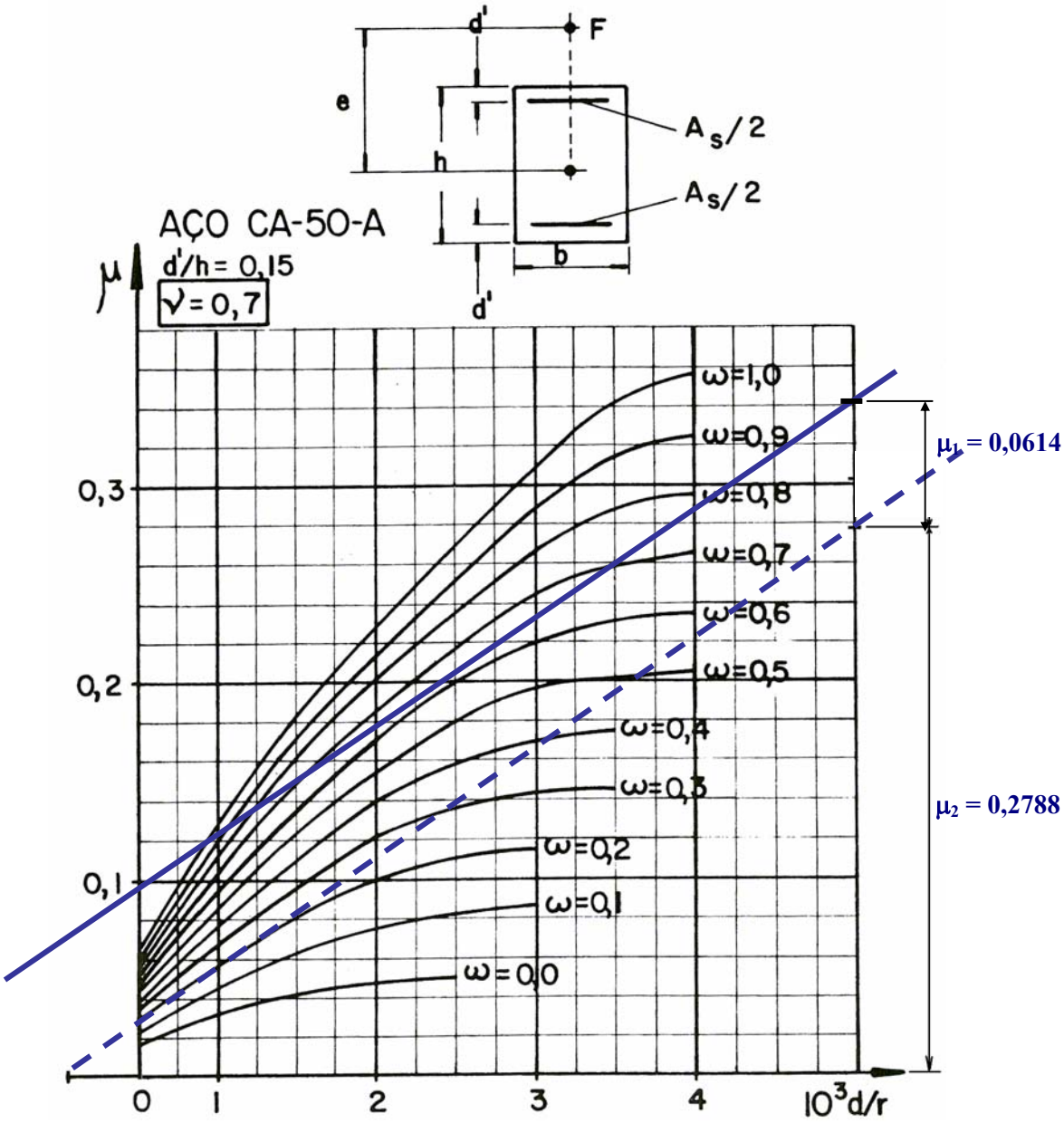

Figura 47. Diagrama μ, ν, 10^3 d/r (Extraído de FUSCO, 1981)

Na Figura 47, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d'}{h} = 0{,}15 \\ \nu = 0{,}7 \end{array}\right\} \text{Diagrama } \mu,\ \eta,\ 10^3 d/r\text{: } \boldsymbol{\omega = 0{,}61 \Rightarrow A_s = 42{,}71 \cdot \omega = 26{,}05\ cm^2}$$

Armadura adotada: **- 14 ϕ 16 mm (28 cm²)** (Figura 48)

- 8 ϕ 20 mm (25,20 cm²)

As seis barras centrais precisam de estribo suplementar. São adotados os estribos múltiplos, indicados na Figura 48.

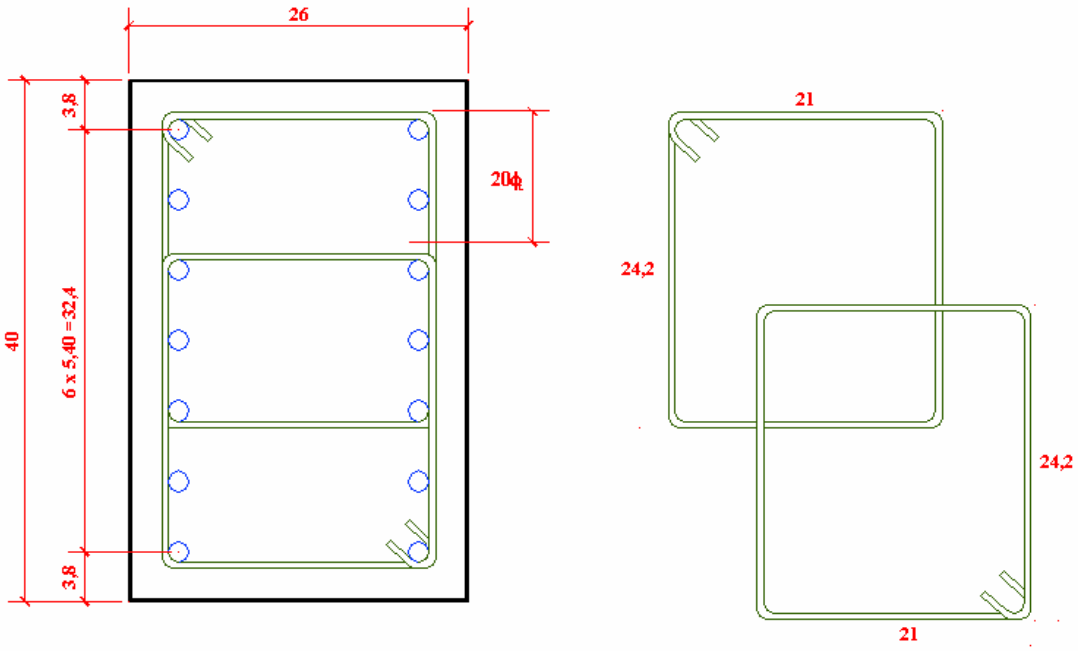

Figura 48. Detalhe da seção: 14 ϕ16 (28,0 cm²), estribos ϕ5 c/ 19

Os resultados obtidos no exemplo 1 (λ = 90), respectivamente para α_b=1 e α_b=0,4, estão indicados na Tabela 6 e na Figura 49.

Tabela 6. Valores obtidos no Exemplo 1

Exemplo: λ= 90	Diagramas M-N-1/r $A_{s,cal}$ (cm²)	Rigidez Ap. $A_{s,cal}$ (cm²)	Diferença (%)	Curvatura Ap. $A_{s,cal}$ (cm²)	Diferença (%)
α_b = 1,0	26,05	27,76	6,6	29,04	11,5
α_b = 0,4	17,94	20,93	16,7	23,92	33,3
Diferença (%)	45,2	32,6	-	21,40	-

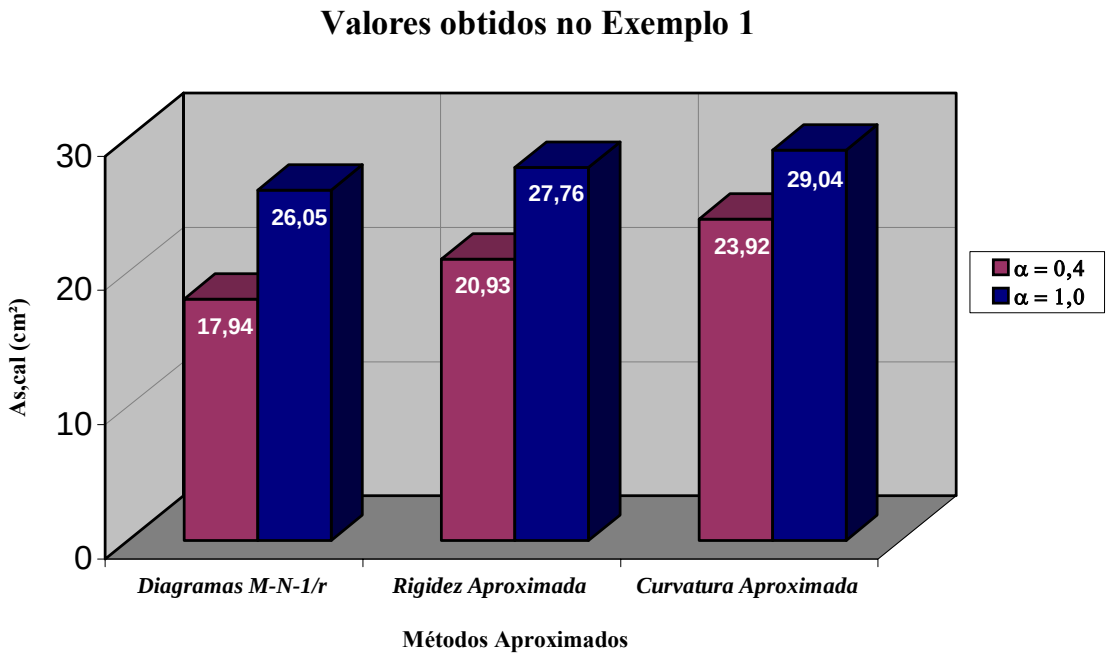

Figura 49. Comparação entre os métodos

7.3. EXEMPLO 1 PARA $\lambda = 50$

O exemplo 1, para λ = 90, cujos resultados estão expressos na Tabela 6, apresentou diferenças aceitáveis, na comparação entre o método acoplado a diagramas M-N-1/r, mais preciso, e os demais, com resultados menos confiáveis. Além dos erros referentes às aproximações dos métodos e de leitura dos ábacos, pode-se creditar uma parcela dessa diferença à utilização dos métodos da curvatura aproximada e da rigidez aproximada no limite de aplicação, ou seja, λ = 90. Assim, estima-se que para valores de λ menores, essa diferença tenda a diminuir.

Portanto, torna-se interessante, para efeito de comparação entre os métodos, um exemplo com λ menor, para verificar se essa diferença alta se mantém. Foi adotado λ=50. Assim, aplicando as alterações necessárias, tem-se:

- Concreto C25, aço CA 50;
- Cobrimento nominal C_{nom} = 2,5 cm e d'=4,0 cm;
- N_k = 1.330 kN;
- Comprimento do pilar: 375 cm;
- Seção transversal: 26 cm x 40 cm;

$$\nu = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{1{,}4 \cdot 1330}{26 \cdot 40 \cdot \frac{2{,}5}{1{,}4}} \therefore \boldsymbol{\nu = 1{,}0}$$

$$i = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{26}{\sqrt{12}} \therefore \mathbf{i = 7{,}506}$$

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i} = \frac{375}{7{,}506} \therefore \boldsymbol{\lambda = 50}$$

Como para este exemplo a força normal reduzida (ν) é maior que 0,7, será calculada também a armadura pelo cálculo simplificado (item 5.4.1). Para isto, adotando-se a armadura distribuída no lado maior do pilar (Figura 50), tem-se:

- n_v = nº de barras;
- $n_h = 2$

Assim, considerando-se um número de barras igual a sete em cada face, tem-se:

$$\alpha_S = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = \frac{2-1}{7-1} = \frac{1}{6}$$

sendo o valor de α dado por:

$\alpha = -1/\alpha_S$, se $\alpha_S < 1$ em seções retangulares;

$\alpha = \alpha_S$, se $\alpha_S \geq 1$ em seções retangulares;

$\alpha = 6$, se $\alpha_S > 6$ em seções retangulares;

$\alpha = -4$, em seções circulares.

Portanto:

$$\alpha = \frac{-1}{\alpha_s} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = -6},$$

$$M_{1d,min} = N_d(0{,}015 + 0{,}03h) = 1{,}4 \cdot 1330 \cdot (0{,}015 + 0{,}03 \cdot 0{,}26) \Rightarrow \mathbf{M_{1d,min} = 42{,}45\ kN.m}$$

$$\frac{e}{h} = \frac{M_{Sd}}{N_{Sd}h} = \frac{42{,}45}{1{,}4 \cdot 1330 \cdot 0{,}26} \Rightarrow \mathbf{\frac{e}{h} = 0{,}088}$$

$$\beta = \frac{1}{(0{,}39 + 0{,}01\alpha) - 0{,}8\frac{d'}{h}} = \frac{1}{(0{,}39 + 0{,}01 \cdot (-6)) - 0{,}8 \cdot \frac{4}{26}} \Rightarrow \boldsymbol{\beta = 4{,}833}$$

$$N_{Sd,eq} = N_{Sd} \cdot \left(1 + \beta \frac{e}{h}\right) = 1{,}4 \cdot 1330 \cdot (1 + 4{,}833 \cdot 0{,}088) \Rightarrow \mathbf{N_{Sd,eq} = 2651{,}1\ kN.m}$$

$$M_{Sd,eq} = 0$$

$$\sigma_{Sd} = \frac{N_{Sd,eq}}{A_c} = \frac{2651{,}1}{26 \cdot 40} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma_{Sd} = 2{,}55\ kN/cm^2 = 25{,}5\ MPa}$$

$$\rho = \frac{\sigma_{Sd} - 0{,}85 \cdot f_{cd}}{f_{yd} - 0{,}85 \cdot f_{cd}} = \frac{25{,}5 - 0{,}85 \cdot \frac{25}{1{,}4}}{\frac{500}{1{,}15} - 0{,}85 \cdot \frac{25}{1{,}4}} \Rightarrow \boldsymbol{\rho = 0{,}0246}$$

$$A_s = \rho \cdot A_c = 0{,}0246 \cdot 26 \cdot 40 \Rightarrow \mathbf{A_s = 25{,}48\ cm^2}$$

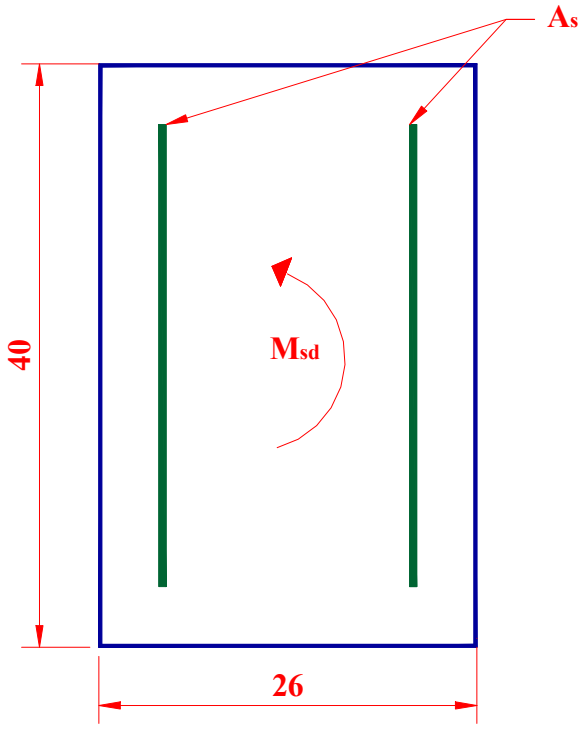

Figura 50. Disposição da armadura e do momento

Como a metodologia de resolução dos métodos aproximados será a mesma utilizada no exemplo anterior, não serão mostrados todos os cálculos, mas apenas os resultados obtidos, considerando apenas o coeficiente $\boldsymbol{\alpha_b}$**=1,0**. Assim, tem-se os resultados expressos na Tabela 7.

Tabela 7. Valores obtidos para λ=50

Exemplo λ= 50	Diagramas M-N-1/r $A_{s,cal}$ (cm²)	Rigidez Aproximada $A_{s,cal}$ (cm²)	Dif. (%)	Cálculo Simplificado $A_{s,cal}$ (cm²)	Dif. (%)	Curvatura Aproximada $A_{s,cal}$ (cm²)	Dif. (%)
α_b = 1,0	23,92	24,77	3,4	25,48	6,5	26,48	10,7

Visando atender à configuração e número de barras definidos para a aplicação do cálculo simplificado, deve-se adotar a configuração descrita na Figura 48.

7.4. EXEMPLO 1 PARA λ = 140

Para este exemplo, teoricamente apenas o *Método Geral* e o *Método do Pilar-Padrão Acoplado a Diagramas M-N-1/r* poderiam ser utilizados, já que λ = 140. Entretanto, serão utilizados os *Métodos da Rigidez Aproximada* e *Curvatura Aproximada* para efeito de comparação com o *Método do Pilar-Padrão Acoplado a Diagramas M-N-1/r* e verificação dos resultados obtidos por estes métodos fora do seu limite de aplicação, que é λ ≤ 90.

Assim, aplicando as alterações necessárias, tem-se:

- Concreto C25, aço CA 50;
- Cobrimento nominal C_{nom} = 2,5 cm e d'=4,0 cm;
- N_k = 400 kN;
- Comprimento do pilar: 1050 cm;
- Seção transversal: 26 cm x 40 cm;

$$\nu = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{1{,}4 \cdot 400}{26 \cdot 40 \cdot \frac{2{,}5}{1{,}4}} \therefore \boldsymbol{\nu = 0{,}30}$$

$$i = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{26}{\sqrt{12}} \therefore \mathbf{i = 7{,}506}$$

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i} = \frac{1050}{7{,}506} \therefore \boldsymbol{\lambda = 140}$$

Assim, o primeiro passo é calcular a excentricidade adicional de 1ª ordem relativa ao efeito da fluência, obrigatória sempre que λ > 90.

7.4.1. Cálculo da Fluência

$$e_{cc} = \left(\frac{M_{Sg}}{N_{Sg}} + \theta_1 \cdot \frac{\ell_e}{2} \right) \cdot \left(2{,}718^{\frac{\phi \cdot N_{Sg}}{N_e - N_{Sg}}} - 1 \right)$$

$$\begin{cases} N_k = 400 \text{ kN} \\ N_{gk} = 0{,}85 \text{ x } N_k = 340 \text{ kN} \\ N_{qk} = 0{,}15 \text{ x } N_k = 60 \text{ kN} \\ N_{Sg} = N_{qk} + \psi_3 \text{ x } N_{qk} = 340 + 0{,}3 \text{ x } 60 \therefore \mathbf{N_{Sg} = 358 \text{ kN}} \\ M_{Sg} = N_{Sg}(0{,}015 + 0{,}03h) = 358 \cdot (0{,}015 + 0{,}03 \cdot 0{,}26) \Rightarrow \mathbf{M_{1d,min} = 8{,}16 \text{ kN.m}} \end{cases}$$

$$E_c = 0{,}85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0{,}85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{25} \therefore \mathbf{E_c = 23800 \text{ MPa} = 2380 \text{ kN/cm}^2}$$

$$I_c = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{40 \cdot 26^3}{12} \therefore \mathbf{I_c = 58587 \text{ cm}^4}$$

$$N_e = \frac{10 \cdot E_c \cdot I_c}{\ell_e^2} = \frac{10 \cdot 2380 \cdot 58587}{1050^2} \therefore \mathbf{N_e = 1264{,}7 \text{ kN}}$$

$\phi = 2$ (coeficiente de fluência)

Desaprumo (θ_1):

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{1}{100\sqrt{\ell}} = \dfrac{1}{100\sqrt{10{,}5}} \rightarrow \theta_1 = 3{,}09\text{x}10^{-3} \\ \theta_{1,min} = \dfrac{1}{300} = 3{,}33\text{x}10^{-3} \therefore \theta_1 = 3{,}33\text{x}10^{-3} \end{cases}$$

Substituindo os valores, tem-se:

$$e_{cc} = \left(2{,}28 + 3{,}33\text{x}10^{-3} \cdot \frac{1050}{2} \right) \cdot \left(2{,}718^{\frac{2 \cdot 358}{1264{,}7 - 358}} - 1 \right) \therefore \mathbf{e_{cc} = 4{,}84 \text{ cm}}$$

A excentricidade adicional e_{cc} devido ao efeito da fluência deve ser somada às excentricidades de 1ª e 2ª ordem obtidas pelo Método Geral ou pelos Métodos Aproximados.

7.4.2. Método do pilar-padrão com curvatura aproximada

Utilizando a mesma metodologia aplicada aos exemplos anteriores, tem-se:

$$\mathbf{M_{d,tot} = 131{,}3\ kN.m}$$

Entretanto, deve-se considerar a excentricidade adicional e_{cc}, somada à excentricidade total obtida pelo método:

$$e_{tot} = (e_1 + e_2) + e_{cc} = \frac{M_{d,tot}}{N_d} + e_{cc} = \frac{131{,}3}{1{,}4 \cdot 400} + 0{,}0484 \therefore \mathbf{e_{tot}\ 0{,}2829\ m = 28{,}29\ cm}$$

$$\mu = \frac{\nu \cdot e_{tot}}{h} = \frac{0{,}3 \cdot 28{,}29}{26} \therefore \mathbf{\mu = 0{,}326}$$

A partir do valor de μ, e utilizando o ábaco A-3 de VENTURINI et al. (1987), obtém-se o valor de ω:

$$\omega = 0{,}66 \Rightarrow A_s = \frac{A_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}}\omega = \frac{26 \cdot 40 \cdot \frac{2{,}5}{1{,}4}}{\frac{50}{1{,}15}}\omega = 42{,}71 \cdot \omega = 42{,}71 \cdot 0{,}66 \therefore \mathbf{A_s = 28{,}19\ cm^2}$$

7.4.3. Método do pilar-padrão com rigidez aproximada

Para este método, tem-se:

$$\mathbf{M_{d,tot} = 135{,}03\ kN.m}$$

A excentricidade total é dada por:

$$e_{tot} = (e_1 + e_2) + e_{cc} = \frac{M_{d,tot}}{N_d} + e_{cc} = \frac{135{,}03}{1{,}4 \cdot 400} + 0{,}0484 \therefore \mathbf{e_{tot}\ 0{,}2895\ m = 28{,}95\ cm}$$

$$\mu = \frac{\nu \cdot e_{tot}}{h} = \frac{0{,}3 \cdot 28{,}95}{26} \therefore \ \boldsymbol{\mu = 0{,}334}$$

A partir do valor de μ, e utilizando o ábaco A-3 de VENTURINI et al. (1987), obtém-se o valor de ω:

$$\omega = 0{,}68 \Rightarrow A_s = \frac{A_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}}\omega = \frac{26 \cdot 40 \cdot \frac{2{,}5}{1{,}4}}{\frac{50}{1{,}15}}\omega = 42{,}71 \cdot \omega = 42{,}71 \cdot 0{,}68 \therefore \ \mathbf{A_s = 29{,}04\ cm^2}$$

7.4.4. Método do pilar-padrão acoplado a diagramas M-N-1/r

$$e_2 = \frac{\ell_e^2}{10} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)_{base}$$

$$\mu_2 = \frac{\nu \cdot e_2}{h} = \frac{\nu}{h \cdot d} \cdot \frac{\ell_e^2}{10^4} \cdot \left(\frac{10^3 \cdot d}{r}\right) \Rightarrow \mu_2 = 0{,}0578 \cdot \left(10^3 \cdot \frac{d}{r}\right)$$

$$\mathbf{e_{cc} = 4{,}84\ cm}$$

$$\mu_1 = \frac{\nu \cdot (e_1 + e_{cc})}{h} = \frac{\nu}{h} \cdot (0{,}015 + 0{,}03 \cdot h + e_{cc}) \Rightarrow \mu_1 = 0{,}0821$$

Aproximação inicial: $10^3.d/r = 6$

$$\left.\begin{array}{l} \mu_2 = 0{,}0578 \cdot 6 = 0{,}3468 \\ \mu_1 = 0{,}0821 \end{array}\right\} \ \boldsymbol{\mu_1 + \mu_2 = 0{,}4289}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d'}{h} = 0{,}15 \\ \nu = 0{,}3 \end{array}\right\} \ \text{Diagrama } \mu,\ \eta,\ 10^3 d/r\text{: } \boldsymbol{\omega = 0{,}78 \Rightarrow A_s = 42{,}71 \cdot \omega = 33{,}31\ cm^2}$$

7.4.5. Resultados Obtidos

Tabela 8. Valores obtidos para λ=140

Exemplo λ= 140	Diagramas M-N-1/r $A_{s,cal}$ (cm²)	Rigidez Aproximada $A_{s,cal}$ (cm²)	Dif. (%)	Curvatura Aproximada $A_{s,cal}$ (cm²)	Dif. (%)
α_b = 1,0	33,31	29,04	12,8	28,19	15,4

8. EXEMPLO 2

Capítulo 8

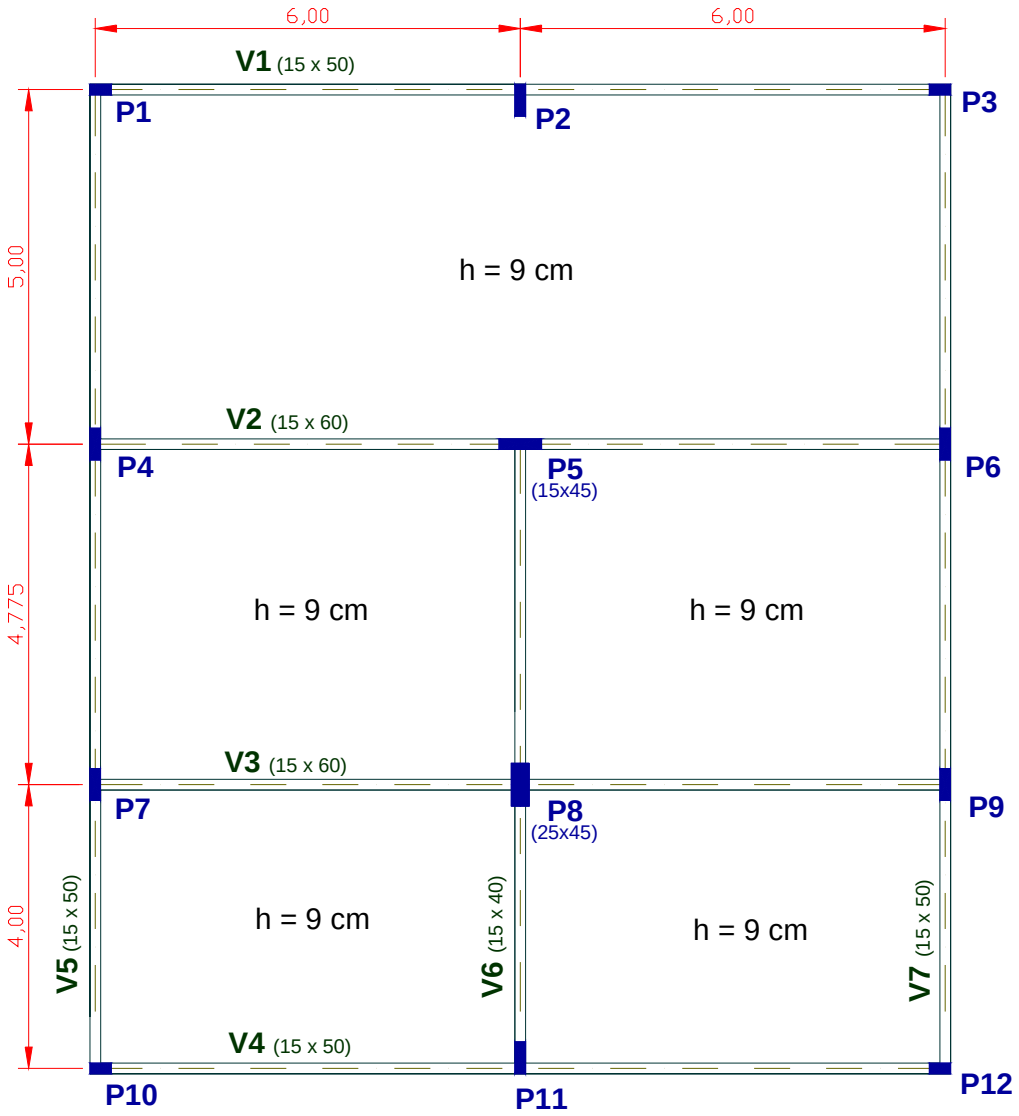

Figura 51. Planta de forma do edifício

Para ilustrar o cálculo segundo a NBR 6118:2003, será feito o dimensionamento do pilar P5, utilizando-se o Método da Curvatura Aproximada. (Figura 51, Figura 52 e Figura 53) e o Método da Rigidez κ Aproximada. Dados:

- Concreto C25 - Aço CA 50;
- Cobrimento nominal C_{nom} = 2,5 cm e d'=4,0 cm;
- N_k = 650 kN;
- Comprimento do pilar: 290 cm;
- Seção transversal: (15 x 45) cm²;
- $p_{k,\ VIGA}$ = 24 kN/m.

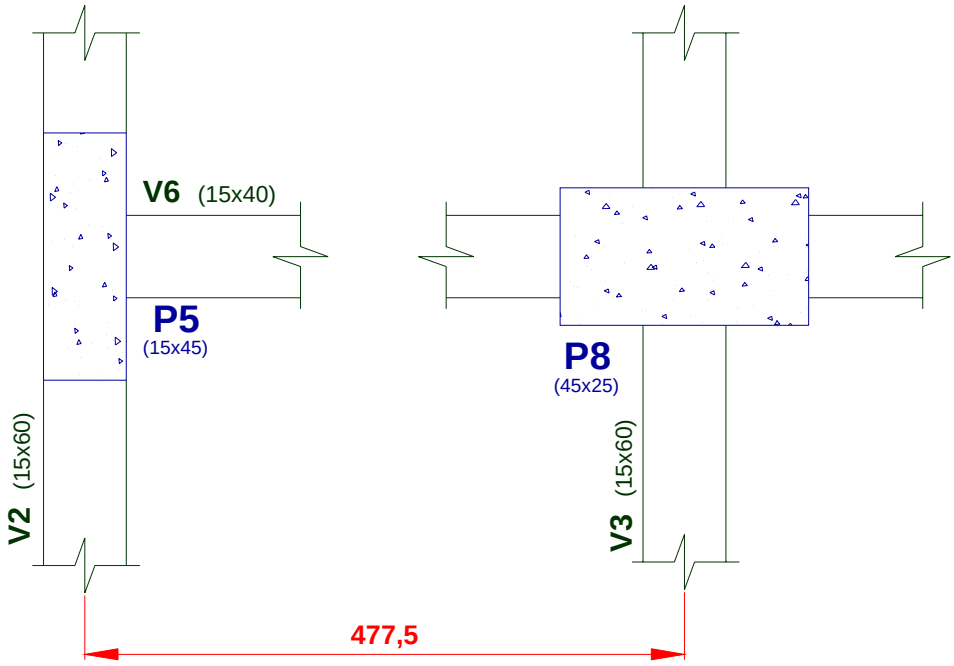

Figura 52. Detalhe em planta

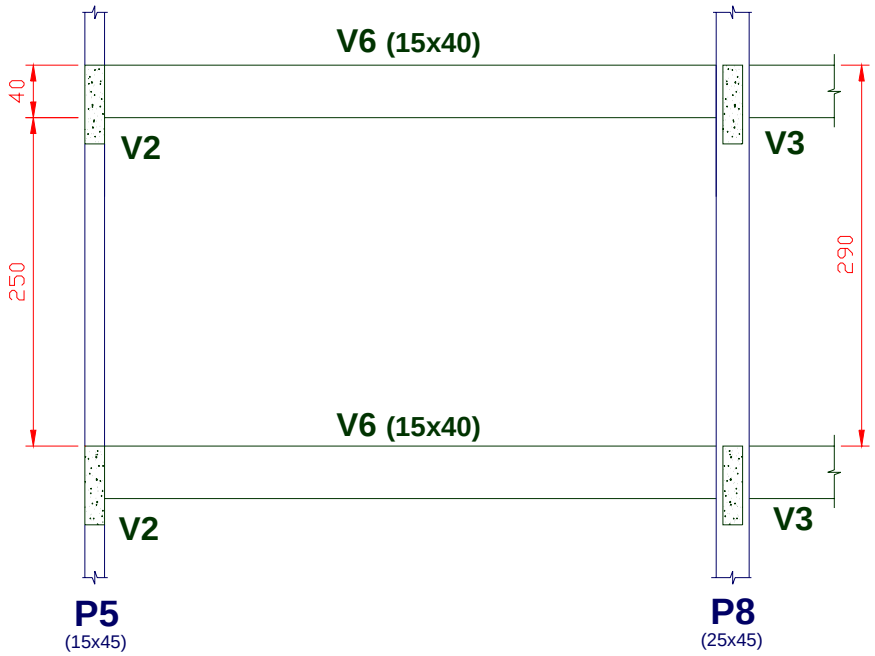

Figura 53. Detalhe em corte

Como a menor dimensão do pilar é inferior a 19 cm, no dimensionamento deve-se multiplicar as ações por um coeficiente adicional γ_n, indicado na Tabela 1, onde b é a menor dimensão da seção transversal do pilar. Dessa forma, tem-se:

$$\gamma_n = 1{,}20\,(b = 15\text{cm}) \Rightarrow N_d = \gamma_f \cdot \gamma_n \cdot N_k = 1{,}4 \cdot 1{,}2 \cdot 650 \Rightarrow \mathbf{N_d = 1092\ kN}$$

$$\nu = \frac{N_d}{b \cdot d \cdot f_{cd}} = \frac{1{,}4 \cdot 780}{15 \cdot 45 \cdot \frac{2{,}5}{1{,}4}} \therefore \boldsymbol{\nu = 0{,}9}$$

8.1. COMPRIMENTO EQUIVALENTE, RAIO DE GIRAÇÃO E ÍNDICE DE ESBELTEZ

O comprimento equivalente ℓ_e do pilar deve ser o menor dos seguintes valores:

$$\ell_e \le \begin{cases} \ell_0 + h \\ \ell \end{cases} \Rightarrow \ell_e \le \begin{cases} 250 + 15 = 265\text{ cm} \\ 290\text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \ell_e = \mathbf{265\ cm}$$

Calculando-se o raio de giração e o índice de esbeltez, temos:

$$i = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{15}{\sqrt{12}} \therefore \mathbf{i = 4{,}33}$$

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i} = \frac{265}{4{,}33} \therefore \boldsymbol{\lambda = 61{,}2}$$

8.2. EXCENTRICIDADE INICIAL

Para o cálculo da excentricidade inicial, temos que definir algumas grandezas.

8.2.1. Vão efetivo da viga

O vão efetivo da viga V6 é calculado conforme a Figura 54.

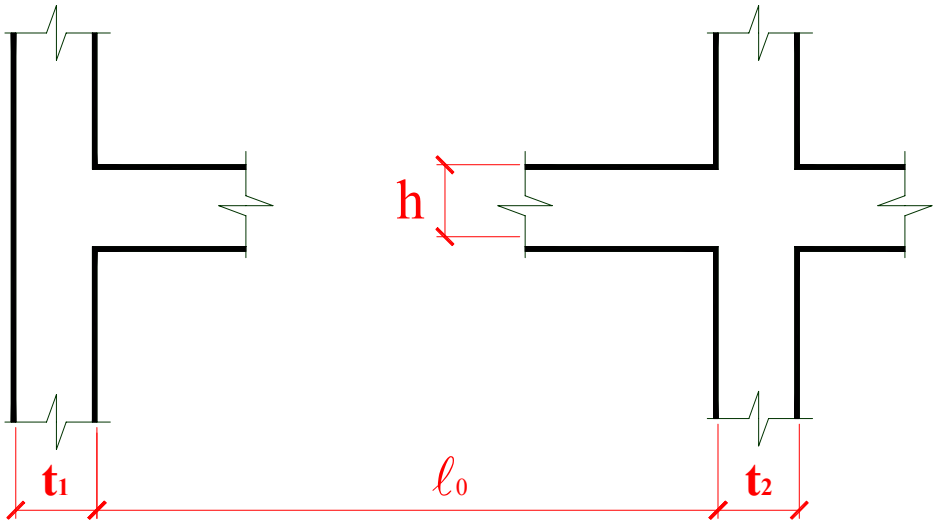

Figura 54. Vão efetivo da viga

$$\ell_{ef} = \ell_0 + a_1 + a_2$$

$$a_1 \le \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t_1 = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ cm} \\ \frac{1}{2} \cdot h = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{a_1 = 7{,}5\ cm}$$

$$a_2 \le \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t_2 = \frac{45}{2} = 22{,}5 \text{ cm} \\ \frac{1}{2} \cdot h = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{a_2 = 20\ cm}$$

$$\ell_{ef} = \ell_0 + a_1 + a_2 = 462{,}5 + 7{,}5 + 20 \Rightarrow \ell_{ef} \mathbf{= 490\ cm}$$

8.2.2. Momentos na ligação viga-pilar

Para o cálculo dos momentos na ligação viga-pilar, deve ser considerado o esquema apresentado na Figura 55.

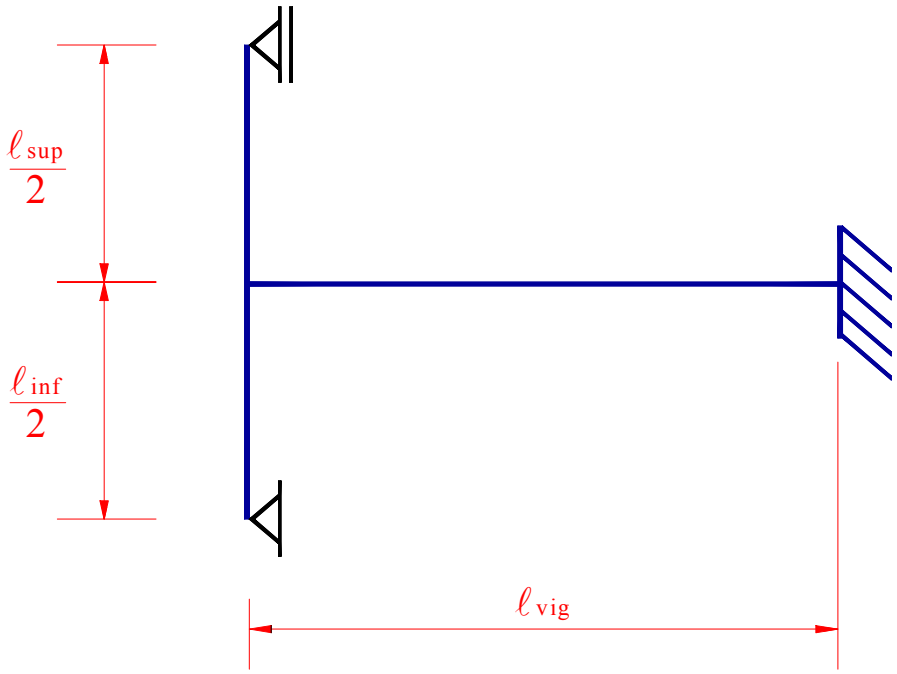

Figura 55. Esquema estático para cálculo do momento de ligação viga-pilar

Portanto, para o caso em estudo, tem-se (Figura 56):

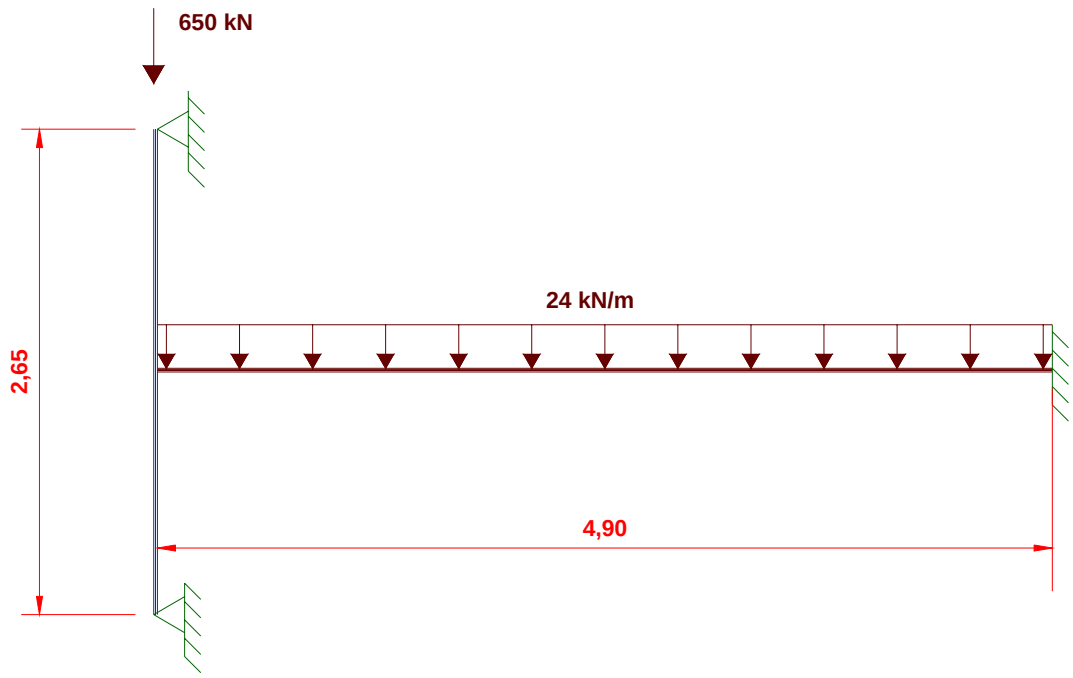

Figura 56. Esquema estático para o pilar em estudo

$$r_{sup} = r_{inf} = \frac{I}{\ell_e} = \frac{\frac{45 \cdot 15^3}{12}}{\frac{265}{2}} \frac{12656,25}{132,5} \Rightarrow \mathbf{r_{sup} = r_{inf} = 95,5\ cm^3}$$

$$r_{vig} = \frac{I_{vig}}{l_{ef}} = \frac{\frac{15 \cdot 40^3}{12}}{490} = \frac{80000}{490} \Rightarrow \mathbf{r_{vig} = 163,3}$$

$$M_{eng} = \frac{q \cdot \ell^2}{12} = \frac{24 \cdot 490^2}{12} \Rightarrow \mathbf{M_{eng} = 4802\ kN \cdot m}$$

$$M_{sup} = M_{eng} \cdot \frac{3 \cdot r_{sup}}{3 \cdot r_{sup} + 4 \cdot r_{vig} + 3 \cdot r_{inf}} = 4802 \cdot \frac{3 \cdot 95,5}{3 \cdot 95,5 + 4 \cdot 163,3 + 3 \cdot 95,5} \Rightarrow \mathbf{M_{sup} = 1122\ kN \cdot cm}$$

$$M_{inf} = M_{eng} \cdot \frac{3 \cdot r_{inf}}{3 \cdot r_{inf} + 4 \cdot r_{vig} + 3 \cdot r_{sup}} = 4802 \cdot \frac{3 \cdot 95,5}{3 \cdot 95,5 + 4 \cdot 163,3 + 3 \cdot 95,5} \Rightarrow \mathbf{M_{inf} = 1122\ kN \cdot cm}$$

Na Figura 57, pode ser visualizado o diagrama de momento fletor traçado pelo programa Ftool, desenvolvido por MARTHA (2001), que apresentou o mesmo resultado obtido pelo cálculo manual.

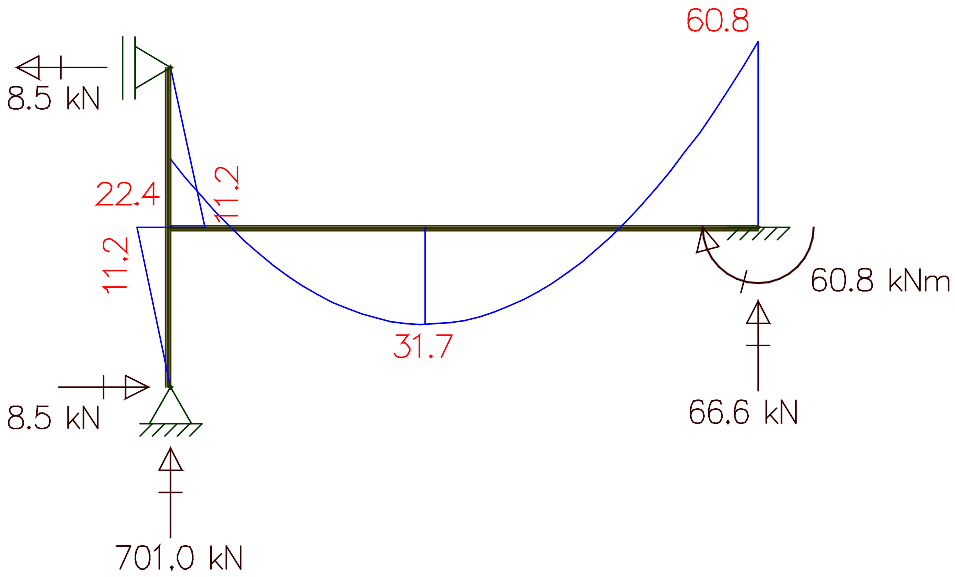

Figura 57. Resultados obtidos pelo programa Ftool (kN.m)

Dessa forma, para obtenção do momento total no topo e base do pilar em estudo, tem-se:

$$M_{d,\,topo} = -M_{d,\,base} = 1{,}4 \cdot 1{,}2 \cdot 1122 \Rightarrow \mathbf{M_{d,\,topo} = -M_{d,\,base} = 1885\,kN \cdot cm}$$

8.2.3. Excentricidade inicial no topo e na base

$$e_i = \frac{M_{d,\,topo}}{N_d} = \frac{1885}{1092} \Rightarrow \mathbf{e_i = 1{,}73\,cm}$$

8.3. CÁLCULO DO MOMENTO MÍNIMO

$$M_{1d,min} = N_d\left(0{,}015 + 0{,}03h\right) = 1{,}4 \cdot 1{,}2 \cdot 650 \cdot \left(0{,}015 + 0{,}03 \cdot 0{,}15\right) \Rightarrow \mathbf{M_{1d,min} = 21{,}29\,kN.m}$$

8.4. VERIFICAÇÃO DA DISPENSA DOS EFEITOS DE 2ª ORDEM

Para pilares biapoiados sem forças transversais, e sendo os momentos de 1ª. ordem nos extremos do pilar $M_A = -M_B = 1885\ kN.cm < M_{1d,\,min} = 2129\ kN.cm$, tem-se, segundo o item 15.8.2.d da NBR 6118:2003:

$$\boldsymbol{\alpha_b = 1{,}0}$$

Considerando-se $e_1 = 0$, que está a favor da segurança e provoca uma alteração muito pequena , conforme pode ser verificado no exemplo anterior, resulta:

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12{,}5 \cdot e_1/h}{\alpha_b} = \frac{25}{1{,}0} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = 25}$$

$$35 \le \lambda_1 \le 90 \Rightarrow 35 \le \lambda_1 \le 90 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = 35}$$

Como $\lambda = 61{,}2 > \lambda_1 = 35 \Rightarrow$ **Deve-se considerar o efeito de 2ª ordem.**

8.5. MÉTODO DO PILAR-PADRÃO COM CURVATURA APROXIMADA

$$M_{1d,min} = N_d\left(0{,}015 + 0{,}03 \cdot h\right) = 1{,}4 \cdot 1{,}2 \cdot 650 \cdot \left(0{,}015 + 0{,}03 \cdot 0{,}15\right) \Rightarrow \mathbf{M_{1d,min} = 21{,}29\ kN.m}$$

$$\left(M_{1d,A} = 18{,}85\ kN.m\right) < \left(M_{1d,min} = 21{,}29\ kN.m\right) \therefore \mathbf{M_{1d,A} = 21{,}29\ kN.m}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{0{,}005}{h(\nu + 0{,}5)} \le \frac{0{,}005}{h} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{0{,}005}{0{,}15(0{,}91 + 0{,}5)} = 0{,}0236 < \frac{0{,}005}{0{,}15} = 0{,}033 \therefore \mathbf{\frac{1}{r} = 0{,}0236}$$

$$M_{d,tot} = \alpha_b M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10}\frac{1}{r} = 21{,}29 + 1{,}4 \cdot 1{,}2 \cdot 650 \cdot \frac{2{,}65^2}{10} \cdot 0{,}0236 \Rightarrow \mathbf{M_{d,tot} = 39{,}39\ kN.m}$$

$$e_{tot} = \frac{M_{d,tot}}{N_d} = \frac{39{,}39}{1{,}4 \cdot 1{,}2 \cdot 650} \Rightarrow \mathbf{e_{tot} = 3{,}61\ cm}$$

$$\mu = \frac{\nu \cdot e_{tot}}{h} = \frac{0{,}91 \cdot 3{,}61}{15} \therefore \boldsymbol{\mu = 0{,}22}$$

Será considerado:

$$\frac{d'}{h} = \frac{4}{15} = 0{,}27 \cong 0{,}25$$

Utilizando-se o ábaco A-5 (Figura 58) de VENTURINI et al. (1987), obtém-se:

$$\omega = 0{,}90 \Rightarrow A_s = \frac{A_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}} \cdot \omega = \frac{15 \cdot 45 \cdot \frac{2{,}5}{1{,}4}}{\frac{50}{1{,}15}} = 27{,}72 \cdot \omega = 27{,}72 \cdot 0{,}90 \therefore \mathbf{A_s = 24{,}95\ cm^2}$$

Taxa de Armadura: $\boldsymbol{\rho = \frac{24{,}95}{15 \times 45} = 3{,}70\%}$

Armadura adotada: **- 12 ϕ 16 mm (24,0 cm²)** (Figura 59)

- Alternativa: 8 ϕ 20 mm (25,20 cm²)

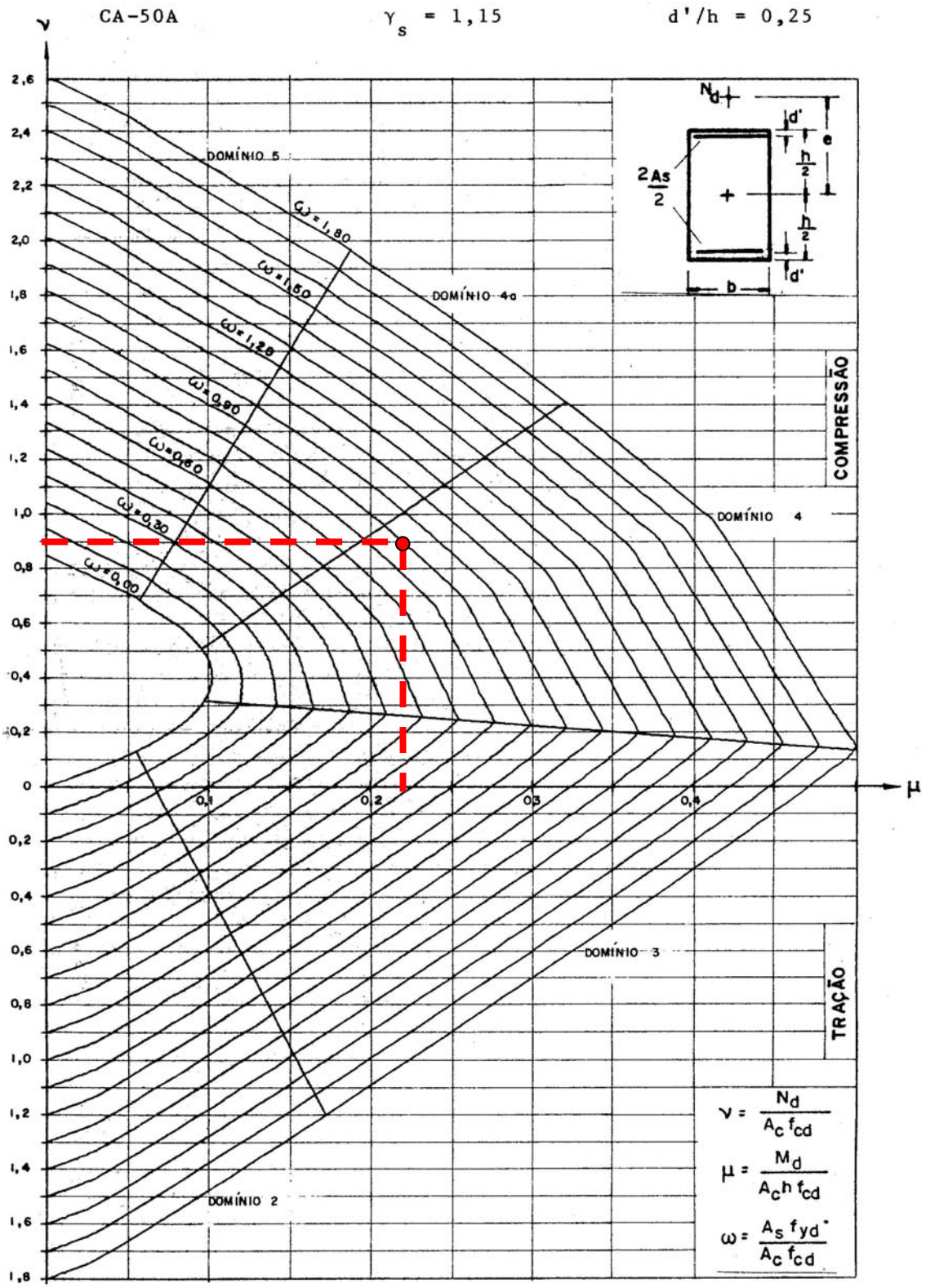

Figura 58. Ábaco A5 (Extraído de VENTURINI, 1987)

8.5.1. Estribos

a) Diâmetro

$$\phi_t \geq \begin{cases} \phi_\ell / 4 = 16/4 = 4 \text{ mm} \\ 5 \text{ mm} \end{cases}$$

Adotado $\phi_t = 5$ mm

b) Espaçamento

$$\phi_t \geq \begin{cases} 15 \text{ cm (menor dimensão)} \\ 12\phi_\ell = 12 \cdot 1{,}6 = 19{,}2 \text{ cm} \\ 20 \text{ cm} \end{cases}$$

Adotado s = 15 cm

c) Estribos suplementares

$$20\phi_t = 20 \cdot 0{,}5 = 10 \text{ cm}$$

As quatro barras centrais precisam de estribo suplementar. São adotados os estribos múltiplos, indicados na Figura 59.

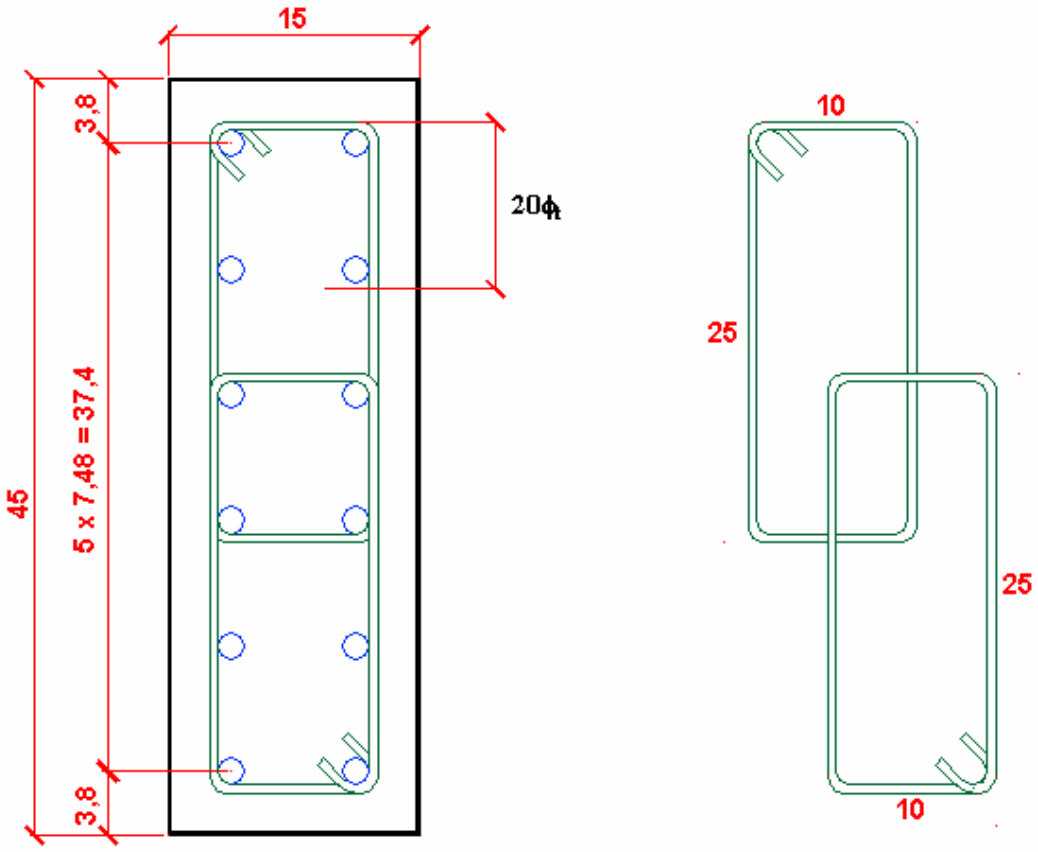

Figura 59. Detalhe da seção: 12 ϕ16 (24,0 cm²), estribos ϕ5 c/ 15

9. CONCLUSÕES

Capítulo 9

Neste item serão apresentados alguns aspectos que foram observados durante a evolução do trabalho, no que diz respeito aos métodos apresentados pela NBR 6118:2003, para projeto de pilares.

Inicialmente, é importante salientar que a excentricidade de 1ª ordem e_1 não inclui a excentricidade acidental e_a, apenas a excentricidade inicial e_i, sendo que a excentricidade acidental não interfere no resultado quando $M_{1d,A} > M_{1d,\ Min}$, pois este último leva em conta uma excentricidade acidental mínima. Essa foi uma importante mudança na Norma, ao considerar um momento mínimo que engloba todas as excentricidades. No entanto, deve-se observar que a excentricidade inicial e a acidental são provocadas por diferentes fenômenos, a primeira pelo monolitismo existente na ligação entre os pilares e as vigas, e o segundo devido às imperfeições dos eixos da estrutura, e portanto seria mais conveniente a consideração de cada excentricidade isoladamente.

Uma segunda observação a ser feita se refere aos diferentes casos para cálculo do coeficiente α_b: na primeira, considerando o pilar como biapoiado sem forças transversais, tem-se $\alpha_b = 0{,}4$; na segunda situação o pilar é tratado como sendo biapoiado com momento menor que o momento mínimo, sendo $\alpha_b = 1{,}0$. Ou seja, o pilar em estudo se encaixa nessas duas definições dadas pela Norma, sendo este o motivo para a comparação. Dessa forma, para o primeiro exemplo apresentado, e adotando-se propositalmente os momentos atuantes nos extremos do pilar igual ao momento mínimo, recaiu-se nessas duas situações possíveis de dimensionamento. Analisando os resultados da Tabela 6, pode-se perceber que as diferenças encontradas foram muito elevadas, chegando a ficar em torno de 45% para o método acoplado a diagramas M-N-1/r, que é muito alta, se for levado em conta que ambas estariam de

acordo com a Norma. Conclui-se, portanto, que fica mais interessante considerar, no dimensionamento, o valor α_b = 1,0, já que desta forma o dimensionamento estará a favor da segurança e evitará problemas. No entanto, é necessário que se defina com maior clareza, a partir de mais parâmetros, os casos em que o valor α_b = 0,4 deva ser tomado, de modo a evitar possíveis gastos desnecessários com a estrutura.

Analisando-se a Tabela 1, pode-se observar que, na determinação do índice de esbeltez limite λ_1 os valores propostos pela NBR 6118:2003 tendem para o lado contrário à segurança em relação aos estudos apresentados e a outras normas estrangeiras. Segundo SOUZA (2003), isto ocorre quando os valores da excentricidade relativa de 1ª ordem e_1/h estão entre 0,2 a 1,2. Por outro lado, os valores de λ_1 propostos pela NBR 6118:2003 tendem a ser mais conservadores que os valores propostos para valores da excentricidade relativa inferiores a 0,14, freqüentes em edifícios residenciais.

Já em relação à eq. (10), SOUZA (2003) conclui que a adoção de um limite inferior igual a 0,4 para o coeficiente α_b feito pela NBR 6118:2003 não se mostrou justificável para pilares bi-rotulados sem forças horizontais ao longo do vão, quando se deseja efetuar uma avaliação da excentricidade equivalente dos pilares com relações quaisquer entre as excentricidades nodais para as situações de projeto. A utilização do coeficiente α_b, também para avaliação da esbeltez limite, obriga à utilização do limite inferior de 0,4 para o coeficiente α_b, visando limitar a consideração excessivamente otimista, em termos de capacidade resistente, dos pilares com curvatura reversa.

Para se determinar a influência da solidariedade dos pilares com a viga, no cálculo do momento atuante no pilar devido a essa ligação, deve-se considerar o esquema estático da Figura 55. No entanto, os coeficientes devem ser calculados segundo as equações (46), (47) e (48), já que aqueles apresentados na NBR 6118:2003, e indicados nas equações (43), (44) e (45), podem dar margem a dúvidas, por não apresentarem os coeficientes completos, e sim para o caso geral. A NBR 6118:2003 ainda sugere que, como alternativa, pode-se melhorar o modelo, considerando-se a solidariedade dos pilares com a viga, mediante a introdução de uma rigidez à flexão nos pilares extremos e intermediários. No entanto, é necessária uma avaliação cuidadosa do modelo empregado, através de uma análise dos resultados obtidos.

Outra questão a ser discutida na NBR 6118:2003 é relativa ao tratamento dado à consideração do carregamento de vento e desaprumo, estando ambos relacionados à excentricidade acidental. A Norma especifica que o desaprumo não deve

necessariamente ser superposto ao carregamento de vento, e que deve ser considerado apenas aquele que tiver o efeito mais desfavorável. Entretanto, os dois não se anulam, e podem atuar conjuntamente em uma estrutura, podendo resultar em uma combinação desfavorável e resultar em problemas para a estrutura.

Deve-se observar que os valores de cobrimento das armaduras apresentaram um aumento em relação a NBR 6118:1978, demonstrando desta forma uma maior preocupação com a durabilidade das estruturas de concreto, que é altamente dependente da qualidade e da espessura do concreto de cobrimento das armaduras. Assim, subentende-se que os projetos baseados na Nova Norma terão um desempenho, ao longo do tempo, muito mais otimizado, com um conseqüente aumento da vida útil das estruturas de concreto. No entanto, com o aumento do cobrimento, mantendo-se a mesma seção transversal, ocorre a diminuição da seção de concreto confinado pelos estribos, já que no dimensionamento é considerada toda a seção transversal do pilar, o que pode resultar na diminuição da ductilidade do pilar no caso de destacamento do cobrimento, provocando uma ruptura frágil. Essa questão torna-se mais preocupante no caso de pilares com seção transversal reduzidas, já que são permitidos pilares com dimensão mínima de até 12 cm (item 3.2) e também para os casos de CADs e CARs, que normalmente são muito esbeltos.

Analisando-se os métodos aproximados para dimensionamento de pilares, foi tomado como base para comparações o *Método do pilar-padrão acoplado a diagramas M-N-1/r*, pois esse método apresenta uma formulação mais refinada, além de poder ser utilizado no dimensionamento de pilares com $\lambda \leq 140$, apresentando resultados mais confiáveis do que os demais métodos aproximados, que só podem ser utilizados até um limite de $\lambda \leq 90$. Ele define graficamente uma relação entre essas três grandezas (M-N-1/r), o que garante uma melhor análise do comportamento real da estrutura. No entanto, apesar dos resultados mais precisos, existem as dificuldades de confecção dos diagramas, de encontrar os ábacos na literatura, além da imprecisão visual do uso dos ábacos. Em vista disso, é importante a existência dos métodos mais simples, no entanto é necessária a aferição dos resultados obtidos por meio deles através de métodos mais precisos.

Comparando-se o *Método do Pilar-padrão com Rigidez κ Aproximada* com o *Método do Pilar-padrão acoplado a diagramas M-N-1/r*, a partir dos resultados da Tabela 6, com $\alpha_b = 1{,}0$ conforme o que foi discutido anteriormente, pode-se verificar

que a diferença ficou em torno de 6%, que é uma diferença pequena e aceitável, considerando ainda que está a favor da segurança. Portanto, pode-se concluir que o método da rigidez aproximada é importante, pois possui rápida convergência e é de fácil aplicação, sem a necessidade de utilização de ábacos, que são de confecção trabalhosa e apenas alguns casos particulares são encontrados na literatura. Os bons resultados apresentados por este método são muito importantes também pois, na situação geral de flexão composta oblíqua, à qual estão submetidos, em maior ou menor grau, todos os pilares de uma edificação, o processo a utilizar deve ser o da rigidez κ aproximada, nas duas direções, conforme comenta a NBR 6118:2003, em seu item 15.8.3.3.5.

Na aplicação do *Método do Pilar-padrão com Rigidez κ Aproximada,* houve inicialmente alguma dificuldade no processo iterativo, pois não era obtida convergência, conforme pode ser analisado no item 7.1.2.a). No entanto, com a fixação do intervalo de pesquisa, que limita a variação do momento fletor a partir de um intervalo definido na 1ª iteração e que tem como limites a estimativa inicial e o resultado da 1ª iteração, conforme sugerido por BANKI (2004), o processo iterativo passou a apresentar convergência.

Analisando-se a convergência do Método da rigidez κ aproximada, existem algumas considerações a serem feitas. A primeira questão a observar se refere à aproximação inicial do método. Quando se estima um valor alto, a 1ª iteração resulta um valor baixo, e no caso de se estimar um valor baixo, a tendência é a de obter um valor ainda baixo, na 1ª iteração. Assim, para entender todo o processo iterativo, é necessário uma análise em conjunto da eq. (44) e da eq. (45), considerando duas hipóteses.

A primeira hipótese consiste em considerar, como aproximação inicial do processo iterativo, um momento "infinito". Assim, se ficar garantida a convergência para este valor, estará garantida também para todas as situações em que a 1ª aproximação for maior que a solução do processo iterativo.

Partindo dessa primeira idéia, e substituindo-se o momento "infinito" na eq. (45), pode-se afirmar que o valor de κ/ν também será "infinito". Portanto, ao se substituir esse valor na eq. (44), o denominador tenderá a 1, e a solução para a 1ª iteração será a parcela $M_{d,tot}$. α_b. Definido esse intervalo de pesquisa, e estando a solução algébrica contida no intervalo, o processo iterativo certamente convergirá, apesar de serem necessárias várias iterações até atingir a solução.

Por outro lado, considerando agora uma segunda hipótese, e adotando para 1ª aproximação do momento o valor "zero", tem-se outra situação a considerar. Para este caso, o resultado da 1ª iteração resultou, em todos os exemplos analisados, em um valor do momento muito menor do que a solução algébrica, ou seja, essa solução algébrica está fora do intervalo de pesquisa e, portanto, o problema não apresenta convergência.

Portanto, conclui-se que é sempre preferível, ao se iniciar o processo iterativo, superestimar o valor do momento total $M_{d,tot}$ na aproximação inicial, de tal forma que este seja maior que a solução algébrica do processo iterativo e se tenha garantida a convergência.

Por fim, ainda com relação ao *Método com Rigidez κ Aproximada*, foi analisada uma nova formulação, proposta por BANKI (2004), que apresenta o mesmo resultado obtido pelo processo iterativo proposto pela Norma, porém de forma muito mais simples e sem os problemas de convergência encontrados na utilização prescrita na NBR 6118:2003, sendo assim uma maneira muito mais interessante de utilização do método. Essa proposta, baseada no rearranjo das equações (44) e (45), é mostrada no Anexo I, indicando as substituições e transformações matemáticas até a formulação final, representada pela eq. (46) ou então pela eq. (47), que é a mesma expressão, no entanto com algumas substituições para se obter uma equação em função apenas das excentricidades. Portanto, com base nestes resultados obtidos, recomenda-se que seja abandonado o processo iterativo e utilizado apenas o processo direto, proposto por BANKI (2004), no dimensionamento de pilares pelo *Método do Pilar-padrão com Rigidez κ Aproximada.*

Comparando-se o *Método do Pilar-padrão com Curvatura Aproximada* com o *Método do Pilar-padrão acoplado a diagramas M-N-1/r*, apresentados na Tabela 6, também considerando-se α_b = 1,0, verifica-se que a diferença ficou em torno de 12%, que é o dobro daquela encontrada para o método da rigidez aproximada. Analisando estes resultados, conclui-se que a diferença encontrada é significativa, no entanto são necessárias algumas observações: o método da curvatura aproximada é o mais simples de todos os métodos aproximados, e que apresenta a aplicação mais direta, a partir de uma fórmula que engloba os momentos de 1ª e 2ª ordem; além disso, a sua utilização é permitida pela NBR 6118:2003, com um resultado que, apesar de ser maior que os dos demais métodos, está a favor da segurança. Portanto, a sua utilização deve ser analisada com cuidado, observando alguns critérios, mas sua utilização não deve ser descartada,

pois pode ser de grande utilidade no caso de estimativas ou pré-dimensionamentos de pilares, assim como em obras de pequeno porte, não sendo necessário softwares estruturais para o dimensionamento, pois a diminuição do custo da obra é praticamente desprezível.

É importante analisar também os resultados apresentados na Tabela 7, para um pilar com comprimento de flambagem $\lambda = 50$. Este exemplo foi desenvolvido para analisar se as diferenças encontradas no exemplo com $\lambda = 90$ tinham alguma relação com o fato de que os métodos da curvatura aproximada e da rigidez aproximada estavam sendo utilizados no limite de aplicação. Assim, comparando-se os resultados, pode-se observar que, em relação ao *Método do Pilar-padrão acoplado a diagramas M-N-1/r,* o *Método com Rigidez κ Aproximada* apresentou uma diferença em torno de 3%, menor do que a diferença apresentada para o exemplo em que $\lambda = 90$, enquanto que para o *Método do pilar-padrão com Curvatura Aproximada* a diferença foi da ordem de 11%, da mesma ordem de grandeza. Assim, a partir dessas comparações, pode-se concluir que os métodos apresentam resultados adequados mesmo no limite de aplicação, ou seja, o limite estipulado pela NBR 6118:2003 para utilização desses métodos está compatível com os resultados obtidos. Já na comparação do *Método do Pilar-padrão acoplado a diagramas M-N-1/r* com o *Cálculo Simplificado,* a diferença foi de 6,5%, menor do que a diferença para o método da curvatura aproximada e muito próximo do método da rigidez aproximada, indicando que método também pode ser utilizado e que conduz a resultados compatíveis com as simplificações que facilitam os cálculos.

Por fim, têm-se os resultados da Tabela 8, para um pilar com comprimento de flambagem $\lambda = 140$. Apesar dos métodos da curvatura aproximada e da rigidez aproximada estarem fora do seu limite de aplicação (válidos apenas para $\lambda \leq 90$), os resultados foram comparados com o obtido pelo *Método acoplado a diagramas M-N-1/r* (válido para $\lambda = 140$) para uma análise do comportamento desses métodos acima do limite de norma. As diferenças encontradas foram consideráveis, em torno de 13% para o *Método da Rigidez Aproximada* e 15% para o *Método da Curvatura Aproximada*, o que já era esperado. Entretanto, diferente do que ocorreu nos exemplos anteriores, neste caso o resultado está **contra a segurança**, já que os métodos da *Curvatura Aproximada* e R*igidez Aproximada* resultaram armaduras menores do que o *Método acoplado a diagramas M-N-1/r*, mais preciso.

Portanto, comparando-se de forma geral os resultados obtidos entre os métodos aproximados, para comprimentos de flambagem de 50, 90 e 140, pode-se concluir que o limite de λ = 90, estipulado pela NBR 6118:2003, para a aplicação do *Método da Curvatura Aproximada* e do *Método da Rigidez Aproximada* está coerente com os resultados, já que para λ = 50 as diferenças encontradas foram menores do que para λ = 90, porém nestes dois casos os resultados estavam **a favor** da segurança, enquanto que para λ = 140 os métodos demonstraram estar **contra** a segurança, na comparação com o *Método acoplado a diagramas M-N-1/.*

Estas são as questões abordadas nesta dissertação, referentes à NBR 6118:2003, demonstrando que ocorreram muitas mudanças na passagem da antiga para a nova Norma, mudanças que com certeza vão provocar um grande avanço nas obras brasileiras de concreto armado e protendido. É importante salientar a necessidade de serem discutidos todos esses aspectos, procurando sempre contribuir para o progresso nos meios técnico e acadêmico. Nota-se que existem mudanças que incorporaram o desenvolvimento tecnológico ocorrido nestes últimos anos, procurando adequar os resultados obtidos no campo experimental para as práticas de dimensionamento, assim como a inclusão de processos e teorias mais refinadas de cálculo, devido ao desenvolvimento da informática e softwares de cálculo estrutural. No entanto, pode-se analisar e verificar, segundo os resultados apresentados, que existem abordagens e estudos em desenvolvimento que devem ser analisados e, sempre que possível, incorporados de forma a enriquecer a Norma Brasileira de estruturas de concreto e incentivar a produção científica do país.

Como sugestão para a continuidade deste trabalho, pode-se analisar os exemplos apresentados, utilizando-se o Método Geral, e comparar os resultados obtidos, possibilitando desta forma um real diagnóstico e certificação a respeito dos Métodos Aproximados. Outro item que poderia ser abordado seria o dimensionamento de pilares submetidos à flexão oblíqua, comparando-se os resultados obtidos pelo Método Geral com o *Método do pilar-padrão para pilares de seção retangular submetidos à flexão composta oblíqua,* que utiliza o *Método do pilar-padrão com Rigidez κ Aproximada* nas duas direções, e o Método Simplificado para a Flexão Composta Oblíqua.

BIBLIOGRAFIA

ACI-318 (1995) *Building code requirements for reinforced concrete*. American Concrete Institute, Detroit.

AGUIAR, E.A.B. (1998) *Projeto de pilares de concreto de alto desempenho.* São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1978) *NBR 6118 – Projeto e execução de obras de concreto armado*. Rio de Janeiro.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2003) *NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto*. Rio de Janeiro.

AUFIERI, F.A. (1997) *Diretrizes para o dimensionamento e detalhamento de pilares de edifícios em concreto armado.* São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

AUFIERO, L. (1977) *Estabilidade de colunas isostáticas de concreto armado.* São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

BAZANT, Z.P.; CEDOLIN, L.; TABBARA, M.R. (1991) *New method of analysis for slender columns.* ACI Structural Journal, v.88, n.4, July-August.

BACARJI, E. (1993) *Análise de estruturas de edifícios: projeto de pilares.* São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

BACCIN, A.G.C. (1998) *Fundamentos do concreto de alto desempenho e sua aplicação no projeto de pilares.* São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

BANKI, A.L. (2004) *Método do pilar-padrão com rigidez aproximada*. Informativo da Comunidade AltoQi, n.38. Disponível em: www.altoqi.com.br/Suporte/html/informativo.htm

BORGES, A.C.L. (1999) *Análise de pilares esbeltos de concreto armado solicitados à flexo-compressão oblíqua*. São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

BS-8110 (1985) *Structural use of concrete, Part 1: Code of practice for design and construction*. British Standards Institution, UK.

BUCHAIM, R. (1979) *Efeitos de segunda ordem e estado limite último de instabilidade em pilares de concreto armado.* São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

CADAMURO JÚNIOR, I.W. (1997) *Dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado com seção qualquer solicitados por flexão composta oblíqua.* São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

CARMO, R.M. (1995) *Efeitos de segunda ordem em edifícios usuais de concreto armado.* São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

CEB - FIP Model Code (1990) *Final draft, Bulletin d'information N. 203, 204 e 205*. Comitê Euro-International du Béton, Paris.

CLAESON, C. (1998) *Structural behavior of reinforced high-strength concrete columns.* Göteborg. Thesis (PhD) – Chalmers University of Technology.

CLAESON, C.; GYLLTOFT, K. (1998) S*lender high-strength concrete subjected to eccentric loading.* ASCE, v.124, n.3, p.233-240, March.

COLLINS, M. P.; MITCHEL, D.; MAC GREGOR, J. G. (1993) *Structural design considerations for high-strength concrete*. Concrete international, ACI, p. 27-34. May.

CUSSON, D.; PAULTRE, P. (1994) *High-strength concrete columns confined by rectangular ties*. Journal of structural engineering, ASCE, v.120, n.3, p.783-804, mar.

EUROCODE N° 2 (1992) *Design of concrete structures – Part 1: general rules for buildings.* Brussels, CEN.

EL-METWALLY, S.E.E. (1994) *Method of segment length for instability analysis of reinforced concrete beam-column.* ACI Structural Journal, v.91, n.6, November-December.

FOSTER, S. J.; LIU, J.; SHEIKH, S. A. (1998) ***Cover spalling in HSC columns in concentric compression***. Journal of structural engineering. ASCE. v. 124 No. 12, pp.1431-1437.

FRANÇA, R.L.S. (1984) *Relações momento-curvatura em peças de concreto armado submetidas à flexão oblíqua composta.* São Paulo. Dissertação (mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

FRANÇA, R.L.S. (1991) *Contribuição ao estudo dos efeitos de segunda ordem em pilares de concreto armado.* São Paulo. Tese (doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

FRANÇA, R. L. S. (1994) *Estudo dos efeitos da esbeltez, segundo o conceito do pilar-padrão melhorado.* Correspondência particular, não publicado, São Paulo (Este trabalho foi posteriormente apresentado no "Seminário sobre não-linearidade física e geométrica das estruturas de concreto" do IBRACON, realizado em 1995);

FUSCO, P. B. (1981) *Estruturas de concreto armado: Solicitações Normais.* Rio de Janeiro, Ed. Guanabara 2.

GUIMARÃES, A.E.P.(1999) ***Análise experimental de pilares de concreto de alta resistência com adição de fibras metálicas submetidos à compressão centrada.*** São Carlos. Tese de Doutorado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

IBRAHIM, H.H.H.; MacGREGOR, J.G. (1997) *Modification of the ACI rectangular stress block for high-strength concrete.* ACI Structural Journal, v.94, n.1, p. 40-48, January-February.

KATAOKA, L.T.; CARVALHO, R.C; FIGUEIREDO, J.R. ; JÚNIOR, S.F (2003) *Análise, dimensionamento e detalhamento de pilares com espessuras inferiores a 20 cm de acordo com as prescrições da nova norma NB1.* V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo

KIM, J.K.; YANG, J.K. (1995) *Buckling behavior of slender high-strength concrete columns.* Engineering Structures. v.17, n.1, p. 39-51, January.

KHOURI, M. E. (2001) ***Contribuição ao projeto de pilares de pontes de concreto armado com consideração das não-linearidades física e geométrica e interação solo-estrutura.*** . São Carlos. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

KÖNIG, K.; SIMSCH, G. (1996) *Failure mechanism and load-deformation behavior of high-strength concrete columns with confining reinforcement*. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON UTILIZATION OF HIGH-STRENGTH / HIGH-PERFORMANCE CONCRETE, 4. Paris, may, p.777-786, *Proceedings.*

LANGLOIS, Y.; PAULTRE, P.(1996) ***Rôle de l'enrobage de béton et effet dês fibres métalliques sur le comportement des poteaux en BHP.*** Sherbrooke, Canadá, Université de Sherbrooke. (Rapport de recherche, SMS-96/02).

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. (1978) *Construções de Concreto: Princípios Básicos sobre a Armação de Estruturas de Concreto Armado.* Rio de Janeiro, Editora Interciência.

LIMA, F.B. (1997) *Pilares de concreto de alto desempenho: fundamentos e experimentação.* São Carlos. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

LIMA, H. C. (2003) ***Avaliação da ductilidade de pilares de concreto armado, submetidos à flexo-compressão reta com e sem adição de fibras metálicas.*** . São

Carlos. Tese (doutorado) Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

LORIGGIO, D.D. (1999) *Estudos sobre o estado limite último de instabilidade de estruturas de concreto armado.* In: REUNIÃO ANUAL DO IBRACON, 41. Salvador.

MacGREGOR, J.G. (1992) *Reinforced concrete mechanics and design.* 2. ed., Prentice-Hall.

MacGREGOR, J.G. (1993) *Design of slender concrete columns – Revised.* ACI Structural Journal, vol. 90, n. 3, p. 302-309, May-June, Detroit.

MARCOTTI, P. (1984) *Instabilidade na flexão composta oblíqua de pilares de concreto armado.* São Paulo. Dissertação (mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

MARQUES, S.P.C.; MARQUES, D.C.S.C (1999) *Análise numérica não-linear de pilares de concreto armado sob carga excêntrica.* In: REUNIÃO ANUAL DO IBRACON, 41. Salvador.

MARTHA, L. F. (2001) *Ftool – Two-Dimensional Frame Analysis Tool.* Versão Educacional 2.09. Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio. Departamento de Engenharia Civil e Tecgraf/PUC-Rio – Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica. Disponível em http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool.

MENDES NETO, F. (1991) *Estudo de pilares de concreto armado submetidos a flexão oblíqua composta.* São Paulo. Dissertação (mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

PAULA, J.A. (1988) *Algoritmos para o estudo de pilares esbeltos de concreto solicitados à flexão normal composta.* São Carlos. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

PAULTRE, P. et al. (1996). *Structural performance of some special concretes.* In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON THE UTILIZATION OF HIGH STRENGTH/ HIGH PERFORMANCE CONCRETE, 4., Paris, France, 29-31 May. ***Proceedings.*** v.3. p.787-796.

QUEIROGA, M. (1999) ***Análise experimental de pilares de concreto de alto desempenho submetidos à compressão simples.*** São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

RAMOS, R. F. (2001) ***Análise experimental de pilares de concreto armado sob ação centrada com resistência do concreto de 25 Mpa.*** São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

SALMON, C. G.; JOHNSON, J. E. (1996) *Steel structures - Design and behavior*. Harper e Row, Publishers Inc., 4ª edição, New York.

SANTOS, L.M. (1981) *Cálculo de concreto armado segundo a nova NB-1 e o CEB.* v.2. São Paulo, Editora LMS.

SANTOS, L. M. (1991) *Analysis of section 6.6 of the CEB-FIP Model Code 1990.* Colloquium on the CEB-FIP MC90, pp. 289-306, UFRJ, RJ.

SANTOS, L.M. (1994) *Sub-rotinas básicas do dimensionamento de concreto armado.* São Paulo, Editora Thot.

SCADELAI, M.A.; PINHEIRO, L.M. (2003) *Dimensionamento de pilares de acordo com a nova NBR 6118*. [CD-ROM]. In: 5º SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, São Paulo, 7-10 junho. São Paulo, EPUSP. 20 p. (código SIMP192)

SILVA, R. C.; PINHEIRO, L. M. (2002) *Excentricidades em Pilares segundo o Projeto de Revisão da NBR 6118 (2000).* IV Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto.

SOUZA, T. J. M. (1992) *Consideração da não-linearidade física e geométrica em estruturas lineares de concreto armado*. Rio de Janeiro. Dissertação (mestrado). Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SOUZA, T. J. M. (2003) *Considerações sobre os efeitos locais de 2ª ordem.* V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo.

SOUZA, T. J. M.; GUIMARÃES, G. B.; DUMONT, N. A. (1994) *Determinação da esbeltez limite de pilares de concreto armado.* 36ª Reunião do Instituto Brasileiro do Concreto (REIBRAC). Porto Alegre, IBRACON.

SOUZA, T. J. M, GUIMARÃES, G. B., DUMONT, N. A. (1995) *Sobre a determinação do índice de esbeltez limite de colunas de concreto armado*. XXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, vol. 6, pp. 425-435, Tucumán, Argentina.

SOUZA, T. J. M, GUIMARÃES, G. B., DUMONT, N. A. (1998) *Índice de esbeltez limite em colunas de concreto armado.* Revista Téchne, n. 35, pp. 46-49, Ed. Pini, SP.

SUSSEKIND, J.C. (1991) *Curso de concreto,* v.2, 4.ed. São Paulo, Ed. Globo.

TAKEUTI, A. R. (1999) ***Reforço de pilares de concreto armado por meio de encamisamento com concreto de alto desempenho.*** São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

TAKEUTI, A. R (2003) ***Comportamento resistente imediato e ao longo do tempo de pilares reforçados por meio de encamisamento com concreto de alto desempenho.*** São Carlos. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

VANDERLEI, R.D. (1999) *Análise experimental de pilares de concreto armado de alta resistência sob flexo-compressão reta.* São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

VENTURINI, W. S.; RODRIGUES, R. O. (1987) *Dimensionamento de Peças Retangulares de Concreto Armado Solicitadas à Flexão Reta.* EESC/USP, São Carlos.

ANEXO I

Para a obtenção da eq. (46), que permite a aplicação direta do método da rigidez κ aproximada, deve-se partir das equações que regem o processo iterativo, dadas a seguir:

$$M_{d,tot} = \frac{\alpha_b M_{1d,A}}{1 - \frac{\lambda^2}{120\kappa/\nu}} \geq M_{1d,A} \tag{52}$$

κ é valor da rigidez adimensional, dado aproximadamente pela expressão:

$$\kappa/\nu = 32 \cdot \left(1 + 5.\frac{M_{d,tot}}{h.N_d}\right) \tag{53}$$

Desta forma, substituindo-se a eq. (45) na eq. (44) obtém-se:

$$M_{d,tot} = \frac{M_1}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \cdot 32 \cdot \left(1 + 5.\frac{M_{d,tot}}{h.N_d}\right)}}$$

Adotando-se $M_1 = \alpha_b \cdot M_{1d,A}$ e realizando-se transformações matemáticas de modo a melhorar a disposição da equação, tem-se:

$$M_{d,tot} = \frac{M_1}{1 - \frac{h \cdot N_d \cdot \lambda^2}{3840 \cdot \left(h \cdot N_d + 5M_{d,tot}\right)}}$$

$$M_{d,tot} = \frac{M_1}{\frac{3840 \cdot \left(h \cdot N_d + 5M_{d,tot}\right) - h \cdot N_d \cdot \lambda^2}{3840 \cdot \left(h \cdot N_d + 5M_{d,tot}\right)}} = \frac{\left(h \cdot N_d + 5M_{d,tot}\right) \cdot M_1}{\left(h \cdot N_d + 5M_{d,tot}\right) - \frac{h \cdot N_d \cdot \lambda^2}{3840}}$$

$$h \cdot N_d \cdot M_{d,tot} + 5 \cdot M_{d,tot}^2 - \frac{M_{d,tot} \cdot \lambda^2 \cdot h \cdot N_d}{3840} = h \cdot N_d \cdot M_1 + 5 \cdot M_1 \cdot M_{d,tot}$$

$$h \cdot N_d \cdot M_{d,tot} \cdot \left(1 - \frac{\lambda^2}{3840}\right) + 5 \cdot M_{d,tot}^2 - h \cdot N_d \cdot \alpha_b \cdot M_{1d,A} - 5 \cdot \alpha_b \cdot M_{1d,A} \cdot M_{d,tot} = 0$$

Considerando $k_1 = 1 - \frac{\lambda^2}{3840}$, tem-se:

$$5 \cdot M_{d,tot}^2 + (k_1 \cdot h \cdot N_d - 5 \cdot M_1) \cdot M_{d,tot} - h \cdot N_d \cdot M_1 = 0$$

Adotando-se $k_2 = k_1 \cdot h \cdot N_d$, resulta a seguinte equação do segundo grau:

$$5 \cdot M_{d,tot}^2 + (k_2 - 5 \cdot M_1) \cdot M_{d,tot} - h \cdot N_d \cdot M_1 = 0$$

Resolvendo a equação:

$$\Delta = (k_2 - 5 \cdot M_1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-h \cdot N_d \cdot M_1) = k_2^2 - 10 \cdot k_2 \cdot M_1 + 25 \cdot M_1^2 + 20 \cdot h \cdot N_d \cdot M_1$$

$$M_{d,tot} = \frac{5 \cdot M_1 - k_2 \pm \sqrt{k_2^2 + 10 \cdot M_1 \cdot (2 \cdot h \cdot N_d - k_2) + 25 \cdot M_1^2}}{10}$$

Portanto, desprezando-se a raiz negativa, já que o valor esperado do momento tem que ser positivo, a equação fica:

$$M_{d,tot} = \frac{5 \cdot M_1 - k_2 + \sqrt{k_2^2 + 10 \cdot M_1 \cdot (2 \cdot h \cdot N_d - k_2) + 25 \cdot M_1^2}}{10} \qquad (54)$$

A eq. (46) fornece de forma direta o valor de $M_{d,\,tot}$, pelo método do pilar-padrão com rigidez aproximada, sem a necessidade de utilizar procedimento iterativo. Nesta equação, como já se viu, tem-se:

$$M_1 = \alpha_b \cdot M_{1d,A}$$

$$k_1 = 1 - \frac{\lambda^2}{3840}$$

$$k_2 = k_1 \cdot h \cdot N_d$$