

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

# ANÁLISE DINÂMICA DA INTERAÇÃO ENTRE PONTE RODOVIÁRIA E VEÍCULOS PESADOS

SILMARA CASSOLA

Tese apresentada à Escola de Engenharia de  
São Carlos, Universidade de São Paulo, como  
parte dos requisitos para a obtenção do título  
de Doutora em Engenharia Mecânica.

Orientador

PROF. DR. PAULO SÉRGIO VAROTO

São Carlos, SP  
2005



Serviço de Pós-Graduação EESC/USP  
**EXEMPLAR REVISADO**  
Data de entrada no Serviço..... / .. / .....  
Ass.:.....  
20 / 12 / 05

DEDALUS - Acervo - EESC



31100053635

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Engenheira **SILMARA CASSOLA**

Tese defendida e julgada em 05-08-2005 perante a Comissão Julgadora:



Prof. Associado **PAULO SERGIO VAROTO (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovada



Prof. Dr. **MARIO FRANCISCO MUCHERONI**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovada



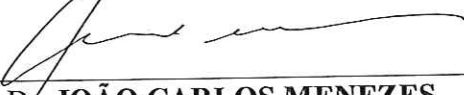
Prof. Associado. **HUMBERTO BREVES CODA**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO



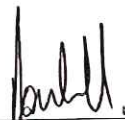
Prof. Dr. **ROBERTO CHUST CARVALHO**  
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADA

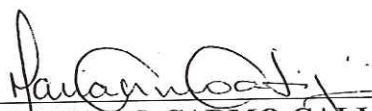


Prof. Dr. **JOÃO CARLOS MENEZES**  
(Instituto Tecnológico de Aeronáutica/ITA)

Aprovada



Prof. Associado **JONAS DE CARVALHO**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
Mecânica



Profa. Titular **MARIA DO CARMO CALJURI**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Para minha família,  
com todo carinho.*

## *Agradecimentos*

Aos Professores Dr. Paulo Sérgio Varoto e Dr. Mário Francisco Mucheroni, pela orientação, apoio e amizade demonstrados durante a realização deste trabalho.

Aos amigos do Laboratório de Dinâmica pelo companheirismo e carinho sempre presentes.

À Cristina Pessa, José Francisco (Xina) e secretárias do SEM pelo apoio técnico e amizade.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo auxílio financeiro concedido.



*“PARA SER GRANDE, SÊ INTEIRO: NADA TEU EXAGERA OU EXCLUI.  
SÊ TUDO EM CADA COISA. PÔE QUANTO ÉS NO MÍNIMO QUE FAZES.  
ASSIM EM CADA LAGO A LUA TODA BRILHA, PORQUE ALTA VIVE.”*

*FERNANDO PESSOA  
(1888-1935)*

## ÍNDICE

<i>Lista de Figuras</i> .....	<i>viii</i>
<i>Lista de Tabela</i> .....	<i>xii</i>
<i>Lista de Símbolos</i> .....	<i>xiii</i>
<i>Resumo</i> .....	<i>xv</i>
<i>Abstract</i> .....	<i>xvi</i>
1. INTRODUÇÃO.....	01
1.1. Objetivos .....	04
1.2. Metodologia .....	05
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....	08
2.1. Revisão dos Estudos Sobre Dinâmica de Pontes .....	11
2.2. Evolução dos Métodos e Modelos de Cálculo da Resposta Dinâmica de Pontes...13	
2.3. Modelo do Veículo .....	14
2.4. Modelo da Rugosidade da Pista e da Entrada da Ponte .....	21
2.5. Solução das Equações de Equilíbrio Considerando a Interação .....	25
3. TRATAMENTO DA INTERAÇÃO DINÂMICA .....	28
3.1. Equacionamento da Interação Dinâmica .....	33
3.2. Acoplamento Cinemático .....	35
3.3. Acoplamento das Matrizes .....	37
3.3.1. Condições Cinemáticas no Ponto de Contato .....	37
3.3.2. Inclusão da Rugosidade daPista .....	43
3.4. Algoritmo de Solução: procedimentos para o cálculo da resposta dinâmica do sistema ponte/veículo acoplado .....	46

4. TEORIA DE PLACAS PARA ANÁLISE DINÂMICA .....	48
4.1. Campo de Deslocamento .....	51
4.2. Campo de Deformações e Tensões .....	53
4.3. Relação Tensão-Deformação .....	55
4.4. Esforços e Deformações Generalizadas .....	57
4.5. Princípio dos Trabalhos Virtuais .....	61
4.6. Formulação de Elementos Finitos .....	62
4.6.1. Discretização do Campo de Movimento .....	62
4.6.2. Discretização do Campo de Deformações Generalizadas .....	63
4.7. Obtenção da Matriz de Rigidez do Elemento .....	65
4.8. Obtenção da Matriz de Massa do Elemento .....	66
5. MODELO DA PONTE .....	68
5.1. Descrição da Estrutura .....	68
5.2. Modelo de Elementos Finitos: Placa e Viga .....	70
5.3. Parâmetros Modais .....	72
5.4. Avaliação do Modelo da Ponte .....	76
6. ANÁLISE DAS RESPOSTAS DINÂMICA .....	79
6.1. Análise das Respostas no Instante de Deslocamento Máximo .....	80
6.2. Análise das Respostas Durante a Entrada e a Saída da Ponte .....	91
6.3. Análise das Respostas no Instante em que o Veículo Deixa a Ponte .....	111
6.4. Análise da Influência da Qualidade da Pista .....	120
7. ANÁLISE DAS RESPOSTAS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA .....	122
8. CONCLUSÃO.....	130
8.1. Proposta de Trabalhos Futuros .....	133
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	134
APÊNDICE I .....	140

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Ponte sobre o Rio Tarn (França)	2
Figura 1.2	Trecho da rodovia dos Imigrantes (Brasil)	3
Figura 2.1	Modelo 2D e 4 GL para veículo de 2 eixos	15
Figura 2.2	Esquema de um veículo de 2 eixos e distribuição da carga	16
Figura 2.3	Esquema de um veículo de 3 eixos e distribuição da carga	17
Figura 2.4	Modelo do veículo	19
Figura 2.5	Amostra de perfis da pista	24
Figura 3.1	Diagrama de Forças no Ponto de Contato do Veículo com a Estrutura	38
Figura 4.1	Definição geométrica de placa e convenção de sinais para deslocamento e giro	49
Figura 4.2	Deformação da superfície média de uma placa delgada e giro da normal	50
Figura 4.3	Deformação da superfície média de uma placa e giro da normal: teoria de Mindlin-Reissner	51
Figura 4.4	Convenção de sinais para as tensões $\tau_{xz}$ e $\tau_{yz}$	53
Figura 4.5	Convenção de sinais para esforços em uma placa	58
Figura 4.6	Discretização com elementos de placa de quatro nós	62
Figura 5.1	Esquema do 3º vão da ponte sobre o Rio Piracicaba	69
Figura 5.2	Corte transversal da ponte e posição do veículo sobre FR2	69
Figura 5.3	Dimensões do tabuleiro e distribuição das vigas	70
Figura 5.4	Malha de elementos de placa e sistema de referência para uma placa retangular de espessura h	71
Figura 5.5	Detalhe dos apoios, localização das longarinas e faixa de travessia do veículo	71
Figura 5.6	Modos de vibrar da estrutura analisada	
	(a) 1º modo	73
	(b) 2º modo	74
	(c) 3º modo	75

Figura 5.7	Posição do veículo (3 eixos) no centro da ponte	76
Figura 6.1	Resposta para travessia do veículo H2044 a 80km/h	
	(a) Resposta da ponte inteira	82
	(b) Resposta da seção de deslocamento máximo: L3	82
	(c) Resposta do ponto central da seção de deslocamento máximo (próximo da passagem)	83
	(d) Resposta do ponto central da seção referente à L6 (distante da passagem)	83
Figura 6.2	Resposta para travessia do veículo HS1544 a 80km/h	
	(a) Resposta da ponte inteira	84
	(b) Resposta da seção de deslocamento máximo: L3	84
	(c) Resposta do ponto central da seção de deslocamento máximo (próximo da passagem)	85
	(d) Resposta do ponto central da seção referente à L6 (distante da passagem)	85
Figura 6.3	Resposta para travessia do veículo HS2044 a 80km/h	
	(a) Resposta da ponte inteira	86
	(b) Resposta da seção de deslocamento máximo: L3	86
	(c) Resposta do ponto central da seção de deslocamento máximo (próximo da passagem)	87
	(d) Resposta do ponto central da seção referente à L6 (distante da passagem)	87
Figura 6.4	Resposta para travessia do veículo H2044 a 100 km/h	
	(a) Resposta da ponte inteira quando o 1º eixo entra	93
	(b) Resposta da seção referente à L3 quando o 1º eixo entra	93
	(c) Resposta da ponte inteira quando o 2º eixo entra	94
	(d) Resposta da seção referente à L3 quando o 2º eixo entra	94
	(e) Resposta da ponte inteira quando o 1º eixo sai	95
	(f) Resposta da seção referente à L3 quando o 1º eixo sai	95
	(g) Resposta da ponte inteira quando o 2º eixo sai	96
	(h) Resposta da seção referente à L3 quando o 2º eixo sai	96



Figura 6.5	Resposta para travessia do veículo HS1544 a 70 km/h	
	(a) Resposta da ponte inteira quando o 1º eixo entra	97
	(b) Resposta da seção referente à L3 quando o 1º eixo entra	97
	(c) Resposta da ponte inteira quando o 2º eixo entra	98
	(d) Resposta da seção referente à L3 quando o 2º eixo entra	98
	(e) Resposta da ponte inteira quando o 3º eixo entra	99
	(f) Resposta da seção referente à L3 quando o 3º eixo entra	99
	(g) Resposta da ponte inteira quando o 1º eixo sai	100
	(h) Resposta da seção referente à L3 quando o 1º eixo sai	100
	(i) Resposta da ponte inteira quando o 2º eixo sai	101
	(j) Resposta da seção referente à L3 quando o 2º eixo sai	101
	(k) Resposta da ponte inteira quando o 3º eixo sai	102
	(l) Resposta da seção referente à L3 quando o 3º eixo sai	102
Figura 6.6	Resposta para travessia do veículo HS2044 a 120 km/h	
	(a) Resposta da ponte inteira quando o 1º eixo entra	103
	(b) Resposta da seção referente à L3 quando o 1º eixo entra	103
	(c) Resposta da ponte inteira quando o 2º eixo entra	104
	(d) Resposta da seção referente à L3 quando o 2º eixo entra	104
	(e) Resposta da ponte inteira quando o 3º eixo entra	105
	(f) Resposta da seção referente à L3 quando o 3º eixo entra	105
	(g) Resposta da ponte inteira quando o 1º eixo sai	106
	(h) Resposta da seção referente à L3 quando o 1º eixo sai	106
	(i) Resposta da ponte inteira quando o 2º eixo sai	107
	(j) Resposta da seção referente à L3 quando o 2º eixo sai	107
	(k) Resposta da ponte inteira quando o 3º eixo sai	108
	(l) Resposta da seção referente à L3 quando o 3º eixo sai	108
Figura 6.7	Respostas no instante em que o veículo H2044 deixa a ponte	
	(a) Resposta para saída de H2044 a 60 km/h	112
	(b) Resposta para saída de H2044 a 70 km/h	112
	(c) Resposta para saída de H2044 a 80 km/h	113
	(d) Resposta para saída de H2044 a 100 km/h	113
	(e) Resposta para saída de H2044 a 120 km/h	114

Figura 6.8	Respostas no instante em que o veículo HS1544 deixa a ponte	
	(a) Resposta para saída de HS1544 a 60 km/h	114
	(b) Resposta para saída de HS1544 a 70 km/h	115
	(c) Resposta para saída de HS1544 a 80 km/h	115
	(d) Resposta para saída de HS1544 a 100 km/h	116
	(e) Resposta para saída de HS1544 a 120 km/h	116
Figura 6.9	Respostas no instante em que o veículo HS2044 deixa a ponte	
	(a) Resposta para saída de HS2044 a 60 km/h	117
	(b) Resposta para saída de HS2044 a 70 km/h	117
	(c) Resposta para saída de HS2044 a 80 km/h	118
	(d) Resposta para saída de HS2044 a 100 km/h	118
	(e) Resposta para saída de HS2044 a 120 km/h	119
Figura 6.10	Respostas máximas obtidas em L3 para a passagem do veículo HS1544 a 80 km/h	120
Figura 6.11	Respostas máximas obtidas em L3 para a passagem do veículo HS1544 a 100 km/h	121
Figura 7.1	Funções de Resposta em Freqüência – acelerância em relação ao 3º eixo direito. Passagem do VP a 60 km/h por FR2. (Penner, 2000)	123
Figura 7.2	Funções de Resposta em Freqüência – acelerância em relação ao 3º eixo esquerdo. Passagem do VP a 60 km/h por FR2. (Penner, 2000)	124
Figura 7.3	Resposta no domínio da freqüência obtida durante a passagem do veículo (HS2044 a 80 km/h, no ponto central de L3)	126
Figura 7.4	Resposta no domínio da freqüência obtida depois da saída do veículo (HS2044 a 80 km/h, no ponto central de L3)	126
Figura 7.5	Resposta no domínio da freqüência obtida durante a passagem do veículo (HS2044 a 80 km/h, no ponto central de L3): modelo sem acoplamento	127
Figura 7.6	Resposta no domínio da freqüência obtida depois da saída do veículo ((HS2044 a 80 km/h, no ponto central de L3): modelo sem acoplamento	127
Figura 7.7	Primeira freqüência natural da estrutura: detalhe da Fig.(7.4)	129

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Características dos veículos	20
Tabela 2.2	Classificação da qualidade da pista	22
Tabela 5.1	Propriedades do material da estrutura	70
Tabela 5.2	Frequências naturais (Hz) da estrutura analisada	72
Tabela 5.3	Frequências naturais (Hz) da estrutura real	76
Tabela 5.4	Comparação entre as frequências naturais da estrutura e do sistema ponte/veículo acoplado (Hz)	77
Tabela 6.1	Valores de DAF obtidos para a travessia do veículo H2044	88
Tabela 6.2	Valores de DAF obtidos para a travessia do veículo HS1544	88
Tabela 6.3	Valores de DAF obtidos para a travessia do veículo HS2044	88
Tabela 6.4	Valores de DAF obtidos na entrada e saída da ponte - veículo H2044	109
Tabela 6.5	Valores de DAF obtidos na entrada e saída da ponte - veículo HS1544	109
Tabela 6.6	Valores de DAF obtidos na entrada e saída da ponte - veículo HS2044	109



## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES

### *Letras Latinas*

$M$	matriz de massa
$K$	matriz de rigidez
$C$	matriz de amortecimento
$M_v$	matriz de massa do veículo
$K_v$	matriz de rigidez do veículo
$C_v$	matriz de amortecimento do veículo
$M_1$	massa referente ao motor do veículo
$M_2$	massa referente à carroceria do veículo
$k_s$	rigidez da suspensão
$k_t$	rigidez do pneu
$c_s$	amortecimento da suspensão
$c_t$	amortecimento do pneu
$I\theta$	inércia à rotação transversal do veículo
$I\alpha$	inércia à rotação longitudinal do veículo
$z_{1...6}$	deslocamentos dos pontos do sistema de suspensão
$z'_{1...6}$	deslocamentos dos pontos de apoio do corpo do veículo
$Z_{1;2}$	deslocamentos das massas rígidas ( $M_1$ e $M_2$ )
$N$	funções de forma
$u$	deslocamento de um ponto da placa na direção x
$v$	deslocamento de um ponto da placa na direção y
$w$	deslocamento de um ponto da placa na direção z
$F_{ext}$	força externa
$F_{int}$	força de interação
$t$	tempo
$v$	velocidade de travessia do veículo
$S$	função densidade espectral (PSD)
$S(\gamma_0)$	coeficiente de rugosidade
$r(x)$	função rugosidade da pista

### *Letras Gregas*

$\theta_{1;2}$	rotação transversal das massas rígidas ( $M_1$ e $M_2$ )
$\alpha_{1;2}$	rotação longitudinal das massas rígidas ( $M_1$ e $M_2$ )
$\sigma; \varepsilon$	tensão / deformação normal à placa
$\tau; \gamma$	tensão / deformação transversal à placa
$\theta_x$	rotação de um ponto da placa em x
$\theta_y$	rotação de um ponto da placa em y
$\theta_z$	rotação de um ponto da placa em z
$\alpha, \beta$	coeficiente de estabilidade e precisão do método de Newmark
$\Delta t$	intervalo de tempo entre posições sucessivas do veículos
$\gamma$	número de ondas ou frequência espacial

### *Siglas*

DAF	coeficiente de amplificação dinâmica ( <i>dynamic amplification factor</i> )
FFT	transformada rápida de Fourier ( <i>Fast Fourier Transform</i> )

## *Resumo*

CASSOLA, Silmara (2005). *ANÁLISE DINÂMICA DA INTERAÇÃO ENTRE PONTE RODOVIÁRIA E VEÍCULOS PESADOS*. Tese de Doutorado (p.156). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O problema da interação dinâmica entre ponte rodoviária e veículo pesado tem sido, há pouco mais de uma década, tema de muitos estudos. O objetivo é considerar as ações dinâmicas de forma mais realista e definir novos critérios de projeto. Este trabalho contribui com um estudo teórico, por elementos finitos, sobre as respostas dinâmicas de pontes considerando a interação com as respostas do veículo. A interação entre ambos é tratada por meio do acoplamento das suas matrizes, e as respostas no tempo do sistema ponte/veículo acoplado são calculadas pelo método de Newmark. A estrutura é representada por elementos de placa de 9 nós e o veículo por modelo tridimensional com 7 e 11 graus de liberdade para veículos com 2 e 3 eixos, respectivamente. Os modelos são elaborados com dimensões e características de estruturas reais. A travessia do veículo é representada pela mudança de posição dos pneus de nó em nó do modelo da estrutura. Para cada posição do veículo são obtidas as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema acoplado, desde a entrada do 1º eixo até a saída do último. As respostas são calculadas para diversas condições de operação simuladas pela combinação de diferentes peso e velocidade do veículo com diferentes rugosidades da pista. Os resultados numéricos se mostraram coerentes com os resultados de análises dinâmicas realizadas experimentalmente, obtidos na literatura, e possibilitaram visualizar alguns dos problemas observados em pontes reais.

**Palavras-chaves:** *ponte rodoviária, veículo pesado, interação dinâmica, elementos finitos, placa*

## *Abstract*

CASSOLA, Silmara (2005). **DYNAMIC ANALYSIS BETWEEN HIGHWAY BRIDGE AND HEAVY VEHICLE.** PhD Thesis (p.156). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Since the past decade, the problem of interaction between vehicle and structure responses has been object of many studies. The objectives are to consider the dynamic loads in a more realistic way and to define new design criteria aiming safety and economy. In this thesis, a theoretical investigation on the dynamic response of highway bridge submitted to heavy vehicle, using the finite elements method, is presented. This analysis considers the interaction between vehicle response and structure response through the coupling matrices of both. The detailed models are idealized with magnitude and characteristics of real structures. The bridge is idealized with plate elements of 9 nodes, and the vehicle, with a three-dimensional model. The traffic is considered by changing tires' position node by node on bridge model, hence the mass, stiffness and damping matrices are updated in agreement with the position of the vehicle. It allows the evaluation of the behavior of the structure from the first axle entrance to last axle exit. The applied forces to the structure are related, besides to the dynamic characteristics of the vehicle, to its speed and the surface irregularities. The time-dependent responses are calculated by Newmark's method. The numeric results have allowed the visualization some of the observed problems in real bridges.

**Key words:** highway bridge, *heavy vehicle*, *dynamic interaction*, *finite elements*, *plate*



# *CAPÍTULO 1*

## *Introdução*

O efeito dinâmico resultante da passagem de veículos pesados sobre estruturas de ponte rodoviária é um problema que preocupa pesquisadores no mundo inteiro. Desde a última década, em países de todos os continentes, tem sido registrada quantidade excessiva de problemas estruturais em pontes antes do tempo previsto. Análises de campo mostraram que mesmo sob tráfego normal, em muitos casos, as vibrações resultavam em tensões e deformações maiores do que aquelas calculadas em projeto. Em projetos de pontes rodoviárias, as forças dinâmicas são consideradas majorando as cargas estáticas de um coeficiente denominado “fator de amplificação dinâmica” – DAF (*Dynamic Amplification Factor*). Este valor é determinado em relação apenas ao comprimento do vão da ponte, como estabelece a maioria das normas, inclusive a brasileira (NBR 7187:2003).

A investigação das causas e das possíveis soluções desta deficiência prematura revelou que, no caso das pontes antigas, o problema tem origem no aumento do tráfego, mais intenso e pesado do que o existente na época da construção. No caso das pontes novas, a

tecnologia dos modernos materiais, leves e resistentes, aliada aos potentes métodos de cálculo estrutural têm permitido a construção de estruturas mais esbeltas e flexíveis, portanto susceptíveis às cargas dinâmicas.

O exemplo mais recente desta tendência é a Ponte Millau sobre o Rio Tarn, na França, inaugurada em dezembro de 2004. A estrutura de 2,5 km de extensão está apoiada em apenas 7 pilares (Fig.1.1). O ponto mais alto está a 343 m de altura.



fonte: [www.viaducdemillaueiffage.com](http://www.viaducdemillaueiffage.com)

Figura (1.1): Ponte sobre o Rio Tarn (França)

No Brasil, a segunda pista da rodovia dos Imigrantes, inaugurada em dezembro de 2002, é considerada a mais importante e complexa obra de engenharia do país neste início do século. As novas pontes e viadutos (Fig.(1.2), à esquerda) apresentam vãos de até 90 m, ou seja, o dobro da extensão da primeira pista, construída há 29 anos (Fig.(1.2), à direita).



fonte: [www.ecovias.terra.com.br/duplicação.asp](http://www.ecovias.terra.com.br/duplicação.asp)

Figura (1.2): Trecho da rodovia dos Imigrantes (Brasil)  
à esquerda: nova pista; à direita: pista antiga

Para avaliar as condições de segurança das estruturas novas e antigas, muitos trabalhos teóricos e experimentais vêm sendo elaborados. De acordo com a norma NBR 9607, as etapas preliminares de investigação de uma estrutura de concreto devem ser:

1. Análise do projeto: verificação dos valores máximos admitidos para os esforços e deslocamentos nas seções críticas;
2. Inspeção visual: busca por defeitos ou patologias originadas durante a construção e/ou operação;
3. Investigação teórica: simulações por modelos numéricos de diversas condições de carregamento, e comparação com os valores definidos em projeto.

Se os resultados teóricos forem insuficientes para o entendimento do comportamento da estrutura, a norma NBR 6118 recomenda que sejam executados ensaios experimentais (provas de carga). Em ambas análises, é imprescindível que as condições de estudo, em campo ou laboratório, correspondam às condições reais. No caso das pontes rodoviárias, estas análises apresentam uma grande dificuldade, pois as estruturas são muito grandes e destinadas a suportar um carregamento móvel. A análise em campo exige equipamentos e técnicas especializadas, e a análise teórica

requer modelos que reproduzam as forças dinâmicas originadas pelo tráfego, o qual é aleatório e desconhecido a priori.

De modo geral, os autores concordam que as forças dinâmicas originadas pelo tráfego estão relacionadas ao tipo do veículo (peso, número de eixo), às condições de travessia (velocidade, faixa de rolamento), à qualidade da pista (degrau na entrada da ponte, irregularidade na superfície), e também às suas características dinâmicas, o que resulta na interação entre as respostas de ambos. A principal dificuldade encontrada para a investigação do problema da interação entre ponte e veículo é a elaboração de modelos que englobem de maneira sistemática os principais parâmetros envolvidos na composição das forças atuantes. Recentes pesquisas encontradas na literatura contornaram esta dificuldade utilizando modelos bastante simples para representar a ponte e/ou o veículo, ou ainda desprezavam um ou mais parâmetros envolvidos. No entanto, a investigação da integridade estrutural, bem como a definição de novos critérios de projeto dependem de modelos aprimorados, que considerem as ações dinâmicas de forma mais realista.

### **1.1. OBJETIVOS**

Dentro do contexto apresentado, os objetivos deste trabalho são:

Objetivos Gerais:

Apresentar um estudo teórico, por elementos finitos, sobre o comportamento dinâmico de ponte rodoviária submetida a carga móvel pesada. Pretende-se avaliar a resposta dinâmica da estrutura sob diferentes condições de operação, tais como o tráfego de veículos de diferentes pesos e velocidades.



### Objetivos Específicos:

Tratar o problema da interação entre as respostas da ponte e do veículo por meio do acoplamento das suas equações de movimento, o que permite considerar que ambos compõem um único sistema. A originalidade da proposta deste trabalho consiste na análise das respostas dinâmicas calculadas no tempo por meio de modelos abrangentes que são acoplados de forma a representar com detalhes a passagem do veículo. Esta análise é particularmente interessante porque nos casos em que as dimensões do veículo são relevantes em relação à estrutura, este não é apenas fonte de excitação, mas juntos compõem um único sistema, cujas matrizes variam de acordo com a posição do veículo sobre a ponte durante o tempo de travessia.

## 1.2 METODOLOGIA

Nesta pesquisa, os modelos são elaborados com dimensões e características de estruturas reais. A travessia do veículo é representada pela mudança de posição dos pneus de nó em nó do modelo da ponte. Dois modelos tridimensionais, com 7 e 11 graus de liberdade, foram escolhidos para representar veículos com 2 e 3 eixos, respectivamente. A ponte é idealizada por elementos de placa de 9 nós, formulados de acordo com a teoria de Mindlin-Reissner. Desta forma, é possível incluir os modos de torção da estrutura provocados pelos deslocamentos transversais do veículo. Além disso, o nó no centro do elemento permite uma maior proximidade entre consecutivas posições do veículo, portanto menor intervalo de tempo sem refinamento desnecessário da malha. Para cada posição do veículo são obtidas as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema acoplado, desde a entrada do 1º eixo até a saída do último. A interação entre as respostas de ambos é tratada por meio do acoplamento das suas matrizes, e considera as forças relacionadas à velocidade de passagem do veículo e à irregularidade da pista.

As respostas no tempo são calculadas pelo método de Newmark e comparadas com as respectivas respostas estáticas. Esta comparação é útil para verificar se os resultados calculados com o modelo proposto estão coerentes com a norma e também com os resultados encontrados na literatura. A diferença entre as respostas dos modelos do sistema ponte/veículo acoplado e desacoplado é brevemente investigada por meio das respostas no domínio da frequência, obtidas a partir da FFT (*Fast Fourier Transform*) das respostas no tempo.

As etapas da elaboração desta pesquisa estão divididas nos capítulos descritos a seguir.

Os principais trabalhos referentes ao problema de vibrações em pontes são apresentados no próximo capítulo. Inicialmente são discutidas as preocupações atuais e relatados alguns casos reais de acidentes em pontes por causa de falha no cálculo das cargas dinâmicas. Dentro deste contexto, é apresentada a evolução das pesquisas, as quais tornam-se cada vez mais complexas à medida que tratam mais detalhadamente dos parâmetros envolvidos no comportamento dinâmico de pontes. Este capítulo apresenta também as características do modelo escolhido para representar o veículo, e também a formulação utilizada pela maioria dos autores para representar matematicamente os efeitos das irregularidades da pista.

O capítulo 3 discute os trabalhos elaborados na última década destinados particularmente ao tratamento da interação dinâmica. São enfatizados os dois processos mais comuns: sem acoplamento dos modelos, e com acoplamento. Por fim, são descritos os critérios aplicados para obter a equação de movimento do sistema acoplado envolvendo os diferentes parâmetros relevantes na análise dinâmica.

O capítulo 4 descreve a formulação do elemento de placa utilizado no programa de cálculo do modelo da ponte.

O capítulo 5 apresenta as características da estrutura real de ponte escolhida para a análise, bem como os detalhes do modelo de elementos finitos elaborado para a simulação numérica.

O capítulo 6 discute os resultados obtidos para diferentes situações da passagem do veículo simuladas com diferentes parâmetros. Nesta primeira análise, são considerados três tipos de veículos trafegando com diferentes velocidades, e a qualidade da pista é considerada muito boa. As respostas calculadas são comparadas com resultados relatados em trabalhos experimentais encontrados na literatura, e foi observada uma boa concordância. Em seguida, a influência das irregularidades da pista na resposta dinâmica da ponte é avaliada.

O capítulo 7 apresenta uma breve análise das respostas no domínio da frequência, calculadas a partir da FFT das respostas no tempo. Os espectros de frequência são obtidos em duas diferentes situações de carregamento: (i) enquanto o veículo atravessa a ponte e (ii) após a travessia. Os resultados obtidos com o modelo acoplado são comparados com aqueles obtidos sem considerar o acoplamento entre os modelos da ponte e do veículo. Esta comparação permite avaliar a importância de se considerar o sistema acoplado na análise dinâmica do comportamento de estruturas de ponte submetida a carga móvel pesada.

O último capítulo apresenta as conclusões da tese e discute a proposta de continuidade desta pesquisa.



## *CAPÍTULO 2*

### *Fundamentos Teóricos*

A avaliação e o projeto de estruturas apresentam dois aspectos essenciais: análise do comportamento da estrutura sob carregamento e definição dos níveis de segurança. No caso de pontes, um número crescente de pesquisas vêm sendo realizadas com o objetivo de melhorar os métodos de análise. A preocupação atual com a qualidade das estruturas está relacionada principalmente em garantir segurança aos usuários e também em evitar os altos custos de recuperação. Atualmente, os pesquisadores dispõem de sofisticados métodos de cálculo e equipamentos para testes experimentais em laboratório ou campo, os quais permitem estudos com muita precisão. Este recente avanço na engenharia de pontes é o resultado da necessidade operacional da infraestrutura de transporte rodoviário, que envolve um grande número de estruturas, e reflete o desenvolvimento econômico da sociedade.

Para modernizar as normas de projeto das novas estruturas, bem como as técnicas para monitoramento das existentes, países como EUA (onde 89% das pontes cadastradas no NBI (*National Bridge Inventory*) são consideradas deficientes), Austrália, Canadá, Reino Unido e toda a

Europa, já há alguns anos estão investindo em pesquisas sobre o comportamento dinâmico das pontes. A maior destas investigações pode ter acontecido na Suíça (país montanhoso), onde foram realizados ensaios dinâmicos em 226 pontes entre 1958 e 1981 (Cantieni (1984)). Em 1996, o simpósio *The Safety Bridge* organizado pelo Instituto de Engenharia Civil (ICE) de Londres e pela agência rodoviária do Departamento de Transporte do Reino Unido, reuniu os principais trabalhos sobre segurança, normas de projeto e monitoramento de pontes. A legislação europeia recomendou que todas as pontes devessem ser avaliadas e adaptadas aos novos padrões até o final de 1998. Esta exigência resultou em um grande número de pesquisas que alteraram a filosofia de projeto e avaliação das estruturas (Das (1997)). Nos EUA, Wang et al.(2002) conduziu um estudo para detecção de falha e avaliação das pontes a pedido do FDOT (*Florida Department Of Transportation*). Este estudo foi realizado por meio de testes dinâmicos em campo e em laboratório, e também por modelos de elementos finitos.

No Brasil, a preocupação com o comportamento dinâmico das pontes é recente, mas vem ocupando cada vez mais espaço nos meios técnico e científico. Os estudos teóricos tratam basicamente da metodologia de cálculo da resposta dinâmica (El Debs (1990), Silva (1997), Bessa (2000)). Os trabalhos experimentais tratam especialmente da avaliação da integridade de estruturas novas, recém recuperadas e/ou que demonstram comportamento inadequado. Destes trabalhos, destacam-se as investigações relacionadas às pontes sobre o Rio Guandu/RJ (Almeida et al. (1998)) e sobre o Rio Piracicaba/SP (Almeida et al. (2000); Fusco (2000)) realizadas, entre outras, a pedido das concessionárias que administram estas rodovias. Os resultados destas investigações são apresentados por Penner (2000) para demonstrar a eficácia dos ensaios dinâmicos como método de avaliação do desempenho estrutural. Os dois casos destacados, discutidos a seguir, são exemplos de problemas relacionados à ação das cargas dinâmicas, observados em uma estrutura nova e em outra antiga.

Sobre o Rio Guandu, por onde passa uma das rodovias que liga os Estados de São Paulo e Rio de Janeiro, existem duas pontes independentes, uma para cada sentido do tráfego, com idade de aproximadamente 30 anos. Possuem 109 m distribuídos em 5 vãos e largura de 8,30 m. A inspeção visual mostrou a presença de ondulações na pista que causavam forte excitação nos veículos e resultavam em forças dinâmicas na estrutura muito maiores do que as previstas. Foi observado também que uma das pontes, na qual o volume e peso do tráfego eram maiores por causa do escoamento da produção siderúrgica, apresentava muito mais fissuras do que a outra. Nos resultados deste estudo, é possível verificar a influência das irregularidades da pista e do tráfego pesado sobre o comportamento dinâmico de uma estrutura antiga.

A ponte sobre o Rio Piracicaba, localizada no interior do Estado de São Paulo, é composta por 3 vãos com comprimentos de 35,75 m para o do meio e 40,375 m para os demais, e 14,50 m de largura. Foi entregue ao tráfego normal em fevereiro de 2000, e com apenas 2 meses em operação começou a apresentar fissuras no pavimento. A análise do projeto revelou que os esforços de tração na face superior do pavimento, originados das forças dinâmicas do tráfego, eram maiores do que aqueles previstos em projeto. Este caso demonstra que até mesmo estruturas novas estão sujeitas aos problemas de vibrações excessivas.

As características físicas (geometria e dimensões) e o comportamento dinâmico peculiar da ponte sobre o Rio Piracicaba, registrado em ensaios de campo e disponível na literatura, tornaram-na interessante para servir de referência ao modelo numérico desenvolvido nesta pesquisa. Os detalhes da modelagem desta estrutura por elementos finitos são apresentados no capítulo 5.

Para entender a importância destes estudos, bem como as dificuldades encontradas e os interesses atuais, a seguir serão apresentados alguns dos trabalhos pioneiros relacionados ao estudo do comportamento dinâmico de pontes.



## 2.1 REVISÃO DOS ESTUDOS SOBRE DINÂMICA DE PONTES

O comportamento dinâmico de pontes é estudado desde a construção das primeiras pontes ferroviárias na metade do século XIX. Em geral, os estudos eram realizados depois do colapso de alguma ponte (O'Connor e Shaw (2000)). Um destes estudos foi conduzido para esclarecer as causas do desastre da Ponte sobre o rio Tay (Austrália). A ponte de 3122 m entrou em operação em maio de 1879, sete meses depois, em 28 de dezembro, uma hora após uma tempestade com fortes ventos passar pelo local, ocorreu o colapso. O trem com 75 passageiros que a atravessava caiu, não houve sobreviventes. O inquérito oficial concluiu que a ponte fora “mal projetada, mal construída e mal inspecionada”. O projetista afirmou que os fortes ventos foram a causa do colapso. Pesquisas posteriores apontaram que as cargas horizontais provocadas pelo vento somadas a defeitos nos pilares foram a causa principal, agravada pelo peso do tráfego. Mas a principal conclusão foi que nos projetos de pontes, vidas estão envolvidas.

Décadas depois, foi publicado o primeiro artigo importante sobre o problema dinâmico de pontes rodoviárias. Este estudo foi realizado pelo Comitê Especial da Sociedade Americana de Engenheiros Civis (ASCE, 1931) com o objetivo de estabelecer a base para as normas de projeto. Mas não foi suficiente para impedir que em 7 de novembro de 1940, a Ponte Tacoma Narrows (EUA) entrasse em colapso por instabilidade aerodinâmica. Desde então, muitos trabalhos foram feitos na tentativa de se entender o comportamento dinâmico das pontes.

De acordo com Paultre et al. (1992), a maioria destes estudos realizados no começo do século XX tinham o objetivo de obter as propriedades dinâmicas das estruturas. O trabalho de revisão destes artigos realizado por Wright e Green (1959) mostrou que as normas de projeto nem sempre previam as respostas às vibrações originadas sob o tráfego normal. Esta também foi a conclusão dos estudos teóricos

realizados por Fleming e Romualdi (1961), Walter e Veletsos (1963), Smith (1969), Whitmore (1970). Estes estudos tinham o objetivo de identificar quais os parâmetros que mais influenciam a resposta dinâmica das pontes. Concluíram que as irregularidades na pista são a principal causa das amplificações dinâmicas, mas também, peso, velocidade e características dinâmicas dos veículos e da estrutura são relevantes.

Nos anos 80, estudos teóricos sobre os efeitos dos principais parâmetros relacionados à resposta das pontes (Palamas et al. (1985); Imbanhatan e Wieland (1987); Coussy (1989)) e estudos experimentais sobre a identificação e quantificação de falhas em pontes (Cantieni (1983) (1984) (1987); Clawaert (1986); Kato e Simada (1986)) formaram a maior parte dos trabalhos realizados sobre o comportamento das pontes. Em todos os casos, foram destacadas a importância e a dificuldade na elaboração de modelos e métodos de previsão da resposta dinâmica que considerassem a interação dos parâmetros relevantes envolvidos. Os principais trabalhos sobre o assunto elaborados nos anos 90 tinham por objetivo o tratamento do problema da interação entre ponte e veículo (Bakht e Pinjakar (1989); Hwang e Nowak (1991); Barefoot et al. (1997); Kirkegaard (1998)).

Embora seja um assunto discutido há mais de uma década, a análise que considera todos ou mesmo a maioria destes parâmetros não é uma tarefa simples, e ainda não há um acordo sobre como tratar o comportamento dinâmico de pontes sob cargas móveis. Atualmente, muitas pesquisas sobre o problema da interação ponte/veículo estão voltadas para o aprimoramento de modelos e métodos para o cálculo da resposta dinâmica. A próxima seção apresenta alguns dos trabalhos que demonstram a evolução nesta área. Em seguida são descritos os detalhes do modelo tridimensional, utilizado pela maioria dos autores, para representar o veículo de forma mais realista. A formulação aplicada para considerar as irregularidades da pista na análise dinâmica de pontes rodoviárias, também é discutida.



## 2.2 EVOLUÇÃO DO CÁLCULO DA RESPOSTA DINÂMICA DE PONTES

Em ambos estudos citados, experimental e/ou analítico, é evidente a exigência de um modelo numérico conveniente e confiável para a previsão da resposta dinâmica da ponte. Com o objetivo de englobar os parâmetros que governam o comportamento dinâmico, modelos cada vez mais complexos para a ponte e para o veículo, e métodos de cálculo mais eficazes foram desenvolvidos.

Até metade do século XX, praticamente apenas os métodos contínuos eram utilizados, portanto os estudos eram feitos com modelos muito simples, como o de viga biapoçada (Timoshenko (1922)). A introdução dos métodos numéricos e a evolução do cálculo digital possibilitaram a análise mais detalhada da influência do veículo na resposta da ponte (Walter e Veletsos (1966)). Desde então, vários modelos foram desenvolvidos para representar a ponte, modelos de viga de vão simples (El Debs (1990); Green e Cebon (1997)) ou múltiplos vãos (Palamas (1985); Chatterjee et al. (1994)) eram eficientes para estudar qualitativamente as características da ponte, mas apresentavam muitas limitações. Modelos de grelha (Zeng (1999)) ou placa (Fafard et al. (1998); Marchesiello (1999)) representavam melhor a estrutura com a inclusão dos modos de torção, mas estes modelos bidimensionais foram utilizados somente em estudos de pontes de vão simples. Ao mesmo tempo, os modelos para o veículo também evoluíram. No início eram considerados como força móvel e massa móvel (Ibanathan e Wieland (1987); El Debs (1990)). Mais tarde, foram incluídos sistemas de múltiplas massas, com vários eixos (Wang et al. (1996); Fafard et al. (1998); Zeng (2000)) que consideravam movimento tridimensional. Em geral, a velocidade de travessia dos veículos era constante, mas os efeitos de aceleração e frenagem também foram discutidos (Chompooming e Yener (1995)).

### 2.3 MODELO DO VEÍCULO

A simulação do comportamento dinâmico de veículos, no processo de análise da segurança e conforto dos passageiros, é realizada por meio de modelos matemáticos complexos, com muitos graus de liberdade. Neste caso, as partes referentes à cabine, ao motor, à carroceria e aos eixos são idealizadas por massas discretas conectadas ao chassi por molas e amortecedores. O modelo do chassi é discretizado em elementos de viga, permitindo deslocamentos verticais, horizontais e rotações.

Para análise das vibrações produzidas pelo tráfego, o corpo do veículo e os eixos podem ser tratados como elementos rígidos, o que simplifica o modelo. O código europeu (Eurocode), para determinação das cargas de tráfego sobre pontes, permite que a conexão entre os eixos e o chassi seja negligenciada e os modelos dos veículos sejam simplificados como um quarto de carro (*quarter-car model*), como mostra a Fig.(2.1). O corpo, conectado aos eixos pelo sistema de suspensão, fica isolado das vibrações provocadas pelas irregularidades da pista, e é tratado como massa suspensa ( $m_0$ ). O sistema de suspensão é representado por massa ( $m_1$  e  $m_2$ ), mola ( $k_1$  e  $k_2$ ) e amortecedor ( $c_1$  e  $c_2$ ), e os pneus, por mola ( $k_3$  e  $k_4$ ) e amortecedor ( $c_3$  e  $c_4$ ) (Lombaert (2001)).

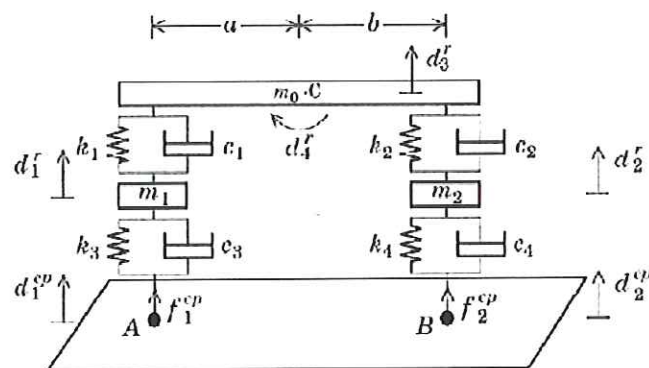


Figura (2.1): Modelo 2D e 4 GL para veículo de 2 eixos

No entanto, os modelos bidimensionais de veículo não incluem os movimentos de rotações transversais. Nos casos em que as irregularidades da pista não são relevantes, as contribuições deste movimento podem ser desprezadas. Caso contrário, para incluir os efeitos das rotações transversais, a análise deve ser feita por modelos tridimensionais (Lombaert (2001)).

Neste trabalho, para representar adequadamente o sistema dinâmico do veículo, foram escolhidos dois modelos tridimensionais:

1. 2 eixos e 7 graus de liberdade: para os veículos H1544 e H2044;
2. 3 eixos e 11 graus de liberdade: para os veículos HS1544 e HS2044.

Estes modelos correspondem aos veículos utilizados pela AASHTO (*American Association of State Highway and Transportation Officials*) para o projeto de pontes. As denominações **H** e **HS** distinguem os veículos com dois e três eixos, respectivamente. Os dois primeiros dígitos seguintes indicam o peso bruto em toneladas, e o índice “44” está relacionado ao ano de edição da norma de projeto, 1944.

Embora a norma brasileira apresente recomendações sobre os veículos utilizados para projetos de pontes, os modelos da AASHTO foram utilizados pela maioria dos trabalhos que representavam os veículos por modelos tridimensionais. Assim, muitas informações estavam disponíveis na literatura. Além disso, as características destes modelos são bastante similares aos veículos utilizados nos testes em campo realizados no Brasil, descritos por Penner (2000).

O esboço dos veículos e a distribuição da carga por eixo estão apresentados nas Fig.(2.2) e Fig.(2.3).

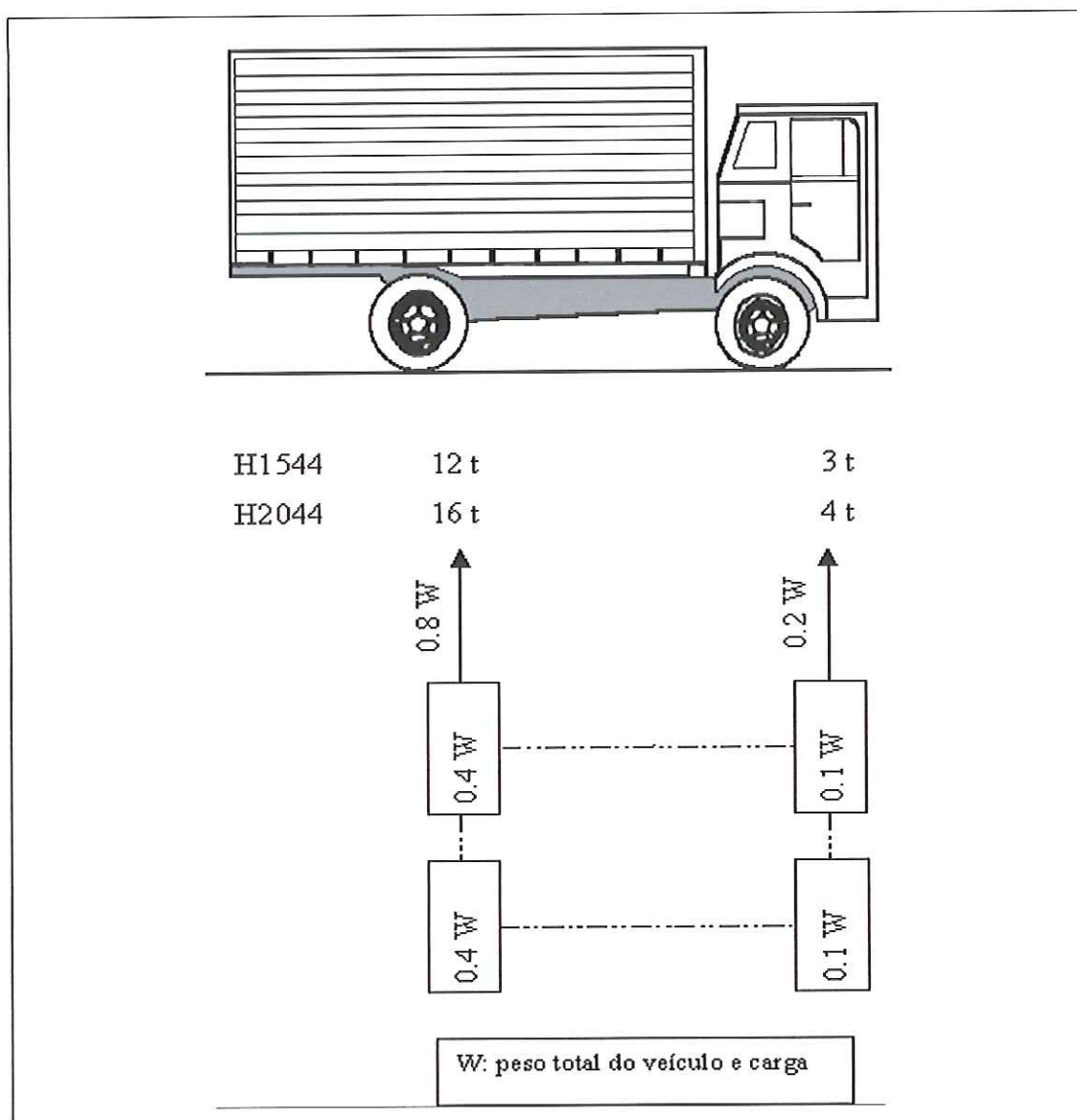


Figura (2.2): Esquema de um veículo de 2 eixos e distribuição da carga



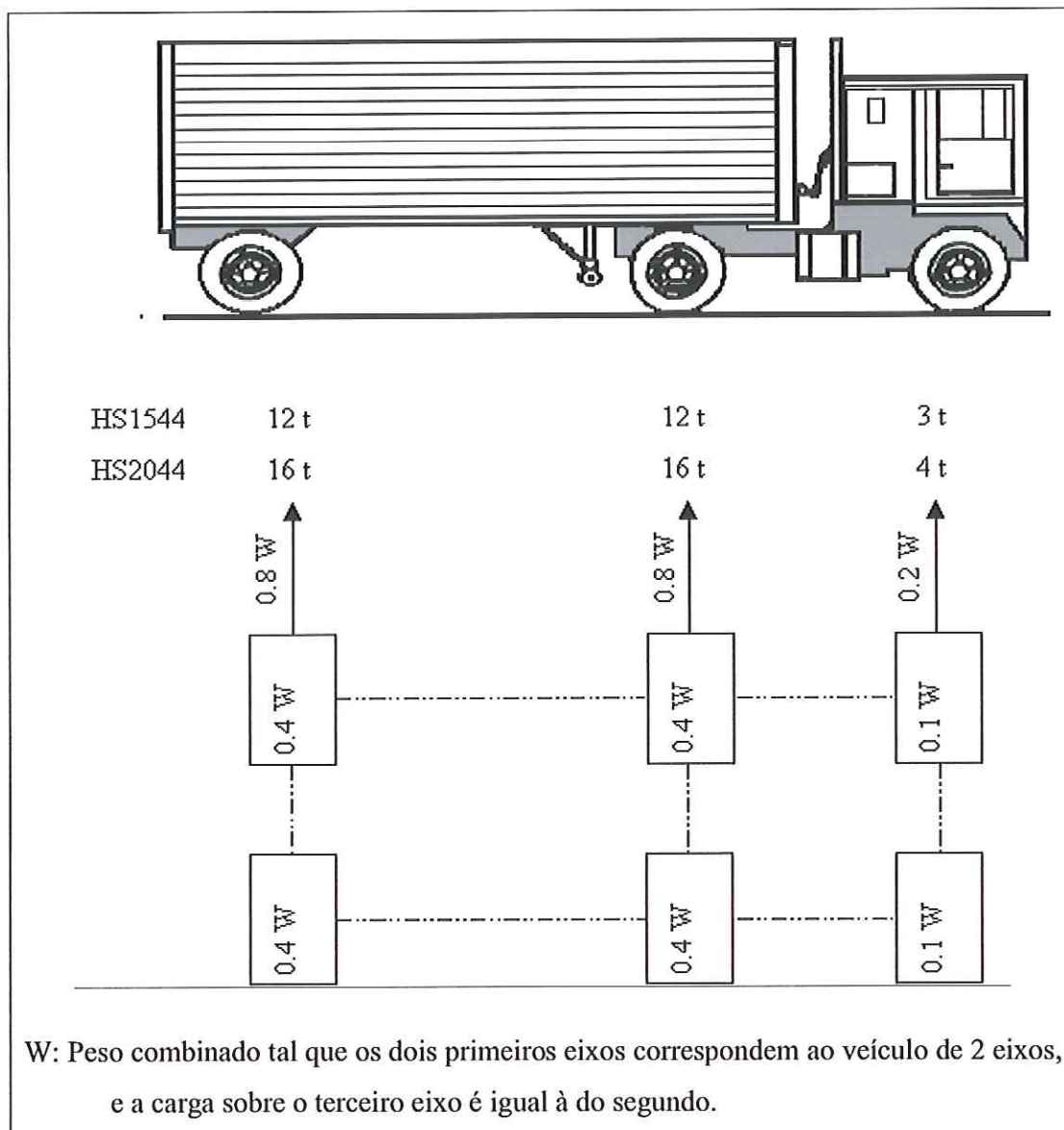


Figura (2.3): Esquema de um veículo de 3 eixos e distribuição da carga

A parte do motor ( $M_1$ ) e da carroceria ( $M_2$ ) são considerados como duas massas rígidas, cada qual apresentando um deslocamento vertical ( $Z_1$  e  $Z_2$ ), rotação sobre o eixo transversal ( $\theta_1$  e  $\theta_2$ ), e rotação sobre o eixo longitudinal ( $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ). O sistema de suspensão de cada eixo é modelado como um sistema mola/amortecedor e seis massas discretas, cada uma com um deslocamento vertical ( $z_i$ ,  $i=1 \dots 6$ ). Os pontos de apoio do corpo do veículo possuem um deslocamento vertical ( $z'_i$ ,  $i=1 \dots 6$ ). A Figura (2.4) mostra os detalhes do modelo maior. As propriedades dos veículos estão organizadas na Tabela (2.1).

Com a condição de que 3 pontos determinam um plano, os outros deslocamentos e rotações são relacionados às coordenadas básicas:

$$z'_6 = z'_1 - z'_2 + z'_5 \quad (2.1a)$$

$$Z_1 = (b_1 - a_2) z'_2 + b_2 z'_1 + a_2 z'_5 \quad (2.1b)$$

$$Z_2 = d_2 c_1 z'_3 + a_1 c_2 z'_1 + a_2 c_2 z'_5 + d_1 c_1 z'_4 + H_0 \quad (2.1c)$$

$$\theta_1 = \frac{z'_2 - z'_1}{lb} \quad (2.1d)$$

$$\alpha_1 = \frac{z'_2 - z'_5}{la} \quad (2.1e)$$

$$\theta_2 = \frac{a_1(z'_3 - z'_2) + a_2(z'_4 - z'_5) - H_0}{lc} \quad (2.1f)$$

$$\alpha_2 = \frac{z'_3 - z'_4}{ld} \quad (2.1g)$$

O vetor deslocamento é definido pelas coordenadas básicas:

$$Z_v = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5\}^t \quad (2.2)$$

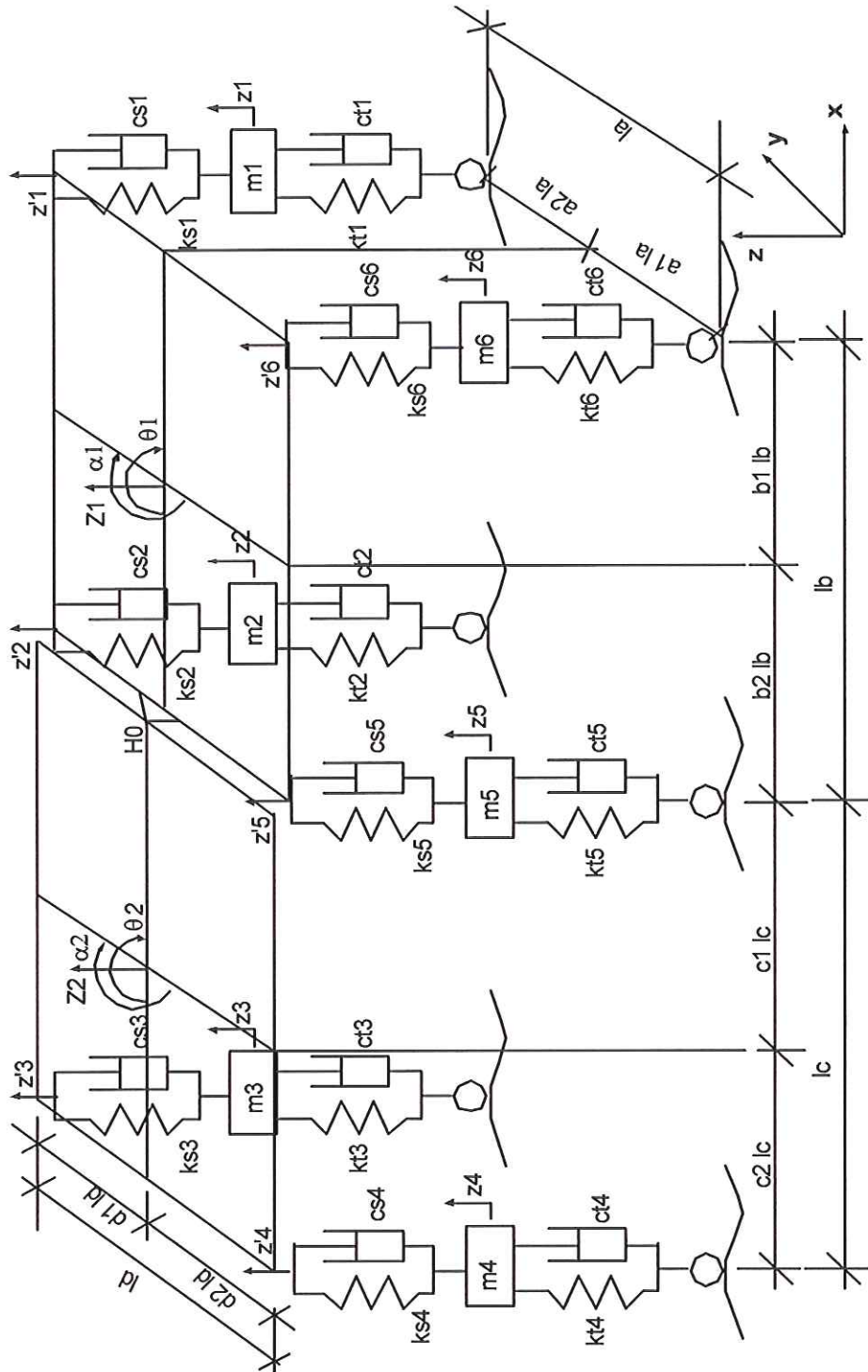


Figura (2.4): Modelo do veículo

Tabela (2.1): Características dos veículos

	H1544 2 eixos 15 t	H2044 2 eixos 20 t	HS1544 3 eixos 27 t	HS2044 3 eixos 36 t
$m_1=m_6$ (kg)	250	250	250	250
$m_2=m_5$ (kg)	1 000	1 000	1 000	1 000
$m_3=m_4$ (kg)	-	-	1 000	1 000
$M_1$ (kg)	12 683	16 910	2 492	3 323
$M_2$ (kg)	-	-	20 866	27 821
$ks_1=ks_6$ (kN/m)	4 000	4 000	4 000	4 000
$kt_1=kt_6$ (kN/m)	2 250	2 250	2 250	2 250
$ks_2=ks_5=kt_2=kt_5$ (kN/m)	8 000	8 000	8 000	8 000
$ks_3=ks_4=kt_3=kt_4$ (kN/m)	-	-	8 000	8 000
$cs_1=cs_2=cs_5=cs_6$ (kN.s/m)	2 000	2 000	2 000	2 000
$ct_1=ct_2=ct_5=ct_6$ (kN.s/m)	2 000	2 000	2 000	2 000
$cs_3=cs_4=ct_3=ct_4$ (kN.s/m)	-	-	2 000	2 000
$I_{\theta 1}$ (kg. m <sup>2</sup> )	1 800	2 400	10 541	14 055
$I_{\alpha 1}$ (kg. m <sup>2</sup> )	6 750	9 000	831	1 108
$I_{\theta 2}$ (kg. m <sup>2</sup> )	-	-	18 700	24 934
$I_{\alpha 2}$ (kg. m <sup>2</sup> )	-	-	6 955	9 274
$b_1$	0,65	0,65	0,30	0,30
$b_2$	0,35	0,50	0,70	0,70

$l_a=1,83$  m;  $l_b=4,27$  m;  $l_c=4,27$  m;  $l_d=1,83$  m

$a_1=0,50$ ;  $a_2=0,50$ ;  $c_1=0,50$ ;  $c_2=0,50$ ;  $d_1=0,50$ ;  $d_2=0,50$



## 2.4 MODELO DA RUGOSIDADE DA PISTA E ENTRADA DA PONTE

De acordo com Paultre et al. (1992), a maioria dos testes experimentais revelou que um dos fatores de maior influência na resposta dinâmica de ponte é a irregularidade da superfície pista. As observações indicaram que as forças dinâmicas mais importantes ocorrem na entrada da ponte. Estudos teóricos realizados no final dos anos 80 com modelos refinados que incluíram a rugosidade em sua formulação, apresentavam as mesmas conclusões, e também que a resposta dinâmica podia ser 2 a 3 vezes maior do que aquelas calculadas por modelos que não incluíram a rugosidade em sua formulação. Desde então, a inclusão deste parâmetro de caráter não determinístico tornou-se essencial para uma análise mais realista do comportamento dinâmico de pontes. A seguir, o equacionamento do modelo da rugosidade será descrito resumidamente.

Os efeitos da entrada e rugosidade da pista podem ser tratados considerando o perfil do pavimento como um processo aleatório modulado periodicamente descrito por uma função densidade espectral (PSD) (Wang (1996), Fafard et al. (1998), Zeng (2000), Song et al. (2002)), dada por:

$$S(\gamma) = S(\gamma_0) \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{-2} \quad (2.3)$$

na qual,  $S(\gamma)$  é o valor da função PSD ( $\text{m}^2/\text{ciclo}/\text{m}$ ) para o cálculo do pavimento;  $\gamma$  é o número de ondas ou frequência espacial ( $\text{ciclo}/\text{m}$ );  $\gamma_0$  é a frequência de descontinuidade igual a  $1/2\pi$  ( $\text{ciclo}/\text{m}$ ); e  $S(\gamma_0)$  é o coeficiente de rugosidade ( $\text{m}^2/\text{ciclo}/\text{m}$ ) que define a qualidade da pista, como mostra a Tabela (2.2) conforme as especificações da *International Organization for Standardization* (ISO):

Tabela (2.2): Classificação da Qualidade da Pista

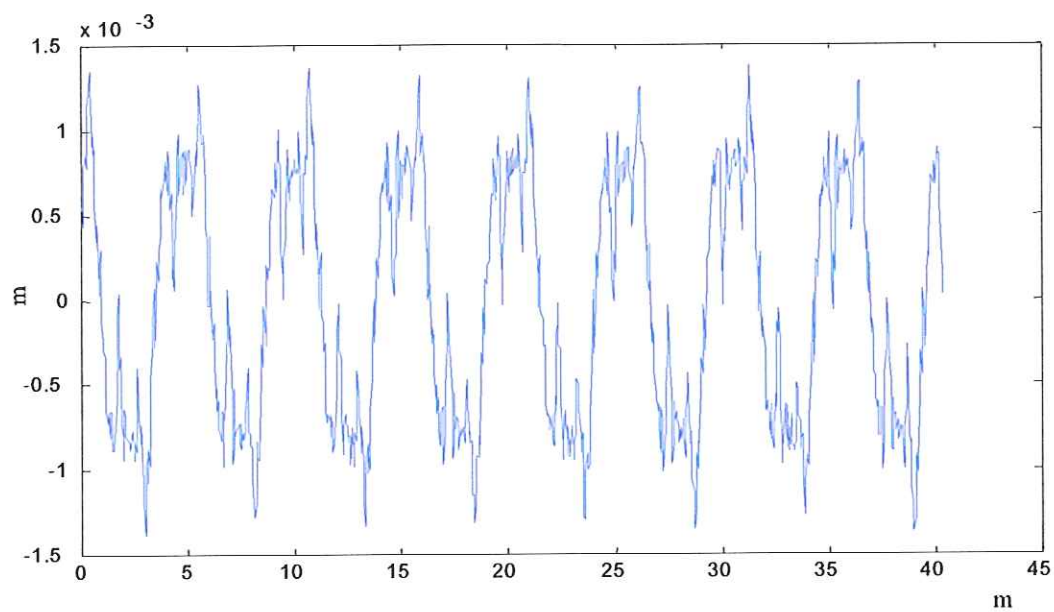
$S(\gamma_0)$	qualidade da pista
$5 \times 10^{-6}$	muito boa
$20 \times 10^{-6}$	boa
$80 \times 10^{-6}$	regular
$260 \times 10^{-6}$	ruim

De acordo com Law e Zhu (2004), as especificações ISO 8606 mostram que a rugosidade da pista no domínio do tempo podem ser simuladas aplicando a transformada rápida de Fourier sobre  $S(\gamma)$ , e uma amostra do perfil do pavimento pode ser obtida por:

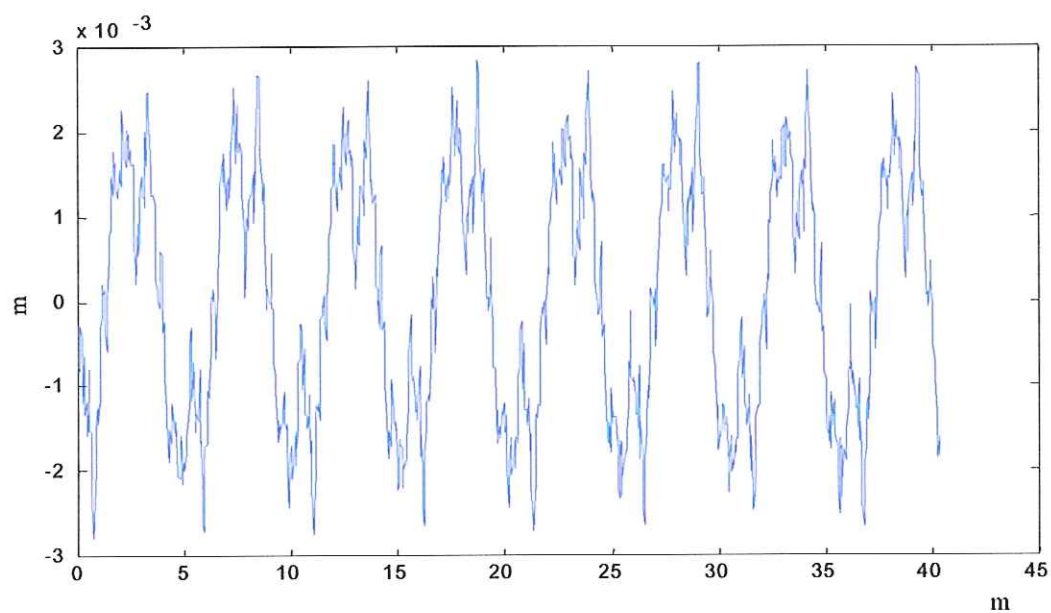
$$r(x) = \sum_{n=1}^N \sqrt{2S(f_n)\Delta f} \cos(f_n x + \theta_n) \quad (2.4)$$

na qual,  $N$  define o número de pontos gerados;  $f_n = (n-1/2)\Delta f$  é a  $n$ -ésima frequência;  $\Delta f$  é o incremento de frequência; e  $\theta_n$  é o ângulo de fase aleatório, uniformemente distribuído de 0 a  $2\pi$ .

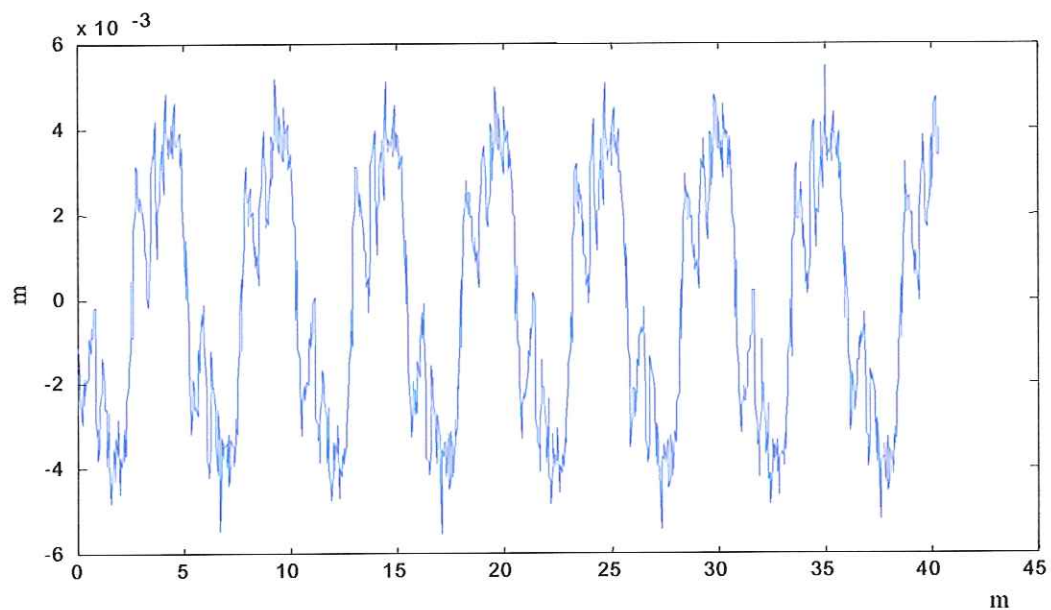
As Figuras (2.4a) a (2.4d) mostram as amostras de perfis de acordo com a classificação da pista. A entrada da ponte é modelada pelo mesmo processo, e a saída é considerada uma superfície lisa.



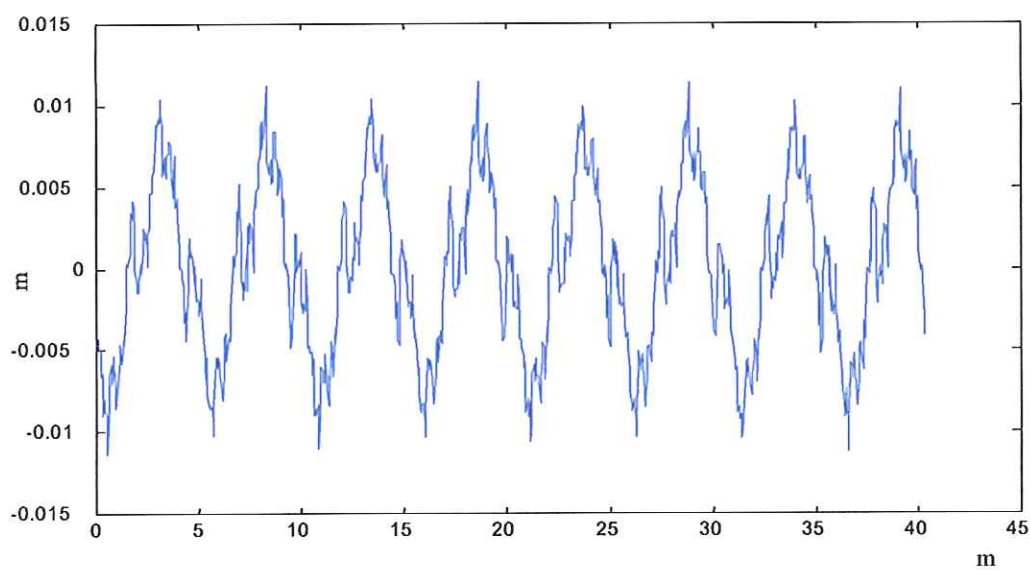
(a) qualidade muito boa



(b) qualidade boa



(c) qualidade regular



(d) qualidade ruim

Figura (2.5): Amostra de perfis da pista



## 2.5 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES CONSIDERANDO A INTERAÇÃO DINÂMICA

No estudo da interação, o desafio é definir de que maneira tratar o acoplamento das equações de movimento da ponte e do veículo. Por causa da quantidade de variáveis envolvidas e das limitações dos métodos matemáticos e equipamentos disponíveis, não há um acordo sobre como tratar o problema da interação, o qual é ainda recentemente tema de muitas pesquisas. Neste trabalho, os modelos de elementos finitos para a ponte e para o veículo, concebidos com base em dimensões reais, são acoplados formando um único sistema.

Para a análise dinâmica de um sistema elaborado por elementos finitos, os métodos de solução mais utilizados são: Integração Direta e Superposição Modal. A expressão 'integração direta' significa que as equações permanecem inalteradas antes da integração numérica, ao contrário do método da superposição modal. Neste caso, antes do processo de integração, o conjunto das equações de equilíbrio é transformado em uma forma menor por uma mudança de base dos deslocamentos nodais generalizados, em geral aplicando os menores autovalores e correspondentes autovetores.

O objetivo da integração numérica das equações de equilíbrio do sistema de elementos finitos é calcular a resposta mais próxima da resposta real da estrutura em estudo. Nos casos em que alguns poucos modos são suficientes para representar adequadamente a resposta dinâmica, a segunda técnica é interessante pois permite reduzir o sistema e por conseguinte, o tempo de cálculo. No entanto, o acoplamento das matrizes do modelo gera diferentes sistemas para cada posição do veículo, e assim seria necessária a obtenção dos parâmetros modais em cada intervalo de tempo, o que tornaria o processo mais trabalhoso. Neste caso, é apropriado aplicar um dos métodos de integração direta.

Basicamente, os deslocamentos, velocidades e acelerações são calculados dentro do intervalo de tempo  $\Delta t$ . De acordo com as hipóteses

de cálculo, os métodos de integração direta são denominados: Método da Diferença Central; Método de Houbolt; Método  $\theta$ -Wilson; Método de Newmark.

Em todos os casos, a escolha do intervalo de tempo  $\Delta t$  é muito importante. Em princípio, o intervalo deve ser suficientemente pequeno para integrar a solução com precisão até nos modos mais altos. No caso de sistemas grandes, como estruturas de ponte, isto significaria utilizar um  $\Delta t$  demasiadamente pequeno, o que tornaria o problema ainda mais trabalhoso. Além disso, os erros estão relacionados ao número de operações realizadas, o qual é proporcional à quantidade de intervalo de tempo.

No entanto, em muitas análises, praticamente toda a resposta é composta somente pelos primeiros modos. Assim, integrar com precisão os componentes de alta frequência pode ser considerado desnecessário. A escolha por um método de integração incondicionalmente estável garante que as respostas dos componentes que não foram calculadas precisamente não cresçam artificialmente, portanto os erros originados podem ser desprezados. De acordo com Bathe (1996), o método de Newmark com  $\beta=0.50$  e  $\alpha=0.25$  é o método mais eficaz. Assim, o deslocamento, a velocidade e a aceleração do sistema são, respectivamente:

$$D_{t+\Delta t} = \left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} M + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} C + K \right)^{-1} \times \left( M \left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} D_t + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{D}_t + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{D}_t \right) + C \left( \frac{1}{\alpha \Delta t} D_t + \left( \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \dot{D}_t \right) + \left( \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \frac{\Delta t}{2} \ddot{D}_t + R_{t+\Delta t} \right) \quad (2.5)$$

$$\dot{D}_{t+\Delta t} = \dot{D}_t + (1 - \beta)\Delta t \ddot{D}_t + \beta\Delta t \ddot{D}_{t+\Delta t} \quad (2.6)$$

$$\ddot{D}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}(D_{t+\Delta t} - D_t) - \left(\frac{1}{\alpha\Delta t}\right)\dot{D}_t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{D}_t \quad (2.7)$$

Nas quais:  $M$ ,  $C$  e  $K$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema acoplado;  $R$  é o vetor de forças externas aplicadas;  $\Delta t$  é o intervalo de tempo, definido, neste trabalho, pela razão entre a distância dos nós e a velocidade de travessia.

Os critérios aplicados para a obtenção das matrizes do sistema acoplado são apresentados no capítulo a seguir. Neste capítulo, também são discutidos os dois métodos mais utilizados pela maioria dos autores para o tratamento da interação ponte-veículo.

## *CAPÍTULO 3*

### *Tratamento da Interação Dinâmica*

A determinação da resposta dinâmica de estrutura de ponte submetida ao tráfego de veículo pesado não é tarefa simples. A interdependência entre a resposta de ambos resulta na interação entre a ponte e veículo, os quais, durante a travessia, passam a se comportar como componentes de um único sistema estrutural. Assim, o comportamento dinâmico deste sistema é influenciado pelo peso, número de eixo e velocidade do veículo, pelo degrau na entrada da ponte, pelas irregularidades ou rugosidades na superfície da pista, pela posição do tráfego em relação ao centro longitudinal da ponte, bem como pelas características dinâmicas de ambos.

Durante a última década, o problema da interação entre ponte e veículo tem sido tema de muitas pesquisas. A importância e a complexidade em considerar os parâmetros relacionados à interação nos estudos das pontes conduzem os pesquisadores a elaborarem métodos de cálculo mais precisos e modelos numéricos mais detalhados. Praticamente, dois métodos são utilizados para a obtenção das equações diferenciais que represente o movimento interativo do sistema:



1. A ponte e o veículo são representados por dois conjuntos de equações separados, mas com condições de equilíbrio e compatibilidade na interface entre ambos. Os dois conjuntos de equações são resolvidos separadamente e as condições na interface são satisfeitas de maneira iterativa.
2. As equações de movimento são obtidas para a ponte e o veículo tratados como um sistema discreto, modelado por elementos finitos por exemplo. O conjunto de equações acopladas podem ser resolvidas por um dos métodos conhecidos de integração direta no tempo: Runge-Kutta, Newmark, Wilson- $\theta$ , e outros.

O primeiro método considera a ponte e o veículo como duas estruturas separadas conectadas em pontos de contato que dependem do tempo. A descontinuidade da superfície na entrada da ponte excita o veículo o qual responde de acordo com suas características dinâmicas. Esta resposta resulta em força aplicada à ponte, os deslocamentos da ponte nos pontos de contato somados à rugosidade da pista transformam-se em força aplicada ao veículo.

Este processo é o mais utilizado para tratar o problema da interação, o qual foi escolhido pelos autores dos trabalhos descritos a seguir. Destacam-se os diferentes modelos da ponte e do veículo, a quantidade de parâmetros envolvidos na análise da interação e os métodos de cálculo da resposta dinâmica.

Chatterjee et al. (1994) analisaram teoricamente pontes contínuas de múltiplos-vãos com modelo contínuo de viga Euler-Bernoulli, o veículo foi tratado de duas formas diferentes: 1. sistema simples massa-mola; 2. apenas massa. A resposta da ponte foi obtida no domínio do tempo para as situações de pavimento liso e pavimento irregular. As

respostas para diferentes velocidades também foram avaliadas. Concluíram que quando as irregularidades da pista são incluídas na análise, os resultados dos modelos de massa/mola e massa são significativamente diferentes entre si, e entre aqueles obtidos para pavimento liso. Verificaram também que o aumento da velocidade causa aumento na diferença entre a resposta estática e dinâmica, o que resulta em valores altos para o DAF.

Chompooming and Yener (1995) propuseram uma formulação que envolve método de elementos finitos e técnicas de discretização e integração no tempo, conhecida por Método de Linhas. A interação foi estudada considerando a influência da rugosidade da pista, sistemas de suspensão, velocidade e posição do veículo sobre a faixa de rolamento, direção de travessia, condições de apoio e geometria da estrutura.

Green and Cebon (1997) realizaram um estudo numérico sistemático utilizando 6 parâmetros referentes às características da ponte e do veículo. Para a análise dinâmica, a ponte foi analisada como viga simplesmente apoiada, e o veículo foi representado por um sistema massa-mola-amortecedor com 1 grau de liberdade (gl). A solução da equação de movimento foi expressa por meio da integral de convolução entre a função de resposta ao impulso e as cargas aplicadas pelo veículo, desta forma, a resposta da ponte foi obtida por método contínuo.

Fafard et al. (1998) investigaram os efeitos de diferentes carregamentos dinâmicos sobre ponte esconsa, por meio da variação do coeficiente de majoração da carga estática (DAF) obtido para cada caso. Os modelos 3D foram elaborados por elementos finitos: elementos de placa com 8 nós para a laje e elementos de viga Euler-Bernoulli para as longarinas. Para o veículo foi escolhido o modelo de 3 corpos rígidos sobre o sistema de suspensão e 5 eixos, o qual envolvia graus de liberdade de rotações sobre os eixos transversais e longitudinais, além das translações. A resposta foi calculada por Newmark, considerando diferentes pesos e velocidades para o veículo, e também a rugosidade da

superfície da pista. Concluíram que os cálculos utilizados para análise dinâmica de pontes por meio dos valores de DAF, recomendados por norma, são subestimados.

Zeng (2000) propôs um método semi-analítico para estudar o caso das pontes esconsas submetidas a veículos pesados com vários eixos. Em seu trabalho, a ponte foi tratada como um modelo contínuo de placa, os parâmetros modais foram obtidos aplicando o método Rayleigh-Ritz, e a resposta foi expressa como a soma das contribuições dos diferentes modos. O veículo foi discretizado para representar a cabine e a carroceria como duas massas rígidas, e os pneus como seis massas em um modelo tri-dimensional com 11 graus de liberdade. Para obter a resposta do veículo é utilizado o método de Newmark. A interação entre a resposta de ambos foi tratada considerando irregularidades na entrada da ponte, a rugosidade da superfície, velocidade do veículo e ângulo entre as extremidades da placa esconsa.

Liu et al. (2002) estudaram o comportamento dinâmico de pontes por meio de modelos de viga e grelha. Para os veículos foram escolhidos modelos 3D, e a resposta foi calculada por algoritmos de integração Runge-Kutta. As equações de movimento da ponte foram resolvidas por superposição modal. Neste trabalho a rugosidade da pista também foi considerada. Concluíram que os valores de DAF calculados por uma análise mais detalhada são maiores do que os recomendados por norma.

Os trabalhos descritos apresentam diferentes combinações dos principais parâmetros que influenciam a resposta dinâmica de pontes sob carga móvel, considerando a interação entre ambos por meio de dois conjuntos de equações resolvidos separadamente. O segundo método, no qual as equações são acopladas e calculadas simultaneamente, é pouco encontrado na literatura. Isto pode ser explicado pela dificuldade em sistematizar a mudança das matrizes do sistema de acordo com a mudança de posição do veículo durante a travessia. Além disso, há o inconveniente de tratar um conjunto de equações muito grande, com



muitos graus de liberdade, por causa das limitações do equipamento (alocação de memória, velocidade de processamento) e de *software*. No entanto, a interação entre um veículo com dimensões e massa relevantes em relação à rigidez da estrutura é teoricamente um problema acoplado, o qual requer a solução simultânea das equações de movimento (Lombaert (2001)). Neste caso, o veículo não apenas excita a estrutura e é influenciado pela resposta desta, mas as forças envolvidas agem sobre um único sistema do qual ambos fazem parte.

El Debs (1990) utilizou este processo para estudar a resposta de pontes estaiadas. Em seu estudo, conforme o veículo se desloca, sua massa passa a fazer parte de um elemento da estrutura, desta forma a matriz de massa do sistema varia de acordo com a posição do veículo. Foram utilizados elementos de viga para a ponte e modelo massa/mola/amortecedor de um grau de liberdade para o veículo. O objetivo era aplicar algoritmo de cálculo da resposta dinâmica baseado na interpolação das forças de inércia, para a obtenção do coeficiente de majoração das cargas estáticas.

Song et al. (2002) estudaram o sistema ponte/veículo por meio das matrizes acopladas para avaliar de maneira mais realista a influência das irregularidades da pista na resposta dinâmica. Em seu trabalho, a ponte foi modelada com elementos de placa retangular de Kirchhoff e elementos de viga, para o veículo utilizou um sistema massa/mola/amortecedor com 1 grau de liberdade. A resposta do sistema foi obtida por uma técnica de simulação probabilística denominada Monte Carlo.

Em ambos trabalhos descritos acima, as dificuldades do processo foram contornadas utilizando modelos mais simples, com poucos graus de liberdade. Porém, em muitos casos estas simplificações podem impedir uma avaliação precisa do sistema, como por exemplo a inclusão dos modos de torção, que não aparecem nos modelos de viga, e a influência do número de eixos e movimentos de rotações transversal e



longitudinal do veículo, presentes apenas nos modelos tridimensionais mais elaborados. A análise detalhada do comportamento dinâmico de um sistema placa/veículo acoplado é particularmente interessante porque representa de forma mais realista a situação de uma ponte submetida a carga móvel pesada.

Neste trabalho, o segundo roteiro descrito para tratamento da interação será aplicado. Os modelos de elementos finitos para a ponte e para o veículo, concebidos com base em dimensões reais, serão acoplados formando um único sistema. As respostas no tempo serão obtidas pelo método de Newmark considerando diferentes veículos (peso e número de eixo) e situação de travessia, como velocidade, faixa de rolamento e irregularidades na pista.

A seção seguinte apresenta o equacionamento para o cálculo da resposta dinâmica, considerando o acoplamento das matrizes da ponte e do veículo. A formulação dos elementos de placa utilizados para a elaboração do modelo da estrutura analisada neste trabalho, será apresentada no próximo capítulo.

### 3.1 O EQUACIONAMENTO DA INTERAÇÃO DINÂMICA

A dificuldade em analisar o problema da interação entre as respostas da ponte e do veículo está em definir o processo apropriado para tratar o acoplamento cinemático do sistema. Para demonstrar o que isto significa, tem-se a equação de movimento forçado de um sistema na forma geral dada pela Eq.(3.1):

$$M \ddot{D} + C \dot{D} + K D = F \quad (3.1)$$

na qual,  $M$ ,  $C$ , e  $K$  referem-se à massa, ao amortecimento e à rigidez, respectivamente.  $D$  refere-se ao deslocamento da estrutura e  $F$  é a força aplicada.

No caso de uma ponte rodoviária, além da carga estática,  $F$  também é função do movimento do veículo, o qual depende do movimento da estrutura. Esta interdependência dos movimentos de ambos é denominada acoplamento cinemático do sistema ponte-veículo e origina as forças de interação  $F_{int}$ .

Quando a interação é desprezada,  $F$  é apenas uma força externa aplicada dependente do tempo. Por outro lado, considerar o acoplamento cinemático implica em adicionar as forças de interação  $F_{int}$  no cálculo de  $F$ . Desta forma,  $F$  varia em cada instante de tempo  $t$ , e não é conhecida a priori, pois é função do movimento da estrutura ( $D$ ,  $\dot{D}$ ,  $\ddot{D}$ ), bem como do movimento do veículo ( $d$ ,  $\dot{d}$ ,  $\ddot{d}$ ), o que torna a Eq. (3.1) não linear (Chompooming e Yener, 1995). Neste caso, as equações de movimento da ponte e do veículo podem ser expressas pelas Eq.(3.2) e Eq.(3.3), respectivamente.

$$M \ddot{D}(t) + C \dot{D}(t) + K D(t) = F(t) \quad (3.2)$$

$$M_v \ddot{d}(t) + C_v \dot{d}(t) + K_v d(t) = F_v(t) \quad (3.3)$$

Nestas expressões,  $M_v$ ,  $C_v$ ,  $K_v$  são a massa, o amortecimento e rigidez do veículo,  $F_v(t)$  é a força que atua no veículo e  $F(t)$  é a aplicada à estrutura, dadas por:

$$F_v(t) = F_v(\ddot{D}(t), \dot{D}(t), D(t)) \quad (3.4)$$

$$F(t) = F_{ext}(t) + F_{int}(t) \quad (3.5a)$$

na qual,

$$F_{int}(t) = F_{int}(\ddot{D}(t), \dot{D}(t), D(t), \ddot{d}(t), \dot{d}(t), d(t)) \quad (3.5b)$$

Na análise da interação, as forças originadas pela passagem do veículo são aplicadas apenas nos pontos de contato com os pneus. A resposta em um instante de tempo depende da resposta no instante de tempo anterior, portanto para o cálculo da resposta é necessária a discretização no tempo da equação de movimento da estrutura. Este assunto será tratado nas seções seguintes.

### 3.2. ACOPLAMENTO CINEMÁTICO

A discretização no tempo da Eq. (3.2) pode ser expressa como:

$$M \cdot A_{t+1} + C \cdot V_{t+1} + K \cdot D_{t+1} = F_{t+1} \quad (3.6)$$

na qual,  $A_{t+1}$ ,  $V_{t+1}$ ,  $D_{t+1}$ ,  $F_{t+1}$ , são os valores da aceleração, velocidade, deslocamento e força da estrutura no tempo  $t+1$ .

A força  $F_{t+1}$  é obtida adicionando a força de interação  $F_{int,t+1}$  e a força externa  $F_{ext,t+1}$ , aplicadas nos graus de liberdade dos nós referentes aos pontos de contato, e pode ser expressa como mostrado nas Eq.(3.5a) e Eq.(3.5b):

$$F_{t+1} = F_{ext,t+1} + F_{int,t+1}(A_{t+1}, V_{t+1}, D_{t+1}, a_{t+1}, v_{t+1}, d_{t+1}) \quad (3.7)$$

na qual,  $a_{t+1}, v_{t+1}, d_{t+1}$  são os valores da aceleração, velocidade e deslocamento do veículo no tempo  $t+1$ .

De acordo com o método de Newmark, os deslocamentos e velocidades no tempo  $t+1$  podem ser expressos como função dos deslocamentos, velocidades e acelerações no tempo  $t$  e da aceleração no tempo  $t+1$ , como mostram as equações a seguir:

$$D_{t+1} = D_t + \Delta t \cdot V_t + \frac{1}{2} \cdot \Delta t^2 \cdot [(1 - 2\alpha) \cdot A_t + 2\alpha \cdot A_{t+1}] \quad (3.8a)$$

$$V_{t+1} = V_t + \Delta t \cdot [(1 - \beta) \cdot A_t + \beta \cdot A_{t+1}] \quad (3.8b)$$

nas quais,  $\Delta t$  é o intervalo de tempo,  $\beta$  e  $\alpha$  são os coeficientes referentes à estabilidade e precisão do algoritmo, como discutido no capítulo 2.

Substituindo a Eq.(3.8a) e a Eq.(3.8b) na Eq.(3.6), a equação de movimento pode ser escrita como função da aceleração no tempo atual  $A_{t+1}$ , como mostra a Eq. (3.9a). Esta equação em conjunto com a equação de movimento do veículo dada por Eq. (3.9b), demonstram o acoplamento cinemático. As parcelas referentes ao tempo anterior  $t$  são conhecidas, portanto não aparecem explicitamente.

$$M \cdot A_{t+1} + C \cdot V_{t+1}(A_{t+1}) + K \cdot D_{t+1}(A_{t+1}) = F_{t+1}(A_{t+1}, a_{t+1}, v_{t+1}, d_{t+1}) \quad (3.9a)$$

$$M_v \cdot a_{t+1} + C_v \cdot v_{t+1} + K_v \cdot d_{t+1} = F_{v_{t+1}}(A_{t+1}) \quad (3.9b)$$

A solução para este conjunto de equações pode ser encontrada por um processo iterativo.



Como apresentado anteriormente, a maioria dos estudos sobre o problema da interação ponte-veículo determina as respostas para ambos separadamente, por meio das Eq. (3.9a) e Eq. (3.9b). Neste caso, as forças envolvidas atuam ora apenas na ponte, ora apenas no veículo. Mas, como discutido no capítulo anterior, quando as dimensões de um veículo são relevantes em relação à estrutura, as forças de excitação podem atuar simultaneamente no sistema como um todo, ou seja, em um sistema fisicamente acoplado. Isto implica no acoplamento das matrizes de massa, rigidez e amortecimento e dos vetores de força descritos nas Eq.(3.9a) e Eq.(3.9b).

Existem vários procedimentos para obter a equação de movimento do sistema acoplado:

- Princípio dos trabalhos virtuais: considera a inclusão das forças de inércia na expressão do trabalho virtual das forças externas;
- Princípio de Hamilton: relaciona a resposta à variação de energia do sistema dentro do intervalo de tempo;
- Princípio de D'Alembert: é uma extensão das condições de equilíbrio da estrutura. É o processo mais simples e será utilizado neste trabalho.

Os detalhes do processo de acoplamento adotado serão apresentados a seguir.

### **3.3 ACOPLAMENTO DAS MATRIZES**

#### **3.3.1 CONDIÇÕES CINEMÁTICAS NOS PONTOS DE CONTATO**

De acordo com o Princípio de D'Alembert, a deflexão total de um ponto sobre a estrutura no tempo  $t$  é igual ao deslocamento resultante das

forças de interação, das forças de inércia e das forças de amortecimento que atuam na estrutura.

As forças relativas ao veículo, como apresentado no capítulo 2, são:

força peso:  $M_j g ; m_i g$  (3.10a)

forças e momentos de inércia:  $M_j \ddot{Z}_j ; I_{\theta_j} \ddot{\theta}_j ; I_{\alpha_j} \ddot{\alpha}_j ; m_i \ddot{z}_i$  (3.10b)

forças de suspensão:  $f_{ks_i} + f_{cs_i} = ks_i(z_{s_i} - z_{t_i}) + cs_i(\dot{z}_{s_i} - \dot{z}_{t_i})$  (3.10c)

forças de contato:  $f_{kt_i} + f_{ct_i} = kt_i(z_{t_i} - w_i(x, y, t)) + ct_i(\dot{z}_{t_i} - \dot{w}_i(x, y, t))$  (3.10d)

nas quais:  $j=1; 2$

$i=1; 2; \dots 6$

Para obter de modo simples as equações de movimento, são consideradas as condições de equilíbrio em um único ponto de contato  $i$  do veículo com a estrutura, como mostra a Fig.(3.1).

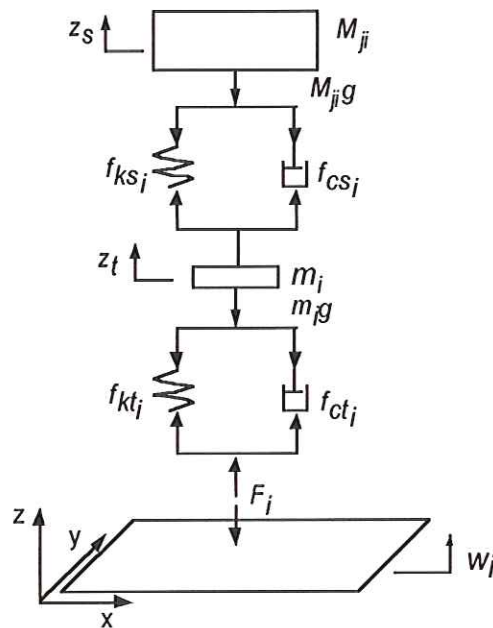


Figura (3.1): Diagrama de Forças no Ponto de Contato do Veículo com a Estrutura

No equilíbrio, as forças de suspensão Eq.(3.11a), de contato Eq.(3.11b) e a força que o veículo aplica na ponte Eq.(3.11c) podem ser escritas como:

$$f_{ks_i} + f_{cs_i} = -\left(M_{ji} \cdot \ddot{Z}_{ji} + I\theta_{ji} \cdot \ddot{\theta}_{ji} + I\alpha_{ji} \cdot \ddot{\alpha}_{ji}\right) - M_{ji} \cdot g \quad (3.11a)$$

$$f_{kt_i} + f_{ct_i} = f_{ks_i} + f_{cs_i} - m_i \cdot \ddot{z}_{t_i} - m_i \cdot g \quad (3.11b)$$

$$F_{vp_i} = f_{kt_i} + f_{ct_i} \quad (3.11c)$$

Nestas expressões, o índice  $ji$  refere-se à contribuição da parcela da massa suspensa  $j$  no ponto de contato  $i$ .

Substituindo a Eq.(3.11a) e a Eq.(3.11b) na Eq.(3.11c), o vetor de força  $F_{vp_i}$  pode ser obtido pela soma da força peso e das forças inércias do veículo:

$$F_{vp_i} = -\left(M_{ji} \cdot \ddot{Z}_{ji} + I\theta_{ji} \cdot \ddot{\theta}_{ji} + I\alpha_{ji} \cdot \ddot{\alpha}_{ji} + m_i \cdot \ddot{z}_{t_i}\right) - W_i \quad (3.12)$$

As equações de movimento das massas referentes aos pneus podem ser obtidas substituindo as forças de suspensão ( $f_{ks_i} + f_{cs_i}$ ) da Eq.(3.10c) e de contato ( $f_{kt_i} + f_{ct_i}$ ) da Eq.(3.10d) na Eq. (3.11b):

$$m_i \ddot{z}_{t_i} + (kt_i + ks_i)z_{t_i} + (ct_i + cs_i)\dot{z}_{t_i} - ks_i z_{s_i} - cs_i \dot{z}_{s_i} = -m_i g + kt_i w_i + ct_i \dot{w}_i \quad (i = 1 \dots 6) \quad (3.13)$$

As equações de movimento das massas referentes à suspensão podem ser obtidas substituindo a força de suspensão ( $f_{ks_i} + f_{cs_i}$ ) da Eq.(3.10c) na Eq.(3.11a).

$$M_{ji}\ddot{Z}_{ji} + I\theta_{ji} \cdot \ddot{\theta}_{ji} + I\alpha_{ji}\ddot{\alpha}_{ji} + m_i\ddot{z}_{t_i} + ks_i z_{s_i} + cs_i \dot{z}_{s_i} - ks_i z_{t_i} - cs_i \dot{z}_{t_i} = -M_{ji}g$$

(j=1;2) (3.14)

A Equação (3.14) pode ser escrita em relação às coordenadas básicas do modelo do veículo, apresentadas no capítulo anterior pelas expressões Eq.(2.1a) a Eq. (2.1g).



$$\begin{aligned}
& b_2 M_1 [(b_1 - a_2) \ddot{z}_{s2} + b_2 \ddot{z}_{s1} + a_2 \ddot{z}_{s5}] - \frac{I\theta_1}{l_b^2} (\ddot{z}_{s2} - \ddot{z}_{s1}) - k_{s1} z_{t1} - c_{s1} \dot{z}_{t1} + (k_{s6} + k_{s1}) z_{s1} \\
& + (c_{s6} + c_{s1}) \dot{z}_{s1} + c_{s6} (-\dot{z}_{s2} + \dot{z}_{s5} - \dot{z}_{s6}) + k_{s6} (-z_{s2} + z_{s5} - z_{s6}) + b_2 M_1 g = 0
\end{aligned} \tag{3.15a}$$

$$\begin{aligned}
& a_1 c_2 M_2 [d_2 c_1 \ddot{z}_{s3} + a_1 c_2 \ddot{z}_{s2} + a_2 c_2 \ddot{z}_{s5} + d_1 c_1 \ddot{z}_{s4} + g] + \\
& (b_1 - a_2) M_1 [(b_1 - a_2) \ddot{z}_{s2} + b_2 \ddot{z}_{s1} + a_2 \ddot{z}_{s5} + g] - k_{s2} z_{t2} - c_{s2} \dot{z}_{t2} + \\
& \frac{I\alpha_1}{l_a^2} (\ddot{z}_{s2} - \ddot{z}_{s5}) + \frac{I\theta_1}{l_b^2} (\ddot{z}_{s2} - \ddot{z}_{s1}) - \frac{a_1 I\theta_2}{l_c^2} (a_1 \ddot{z}_{s3} - a_1 \ddot{z}_{s2} + a_2 \ddot{z}_{s4} - a_2 \ddot{z}_{s5}) + \\
& (c_{s6} + c_{s2}) \dot{z}_{s2} - c_{s6} (\dot{z}_{s1} + \dot{z}_{s5} - \dot{z}_{s6}) + (k_{s6} + k_{s2}) z_{s2} - k_{s6} (z_{s1} + z_{s5} - z_{s6}) = 0
\end{aligned} \tag{3.15b}$$

$$\begin{aligned}
& d_2 c_1 M_2 [d_2 c_1 \ddot{z}_{s3} - a_1 c_2 \ddot{z}_{s2} - a_2 c_2 \ddot{z}_{s5} + d_1 c_1 \ddot{z}_{s4} + g] + \frac{I\alpha_2}{l_d^2} (\ddot{z}_{s3} - \ddot{z}_{s4}) + \\
& \frac{a_1 I\theta_2}{l_c^2} (a_1 \ddot{z}_{s3} - a_1 \ddot{z}_{s2} - a_2 \ddot{z}_{s5} + a_2 \ddot{z}_{s4}) - c_{s3} \dot{z}_{t3} + c_{s3} \dot{z}_{s3} - k_{s3} z_{t3} + k_{s3} z_{s3} = 0
\end{aligned} \tag{3.15c}$$

$$\begin{aligned}
& d_1 c_1 M_2 [d_2 c_1 \ddot{z}_{s3} + a_1 c_2 \ddot{z}_{s2} + a_2 c_2 \ddot{z}_{s5} + d_1 c_1 \ddot{z}_{s4} + g] + \frac{I\alpha_2}{l_d^2} (\ddot{z}_{s4} - \ddot{z}_{s3}) + \\
& \frac{a_1 I\theta_2}{l_c^2} (a_1 \ddot{z}_{s3} - a_1 \ddot{z}_{s2} - a_2 \ddot{z}_{s5} + a_2 \ddot{z}_{s4}) - c_{s4} \dot{z}_{t4} + c_{s4} \dot{z}_{s4} - k_{s4} z_{t4} + k_{s4} z_{s4} = 0
\end{aligned} \tag{3.15d}$$

$$\begin{aligned}
& a_2 c_2 M_2 [d_2 c_1 \ddot{z}_{s3} + a_1 c_2 \ddot{z}_{s2} + a_2 c_2 \ddot{z}_{s5} + d_1 c_1 \ddot{z}_{s4} + g] + \frac{I\alpha_1}{l_a^2} (\ddot{z}_{s5} - \ddot{z}_{s2}) + \\
& a_2 M_1 [(b_1 - a_2) \ddot{z}_{s2} + b_2 \ddot{z}_{s1} + a_2 \ddot{z}_{s5} + g] - \frac{a_1 I\theta_2}{l_c^2} (a_1 \ddot{z}_{s3} - a_1 \ddot{z}_{s2} + a_2 \ddot{z}_{s4} - a_2 \ddot{z}_{s5}) + \\
& (c_{s6} + c_{s5}) \dot{z}_{s5} + c_{s6} (\dot{z}_{s1} - \dot{z}_{s2} - \dot{z}_{s6}) - c_{s5} \dot{z}_{t5} + \\
& (k_{s6} + k_{s5}) z_{s5} + k_{s6} (z_{s1} - z_{s2} - z_{s6}) - k_{s5} z_{t5} = 0
\end{aligned} \tag{3.15e}$$

O vetor de forças aplicadas à estrutura pode ser obtido considerando as forças aplicadas pelo veículo  $F_{vp_i}$  da Eq.(3.12) e as forças originadas pelos deslocamentos e velocidades nos pontos de contato, apresentadas na Eq.(3.13) por:

$$F_{pv_i} = kt_i \cdot w_i + ct_i \dot{w}_i \quad (3.16)$$

A resultante das forças aplicadas no ponto de contato dos pneus com a estrutura é obtida subtraindo das forças aplicadas pelo veículo, as forças originadas pela resposta da estrutura, como mostra a Eq.(3.17):

$$F_i = F_{vp_i} - F_{pv_i} \quad (3.17)$$

Ou seja:

$$F_i = -\left(M_{ji} \cdot \ddot{Z}_{ji} + I\theta_{ji} \cdot \ddot{\theta}_{ji} + I\alpha_{ji} \cdot \ddot{\alpha}_{ji} + m_i \cdot \ddot{z}_{t_i}\right) - W_i - \left(kt_i w_i + ct_i \dot{w}_i\right) \quad (3.18)$$

A Eq.(3.18) demonstra a influência das características do veículo (peso, inércias, rigidez e amortecimento) e também do próprio movimento da estrutura (deslocamento e velocidade) na força de excitação. A influência das irregularidades da pista será apresentada a seguir.

### 3.3.2 INCLUSÃO DA RUGOSIDADE DA PISTA

Para incluir os efeitos das irregularidades da pista na resposta do sistema, os deslocamentos verticais da ponte  $w_r$  no ponto de contato  $\mathbf{x}=(x,y)$  no tempo  $t$ , são escritos por:

$$w_r(\mathbf{x},t) = w(\mathbf{x},t) + r(x) \quad (3.19)$$

na qual, a função  $r(x)$  representa as rugosidades da superfície da pista, como foi apresentado no capítulo anterior.

A expressão para a velocidade no grau de liberdade vertical do ponto de contato pode ser obtida derivando Eq.(3.19):

$$\dot{w}_r(\mathbf{x},t) = \frac{dw_r}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dw}{dt} + \frac{dr}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (3.20)$$

na qual,  $dx/dt$  é a velocidade do veículo e  $dy/dt=0$ .

Esta expressão pode ser rescrita por:

$$\dot{w}_r(\mathbf{x},t) = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot v(t) + \dot{w} + \frac{dr}{dx} \cdot v(t) \quad (3.21)$$

Na qual,  $v(t)$  corresponde à velocidade do veículo no tempo  $t$  ao longo da direção  $x$ . Se o modelo do veículo considerasse massa em

contato com a estrutura, então seria necessária a determinação de  $\ddot{w}(\mathbf{x}, t)$  (Chompooming e Yener, 1995).

Desta forma, a expressão para as forças  $F_i$  dada por Eq.(3.18) pode ser reescrita considerando Eq.(3.19) e Eq.(3.20):

$$F_i = - \left( M_{ji} \cdot \ddot{Z}_{ji} + I\theta_{ji} \cdot \ddot{\theta}_{ji} + I\alpha_{ji} \cdot \ddot{\alpha}_{ji} + m_i \cdot \ddot{z}_{t_i} \right) - W_i - \left( kt_i(w_i + r_i) + ct_i \left( \dot{w}_i + v(t) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) \right) \right) \quad (3.21)$$

As parcelas de  $F_i$  em Eq.(3.21) referentes às forças e momentos de inércia do veículo, às forças originadas pelos deslocamentos ( $kt_i \cdot w_i$ ) e velocidades ( $ct_i \cdot \dot{w}_i$ ) nos pontos de contato podem ser adicionadas, respectivamente às matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema. As parcelas referentes a  $kt_i \cdot r_i$  e  $ct_i \left( v(t) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) \right)$  adicionadas à força peso compõem o vetor de forças aplicadas à ponte, como mostra Eq.(3.22a). O vetor de forças aplicadas ao veículo é dado por Eq.(3.22b):

$$F_p = - \begin{bmatrix} 0 \cdots W_6 + kt_6 r(x) + ct_6 \dot{r}(x) \cdots 0 \cdots W_5 + kt_5 r(x) + ct_5 \dot{r}(x) \cdots 0 \cdots \\ W_4 + kt_4 r(x) + ct_4 \dot{r}(x) \cdots 0 \cdots W_1 + kt_1 r(x) + ct_1 \dot{r}(x) \cdots 0 \cdots \\ W_2 + kt_2 r(x) + ct_2 \dot{r}(x) \cdots 0 \cdots W_3 + kt_3 r(x) + ct_3 \dot{r}(x) \cdots 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.22a)$$

$$F_v = \begin{bmatrix} -m_1, -m_2, -m_3, -m_4, -m_5, -m_6, -b_2 M_1, \\ -a_1 c_2 M_2 - (b_1 - a_2) M_1, -d_2 c_1 M_2, -d_1 c_1 M_2, -a_2 c_2 M_2 - a_2 M_1 \end{bmatrix}^T g \quad (3.22b)$$



Assim, a equação de movimento do sistema acoplado no instante em que o veículo está em uma determinada posição sobre a ponte pode ser escrita na forma matricial como mostra a Eq. (3.23). Os índices  $p$  e  $v$  distinguem as características relacionadas à ponte e ao veículo, respectivamente. O termo  $M_{vp_i}$  se refere à contribuição das forças e momentos de inércia do veículo. As demais contribuições provenientes de  $F_i$  são adicionadas às matrizes da estrutura nos graus de liberdade do nó sob o pneu  $i$  ( $i=1 \dots 6$ ).

$$\begin{bmatrix} M_p & M_{vp_i} \\ 0 & M_v \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{D} \\ \ddot{d} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_p + ct_i & 0 \\ 0 & C_v \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{D} \\ \dot{d} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_p + kt_i & 0 \\ 0 & K_v \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{p_i} \\ F_v \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Desta forma, é possível calcular a resposta do sistema nas distintas posições que o veículo ocupa enquanto atravessa a ponte. Uma vez que a resposta em uma posição depende da resposta calculada na posição anterior, e a mudança de posição demanda tempo, a Eq.(3.23) pode ser escrita na forma geral, pela Eq.(3.24):

$$M(t) \ddot{D}(t) + C(t) \dot{D}(t) + K(t) D(t) = F(t) \quad (3.24)$$

A variação das matrizes do sistema, as quais representam o movimento ponte/veículo acoplado, torna necessário o processo de solução incremental no tempo. Os procedimentos para o cálculo da solução aproximada serão discutidos na próxima seção.

### 3.3 ALGORITMO DE SOLUÇÃO: PROCEDIMENTOS PARA O CÁLCULO DA RESPOSTA DINÂMICA DO SISTEMA PONTE / VEÍCULO ACOPLADO

O processo de análise começa com a entrada dos dados da ponte (geometria, condições de contorno, propriedades do material) para a elaboração do modelo de elementos finitos de placa e cálculo das matrizes de massa e rigidez, de acordo com a teoria descrita a seguir, no capítulo 4. A matriz de amortecimento da estrutura é obtida proporcionalmente à massa e rigidez previamente calculadas. Em seguida, é feito o acoplamento com as matrizes do veículo nos graus de liberdade referentes ao deslocamento vertical dos nós em que houver contato.

A travessia do veículo sobre a ponte é representada considerando a mudança de posição dos pneus (ou pontos de contato) de nó em nó do modelo da estrutura. No início da travessia, o 1º eixo do veículo está posicionado sobre os nós da extremidade de entrada da ponte. Por causa dos apoios, os deslocamentos verticais destes nós estão restritos. Enquanto o 1º eixo avança para o próximo nó, os demais eixos se aproximam da entrada de acordo com a distância entre eles, até todos estarem sobre a ponte. De modo análogo é feito para a saída do veículo. Assim, são obtidas as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema acoplado para cada posição do veículo sobre a estrutura, desde a entrada do 1º eixo até a saída do último.

A rotina para o cálculo da resposta tem início com a definição da qualidade da entrada e da pista, do tipo do veículo e sua velocidade, com a qual é obtido o intervalo de tempo  $\Delta t$ . As condições iniciais são calculadas considerando que a estrutura está inicialmente em repouso, ou seja:

$$D(0)=0 \quad \text{e} \quad \dot{D}(0)=0$$

A aceleração inicial  $\ddot{D}(0)$  é obtida de acordo com o seguinte roteiro:

- i. o primeiro eixo do veículo é excitado pelas forças originadas das irregularidades na entrada da ponte de acordo com a velocidade de travessia;
- ii. a resposta do veículo à esta excitação inicial resulta em forças de inércia que são somadas à força peso do veículo para compor a força de excitação inicial na estrutura  $F(0)$ , com a qual  $\ddot{D}(0)$  é calculada por:

$$\ddot{D}(0) = \text{inv}(M) \cdot F(0) \quad (3.25)$$

Os valores para os deslocamentos, velocidades e acelerações do sistema no tempo seguinte são calculados pelo método de Newmark, de acordo com o intervalo de tempo  $\Delta t$  até o final da travessia do veículo, quando a resposta é calculada apenas para a estrutura.

O próximo capítulo apresenta a formulação aplicada para o cálculo das matrizes do modelo da ponte, elaborado por elementos de placa.

## *CAPÍTULO 4*

### *Teoria de Placas para Análise Dinâmica*

O método dos elementos finitos representa, atualmente, uma das ferramentas mais abrangentes aplicadas em todos os campos da engenharia: mecânica, petroquímica, nuclear, e em especial na análise de estruturas de engenharia civil. Não há restrições quanto à complexidade geométrica da estrutura, pois a análise é feita a partir das contribuições de elementos de formas simples e comportamento matemático conhecido, tais como: barra, viga, placa, casca, sólido, etc. Assim, o primeiro passo é decidir qual formulação será utilizada para melhor representar a estrutura.

A estrutura superior das pontes rodoviárias, em geral, é composta de laje (ou tabuleiro) apoiada sobre vigas (longarinas). As lajes apresentam espessura muito menor do que as suas outras dimensões, além disso, as cargas externas exercidas pelos veículos são praticamente, forças normais e momentos aplicados à superfície de contato. Esta descrição corresponde às considerações relativas à geometria, às forças e deslocamentos que caracterizam o elemento de placa, como ilustra a



Fig. (4.1). Desta forma, a estrutura superior da ponte pode ser idealizada por elementos de placa e viga.

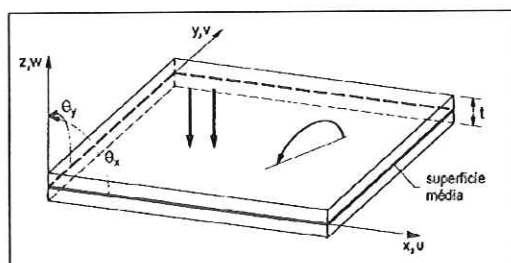


Figura (4.1): Definição geométrica de placa e convenção de sinais para deslocamento e giro

Sobre o comportamento de placas, destacam-se as teorias de Kirchhoff e de Mindlin-Reissner. As três primeiras hipóteses fundamentais são comuns para ambas:

1- Os pontos da superfície média se movem verticalmente, ou seja:

$$u=v=0$$

2- Todos os pontos contidos em uma normal à superfície média têm o mesmo deslocamento vertical;

3- A tensão normal  $\sigma_z$  é desprezível;

De acordo com a espessura, uma quarta hipótese distingue as duas teorias. Se a relação entre a espessura  $t$  e a maior dimensão  $a$  da superfície média for menor do que  $1/20$  ( $t/a < 0.05$ ), as placas são consideradas *finas* e definidas pela hipótese de Kirchhoff:

**4a-** Os pontos que, antes da deformação, estão sobre retas normais à superfície média, permanecem sobre retas também ortogonais à superfície média depois da deformação (Fig. 4.2).

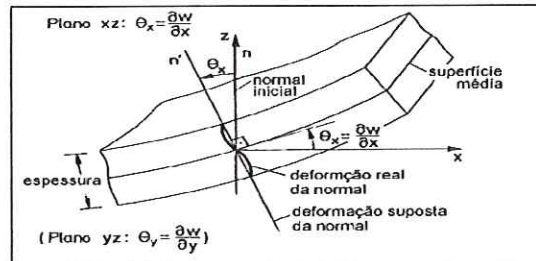


Figura (4.2): Deformação da superfície média de uma placa delgada e giro da normal

Isto equivale a desconsiderar as tensões de cisalhamento atuantes na direção da espessura, bem como as deformações específicas na direção perpendicular à superfície média.

Se a relação entre a espessura  $t$  e a maior dimensão  $a$  da superfície média for maior ou igual a  $1/20$  ( $t/a \geq 0.05$ ), as placas são consideradas *moderadamente grossas* e as tensões de cisalhamento não podem ser desprezadas, assim de acordo com a hipótese de Mindlin-Reissner:

**4b-** Os pontos que antes da deformação estavam sobre a normal à superfície média da placa, permanecem sobre uma mesma reta ao se deformar, sem que esta tenha de ser necessariamente ortogonal à deformação da superfície média (Fig.4.3).

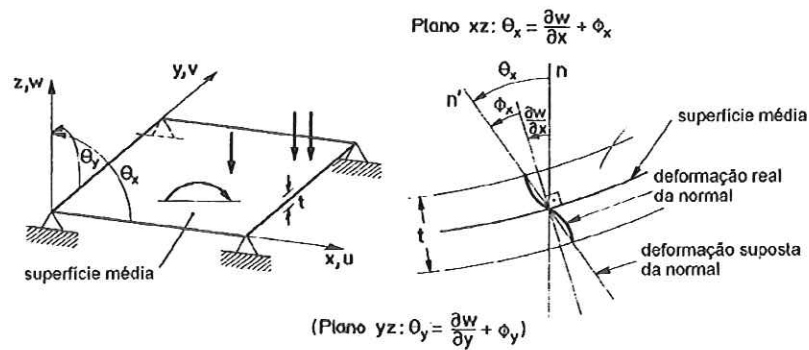


Figura (4.3): Deformação da superfície média de uma placa e giro da normal: teoria de Mindlin-Reissner

A formulação do elemento de placa baseada na redução da espessura de um sólido 3D, proposta por Ahmad (1970), atendia à teoria de Mindlin-Reissner, e apresentou excelentes resultados para placas moderadamente grossas. Porém, para placas finas, os resultados não correspondiam à teoria de Kirchhoff. No entanto, em engenharia é desejável uma formulação geral que seja aplicável a qualquer situação. Assim, Zienkiewicz (1971) propôs a técnica de integração reduzida, o que possibilitou o bom desempenho do elemento de placa de Mindlin-Reissner para as situações de placas finas ou moderadamente grossas. Desde então, estes elementos têm sido incorporados com êxito a muitos programas computacionais de análise por elementos finitos (Onâte, 1992). A obtenção das matrizes de massa e rigidez de um elemento de placa isoparamétrico quadrilateral quadrático para análise de estruturas finas ou moderadamente grossas, é descrita a seguir.

#### 4.1. CAMPO DE DESLOCAMENTO

De acordo com as hipóteses 1, 2 e 4b, os deslocamentos dos pontos da placa são:

$$u(x, y, z) = -z\theta_x(x, y) \quad (4.1)$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_y(x, y) \quad (4.2)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (4.3)$$

nas quais:  $w$  é o deslocamento vertical dos pontos da superfície média,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são os ângulos que definem o giro da normal contido nos planos  $xz$  e  $yz$ , respectivamente.

Assim, o vetor de movimento que contém os deslocamentos e giros de um ponto da superfície média da placa. é dado por:

$$\mathbf{u} = [w, \theta_x, \theta_y]^T \quad (4.4)$$

Na qual, as rotações em relação aos planos  $xz$  e  $yz$  são, como mostra a Fig.(4.3), dadas por:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \quad (4.5)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \quad (4.6)$$

Isto é, os giros da normal em um ponto estão relacionados à variação do deslocamento vertical nas direções  $x$  e  $y$  ( $\frac{\partial w}{\partial x}$  e  $\frac{\partial w}{\partial y}$ ) e são originados pela mudança da normal da superfície média. As parcelas  $\phi_x$  e  $\phi_y$  correspondem ao giro adicional da normal, ao não permanecer necessariamente ortogonal à superfície média após a deformação.

É importante destacar que a hipótese 4b estabelece que as retas normais da superfície média se mantêm retas depois do giro, o que



implica que a distribuição de tensões  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  é constante sobre a espessura, como ilustra a Fig.(4.4). Na realidade, esta é uma aproximação, pois de fato as normais inicialmente retas se distorcem durante a deformação, sendo esta distorção mais importante quanto maior é a espessura da placa. Assim, os giros  $\theta_x$  e  $\theta_y$  devem ser interpretados como “valores médios” da deformação “real” da normal (Oñate, 1992).

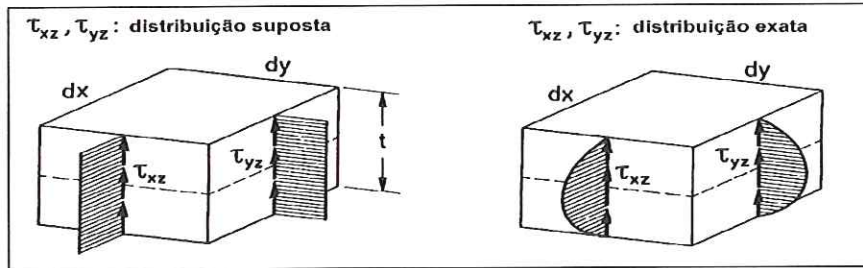


Figura (4.4): Convenção de sinais para as tensões  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$

#### 4.2 CAMPO DE DEFORMAÇÕES E TENSÕES

O campo de deformações pode ser obtido a partir da definição geral das deformações de um sólido tridimensional. O caso mais simples é o de material ortotrópico. Se  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  são as direções principais de ortotropia, as relações constitutivas podem ser dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_x &= \frac{1}{E_{x'}} \sigma'_x - \frac{\nu_{y'x'}}{E_{y'}} \sigma'_y - \frac{\nu_{z'x'}}{E_{z'}} \sigma'_z \\ \varepsilon'_y &= \frac{1}{E_{y'}} \sigma'_y - \frac{\nu_{x'y'}}{E_{x'}} \sigma'_x - \frac{\nu_{z'y'}}{E_{z'}} \sigma'_z \\ \varepsilon'_z &= \frac{1}{E_{z'}} \sigma'_z - \frac{\nu_{x'z'}}{E_{x'}} \sigma'_x - \frac{\nu_{y'z'}}{E_{y'}} \sigma'_y \\ \gamma_{x'y'} &= \frac{\tau_{x'y'}}{G_{x'y'}} \quad \gamma_{x'z'} = \frac{\tau_{x'z'}}{G_{x'z'}} \quad \gamma_{z'y'} = \frac{\tau_{z'y'}}{G_{z'y'}} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Substituindo estas equações no campo de movimento dado pelas Eq.(4.1), Eq.(4.2) e Eq.(4.3), obtém-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (4.8a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (4.8b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.8c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (4.8d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = -\phi_x \quad (4.8e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = -\phi_y \quad (4.8f)$$

As equações acima mostram que a hipótese de ortogonalidade da normal se traduz pelo fato das deformações transversais  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  não serem nulas, seus valores (absoluto) correspondem aos dos giros  $\phi_x$  e  $\phi_y$ , respectivamente. Pode ser observado que tais deformações, e por conseguinte as respectivas tensões, são independentes da coordenada  $z$ .

As Eq.(4.8e) e Eq.(4.8f) mostram que a condição de deformações transversais nulas implica que:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{e} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Esta consideração remete à hipótese de ortogonalidade da normal da teoria de Kirchhoff, como era de se esperar.

De acordo com a hipótese 3, a tensão normal  $\sigma_z$  é nula, e o vetor de tensões não nulas é dado por:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \dots \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_f \\ \dots \\ \sigma_c \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

na qual,  $\sigma_f$  e  $\sigma_c$  representam os vetores de tensões relativas aos efeitos de flexão e cortante transversal, respectivamente. Por analogia, o vetor de deformações associado ao de tensões da Eq.(4.8) pode ser definido por:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \dots \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \dots \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_f \\ \dots \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Na qual,  $\varepsilon_f$  e  $\varepsilon_c$  são os vetores de deformação de flexão e de cortante transversal, respectivamente.

### 4.3. RELAÇÃO TENSÃO - DEFORMAÇÃO

A relação entre as tensões não nulas e suas deformações associadas, encontrada a partir da equação da elasticidade tridimensional (Eq.7) e considerando  $\sigma_z = 0$ , é dada por:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_f \\ \sigma_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_f & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & D'_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_f \\ \dots \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} = D\varepsilon \quad (4.11)$$

Na qual,  $D_f$  e  $D'_c$  as matrizes de flexão e cortante, respectivamente, as quais para elasticidade ortótropa se escrevem como:

$$D_f = \frac{1}{1 - \nu_{yx}\nu_{xy}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy}E_x & 0 \\ \nu_{yx}E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{yx}\nu_{xy})G_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$D'_c = \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Para um material isótropo:

$$E_x = E_y = E$$

$$\nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu$$

$$G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.14)$$

As suposições feitas ao campo de deslocamento permite considerar que a distribuição de deformações  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  seja linear em  $z$  (Eq.4.10), portanto a distribuição das correspondentes tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , também é linear em relação a  $z$ , como mostra a Eq.(4.11). Por outro lado, a



distribuição das deformações  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  é constante em toda a espessura, e o mesmo ocorre com as correspondentes tensões  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  (Fig. 4.4).

De acordo com a teoria da elasticidade, a distribuição “exata” das tensões tangenciais transversais não é constante ao longo da espessura. Geralmente, tal distribuição tem forma polinômica com valores nulos nos planos superior e inferior da placa. Para resolver este problema, as tensões tangenciais transversais são alteradas de um coeficiente de modo que o trabalho de deformação das mesmas coincida com o realizado pelas tensões transversais “exatas”. Desta forma, pode-se afirmar que o trabalho de deformação global da placa coincide com o exato, embora localmente as tensões tangenciais não tenham a distribuição correta. Assim, na prática o vetor  $\sigma_c$  da Eq.(4.11) se escreve como:

$$\sigma_c = \begin{bmatrix} \alpha_1 G_{xz} & 0 \\ 0 & \alpha_2 G_{yz} \end{bmatrix} \varepsilon_c = D_c \varepsilon_c \quad (4.15)$$

no qual,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são os coeficientes de distorção transversal. Em placas de espessura constante e material homogêneo adota-se  $\alpha_1 = \alpha_2 = 5/6$  (Oñate, 1992).

#### 4.4. ESFORÇOS E DEFORMAÇÕES GENERALIZADAS

O vetor de esforços  $\hat{\sigma}$  em um ponto da superfície média é definido por:

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_f \\ \dots \\ \hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ \dots \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-1/2}^{+1/2} \begin{Bmatrix} z\sigma_x \\ z\sigma_y \\ z\tau_{xy} \\ \dots \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \int_{-1/2}^{+1/2} \begin{Bmatrix} z\sigma_f \\ \dots \\ \sigma_c \end{Bmatrix} dz \tag{4.16}$$

Na qual:  $\hat{\sigma}_f$  e  $\hat{\sigma}_c$  são os vetores de momentos fletores e esforços cortantes, respectivamente. Pode ser observado da Eq.(4.16) que os momentos  $M_x$ ,  $M_y$ , e  $M_{xy}$  são obtidos integrando ao longo da espessura o momento com relação a superfície média das tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , respectivamente, e os esforços cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$  são a resultante sobre a espessura das tensões tangenciais transversais  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , respectivamente. A Figura (4.5) mostra a convenção de sinais para os esforços.

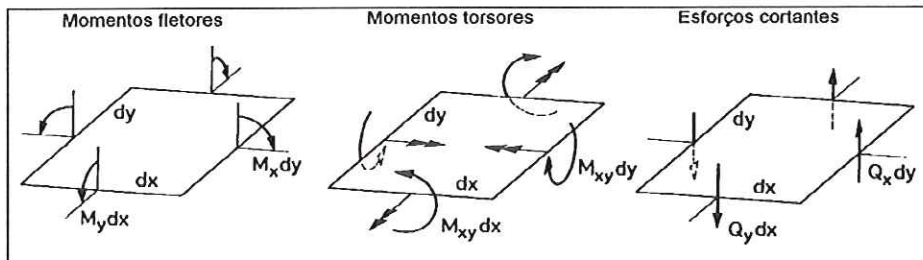


Figura (4.5): Convenção de sinais para esforços em uma placa

Considerando a Eq.(4.12) e a Eq.(4.15), a Eq.(4.16) pode ser rescrita como:

$$\bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_f \\ \dots \\ \hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \int_{-1/2}^{+1/2} \begin{Bmatrix} zD_f \varepsilon_f \\ \dots \\ D_c \varepsilon_c \end{Bmatrix} dz \quad (4.17)$$

Ou ainda:

$$\bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_f \\ \dots \\ \hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \int_{-1/2}^{+1/2} \left[ \begin{array}{c} zD_f \left\{ \begin{array}{c} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \vdots \\ \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{array} \right\} \end{array} \right\} \\ D_c \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{array} \right\} \end{array} \right] dz =$$

$$= \left[ \begin{array}{c} \left( \int_{-1/2}^{+1/2} z^2 dz \right) D_f \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \vdots \\ \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{array} \right\} \end{array} \right\} \\ \left( \int_{-1/2}^{+1/2} dz \right) D_c \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{array} \right\} \end{array} \right] = \left\{ \begin{array}{c} \frac{t^3}{12} D \hat{\varepsilon}_f \\ \vdots \\ t D_c \hat{\varepsilon}_c \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \hat{D}_f \hat{\varepsilon}_f \\ \vdots \\ \hat{D}_c \hat{\varepsilon}_c \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

Na qual, as matrizes generalizadas de flexão e cortante são, respectivamente:

$$\hat{D}_f = \frac{t^3}{12} D_f \quad \text{e} \quad \hat{D}_c = t \hat{D}_c \quad (4.19)$$

E os vetores de deformações generalizadas de flexão e cortante são:

$$\hat{\varepsilon}_f = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{array} \right\} \quad (4.20a)$$

$$\hat{\varepsilon}_c = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{array} \right\} \quad (4.20b)$$

Deve ser observado que  $\hat{\varepsilon}_f$  e  $\hat{\varepsilon}_c$  podem ser interpretados com os vetores de curvatura e de cisalhamento transversal de um ponto da superfície média da placa. Comparando a Eq.(4.10) e a Eq.(4.19), a relação entre os vetores de deformação e os de deformação generalizada é imediata, ou seja:

$$\varepsilon_f = z \hat{\varepsilon}_f \quad \text{e} \quad \varepsilon_c = \hat{\varepsilon}_c \quad (4.21)$$

A Equação (4.20) pode ser rescrita como:

$$\hat{\sigma} = \left\{ \begin{array}{c} \hat{\sigma}_f \\ \dots \\ \hat{\sigma}_c \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} \hat{D}_f & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & \hat{D}_c \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \hat{\varepsilon}_f \\ \dots \\ \hat{\varepsilon}_c \end{array} \right\} = \hat{D} \hat{\varepsilon} \quad (4.22)$$

A Equação (4.22) mostra que a relação constitutiva entre o vetor de esforços  $\hat{\sigma}$  e o vetor de deformações generalizadas  $\hat{\varepsilon}$  é análoga à



relação entre o vetor de tensões  $\sigma$  e o vetor de deformações  $\varepsilon$ , dado pela Eq.(4.11).

#### 4.5. PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Para maior simplicidade, a expressão dos trabalhos virtuais é considerada em uma placa sobre a qual atuam uma carga uniformemente distribuída  $q$  e forças pontuais  $W_i$  (ambas na direção  $z$ ). A igualdade entre o trabalho interno de deformação virtual e o das forças exteriores pode ser dada na forma clássica por:

$$\iiint_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \iint_A \delta w q dA + \sum \delta w_i W_i \quad (4.23)$$

O trabalho de deformações virtuais pode ser escrito em função dos esforços e das deformações generalizadas virtuais, dado pela Eq.(4.9), da Eq.(4.10) e da Eq.(4.17), tem-se:

$$\begin{aligned} \iiint_V \delta \varepsilon^T \sigma dV &= \iiint_V \delta [z \hat{\varepsilon}_f^T, \hat{\varepsilon}_c^T] \begin{Bmatrix} \sigma_f \\ \sigma_c \end{Bmatrix} dV = \iiint_V \delta \hat{\varepsilon}^T \begin{Bmatrix} z \sigma_f \\ \sigma_c \end{Bmatrix} dV = \\ &= \iint_A \delta \hat{\varepsilon}^T \left[ \int_{-1/2}^{+1/2} \begin{Bmatrix} z \sigma_f \\ \sigma_c \end{Bmatrix} dz \right] dA = \iint_A \delta \hat{\varepsilon}^T \hat{\sigma} dA \end{aligned} \quad (4.24)$$

Assim, aplicando os esforços e as deformações generalizadas, o problema de flexão de placas adquire um caráter bidimensional, já que todas as integrais que aparecem no PTV são em duas dimensões.

É importante destacar que no integrando da Eq.(4.24) não aparecem derivadas de uma ordem maior do que um. Isto implica que os elementos finitos devem ter continuidade de classe  $C_0$ , ao contrário da formulação de Kirchhoff na qual a presença de derivadas de segunda ordem no PTV exigia continuidade de classe  $C_1$  (Oñate, 1992).

#### 4.6. FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

Para maior generalidade esta formulação trata de um elemento finito isoparamétrico de classe  $C_0$  de  $n$  nós.

##### 4.6.1. DISCRETIZAÇÃO DO CAMPO DE MOVIMENTOS

A Figura (4.6) mostra a discretização da superfície média de uma estrutura em uma malha de elementos de placa isoparamétricos de classe  $C_0$ .

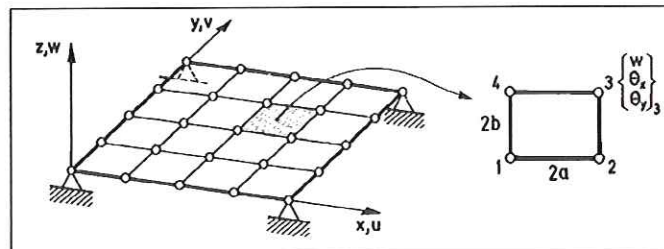


Figura (4.6): Discretização com elementos de placa de quatro nós

Uma vez que cada elemento tem  $n$  nós e que a flecha e os giros são variáveis independentes, pode-se fazer a interpolação do vetor de movimento  $\mathbf{u}$  (Eq. 4.4) na seguinte forma:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} N_i w_i \\ N_i \theta_{x_i} \\ N_i \theta_{y_i} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \vdots \\ w_n \\ \theta_{x_n} \\ \theta_{y_n} \end{Bmatrix} = [N_1, N_2, \dots, N_n] \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = N \mathbf{a}^{(e)} \quad (4.25)$$

na qual:

$$N = [N_1, N_2, \dots, N_n] \quad , \quad \mathbf{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ \vdots \\ a_n^{(e)} \end{Bmatrix}$$

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

são as matrizes de funções de forma e o vetor de movimento do elemento  $e$  de um nó  $i$ , respectivamente (Oñate, 1992).

#### 4.6.2. DISCRETIZAÇÃO DO CAMPO DE DEFORMAÇÕES GENERALIZADAS

O vetor de deformações generalizadas pode ser expresso por meio da Eq.(4.20) e da Eq.(4.25).

$$\begin{aligned}
 \hat{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_f \\ \dots \\ \hat{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \\ \dots \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} -\frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{x_i} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{y_i} \\ -\left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{x_i} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{y_i}\right) \\ \dots \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} w_i - N_i \theta_{x_i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} w_i - N_i \theta_{y_i} \end{Bmatrix} = \\
 &= \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} B_{f_i} \\ B_{c_i} \end{Bmatrix} a_i^{(e)} = [B_1, \dots, B_n] \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ \vdots \\ a_n^{(e)} \end{Bmatrix} = B a^{(e)} \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

na qual:  $B$  e  $B_i$  são as matrizes de deformação generalizada do elemento e do nó  $i$ , respectivamente.

Da Equação(4.27) se deduz que:

$$B_i = \begin{Bmatrix} B_{f_i} \\ \vdots \\ B_{c_i} \end{Bmatrix}$$

sendo:

$$B_{f_i} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_{c_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

na qual:  $B_{f_i}$  e  $B_{c_i}$  são as matrizes de deformações generalizadas de flexão e de cortante transversal associadas ao nó  $i$ , respectivamente.



#### 4.7. OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

Aplicando o PTV ao domínio discretizado de um elemento, tem-se:

$$\iint_{A^{(e)}} \delta \hat{\varepsilon}^T \hat{\sigma} dA - \iint_{A^{(e)}} \delta w q dA = \sum_i \delta w_i W_i \quad (4.29)$$

Substituindo a Eq.(4.22) na Eq.(4.29) e aplicando a Eq.(4.25) e a Eq.(4.27), obtém-se a clássica expressão:

$$\left[ \iint_{A^{(e)}} B^T \hat{D} B dA \right] a^{(e)} - \iint_{A^{(e)}} N^T q dA = q^{(e)} \quad (4.30)$$

ou ainda:

$$K^{(e)} a^{(e)} - f^{(e)} = q^{(e)} \quad (4.31)$$

na qual:  $K_{ij}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B_i^T \hat{D} B_j dA \quad (4.32)$

$$f_i^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} N_i [q, 0, 0]^T \quad (4.33.a)$$

$$q_i^{(e)} = [W_i, 0, 0]^T \quad (4.33.b)$$

As expressões acima referem-se à submatriz de rigidez que conecta os nós  $ij$  (Eq.4.32); ao vetor de forças nodais equivalentes do nó  $i$  devido a uma carga distribuída vertical (Eq.4.33a); e ao vetor de forças nodais de equilíbrio do nó  $i$  (Eq.4.33b).

A expressão da matriz de rigidez do elemento pode ser definida considerando os termos de flexão e de cortante, dada por:

$$\begin{aligned} K^{(e)} &= \iint_{A^{(e)}} [B_f^T, B_c^T]^T \hat{D} \begin{Bmatrix} B_f \\ B_c \end{Bmatrix} dA = \\ &= \int_{A^{(e)}} (B_f^T \hat{D}_f B_f + B_c^T \hat{D}_c B_c) dA = K_f^{(e)} + K_c^{(e)} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\text{na qual: } K_f^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B_f^T \hat{D}_f B_f dA \quad (4.35.a)$$

$$K_c^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B_c^T \hat{D}_c B_c dA \quad (4.35.b)$$

Obter a matriz de rigidez do elemento como soma das duas matrizes anteriores é mais vantajoso (menos trabalhoso) do que calcular diretamente a matriz total. Além disso, por meio da decomposição anterior pode-se explicar o comportamento dos elementos na análise de placas delgadas (Oñate, 1992).

#### 4.8. OBTENÇÃO DA MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO

Aplicando o *Princípio de D'Alembert* à Eq.(4.31), que representa o equilíbrio estático, é possível obter a equação de “equilíbrio dinâmico” com a inclusão das forças de inércia, dadas por:

$$b = -\rho N \ddot{u} \quad (4.36)$$

na qual:  $\rho$  é a massa por unidade de volume do elemento

$\ddot{a}$  é um vetor das acelerações nodais.

Introduzindo a força de inércia  $b$ , a Eq.(4.23) pode ser reescrita considerando as funções de forma:

$$\iint_{A^{(e)}} N^T q dA + q^{(e)} + \int_{V^{(e)}} N^T (-\rho N \ddot{a}) dV = \left( \int_{V^{(e)}} B^T D B dV \right) a^{(e)} \quad (4.37)$$

ou ainda:

$$\iint_{A^{(e)}} N^T q dA + q^{(e)} = \left( \int_{V^{(e)}} \rho N^T N dV \right) \ddot{a} + \left( \int_{V^{(e)}} B^T D B dV \right) a^{(e)} \quad (4.38)$$

Na qual:

$$\int_{V^{(e)}} \rho N^T N dV = M^{(e)} \quad (4.39)$$

A Eq.(4.39) corresponde a uma matriz quadrada, denominada *matriz de massa* do elemento (Paschoalini, 1995). Desta forma, a Eq.(4.38) pode ser reescrita em uma forma compacta por:

$$M^{(e)} \ddot{a} + K^{(e)} a = f^{(e)} + q^{(e)} = \bar{f} \quad (4.40)$$

A Eq.(4.40) representa a equação de equilíbrio dinâmico do elemento de placa.

## *CAPÍTULO 5*

### *Modelo da Ponte*

#### **5.1 DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA**

O modelo de elementos finitos da ponte foi elaborado com base nas dimensões e características físicas de uma estrutura real, descrita por Penner (2000). A estrutura analisada corresponde ao terceiro vão da ponte rodoviária sobre o Rio Piracicaba, localizada no km 130 da via Anhanguera SP 330. Esta ponte é composta por 3 vãos de geometria retangular com comprimentos: 40,375 m/ 35,75 m/ 40,375 m, e 14,50 m de largura. A pista está dividida em 3 faixas de rolamento (FR) e um acostamento. Sobre a laje foi construído o pavimento rígido, ambos em concreto armado, com espessura total de 0,28 m. O conjunto laje mais pavimento rígido compõe o tabuleiro da ponte, e está apoiado em 6 vigas longitudinais (L1, L2 ... L6). Os detalhes da estrutura estão esquematizados na Fig.(5.1) e Fig.(5.2). A Figura (5.3) apresenta as dimensões do tabuleiro.



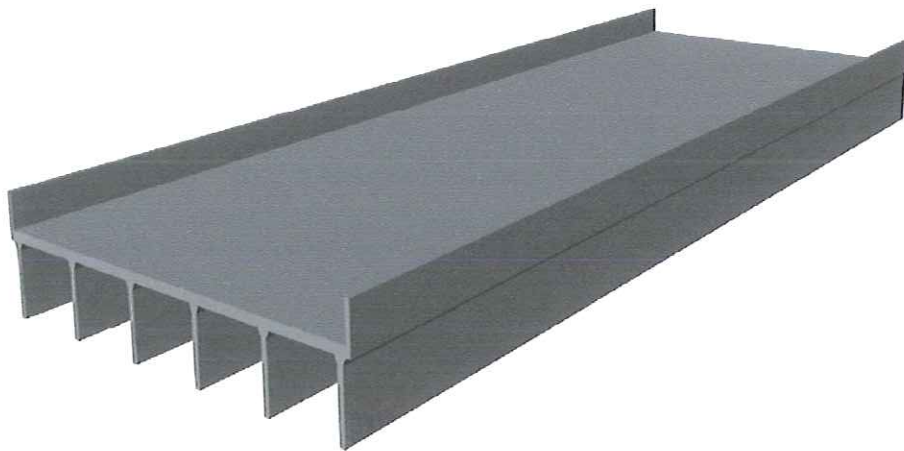


Figura (5.1): Esquema do 3º vão da ponte sobre o Rio Piracicaba

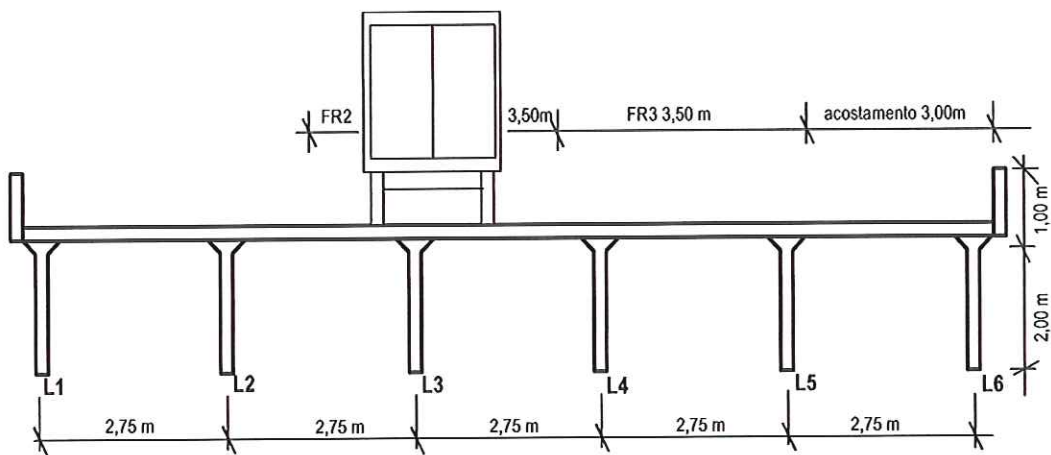


Figura (5.2): Corte transversal da ponte e posição do veículo sobre FR2

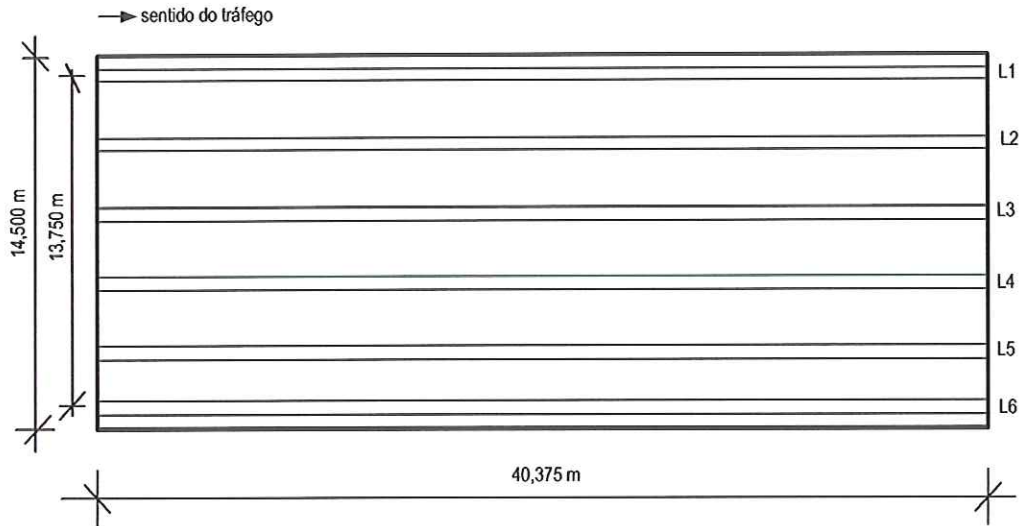


Figura (5.3): Dimensões do tabuleiro e distribuição das vigas

## 5.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS: PLACA E VIGA

As matrizes de massa e rigidez do tabuleiro foram calculadas por elementos de placa de 9 nós com 3 graus de liberdade por nó: translação em  $z$ , e rotação em  $x$  e  $y$ , como foi descrito no capítulo anterior. A Figura (5.4) mostra a malha do modelo e o sistema de referência adotado. As propriedades do material da estrutura, concreto armado, são apresentadas na Tabela (5.1).

Tabela (5.1): Propriedades do material da estrutura

módulo de elasticidade	$30 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$
coeficiente de Poisson	0,3
densidade	$2,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

A malha do modelo é definida para 190 (19x10) elementos e 819 nós. Uma vez que apenas as forças na direção vertical  $z$  são consideradas, as translações nas direções  $x$  e  $y$  são praticamente nulas, e estes graus de liberdade podem ser desprezados. Nos nós de ambas as extremidades onde estão os apoios (lados menores), são consideradas apenas as rotações em  $x$  e  $y$ . Desta forma, o modelo possui 2415 graus de liberdade. A Figura (5.5) mostra os detalhes dos apoios, as posições de passagem do veículo e a localização das longarinas sobre a malha.

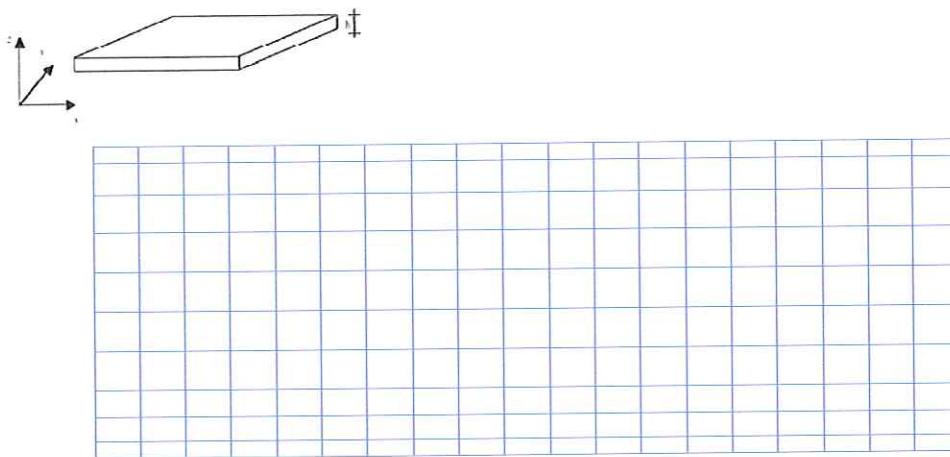


Figura (5.4): Malha de elementos de placa e sistema de referência para uma placa retangular de espessura  $h$

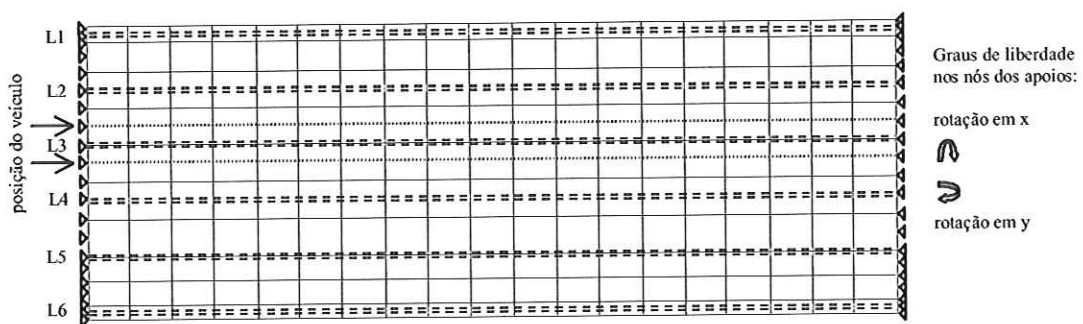


Figura (5.5): Detalhe dos apoios, localização das longarinas e faixa de travessia do veículo

As matrizes de massa e rigidez referentes às vigas (L1 a L6) foram calculadas com elementos de viga de 6 graus de liberdade por nó de acordo com a formulação apresentada por Yokoyama (1990) para a massa, e por Przemieniecki (1968) para a rigidez, de modo análogo ao elemento BEAM4 do pacote ANSYS<sup>R</sup>. Estas matrizes foram acopladas nas respectivas matrizes do tabuleiro, conforme os graus de liberdade correspondentes: deslocamento em  $z$ , rotações em  $x$  e em  $y$ .

A matriz de amortecimento da estrutura analisada é obtida considerando amortecimento proporcional conforme apresentado por Bathe (1996). Para o coeficiente de amortecimento foi adotado o valor de 0.02 para todos os modos. Este é um valor médio comumente encontrado na literatura para pontes em concreto armado.

### 5.3 PARÂMETROS MODAIS

Com o modelo da estrutura, formado pelas matrizes de massa e rigidez do tabuleiro e das vigas, foram calculadas as frequências naturais, apresentadas na Tabela (5.2), e os modos de vibrar da estrutura, ilustrados na Fig.(5.6).

Tabela (5.2): Frequências naturais (Hz) da estrutura analisada

3,21	Flexão longitudinal
4,45	Torção
7,01	Flexão transversal



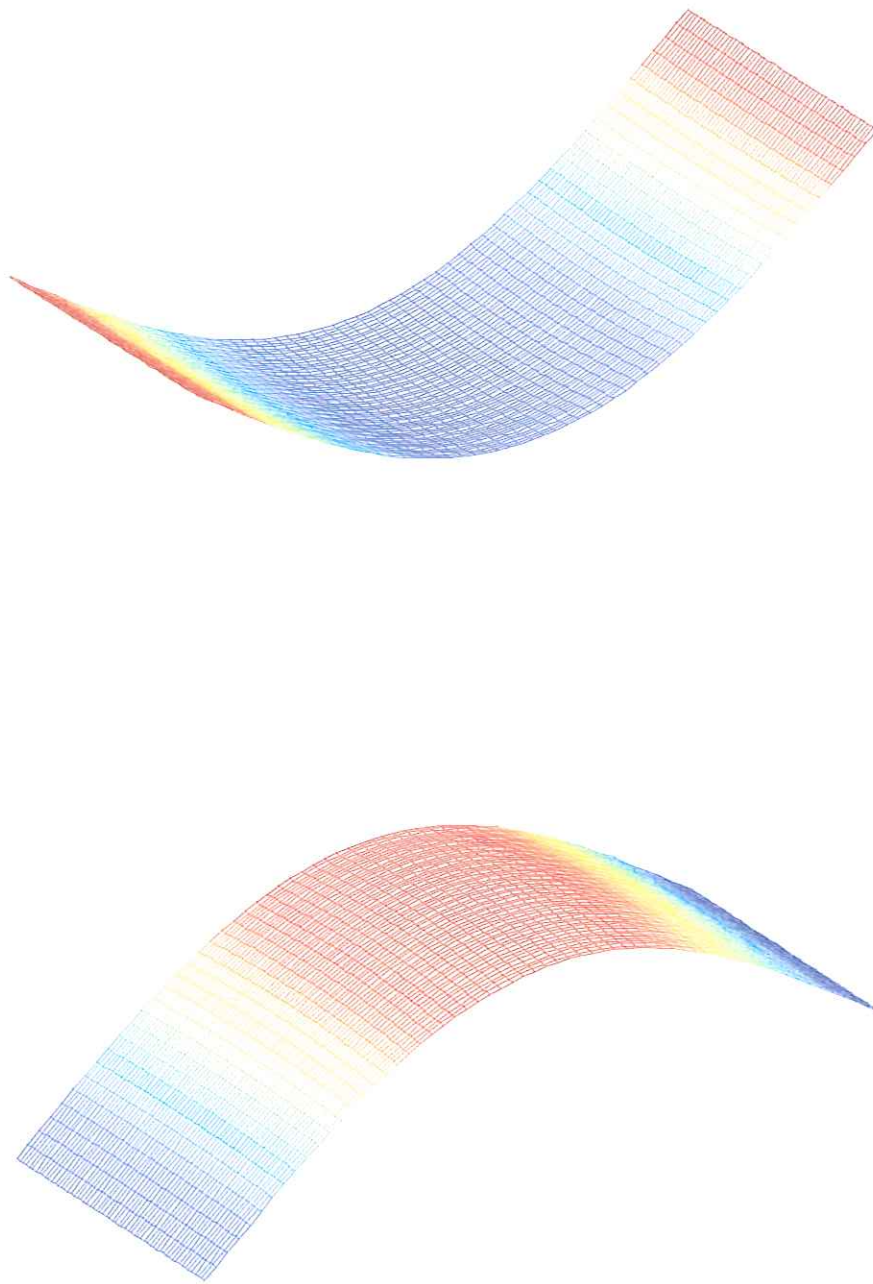
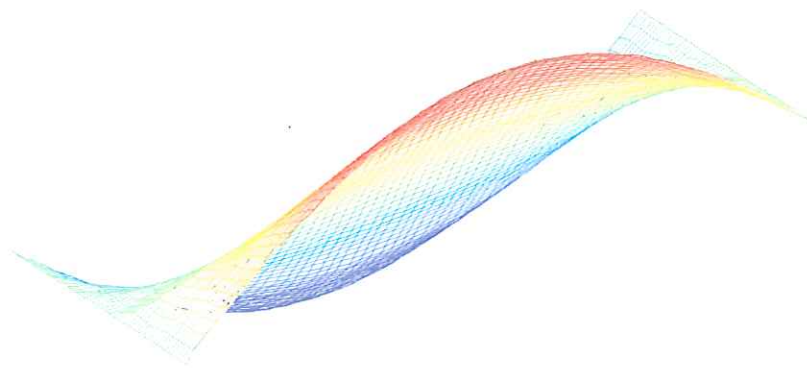
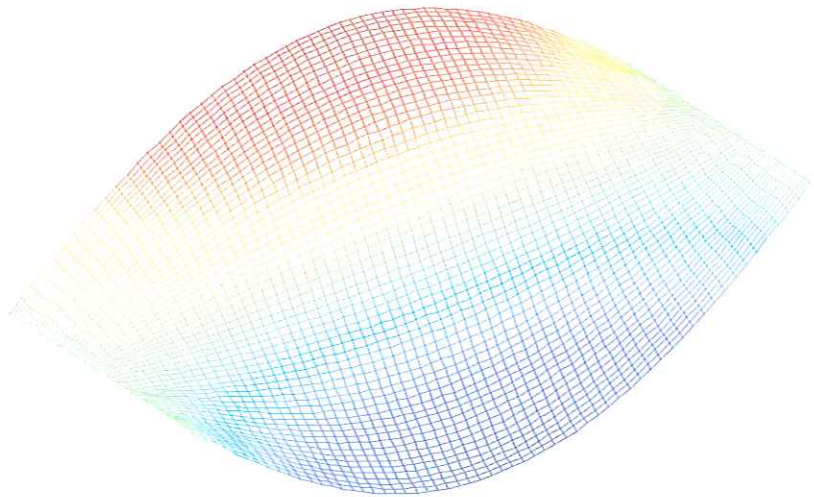


Figura (5.6 a) 1º modo: flexão longitudinal (3,21 Hz)



(Figura 5.6 b) 2º modo: torção (4,45 Hz)

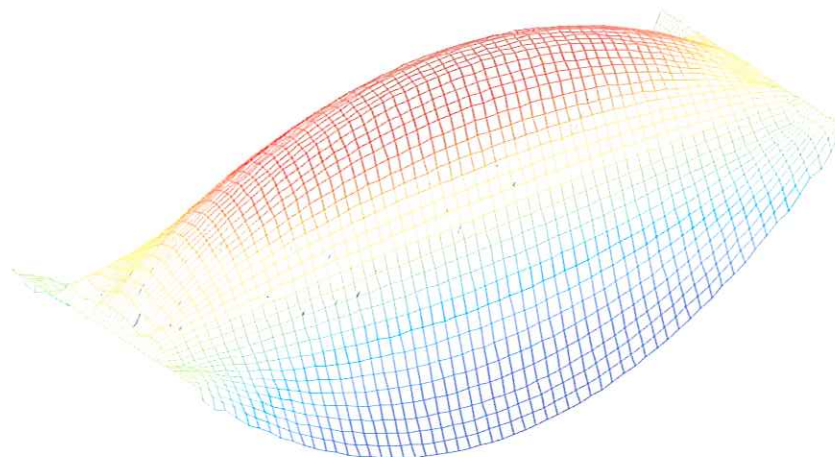
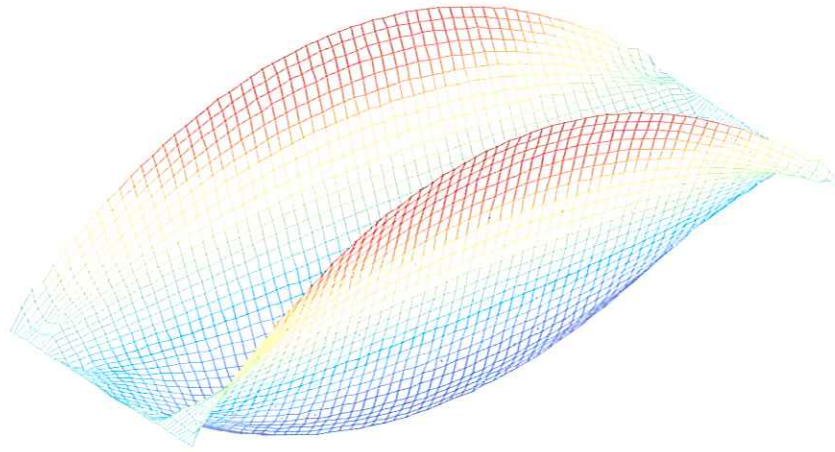


Figura (5.6 c) 3º modo: flexão transversal (7,01 Hz)

Figura (5.6): Três primeiros modos de vibrar da estrutura analisada

#### 5.4 AVALIAÇÃO DO MODELO DA PONTE

Para avaliar o modelo elaborado, as frequências calculadas são comparadas com as frequências obtidas em campo, apresentadas por Penner (2000). A Tabela (5.3) mostra as frequências para os três primeiros modos de vibrar da estrutura real. Pode ser observado que os modos obtidos com o modelo descrito correspondem aos respectivos modos da estrutura real. A primeira frequência do modelo está coerente com a experimental, no entanto, os valores das segunda e terceira frequências são um pouco diferentes.

Tabela (5.3): Frequências naturais (Hz) da estrutura real

3,22	Flexão longitudinal
3,61	Torção
5,27	Flexão transversal

Fonte: Penner (2000)

Para investigar a origem da diferença entre as duas frequências maiores e ajustar o modelo analítico, foram feitas simulações com alguns dos parâmetros físicos (propriedades do material) e geométricos (área da seção transversal) envolvidos. Foi verificado que simplificações adotadas no modelo das longarinas, diferenças entre as condições de contorno estabelecidas para o modelo e as existentes na prática, e alterações nas características físicas do tabuleiro podem ser consideradas as principais causas da diferença entre as frequências. Além disso, deve ser considerado que os parâmetros modais da estrutura real foram obtidos



enquanto o veículo atravessava a ponte. Desta forma, a influência do veículo no cálculo das frequências também foi avaliada.

Os parâmetros modais foram obtidos considerando o acoplamento das matrizes da estrutura e do veículo HS2044 (3 eixos e 37 toneladas) posicionado no centro da ponte, como mostra a Fig.(5.7). A Tabela (5.4) mostra a comparação entre as frequências calculadas apenas para a ponte e para o sistema acoplado.

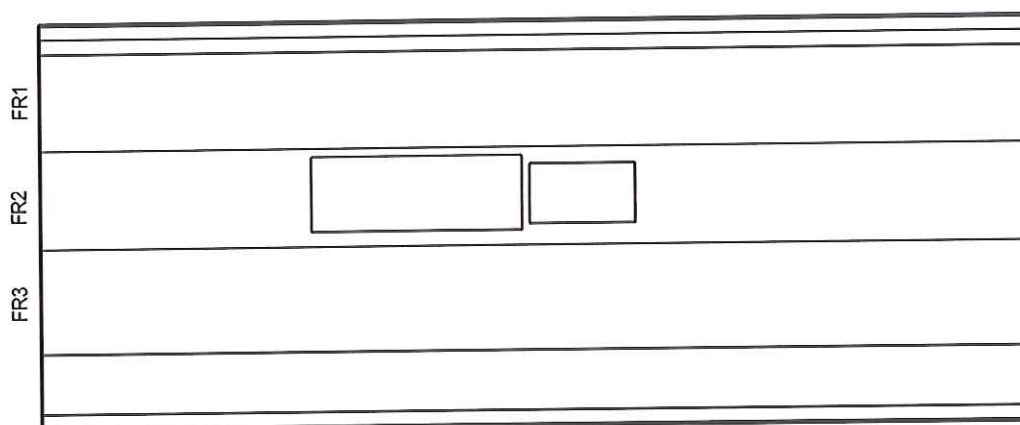


Figura (5.7): Posição do veículo (3 eixos) no centro da ponte

Tabela (5.4): Comparação entre as Frequências Naturais da Estrutura e do Sistema Ponte/Veículo Acoplado (Hz)

Modelo Numérico da Ponte (Tab.5.2)	Estrutura Real (Tab.5.3)	Modelo Numérico Ponte / Veículo Acoplados	
3,21	3,22	3,38	Flexão longitudinal
		3,69	
		4,18	
4,45	3,61	4,48	Torção
		5,28	
7,01	5,27	7,09	Flexão transversal

As frequências relacionadas aos modos de vibrar apenas da estrutura, calculadas com o modelo do sistema ponte/veículo acoplado são um pouco maiores do que as frequências calculadas com o modelo da estrutura, como era esperado, pois, por causa do acoplamento, a rigidez do sistema é maior do que a rigidez apenas da ponte. A maior aumento foi de 5% e ocorreu para a primeira frequência, de 3,21 Hz para 3,38 Hz, a terceira frequência praticamente não foi alterada.

O modelo acoplado exhibe também frequências que não aparecem quando se considera apenas a estrutura. Estes resultados indicam que um veículo, cujas dimensões são relevantes em relação à estrutura, influencia na obtenção dos parâmetros modais. Este fato foi relatado por Astudillo (1994) em ensaio experimental e será discutido mais detalhadamente no capítulo 7. No entanto, é importante salientar que durante a travessia o veículo ocupa as diferentes posições por um intervalo de tempo muito pequeno, e que a sua presença não altera as frequências naturais da estrutura, mas juntos compõem um novo sistema com características próprias.

Embora as frequências do modelo de elementos finitos não sejam exatamente iguais às da estrutura real, o modelo elaborado pode ser considerado adequado para a aplicação da metodologia proposta, pois o objetivo desta pesquisa não é a análise de uma ponte em particular, mas sim a análise da resposta dinâmica de estruturas de ponte por meio de um modelo detalhado que considera o acoplamento com o veículo.

Os resultados obtidos são apresentados e discutidos no próximo capítulo.

## *CAPÍTULO 6*

### *Análise das Respostas Dinâmicas*

O objetivo desta primeira análise é verificar se o comportamento dinâmico da estrutura, previsto pelo modelo proposto, está coerente com os resultados experimentais sobre pontes encontrados na literatura. De modo geral, as variáveis escolhidas para análise em campo são aquelas de fácil aquisição, tais como os deslocamentos e deformações. No caso de pontes, os deslocamentos dinâmicos máximos ( $Rd_{max}$ ) são relacionados aos deslocamentos estáticos máximos ( $Re_{Max}$ ) por meio do coeficiente DAF. Existem várias expressões para obter este coeficiente (Paultre et al. (1992)), a Eq.(6.1) representa a forma mais usual, e será aplicada nesta pesquisa:

$$DAF = \frac{Rd_{max}}{Re_{max}} \quad (6.1)$$

O valor de DAF pode ser obtido em diferentes momentos da travessia e em diferentes pontos da estrutura, o que permite avaliar o quanto a resposta dinâmica se aproxima ou excede a resposta estática. Assim, é possível estabelecer um padrão de comportamento que pode ser

descrito e comparado com outros resultados teóricos e/ou experimentais obtidos em outros estudos sobre pontes, inclusive com o valor de DAF recomendado pela norma. De acordo com a NBR 7187:2003:

$$DAF = 1,4 - 0,007L \geq 1$$

Na qual,  $L$  é o comprimento da ponte. Assim, para a estrutura analisada ( $L = 40,375$  m), de acordo com a norma:  $DAF = 1,12$ .

Para esta análise, as respostas dinâmicas da estrutura foram calculadas para a passagem de um veículo por vez pela faixa de rolamento FR2 com velocidade constante. Os veículos considerados foram: H2044, HS1544 e HS2044 com velocidades de 60, 70, 80, 90, 100 e 120 km/h. A rugosidade da entrada e da pista foi considerada com qualidade muito boa, e a saída, perfeitamente lisa.

A próxima seção apresenta as respostas obtidas no instante de deslocamento máximo. Em seguida é feita uma análise das respostas em outros momentos importantes da travessia: quando cada eixo do veículo entra e quando cada eixo do veículo deixa a ponte. A última seção discute a influência da qualidade da pista na resposta dinâmica. As respostas em frequência obtidas pela FFT da resposta no tempo são analisadas no próximo capítulo.

## 6.1 ANÁLISE DAS RESPOSTAS NO INSTANTE DE DESLOCAMENTO MÁXIMO

Os maiores deslocamentos da estrutura ocorrem nas posições sob o veículo, e também no instante em que o veículo está no centro da faixa de tráfego. No caso da travessia por FR2, os deslocamentos máximos ocorrem no centro da seção longitudinal referente à longarina L3.

As Figuras (6.1), (6.2) e (6.3) mostram, respectivamente, as respostas obtidas para a travessia dos veículos H2044, HS1544 e HS2044



com velocidade de 80 km/h. As respostas dinâmicas da estrutura inteira no momento de deslocamento máximo para cada veículo são apresentadas nas Figuras (6.1a), (6.2a) e (6.3a). De cada uma destas três respostas são destacadas aquelas referentes à L3, e são apresentadas nas Figuras (6.1b), (6.2b) e (6.3b), que ilustram ainda a comparação com as correspondentes respostas estáticas, com a quais foram obtidos os valores de DAF nestas condições de travessia. Verifica-se que o aumento do peso e do porte do veículo provoca aumento do deslocamento e maior proximidade das respostas dinâmicas e estáticas.

Para avaliar as diferenças entre as respostas dinâmicas em regiões diferentes da estrutura, as Figuras (6.1c), (6.2c) e (6.3c) mostram as respostas no ponto central da seção L3 e as Figuras (6.1d), (6.2d) e (6.3d), no ponto central da seção L6, onde ocorrem os menores deslocamentos. Pode ser observado que as respostas próximas à passagem são muito semelhantes, no entanto, distante da passagem, a diferença entre as respostas aumenta com o aumento do peso do veículo.

Uma análise mais detalhada do comportamento dinâmico da estrutura pode ser feita comparando os valores de DAF obtidos em todas as seções referentes às longarinas (L1 a L6), para a travessia de cada um dos três veículos com velocidades entre 60 e 120 Km/h. Estes resultados estão organizados nas Tabela (6.1), Tabela (6.2) e Tabela (6.3), de acordo com os veículos H2044, HS1544 e HS2044, respectivamente.

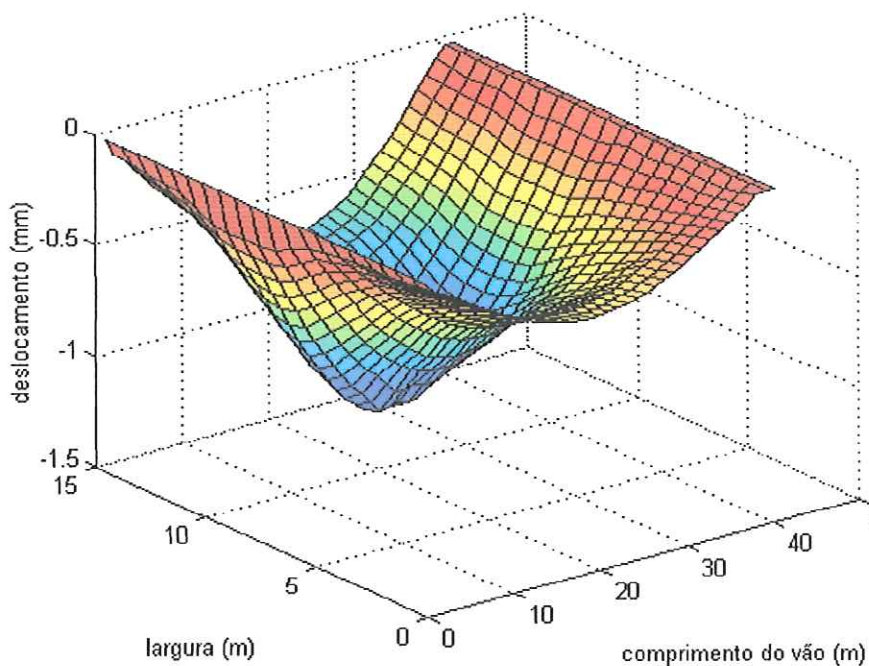


Figura (6.1 a) Resposta da ponte inteira

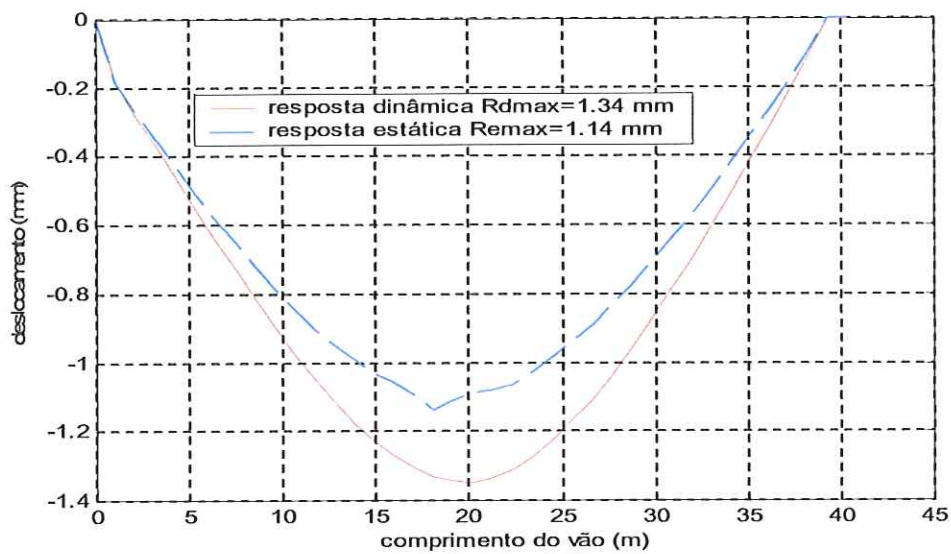


Figura (6.1 b) Resposta da seção de deslocamento máximo: L3

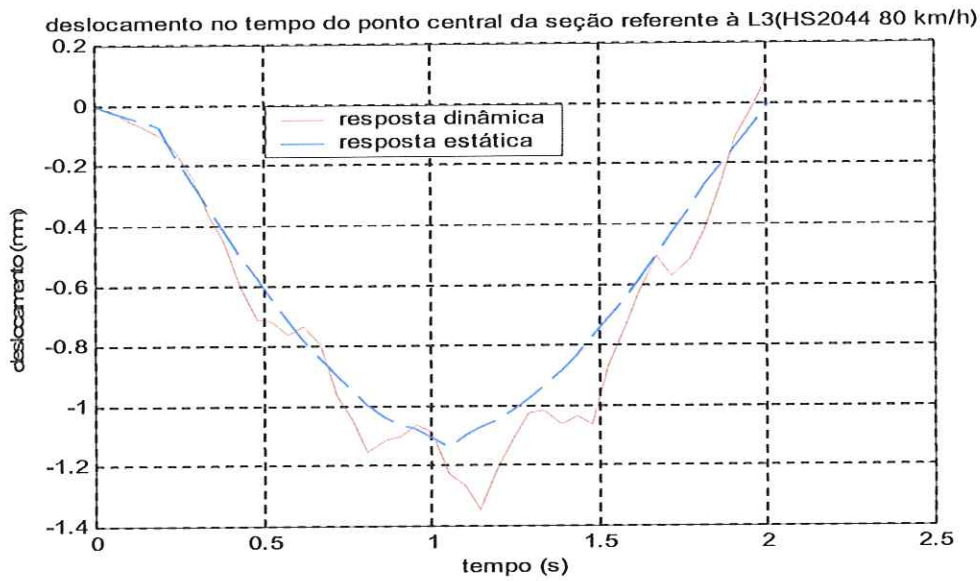


Figura (6.1 c) Resposta do ponto central da seção de deslocamento máximo (próximo da passagem do veículo)

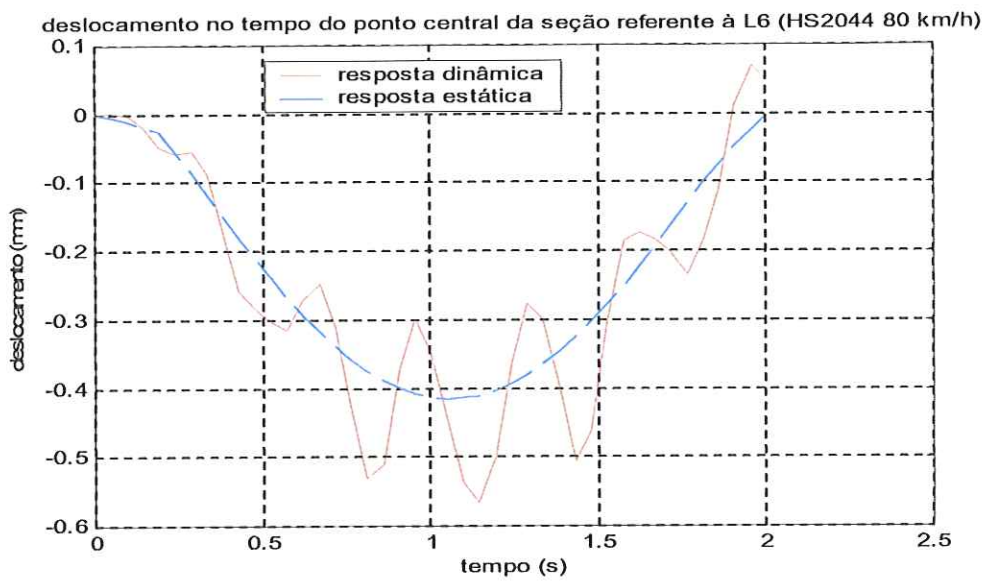


Figura (6.1 d) Resposta do ponto central da seção referente à L6 (distante da passagem do veículo)

Figura (6.1): Respostas para travessia do veículo H2044 a 80km/h

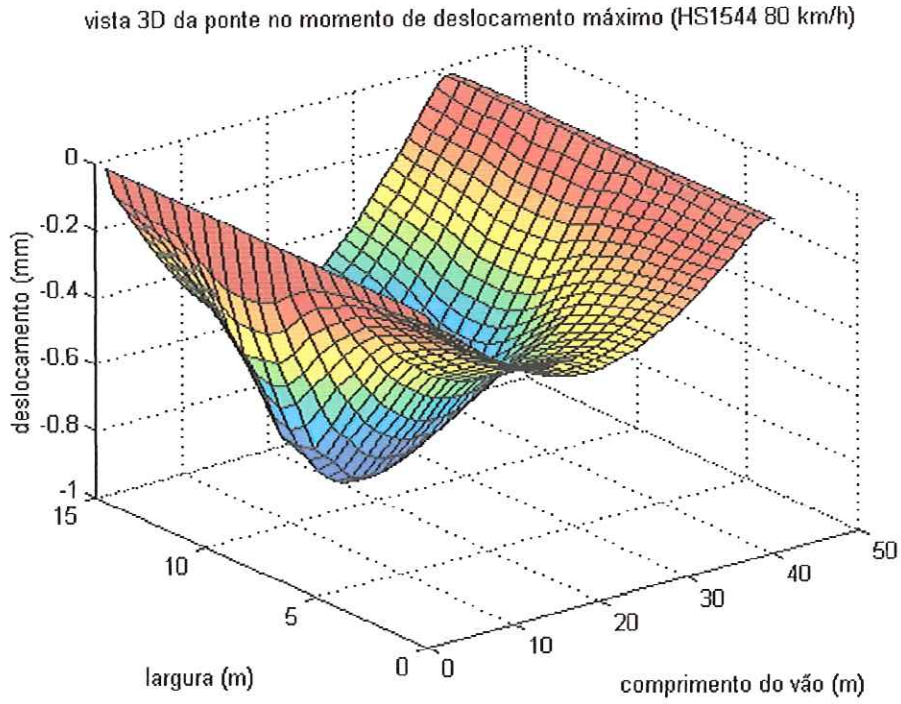


Figura (6.2 a) Resposta da ponte inteira

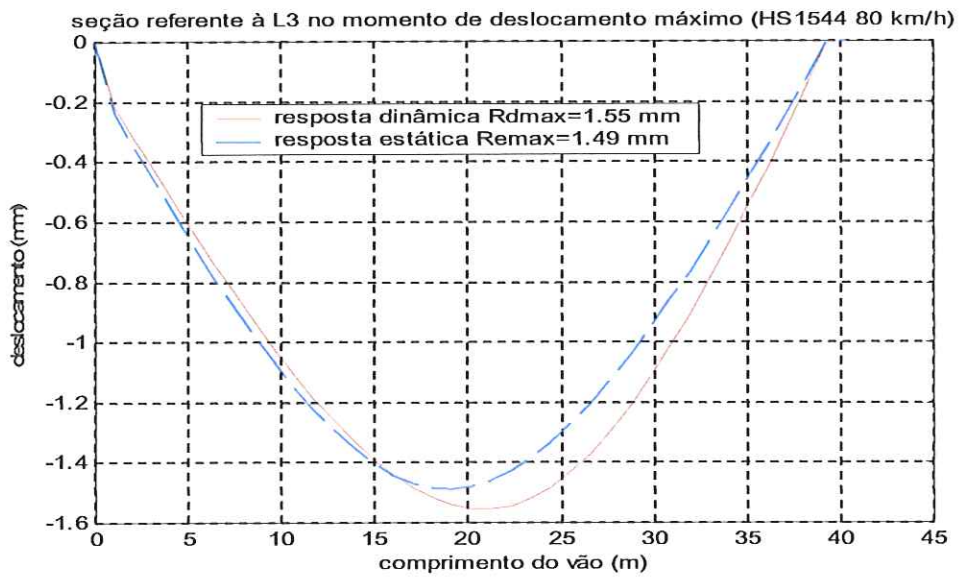


Figura (6.2 b) Resposta da seção de deslocamento máximo: L3



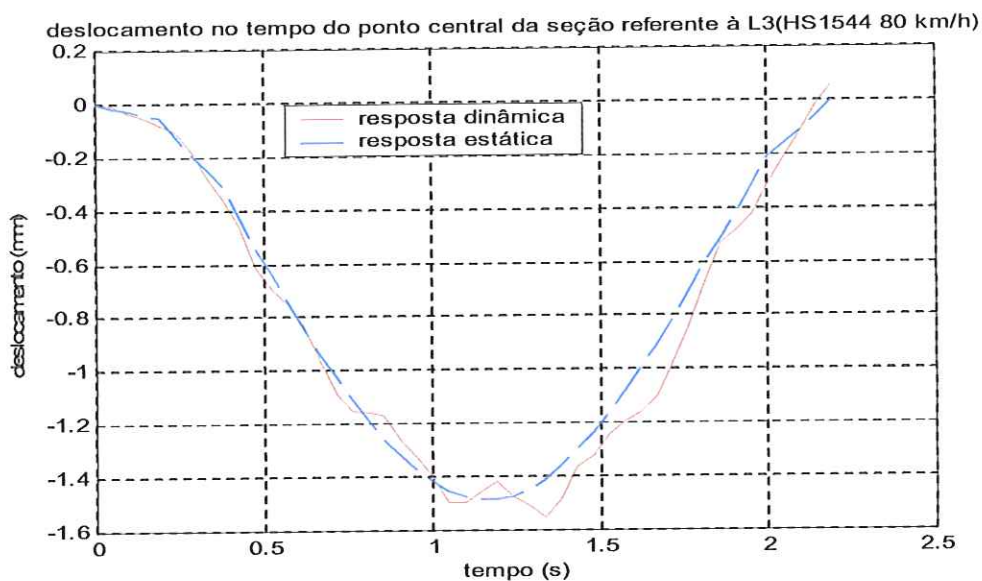


Figura (6.2 c) Resposta do ponto central da seção de deslocamento máximo (próximo da passagem)

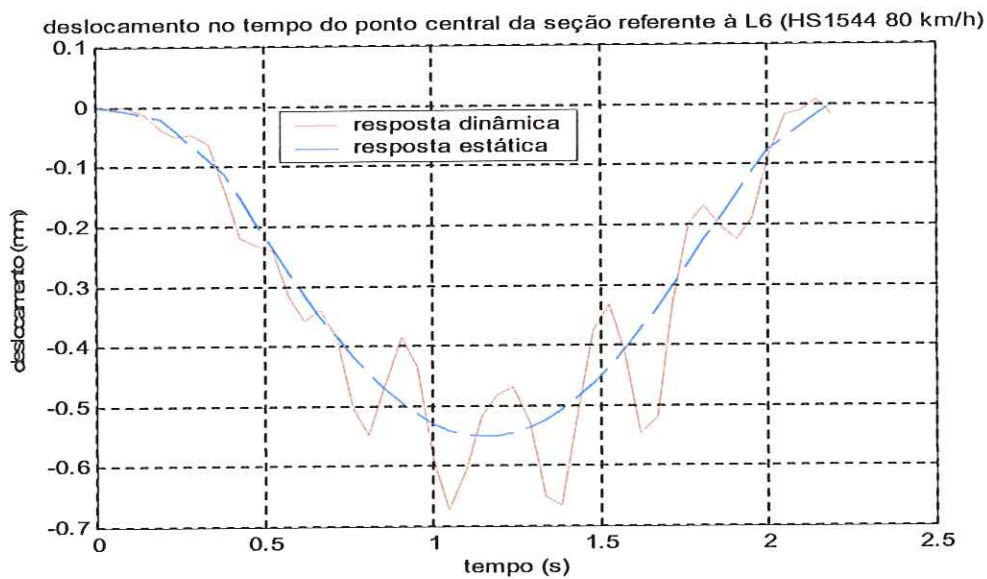


Figura (6.2 d) Resposta do ponto central da seção referente à L6 (distante da passagem)

Figura (6.2): Resposta para travessia do veículo HS1544 a 80km/h

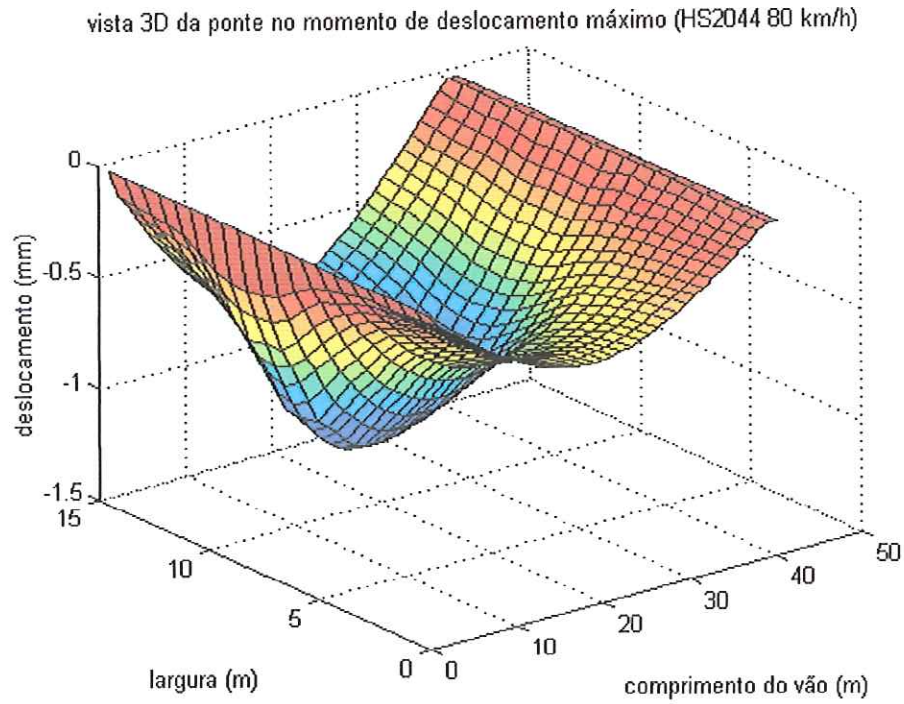


Figura (6.3 a) Resposta da ponte inteira

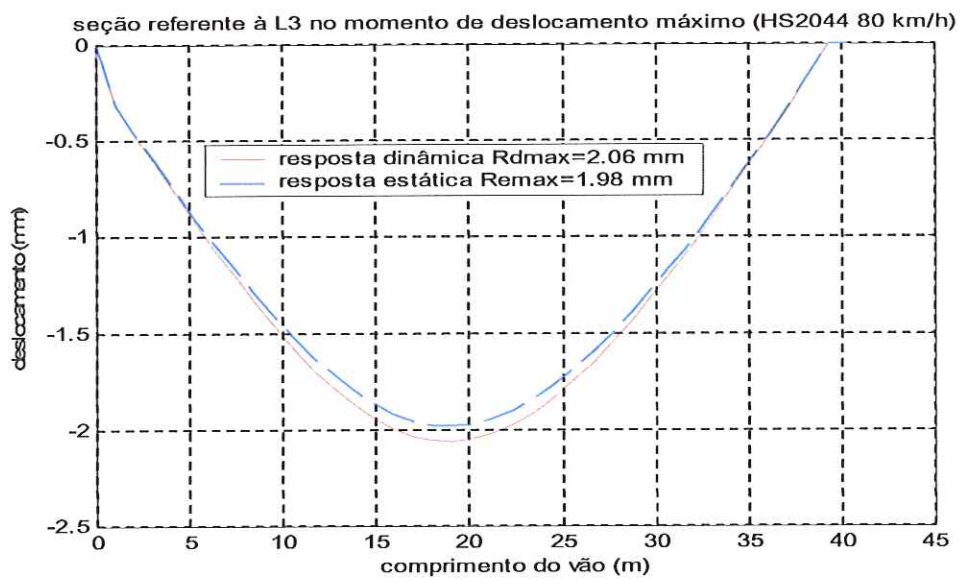


Figura (6.3 b) Resposta da seção de deslocamento máximo: L3

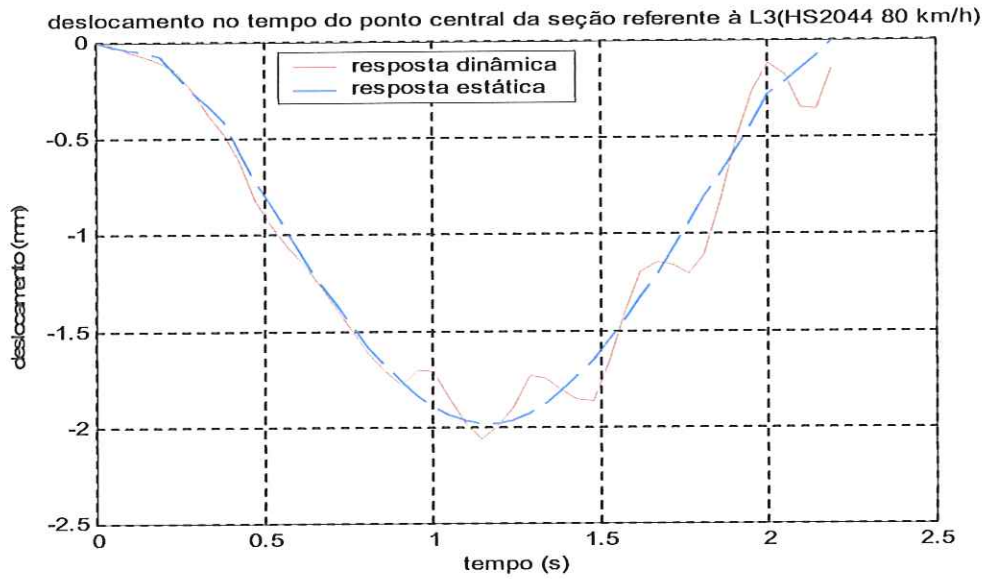


Figura (6.3 c) Resposta do ponto central da seção de deslocamento máximo (próximo da passagem do veículo)

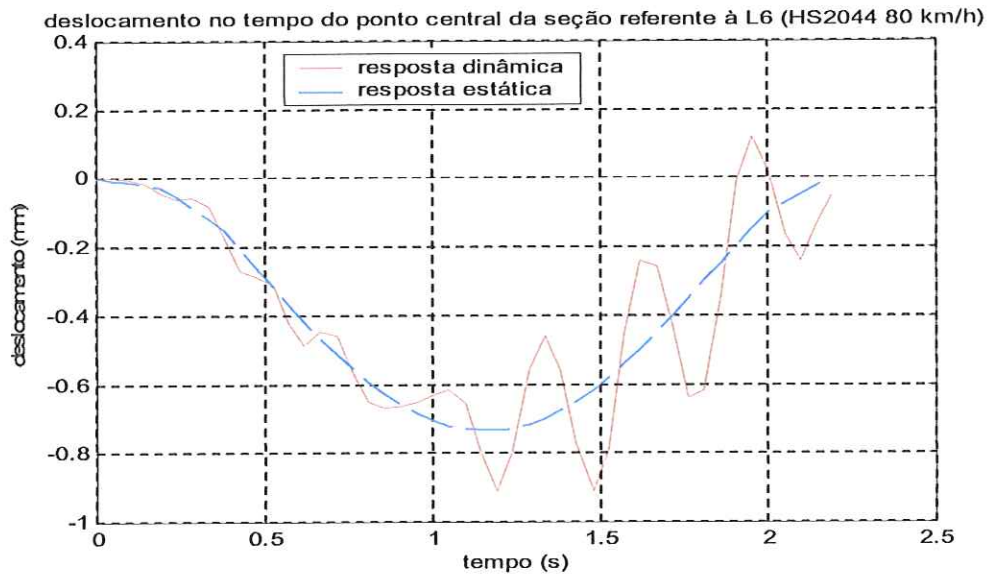


Figura (6.3 d) Resposta do ponto central da seção referente à L6 (distante da passagem do veículo)

Figura (6.3): Respostas para travessia do veículo HS2044 a 80km/h

Tabela (6.1): Valores de DAF obtidos para a travessia do veículo H2044

Veículo H2044 (2 eixos)						
	60 km/h	70 km/h	80 km/h	90 km/h	100 km/h	120 km/h
L1	1,19	1,25	1,18	1,29	1,20	1,25
L2	1,17	1,17	1,17	1,20	1,20	1,22
L3	1,14	1,15	1,20	1,18	1,22	1,23
L4	1,20	1,19	1,19	1,20	1,24	1,20
L5	1,24	1,28	1,28	1,25	1,22	1,22
L6	1,38	1,55	1,36	1,53	1,36	1,31

Tabela (6.2): Valores de DAF obtidos para a travessia do veículo HS1544

Veículo HS1544 (3 eixos)						
	60 km/h	70 km/h	80 km/h	90 km/h	100 km/h	120 km/h
L1	1,06	1,15	1,12	1,14	1,24	1,27
L2	1,01	1,10	1,07	1,11	1,14	1,22
L3	1,00	1,06	1,05	1,12	1,10	1,18
L4	1,04	1,08	1,06	1,13	1,11	1,19
L5	1,13	1,19	1,10	1,18	1,17	1,32
L6	1,27	1,35	1,22	1,34	1,42	1,43

Tabela (6.3): Valores de DAF obtidos para a travessia do veículo HS2044

Veículo HS2044 (3 eixos)						
	60 km/h	70 km/h	80 km/h	90 km/h	100 km/h	120 km/h
L1	1,15	1,07	1,09	1,18	1,17	1,24
L2	1,09	1,03	1,05	1,09	1,08	1,17
L3	1,05	1,01	1,04	1,06	1,09	1,13
L4	1,07	1,03	1,06	1,09	1,14	1,16
L5	1,19	1,10	1,10	1,17	1,22	1,21
L6	1,41	1,23	1,24	1,34	1,33	1,36



A análise dos resultados apresentados nas tabelas mostra que, em determinadas situações, as respostas dinâmicas podem superar os valores previstos pela norma ( $DAF=1,12$ ) em até 9% na região de deslocamento máximo, e em até 34 % na região mais distante da passagem. De modo geral, os resultados mostram que:

1. Os valores de DAF aumentam com o aumento da velocidade;
2. Veículos de menor porte (H2044) apresentam valores de DAF maiores do que veículos de porte maior (HS1544 e HS2044);
3. A comparação entre dois veículos de mesmo porte e pesos diferentes (HS1544 e HS2044) mostra que o veículo mais leve apresenta valores de DAF maiores. E também que existe uma faixa de velocidade entre 60 e 80 km/h na qual o DAF é maior independentemente do peso do veículo, como mostram a coluna referente à velocidade de 70 km/h para o veículo HS1544 (Tabela 6.2) e a coluna referente à velocidade de 60 km/h para o veículo HS2044 (Tabela 6.3).
4. Os valores de DAF aumentam significativamente nas seções longitudinais mais distantes da faixa de travessia

Estas mesmas observações foram feitas por Bakht et al.(1989) após analisarem dados experimentais de outras pontes, e por Penner (2000) com base em resultados medidos particularmente na ponte sobre o rio Piracicaba. Neste último trabalho, foi verificado que os valores de DAF obtidos com o veículo de prova (VP) descarregado eram maiores do que aqueles obtidos com o VP carregado. E em ambos os casos, o alto valor para o DAF obtido em campo foi explicado pelo fato de o veículo de prova ter trafegado muito distante dos sensores na pista. De acordo com Paultre et al.(1992), o problema da posição dos pontos de medidas foi

estudado por Cantieni (1983) que definiu uma região de influência fora da qual as respostas dinâmicas são maiores do que as estáticas, resultando em valores de DAF superestimados, ou seja, inadequados para avaliação e projeto da estrutura.

A análise das respostas obtidas com o modelo proposto, apresentadas previamente pelo conjunto de Figuras (6.1), (6.2) e (6.3), permite explicar facilmente a variação do DAF calculado para diferentes veículos e em diferentes pontos da estrutura. As Figuras (6.1b), (6.2b) e (6.3b) mostram que próximo da travessia a resposta dinâmica do veículo mais pesado é maior do que a resposta dinâmica do veículo mais leve, como era esperado. No entanto, o que se observa é que no caso de um veículo mais pesado, a sua resposta estática está mais próxima da sua resposta dinâmica, ou seja, quanto menor o peso do veículo, mais a resposta dinâmica supera a estática, resultando em valores de DAF maiores, embora os deslocamentos finais sejam menores do que no caso de um veículo mais pesado.

Esta mesma relação é verificada quando se comparam as respostas para um mesmo veículo, em pontos mais próximos e mais distantes da travessia, como mostram as Figuras (6.1c) e (6.1d), Figuras (6.2c) e (6.2d) e Figuras (6.3c) e (6.3d). Quanto mais próximo da aplicação da carga, mais a resposta dinâmica se aproxima da estática, resultando em valores de DAF menores, embora os deslocamentos dos pontos sob o veículo sejam maiores do que nas extremidades.

A seguir, serão apresentadas as respostas calculadas em outros momentos importantes da travessia: na entrada e na saída da ponte.

## 6.2 ANÁLISE DAS RESPOSTAS DURANTE A ENTRADA E A SAÍDA DA PONTE

A seção anterior mostrou que os valores de DAF dependem além do peso, da velocidade de travessia e do ponto de medida, ou seja, de acordo com estes fatores, no momento de deslocamento máximo, as respostas dinâmicas excediam muito ou pouco as respostas estáticas. No entanto, em alguns estudos sobre pontes e em especial na ponte sobre o rio Piracicaba foram observados casos de inversão no tabuleiro, embora as deformações fossem de pequena intensidade.

Com o modelo proposto é possível investigar o comportamento da estrutura nos instantes em que cada eixo do veículo entra ou sai da ponte, e verificar a ocorrência da inversão e de outros problemas como valores de DAF muito altos (acima de 4.0) e a torção do tabuleiro. O conjunto de Figuras (6.4), (6.5) e (6.6) mostram os deslocamentos no início e no fim da travessia dos veículos H2044 a 100 km/h, HS1544 a 70 km/h e HS2044 a 120 km/h, respectivamente. Estas figuras destacam a semelhança das respostas dinâmicas na entrada da ponte e as grandes diferenças que ocorrem na saída. As Tabelas (6.4), (6.5) e (6.6) apresentam os valores de DAF calculados em momentos distintos do início e do final da travessia dos veículos. As nove colunas das referidas tabelas correspondem aos instantes, descritos a seguir, em que a ponte apresenta um comportamento singular, ou seja diferente daquele quando o veículo está percorrendo a região central:

1. entrada do 1º eixo na ponte
2. um instante antes da entrada do 2º eixo
3. entrada do 2º eixo
4. um instante antes da entrada do 3º eixo

5. entrada do 3º eixo
6. um instante depois da saída do 1º eixo
7. um instante antes da saída do 2º eixo para o veículo de 2 eixos;  
um instante depois da saída do 2º eixo para os veículos de 3 eixos.
8. dois instantes antes da saída do 3º eixo
9. um instante antes da saída do 3º eixo

Nestes momentos da travessia, observa-se que a resposta dinâmica pode superar em mais de 100%, ou ser menor, ou ainda apresentar deslocamento contrário em relação à resposta estática.



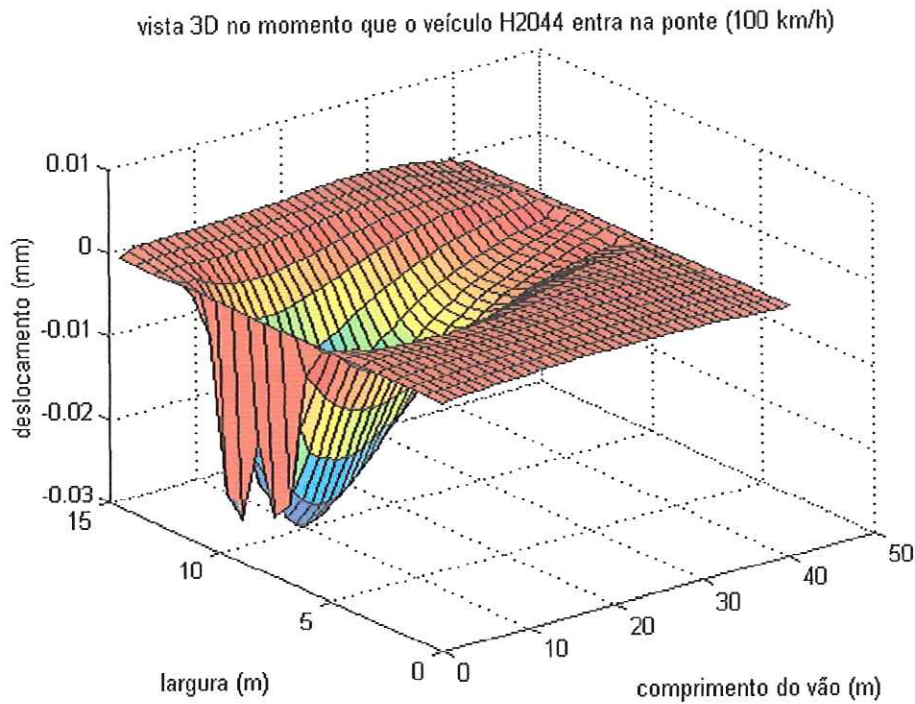


Figura (6.4 a) Resposta da ponte inteira quando o 1º eixo entra

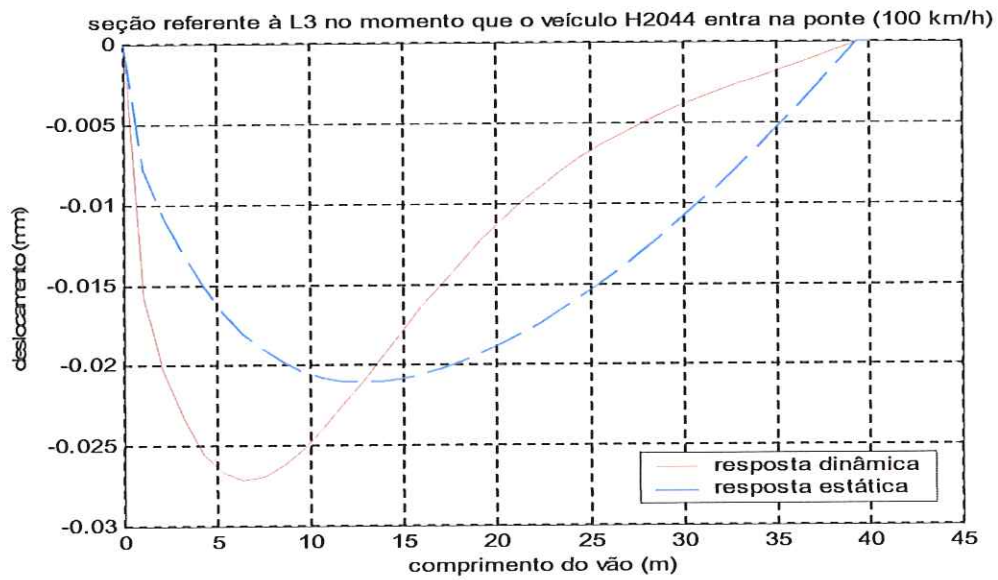


Figura (6.4 b) Resposta da seção referente à L3 quando o 1º eixo entra

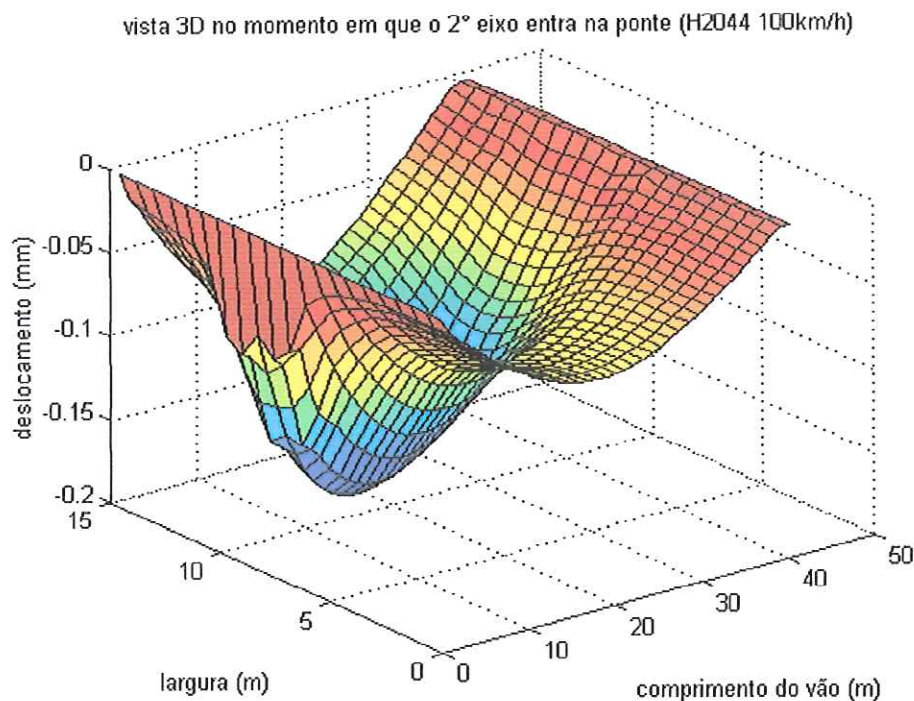


Figura (6.4 c) Resposta da ponte inteira quando o 2º eixo entra

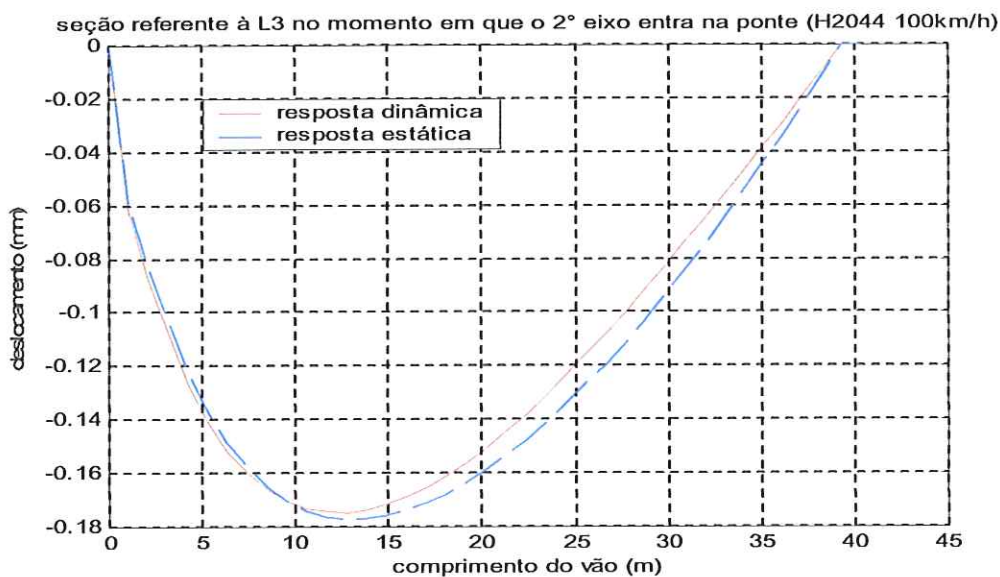


Figura (6.4 d) Resposta da seção referente à L3 quando o 2º eixo entra

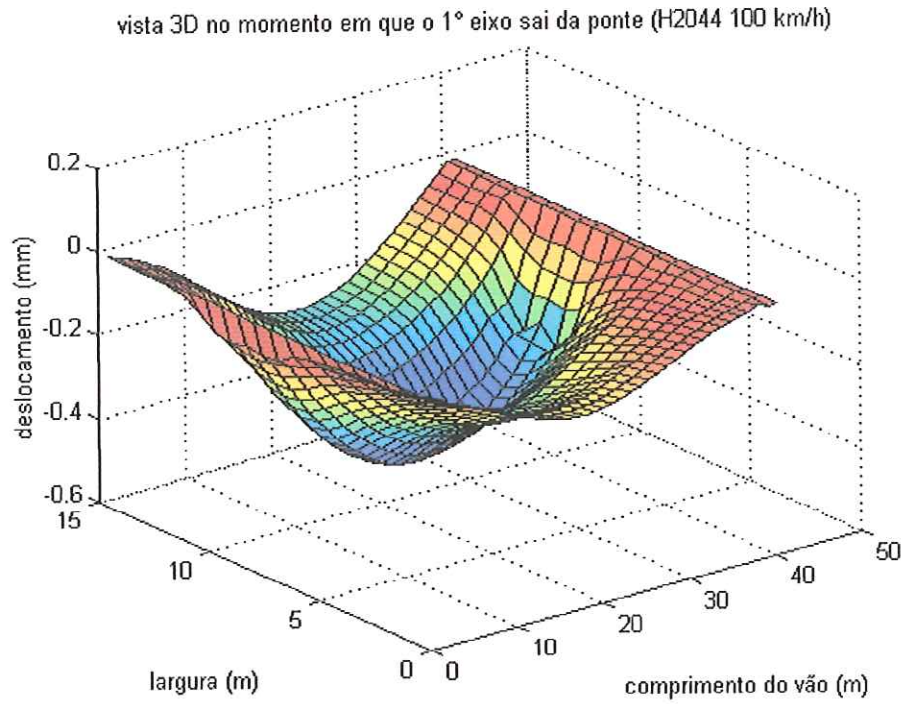


Figura (6.4 e) Resposta da ponte inteira quando o 1º eixo sai

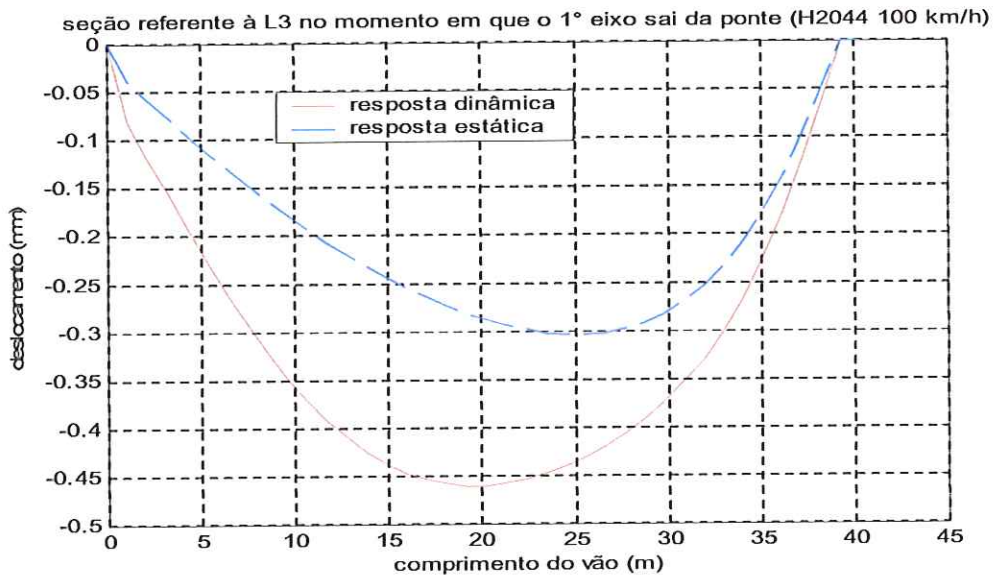


Figura (6.4 f) Resposta da seção referente à L3 quando o 1º eixo sai

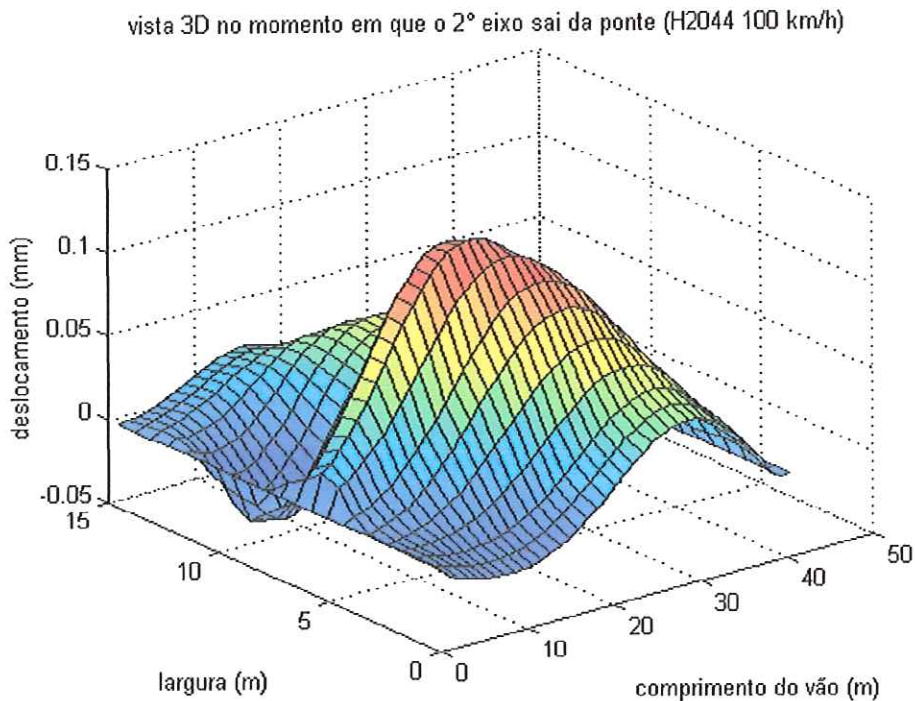


Figura (6.4 g) Resposta da ponte inteira quando o 2º eixo sai

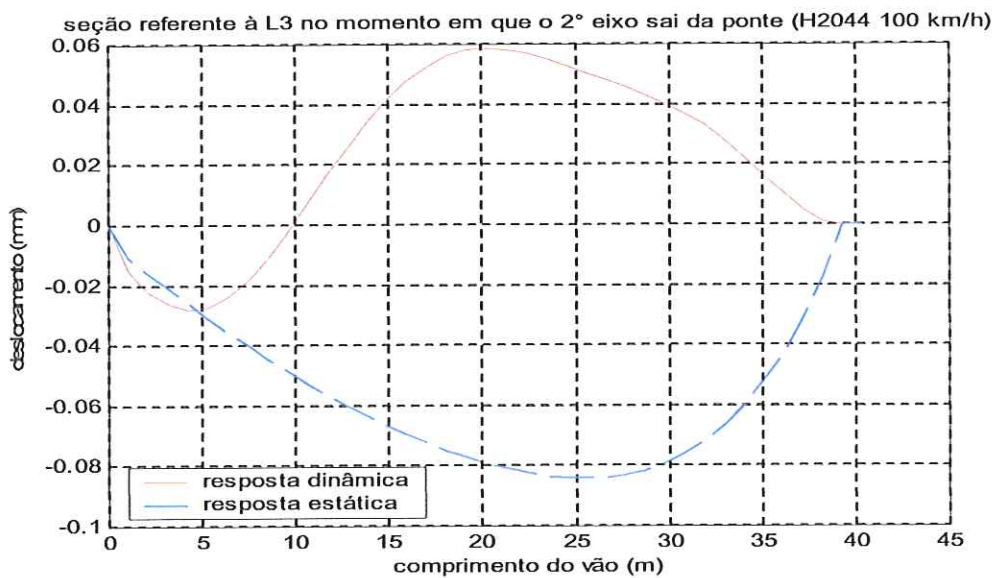


Figura (6.4 h) Resposta da seção referente à L3 quando o 2º eixo sai:

Figura (6.4): Respostas para travessia do veículo H2044 a 100 km/h



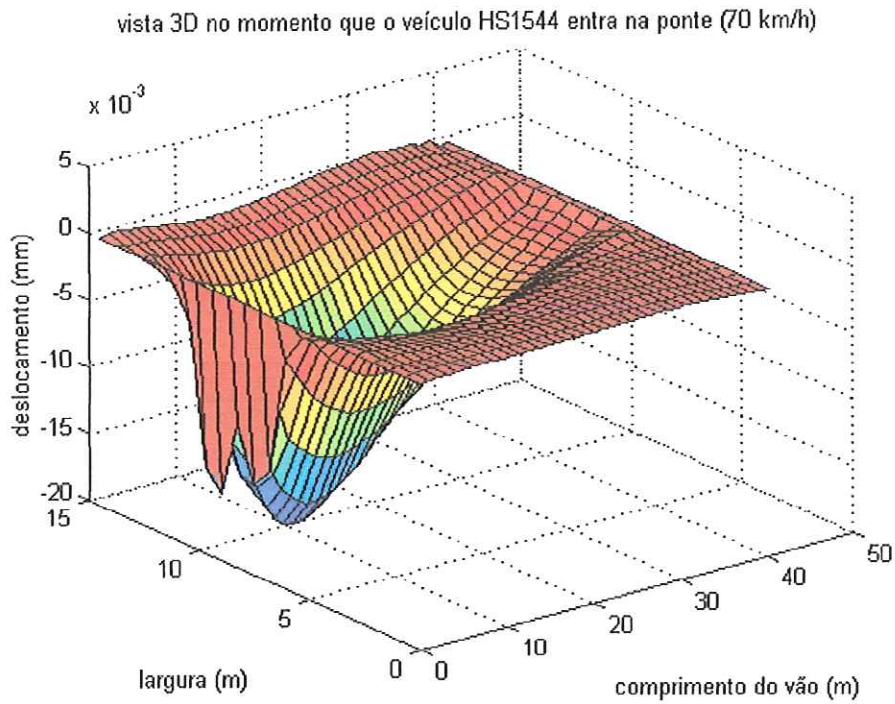


Figura (6.5 a) Resposta da ponte inteira quando o 1º eixo entra

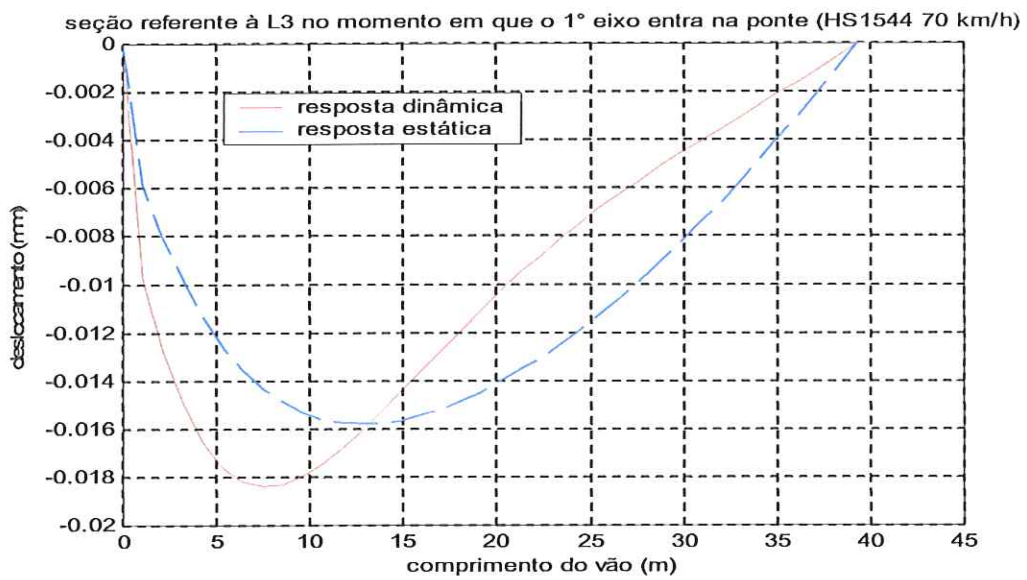


Figura (6.5 b) Resposta da seção referente à L3 quando o 1º eixo entra

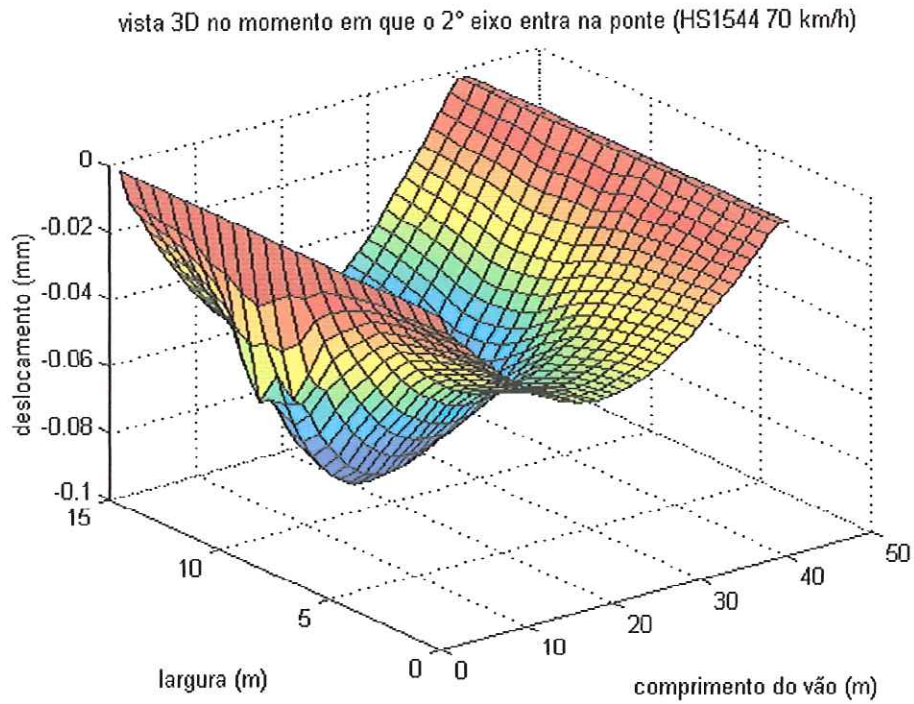


Figura (6.5 c) Resposta da ponte inteira quando o 2º eixo entra

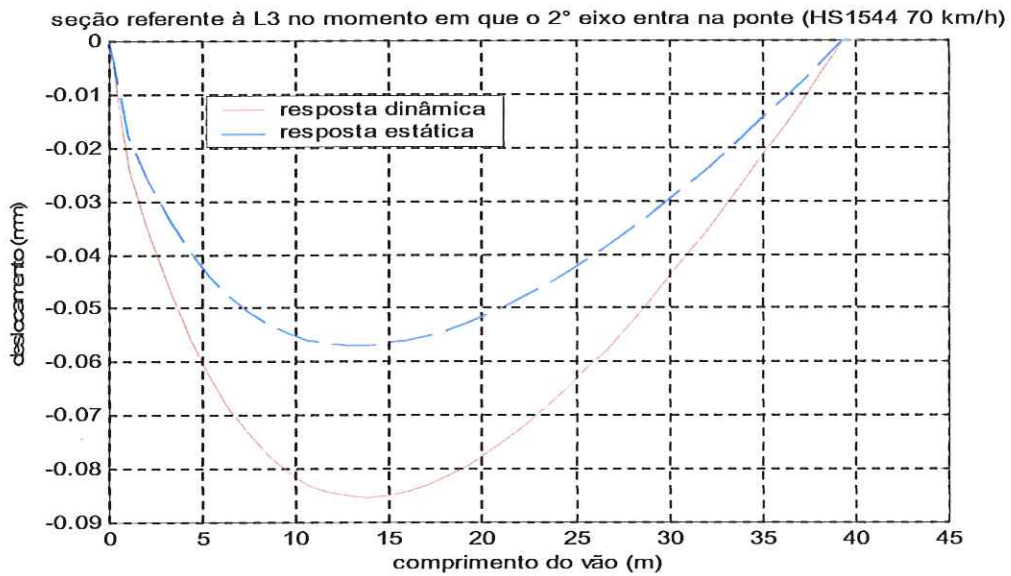


Figura (6.5 d) Resposta da seção referente à L3 quando o 2º eixo entra

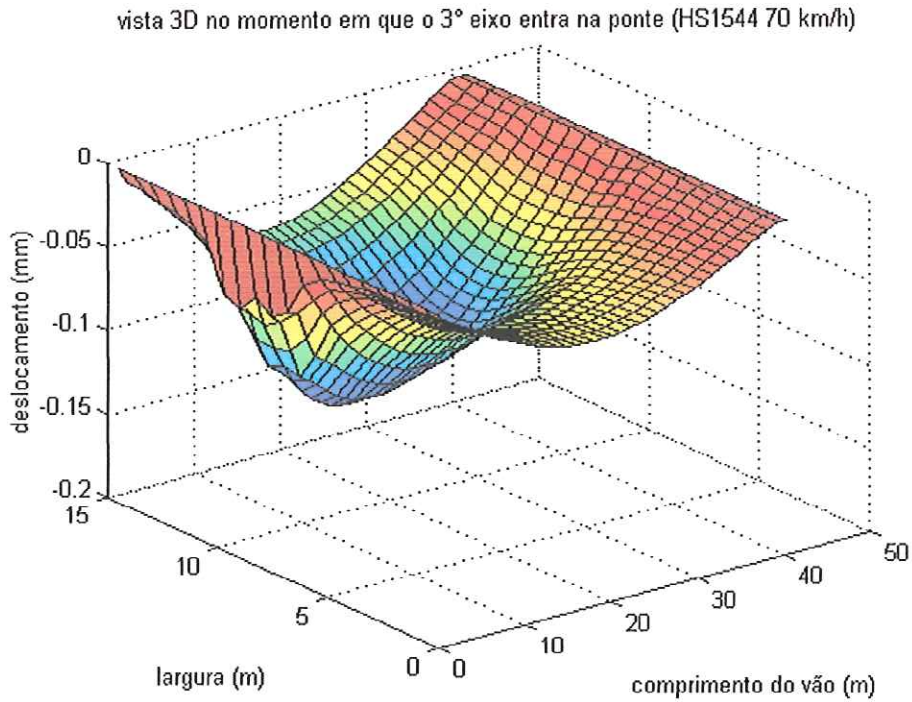


Figura (6.5 e) Resposta da ponte inteira quando o 3º eixo entra

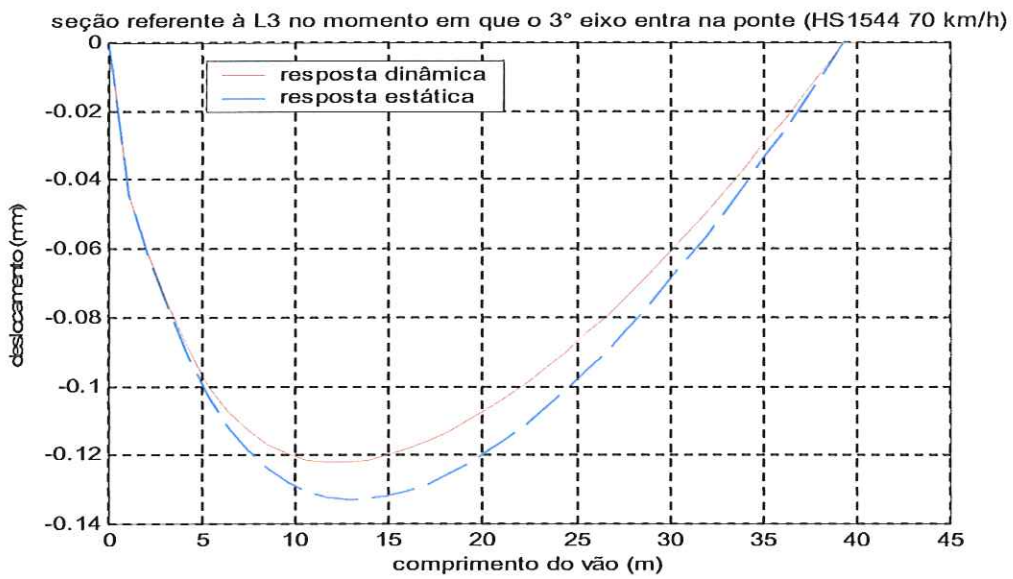


Figura (6.5 f) Resposta da seção referente à L3 quando o 3º eixo entra

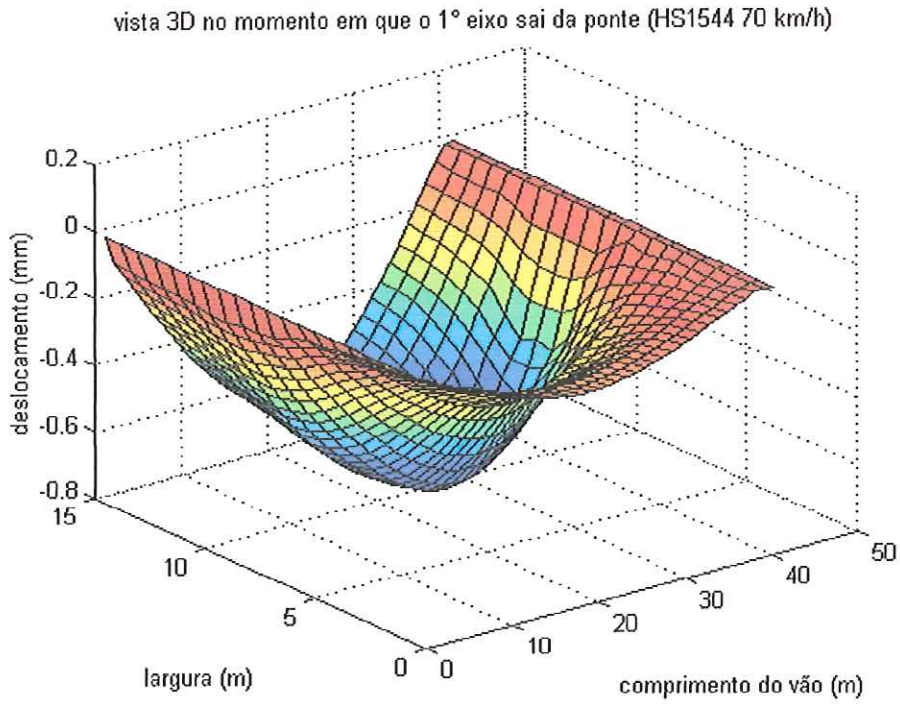


Figura (6.5 g) Resposta da ponte inteira quando o 1º eixo sai

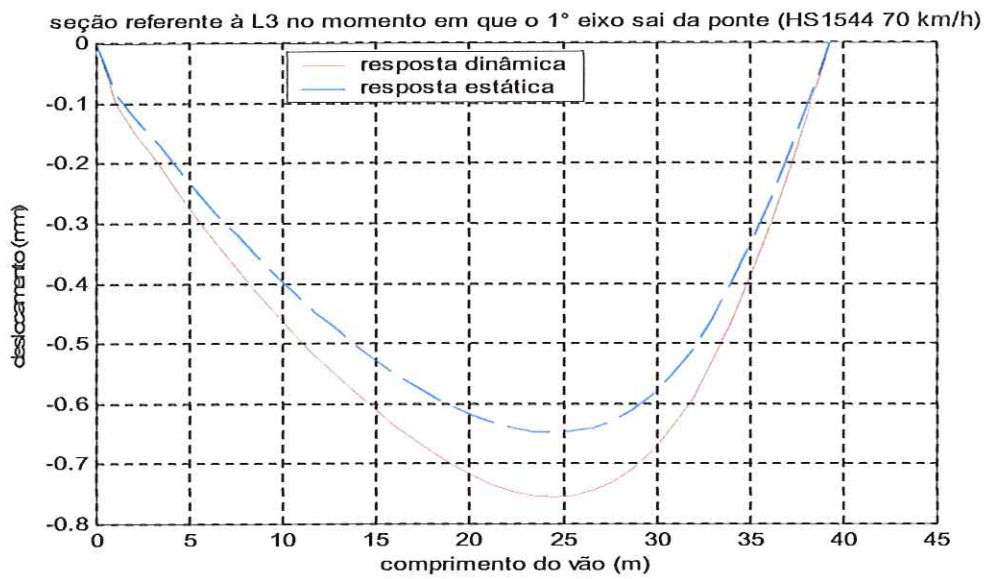


Figura (6.5 h) Resposta da seção referente à L3 quando o 1º eixo sai





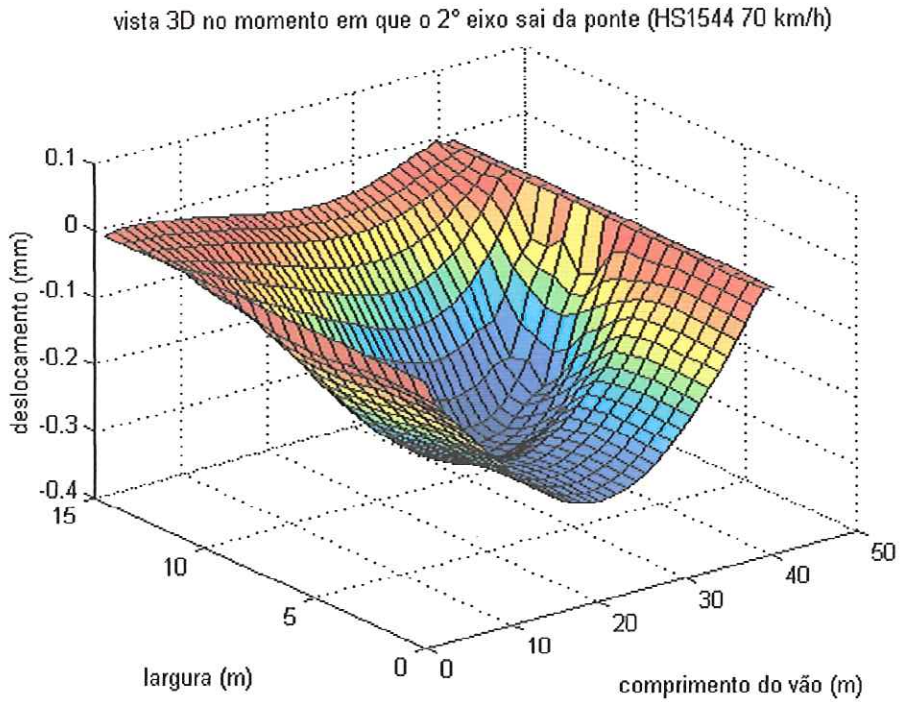


Figura (6.5 i) Resposta da ponte inteira quando o 2º eixo sai

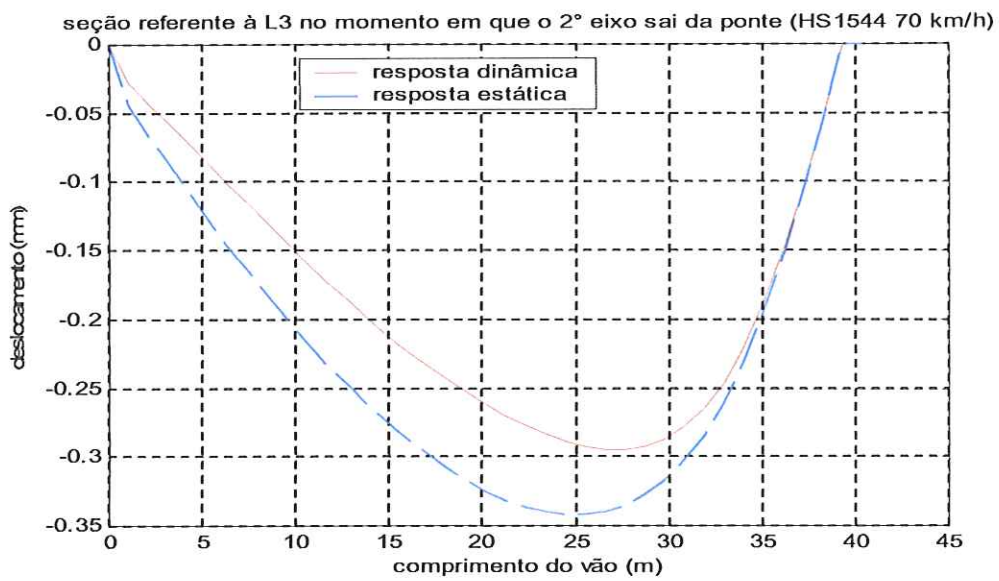


Figura (6.5 j) Resposta da seção referente à L3 quando o 2º eixo sai

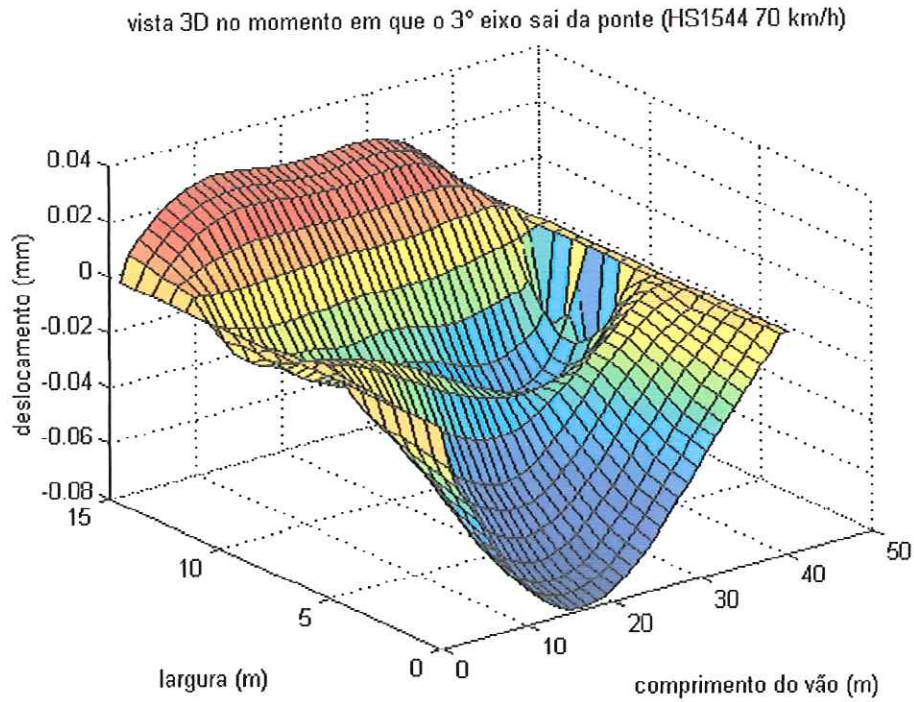


Figura (6.5 k) Resposta da ponte inteira quando o 3º eixo sai

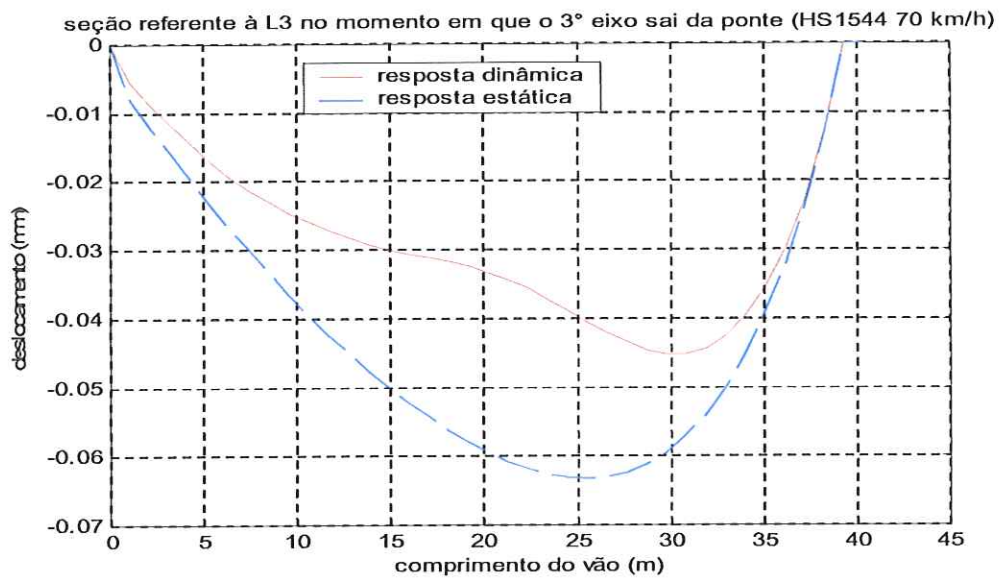


Figura (6.5 l) Resposta da seção referente à L3 quando o 3º eixo sai

Figura (6.5): Resposta para travessia do veículo HS1544 a 70 km/h

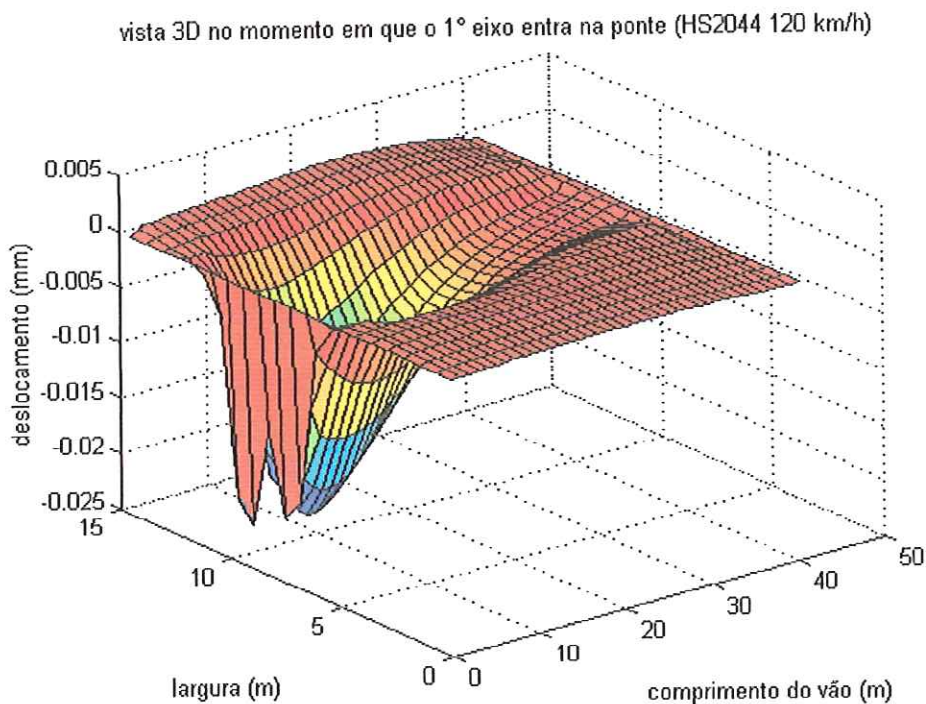


Figura (6.6 a) Resposta da ponte inteira quando o 1º eixo entra

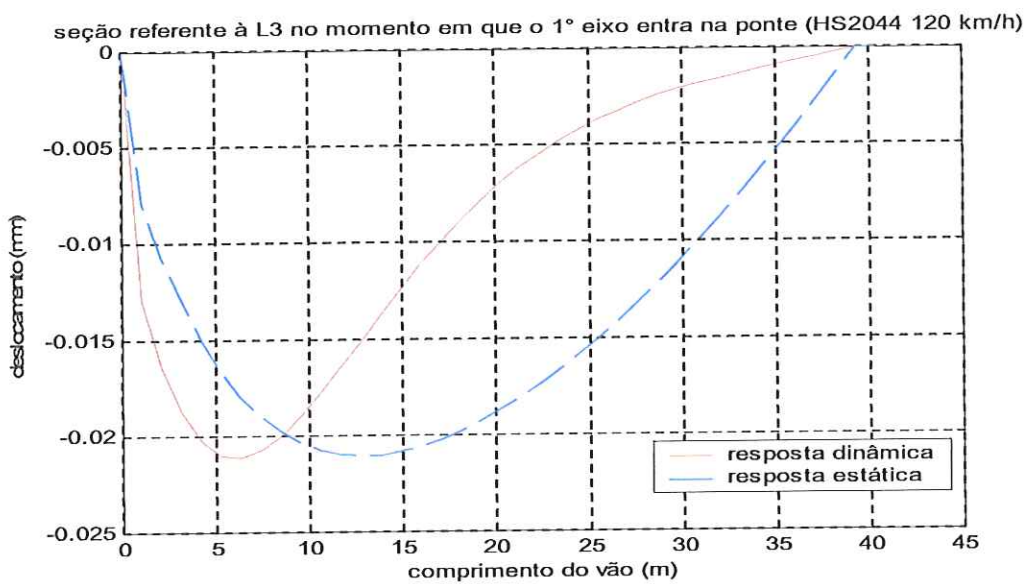


Figura (6.6 b) Resposta da seção referente à L3 quando o 1º eixo entra



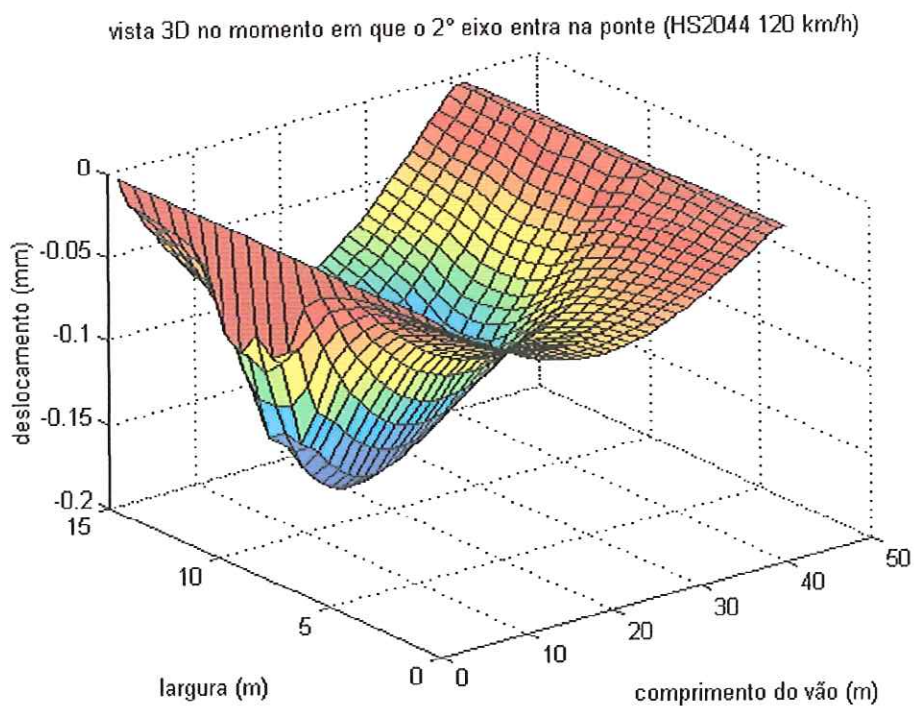


Figura (6.6 c) Resposta da ponte inteira quando o 2º eixo entra

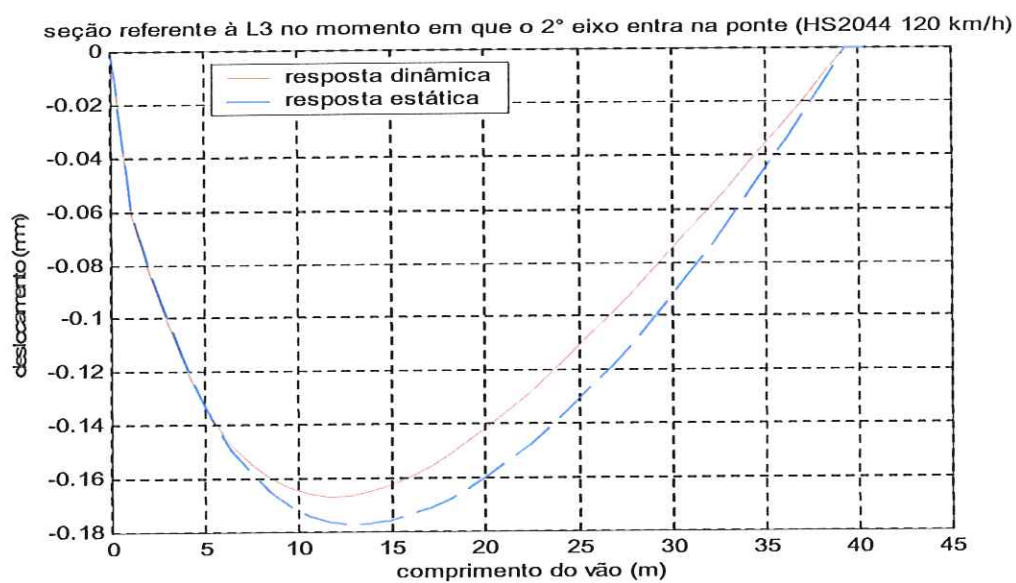


Figura (6.6 d) Resposta da seção referente à L3 quando o 2º eixo entra



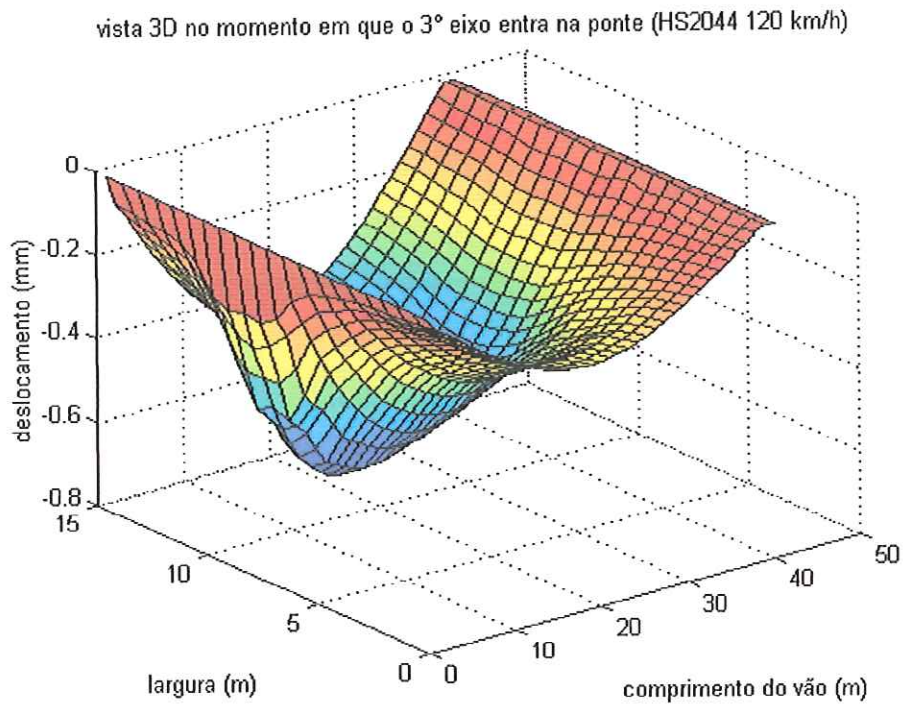


Figura (6.6 e) Resposta da ponte inteira quando o 3º eixo entra

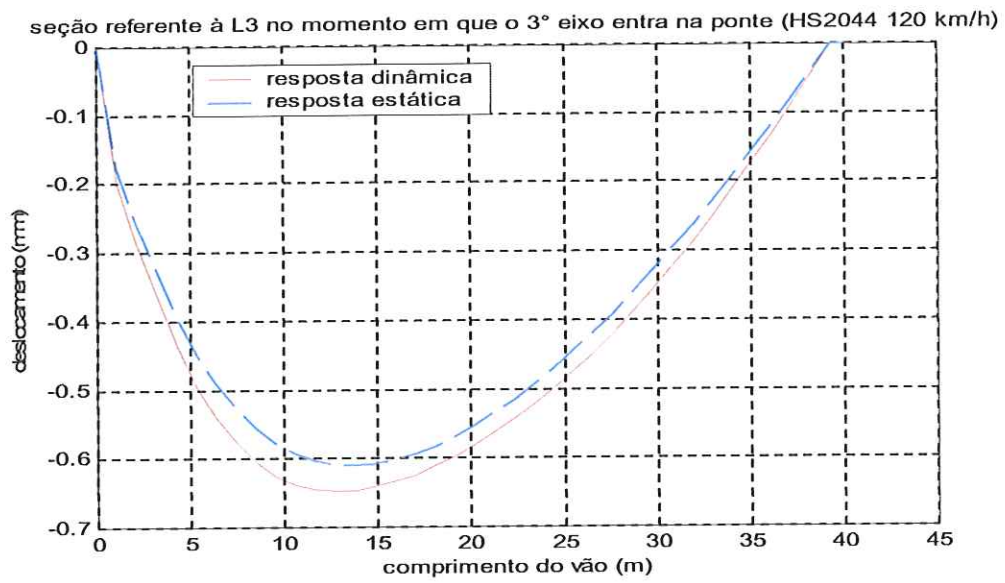


Figura (6.6 f) Resposta da seção referente à L3 quando o 3º eixo entra

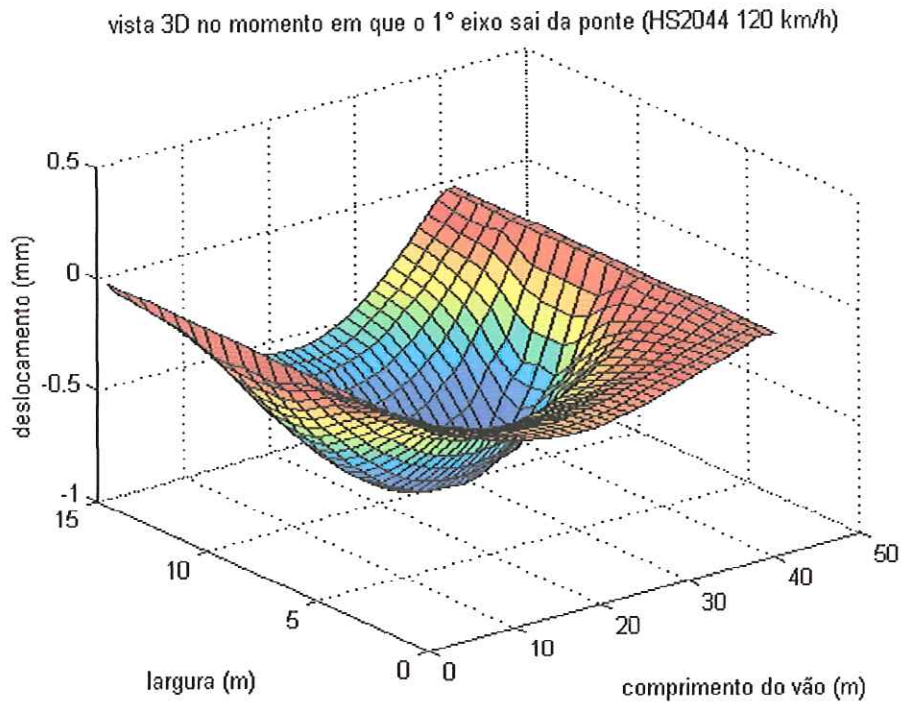


Figura (6.6 g) Resposta da ponte inteira quando o 1º eixo sai

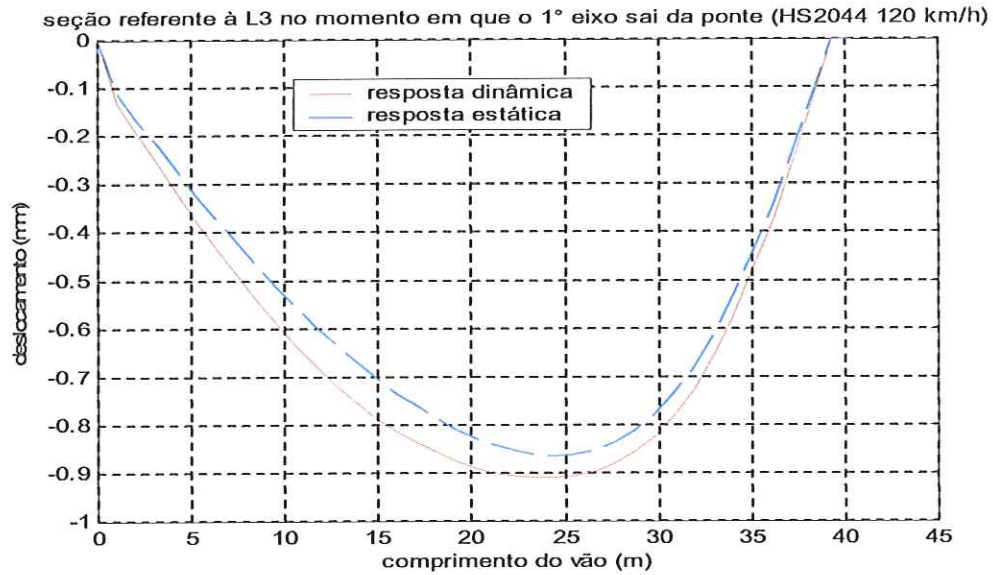


Figura (6.6 h) Resposta da seção referente à L3 quando o 1º eixo sai

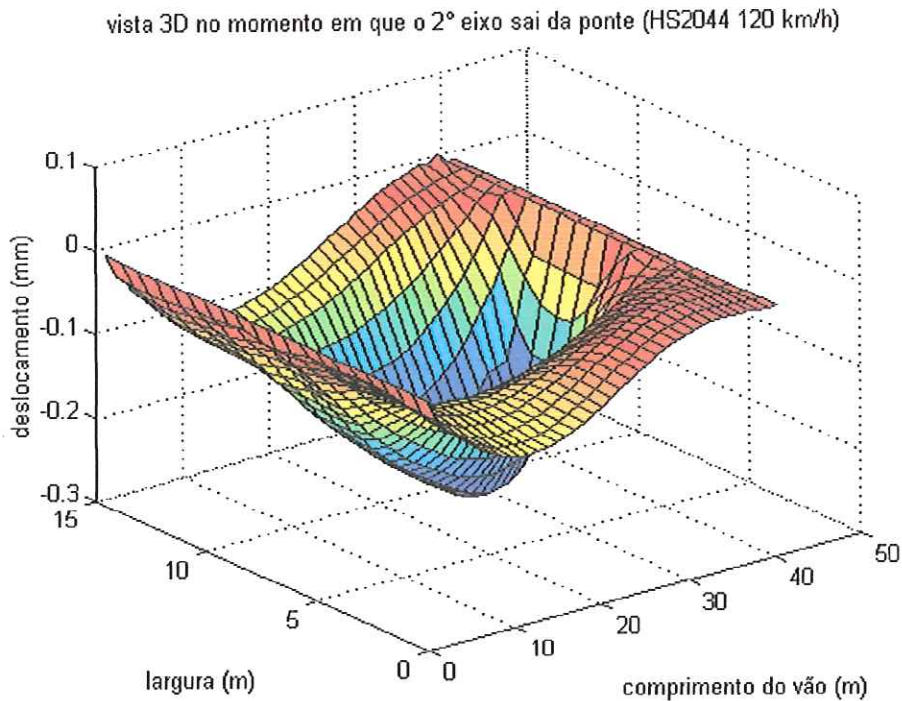


Figura (6.6 i) Resposta da ponte inteira quando o 2º eixo sai

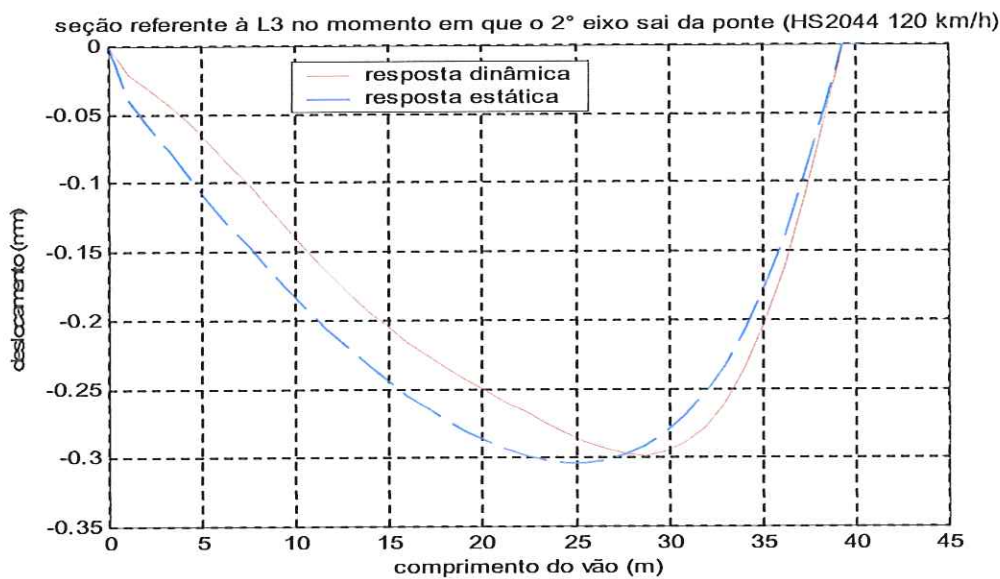


Figura (6.6 j) Resposta da seção referente à L3 quando o 2º eixo sai

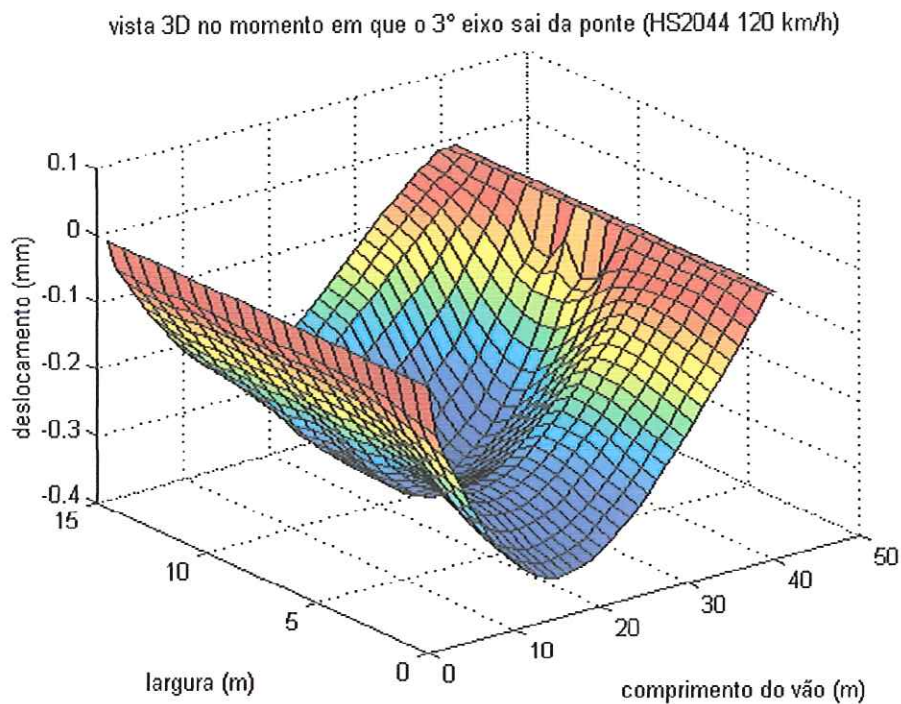


Figura (6.6 k) Resposta da ponte inteira quando o 3º eixo sai

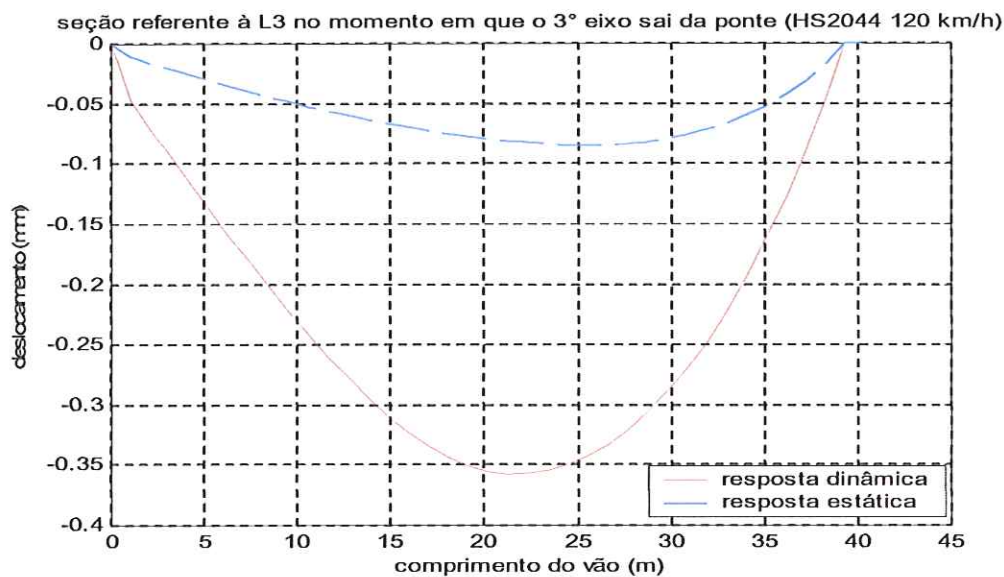


Figura (6.6 l) Resposta da seção referente à L3 quando o 3º eixo sai

Figura (6.6): Respostas para travessia do veículo HS2044 a 120 km/h



Tabela (6.4): Valores de DAF obtidos na entrada e saída da ponte - veículo H2044

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	1,50	1,42	0,81	/	/	0,71	2,70	/	/
70	1,46	1,51	0,87	/	/	1,28	1,24	/	/
80	1,41	1,54	0,93	/	/	1,38	0,39	/	/
100	1,29	1,49	0,98	/	/	1,52	-0,70	/	/
120	1,16	1,38	0,96	/	/	1,07	0,91	/	/

Tabela (6.5): Valores de DAF obtidos na entrada e saída da ponte - veículo HS1544

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	1,18	1,42	0,91	1,23	1,09	1,13	1,21	1,06	0,88
70	1,16	1,50	0,92	1,22	1,17	1,16	1,23	1,70	0,71
80	1,15	1,56	0,95	1,20	1,19	1,09	1,39	0,95	0,55
100	1,11	1,60	1,01	1,20	1,15	1,27	1,39	1,26	0,82
120	1,04	1,55	1,02	1,25	1,13	1,11	1,68	1,38	1,31

Tabela (6.6): Valores de DAF obtidos na entrada e saída da ponte - veículo HS2044

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	1,17	1,35	0,84	1,20	1,09	0,77	0,72	0,36	4,30
70	1,15	1,42	0,87	1,15	1,14	1,07	0,61	0,86	3,13
80	1,13	1,47	0,91	1,11	1,12	1,34	0,55	2,12	4,17
100	1,07	1,46	0,95	1,12	1,07	1,52	0,52	0,43	1,30
120	1,00	1,39	0,94	1,17	1,06	1,05	0,98	2,11	4,24

Da análise dos resultados obtidos nos momentos de entrada e saída dos veículos da ponte, pode-se concluir que:

1. Quando o 1º eixo entra na pista, a resposta da estrutura é praticamente igual independentemente do veículo ou da velocidade, como mostram as Figuras (6.4a), (6.5a) e (6.6a);
2. Em relação à resposta estática, a resposta dinâmica é maior para veículos mais leves e diminui com o aumento da velocidade, como mostra a 1ª coluna das Tabelas (6.4), (6.5) e (6.6);
3. Quando o 2º eixo entra na pista, Figuras (6.4b), (6.5b) e (6.6b), as respostas dinâmicas praticamente se igualam às respostas estáticas, no entanto, é observado que antes da entrada deste eixo, os valores de DAF são bastante altos, para todos os veículos e em todas as velocidades, 2ª coluna das Tabelas (6.4), (6.5) e (6.6). Este resultado mostra que a entrada do 2º eixo alivia as cargas dinâmicas provocadas pelo 1º eixo. Estas mesmas observações são feitas para a entrada do 3º eixo, Figuras (6.5e) e (6.6e), e 6ª coluna das Tabelas (6.5) e (6.6).
4. A resposta da estrutura na saída do 1º eixo mostrou ser praticamente igual em todos os casos analisados, Figuras (6.4e), (6.5g) e (6.6g). Os maiores valores de DAF ocorreram para a velocidade de 100 km/h para todos os veículos. De modo geral, os valores de DAF calculados neste instante são relativamente baixos, ou mesmo menor do que 1.0, como no caso do veículo H2044 a 60 km/h.
5. Quando o último eixo está para sair da ponte, a estrutura se comporta de maneira muito diferente dependendo do veículo e da velocidade. No caso do veículo H2044 a 100 km/h, Figura (6.4g), é observada a ocorrência da inversão no tabuleiro, ou seja, deslocamento no sentido contrário ao da resposta estática, em praticamente toda a estrutura. Com o veículo HS1544 a 70 km/h, a resposta da estrutura mostra a torção do tabuleiro, como mostra a Figura (6.5k). A saída do veículo

HS2044, em todas as velocidades, provocou um significativo aumento nas respostas dinâmicas em relação à estática, Figura (6.61), resultando em altos valores de DAF, acima de 4.0, como mostra a coluna 9 da Tabela (6.6).

### **6.3 ANÁLISE DAS RESPOSTAS NO INSTANTE EM QUE O VEÍCULO DEIXA A PONTE**

Na seção anterior, foi discutido o comportamento dinâmico da estrutura nos primeiros e nos últimos instantes da travessia. De acordo com a análise dos resultados, quando o veículo está próximo do final da travessia, a ponte se comporta de modo muito diferente do previsto pela resposta estática, dependendo do tipo do veículo e da velocidade. De acordo com a literatura, muitos problemas estruturais ocorrem na saída da ponte, o que justifica uma análise do comportamento da ponte quando o veículo acaba de sair.

O conjunto de Figuras (6.7), (6.8) e (6.9) ilustra as respostas no instante em que cada um dos veículos H2044, HS1544 e HS2044 deixa a ponte, nas velocidades entre 60 e 120 km/h. Observa-se que as respostas dinâmicas que mais se diferenciam do comportamento estático estão relacionadas aos veículos menores.



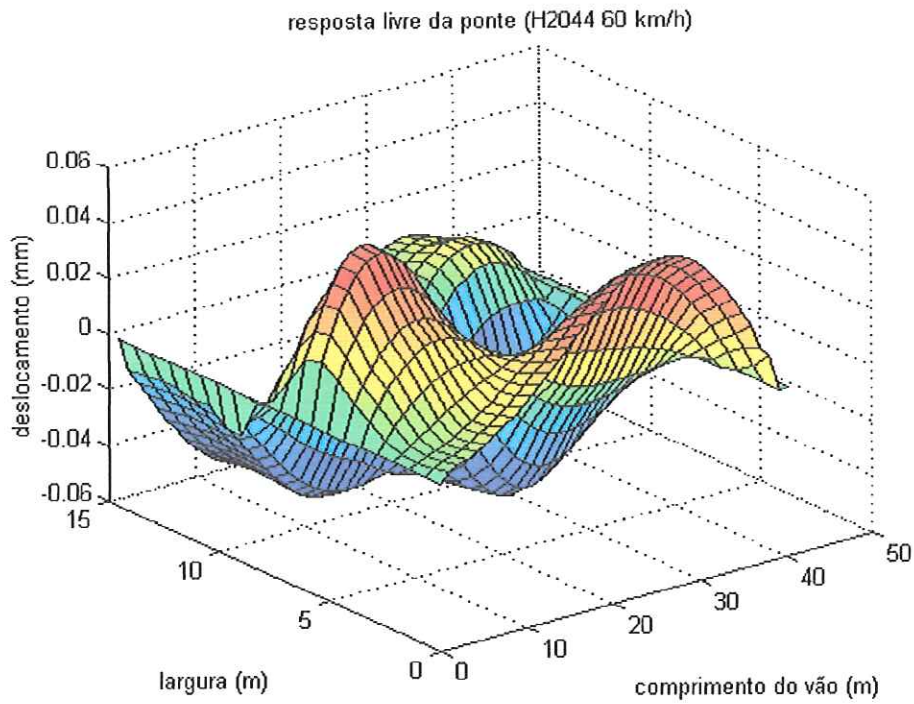


Figura (6.7 a) Resposta para saída de H2044 a 60 km/h

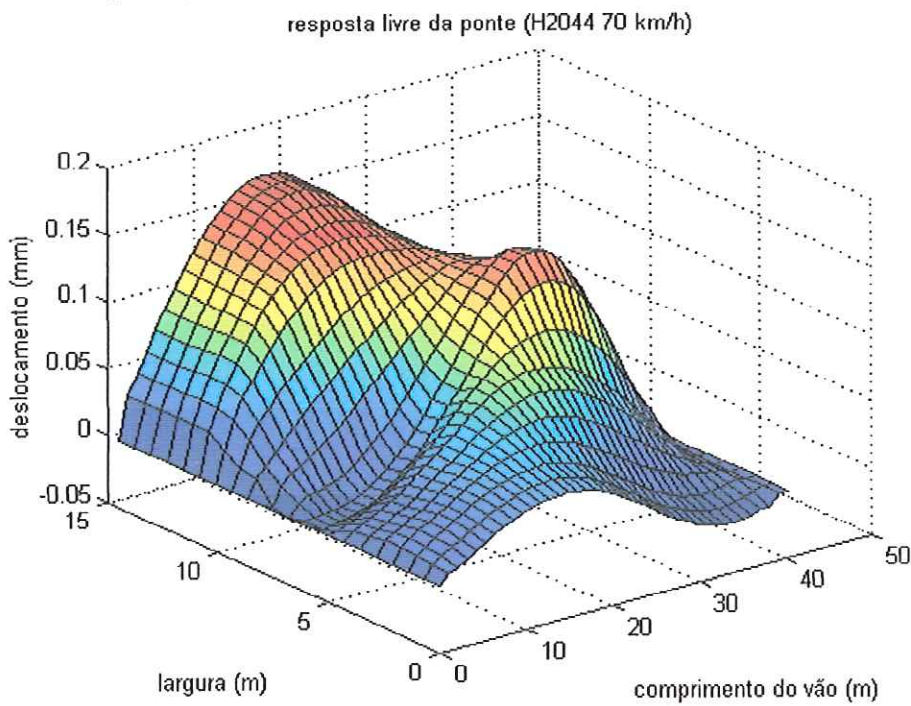


Figura (6.7 b) Resposta para saída de H2044 a 70 km/h



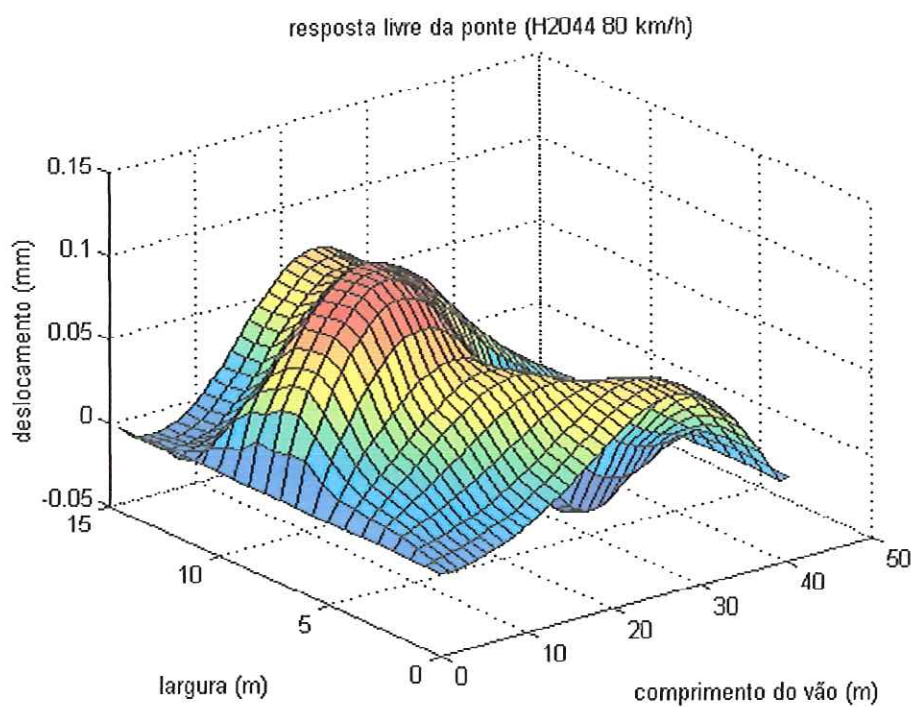


Figura (6.7 c) Resposta para saída de H2044 a 80 km/h

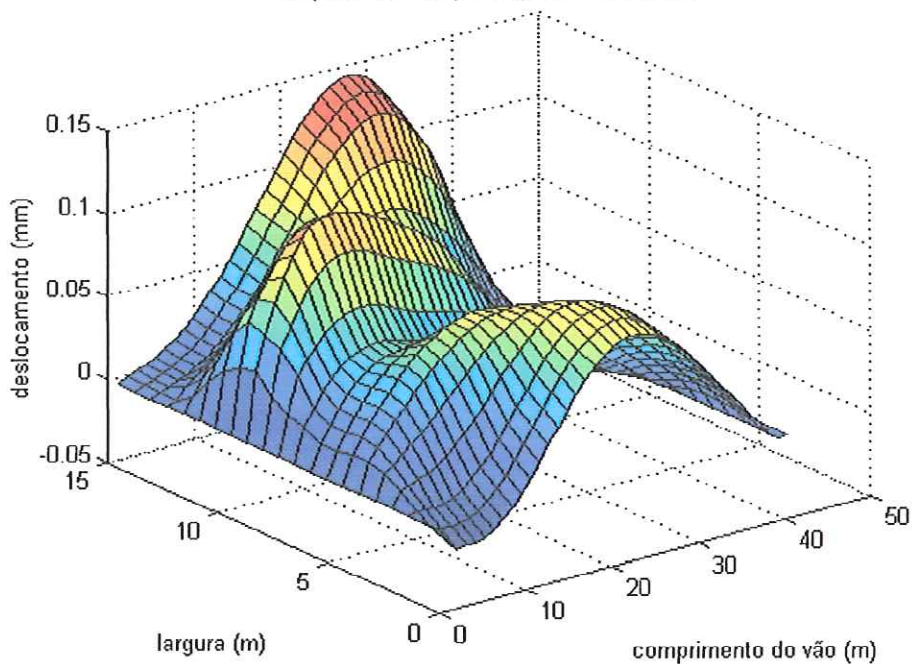


Figura (6.7 d) Resposta para saída de H2044 a 100 km/h

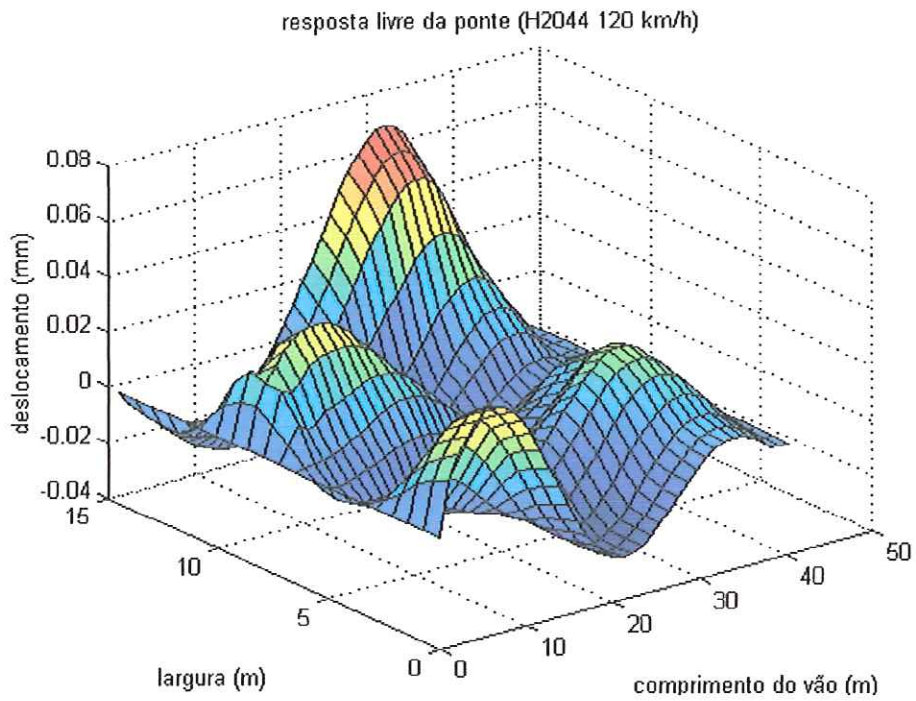


Figura (6.7 e) Resposta para saída de H2044 a 120 km/h

Figura (6.7) Respostas no instante em que o veículo H2044 deixa a ponte

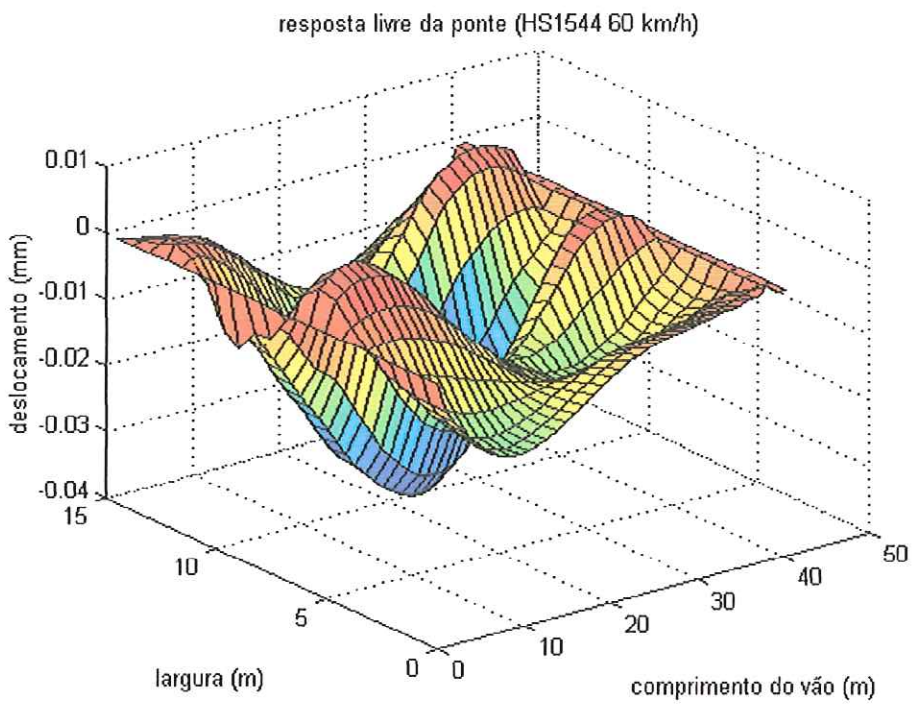


Figura (6.8 a) Resposta para saída de HS1544 a 60 km/h

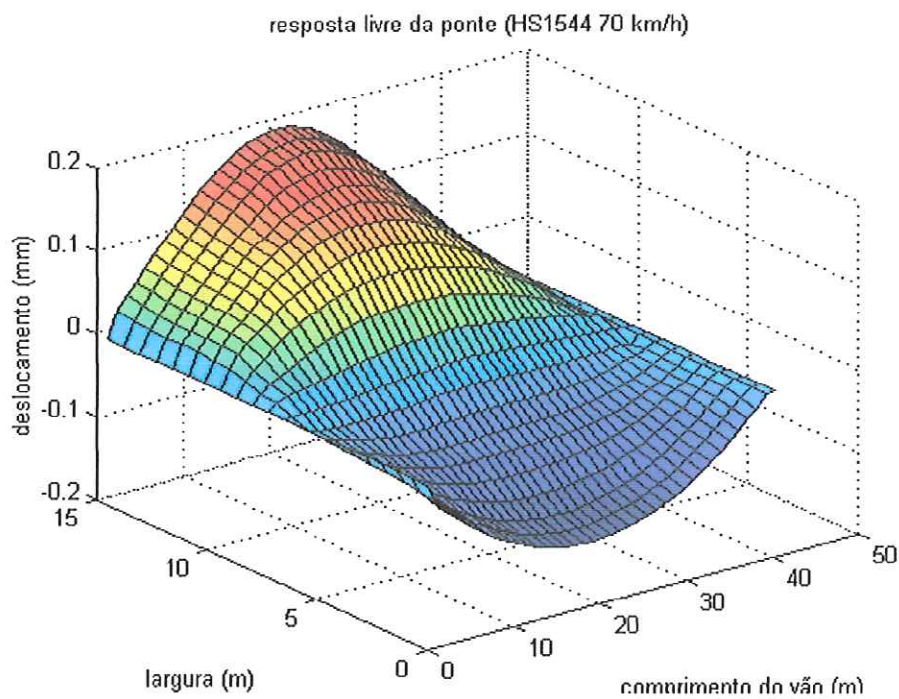


Figura (6.8 b) Resposta para saída de HS1544 a 70 km/h

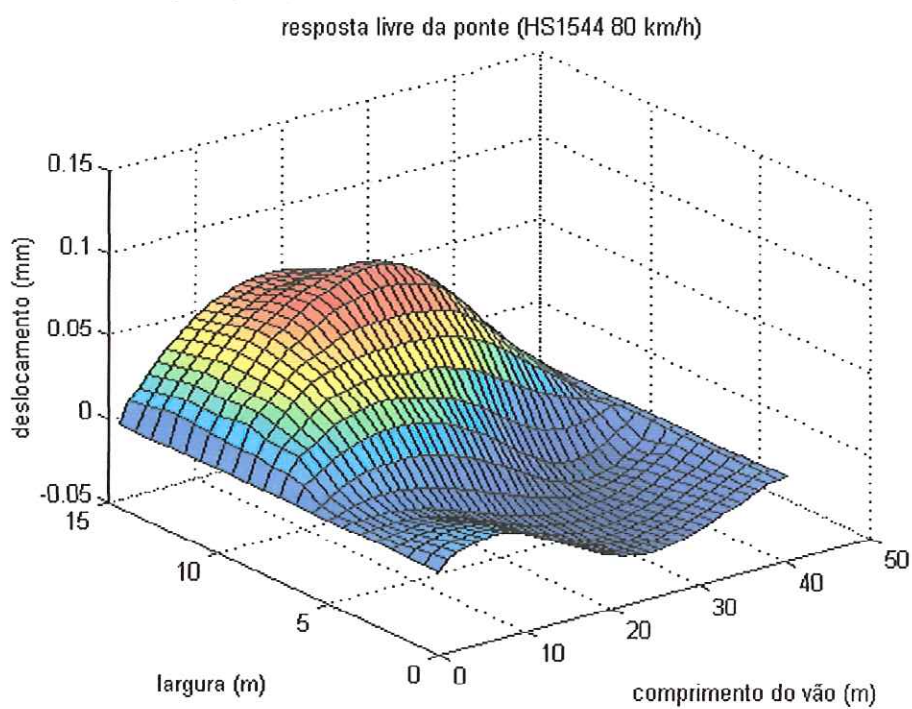


Figura (6.8 c) Resposta para saída de HS1544 a 80 km/h



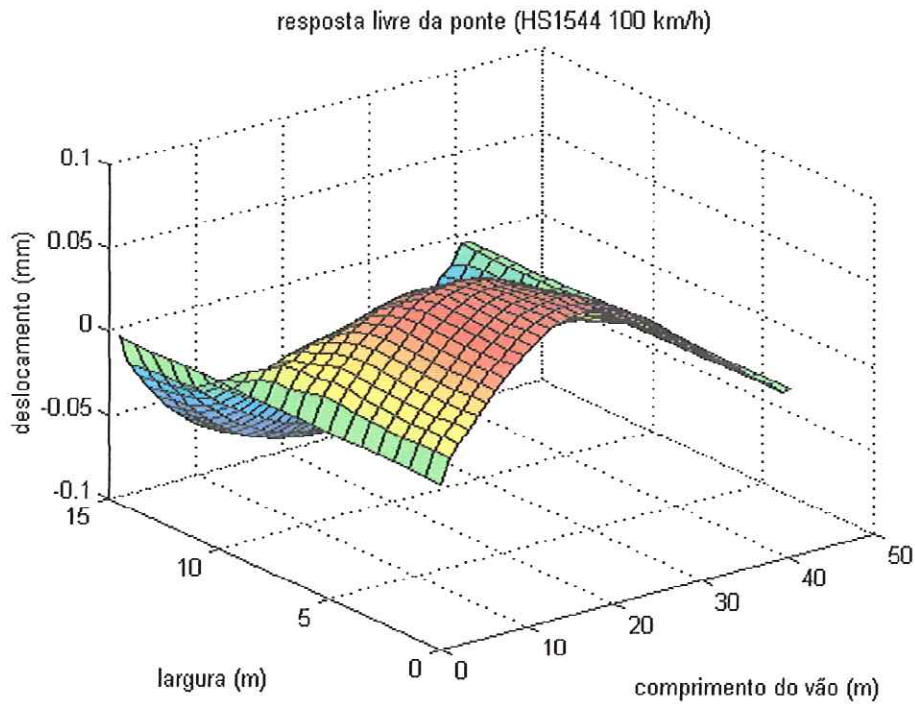


Figura (6.8 d) Resposta para saída de HS1544 a 100 km/h  
resposta livre da ponte (HS1544 120 km/h)

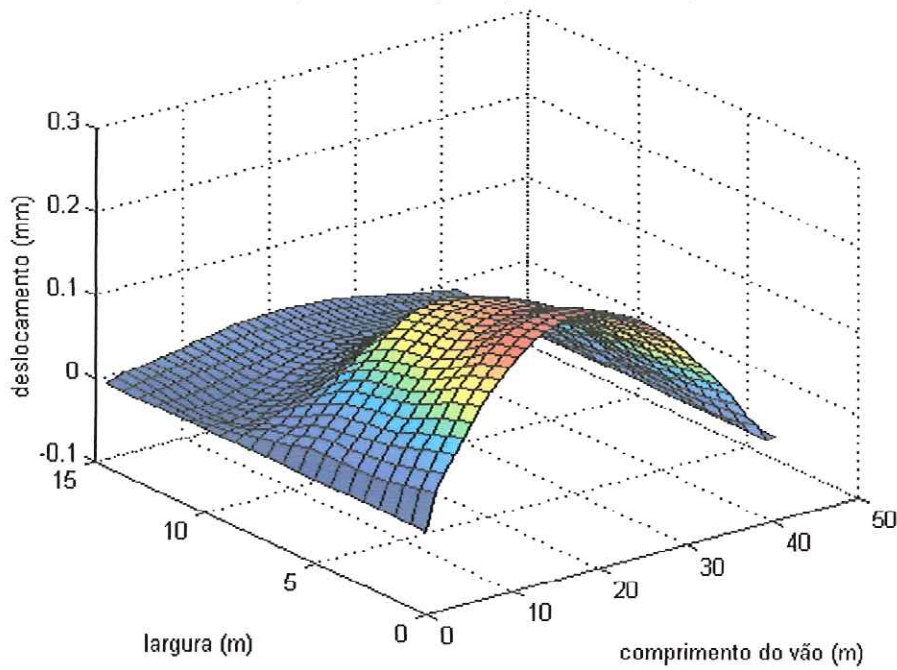


Figura (6.8 e) Resposta para saída de HS1544 a 120 km/h

Figura (6.8) Respostas no instante em que o veículo HS1544 deixa a ponte



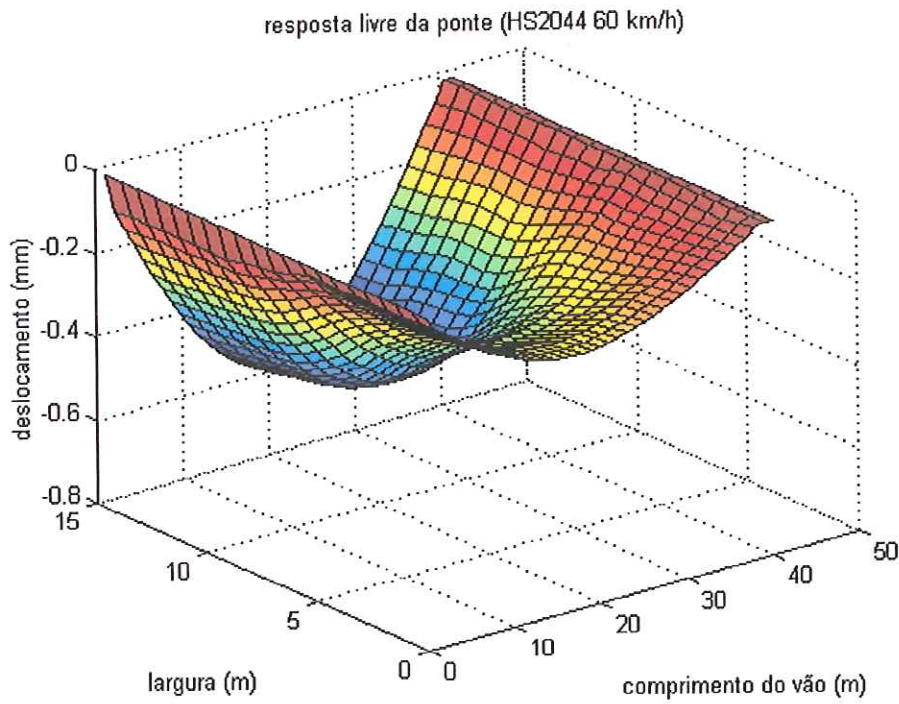


Figura (6.9 a) Resposta para saída de HS2044 a 60 km/h

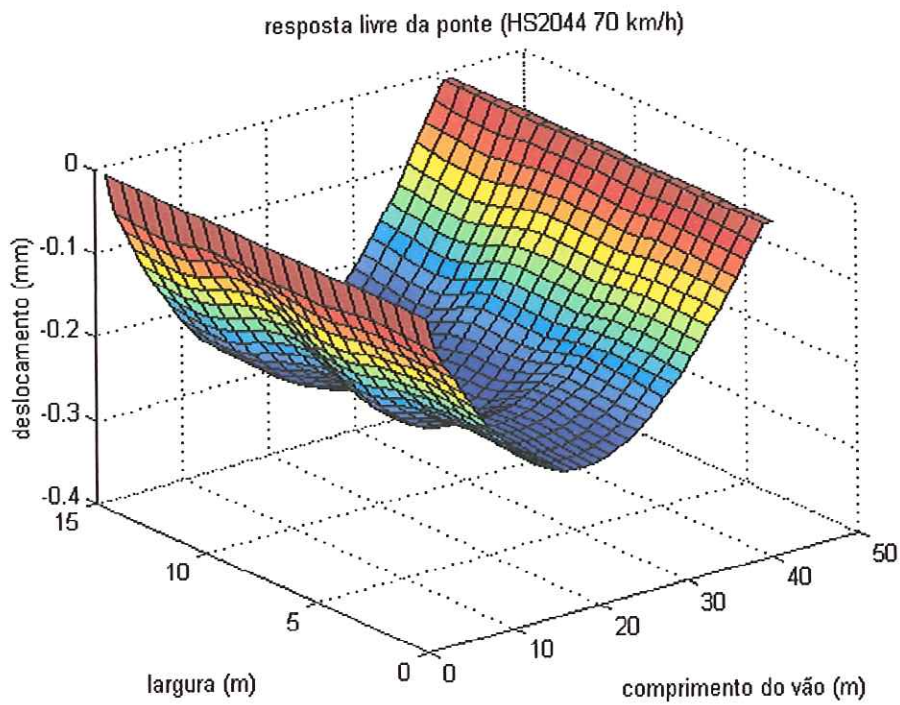


Figura (6.9 b) Resposta para saída de HS2044 a 70 km/h

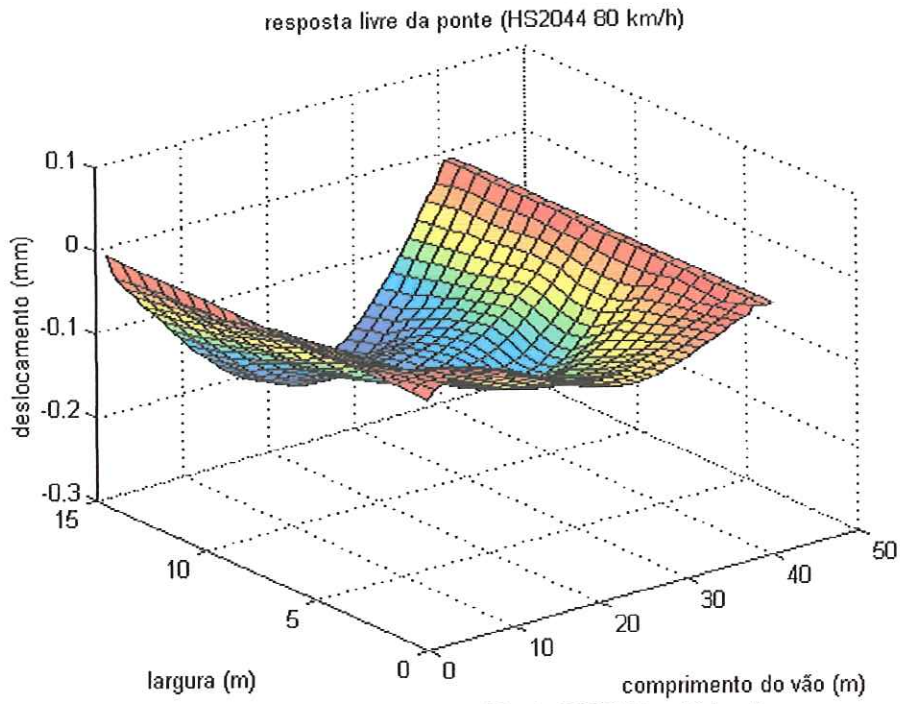


Figura (6.9 c) Resposta para saída de HS2044 a 80 km/h

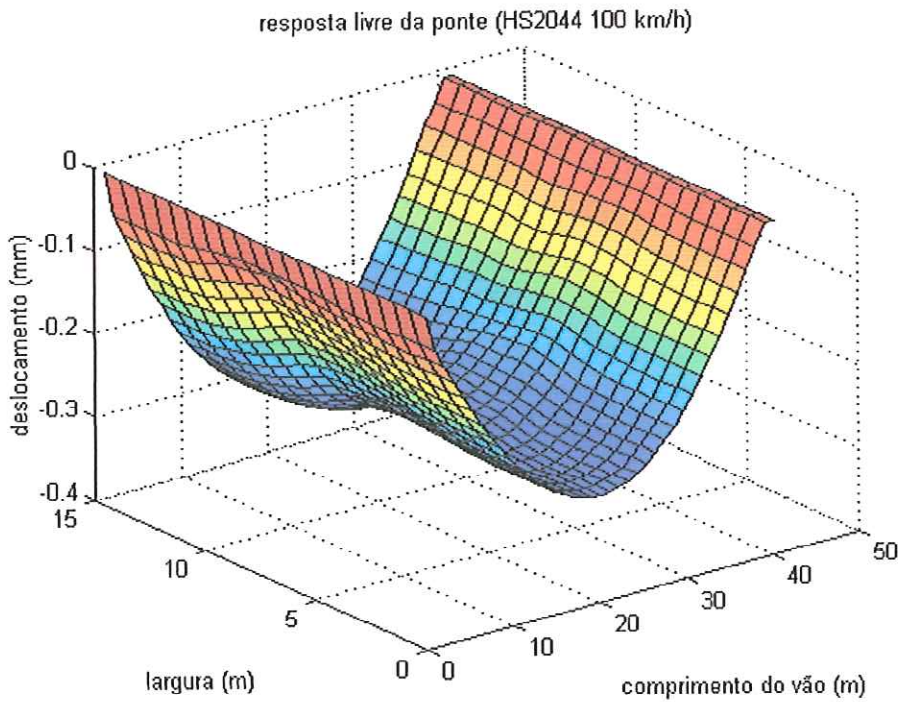


Figura (6.9 d) Resposta para saída de HS2044 a 100 km/h

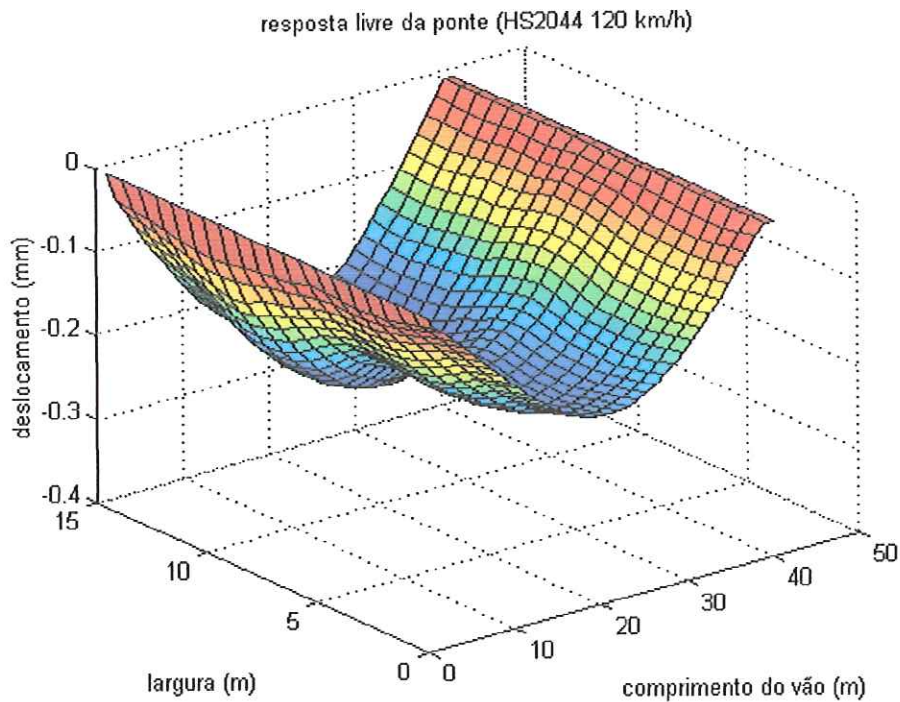


Figura (6.9 f) Resposta para saída de HS2044 a 120 km/h

Figura (6.9) Respostas no instante em que o veículo HS2044 deixa a ponte

Os resultados apresentados mostram que as respostas à saída do veículo HS2044 (maior e mais pesado) não diferem daquelas calculadas para a passagem do mesmo veículo pelo centro da estrutura, porém os deslocamentos são muito maiores do que a resposta estática, como foi discutido na seção anterior. A ocorrência da inversão nos deslocamentos do tabuleiro foi verificada no final de todas as travessias do veículo H2044, independentemente da velocidade. No caso do veículo HS1544, exceto a 60 km/h, para todas as outras velocidades, foi observada a torção da estrutura. Estes resultados podem explicar a ocorrência de problemas estruturais nas saídas das pontes, observada em estruturas reais.

#### 6.4 ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA QUALIDADE DA PISTA

As seções anteriores discutiram a influência do tipo do veículo e da velocidade de travessia no cálculo da resposta dinâmica da ponte. Nesta seção, será avaliada a influência da qualidade da pista. As figuras a seguir comparam os deslocamentos dinâmicos máximos obtidos considerando a passagem do veículo HS1544 (3 eixos, 27 t) com velocidades de 80 e 100 km/h por pista muito boa, regular e ruim.

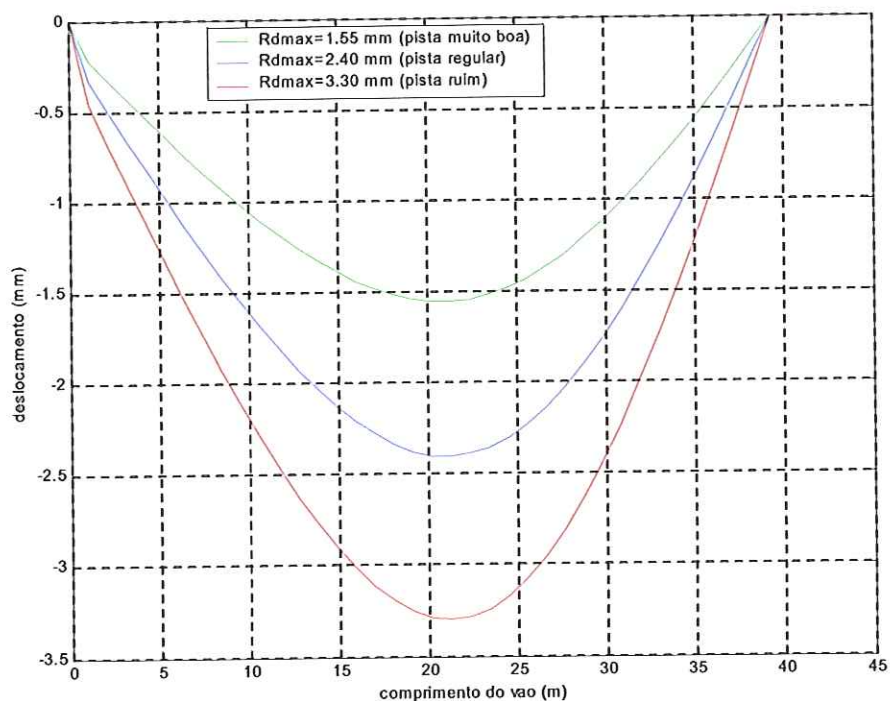


Figura (6.10): Respostas máximas obtidas em L3 para a passagem do veículo HS1544 a 80 km/h



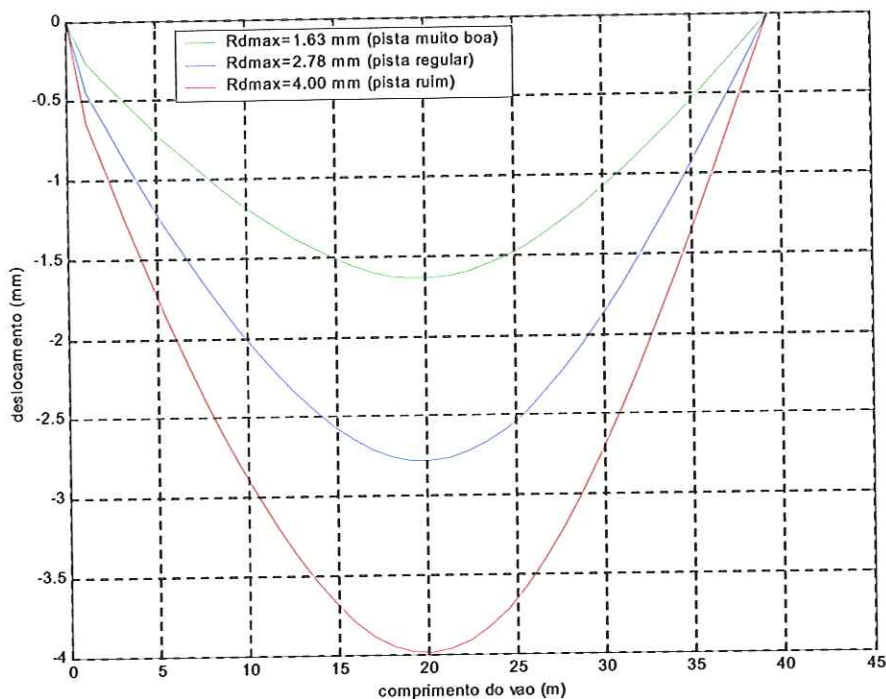


Figura (6.11): Respostas máximas obtidas em L3 para a passagem do veículo HS1544 a 100 km/h

Pode ser observado que, em relação à resposta calculada com pavimento muito bom e velocidades de 80 e 100 km/h, os deslocamentos dinâmicos obtidos considerando pavimento regular têm aumento de 55% e 70%, respectivamente. Este aumento é ainda maior, 113% e 145%, considerando o pavimento ruim.

Estes valores são significativamente maiores do que aqueles obtidos pelo aumento da velocidade considerando pavimento muito bom. Neste caso, os aumentos são de 5% de 80km/h para 100 km/h, e de 13% de 80km/h para 120 km/h.

Estes resultados mostram que a irregularidade da pista é um parâmetro relevante na composição das forças dinâmicas que atuam no sistema ponte/veículo.

## *CAPÍTULO 7*

### *Análise das Respostas no Domínio da Freqüência*

Recentemente, muitas pesquisas têm discutido a utilização de parâmetros modais (freqüências naturais e modos de vibrar) em técnicas de avaliação da integridade de grandes estruturas de Engenharia Civil, como pontes e barragens. Os trabalhos de Peeters et al. (2000), Lombaert (2001) e Maeck (2003) são alguns exemplos. No caso de pontes rodoviárias, os ensaios realizados para a obtenção destes parâmetros podem ser diferenciados pelo tipo de excitação imposta à estrutura (Casas e Aparicio (1990)):

1. **Vibração Livre:** as medições são feitas quando não há mais forças agindo. A excitação pode ser originada a partir de um deslocamento inicial imposto subitamente, ou logo após a saída dos veículos.
2. **Vibração Forçada:** as medições são feitas durante a atuação da força excitadora. Há os métodos que utilizam equipamentos que permitem aplicar a força de excitação na banda de freqüência de interesse, conhecido como método de varredura de freqüência. E há os métodos

de vibrações ambiente, que aproveitam a excitação originada pelo tráfego normal.

Os ensaios realizados sob tráfego normal, ao contrário dos demais, permitem registrar a resposta da estrutura nas condições as quais foi projetada para funcionar. Astudillo (1994) analisou a resposta da ponte estaiada de Rande (Espanha) com 400 m de vão central. O sinal obtido durante a passagem do veículo de prova registrava as frequências de 2,7 Hz e 3,17 Hz. Após a saída do veículo, apenas a frequência de 2,7 Hz foi registrada. No ensaio realizado por remoção súbita de uma força, foi obtida a frequência de 2,6 Hz. Isto mostra que a frequência de 3,17 Hz era própria do movimento forçado.

Estas observações também podem ser feitas com base nas respostas em frequência obtidas experimentalmente para a ponte sobre o rio Piracicaba, apresentadas por Penner (2000). A Figura (7.1) e a Figura (7.2) mostram as respostas em frequência obtidas em ensaio com veículo de prova instrumentado (3 eixos, 37 t) a 60 km/h por FR2.

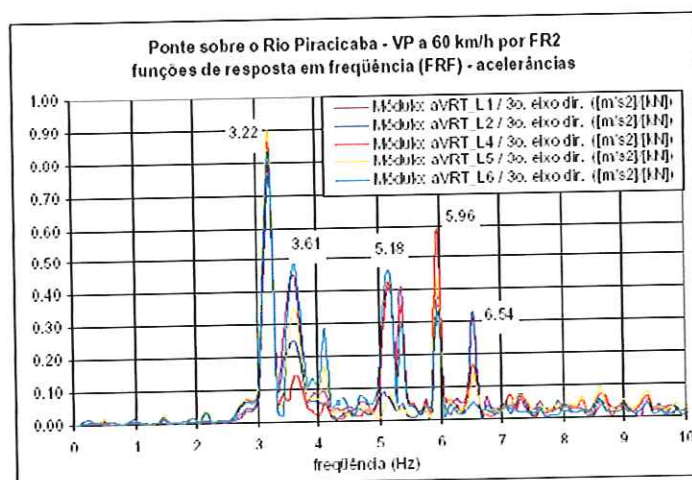


Figura (7.1): Funções de Resposta em Frequência – aceleração em relação ao 3º eixo direito. Passagem do VP a 60 km/h por FR2. (Penner, 2000)

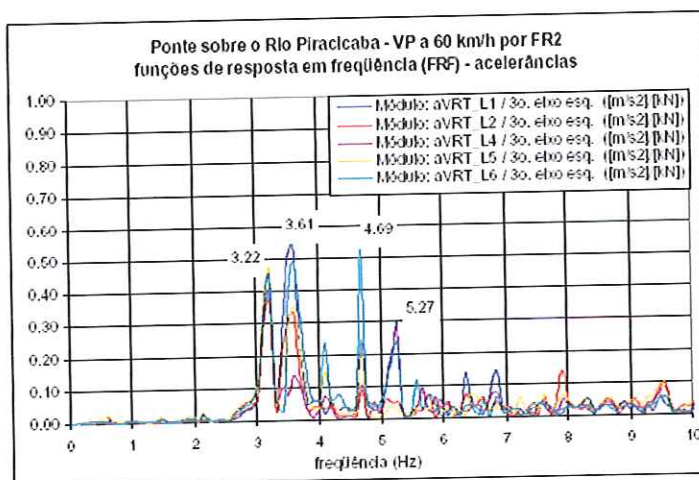


Figura (7.2): Funções de Resposta em Frequência – aceleração em relação ao 3º eixo esquerdo. Passagem do VP a 60 km/h por FR2. (Penner, 2000)

Estas respostas foram medidas nas longarinas L1, L2, L4, L5 e L6 em relação à força exercida pela roda direita (Fig.(7.1)) e pela roda esquerda (Fig.(7.2)) do 3º eixo.

Como apresentado no capítulo 5, as frequências naturais da estrutura real são (Penner, 2000): 1ª) 3,22 Hz; 2ª) 3,61 Hz; 3ª) 5,27 Hz. Com exceção do terceiro modo que não foi registrado na resposta apresentada na Fig.(7.1), as frequências naturais aparecem na resposta forçada juntamente com outras relativas à força excitadora. Desta forma, é possível concluir que as frequências: 5,18 Hz, 5,96 Hz e 6,54 Hz da Fig.(7.1) e 4,69 Hz da Fig.(7.2) são próprias do movimento forçado. Estes resultados são interessantes para avaliar as respostas teóricas no domínio da frequência obtidas a partir das respostas do modelo proposto calculadas no domínio do tempo.

Esta segunda parte da análise numérica tem o objetivo de investigar se as respostas calculadas no domínio do tempo pelo modelo ponte/veículo acoplado são eficientes para caracterizar as diferenças



entre as respostas no domínio da freqüência referentes à vibração forçada, enquanto o veículo está sobre a ponte, e à vibração livre, após a saída do veículo. Nesta pesquisa, as respostas no domínio da freqüência foram obtidas a partir da FFT (*Fast Fourier Transform*) do sinal calculado no tempo, apresentado no capítulo anterior. Para avaliar a importância do acoplamento no tratamento da interação, as respostas obtidas a partir do sistema acoplado são comparadas com as respostas calculadas pelas Eq.(3.9a) e Eq.(3.9b) sem considerar o acoplamento.

As figuras apresentadas a seguir mostram as respostas no domínio da freqüência calculadas a partir do sinal obtido no tempo para a passagem do veículo HS2044 (3 eixos, 36 t) com velocidade de 80 km/h, no ponto referente à posição central da longarina L3. A Fig.(7.3) e a Fig.(7.4) mostram as freqüências registradas durante a passagem e depois da saída do veículo, respectivamente. A Fig.(7.5) e a Fig.(7.6) mostram as freqüências obtidas a partir do sinal no tempo calculado com as mesmas condições descritas acima porém, sem considerar o acoplamento entre a ponte e o veículo. É importante ressaltar que outras respostas obtidas em outros pontos foram analisadas, e os resultados foram análogos aos apresentados a seguir.

Pode ser observado que as respostas não estão perfeitamente definidas, especialmente o sinal obtido durante a passagem do veículo, pois o tempo de amostragem depende da quantidade de pontos utilizados no cálculo da resposta. Para uma melhor representação seria necessária uma amostragem maior, o que poderia ser obtido com o refinamento da malha de elementos finitos. No entanto, para o propósito desta análise, que é a comparação entre as primeiras freqüências obtidas em diferentes situações, os resultados podem ser considerados adequados.

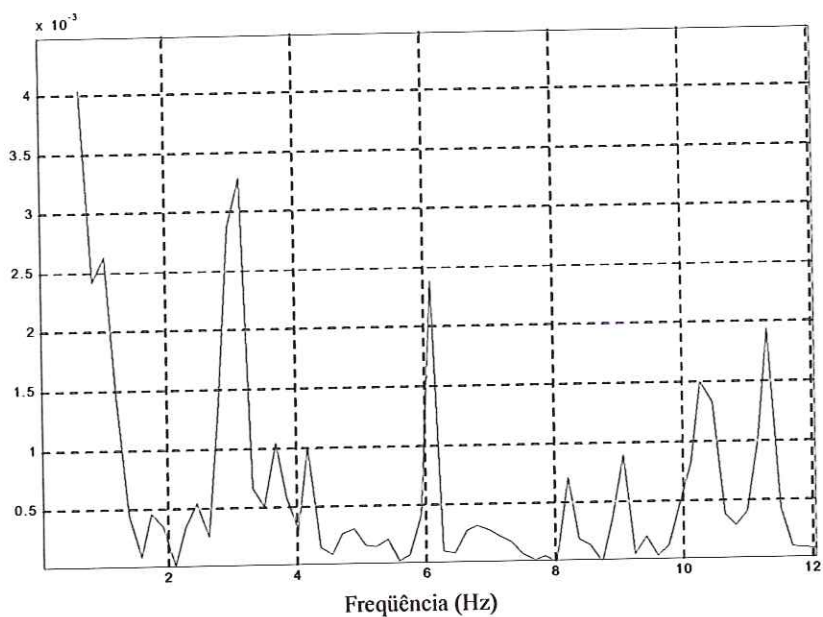


Figura (7.3): Resposta no domínio da frequência obtida durante a passagem do veículo (HS2044 a 80 km/h, no ponto central de L3)

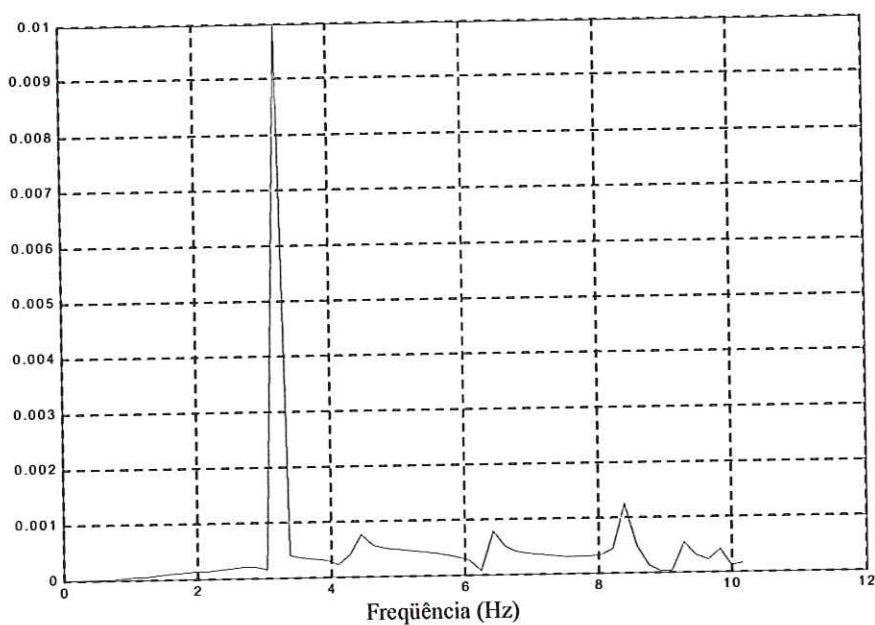


Figura (7.4): Resposta no domínio da frequência obtida depois da saída do veículo (HS2044 a 80 km/h, no ponto central de L3)

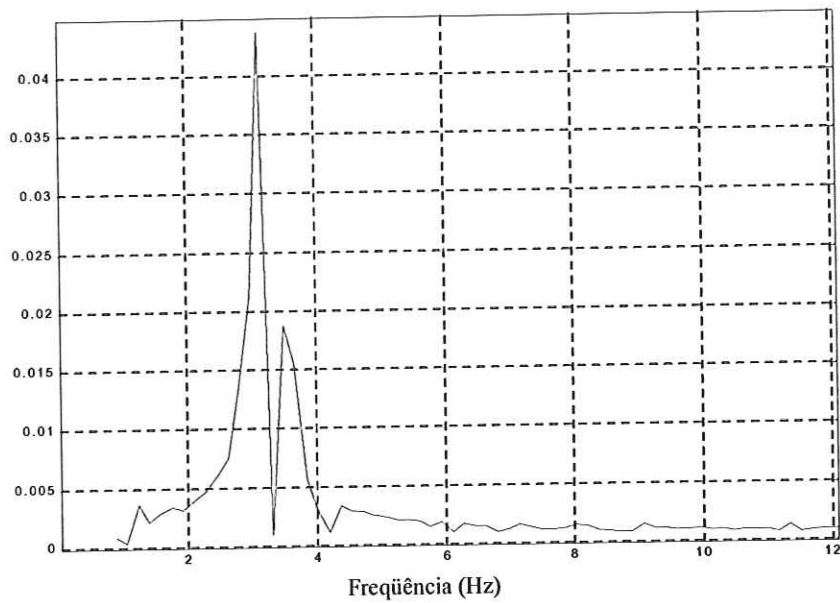


Figura (7.5): Resposta no domínio da frequência obtida durante a passagem do veículo (HS2044 a 80 km/h, no ponto central de L3): modelo sem acoplamento

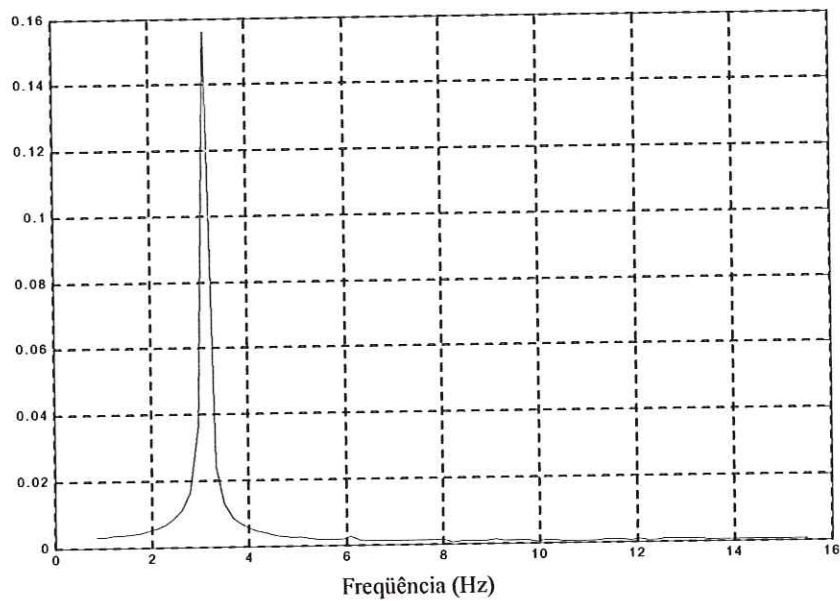


Figura (7.6): Resposta no domínio da frequência obtida depois da saída do veículo (HS2044 a 80 km/h, no ponto central de L3): modelo sem acoplamento

Os gráficos das respostas relativas à passagem do veículo (Fig.7.3 e Fig.7.5) exibem um número maior de “picos” de freqüência do que aqueles obtidos após a saída do veículo (Fig.7.4 e Fig.7.6), conforme os resultados relatados em ensaios de campo. Está claro que a mera análise visual é insuficiente para afirmar quais são os valores das freqüências. No entanto, a comparação entre as respostas forçadas e livres permite identificar quais “picos” podem ser as freqüências naturais da estrutura analisada. Estes valores foram previamente apresentados na Tab.(5.2): 1ª) 3,21 Hz; 2ª) 4,45 Hz e 3ª)7,01 Hz. Em todos os gráficos, a primeira freqüência natural está bem definida, como mostra o detalhe da Fig.(7.4) apresentado na Fig.(7.7).

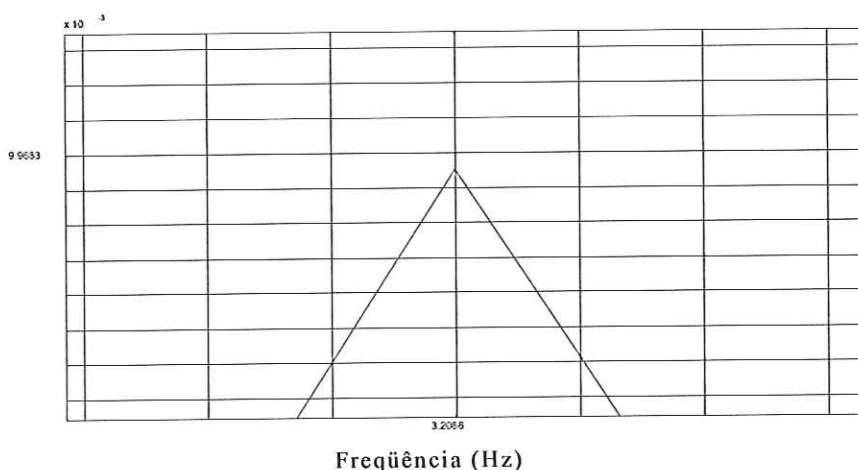


Figura (7.7): Primeira freqüência natural da estrutura:  
detalhe da Fig.(7.4)

No caso do sistema desacoplado, a resposta à vibração forçada (Fig.7.5) exhibe, além do pico da primeira freqüência natural da estrutura, um outro pico (cujo valor está entre a primeira e a segunda) que não aparece na resposta à vibração livre (Fig.7.6), na qual apenas a primeira freqüência é caracterizada. A resposta do sistema acoplado à vibração



forçada (Fig.7.3), exibe muitos outros picos de frequência em relação à resposta livre (Fig.7.4). Neste último gráfico, é possível distinguir três picos que podem ser as frequências naturais da estrutura analisada. Neste caso, os valores da segunda frequência (próximo de 4 Hz) e da terceira frequência (próximo de 6 Hz) mostrados nos gráficos estão um pouco menores do que os valores calculados. Isto pode ser explicado pela inclusão do amortecimento, pelas simplificações e também pelos eventuais erros envolvidos no cálculo numérico da resposta.

As observações feitas a partir de ensaios em campo mostraram que a passagem do veículo sobre a ponte origina frequências próprias do movimento forçado, e que não aparecem quando a estrutura vibra livremente. Esta situação pode ser verificada nas respostas de ambos sistemas: acoplado e desacoplado. A resposta do modelo do sistema ponte/veículo acoplado é composta pela combinação de diferentes modos, ao contrário do sistema desacoplado, cuja resposta é formada predominantemente pelo primeiro modo. No entanto, os resultados medidos particularmente na ponte sobre o rio Piracicaba mostram que a resposta da estrutura à passagem do VP é composta pelas três primeiras frequências naturais e também por outras relativas à força de excitação. Nesta análise numérica, esta situação mostrou ser melhor representada pelo modelo que considera o acoplamento entre a ponte e o veículo.

## *CAPÍTULO 8*

### *Conclusão*

Pesquisas sobre problemas estruturais em pontes rodoviárias têm revelado que, em geral, estas estruturas estão submetidas a cargas dinâmicas maiores do que aquelas calculadas em projeto. As conseqüências são os altos custos de recuperação, ou ainda, acidentes que colocam em risco a vida dos usuários. Neste contexto, a definição de novos critérios de projeto depende do aperfeiçoamento dos modelos de cálculo visando considerar as ações dinâmicas de forma mais realista. Para aprimorar os métodos de cálculo de estruturas de pontes, muitos trabalhos experimentais e/ou teóricos vêm sendo realizados. O desafio atual é incluir na análise os efeitos da interação entre as respostas da ponte e do veículo, de forma a considerar os principais componentes das ações dinâmicas, tais como, as irregularidades da pista, velocidade do veículo e características dinâmicas de ambos.

Este trabalho apresentou um estudo teórico sobre o comportamento dinâmico de ponte rodoviária submetida a diferentes condições de operação. Ponte e veículo foram idealizados por modelos detalhados que representavam a situação da passagem do veículo sobre a estrutura de

maneira bastante realista. As equações de movimento de ambos foram acopladas, permitindo que ponte e veículo fossem considerados como um único sistema. As respostas dinâmicas no tempo foram calculadas considerando a passagem de veículos de diferentes pesos, número de eixos e velocidades. A qualidade da pista também foi incluída no cálculo.

Com o modelo proposto foi possível avaliar como a combinação de parâmetros, como peso e velocidade do veículo, influencia nas respostas dinâmicas em regiões diferentes da ponte, e em momentos importantes da travessia: na entrada e saída de cada eixo; no centro da faixa de travessia, onde ocorreram os maiores deslocamentos; e logo após o veículo deixar a ponte. A comparação das respostas dinâmicas com as respectivas respostas estáticas, por meio do coeficiente DAF, serviu para verificar a coerência dos resultados numéricos em relação aos resultados experimentais relatados na literatura, e também em relação ao valor obtido de acordo com a norma.

Os resultados revelaram que, independente do tipo do veículo e da velocidade, a estrutura se comporta de maneira muito semelhante nos instantes da entrada do veículo e nos instantes que antecedem a saída do primeiro eixo. Nos instantes de deslocamento máximo e nas seções próximas à passagem, a relação entre as respostas dinâmica e estática (DAF) diminui com o aumento do peso do veículo e aumenta com a velocidade. Este aumento é mais significativo nos veículos de maior porte, em média: 7% para o veículo H2044 (2 eixos, 20 t); 10% para o veículo HS1544 (3 eixos, 27 t); 12 % para o veículo HS2044 (3 eixos, 36 t). Embora os valores de DAF tenham sido maiores para veículos menores, veículos maiores produziram deslocamentos sempre maiores.

Os principais problemas relacionados às diferenças entre as respostas dinâmicas e estáticas foram observados nos instantes relativos à saída do veículo e em particular depois da saída. Nos casos dos



veículos menores, para quase todas as velocidades, foi observada a ocorrência da inversão do tabuleiro, e também deslocamentos correspondentes à torção da estrutura. Embora nestes dois últimos casos os deslocamentos fossem bastante pequenos (baixa intensidade), é possível afirmar que a passagem de um veículo, dependendo das suas características e velocidade, pode causar deslocamentos e deformações diferentes daqueles previstos pela resposta estática, comprometendo a qualidade e a segurança da estrutura. Se forem consideradas as irregularidades da pista, estes deslocamentos são ainda maiores. Portanto, nos casos em que as dimensões do veículo forem relevantes em relação à estrutura, as forças dinâmicas originadas da interação entre ambos devem ser consideradas em projeto.

De acordo com Wang (2002), a resposta dinâmica de uma ponte sob a excitação de um veículo é um fenômeno complexo por causa da interação entre as repostas de ambos. Neste caso, a maior dificuldade em realizar uma análise dinâmica por meio de modelos numéricos para a elaboração de projeto de pontes é estabelecer uma relação sistemática entre os diversos parâmetros envolvidos na passagem do veículo, sem tornar a solução muito trabalhosa.

A literatura mostra que a maioria dos trabalhos tratava a ponte e o veículo como sistemas desacoplados, o que reduzia em mais de 50% o tempo de solução em comparação com a solução dos sistemas acoplados. No entanto, a análise em frequência, feita a partir das respostas no tempo para ambas situações com e sem acoplamento, mostrou que os resultados obtidos com os modelos acoplados, proposto neste trabalho, apresentaram-se bastante coerente com aqueles observados em estruturas reais. Desta forma, é possível afirmar que as escolhas feitas para a representação da ponte e do veículo, os critérios empregados para o acoplamento das equações de ambos, bem como as simplificações impostas nos cálculos das respostas, são verdadeiras e este modelo pode servir para a investigação do comportamento dinâmico de pontes rodoviárias.



## 8.1 PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS

1. INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL: avaliação em campo por meio de tráfego controlado para validar o modelo numérico e verificar sua potencialidade de prever a resposta dinâmica de pontes;
2. APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE ANÁLISE MODAL PARA MONITORAMENTO ESTRUTURAL E IDENTIFICAÇÃO DE FALHAS: A inclusão no modelo teórico dos principais parâmetros envolvidos na resposta dinâmica permite que sejam obtidas, além das frequências naturais da estrutura, as frequências e modos originados pelo tráfego. Estes parâmetros modais podem ser utilizados com o objetivo de comparar as respostas em frequência obtidas para uma estrutura íntegra e com falha.
3. ANÁLISE NÃO-LINEAR: Um modelo matemático linear é em essência uma simplificação de um modelo não-linear. No entanto, a otimização nos cálculos e na construção, tem resultado em modernas estruturas mais esbeltas e flexíveis. O aumento da flexibilidade potencializa as não-linearidades geométricas. No caso de pontes, as respostas dinâmicas resultantes da interação com veículos pesados podem causar aumento nas forças de excitação, conseqüentemente, o comportamento da estrutura, inicialmente elástico-linear, pode se tornar não-linear. Isto significa que a melhoria do desempenho, da qualidade e segurança das estruturas requer considerar na análise dinâmica a natureza não-linear da relação entre as tensões e as deformações. A literatura mostra que os efeitos das não-linearidades são cada vez mais abordados nas pesquisas que aplicam análise modal (Hemez et al., 1999).

## Referências Bibliográficas

- Ahmad, S. et al. (1970), **Analysis of thick and thin shell structures by curved elements**. International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.3, p.419-451
- ASCE (1931), **Impact on highway bridges**. Final Report of the Special Committee on the Impact in Highway Bridges. ASCE Transactions, 95 p.1089-1117
- Associação Brasileira de Normas Técnicas – ABNT- **Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado**. NBR 6118, Rio de Janeiro, 1978.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas – ABNT- **Projeto e Execução de Pontes de Concreto Armado e Protendido**. NBR 7187, Rio de Janeiro, 2003.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas – ABNT- **Prova de Carga em Estruturas de Concreto Armado e Protendido**. NBR 9607, Rio de Janeiro, 1986.
- Astudillo, R. (1994), **Ensaio dinâmico de puentes atirantadas**. Separata de la Revista Hormigon y Acero, n. 190, Asociacion Tecnica Española del Pretensado, Madri
- Bakht, B. e Pinjarkar, S.G. (1989), **Review of dynamic testing of highway bridges**. Structural Research Report SRR-89-01, Ministry of transportation of Ontario, Downsview, Ontario
- Barefoot, J.B. et al. (1998), **Development of finite element models to predict dynamic bridge response**. Final Report, Virginia Transportation Research Council, VTRC R8, Charlottesville, Virginia
- Bathe, K-J. (1996), **Finite Elements Procedures**. Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey

- Bessa, M.W. (2000), **Abordagem do problema das cargas móveis através de uma técnica multidisciplinar**. Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, RJ
- Cantieni, R. (1983), **Dynamic load tests on highway bridge in Switzerland\_60 years of experience**. Report 211, Federal Laboratory for Testing of Materials (EMPA), Dübendorf, Switzerland
- Cantieni, R. (1984), **Dynamic load testing of a two-lane highway bridges**. IABSE Proceedings P-75/85, Zurich, Switzerland, August p.57-72
- Cantieni, R. (1987), **Dynamic load testing of highway bridge**. International Conference on Traffic Effects on Structures and Environment, Strooke Pleso, Czechoslovakia, December 1-3 p. 1-14
- Casas, J.R. e Aparício, A. C. (1990), **La identificación de parametros dinamicos em estructuras tecnicas de excitation, medidas y analisis de vibraciones**. Departamento de ingeniería de la construcción, ETS de Ingenieros de Caminos, Canales e Puertos, Universidad Politécnica de Catalunya
- Chatterjee, P.K., Datta, P.K. e Surana, C.S. (1994), **Vibration of continuous bridges under moving vehicles**. Journal of Sound and Vibration, v.169(5) p.619-132
- Chompooming, K. e Yener, M. (1995), **The influence of roadway surface irregularities and vehicle deceleration on bridge dynamics using the method of lines**. Journal of Sound and Vibration, v.183(4) p.567-589
- Clawert, C. (1986), **La sollicitation verticale des joints de ponts par les véhicules de transport de marchandises**. Revue La Technique Routière, Centre de Recherches Routières, Brussels, Belgium, v.1 p.12-27



- Coussy, O., Said, M. e Hoove, J.P.V. (1989), **The influence of random surface irregularities on the dynamic response of bridge under suspend moving loads**, Journal of Sound and Vibration, v.130 p.313-320
- Das, P. (1997), **The safety of bridge**, Intitute Civil Engineering, London
- El Debs, A.L.H.C. (1990), **Determinação do coeficiente de impacto em pontes estaiadas sob ação de cargas móveis**. Tese de doutorado, Universidade de São Paulo, EESC, São Carlos
- Fafard, M. et al. (1998), **Dynamics analysis of existing continuous bridge**. Journal of Bridge Engineering, ASCE v.3 (1) p. 28-37
- Fleming, F.J. e Romualdi, J.P. (1961), **Dynamic response of highway bridges**. ASCE Journal of Structural Engineering, v.87(7) p.31-60
- Frýba, L. e Pinner, M. (2001), **Loads tests and modal analysis of bridges**, Engineering Structures, v.23 p. 102-109
- Green, M.F. e Cebon, D. (1997), **Dynamic Interaction Between Heavy Vehicles and Highway Bridges**, Computers and Structures, v.62(2) p.253-264
- Hwang, E.S. e Nowak, A.S. (1991), **Simulation of dynamic load for bridges**. ASCE Journal of Structural Engineering, v.117(5) p.1413-1434
- Ibanathan, M.J. e Wieland, M. (1987), **Bridge vibrations due to vehicle moving over rough surface**. ASCE Journal of Structural Engineering, v.113(9), p.1994-2008
- Kirkegaard, P.H., Nielsen, R.S.H. e Enevoldsen, I. (1998), **Dynamic vehicle impact for safety assessment of bridge**. Structural Reliability Theory Paper
- Kato, M. e Shimada, S. (1986), **Vibration of PC bridge during failure process**. ASCE Journal of Structural Engineering, v.112(7) p.1692-1703



- Kwon, H.C. et al. (1998), **Vibration control of bridges under moving loads**. Computers and Structures v.66 p.473-480
- Law, S.S. e Zhu, X.Q. (2004), **Dynamic behaviour of damaged concrete bridge structure under moving vehicular loads**. Engineering Structures, v.23 p. 102-109
- Liu, C., Huang, D. e Wang, T-L. (2002), **Analytical dynamic impact study based on correlated road roughness**. Computers and Structures v.80 p.1639-1650
- Lombaert, G. et al. (2000), **The validation of a numerical prediction model for free field traffic induced vibrations by in situ experiments**. ISMA, Leuven, Belgium
- Lombaert, G. (2001), **Development and experimental validation of a numerical model for the free field vibrations induced by road traffic**. PhD Thesis, Department of civil engineering, KU Leuven, Belgium
- Maeck, J. (2003), **Damage assessment of civil engineering structures by vibration monitoring**. PhD Thesis, Department of civil engineering, KU Leuven, Belgium
- Marchesiello, S. et al. (1999), **Dynamics of multi-span continuous straight bridges subjected to multi-degrees of freedom moving vehicle excitation**. Journal of Sound and Vibration, v.224 (3) p.541-561
- Moses, F. (1979), **Weigh-in motion system using instrumented bridges**. ASCE Transportation Engineering Journal, v.105(3) p.233-249
- O'Connor, C. e Shaw, P. (2000), **Bridges Loads**. Spon Press (London)
- Oñate, E. (1992), **Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos: Análisis estático lineal**. Centro Internacional de Métodos Numéricos En Ingeniería.

- Palamas, J., Coussy, O. e Bamberger, Y. (1985), **Effects of surface irregularities upon the dynamic response of bridges under suspended moving loads.** Journal of Sound and Vibration, v.99(2) p.235-245
- Paschoalini, A.T. (1995), **Estudo comparativo entre elementos finitos isoparamétricos das famílias Serendipity e Lagrangeana para análise dinâmica de placas e cascas.** Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP.
- Paultre, P. et al. (1992), **Bridge dynamics and dynamic amplification factors – a review of analytical and experimental findings.** Can. J. Civ. Eng. 19, p.260-278
- Peeters, B. (2000), **Identification and damage detection in civil engineering.** PhD Thesis, Department of civil engineering, KU Leuven, Belgium
- Penner, E. (2000), **Avaliação do desempenho de sistemas estruturais de pontes de concreto.** Tese de doutorado, Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, São Paulo
- Przemieniecki, J. S.(1968), **Theory of matrix structural analysis.** MacGraw Hill (London)
- Silva, J.G.S. e Roehl, J.L. (1997), **Probabilistic formulation for the analysis of bridges decks with irregular pavement surface.** VII Diname, Internacional Conference on Dynamic Problems in Mechanics
- Smith, K.N. (1969), **Dynamic behaviour of highway bridge structures.** Interim Report, Ontario Joint Highway Research Programme, Project C1
- Song, Y. e Biondini, F. (2002), **Effects of surface irregularities on the dynamical responses of bridge-vehicle interaction systems.** 15<sup>th</sup> ASCE Engineering Mechanics Conference, Columbia University, New York

- Timoshenko, S.P. (1922), **On the forced vibration of bridges.** Philosophical Magazine, Ser. 6, 43 p.1018-1019
- Tung, C.C. (1967), **Random response of highway bridges to vehicle loads.** ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, v.93(5), p.79-94
- Yokoyama, T. (1990), **Vibrations of a hanging Timoshenko beam under gravity.** Journal of Sound and Vibration, v.141(2) p.245-258
- Zeng, H., et al. (1999), **An analysis of skewed bridge/vehicle interaction using the grillage method.** 14<sup>th</sup> ASCE Engineering Mechanics Conference, Austin, TX, may 21-24
- Zeng, H. (2000), **Vibration of discretely stiffened skew plates and bridge/vehicle interaction analysis.** PhD Thesis, University of Oklahoma, Graduate College, Norman, Oklahoma
- Zienkiewicz, O.C. et al. (1971), **Reduced integration technique in general analysis of plates and shells.** International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.3, p.375-390
- Walter, W.H. e Veletsos, A.S. (1963), **Response of simple-span highway bridges to moving vehicles.** Research and Development Studies, Report 0289, US Department of Commerce, Bureau of Public Roads, Washington, DC
- Wang, T-L. e Zong, Z. (2002), **Improvement of Evaluation Method for existing highway bridges.** Final Report, FL/DOT/RMC 6272-818, Florida International University, Department of Civil and Environment Engineering
- Whitmore, A.P. (1970), **Dynamic pavement loads of heavy highway vehicles.** National Cooperative Highway Research Program, Report 105, by AASHTO
- Wright, D.T. e Green, R. (1959), **Highway bridge vibrations. Part1 A review of previous studies.** Report 4, Department of Civil Engineering, Queen's University, Kingston, Ontário

## APÊNDICE I

Matrizes do modelo do veículo apresentado na Fig.(2.4) e Tabela (2.1).

Fonte: Zeng (2000).

Matriz de Rigidez do Veículo:  $K_v$

$$\begin{bmatrix} k_{t1}+k_{s1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{t2}+k_{s2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{t3}+k_{s3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{t4}+k_{s4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{t5}+k_{s5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{t6}+k_{s6} & -k_{s6} & k_{s6} & 0 & 0 & -k_{s6} \\ -k_{s1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s6} & k_{s6}+k_{s1} & -k_{s6} & 0 & 0 & k_{s6} \\ 0 & -k_{s2} & 0 & 0 & 0 & k_{s6} & -k_{s6} & k_{s6}+k_{s2} & 0 & 0 & -k_{s6} \\ 0 & 0 & -k_{s3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{s3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{s4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{s4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s5} & -k_{s6} & k_{s6} & -k_{s6} & 0 & 0 & k_{s6}+k_{s5} \end{bmatrix}$$

Matriz de Massa do Veículo:  $M_v$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{v7,7} & M_{v7,8} & 0 & 0 & M_{v7,11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{v7,8} & M_{v8,8} & M_{v8,9} & M_{v8,10} & M_{v8,11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{v8,9} & M_{v9,9} & M_{v9,10} & M_{v9,11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{v8,10} & M_{v9,10} & M_{v10,10} & M_{v10,11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{v7,11} & M_{v8,11} & M_{v9,11} & M_{v10,11} & M_{v11,11} \end{bmatrix}$$



$$M_{v7,7} = b_2^2 M_1 - \frac{I\theta_1}{l_b^2}$$

$$M_{v7,8} = b_2 M_1 (b_1 - a_2) - \frac{I\theta_1}{l_b^2}$$

$$M_{v7,11} = b_2 a_2 M_1$$

$$M_{v8,8} = (b_1 - a_2)^2 M_1 + a_1^2 c_2^2 M_2 + \frac{I\theta_1}{l_b^2} + \frac{I\alpha_1}{l_a^2} + \frac{a_1 I\theta_2}{l_c^2}$$

$$M_{v8,9} = a_1 c_1 c_2 d_2 M_2 - \frac{a_1^2 I\theta_2}{l_c^2}$$

$$M_{v8,10} = a_1 c_1 c_2 d_1 M_2 - \frac{a_1 a_2 I\theta_2}{l_c^2}$$

$$M_{v8,11} = (b_1 - a_2) a^2 M_1 + a_1 a_2 c_2^2 M_2 - \frac{I\alpha_1}{l_a^2} + \frac{a_1 a_2 I\theta_2}{l_c^2}$$

$$M_{v9,9} = (d_2 c_1)^2 M_2 + \frac{I\alpha_2}{l_d^2} + \frac{a_1^2 I\theta_2}{l_c^2}$$

$$M_{v9,10} = d_1 d_2 c_1^2 M_2 - \frac{I\alpha_2}{l_d^2} + \frac{a_1 a_2 I\theta_2}{l_c^2}$$

$$M_{v9,11} = a_2 c_1 c_2 d_2 M_2 - \frac{a_1 a_2 I\theta_2}{l_c^2}$$

$$M_{v10,10} = (d_1 c_1)^2 M_2 + \frac{I\alpha_2}{l_d^2} + \frac{a_2^2 I\theta_2}{l_c^2}$$

$$M_{v10,11} = a_2 c_1 c_2 d_1 M_2 - \frac{a_2^2 I\theta_2}{l_c^2}$$

$$M_{v11,11} = a_2^2 c_2^2 M_2 + \frac{I\alpha_1}{l_a^2} + \frac{a_2^2 I\theta_2}{l_c^2} + a_2^2 M_1$$

Matriz de Amortecimento do Veículo:  $C_v$

É obtida de modo análogo à matriz de rigidez, trocando os valores de 'k' pelos respectivos valores de 'c', dados na Tabela (2.1).