

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Cálculo das frequências de “whirling” através  
do método de elementos finitos em ambiente  
Matlab ®**

Eng. Aguinaldo Soares de Oliveira

DEDALUS - Acervo - EESC



31100008022

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Orientador Prof. Dr. Mario Francisco Mucheroni



São Carlos  
1999

Class.	TESE - EESC
Cutt.	4030
Tombo	185/99

311 90008022

S/S 1064329

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

048c Oliveira, Aguinaldo Soares de  
Cálculo das frequências de "whirling" através do  
método de elementos finitos em ambiente Matlab® /  
Aguinaldo Soares de Oliveira. -- São Carlos, 1999.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de  
São Carlos-Universidade de São Paulo, 1999.  
Área: Engenharia Mecânica.  
Orientador: Prof. Dr. Mario Francisco Mucheroni.

1. Frequências naturais. 2. Turbomáquinas. 3. Eixos  
rotativos. I. Título.

## FOLHA DE APROVAÇÃO

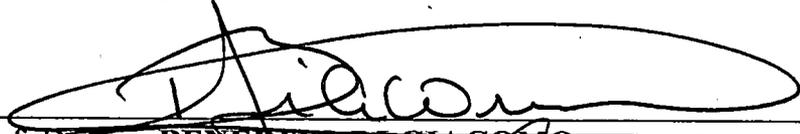
Candidato: Engenheiro **AGUINALDO SOARES DE OLIVEIRA**

Dissertação defendida e aprovada em 23.04.1999  
pela Comissão Julgadora:



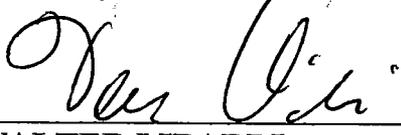
---

Prof. Doutor **MARIO FRANCISCO MUCHERONI** (Orientador)  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



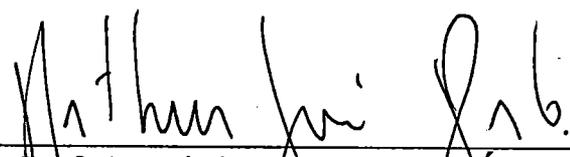
---

Prof. Doutor **BENEDITO DI GIACOMO**  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



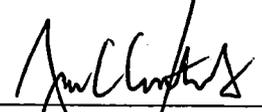
---

Prof. Doutor **WALTER LIBARDI**  
(Universidade Federal de São Carlos - UFSCar)



---

Prof. Associado **ARTHUR JOSÉ VIEIRA PORTO**  
Coordenador da Área de Engenharia Mecânica



---

**JOSÉ CARLOS A. CINTRA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

Aos meus pais Benedito e Maria, pelos ensinamentos.

À minha esposa Gláucia, pela dedicação e incentivo.

## AGRADECIMENTOS

Ao terminar este trabalho, gostaria de agradecer:

Ao Prof. Dr. Mario Francisco Mucheroni pela orientação, discussão e apoio fornecido durante a elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Benedito Di Giacomo e ao Prof. Dr. Paulo Sérgio Varoto pelos comentários e sugestões no desenvolvimento do trabalho.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos colegas de pós-graduação: Alessandro, Vagner, Fabrício, Rosenda, Helder, Denise, Renata, Antônio Almeida, Roberto, Cláudio, Marcello, Amauri, Alexandre e Fernando Santoro pelas discussões, amizade e auxílio na confecção da parte escrita deste trabalho.

Agradeço às pessoas que sempre acreditaram e incentivaram a minha pessoa e que de uma forma direta ou indireta contribuíram para que este trabalho se concretizasse.

## SUMÁRIO

SUMÁRIO.....	iv
LISTA DE FIGURAS.....	vii
LISTA DE TABELAS.....	ix
SÍMBOLOS.....	x
RESUMO.....	xii
<i>ABSTRACT</i> .....	xiii
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Objetivos e justificativas.....	2
2. PESQUISA BIBLIOGRÁFICA.....	4
2.1 Estabilidade.....	6
2.2 Métodos numéricos.....	7
2.3 Balanceamento.....	8
3. TEORIA DA DINÂMICA DE ROTAÇÃO.....	10
3.1 Determinação do modelo matemático.....	11
3.2 Disco.....	13
3.3 Eixo.....	14
3.4 Mancais.....	15
3.5 Massa desbalanceada.....	17
3.6 As frequências de “whirling” e o efeito giroscópico.....	17
3.7 Exemplo de diagrama de Campbell.....	18
3.8 Respostas em frequência.....	24
3.8.1 Massa desbalanceada em rotores simétricos.....	24
3.8.2 Força assíncrona em rotores simétricos.....	25
3.8.3 Força harmônica fixa em rotores simétricos.....	27
3.8.4 Massa desbalanceada em rotores assimétricos.....	28
3.8.5 Força assíncrona em rotores assimétricos.....	30
3.8.6 Força harmônica em rotores assimétricos.....	31
3.9 Rotores amortecidos.....	32
3.10 Influência do momento de área e de inércia sobre o efeito giroscópico	35
4 FREQUÊNCIAS DE “WHIRLING” ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EM AMBIENTE MATLAB®.....	37

4.1 O modelo de rotor de Laval modificado.....	37
4.2 Programa de cálculo das frequências de “whirling”.....	38
4.3 Simulações de rotores.....	40
5 PROGRAMA DE COMPUTADOR DESENVOLVIDO.....	41
5.1 Fundamentos do método de discretização.....	42
5.2 Elementos básicos de um rotor.....	43
5.2.1 O elemento eixo.....	43
5.2.2 O elemento disco.....	49
5.2.3 Elemento mancal.....	51
5.3 Mudança de coordenadas.....	51
5.4 Programa de computador giros.....	53
5.5 Soluções de equações através do método direto.....	57
5.6 Descrição das subrotinas.....	58
5.6.1 Entrada do programa.....	60
5.6.2 Matrizes de partida dos somatórios.....	61
5.6.3 Matrizes globais eixo.....	61
5.6.4 Especificação dos elementos do rotor.....	61
5.6.5 Montagem das matrizes gerais do sistema.....	62
5.6.6 Diminuição da ordem das matrizes globais do sistema.....	62
5.6.7 Matrizes auxiliares.....	63
5.6.8 Subrotina de montagem das matrizes estado.....	63
5.6.9 Subrotina de cálculos dos autovalores.....	63
5.6.10 Subrotina obtenção dos autovalores.....	64
5.6.11 Subrotinas de ordenação do vetor e saída de resultados.....	64
5.7 Funções bibliotecas do matlab®.....	64
5.7.1 Função biblioteca eig.....	65
5.7.2 Função zeros.....	65
5.7.3 Função biblioteca eye.....	65
5.7.4 Outras funções utilizadas.....	66
5.8 Guia de utilização do programa de “giros”.....	66
6 SIMULAÇÕES DE ROTORES.....	70
6.1 Rotor multidisco.....	71

6.2 Rotor de Laval modificado.....	77
6.3 Rotor com eixo escalonado.....	80
7 CONCLUSÕES FINAIS.....	84
BIBLIOGRAFIA.....	87
ANEXOS.....	91

## LISTA DE FIGURAS

### CAPÍTULO 2 : PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

2.1 – Áreas da dinâmica de rotação.....	5
---	---

### CAPÍTULO 3 : TEORIA DA DINÂMICA DE ROTAÇÃO

3.1 – Rotor de Laval.....	11
3.2 – Referenciais do disco.....	12
3.3 – Modelo das rigidezes e dos amortecimentos dos mancais.....	16
3.4 – Massa desbalanceada.....	17
3.5 – Diagrama de Campbell para rotores simétricos.....	21
3.6 – Diagrama de Campbell para rotores assimétricos.....	23
3.7 – Resposta da massa desbalanceada.....	25
3.8 – Resposta da força assíncrona.....	26
3.9 – Resposta da força harmônica fixa no espaço.....	28
3.10 – Resposta da massa desbalanceada para rotores assimétricos.....	29
3.11 – Resposta da força assíncrona para rotores assimétricos.....	31
3.12 – Resposta da força harmônica fixa no espaço para rotores assimétricos.....	32
3.13 – Diagrama de Campbell para $\beta$ 0,0002.....	33
3.14 – Diagrama de Campbell para $\beta$ 0,015.....	34
3.15 – Diagrama de Campbell para $\beta$ 0,026.....	34
3.16 – Influência do raio externo do disco nas frequências de “whirling”.....	35
3.17 – Influência do raio do eixo nas frequências de “whirling”.....	36

### CAPÍTULO 5 : PROGRAMA DE COMPUTADOR DESENVOLVIDO

5.1 – Elementos de um rotor simplificado.....	42
5.2 – O elemento eixo.....	44
5.3 – Elemento disco.....	50
5.4 – Fluxograma do programa GIROS.....	54
5.5 – Subrotina eixo.....	55

5.6 – Subrotina MANCAL e DISCO.....	56
5.7 – Rotor para exemplo de utilização do programa GIROS.....	66
5.8 – Janela de comandos do Matlab® para entrada de dados.....	67
5.9 – Janela de comandos do Matlab® para especificação dos elementos.....	68
5.10 – Janela de comandos do Matlab® para definição de apoios fixos.....	69
5.11 – Janela de comandos do Matlab® para saída de resultados.....	69

## **CAPÍTULO 6 : SIMULAÇÕES DE ROTORES**

6.1 – Rotor multi-disco simulado.....	71
6.2 – Diagrama de Campbell para rotor multi-disco.....	76
6.3 – Rotor de Laval simulado.....	77
6.4 – Diagrama de Campbell para rotor de Laval.....	79
6.5 – Rotor de eixo escalonado.....	80

## LISTA DE TABELAS

### CAPÍTULO 3 : TEORIA DA DINÂMICA DE ROTAÇÃO

3.1 – Dados do disco.....	18
3.2 – Dados do eixo.....	19
3.3 – Dados da massa desbalanceada.....	19

### CAPÍTULO 5 : SOFTWARE PARA A SIMULAÇÃO DE DINÂMICA DE ROTAÇÃO

5.1 – Constantes do rotor.....	67
--------------------------------	----

### CAPÍTULO 6 : SIMULAÇÃO DE ROTORES

6.1 – Entradas do rotor multi-disco .....	72
6.2 – Rigidez e amortecimento dos mancais do rotor multi-disco.....	73
6.3 – Frequências de “whirling” para 25.000 rpm.....	74
6.4 – Frequências de “whirling” para rotor multi-disco.....	75
6.5 – Variáveis de entrada e cotas do rotor de Laval simulado.....	78
6.6 – Rigidez e amortecimento do mancal modificado.....	78
6.7 – Comparação de frequências naturais para 955 rpm.....	79
6.8 – Frequências de “whirling” para rotor de Laval.....	80
6.9 – Dados de entrada dos elementos do modelo.....	81
6.10 – Variáveis de entrada do elemento disco.....	82
6.11 – Valores de amortecimento e rigidez dos mancais.....	82
6.12 – Frequências de “whirling” para 30.000 rpm.....	83

## SÍMBOLOS

- $\theta$  - deslocamento angular em torno do eixo Z
- $\psi$  - deslocamento angular em torno do eixo X
- $w$  - deslocamento linear ao longo do eixo Z
- $u$  - deslocamento linear ao longo do eixo X
- $T_D$  - energia cinética do disco
- $M_D$  - massa do disco
- $I_{DX}$  - momento de inércia do disco em X
- $I_{DY}$  - momento de inércia do disco em Y
- $I_{DZ}$  - momento de inércia do disco em Z
- $\rho$  - massa específica
- $q_i$  - coordenada generalizada
- $I_x$  - momento de inércia de área em X
- $I_z$  - momento de inércia de área em Z
- $I_y$  - momento de inércia de área em Y
- $\Omega$  - frequência de rotação do eixo
- $T_s$  - energia cinética do eixo
- $U_s$  - energia potencial do eixo
- $T$  - energia cinética
- $V$  - energia potencial
- $W_{nc}$  - trabalho virtual das forças não conservativas
- $F$  - função dissipação
- $Q$  - força generalizada
- $F_0$  - força axial
- $E$  - módulo de elasticidade longitudinal
- $G$  - módulo de elasticidade transversal
- $\nu$  - coeficiente de Poisson
- $L$  - comprimento da seção do eixo
- $[M]$  - matriz massa global
- $[K]$  - matriz rigidez global
- $[C]$  - matriz de amortecimento global

- $[G]$  - matriz giroscópica global
- $[a]$  - matriz de transformação de coordenadas locais para as globais
- $[a]^T$  - matriz transposta de transferência
- $[m]_{ed}$  - matriz de massa do elemento disco
- $[g]_{ed}$  - matriz giroscópica do elemento disco
- $[m]_{es}$  - matriz de massa do elemento eixo
- $[g]_{es}$  - matriz giroscópica do elemento eixo
- $[K]_{es}$  - matriz de rigidez do elemento eixo
- $[K_c]$  - matriz de rigidez clássica do elemento eixo
- $[K_F]$  - matriz de rigidez devido a força axial do elemento eixo
- $\{\delta\}$  - vetor de deslocamento nodal
- $XYZ$  - referencial inercial
- $xyz$  - referencial não inercial
- $k_{xx}$  - rigidez na direção  $X$
- $k_{zz}$  - rigidez na direção  $Z$
- $k_{xz}$  - rigidez cruzada no plano  $XZ$
- $k_{zx}$  - rigidez cruzada no plano  $ZX$
- $c_{xx}$  - amortecimento na direção  $X$
- $c_{zz}$  - amortecimento na direção  $Z$
- $c_{xz}$  - amortecimento cruzado no plano  $XZ$
- $c_{zx}$  - amortecimento cruzado no plano  $ZX$
- $F_u$  - força no mancal em relação a coordenada generalizada  $u$
- $F_w$  - força no mancal em relação a coordenada generalizada  $w$
- $M_\theta$  - momento no mancal em relação a coordenada generalizada  $\theta$
- $M_\psi$  - momento no mancal em relação a coordenada generalizada  $\psi$

## RESUMO

OLIVEIRA, A. S. (1999). *Cálculo das frequências de Whirling através do método de elementos finitos em ambiente Matlab ®*, 1999. 86p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O efeito giroscópico altera as frequências naturais dos rotores, fazendo aparecer frequências denominadas frequências de “*whirling*”, sendo uma de módulo maior que a frequência natural com rodopio no mesmo sentido da rotação e outra menor em sentido contrário. A ocorrência de uma ou outra depende da rotação e das condições iniciais do problema. Quando a velocidade de rotação atinge um múltiplo inteiro destas frequências de “*whirling*” ocorre uma vibração violenta que pode danificar a máquina. No projeto de máquinas rotativas deve-se evitar que o sistema permaneça nestes pontos. Neste trabalho é apresentado um programa computacional desenvolvido para determinar estes pontos utilizando-se do método de elementos finitos, considerando os efeitos da inércia de rotação e do cisalhamento na flexão do eixo. A discretização é feita com três elementos básicos: eixo, disco e mancal. Através desta modelagem montam-se as matrizes de massa, de amortecimento, giroscópica e de rigidez. A ordem destas matrizes depende do número de nós, sendo que em cada um foram considerados quatro graus de liberdade. O problema é escrito no espaço de estado de maneira a se obter um problema de autovalores e autovetores na forma clássica.

**Palavras chaves:** frequências naturais; turbomáquinas; eixos rotativos.

## ABSTRACT

The gyroscopic effect changes the natural frequencies of rotary machines, which induces the appearance frequencies called whirling frequencies. The whirling frequency value higher than natural frequency presents a rotation in same direction of the rotor and the other, the (lower) rotate in the other direction. The occurrence of the higher or lower frequency depends on the rotation and on the initial condition of the problem. When the velocity of rotation reach a whole entire multiple of the value of the whirling frequency, there is a violent vibration which may damage the machine. In the design of rotary machine operations, in the proximity to these points must be avoided. In this work, a computer software to determine the whirling frequency using finite elements technique, and considering the effects of the rotary inertia and shaft bending shear, has been developed. The discretization process has considered three basic elements: shaft, disc and bearings. The damping, stiffness mass and gyroscopic matrices has been assembled by this modeling. The order of these matrices depends on the number of nodes and for every node, there are four degrees of freedom. The problem has been described in the state space, in order to obtain the classic eigenvalue and eigenvector problem.

**Keywords:** natural frequency; turbomachines; rotator shafts

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

A dinâmica de rotação tem como objetivo estudar os movimentos em máquinas rotativas, abrangendo conceitos importantes como velocidades críticas, frequências de “whirling” e o efeito giroscópico.

Velocidades críticas ocorrem quando em determinadas velocidades de rotação o rotor é excitado, entrando em ressonância e vibrando catastróficamente.

O efeito giroscópico está associado à variação do sentido da quantidade de movimento angular, que faz com que o sistema apresente uma precessão. Este fenômeno é observado, por exemplo, em um motor de automóvel ao executar uma curva: o motor gira em torno do seu eixo longitudinal sendo este movimento amortecido pelos coxins, Mabie (1980).

Este efeito de precessão faz com que as frequências naturais sejam alteradas em função da velocidade de rotação do rotor. Quando este efeito aumenta o valor das frequências naturais, ocorrem frequências em fase ou “forward”. Quando este efeito diminui o valor do módulo das frequências naturais, ocorrem frequências em oposição de fase ou “backward”. Estas frequências são chamadas de “whirling” e a

ocorrência de um ou de outro tipo depende das condições iniciais no caso livre e das forças de excitação no caso forçado.

Quando a velocidade de rotação permanece em uma das frequências de “whirling”, pode ocorrer um movimento de instabilidade violento denominado órbitas de “whirl”. Dependendo da assimetria do rotor e das forças de excitação este fenômeno pode ocorrer também nos múltiplos inteiros da velocidade de rotação, denominados frequências multi-harmônicas.

## 1.1 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVAS

Turbinas, compressores centrífugos, bombas e ventiladores são exemplos de rotores clássicos. A finalidade deste trabalho é servir como uma ferramenta auxiliar para que os projetistas destas máquinas dimensione-as de maneira que as suas velocidades de trabalho fiquem fora das faixas de instabilidade, para assim evitar danos, desgastes ou até mesmo a destruição dos mancais.

Neste trabalho é utilizado um método aproximado para o cálculo das frequências de “whirling” através do método dos elementos finitos, sendo o sistema discretizado em  $n$  graus de liberdade pelas equações de Lagrange. O modelo discreto é escrito no espaço de estado.

Para isso utilizou-se o “software” matemático Matlab®. Este “software” dispõe de funções na sua biblioteca de álgebra matricial para resolver diversos tipos de problemas, como por exemplo, problemas de autovalores e autovetores que abreviam o trabalho de desenvolvimento de programas de computador. Outra vantagem do Matlab® é de ser um “software” bastante utilizado.

O programa de computador desenvolvido neste trabalho pode ser aplicado em rotores flexíveis com mancais onde se conhecem as rigidezes, ou também em rotores quando as rigidezes dos mancais são muito altas e podem ser consideradas na modelagem como apoios fixos.

Para atingir estes objetivos, o trabalho está distribuído nos capítulos que seguem da seguinte forma:

No Capítulo 2 estão apresentados os trabalhos de alguns autores utilizados como base desta dissertação.

No Capítulo 3 faz-se um resumo dos fundamentos da teoria da dinâmica de rotação através do estudo de um rotor com um único disco, o modelo de Laval com efeito giroscópico.

No Capítulo 4 é apresentada a proposta de trabalho executada nesta dissertação.

No Capítulo 5 faz-se a descrição da modelagem de todos os elementos do rotor e da técnica de elementos finitos utilizada para discretizar o sistema contínuo em um sistema discreto com  $n$  graus de liberdade. Neste capítulo também é apresentado o projeto do programa de computador desenvolvido, com discussões sobre o fluxograma principal e as diversas subrotinas empregadas dentro do programa principal, bem como das funções de biblioteca do “software” matemático Matlab®. Em seguida é apresentado um guia da utilização do programa de computador desenvolvido através de um exemplo.

No Capítulo 6 apresentam-se as simulações em três tipos de rotores, os resultados destas simulações e os gráficos de Campbell correspondentes.

Finalmente no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões finais e sugestões para futuros trabalhos.

As listagens dos programas de computador desenvolvidos para calcular as frequências de “whirling”, são mostradas no anexo deste trabalho.

## CAPÍTULO 2

### PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo faz uma breve revisão bibliográfica do tema “Dinâmica de Rotação” dividindo-a em três partes para melhor tratamento das informações.

A era das altas velocidades em turbomáquinas foi aberta no final do século XIX, quando Carl Gustaf Patric de Laval desenvolveu um separador de manteiga movido a turbina a vapor que atingia velocidade de rotação acima de 30.000 rpm (Dimarogonas, 1976). As modernas turbomáquinas produzem ou absorvem grandes quantidades de energia. A propriedade que permite estas altas taxas de densidade energética são as altas velocidades de rotação que podem produzir problemas de instabilidades dinâmicas e a conseqüente destruição destas máquinas, (Vance, 1988).

Atualmente essas turbomáquinas atingem velocidades de rotação da ordem de 40.000 rpm, como por exemplo, a turbina a jato modelo CFM 56 de fabricação General Electric, (Lalanne, 1990).

Muitos pesquisadores se envolveram com este assunto, entre os quais pode-se citar: W.J.M. Rankine, Carl G. P. de Laval e A. Stodola que realizaram trabalhos sobre velocidades críticas em eixos e comportamento dinâmico de mancais.

Segundo Vance (1988) os objetivos da análise da dinâmica de rotação são:

- 1) Calcular as velocidades críticas;
- 2) Determinar modificações de projeto para se evitar as velocidades críticas;
- 3) Calcular as frequências naturais da vibração torcional;
- 4) Calcular o valor e a localização das massas de correção do desbalanceamento através dos dados fornecidos pelas medições das vibrações;
- 5) Calcular as amplitudes de vibração causadas pelo desbalanceamento;
- 6) Calcular as faixas de instabilidade dinâmicas e
- 7) Determinar as modificações de projeto para suprimir estas instabilidades dinâmicas.

Segundo Faria (1990) as referências bibliográficas em dinâmica de rotação podem ser divididas em três temas: estabilidade, balanceamento e métodos numéricos, mostrado na Figura 2.1. O escopo deste trabalho é tratar de problemas de estabilidade, utilizando-se de métodos numéricos aproximados para solução como o método de elementos finitos. Desta forma são pesquisados os trabalhos de dinâmica de rotação relacionados aos temas estabilidade e métodos numéricos aproximados, citando-se como informações complementares trabalhos no tema de balanceamento.

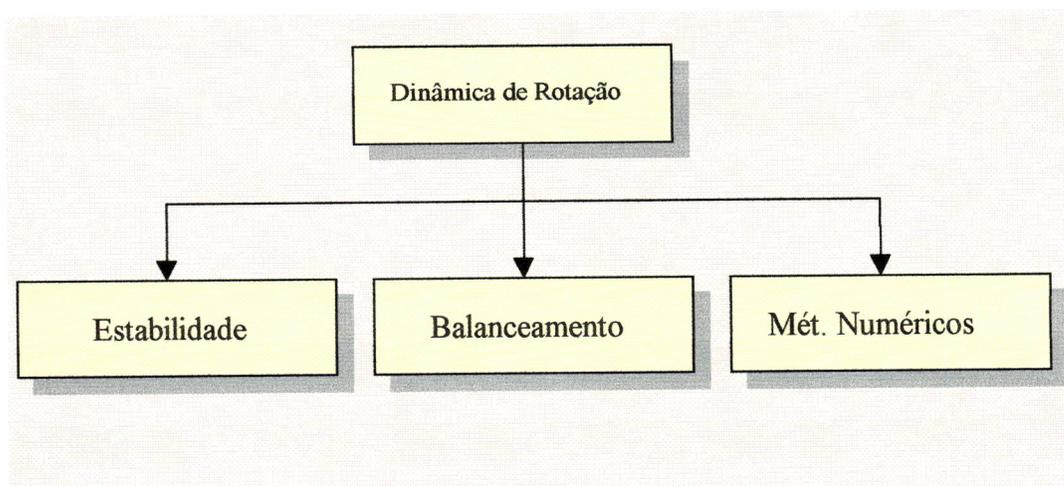


Figura 2.1 Áreas da dinâmica de Rotação (Faria, 1990)

## 2.1 ESTABILIDADE

Os rotores flexíveis apresentam problemas de instabilidade devido às vibrações provocadas pela flexão à qual estão sujeitos. Den Hartog (1956) descreve a geometria da configuração do centro dos mancais, do eixo e da posição do centro de massa e também discute a estabilidade do rotor em relação à velocidade crítica.

As vibrações que ocorrem no eixo dos rotores simétricos, quando suas rotações atinge um valor da velocidade crítica ou o dobro deste valor, foram abordadas por Sternlicht (1963).

Childs (1993) descreve as velocidades críticas e a resposta síncrona ao desbalanceamento através do modelo de Jeffcott ou rotor de Laval e também o efeito do acoplamento giroscópico sobre o rotor utilizando o modelo de Stodola-Green.

O modelo de Jeffcott ou rotor de Laval consiste de um disco maciço montado entre mancais e suportado por um eixo flexível da massa desprezível.

Vance (1988) utiliza-se do modelo de Jeffcott para descrever o “whirl” síncrono e assíncrono.

Dimentberg (1961) demonstrou que incluindo flexibilidade adicional devido ao cisalhamento produz uma segunda velocidade crítica síncrona.

Lalanne e Ferraris (1990), além de tratarem de outras áreas da dinâmica de rotação, descrevem o método de Routh-Hurwitz, que determina a estabilidade de sistemas com muitos graus de liberdades. Empregam para esse estudo de estabilidade o caso livre.

Tondl (1965) investiga através de experimentação algumas causas de instabilidade que são: amortecimento interno, rigidez assimétrica de eixo e o filme de óleo em mancais hidrodinâmicos.

O comportamento instável de um rotor sob o efeito giroscópico devido ao movimento de precessão do disco é descrito por Rao (1983).

Rao e Sharan (1993) descrevem o cálculo das frequência naturais de um rotor multi-disco usando o método dos coeficientes de influência incluindo o efeito giroscópico.

Géradin et al (1988) e outros analisam a estabilidade e as velocidades críticas de um rotor usando métodos numéricos.

O amortecimento dos mancais influem na estabilidade e nas frequências críticas, Lalanne e Ferraris (1990). Eles fizeram um estudo, mostrado no Capítulo 3, sobre o efeito do amortecimento dos mancais nas velocidades críticas.

A dissertação de Grillo (1993) estuda a dinâmica rotacional em eixos flexíveis e calcula as velocidades críticas considerando os efeitos de translação da massa, efeitos giroscópico e o efeito da rigidez flexional para eixos e mancais.

Finalizando este tema destaca-se o trabalho de Dimarogonas (1976) que descreve os tipos de mancais considerando os modelos de amortecimento histerético e viscoso.

## 2.2 MÉTODOS NUMÉRICOS

O desenvolvimento da ciência da computação permitiu que surgissem técnicas de análise e procedimentos numéricos para a solução dos problemas em dinâmica de rotores.

Algoritmos da álgebra linear para solução de problemas de autovalores e autovetores tem tido grande aplicação na dinâmica de máquinas e em particular na dinâmica de rotação. Os autovalores fornecidos por estes algoritmos fornecem importantes características modais dos sistemas. Dependendo do sistema modelado ser giroscópico ou não, amortecido ou não, os autovalores podem ser reais, imaginários ou complexos.

Wang e Kirkhope (1994) propõem um novo método de análise modal para o cálculo das frequências de “whirl” e das velocidades críticas em sistemas giroscópicos amortecidos ou não amortecidos, utilizando-se de uma separação da matriz complexa original em duas matrizes simétricas reais as quais fornecerão autovalores reais no espaço de estado.

Meirovitch (1986) propôs um método para a solução do problema de autovalor e autovetores, onde reduz a uma forma padronizada os sistemas giroscópicos, através da solução de sistemas de equações algébricas.

Atualmente o método dos elementos finitos e o método das matrizes de transferências são muito empregados na modelagem de rotores flexíveis.

O trabalho de Pavanello et al (1985) desenvolve um estudo do comportamento dinâmico de hidrogeradores, usando o método das matrizes de transferência para solução do problema de vibrações livres e forçadas.

A tese de Almeida (1979) analisa o comportamento das velocidades críticas de um eixo, sem considerar o efeito giroscópico, submetido a uma variação de temperatura usando a técnica das matrizes de transferência.

Nelson e McVaugh (1975) propõem um procedimento para modelagem de rotores utilizando-se o método dos elementos finitos, incluindo os efeitos da inércia de rotação, momentos giroscópico e cargas axiais.

Craig (1981) descreve os modelos de vigas elásticas, segundo a teoria de Euler- Bernoulli e a de Timoshenko, que é mais completa, considerando a inércia de rotação e o efeito de cisalhamento, embora não considere o efeito giroscópico.

A dissertação de Inouye (1976) analisa o método numérico aproximado de Prohl para a determinação das velocidades críticas dos eixos de seção variável com disco, considerando-se o efeito giroscópico.

Finalizando destaca-se o trabalho de Curti e outros (1993) no qual fazem uma revisão de vários trabalhos sobre a modelagem de eixos rotativos e comparam a resposta ao desbalanceamento de um sistema com rotor típico com os resultados obtidos através do método dos elementos finitos, encontrados por outros autores.

### **2.3 BALANCEAMENTO**

Segundo Lacerda (1990) os métodos básicos de balanceamento de rotores flexíveis empregadas atualmente são: o método modal, o método dos coeficientes de influência e uma variação dos dois métodos denominado método dos coeficientes de influência ponderados.

Den Hartog (1956) descreve o método empregado pelas máquinas de balanceamento estático que fazem com que o centro de gravidade coincida com a

linha de centro do eixo do rotor e o método de balanceamento dos coeficientes ou números de influência.

Ferreira (1989), emprega um método que combina as vantagens do método modal e do método dos coeficientes de influência, através do chamado balanceamento unificado.

Rao (1983) descreve as classes de rotores com a finalidade de facilitar o balanceamento através desta classificação. Descreve também as técnicas de balanceamento de rotores rígidos e flexíveis.

Finalizando o tema de balanceamento, destaca-se Fleming (1989) que apresenta um tutorial sobre o balanceamento de rotores flexíveis e o trabalho de Richard (1988) que descreve o balanceamento de rotores flexíveis através de sistema de aquisição de dados.

## CAPÍTULO 3

### TEORIA DA DINÂMICA DE ROTAÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos da teoria da dinâmica de rotação empregados na execução da proposta de trabalho desta dissertação.

Para uma boa modelagem de rotores pode-se usar os seguintes elementos básicos: o disco, o eixo e os mancais ver, Figura 3.1.

A massa desbalanceada deve também ser considerada quando se trata de aplicações com movimentos forçados. As expressões da energia cinética são necessárias para caracterizar o disco, o eixo e as massas desbalanceadas, enquanto que as expressões de energia potencial são necessárias para caracterizar apenas o eixo, devido à sua deformação elástica. As forças dos mancais sobre o eixo são obtidas através de seus modelos de parâmetros agrupados.

O modelo do rotor de Laval é utilizado para definir conceitos importantes da dinâmica de rotação, tais como: velocidades críticas, frequências de “whirling” e o diagrama de Campbell.

O rotor de Laval é constituído por um disco fino uniforme e um eixo flexível sem massa, suportados por mancais (Childs, 1993).

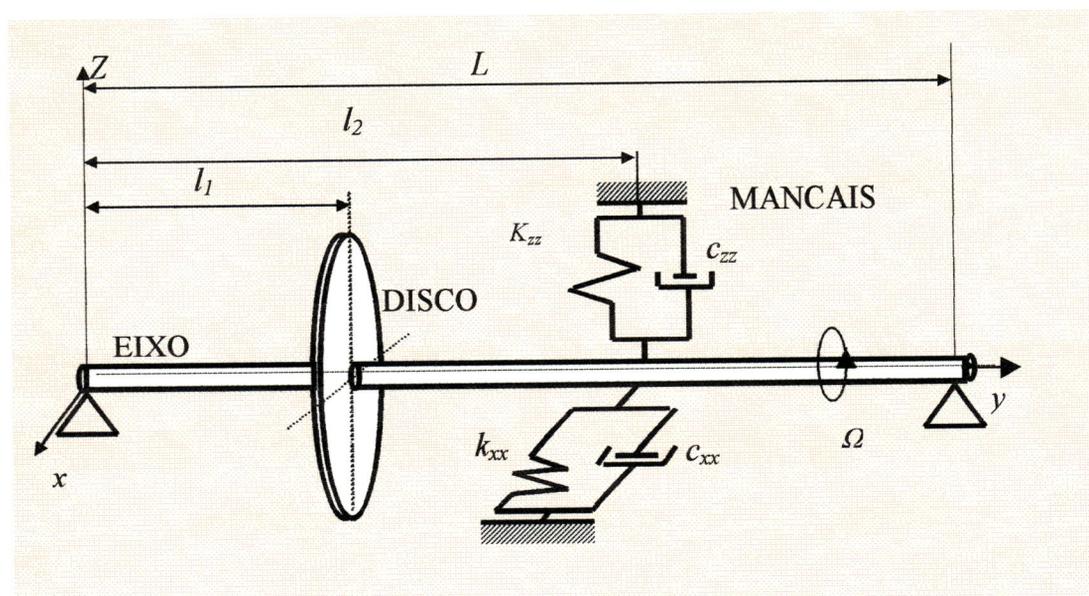


Figura 3.1 Rotor de Laval (Lalanne, 1990)

O rotor utilizado como exemplo neste capítulo está apoiado nas extremidades, conforme mostrado na Figura 3.1. Este rotor é consistido por:

- eixo simétrico de comprimento  $L$  com massa desprezível;
- disco simétrico situado na posição  $l_1$  considerado rígido;
- mancais flexíveis situados na posição  $l_2$ .

### 3.1 DETERMINAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

O referencial inercial é indicado por  $XYZ$  enquanto que  $xyz$  é um referencial preso ao disco. O eixo do rotor está ao longo do eixo  $Y$  e a velocidade de rotação  $\Omega$  é constante. As vibrações ocorrem com deslocamentos nas direções de  $X$  e  $Z$ , conforme mostrado na Figura 3.2.

A orientação do disco é resultado de uma rotação  $\psi$  ao redor do eixo  $Z$ , uma rotação  $\theta$  ao redor do novo eixo  $x_1$  e finalmente uma rotação  $\phi$  ao redor do eixo  $y$ , ver Figura 3.2. Estes ângulos são conhecidos como ângulos de Euler (Dimarogonas, 1976).

A velocidade angular instantânea pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{\omega} = \psi \vec{z} + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\phi} \vec{y} \quad (3.1)$$

A velocidade de rotação do disco na direção  $y$  é considerada igual à do eixo:

$$\dot{\phi} = \Omega \quad (3.2)$$

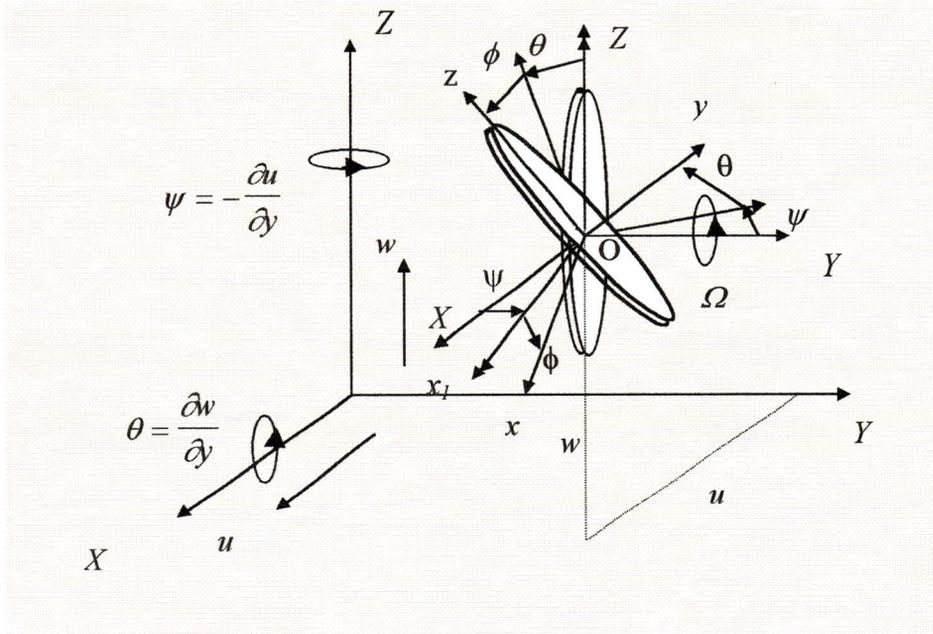


Figura 3.2 Referenciais do disco.

As componentes da velocidade angular instantânea do disco em relação ao referencial não inercial  $xyz$ , são dadas por:

$$\begin{aligned} \omega_x &= -\dot{\psi} \cos\theta \sin\phi + \dot{\theta} \cos\phi \\ \omega_y &= \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin\theta \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos\theta \cos\phi + \dot{\theta} \sin\phi \end{aligned} \quad (3.3)$$

Utilizando-se duas coordenadas generalizadas independentes  $q_1$  e  $q_2$ , as expressões dos deslocamentos nas direções  $X$  e  $Z$ , são dadas por:

$$u(y,t) = f(y)q_1(t) = f(y)q_1 \quad (3.4)$$

$$w(y,t) = f(y)q_2(t) = f(y)q_2 \quad (3.5)$$

onde  $f(y)$  é uma função de forma escolhida convenientemente. Neste capítulo foi escolhida:

$$f(y) = \text{sen}(\pi y/L)$$

Os deslocamentos angulares  $\psi$  e  $\theta$  são considerados de pequenos valores e aproximados por:

$$\theta(y,t) = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df(y)}{dy} q_2 = g(y)q_2 \quad (3.6)$$

$$\psi(y,t) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{df(y)}{dy}q_1 = -g(y)q_1 \quad (3.7)$$

Para expressar a energia potencial do eixo são necessárias também as derivadas de segunda ordem :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 f(y)}{dy^2}q_1 = h(y)q_1 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{d^2 f(y)}{dy^2}q_2 = h(y)q_2 \quad (3.9)$$

Desta forma o sistema rotativo em estudo poderá ser escrito com dois graus de liberdade. Todas as expressões de energia cinética e potencial podem ser escritas em função das coordenadas generalizadas  $q_1$  e  $q_2$ .

Para se deduzir as expressões de energia dos elementos do rotor, considera-se:

- 1) o disco simétrico, isto é  $I_{Dx} = I_{Dz}$ ,
- 2) os deslocamentos angulares  $\psi$  e  $\theta$  pequenos e
- 3) a rotação do eixo  $\Omega$  constante.

### 3.2 DISCO

A expressão de energia cinética do disco  $T_D$  é obtida das equações de corpo rígido (Meirovitch, 1986). Considerando  $\theta$  pequeno, obtém-se :

$$T_D = \frac{1}{2}M_D(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}I_{Dx}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2}I_{Dy}(\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (3.10)$$

onde o primeiro e segundo termos são devidos às velocidades de translação, o terceiro, o quarto e o quinto são devidos às velocidades de rotação, e o último representa o efeito giroscópico. Utilizando-se as expressões (3.4) e (3.5) obtém-se:

$$T_D = \frac{1}{2}[M_D f^2(l_1) + I_{Dx} f^2(l_1)](\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - I_{Dy} \Omega g^2(l_1) \dot{q}_1 q_2 + \frac{1}{2}I_{Dy} \Omega^2 \quad (3.11)$$

### 3.3 EIXO

A expressão de energia cinética do eixo é uma extensão da equação do disco (3.10). Para um eixo de comprimento  $L$  a expressão de energia cinética pode ser escrita como:

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2 \rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (3.12)$$

onde  $\rho$  é a massa por unidade de volume,  $S$  é a área da seção transversal da viga considerada constante e  $I$  é momento de inércia de área da seção circular na flexão da viga, sendo que  $I_x = I_z = I$ .

A primeira integral da equação (3.12) é a expressão de energia cinética da viga em flexão, a segunda e a terceira integrais correspondem ao efeito secundário da inércia de rotação e a última integral representa o efeito giroscópico.

Aplicando-se na equação (3.12) as coordenadas generalizadas dadas em (3.4) e (3.5) e as derivadas (3.6) e (3.7) obtém-se:

$$T_s = \frac{1}{2} \left[ \rho S \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \right] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \rho I L \Omega^2 - \left[ \rho I \Omega \int_0^L g^2(y) dy \right] \dot{q}_1 q_2 \quad (3.13)$$

A flexão do eixo proporciona um efeito de mola, armazenando energia potencial elástica sob a forma de deformação. A expressão de energia potencial do eixo correspondente é deduzida a partir da teoria de deformação de vigas (Lalanne, 1990), dada por:

$$U_s = \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (3.14)$$

onde,  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $I_x$  e  $I_z$  são os momentos de inércia de área em relação aos eixos  $x$  e  $z$ , respectivamente, e  $F_0$  é a força axial, considerada constante.

A relação entre os deslocamentos nos referenciais não inercial e inercial são dadas por:

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \quad (3.15)$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \quad (3.16)$$

Escrevendo a equação (3.14) em relação ao referencial inercial, tem-se:

$$\begin{aligned}
U_s = & \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ I_z \left( \cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \text{sen} \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \text{sen} \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy_z + \\
& + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Escrevendo a equação (3.17) em coordenadas generalizadas independentes para um eixo simétrico ( $I_x = I_z = I$ ), obtém-se para  $F_0=0$ :

$$U_s = \left[ \frac{EI}{2} \int_0^L h^2(y) dy \right] (q_1^2 + q_2^2) \tag{3.18}$$

Escrevendo a equação (3.18) de forma mais compacta obtém-se a seguinte expressão :

$$U_s = \frac{1}{2} k (q_1^2 + q_2^2) \tag{3.19}$$

onde  $k = EI \int_0^L h^2(y) dy$

### 3.4 MANCAIS

As rigidezes e os amortecimentos dos modelos de mancais são valores considerados conhecidos, obtidos através de dados de fabricantes ou através de ensaios experimentais. O modelo está mostrado na Figura 3.3.

O trabalho virtual  $\delta W$  das forças agindo no eixo na posição do mancal, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\delta W = & -k_{xx} u \delta u - k_{zz} w \delta u - k_{zz} w \delta w - k_{zx} u \delta w - \\
& - c_{xx} \dot{u} \delta u - c_{xz} \dot{w} \delta u - c_{zz} \dot{w} \delta w - c_{zx} \dot{u} \delta w
\end{aligned} \tag{3.20}$$

A equação (3.20) está escrita em relação ao referencial inercial. Para escrevê-la em relação ao referencial não inercial, é necessário utilizar os deslocamentos  $u^*$  e  $w^*$ .

Utilizando-se de coordenadas generalizadas, definidas em (3.4) e (3.5), e através das expressões (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9) a equação (3.20) torna-se:

$$\begin{aligned} \delta W = & -k_{xx}f^2(l_2)q_1\delta q_1 - k_{xz}f^2(l_2)q_2\delta q_1 - k_{zz}f^2(l_2)q_2\delta q_2 - \\ & -k_{zx}f^2(l_2)q_1\delta q_2 - c_{xx}f^2(l_2)\dot{q}_1\delta q_1 - c_{xz}f^2(l_2)\dot{q}_2\delta q_1 - \\ & -c_{zz}f^2(l_2)\dot{q}_2\delta q_2 - c_{zx}f^2(l_2)\dot{q}_1\delta q_2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Escrevendo a expressão (3.21) de forma mais compacta obtém-se:

$$\delta W = F_1\delta q_1 + F_2\delta q_2 \quad (3.22)$$

Onde  $F_1$  e  $F_2$  são forças generalizadas que agem sobre o eixo e são dadas por:

$$\begin{aligned} F_1 &= -k_{xx}f^2(l_2)q_1 - k_{xz}f^2(l_2)q_2 - c_{xx}f^2(l_2)\dot{q}_1 - c_{xz}f^2(l_2)\dot{q}_2 \\ F_2 &= -k_{zx}f^2(l_2)q_1 - k_{zz}f^2(l_2)q_2 - c_{zx}f^2(l_2)\dot{q}_1 - c_{zz}f^2(l_2)\dot{q}_2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

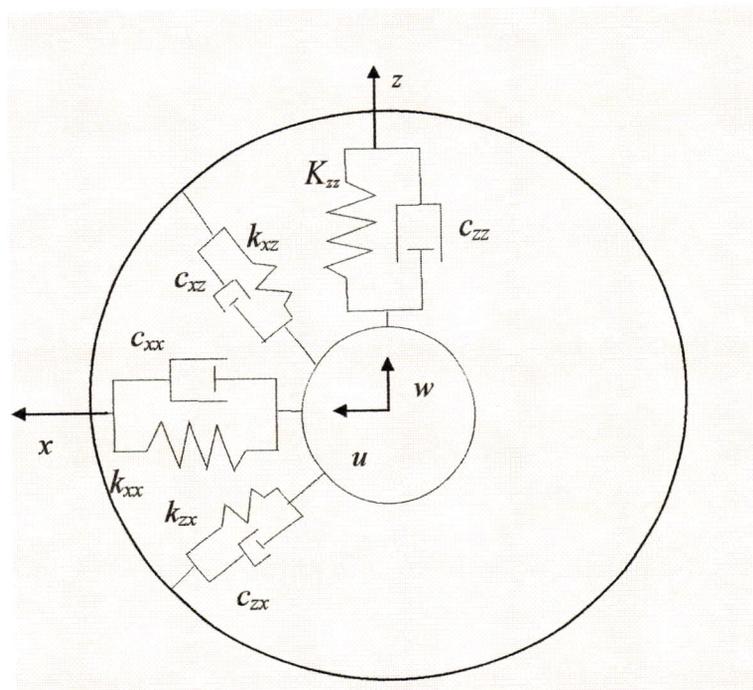


Figura 3.3 Modelo das rigidezes e dos amortecimentos dos mancais.

### 3.5 MASSA DESBALANCEADA

O desbalanceamento é definido por uma massa  $m_u$  situada a uma distância  $d$  do centro geométrico  $C$  do eixo, conforme mostrado na Figura 3.4.

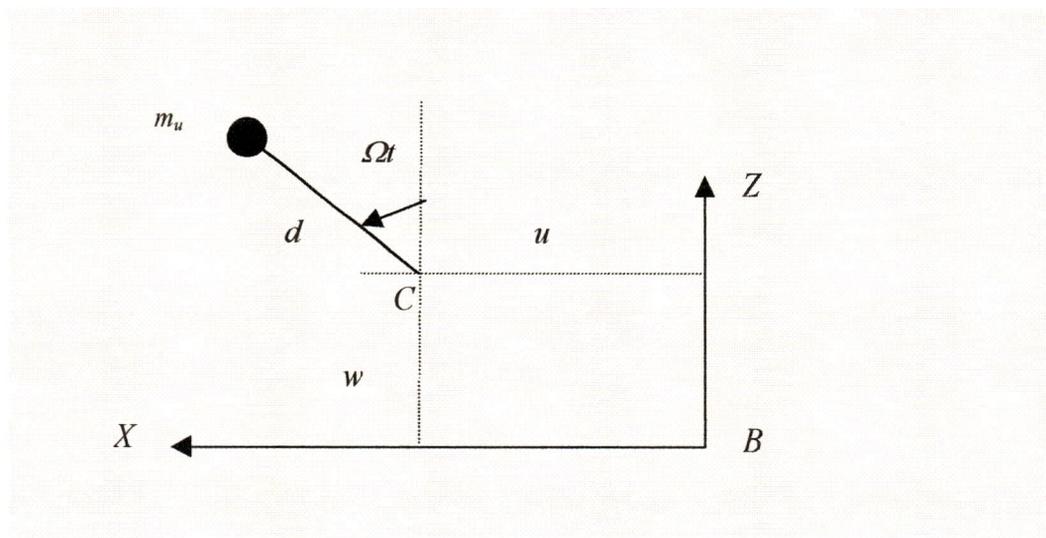


Figura 3.4- Massa desbalanceada

A massa  $m_u$ , que é muito menor que a do disco, tem a sua expressão de energia cinética, desprezando-se os termos constantes que não dependem dos deslocamentos, como:

$$T_u \cong m_u \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (3.24)$$

Escrevendo a equação (3.24) em coordenadas generalizadas independentes, utilizando-se das expressões (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6), obtém-se:

$$T_u = m_u \Omega d f(l_1) (\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t) \quad (3.25)$$

### 3.6 AS FREQUÊNCIAS DE “WHIRLING” E O EFEITO GIROSCÓPICO

O efeito giroscópico está associado à variação do sentido da quantidade de movimento angular. Esta variação faz com que ocorra uma precessão do elemento disco denominada “whirl”, que é função da velocidade de rotação.

Esta precessão altera as frequências naturais, de maneira a aumentar ou diminuir os seus módulos. No caso desta precessão contribuir com o aumento do módulo da frequência natural, ocorre o efeito denominado de “forward whirl”. Se este efeito contribui para a

diminuição do módulo da frequência natural ocorre a “backward whirl”. Estas frequências são chamadas de frequências de “whirling” e a ocorrência de uma ou de outra depende das condições iniciais no caso livre e das forças de excitações no caso forçado.

Quando o rotor é simétrico, com rigidezes iguais nos dois planos, as frequências naturais quando a velocidade de rotação é nula são iguais nos dois planos. Quando a velocidade de rotação é diferente de zero o efeito giroscópico faz com que a mesma frequência abra em duas. Isto ocorre porque o efeito giroscópico faz com que se aumente uma das frequências e se diminua a outra, de maneira a ocorrer a “forward whirling” para uma frequência e “backward whirling” para a outra.

Em alguns casos ideais o efeito giroscópico pode ser desprezado, de modo que as frequências naturais do sistema sejam independentes da velocidade de rotação. Um exemplo destes casos, é o rotor de Laval, quando o disco rígido está situado no ponto médio entre mancais e é suportado por um eixo flexível sem massa.

Den Hartog (1956) faz um estudo da dinâmica dos rotores sem considerar o efeito giroscópico. Em seu estudo, é considerado a configuração das posições dos mancais, eixo e gravidade, de acordo com a velocidade de rotação abaixo, acima ou na velocidade crítica. Para esta finalidade é utilizada a segunda lei de Newton, de maneira a estabelecer-se o equilíbrio dinâmico entre a força de flexão, devido ao efeito mola, e a força centrífuga devida à massa desbalanceada.

### 3.7 EXEMPLO DE DIAGRAMA DE CAMPBELL

Com a finalidade de se simular um rotor de Laval em um ambiente MATLAB®, foram utilizados os dados fornecidos pelas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3:

Tabela 3.1 Dados do disco (Lalanne, 1990)

Dados do disco	Valor	Unidade
<b>Raio Interno</b>	0,01	<i>m</i>
<b>Raio Externo</b>	0,15	<i>m</i>
<b>Espessura</b>	0,03	<i>m</i>
<b>Massa específica</b>	7800	<i>kg/m<sup>3</sup></i>

Tabela 3.2 Dados do eixo (Lalanne 1990)

Dados do eixo	Valor	Unidade
Comprimento	0,4	<i>m</i>
Raio da seção transversal	0,01	<i>m</i>
Massa específica	7800	<i>kg/m<sup>3</sup></i>
Módulo de Elasticidade	$2 \times 10^{11}$	<i>N/m<sup>2</sup></i>

Tabela 3.3 Dados da massa desbalanceada (Lalanne, 1990)

Dados da massa desbalanceada	Valor	Unidade
Massa $m_u$	0,0001	<i>kg</i>
Distância <i>d</i>	0,15	<i>m</i>

A equação de Lagrange dada por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (3.26)$$

onde  $q_i$  são as coordenadas generalizadas e  $F_{q_i}$  as forças generalizadas

Aplicando-se a equação (3.26) nas expressões de energia cinética e potencial do sistema eixo-disco e cinética da massa desbalanceada (3.11), (3.13), (3.19) e (3.25) e utilizando-se como coordenadas generalizadas os deslocamentos nas direções *X* e *Z*, obtém-se as seguintes expressões:

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = m_u d \Omega^2 f(l_1) \text{sen } \Omega t \quad (3.27)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = m_u d \Omega^2 f(l_1) \text{cos } \Omega t \quad (3.28)$$

$$\text{onde } a = I_{Dy} g^2(l_1) + 2\rho I \int_0^L g^2(y) dy \quad (3.29)$$

$$m = M_D f^2(l_1) + I_{Dx} g^2(l_1) + \rho S \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \quad (3.30)$$

$$k = EI \int_0^L h^2(y) dy \quad (3.31)$$

Para se determinar as frequências naturais em função da velocidade de rotação e traçar o diagrama de Campbell, considera-se o movimento livre. Assim as equações (3.28) e (3.29) tornam-se iguais a:

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = 0 \quad (3.32)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = 0 \quad (3.33)$$

Estas equações podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.34)$$

A primeira matriz é a matriz massa, a segunda multiplicada por  $\Omega$  é uma matriz devido ao efeito giroscópico e a terceira é a matriz de rigidez. Considera-se para este caso soluções harmônicas do tipo:

$$q_1 = Q_1 e^{rt} \quad (3.35)$$

$$q_2 = Q_2 e^{rt} \quad (3.36)$$

Substituindo (3.35) e (3.36) na equação matricial (3.34) obtém-se o seguinte sistema de equações homogêneas:

$$\begin{bmatrix} k + mr^2 & -a\Omega r \\ a\Omega r & k + mr^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

A solução não trivial procurada está associada a valores que tornam o determinante desta matriz igual a zero. Obtém-se então a seguinte equação característica:

$$(k + mr^2)^2 + a^2 \Omega^2 r^2 = 0 \quad (3.38)$$

Para o caso da velocidade de rotação ser igual a zero ( $\Omega = 0$ ), as raízes da equação (3.38) dadas por:

$$r_{10}^2 = \pm i\omega_{10} \quad e \quad r_{20}^2 = \pm i\omega_{20} \quad (3.39)$$

onde as frequências naturais para  $\Omega = 0$

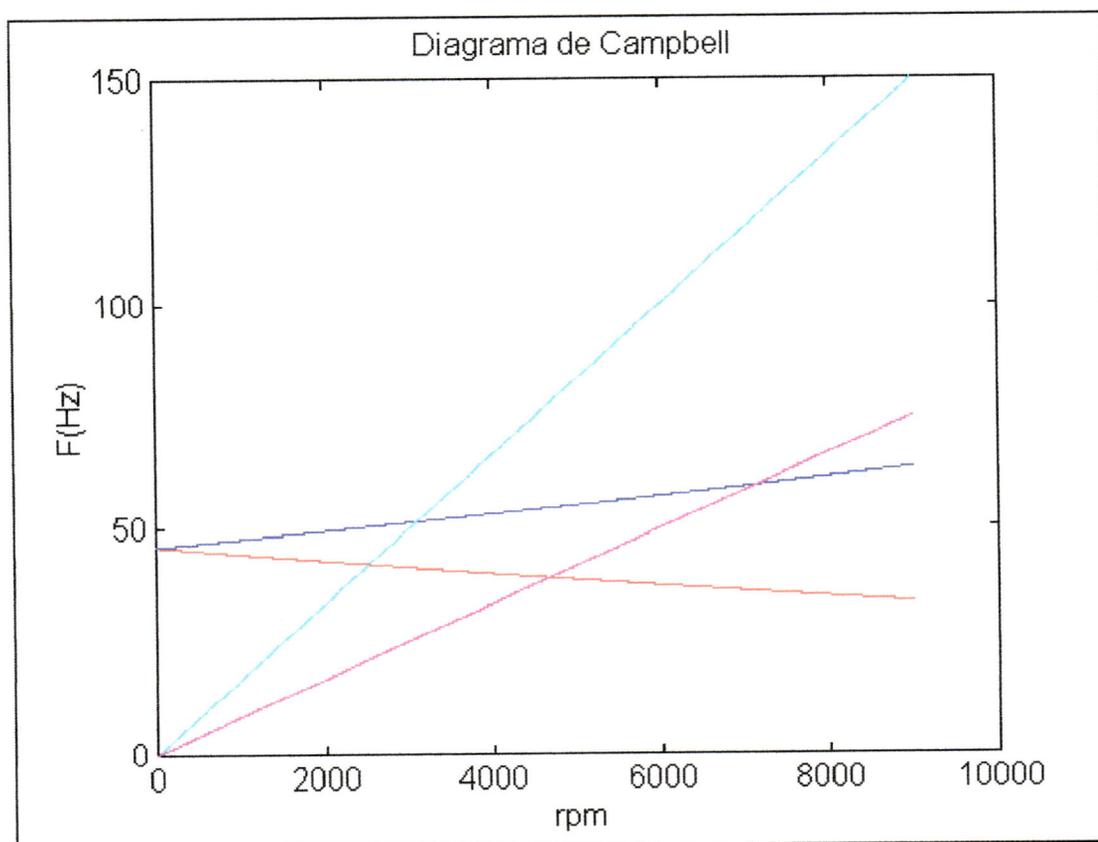
$$\omega_{10} = \omega_{20} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.40)$$

Quando a velocidade de rotação for diferente de zero, o efeito giroscópico faz com que as raízes da equação característica sejam distintas. Uma delas será de valor maior que  $\omega_{10}$ , cujo movimento é chamado de “forward whirling” e a outra será de valor menor, cujo movimento é chamado “backward whirling”. Estas frequências são dadas por:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \quad (3.41)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \quad (3.42)$$

As equações (3.41) e (3.42) são funções da velocidade de rotação  $\Omega$ . Fazendo-se o gráfico destas frequências em função da rotação, utilizando os dados das Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3, obtém-se o diagrama de Campbell, mostrado na Figura 3.5.



azul – “forward whirling” vermelho – “backward whirling” turquesa –  $f = \Omega$  / rosa –  $f = 1/2\Omega$

Figura 3.5 Diagrama de Campbell para rotores simétricos

O gráfico da Figura 3.5 mostra o diagrama de Campbell para um rotor simples simétrico (Laval). As intercessões da reta  $f = \Omega$  com as frequências naturais correspondem às velocidades críticas e as intercessões da reta  $f = \frac{1}{2} \Omega$  correspondem às velocidades críticas na rotação dobrada.

As intercessões de uma linha vertical qualquer com as frequências naturais sob efeito da rotação  $\Omega$  correspondem às frequências de “whirling” para cada velocidade de rotação.

Analisa-se agora uma nova condição, introduzindo uma assimetria nas rigidezes do rotor através de uma mola  $k_{zz}$ , fazendo:

$$k_1 = k \quad (3.43)$$

$$k_2 = k + k_{zz} f^2 (l_2) \quad (3.44)$$

Substituindo (3.43) e (3.44) em (3.22) e (3.23), obtém-se:

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + k_1 q_1 = m_u d \cdot \Omega^2 \sin \Omega t \quad (3.45)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + k_2 q_2 = m_u d \cdot \Omega^2 \cos \Omega t \quad (3.46)$$

Novamente considerando o movimento livre, as equações (3.45) e (3.46) tornam-se iguais:

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + k_1 q_1 = 0 \quad (3.47)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + k_2 q_2 = 0 \quad (3.48)$$

Procurando soluções nas formas harmônicas de (3.35) e (3.36) obtém-se um sistema de equações homogêneas dado por:

$$\begin{bmatrix} k_1 + mr^2 & -a\Omega r \\ a\Omega r & k_2 + mr^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

As soluções não triviais vem dos valores de  $r$  que anulam o determinante desta matriz. Calculando-se este determinante obtém-se a seguinte equação característica :

$$m^2 r^4 + (k_1 m + k_2 m + a^2 \Omega^2) r^2 + k_1 k_2 = 0 \quad (3.50)$$

Se ( $\Omega = 0$ ) as duas raízes são iguais a:  $r_{10} = \pm i\omega_{10}$  e  $r_{20} = \pm i\omega_{20}$  onde tem-se:

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad (3.51)$$

$$\omega_{20} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} \quad (3.52)$$

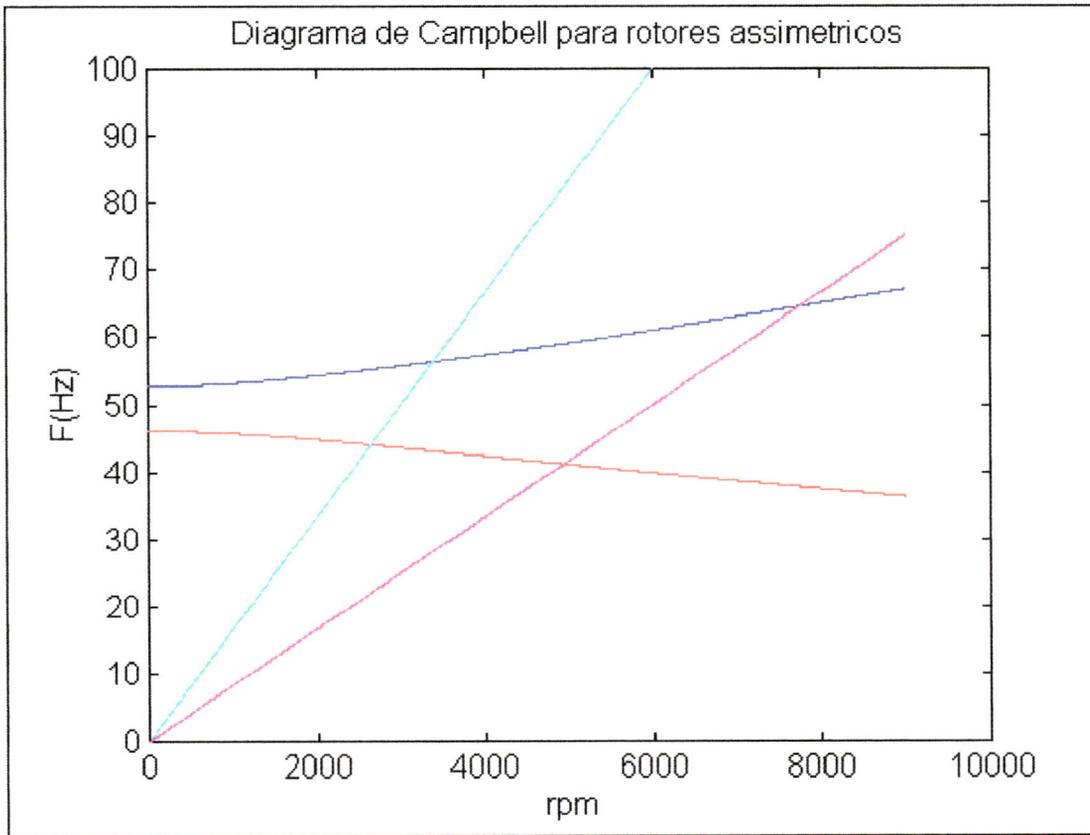
Sob uma rotação dada ( $\Omega \neq 0$ ), as raízes são:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2}} - \sqrt{\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} - \omega_{10}^2 \omega_{20}^2} \quad (3.53)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2}} + \sqrt{\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} - \omega_{10}^2 \omega_{20}^2} \quad (3.54)$$

pode-se observar que:

$$\omega_1 < \omega_{10} < \omega_{20} < \omega_2 \quad (3.55)$$



azul – “forward whirling” vermelho – “backward whirling” turquesa –  $f = \Omega$  rosa –  $f = 1/2\Omega$   $\Omega$  em (rpm)

Figura 3.6 Diagrama de Campbell para rotores assimétricos

A assimetria da rigidez faz com que as frequências naturais sejam diferentes quando a velocidade de rotação é igual a zero. Ao se aumentar a velocidade da rotação o efeito giroscópico faz com que uma das frequências aumente e a outra diminua, respectivamente com movimentos “forward whirling” e movimentos “backward whirling”, mostrado no gráfico da Figura 3.6.

A interseção das curvas do diagrama de Campbell com a reta  $f = \Omega$  corresponde às velocidades críticas e a interseção dessas curvas com a reta  $f = \frac{1}{2} \Omega$  obtém-se as velocidades críticas de rotação dobrada da mesma forma que foi observado para os rotores simétricos, conforme Figura 3.9.

Para rotores assimétricos na rigidez a órbita do “whirl” será uma elipse.

### 3.8 RESPOSTAS EM FREQUÊNCIA

Serão consideradas respostas em frequência para os seguintes casos de forças de excitação:

- massa desbalanceada ;
- força assíncrona e
- força harmônica fixa no espaço.

Em todos os casos serão considerados rotores simétricos e assimétricos na rigidez

#### 3.8.1 MASSA DESBALANCEADA EM ROTORES SIMÉTRICOS

Para rotores simétricos a resposta, devido à excitação da massa desbalanceada é obtida das equações (3.27) e (3.28), onde:

$$m^* = m_u f(l_1) \quad (3.56)$$

As soluções podem ser procuradas com as seguintes formas:

$$q_1 = Q_1 \text{ sen } \Omega t \quad (3.57)$$

$$q_2 = Q_2 \text{ cos } \Omega t \quad (3.58)$$

Substituindo (3.57) e (3.58) em (3.27) e (3.28), respectivamente, obtém-se:

$$-m\Omega^2 Q_1 + a\Omega^2 Q_2 + kQ_1 = m^* d\Omega^2 \quad (3.59)$$

$$-m\Omega^2 Q_2 + a\Omega^2 Q_1 + kQ_2 = m^* d\Omega^2 \quad (3.60)$$

Resolvendo-se o sistema, obtém-se:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{m^* d\Omega^2}{k + (a - m)\Omega^2} \quad (3.61)$$

Nas velocidades críticas, devido ao desbalanceamento, as amplitudes tendem a infinito. Isto ocorrerá se o denominador da equação (3.61) for igual a zero, ou seja para :

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{m-a}} \quad (3.62)$$

O gráfico de amplitudes em função da frequência de rotação é mostrado na Figura 3.7

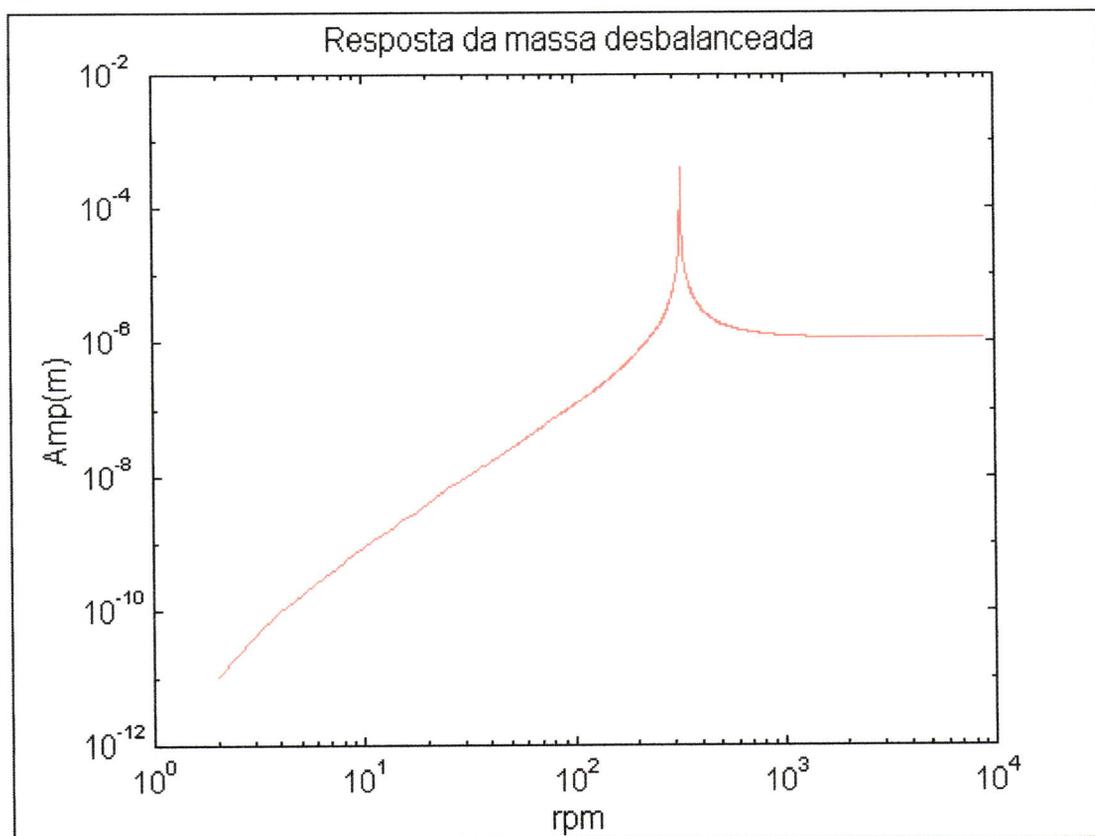


Figura 3.7 Resposta da massa desbalanceada

As órbitas do “whirl” para a resposta à massa desbalanceada são círculos e o sentido é “forward” uma vez que  $Q_1$  e  $Q_2$  tem sempre o mesmo sinal.

### 3.8.2 FORÇA ASSÍNCRONA EM ROTORES SIMÉTRICOS

Sob certas condições, um rotor simétrico pode ser excitado por forças assíncronas rotativas. Supondo-se que as forças que agem sobre o rotor são:

$$F_1 = F_0 \text{ sen } s\Omega t \quad (3.63)$$

$$F_2 = F_0 \cos s\Omega t \quad (3.64)$$

Onde  $s$  é um parâmetro adimensional de sintonia. Então as equações a serem resolvidas são:

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = F_0 \sin s\Omega t \quad (3.65)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = F_0 \cos s\Omega t \quad (3.66)$$

As soluções são procuradas na forma de (3.57) e (3.58). Substituindo em (3.65) e (3.66) obtém-se as seguintes expressões:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{F_0}{k + (as - ms^2)\Omega^2} \quad (3.67)$$

Na velocidade crítica  $\Omega_c$  a força assíncrona correspondente provoca amplitudes infinitas. Para isto é necessário que o denominador da equação (3.66) seja igual a zero o que ocorre em:

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{s(sm - a)}} \quad (3.68)$$

O gráfico da resposta à força assíncrona para  $s=1/2$  é mostrado na Figura 3.8.

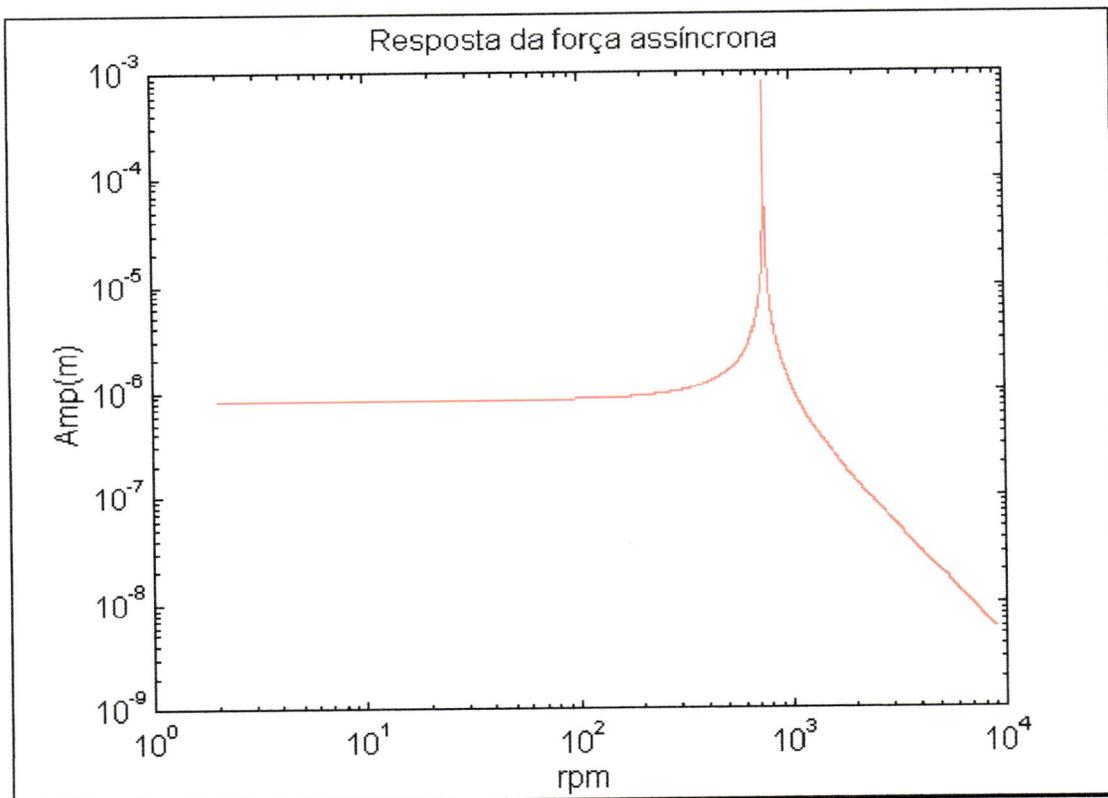


Figura 3.8 Resposta da força assíncrona.

O resultado mostra somente uma velocidade crítica. Como  $Q_1 = Q_2$  as órbitas do “whirl” são circulares e o sentido é “forward”.

### 3.8.3 FORÇA HARMÔNICA FIXA EM ROTORES SIMÉTRICOS

Assume-se que uma força age a uma posição  $y = l_3$  em um rotor simétrico, sendo as seguintes equações:

$$F_1 = F_0 f(l_3) \text{sen } \omega t = F \text{sen } \omega t \quad (3.69)$$

$$F_2 = 0 \quad (3.70)$$

As equações a serem resolvidas são as seguintes:

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = F \text{sen } \omega t \quad (3.71)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = 0 \quad (3.72)$$

Procurando soluções na forma de (3.35) e (3.36), obtém-se como resultados as seguintes expressões:

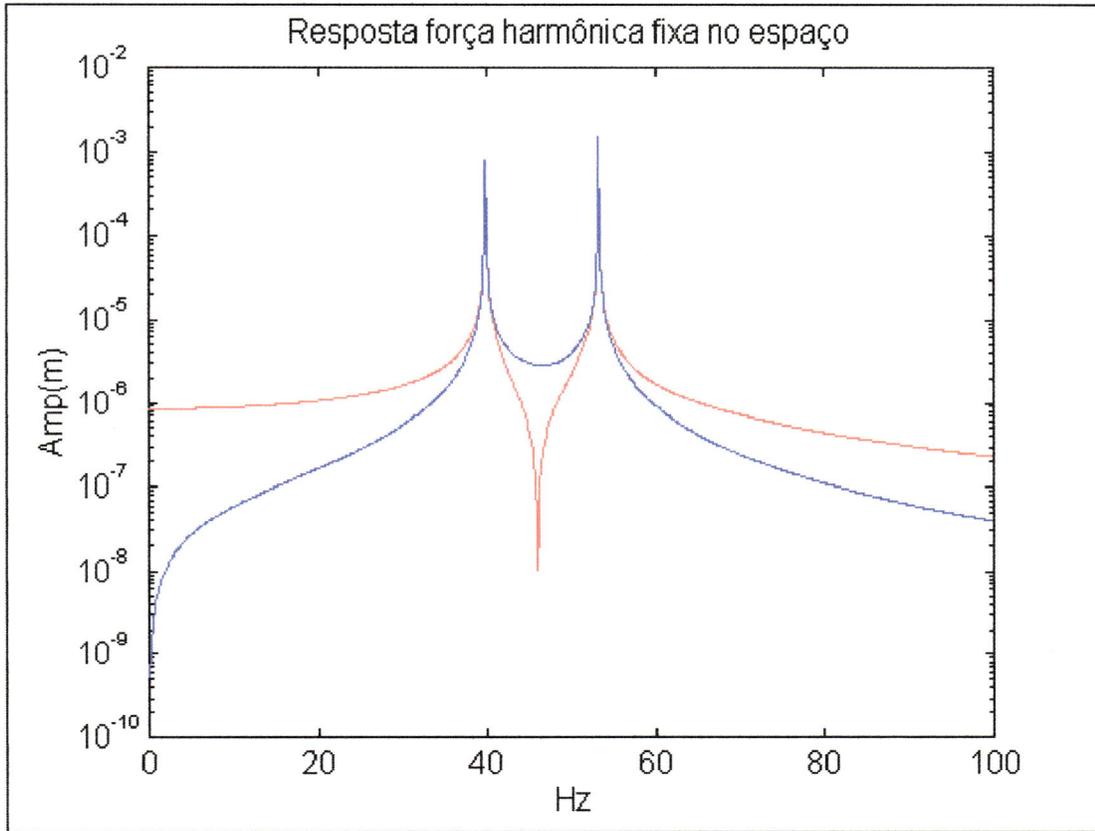
$$Q_1 = \frac{(k - m\omega^2)F}{(k - m\omega^2)^2 - a^2\Omega^2\omega^2} \quad (3.73)$$

$$Q_2 = \frac{-a\Omega\omega F}{(k - m\omega^2)^2 - a^2\Omega^2\omega^2} \quad (3.74)$$

As velocidades críticas correspondem aos valores de  $\omega$  que tornam os denominadores de (3.73) e (3.74) nulos, obtidos da seguinte equação:

$$m^2\omega^4 - (2km + a^2\Omega^2)\omega^2 + k^2 = 0 \quad (3.75)$$

A equação (3.75) fornece quatro raízes, iguais duas a duas, correspondentes portanto a duas velocidades críticas distintas. Como  $Q_1 \neq Q_2$ , as órbitas do “whirl” serão elipses. Quando  $\omega < \omega_{10}$ , o “whirl” será “backward”, se  $\omega > \omega_{10}$  será “forward”. O gráfico da resposta à uma força harmônica fixa no espaço é mostrado na Figura 3.9, onde foi feito  $F=1N$  e  $\Omega=4000 \text{ rpm}$ .



vermelho -  $Q_1/\omega$  azul -  $Q_2/\omega$

Figura 3.9 Resposta da força harmônica fixa no espaço

### 3.8.4 MASSA DESBALANCEADA ROTORES ASSIMÉTRICOS

Em rotores assimétricos são introduzidas rigidezes diferentes nos planos de movimentos, dadas pelas equações (3.43) e (3.44).

Para massas desbalanceadas as equações diferenciais que descrevem o movimento são as seguintes:

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + k_1q_1 = m^*d \Omega^2 \sin \Omega t \quad (3.76)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + k_2q_2 = m^*d \Omega^2 \cos \Omega t \quad (3.77)$$

As soluções para as equações (3.76) e (3.77) devem ser procuradas na forma de (3.35) e (3.36), e os resultados são iguais a:

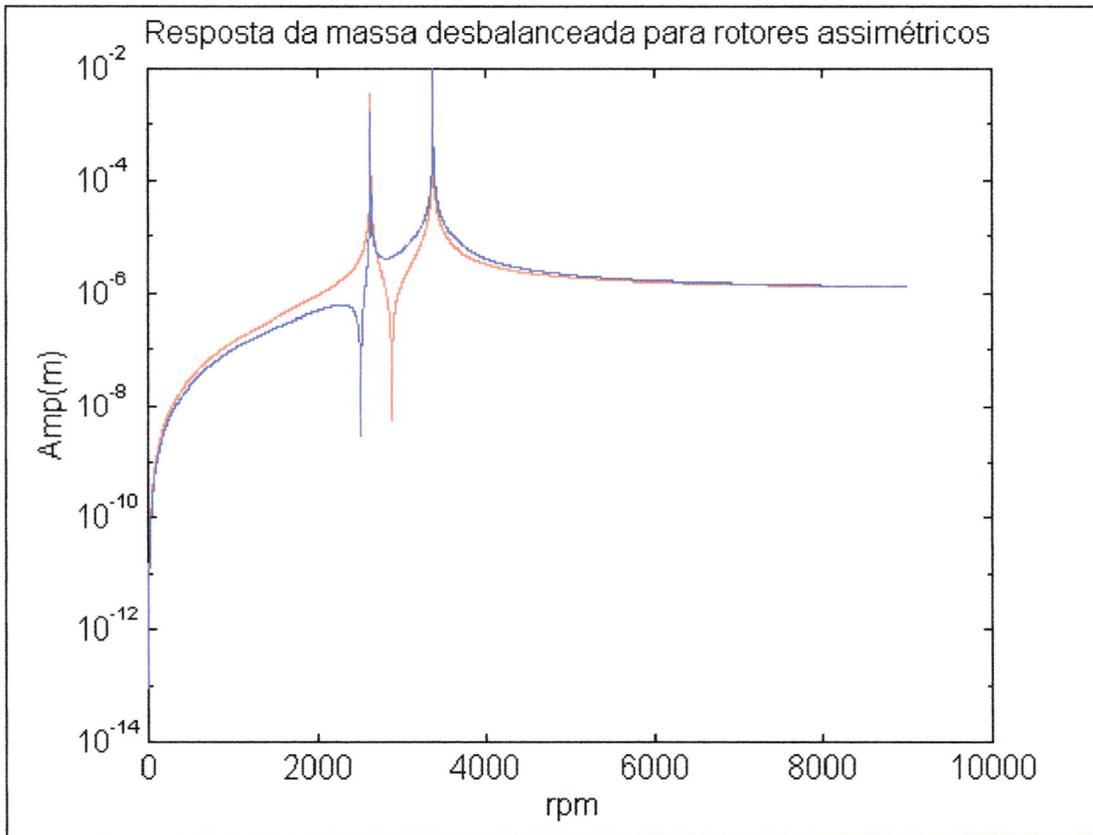
$$Q_1 = \frac{[k_2 - (m+a)\Omega^2] m^* d \Omega^2}{(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4} \quad (3.78)$$

$$Q_2 = \frac{[k_1 - (m+a)\Omega^2] m^* d\Omega^2}{(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4} \quad (3.79)$$

As velocidades críticas devido às massas desbalanceadas são dadas pela seguinte expressão:

$$(m^2 - a^2)\Omega^4 - m(k_1 + k_2)\Omega^2 + k_1k_2 = 0 \quad (3.80)$$

A Figura 3.10 mostra o gráfico das respostas  $Q_1$  e  $Q_2$  a massas desbalanceadas para rotores com assimetria de rigidez.



vermelho -  $Q_1$  azul -  $Q_2$

Figura 3.10 Resposta da massa desbalanceada para rotores assimétricos

A equação (3.80) fornece duas velocidades críticas (2642 rpm e 3377 rpm). Como  $Q_1 \neq Q_2$  as órbitas do “whirl” serão elipses e o sentido será dado pelas seguintes condições.

$$\Omega < \sqrt{\frac{k_1}{m+a}} \quad \text{“forward whirl”} \quad (3.81)$$

$$\sqrt{\frac{k_1}{m+a}} < \Omega < \sqrt{\frac{k_2}{m+a}} \quad \text{“backward whirl”} \quad (3.82)$$

$$\sqrt{\frac{k_2}{m+a}} < \Omega \quad \text{“forward whirl”} \quad (3.83)$$

### 3.8.5 FORÇA ASSÍNCRONA ROTORES ASSIMÉTRICOS

Considerando-se a mesma força assíncrona dos rotores simétricos, as equações para o caso assimétrico são as seguintes:

$$m\ddot{q}_1 - \alpha\Omega\dot{q}_2 + k_1q_1 = F \sin s\Omega t \quad (3.84)$$

$$m\ddot{q}_2 + \alpha\Omega\dot{q}_1 + k_2q_2 = F \cos s\Omega t \quad (3.85)$$

As soluções devem ser procuradas na forma de (3.35) e (3.36), obtendo-se:

$$Q_1 = \frac{[k_2 - (ms^2 + as)\Omega^2]F}{s^2(s^2m^2 - a^2)\Omega^4 - m(k_1 + k_2)s^2\Omega^2 + k_1k_2} \quad (3.86)$$

$$Q_2 = \frac{[k_1 - (ms^2 + as)\Omega^2]F}{s^2(s^2m^2 - a^2)\Omega^4 - m(k_1 + k_2)s^2\Omega^2 + k_1k_2} \quad (3.87)$$

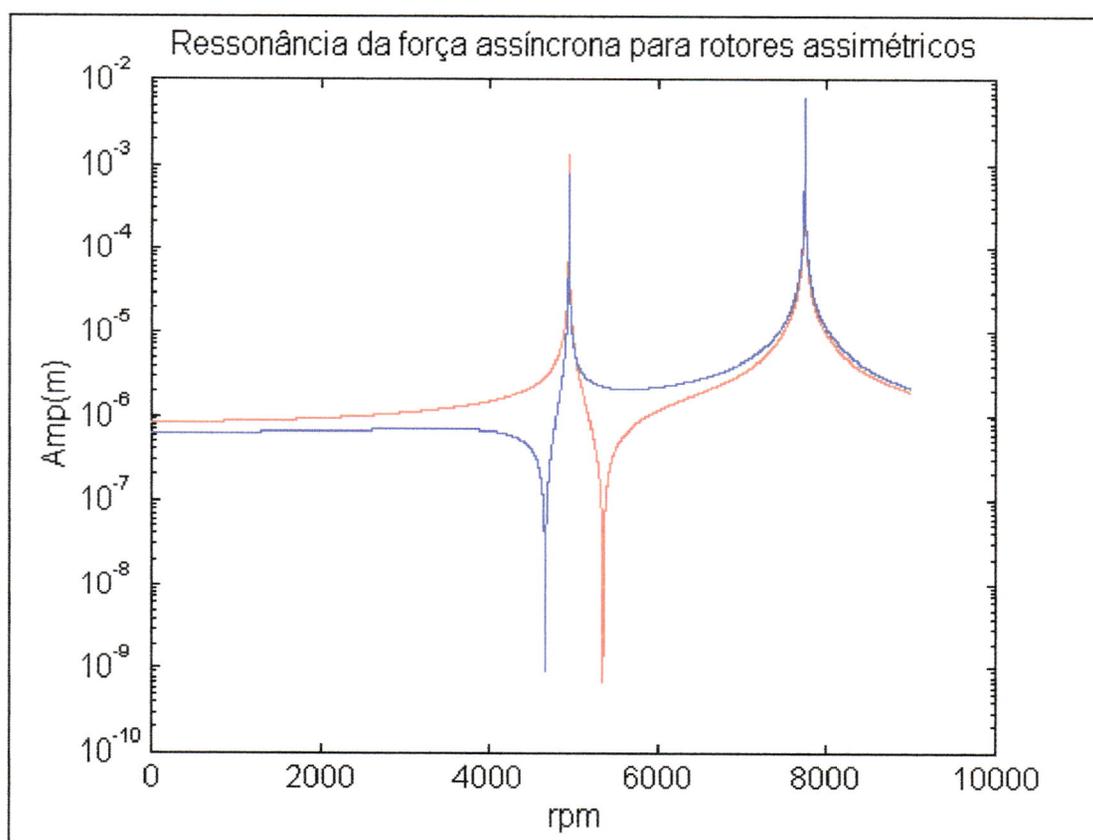
As soluções destas equações fornecem duas velocidades críticas. As órbitas do “whirl” são elípticas e o sentido é dado pelas seguintes condições:

$$\Omega < \sqrt{\frac{k_1}{ms^2 + as}} \quad \text{“forward whirl”} \quad (3.88)$$

$$\sqrt{\frac{k_1}{ms^2 + as}} < \Omega < \sqrt{\frac{k_2}{ms^2 + as}} \quad \text{“backward whirl”} \quad (3.89)$$

$$\sqrt{\frac{k_2}{ms^2 + as}} < \Omega \quad \text{“forward whirl”} \quad (3.90)$$

A Figura 3.11 mostra o gráfico de resposta em frequência para  $Q_1$  e  $Q_2$  para força harmônica em rotores assimétricos com  $F = IN$ .



vermelho -  $Q_1(\Omega)$  azul -  $Q_2(\Omega)$

Figura 3.11 Resposta da força assíncrona para rotores assimétricos

### 3.8.6 FORÇA HARMÔNICA ROTORES ASSIMÉTRICOS

Para uma força harmônica fixa no espaço em rotores assimétricos, as equações a serem resolvidas são iguais a:

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + k_1q_1 = F \sin \omega t \quad (3.91)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + k_2q_2 = 0 \quad (3.92)$$

As soluções devem ser procuradas na forma de (3.35) e (3.36). As amplitudes obtidas são dadas pelas seguintes expressões:

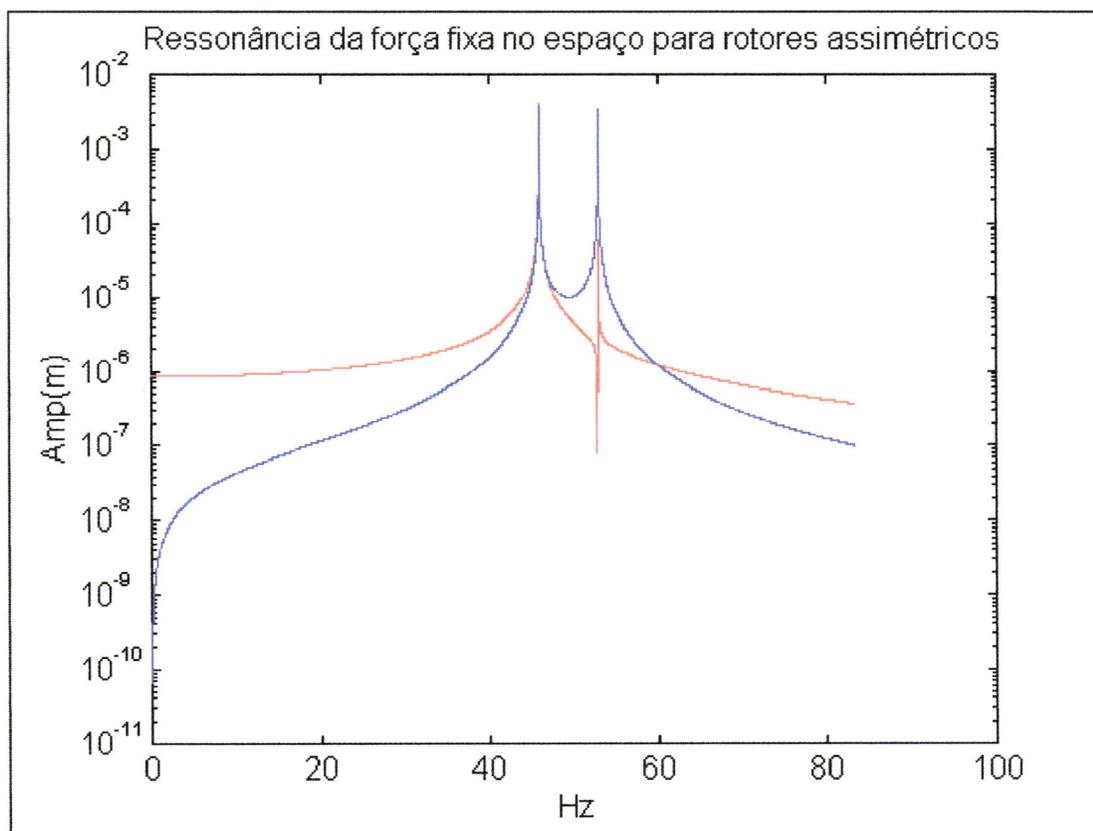
$$Q_1 = \frac{(k_2 - m\omega^2)F}{(k_1 - m\omega^2)(k_2 - m\omega^2) - a^2\Omega\omega^2} \quad (3.93)$$

$$Q_2 = \frac{-a\Omega\omega F}{(k_1 - m\omega^2)(k_2 - m\omega^2) - a^2\Omega\omega^2} \quad (3.94)$$

As raízes obtidas fazendo o denominador de (3.93) e (3.94) igual a zero. Obtém-se.

$$m^2 \omega^4 - (k_1 m + k_2 m + a^2 \Omega^2) \omega^2 + k_1 k_2 = 0 \quad (3.95)$$

A Figura 3.12 mostra o gráfico da resposta em frequência para  $Q_1$  e  $Q_2$  nos rotores assimétricos para uma força harmônica fixa no espaço para  $\Omega = 4000$  rpm e  $F = 1N$ .



vermelho -  $Q_1(\omega)$  azul -  $Q_2(\omega)$

Figura 3.12 Resposta da força harmônica fixa no espaço para rotores assimétricos

A equação (3.95) fornece duas frequências de “whirling”. Como  $Q_1 \neq Q_2$  as órbitas são elípticas e o sentido é dado nas seguintes condições:

$$\omega < \sqrt{\frac{k_2}{m}} \quad \text{“backward whirl”} \quad (3.96)$$

$$\omega > \sqrt{\frac{k_2}{m}} \quad \text{“forward whirl”} \quad (3.97)$$

### 3.9 ROTORES AMORTECIDOS

Para o caso de rotores amortecidos, o movimento livre é dado pelas equações:

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = 0 \quad (3.98)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + k_2q_2 = 0 \quad (3.99)$$

As soluções devem ser procuradas na forma de (3.35) e (3.36). A equação característica neste caso é dada por :

$$m^2r^4 + m(c_1 + c_2)r^3 + (k_1m + k_2m + c_1c_2 + a^2\Omega^2)r^2 + (k_2c_1 + k_1c_2)r + k_1k_2 = 0 \quad (3.100)$$

Em geral  $c_1$  e  $c_2$  tem valores baixos e as raízes são pares complexos conjugados. Substituindo os seguintes valores numérico:  $k_{xx} = 2.10^5 \text{ N/m}$ ,  $k_{zz} = 5.10^5 \text{ N/m}$ ,  $c_{xx} = \beta.2.10^5 \text{ N.s/m}$ ,  $c_{zz} = \beta.5.10^5 \text{ N.s/m}$ ,  $c_{xz} = c_{zx} = 0$  e, nas equações (3.22) e (3.23), obtém-se:

$$14,29\ddot{q}_1 - 2,871\Omega\dot{q}_2 + \beta \times 1,5 \times 10^5 \dot{q}_1 + 1,345 \times 10^6 q_1 = 0 \quad (3.101)$$

$$14,29\ddot{q}_2 + 2,871\Omega\dot{q}_1 + \beta \times 3,75 \times 10^5 \dot{q}_2 + 1,570 \times 10^6 q_2 = 0 \quad (3.102)$$

A influência do amortecimento é observada através da variação de  $\beta$  nas equações (3.101) e (3.102). As Figuras 3.13, 3.14 e 3.15 mostram os gráficos para  $\beta = 0,0002$ ,  $\beta = 0,015$  e  $\beta = 0,026$ , respectivamente.

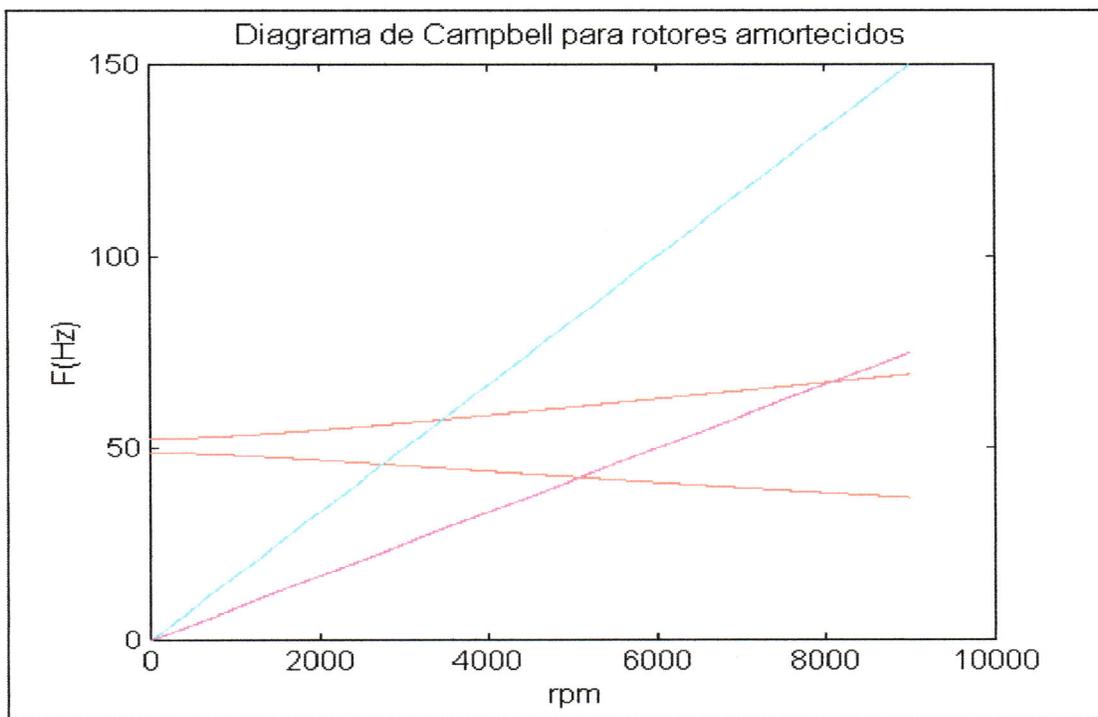


Figura 3.13 Diagrama de Campbell para  $\beta = 0,0002$

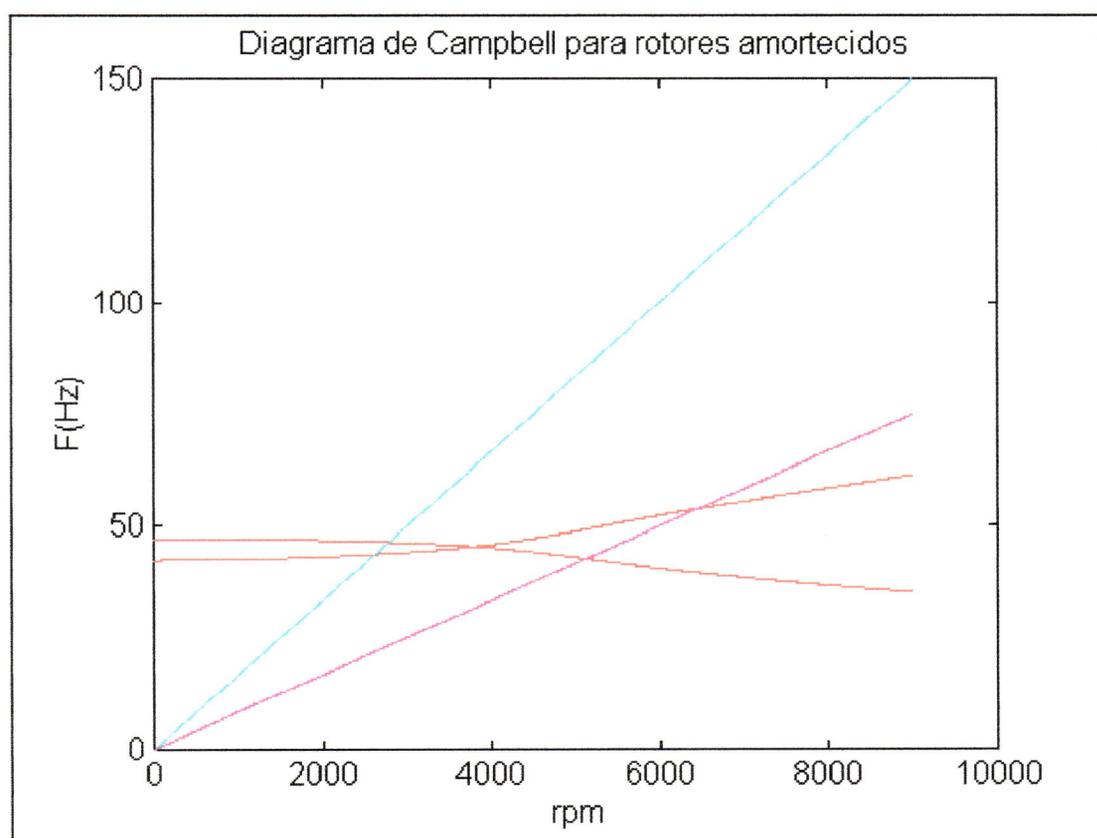


Figura 3.14 Diagrama de Campbell para  $\beta = 0,015$

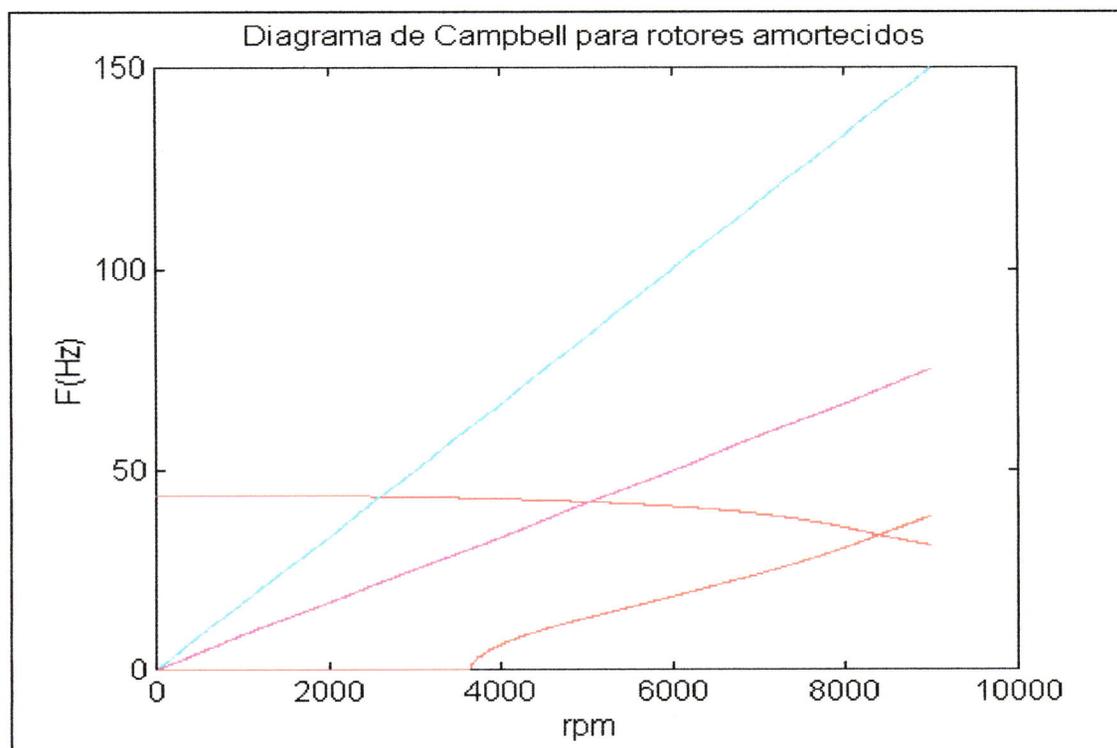


Figura 3.15 Diagrama de Campbell para  $\beta = 0,026$

Os gráficos das Figuras 3.13, 3.14 e 3.15 se referem às frequências amortecidas (a parte complexa dos autovalores). O efeito do amortecimento fica evidente no gráfico da Figura 3.15 onde uma das frequências é anulada até um pouco abaixo de 4000 rpm. A partir desse ponto cresce até ultrapassar a outra frequência.

### 3.10 INFLUÊNCIA DOS MOMENTOS DE ÁREA E DE INÉRCIA SOBRE O EFEITO GIROSCÓPICO

O efeito giroscópico depende da precessão  $\dot{\psi}$ , da inclinação  $\theta$  do vetor da quantidade de movimento angular, do momento de inércia de área do eixo e do momento de inércia do disco como mostrado na equação (3.29).

Os momentos de inércia de área do eixo e de inércia do disco são facilmente alterados, pois dependem das características dimensionais do disco e do eixo.

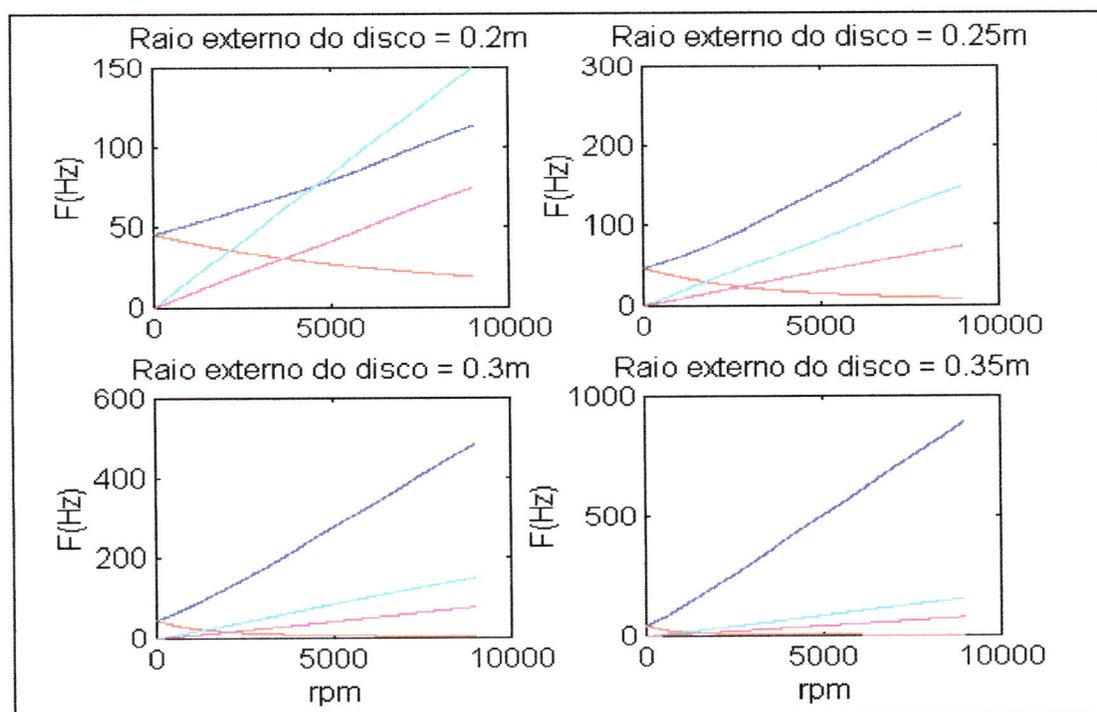


Figura 3.16 Influência do raio externo do disco nas frequências de “whirling”

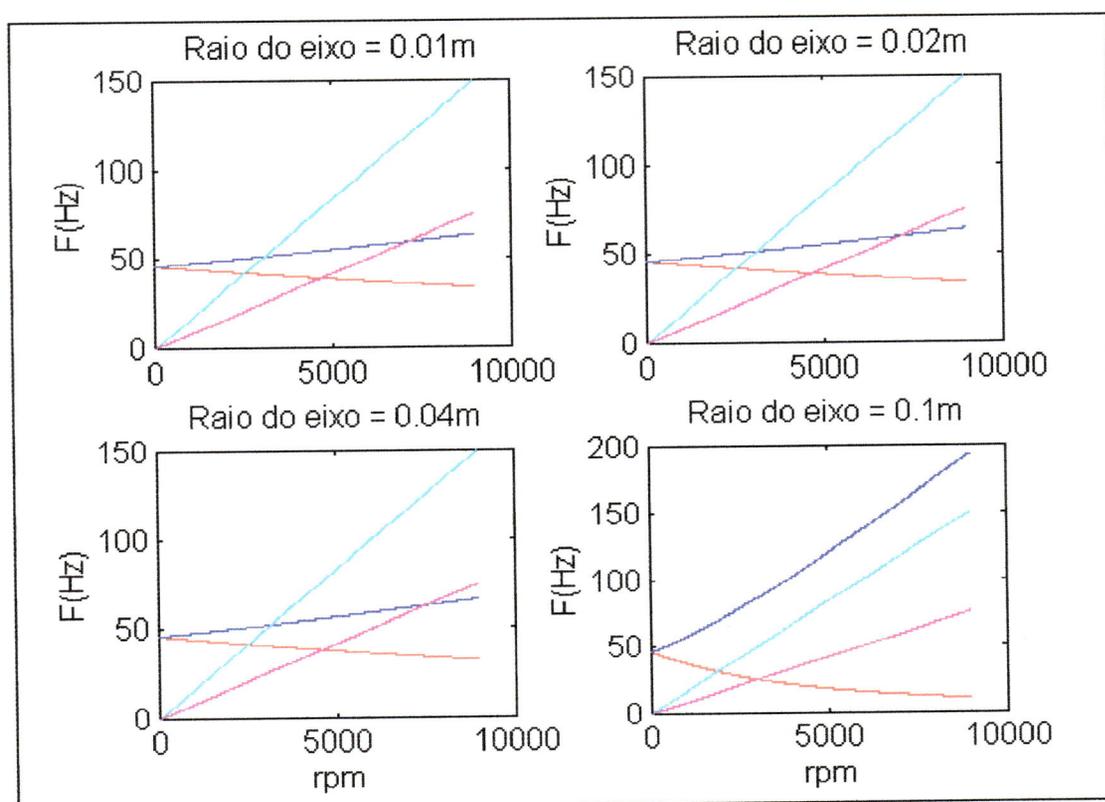


Figura 3.17 Influência do raio do eixo nas frequências de “whirling”.

As influências da variação do momento de área e do momento de inércia são demonstradas nas simulações feitas em ambiente Matlab<sup>®</sup>, conforma se vê nos gráficos das Figuras 3.16 e 3.17. Na Figura 3.16 mostra-se o efeito da variação do raio externo do disco, conservando as outras variáveis. Na Figura 3.17 mostra-se o efeito da variação do raio do eixo, conservando as demais variáveis.

Observa-se destas figuras que o raio do eixo tem maior influência sobre o ângulo de abertura das frequências de “whirling”, constituindo-se um importante item de projeto de rotores para se evitar a operação em áreas de instabilidade dinâmica ocasionadas pelas velocidades críticas.

## **CAPÍTULO 4**

### **FREQUÊNCIAS DE “WHIRLING” ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EM AMBIENTE MATLAB ®**

Neste trabalho é desenvolvido um programa de computador para calcular as frequências naturais de rotores considerando a influência do efeito giroscópico, denominadas frequências de “whirling”. Este efeito é analisado em função da velocidade de rotação. Diferenças consideráveis ocorrem quando o efeito giroscópico é desprezado no cálculo das frequências naturais de máquinas rotativas.

#### **4.1 O MODELO DE ROTOR DE LAVAL MODIFICADO**

Para o entendimento das diversas rotinas empregadas no programa desenvolvido são necessários alguns conceitos em dinâmica de rotação que já foram descritos, no capítulo anterior.

No Capítulo 3 foi feito um estudo da dinâmica de rotação através do emprego do modelo de rotor de Laval, modificado conforme proposto por Lalanne (1990). Neste modelo o disco não está situado no ponto médio do rotor, mas em uma posição qualquer entre os apoios. A vantagem deste modelo é que pode ser discretizado em dois graus de

liberdade de maneira a ser possível a obtenção de algumas soluções analíticas. Para tanto foram adotadas hipóteses simplificadoras, tais como: deslocamentos angulares de pequenos valores, disco e eixo simétricos e velocidade de rotação constante. Os deslocamentos lineares na posição do disco e os deslocamentos angulares correspondentes são expressos em função das coordenadas generalizadas,  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$ . Através destas duas coordenadas é possível expressar a energia cinética do sistema disco e eixo, incluindo o efeito giroscópico, a energia potencial do eixo devido à deformação elástica e as forças generalizadas aplicadas pelos mancais. Estas expressões são obtidas a partir das equações das energias cinéticas e potencial do corpo rígido (Meirovitch, 1986). São aplicadas então as equações de Lagrange de maneira a obter um sistema discreto com dois graus de liberdade.

O estudo das vibrações foi feito em duas situações: nos casos livre e forçado. No caso livre é obtido o diagrama de Campbell, apresentando os conceitos envolvidos: as frequências de “whirling” e o efeito giroscópico. No caso forçado são simuladas forças de três diferentes tipos de excitação: massa desbalanceada, força harmônica e força assíncrona. São mostrados os gráficos das respostas em frequências para estes três tipos de excitação. São utilizados nos casos citados, rotores com rigidez simétrica e assimétrica em relação aos planos de referência. A assimetria é obtida fazendo-se a rigidez de um dos planos uma função da posição. Além disso para o caso livre é feito um estudo da influência do amortecimento através dos diagramas de Campbell, simulando vários fatores de amortecimento. No final do Capítulo 3 são feitas simulações dos efeitos de parâmetros da geometria dos rotores, diâmetro do disco e do eixo, sobre o diagrama de Campbell. Estes exemplos mostram aos projetistas de rotores critérios para o dimensionamento destas máquinas a fim de se evitar operação em pontos de estabilidade dinâmica.

Estas simulações foram feitas em linguagem Matlab ® , através da programação das soluções analíticas.

#### **4.2 PROGRAMA DE CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS DE “WHIRLING”**

O programa de computador desenvolvido, denominado GIROS, utiliza as equações de movimento discretizadas conforme será mostrado no Capítulo 5. As matrizes são de ordem  $4n$ , onde  $n$  é o número de nós discretizados. Assim, para cada nó são considerados 4

graus de liberdade (dois deslocamentos lineares e dois angulares). As matrizes de massa, rigidez e amortecimento nas coordenadas locais serão obtidas através da técnica dos elementos finitos utilizando-se funções de forma escolhidas convenientemente. Estão descritas no Capítulo 5 estas matrizes, além da técnica de elementos finitos empregada para obtê-las. Um rotor qualquer pode ser modelado através de três elementos básicos: o elemento eixo, o elemento disco e o elemento mancal. As matrizes destes elementos nas coordenadas locais têm ordens diferentes, devido ao fato que o elemento eixo é modelado com dois nós, enquanto que os elementos disco e mancal são modelados com apenas um nó. Foi escolhida a técnica de mudança de coordenadas para a transformação das coordenadas locais de cada elemento para as coordenadas globais do rotor. Esta técnica foi utilizada devido à facilidade do Matlab ® em realizar operações algébricas matriciais. Obtém-se as matrizes do rotor em estudo através dos seguintes somatórios:

$$[M] = \sum_{e=1}^n [a]_e^T [m]_e [a]_e \quad (4.1)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^n [a]_e^T [k]_e [a]_e \quad (4.2)$$

$$[C + G] = \sum_{e=1}^n [a]_e^T [c + g]_e [a]_e \quad (4.3)$$

onde:

- $[M]$  - matriz de massa nas coordenadas globais;
- $[m]_e$  - matriz de massa dos elementos;
- $[K]$  - matriz de rigidez nas coordenadas globais;
- $[k]_e$  - matriz de rigidez dos elementos;
- $[C]$  - matriz de amortecimento nas coordenadas globais;
- $[c]_e$  - matriz de amortecimento dos elementos;
- $[G]$  - matriz giroscópica nas coordenadas globais;
- $[g]_e$  - matriz giroscópica dos elementos e
- $[a]_e$  - matriz de mudança de coordenadas locais para globais.

O programa de computador foi desenvolvido de maneira que o usuário possa aplicá-lo a quase todo tipo de rotores. De maneira interativa o programa interpela ao usuário, em

cada nó, quanto ao tipo de elemento existente para construir o modelo do rotor. A modularidade do programa permite fácil implementação das diversas rotinas, descritas no Capítulo 5, através da utilização de vários sub-programas dentro de um programa principal.

As matrizes do rotor em estudo nas coordenadas globais, denominadas matrizes gerais, são transformadas para o espaço de estado de maneira a se obter um problema clássico de autovalores e autovetores. Desta forma pode-se utilizar as rotinas avançadas, disponíveis em funções da biblioteca de programas do Matlab ®.

### 4.3 SIMULAÇÕES DE ROTORES

Nas simulações do capítulo 6 foram utilizados modelos retirados da literatura referenciada de maneira a permitir a comparação dos resultados encontrados com valores de referência, validando e aferindo o programa de computador desenvolvido. Estes modelos foram desenvolvidos baseados em rotores reais. Os três modelos simulados são: um rotor multidisco, um rotor de Laval e um rotor de eixo escalonado.

O rotor multidisco (Lalanne, 1990) é composto por uma série de discos em várias posições, de maneira a simular rotores multi-estágios muito comuns em casos reais.

O segundo exemplo é o rotor de Laval modificado (Lalanne, 1990). Foi utilizado nas simulações com a finalidade de se testar uma parte do programa referente à hipótese de apoios rígidos, além de possibilitar a comparação dos resultados obtidos com as soluções analíticas desenvolvidas no Capítulo 3.

O último exemplo simulado é um rotor de eixo escalonado (Wang e Kirkhope, 1993). Este rotor é composto por um eixo escalonado com várias seções transversais diferentes. Foi utilizado para demonstrar a versatilidade do programa desenvolvido em simular tipos de rotores com formatos mais próximos dos modelos reais.

## CAPÍTULO 5

### PROGRAMA DE COMPUTADOR DESENVOLVIDO

Neste capítulo serão apresentados inicialmente os modelos dos elementos de rotores utilizados neste trabalho. A técnica dos elementos finitos é usada para a discretização dos sistemas contínuos. Isto torna viável a análise de rotores reais com um número mínimo de graus de liberdade. Em seguida é apresentado o programa de computador desenvolvido.

Os elementos básicos de um rotor, necessários para um bom modelo, são: o elemento disco, o elemento eixo e o elemento mancal. A Figura 5.1 ilustra um caso simples. O elemento disco é considerado fino e rígido, com variação de energia potencial desprezível. As energias cinéticas de translação e de rotação são consideradas. Este elemento é modelado com um nó e quatro graus de liberdade. O elemento eixo é considerado flexível. A sua energia potencial é devida à deformação de flexão nos dois planos. A energia cinética de rotação e de translação deste elemento é considerada. Este elemento é modelado com dois nós e oito graus de liberdade. No modelo proposto os mancais poderão ser considerados rígidos ou flexíveis, com rigidez linear e amortecimento viscoso.

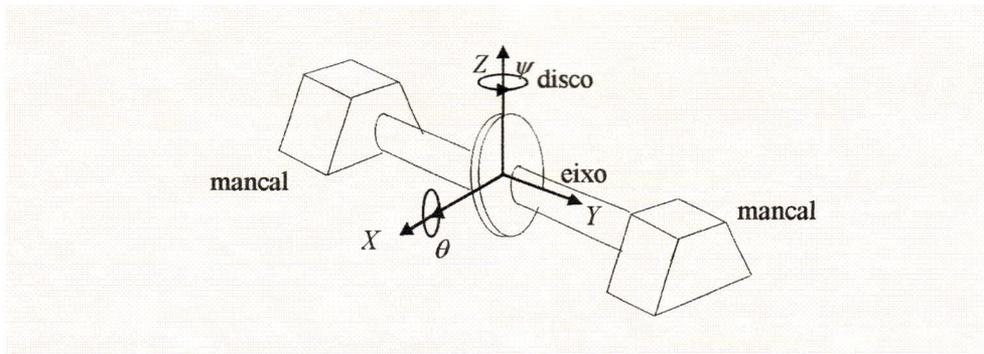


Figura 5.1 Elementos de um rotor simplificado

## 5.1 FUNDAMENTOS DO MÉTODO DE DISCRETIZAÇÃO

O processo de discretização, que tem como objetivo a obtenção das matrizes do sistema (massa, rigidez, amortecimento e giroscópica), é baseado na aproximação da solução procurada por uma expansão em série finita como:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) = \{\phi\}^T \{q\} \quad (5.1)$$

onde:

$$\{\phi(x)\} = \begin{Bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\{q(t)\} = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

Quanto mais termos forem adicionados à série, melhor a aproximação em relação à solução procurada. Para que isto ocorra cada função de formas  $\phi_i(x)$  deve satisfazer as seguintes condições:

- 1) ser linearmente independente;
- 2) ser contínua e ter derivadas contínuas pelo menos até a ordem  $(r-1)$ , onde  $r$  é a maior ordem de derivação do funcional de energia;
- 3) satisfazer as condições de contorno geométricas.

A equação de Hamilton é expressa por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (5.4)$$

Onde  $T$  é a energia cinética,  $V$  a energia potencial e  $W_{nc}$  é o trabalho virtual das forças não conservativas e  $\delta$  representa uma variação.

Através da equação de Hamilton (5.4), pode-se obter as equações de Lagrange para sistemas discretizados com  $n$  graus de liberdade, descritos pelos deslocamentos independentes  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Esta equação é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.5)$$

onde  $Q_i$  é a força generalizada

Através desta equação serão obtidas as matrizes de massa, amortecimento e rigidez de cada elemento do rotor discretizado.

## 5.2 ELEMENTOS BÁSICOS DE UM ROTOR

Para efeito de modelagem serão considerados como graus de liberdade os deslocamentos nas direções  $X$  e  $Z$  e os ângulos de rotação em torno de  $X$  e  $Z$ .

### 5.2.1 O ELEMENTO EIXO

Para modelar as partes rotativas flexíveis utiliza-se o elemento eixo conforme mostra a Figura 5.2. O vetor de coordenadas nodais é expresso da seguinte maneira:

$$[\delta] = [u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ \psi_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2 \ \psi_2] \quad (5.6)$$

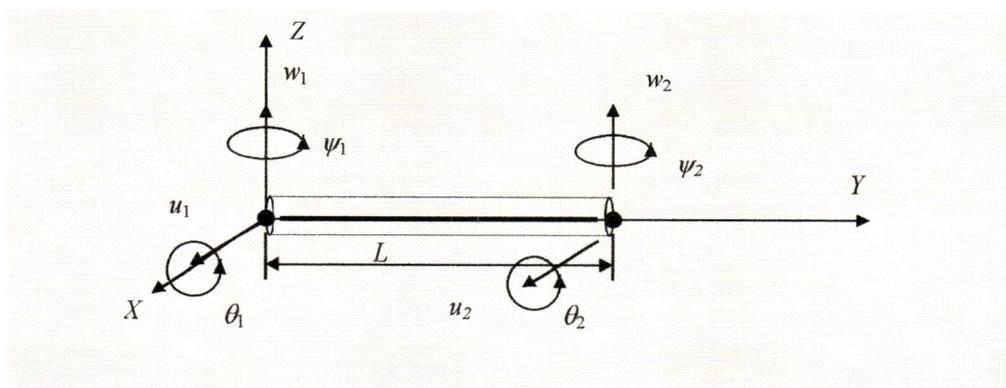


Figura 5.2 O Elemento Eixo

Este vetor pode ser decomposto em dois grupos, segundo as direções  $X$  e  $Z$  respectivamente:

$$[\delta u] = [u_1 \quad \psi_1 \quad u_2 \quad \psi_2] \quad (5.7)$$

$$[\delta w] = [w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2] \quad (5.8)$$

As funções de forma que satisfazem as condições geométricas de contorno para o modelo adotado são as seguintes:

$$\{N(y)\} = [[N_1(y)] [N_2(y)]] \quad (5.9)$$

onde

$$[N_1(y)] = [\phi_1(y) \quad \phi_2(y) \quad \phi_3(y) \quad \phi_4(y)] \quad (5.10)$$

$$[N_2(y)] = [\phi_5(y) \quad \phi_6(y) \quad \phi_7(y) \quad \phi_8(y)] \quad (5.11)$$

com

$$\phi_1(y) = 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}$$

$$\phi_2(y) = -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}$$

$$\phi_3(y) = \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}$$

$$\phi_4(y) = \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}$$

$$\phi_5(y) = 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}$$

$$\phi_6(y) = +y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}$$

$$\phi_7(y) = \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}$$

$$\phi_8(y) = -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}$$

Os deslocamentos  $u(x,t)$  e  $w(z,t)$  são obtidos de forma aproximada a partir desta discretização por:

$$u(x,t) = [N_1(y)][\delta u]^t \quad (5.12)$$

$$w(z,t) = [N_2(y)][\delta w]^t \quad (5.13)$$

A energia cinética do eixo é expressa no modelo contínuo por:

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (5.14)$$

onde  $\rho$  é a massa específica,  $S$  é a área da seção transversal,  $I$  o momento de inércia de área da seção transversal sobre a linha neutra do elemento eixo e  $L$  o comprimento.

Estes parâmetros são considerados constantes em cada elemento.

A energia cinética, pode ser escrita a partir de (5.12) e (5.13). Na forma aproximada dada por:

$$\begin{aligned} T_s = & \frac{\rho S}{I} \int_0^L ([\delta \dot{u}] [N_1]^t [N_1] [\delta \dot{u}]^t + [\delta \dot{w}] [N_2]^t [N_2] [\delta \dot{w}]^t) dy + \\ & + \frac{\rho I}{2} \int_0^L ([\delta \dot{u}] \frac{d[N_1]^t}{dy} \frac{d[N_1]}{dy} [\delta \dot{u}]) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L ([\delta \dot{w}] \frac{d[N_2]^t}{dy} \frac{d[N_2]}{dy} [\delta \dot{w}]) dy - \\ & - 2\rho I \Omega \int_0^L ([\delta \dot{u}] \frac{d[N_1]^t}{dy} \frac{d[N_2]}{dy} [\delta \dot{w}]) dy + \rho I L \Omega^2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

O elemento eixo é modelado como uma viga de seção transversal constante. O elemento finito utilizado tem dois nós, com quatro graus de liberdade por nó. As matrizes de elemento tem ordem oito, incluindo quatro deslocamento lineares e quatro deslocamentos angulares. As energias cinéticas obtidas após as integrações da equação (5.15), são expressas por:

$$T_s = \frac{1}{2}[\delta\dot{u}][M_1][\delta\dot{u}]^t + \frac{1}{2}[\delta\dot{w}][M_2][\delta\dot{w}]^t + \frac{1}{2}[\delta\dot{u}][M_3][\delta\dot{u}]^t + \frac{1}{2}[\delta\dot{w}][M_4][\delta\dot{w}]^t + \Omega[\delta\dot{u}][M_5][\delta\dot{w}]^t + \rho IL\Omega^2$$

(5.16)

onde:

$$[M_1] = \frac{\rho S}{I} \int_0^L [N_1]^t [N_1] dy$$

$$[M_2] = \frac{\rho S}{I} \int_0^L [N_2]^t [N_2] dy$$

$$[M_3] = \frac{\rho I}{2} \int_0^L \frac{d[N_1]^t}{dy} \frac{d[N_1]}{dy} dy$$

$$[M_4] = \frac{\rho I}{2} \int_0^L \frac{d[N_2]^t}{dy} \frac{d[N_2]}{dy} dy$$

$$[M_5] = -2\rho I \int_0^L \frac{d[N_1]^t}{dy} \frac{d[N_2]}{dy} dy$$

As matrizes  $[M_1]$  e  $[M_2]$  são as matrizes de massa clássica,  $[M_3]$  e  $[M_4]$  são as matrizes responsáveis pelo efeito secundário da inércia de rotação,  $[M_5]$  é a matriz de efeito giroscópica, A matriz de massa clássica é obtida através da composição de  $[M_1]$  e  $[M_2]$  é dada por:

$$[M] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$[M_s] = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

onde  $L$  é o comprimento do eixo,  $\rho$  é a massa específica,  $S$  é a área da seção transversal e  $I$  é o momento de inércia de área, constantes para cada elemento. A matriz de massa do elemento eixo é obtida através da equação.

$$[m]_{es} = [M + M_s] \quad (5.19)$$

A matriz giroscópica do elemento de eixo é dada por:

$$[g]_{es} = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

onde:  $\Omega$  é a velocidade de rotação.

A energia potencial ocorre devido ao efeito mola no eixo do rotor e pode ser escrita como:

$$U_s = \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (5.21)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $F_0$  a força axial,  $I_x$  e  $I_z$  são os momentos de inércia de área da seção transversal com relação a  $x$  e  $z$  respectivamente.

A equação da energia potencial do eixo (5.21) pode ser aproximada através do modelo discretizado. Aplicando-se (5.12) e (5.13) em (5.21) obtém-se

$$\begin{aligned}
 U_s = & \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ [\delta u] \frac{d^2[N_1]^t}{dy^2} \frac{d^2[N_1]}{dy^2} [\delta u]^t + [\delta w] \frac{d^2[N_2]^t}{dy^2} \frac{d^2[N_2]}{dy^2} [\delta w]^t \right] dy + \\
 & + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[ [\delta u] \frac{d[N_1]^t}{dy} \frac{d[N_1]}{dy} [\delta u]^t + [\delta w] \frac{d[N_2]^t}{dy} \frac{d[N_2]}{dy} [\delta w]^t \right] dy
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Depois da integração a equação (5.22) torna-se:

$$U = \frac{1}{2} \delta u^t [K_1] \delta u + \frac{1}{2} \delta w^t [K_2] \delta w + \frac{1}{2} \delta u^t [K_3] \delta u + \frac{1}{2} \delta w^t [K_4] \delta w \tag{5.23}$$

onde:

$$[K_1] = \frac{EI}{2} \int_0^L \frac{d^2[N_1]^t}{dy^2} \frac{d^2[N_1]}{dy^2} dy$$

$$[K_2] = \frac{EI}{2} \int_0^L \frac{d^2[N_2]^t}{dy^2} \frac{d^2[N_2]}{dy^2} dy$$

$$[K_3] = \frac{F_0}{2} \int_0^L \frac{d[N_1]^t}{dy} \frac{d[N_1]}{dy} dy$$

$$[K_4] = \frac{F_0}{2} \int_0^L \frac{d[N_2]^t}{dy} \frac{d[N_2]}{dy} dy$$

As matrizes de rigidez são expressas por:

$$[K_c] = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

$$[K_F] = \frac{F_0}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal e  $\alpha$  o efeito do cisalhamento e é dado por:

$$\alpha = \frac{12EI}{GSL^2} \quad (5.26)$$

e  $G$  é o módulo de elasticidade transversal para materiais isotrópicos é igual a:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.27)$$

onde:  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do elemento de eixo.

A matriz de rigidez clássica é  $[K_c]$  considera a influência do cisalhamento embora não sendo demonstrada aqui, é obtida através de  $[K_1]$  e  $[K_2]$ . A matriz de rigidez geométrica devido a força axial é  $[K_F]$  é obtida através de  $[K_3]$  e  $[K_4]$ . A matriz de rigidez do elemento eixo é portanto obtida por:

$$[K]_{es} = [K_c + K_F] \quad (5.28)$$

### 5.2.2 O ELEMENTO DISCO

O disco é modelado como uma inércia rígida. Este elemento coincide com um dado nó do rotor. Desta forma tem quatro graus de liberdade, sendo dois deslocamentos  $u$  e  $w$  e dois ângulos  $\theta$  e  $\psi$  sobre os eixos  $X$  e  $Z$  que como mostrado na Figura 5.3. O vetor de deslocamentos nodais  $\{\delta\}$  do centro de massa do disco é :

$$[q] = [u(t) \ w(t) \ \theta(t) \ \psi(t)] \quad (5.29)$$

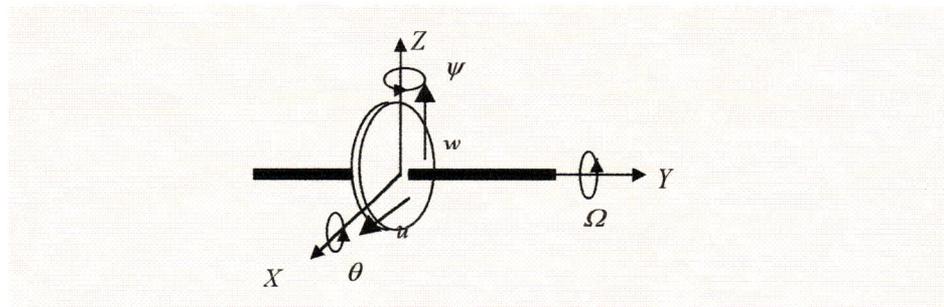


Figura 5.3 Elemento Disco

A expressão de energia cinética, devido à translação e à rotação do disco, é obtida através da mecânica newtoniana e expressa na seguinte forma :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{DX} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{DY} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (5.30)$$

onde  $M_D$  é a massa do disco e  $I_{DX}$  e  $I_{DY}$  são os momentos de inércia do disco em relação aos eixos  $x$  e  $y$  respectivamente. Esta expressão está baseada em hipóteses simplificadoras tais como: disco simétrico, isto é  $I_{DX} = I_{DZ}$ , os ângulos  $\theta$  e  $\psi$  são pequenos e a velocidade angular  $\Omega$  constante.

A energia potencial de deformação do elemento disco é nula uma vez que este elemento é considerado rígido.

O modelo utilizado considera quatro graus de liberdade por nó do rotor. Através das equações de Lagrange aplicado na equação (5.30) pode-se obter as matrizes deste elemento. As matrizes do elemento disco são de ordem quatro e dadas por:

$$[m]_{ed} = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$[g]_{ed} = \Omega \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$



onde  $[m]_{ed}$  e  $[g]_{ed}$  são as matrizes de massa e giroscópica do elemento disco.

### 5.2.3 ELEMENTO MANCAL

O modelo do elemento mancal é obtido através das definições de parâmetros agrupados. Assim os mancais são modelados por matrizes de rigidez e amortecimento viscoso de ordem quatro. As forças e momentos dos mancais em um determinado nó podem ser dadas por:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ M_\theta \\ F_w \\ M_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{zx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{zx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Alguns tipos de mancais, como por exemplo os mancais de rolamento, possuem rigidezes muito altas. Neste caso o mancal é considerado com apoio fixo que permite apenas deslocamento angulares. O programa de computador desenvolvido contém esta facilidade.

### 5.3 MUDANÇA DE COORDENADAS

A mudança de coordenadas do elemento para o sistema global é feita através de uma matriz  $[a]$  cuja ordem depende do elemento do rotor. Para o elemento eixo a ordem desta matriz é  $8X4n$ . Para os elementos disco e mancal a ordem é  $4X4n$ , onde  $n$  é o número de nós do rotor. Esta matriz é composta apenas de uns e zeros, uma vez que não há necessidade de rotação de coordenadas. A operação matricial necessária para se obter as matrizes nas coordenadas globais é dada por:

$$[M] = \sum_{e=1}^n [a]_e^T [m]_e [a]_e \quad (5.34)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^n [a]_e^T [k]_e [a]_e \quad (5.35)$$

$$[C + G] = \sum_{e=1}^n [a]_e^T [c + g]_e [a]_e \quad (5.36)$$

onde:

[M] - matriz de massa das coordenadas globais;

[K] - matriz de rigidez das coordenadas globais;

[C] - matriz de amortecimento das coordenadas globais e

[G] - matriz giroscópica das coordenadas globais.

O resultado dos somatórios (5.34), (5.35) e (5.36) são matrizes de ordem  $4n \times 4n$ . A finalidade das matrizes de mudança de coordenadas é obter as matrizes globais, somando os efeitos dos elementos nas suas respectivas posições de acordo com o nó discretizado. Os somatórios das equações (5.34), (5.35) e (5.36) acumulam os efeitos dos elementos no modelo do sistema todo. Para um rotor simples discretizado com dois nós, número mínimo para o modelo de um eixo, as matrizes  $[a]$  terão o seguinte aspecto para os elementos disco e mancal, para os nós 1 e 2, respectivamente:

$$[a]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

$$[a]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Para o elemento eixo, que neste caso é único, obtém-se:

$$[a]_{e1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

#### 5.4 PROGRAMA DE COMPUTADOR GIROS

A partir das considerações feitas nos itens anteriores, com relação à modelagem dos elementos de um rotor, desenvolveu-se um programa de computador denominado GIROS. Este programa tem como finalidade calcular as frequências naturais considerando o efeito giroscópico, denominadas frequências de “whirling”. A Figura 5.4 mostra um fluxograma do programa de computador desenvolvido. As Figuras 5.5 e 5.6 mostram detalhes das subrotinas EIXO, DISCO e MANCAL.

Foi utilizado a linguagem matemática Matlab® que possui várias funções de biblioteca para operação com matrizes, em especial, rotinas para o cálculo de problemas de autovalores e autovetores e rotinas para a resolução de sistemas lineares. Com esta linguagem é possível desenvolver o trabalho de programação com maior eficiência através do uso dessas funções, implementadas no “software” Matlab®.

Neste capítulo serão apresentadas as funções da biblioteca do Matlab® utilizadas e as subrotinas do programa desenvolvido.

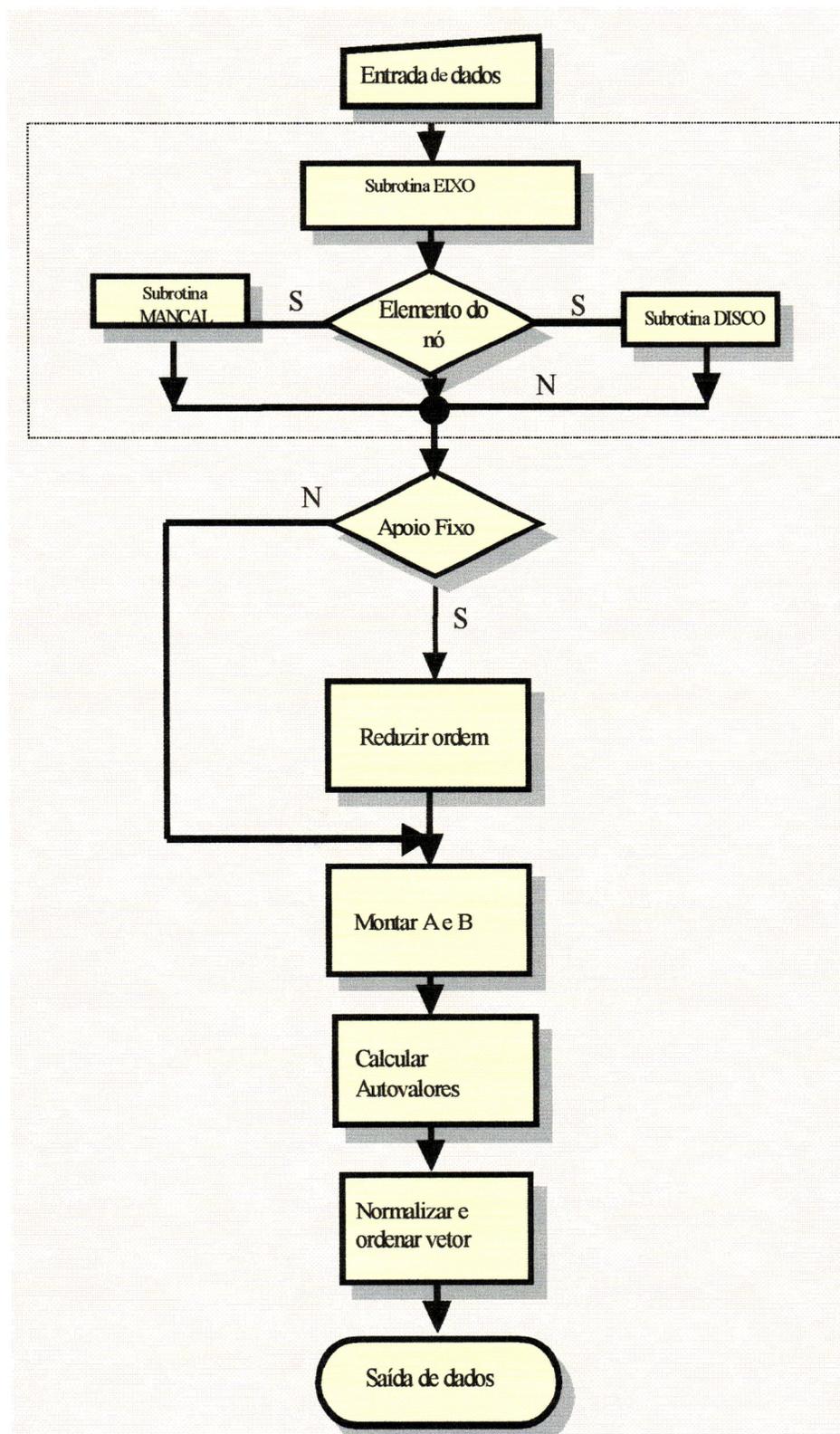


Figura 5.4 Fluxograma do Programa GIROS

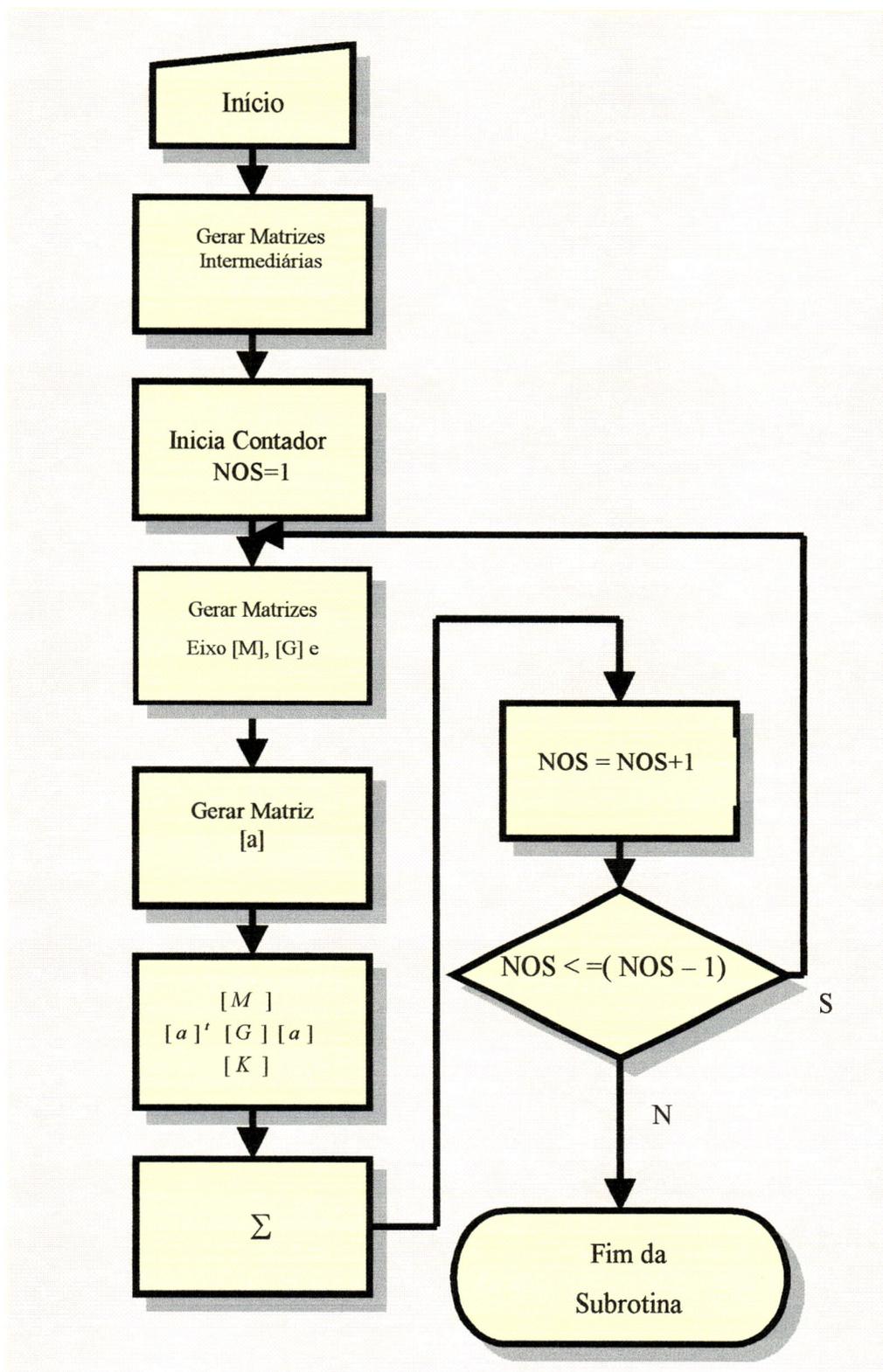


Figura 5.5 Subrotina EIXO

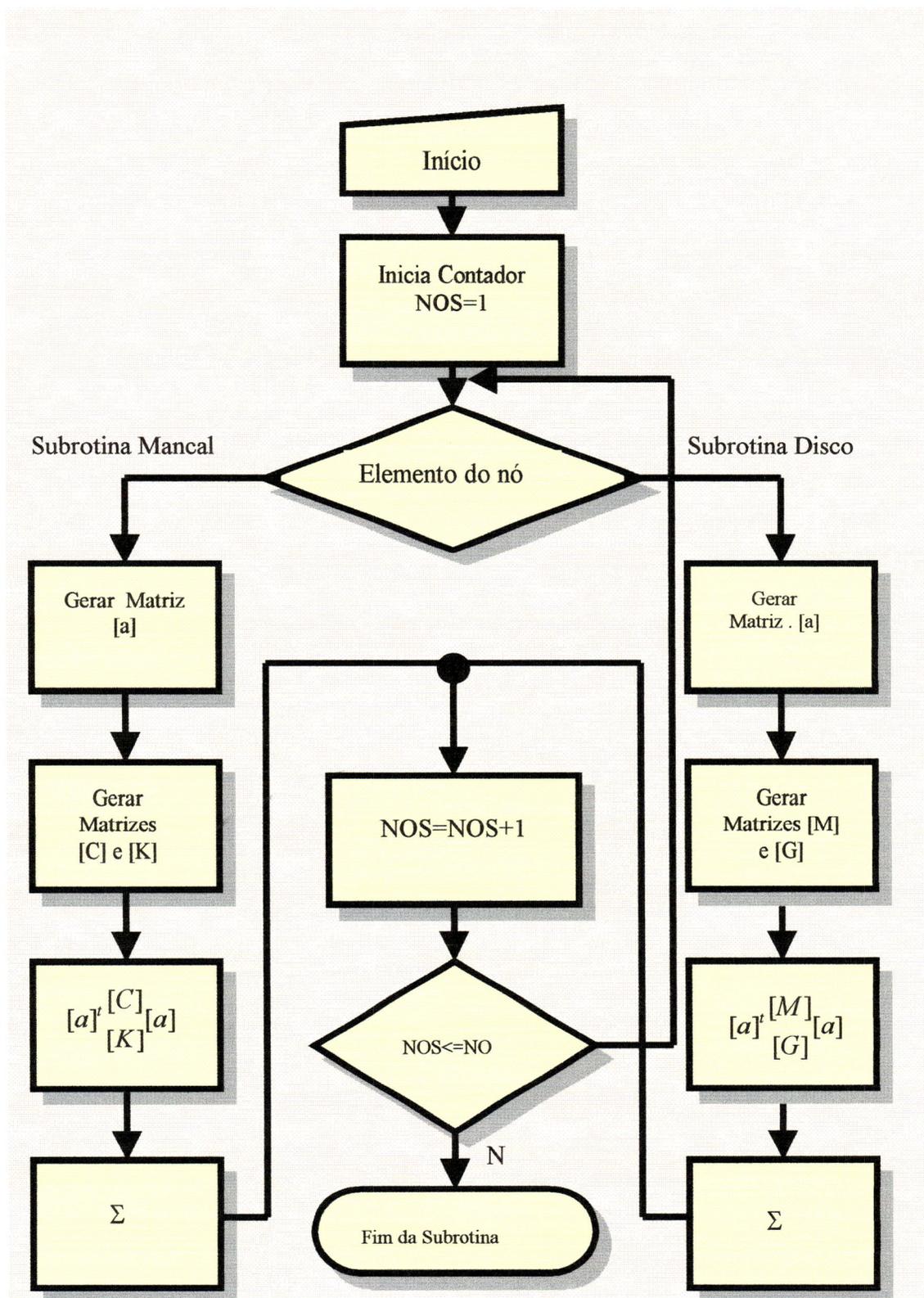


Figura 5.6 Subrotinas MANCAL e DISCO

## 5.5 SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES ATRAVÉS DO MÉTODO DIRETO

Foi escolhido o método de solução denominado direto devido ao fato de não reduzir o número de equações do sistema conservando o número de graus de liberdade. Um outro método denominado pseudo-modal propõe a redução do tempo de computação através do emprego de uma técnica iterativa com redução no tamanho das matrizes.

Através do método de solução direto, torna-se a equação geral:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C + G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (5.40)$$

Para o caso livre a solução pode ser admitida com a seguinte forma:

$$\{q\} = \{Q\}e^{rt} \quad (5.41)$$

Substituindo (5.41) em (5.40), obtém-se:

$$(r^2[M] + r[C + G] + [K])\{Q\} = \{0\} \quad (5.42)$$

Seja a seguinte identidade:

$$[M]\{Q\} = [M]\{Q\} \quad (5.43)$$

Combinando as equações a (5.42) e (5.43), obtém-se um sistema numa forma mais conveniente. Esta forma equivale ao modelo que utiliza a formulação por variáveis de estado. O sistema obtido é o seguinte:

$$\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C + G] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{rQ\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [-K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{rQ\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} \quad (5.44)$$

A equação (5.44) escrita na forma geral de um problema de autovalores e autovetores:

$$[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\} \quad (5.45)$$

onde

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C + G] \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [-K] \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$\lambda = \frac{1}{r} \quad (5.48)$$

Este autoproblema pode ser escrito de uma outra forma de modo a obter a seguinte forma simplificada:

$$[D]\{X\} = \lambda\{X\} \quad (5.49)$$

onde:

$$[D] = [B]^{-1}[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [K]^{-1}[M] & [K]^{-1}[C + G] \end{bmatrix} e \quad \lambda = r, \text{ sendo } [K] \text{ inversível.}$$

A solução do problema de autovalor e autovetor resulta em  $2n$  autovalores complexos conjugados e, conseqüentemente,  $2n$  autovetores complexos conjugados. Os autovalores podem ser escritos usando a teoria geral de vibrações como:

$$r_i = -\zeta\omega_n + i\omega_d \quad (5.50)$$

onde

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (5.51)$$

e  $\zeta$  é o fator de amortecimento.

O programa desenvolvido calcula o valor absoluto dos autovalores complexos, de maneira a obter a frequência natural, ou seja:

$$\omega_{ni} = \text{abs}(r_i) \quad (5.52)$$

## 5.6 DESCRIÇÃO DAS SUBROTINAS

O programa de computador GIROS desenvolvido permite que se obtenha o modelo para qualquer tipo de rotor, com combinações dos elementos eixo, disco e mancal. A primeira variável a ser escolhida é o número  $n$  de nós do rotor. Os fatores mais importantes para a escolha deste número são a geometria do rotor e o número de frequências naturais a serem calculadas. Quando se deseja obter frequências naturais numa grande faixa de frequência é necessário que se utilize um número maior de nós.

A segunda variável é a velocidade de rotação do rotor, da qual dependem as matrizes de efeito giroscópico. Escolhe-se uma faixa de velocidade de rotação para os cálculos das frequências naturais e para se obter o diagrama de Campbell. A partir da entrada do número de nós calcula-se as matrizes de massa, rigidez, amortecimento e giroscópica para os  $2n-1$  elementos eixo.

Através de um “loop” de domínio igual ao número de nós  $n$ , o “software” interpela o usuário em cada nó se há um elemento mancal, disco ou nenhum.

Definido para o nó o(s) elemento(s) existente(s), o programa de computador faz um desvio condicional para a subrotina de tratamento específico. Caso não exista elemento disco ou mancal para o nó em questão, ou seja, nó apenas do elemento eixo, entre este nó e o seguinte será incrementado o domínio do “loop” passando-se para o próximo nó. A mudança das coordenadas locais para as globais é realizada por uma matriz  $[a]$  para cada elemento, constituída de uns e zeros, sendo a diagonal de uns deslocada para a direita quatro colunas em cada nó incrementado.

Após a determinação das matrizes de massa, giroscópica, de amortecimento e de rigidez para os elementos eixo e para os outros elementos em todos os nós do rotor, passa-se para a próxima subrotina. Esta nova subrotina faz a redução da ordem das matrizes globais de acordo com os graus de liberdade quando houver apoios considerados fixos. O apoio fixo é modelado como um vínculo que permite as rotações  $\theta$  e  $\psi$  mas impede os deslocamentos  $u$  e  $w$  nas direções  $X$  e  $Z$ .

A ordem das matrizes de massa, de rigidez, de amortecimento e giroscópica é diminuída de dois, duas linhas e duas colunas, para cada apoio fixo, de acordo com a posição do nó em que está localizado. Esta subrotina está dentro de um “loop” que interpela o usuário se no nó em questão há apoio fixo. Em caso afirmativo é feita a redução. Esta subrotina de redução utiliza as facilidades do “software” Matlab® no particionamento de matrizes.

A próxima etapa é fazer a transformação para o espaço de estado. Nesta representação matricial do sistema utilizam-se os deslocamentos e as velocidades como variáveis de estado. O vetor de estado possui, portanto dimensão  $2nx1$ .

Através desta transformação obtém-se um problema de autovalores e autovalores na forma geral, mostrado na equação (5.45), forma esta já disponível em função de biblioteca do software Matlab®. Esta função fornece como resultado uma matriz diagonal de autovalores complexos conjugados e outra matriz com os autovetores correspondentes. Dependendo do modelo utilizado, não amortecido ou amortecido, os autovalores terão a parte real nula ou não, respectivamente.

As frequências que interessam para análise são as naturais  $\omega_n$ . Para obtê-las é utilizada a equação (5.52). A seguir as frequências naturais são ordenadas da menor para a maior, através de um algoritmo do tipo “sort” e colocadas em um vetor  $n$  dimensional de saída ou em uma matriz de saída. Estas frequências de saída tem unidades  $rad/s$ , sendo conveniente a conversão para  $Hz$  de maneira a se obter o diagrama de Campbell na forma usual.

Como o Matlab® é uma linguagem de programação estruturada permite fácil manutenção e implementação de novas rotinas à medida que se aprimore o algoritmo. Uma desvantagem do Matlab® é a falta de uma interface gráfica com o usuário de maneira a facilitar a entrada e a saída de dados.

O programa desenvolvido possibilita, como já mencionado, a modelagem de um rotor de qualquer configuração com os três elementos (disco, eixo e mancal). Evidentemente o eixo é o único elemento indispensável na modelagem proposta neste trabalho para um rotor. Durante a montagem das equações de estado, foi implementado um sistema de chaves lógicas que muda seu “status” de desabilitada para habilitada para cada elemento ausente. Dependendo do “status” destas chaves o programa é desviado para uma rotina que monta matrizes de zeros específicas para cada elemento ausente.

### 5.6.1 ENTRADA DO PROGRAMA

O programa foi desenvolvido a partir de duas importantes variáveis de entrada: o número de nós codificado por NOS e a velocidade de rotação do eixo em radianos por segundo ( $rad/s$ ), codificado por W. O número de nós define a ordem das matrizes massa, giroscópica, amortecimento e rigidez do sistema. A ordem dessas matrizes é igual a quatro vezes NOS menos duas vezes o número de apoios fixos. As matrizes de efeito giroscópico são funções da velocidade de rotação adotada.

### 5.6.2 MATRIZES DE PARTIDA DOS SOMATÓRIOS

São constituídas por matrizes de zeros, de ordem igual a  $4 \times NOS$ , obtidas utilizando as funções da biblioteca do Matlab®.

Na mesma subrotina são criadas as chaves lógicas “chavedisco” e “chavemancal” atribuindo-lhes o valor zero. Dependendo da presença de algum elemento do rotor estas chaves terão suas condição alterada para um.

### 5.6.3 MATRIZES GLOBAIS EIXO

Subrotina cuja finalidade é gerar as matrizes de massa, de rigidez, de amortecimento e giroscópica a partir de todas as matrizes dos elementos eixo do rotor, que servirão de base para os elementos disco e mancal. A mudança de coordenadas locais para as coordenadas globais é realizada por matrizes constituídas por zeros e uns formadas por oito linhas e o número de colunas igual a quatro vezes NOS. A cada nó, partindo do nó 1, a diagonal de uns é deslocada para a direita de quatro colunas devido ao modelo que utiliza quatro graus de liberdade por nó.

A operação algébrica utilizada na mudança de coordenadas locais para as globais são as equações (5.34), (5.35) e (5.36). Para cada nó é montada uma matriz [a]. As matrizes C, KE e ME são montadas através de matrizes de incógnitas que dependem de variáveis de entrada do trecho do eixo que está sendo discretizada. O resultado destas operações são matrizes de ordem quatro vezes NOS nas coordenadas globais.

Esta rotina está dentro de um “loop” de domínio igual a  $NOS-1$ , que faz um somatório das matrizes massa, rigidez e giroscópica. Estas matrizes são calculadas a partir da matriz de mudança de cada nó de maneira a acumular os efeitos.

### 5.6.4 ESPECIFICAÇÃO DOS ELEMENTOS DO ROTOR

Subrotina realizada dentro de um “loop” de domínio igual ao número de nós indicado NOS, onde a cada incremento é perguntado ao usuário se no nó em questão

existe elemento disco, mancal ou se é apenas elemento eixo. As estruturas utilizadas para desviar o “software” para uma rotina de tratamento específica são as declarações de execução condicional, “else” e “elseif”. Nas rotinas selecionadas dentro da estrutura de repetição, de domínio igual ao número de nós *NOS*, são obtidas as matrizes de massa e giroscópica para o elemento disco, matrizes de amortecimento e rigidez para os mancais. De maneira semelhante aquela utilizada para o elemento eixo, as matrizes de mudança [a] devem ser aplicadas às operações algébricas das equações (5.34), (5.35) e (5.36). Somatórios dentro das estruturas de repetição são os responsáveis pela acumulação dos efeitos de todos os nós da mesma maneira que no caso do elemento eixo.

### **5.6.5 MONTAGEM DAS MATRIZES GERAIS DO SISTEMA**

Subrotina responsável pela montagem das matrizes globais do sistema codificadas por: *MGERAL*, *KGERAL* e *CGERAL*, que são respectivamente matriz de: massa, amortecimento somada à do efeito giroscópico e rigidez. O elemento eixo apresenta três matrizes porque o seu modelo considera a massa, a rigidez e o efeito giroscópico. O elemento disco só possui as matrizes de massa e do efeito giroscópico enquanto que o elemento mancal possui as matrizes de rigidez e de amortecimento.

O sistema obtido depende das condições adotadas. Fazendo-se a velocidade de rotação igual a zero anula-se o efeito giroscópico e o sistema é não giroscópico. O amortecimento é considerado apenas através das constantes do elemento mancal. Quando for nulo o sistema é não amortecido.

### **5.6.6 DIMINUIÇÃO DA ORDEM DAS MATRIZES GLOBAIS DO SISTEMA**

Determinados tipos de mancais possuem rigidezes muito elevadas. Partindo desta premissa foi introduzida uma subrotina com a finalidade de admitir mancais ideais, isto é, com rigidez infinita. Isto corresponde a uma redução na ordem das matrizes globais do sistema. Esta subrotina considera os mancais como apoios fixo,

modelados como vínculos que impedem os deslocamentos lineares e permitem as rotações  $\theta$  e  $\psi$ .

A subrotina diminui a ordem das matrizes globais, eliminando linhas e colunas correspondentes aos deslocamentos impedidos. Através de uma estrutura de repetição de domínio igual ao número de nós, o usuário é interpelado a responder em cada nó se há apoio fixo. Uma estrutura do tipo condicional desvia o fluxo de programação para uma rotina de tratamento onde é feita a supressão das linhas e colunas através da partição das matrizes, antes e depois da eliminação das filas, primeiro as linhas e depois as colunas. A variável de controle da partição das matrizes é indexada ao contador de supressão de linhas e colunas e ao nó.

#### **5.6.7 MATRIZES AUXILIARES**

O programa GIROS contém subrotinas para gerar matrizes de zeros e identidade. O algoritmo é simplificado pelo uso de funções da biblioteca do Matlab®, como as funções ZEROS e EYE. A ordem das matrizes é função do número de nós e das filas suprimidas, devido aos apoios considerados fixos.

#### **5.6.8 SUBROTINA DE MONTAGEM DAS MATRIZES ESTADO**

Foram desenvolvidas duas versões de programa GIROS. Uma delas utiliza a montagem de duas matrizes, denominadas AGERAL e BGERAL, de maneira a se obter o autop problema generalizado, equação (5.45). Outra versão faz a montagem de uma matriz, denominada de DGERAL, obtendo o autop problema na forma dada pela equação (5.49). Dentro do Matlab® os dois tipos de problemas de autovalores e autovetores são programados em funções da biblioteca deste “software”.

#### **5.6.9 SUBROTINA DE CÁLCULOS DOS AUTOVALORES**

A função da biblioteca do Matlab® que calcula autovalores é a função EIG. Os autovalores são armazenados em uma matriz diagonal, denominada DG, e os

autovetores em uma outra matriz, denominada VG. A função EIG é aplicada à matriz DGERAL numa versão do programa ou às duas matrizes AGERAL e BGERAL, em outra versão.

#### **5.6.10 SUBROTINA OBTENÇÃO DOS AUTOVALORES**

Os autovalores são complexos na forma dada pela equação (5.50), dispostos na matriz diagonal DG. Através de uma estrutura de repetição com domínio função do número de nós e filas suprimidas na subrotina de apoios fixos, a matriz diagonal DG é transformada em um vetor denominado O. Na mesma estrutura é realizada a operação de obtenção da frequência natural, conforme equação (5.52).

#### **5.6.11 SUBROTINAS DE ORDENAÇÃO DO VETOR E SAÍDA DE RESULTADOS**

A subrotina de ordenação do vetor de saída, do menor para o maior valor da frequência natural, é construída através de um algoritmo do tipo “sort”, usando a estrutura de repetição com domínio de função do número de nós do rotor e filas suprimidas no algoritmo de apoios fixos. A última estrutura do programa é a saída do vetor ordenado com as frequências naturais, indicado por O dado em (*rad/s*).

### **5.7 FUNÇÕES DA BIBLIOTECA DO MATLAB®**

Para o desenvolvimento do programa de computador “GIROS”, foram empregadas algumas funções da biblioteca do “software” matemático Matlab® conforme já descrito. Para melhor compreensão do programa, estas funções estão descritas a seguir.

### 5.7.1 FUNÇÃO BIBLIOTECA EIG

A sintaxe da função *EIG* é dada por:

$$[VG, DG] = EIG(D) \quad (5.53)$$

Esta função da biblioteca fornece como resultado uma matriz diagonal *DG* composta pelos autovalores e uma matriz *VG* cujas colunas são autovetores correspondentes à matriz quadrada *D*, de tal maneira que:

$$[D] * [VG] = [VG] * [DG] \quad (5.54)$$

A sintaxe da função *EIG* na forma mais geral é dada por:

$$[VG, DG] = EIG(A, B) \quad (5.55)$$

Esta função de biblioteca fornece como resultado uma matriz diagonal *DG* de autovalores e uma matriz *VG* cujas colunas são os autovetores correspondentes, de maneira tal que:

$$[A] * [VG] = [B] * [VG] * [DG] \quad (5.56)$$

### 5.7.2 FUNÇÃO ZEROS

A função de biblioteca *ZEROS*, cria uma matriz de zeros de ordem  $M \times N$ . Foi utilizada para gerar matrizes quadradas auxiliares de ordem quatro vezes número de nós. A sintaxe é dada por:

$$[M2] = ZEROS(N) \quad (5.55)$$

### 5.7.3 FUNÇÃO BIBLIOTECA EYE

Foi utilizada a função de biblioteca *EYE* com a finalidade de montar a matriz *D*, do autoproblema da equação (5.49). Esta função gera uma matriz identidade de ordem *N*. A sintaxe é dada por:

$$[IDEN] = EYE(n) \quad (5.56)$$

### 5.7.4 OUTRAS FUNÇÕES UTILIZADAS

Foram utilizadas funções comuns da álgebra complexa, como a função que obtém o valor absoluto de um número complexo e a função que obtém a parte imaginária deste número.

### 5.8 GUIA DE UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA “GIROS”

Conforme já mencionado, não foi utilizada uma interface gráfica com o usuário de maneira que os dados devam ser introduzidos de maneira sequencial. A Figura 5.7 mostra um rotor simples, constituído de um eixo apoiado em mancais de rolamentos considerados apoios fixos. Os dados deste rotor são mostrados na Tabela 5.1.

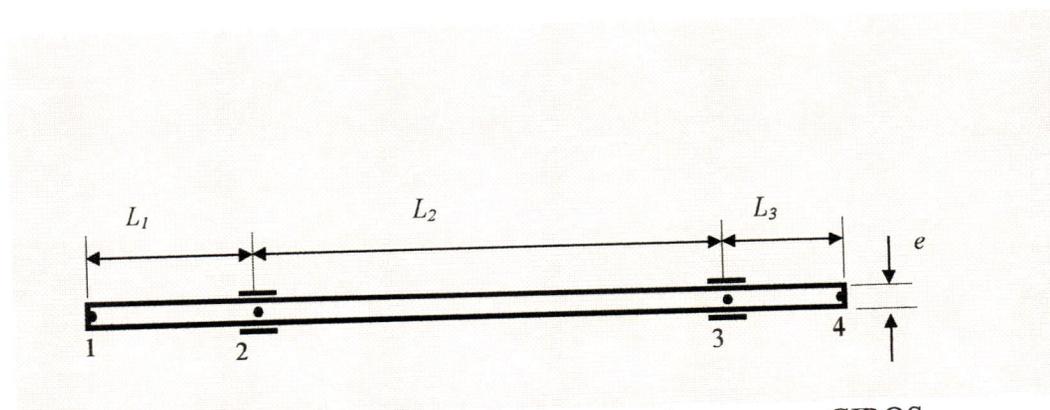


Figura 5.7 Rotor para exemplo de utilização do programa GIROS.

Este rotor é composto de um eixo apoiado em mancais de rolamentos, situados nos nós 2 e 3. Estes tipos de mancais são simulados através da rotina de apoio fixo que impedem deslocamentos mas permitem rotações. Esta rotina foi desenvolvida para simular mancais de rigidezes elevadas.

Tabela 5.1 Constantes do rotor

Símbolo	Unidade	Valor
$I$	$m^4$	$3,9771 \times 10^{-8}$
$\rho$	$Kg/m^3$	7800
$E$	$Mpa$	$205 \times 10^6$
$L_1$	$M$	0,1
$L_2$	$M$	0.25
$L_3$	$M$	0.1
Força Axial	$N$	0
$\nu$	-	0,3
$A$	$m^2$	$7,0686 \cdot 10^{-4}$
$e$ (diâmetro)	$M$	0,03

Através destes valores foi feita a entrada de dados na janela de comandos do Matlab®, mostrada na Figura 5.8. Foi utilizada no exemplo apenas um valor de rotação, entretanto o programa “GIROS” permite a entrada de uma faixa de valores de rotações bem como o incremento pretendido.

```

MATLAB Command Window
File Edit Options Windows Help
Commands to get started: intro, demo, help help
Commands for more information: help, whatsnew, info, subscribe

> cd c:\alanne
> geral10

ENTRE COM O NÚMERO DE NÓS DO ROTOR4
ENTRE COM A ROTAÇÃO DO EIXO (rad/s)0
NO =
1

ENTRE COM A ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL DO EIXO (m^2)7.0686e-4
ENTRE COM O COMPRIMENTO DO EIXO (m)0.1
ENTRE COM MASSA ESPECÍFICA DO EIXO (Kg/m^3)7800
ENTRE COM O MOMENTO DE INERCIA DE ÁREA DO EIXO(m^4)3.9771e-8
ENTRE COM O MÓDULO DE ELASTICIDADE (N/m^2)205e6
ENTRE COM A CONSTANTE DE POISSON (sem dimensão)0.3
ENTRE COM A FORÇA AXIAL(N)0
NO =
2

```

Figura 5.8 Janela de Comandos do Matlab® para entrada de dados

A variável inicial para a execução do programa é o número de nós do rotor, mostrado na janela de comando do Matlab® da Figura 5.8. A partir deste valor são definidas todas as estruturas de repetições e, em consequência, todas as ordens das matrizes do sistema.

Como o rotor da Figura 5.7 está discretizado em quatro nós, o eixo é formado por três elementos. A entrada de dados correspondente à cada elemento eixo é feita como mostrado na Figura 5.8.

O rotor simulado neste exemplo tem quatro nós e, portanto, a estrutura de repetição tem domínio igual a quatro. Esta situação está mostrada na Figura 5.9.

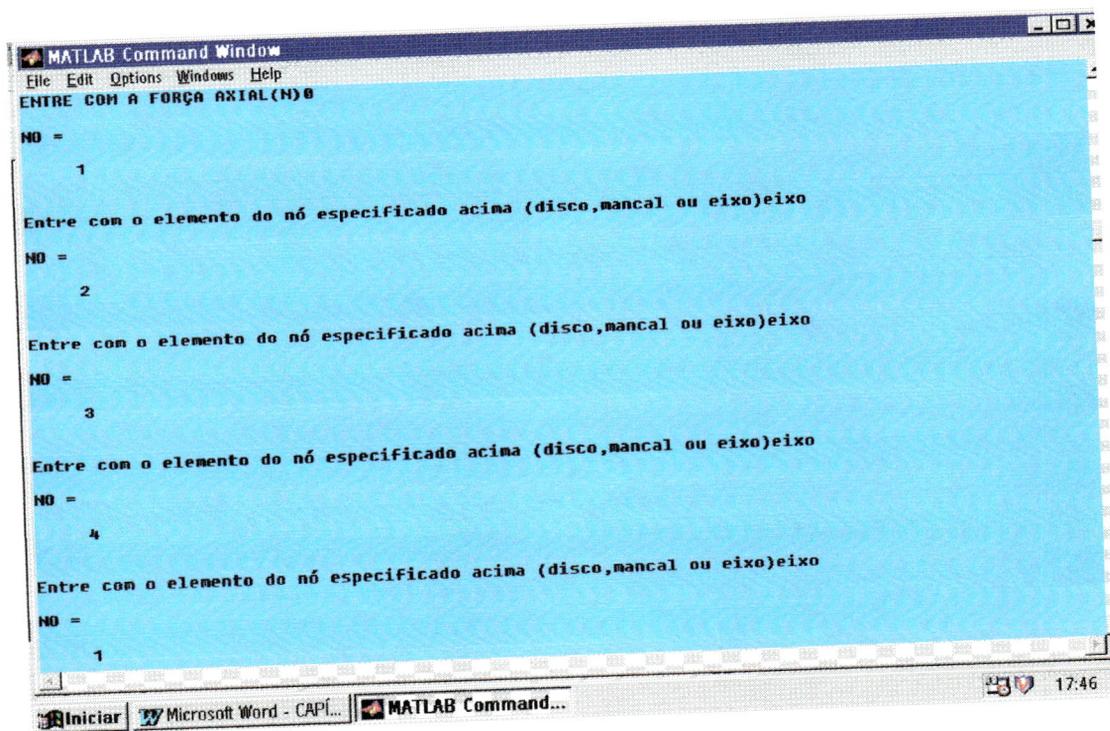


Figura 5.9 Janela de Comandos do Matlab® para especificação dos elementos

Neste exemplo os mancais têm suas rigidezes são admitidas de valores muito altos. Assim, neste caso os mancais são considerados como apoios fixos que impedem os deslocamentos e diminuem a ordem das matrizes do sistema. Para isso uma outra estrutura de repetição do algoritmo interpela o usuário se existe apoio em cada nó. A resposta é sim ou não, conforme apresentado na Figura 5.10

```

MATLAB Command Window
File Edit Options Windows Help
NO =
    1
Existe apoio no nó especificado acima (sim ou não)não
NO =
    2
Existe apoio no nó especificado acima (sim ou não)sim
NO =
    3
Existe apoio no nó especificado acima (sim ou não)sim
NO =
    4
Existe apoio no nó especificado acima (sim ou não)não
Saída =
FREQUÊNCIAS CRÍTICAS EM ORDEM CRESCENTE
  
```

Figura 5.10 Janela de Comando do Matlab® para definição de apoios fixos

A próxima janela é a de resultados, onde a saída é um vetor na unidade ( $rad/s$ ), como mostra a Figura 5.11.

```

MATLAB Command Window
File Edit Options Windows Help
ans =
    3.8163e+003
ans =
    3.8163e+003
» 0/(2*pi)
ans =
Columns 1 through 7
    21.6059    21.6059    21.6059    39.3698    39.3698    39.3698
Columns 8 through 14
    39.3698    99.9358    99.9358    99.9358    99.9358    216.5823    216.5823
Columns 15 through 21
    216.5823    216.5823    564.0763    564.0763    564.0763    564.0763    607.3867
Columns 22 through 24
    607.3867    607.3867    607.3867
»
  
```

Figura 5.11 Janela de Comando do Matlab® para a saída de resultados

## CAPÍTULO 6

### SIMULAÇÕES DE ROTORES

Neste capítulo serão apresentadas os resultados das simulações feitas em três modelos de rotores: um modelo de rotor multi-disco, um modelo mais simples correspondente ao rotor de Laval modificado e um modelo de rotor multi-disco, retirados da literatura especializada. Estes exemplos foram escolhidos por fornecerem valores de referência para a aferição dos resultados obtidos e possibilitar a validação do programa de computador desenvolvido.

A resolução adotada para o cálculo das frequências de “whirling” é igual a  $100$  ( $rad/s$ ). A partir dos valores das frequências de “whirling” obtidos em vários pontos foi possível traçar os diagramas de Campbell, que permitem identificar as velocidades críticas de cada exemplo.

## 6.1 ROTOR MULTI-DISCO

O primeiro rotor simulado foi o modelo multi-disco mostrado na Figura 6.1

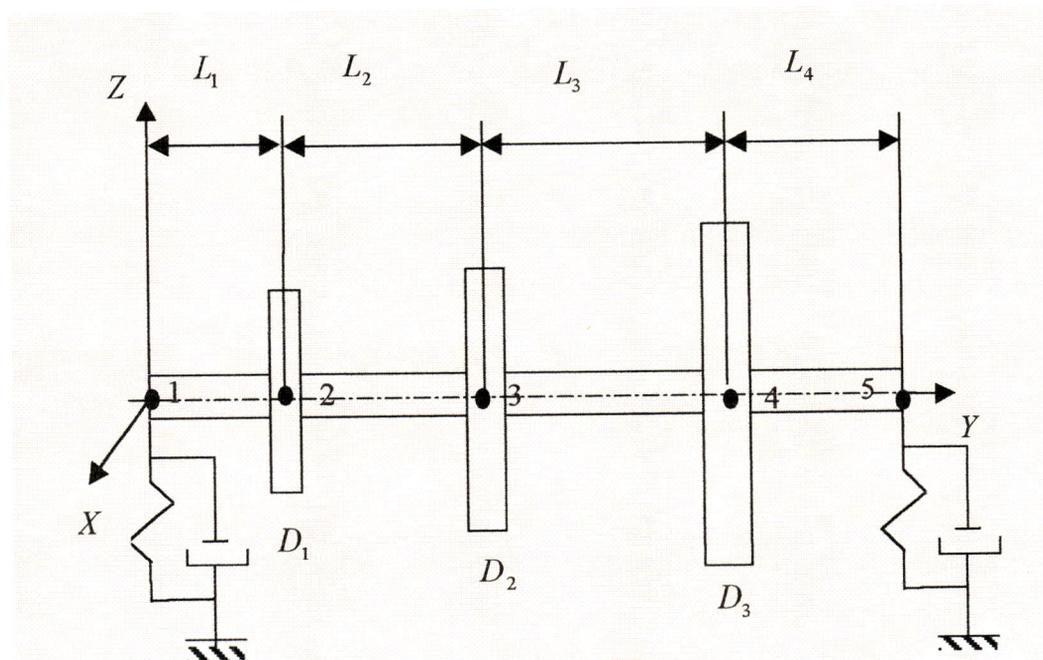


Figura 6.1 Rotor Multi-disco simulado

Os dados de entrada e as posições dos nós empregados para simular este modelo são fornecidos na Tabela 6.1. O modelo foi discretizado com cinco nós. Pois com este numero é possível obter até 20 frequências naturais para cada velocidade de rotação uma vez que o modelo está discretizado em 20 graus de liberdade. Os mancais são considerados flexíveis e estão localizados nos nós 1 e 5. Há três discos considerados rígidos nos nós 2, 3 e 4.

Tabela 6.1 Entradas do rotor multi-disco.

Símbolo	Valor	Unidade
$E$	$2.10^{11}$	$N/m^2$
$\nu$	0,3	-
$\rho$	7800	$kg/m^3$
$A_{eixo}$	0,0079	$m^2$
$I_{eixo}$	$4,9.10^{-6}$	$m^4$
$L_1$	0,2	$m$
$L_2$	0,3	$m$
$L_3$	0,5	$m$
$L_4$	0,3	$m$
$I_{Dy1}$	0,1232	$kg.m^2$
$I_{Dy2}$	0,9763	$kg.m^2$
$I_{Dy3}$	1,1716	$kg.m^2$
$I_{Dx1} = I_{Dz1}$	0,0646	$kg.m^2$
$I_{Dx2} = I_{Dz2}$	0,4977	$kg.m^2$
$I_{Dx3} = I_{Dz3}$	0,6023	$kg.m^2$

Os dois mancais flexíveis são iguais, sendo os valores das rigidezes e dos amortecimentos conforme dados na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 Rigidez e amortecimento dos mancais do rotor multi-disco

<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
$k_{xx}$	$5.10^7$	$N/m$
$k_{xz}$	0	$N/m$
$k_{zx}$	0	$N/m$
$k_{zz}$	$7.10^7$	$N/m$
$c_{xx}$	$5.10^2$	$N.s/m$
$c_{xz}$	0	$N.s/m$
$c_{zx}$	0	$N.s/m$
$c_{zz}$	$7.10^2$	$N.s/m$

Os dados apresentados nas Tabelas 6.1 e 6.2 são as entradas do programa de computador de maneira a se obter as frequências de “whirling” para cada valor de velocidade de rotação do eixo. Como definido anteriormente foi utilizada uma resolução de  $100$  ( $rad/s$ ), ou seja, este é o valor do incremento da velocidade de rotação do eixo na faixa de 0 a 30000 rpm. Para efeito de análise de resultados foram consideradas apenas as dez primeiras frequências naturais apesar do programa calcular vinte valores. Sabe-se que nos processos de discretização as últimas frequências naturais obtidas apresentam com menos precisão. Se fosse necessário obter um número maior que dez frequências naturais com boa precisão, seria necessário realizar uma discretização do rotor com um número maior de nós e, conseqüentemente, de graus de liberdade.

Com a finalidade de aferir o programa de computador, fez-se a comparação dos resultados encontrados na simulação com os valores de referência das frequências de “whirling” para uma velocidade de rotação igual a 25000 rpm. Os valores de referência obtidos no trabalho de Lalanne (1990), e os encontrados na simulação através do programa GIROS são mostrados na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 Frequências de “whirling” para 25000 rpm.

<b>Frequência</b>	<b>Valor de referência (Hz)</b>	<b>Valor encontrado (Hz)</b>	<b>Erro relativo (%)</b>
$F_1$	55,40	55	0,73
$F_2$	67,20	67	0,31
$F_3$	159,00	158	0,06
$F_4$	193,71	194	0,15
$F_5$	249,90	250	0,04
$F_6$	407,62	408	0,09
$F_7$	446,62	447	0,08
$F_8$	715,03	723	1,11
$F_9$	622,65	624	0,21
$F_{10}$	1093,3	1081	1,09

Tabela 6.4 Frequências de “whirling” para o rotor multi-disco

Rotação (rpm)	Frequências de “whirling” (Hz)										
	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	F <sub>5</sub>	F <sub>6</sub>	F <sub>7</sub>	F <sub>8</sub>	F <sub>9</sub>	F <sub>10</sub>	F <sub>11</sub>
0	61	63	169	186	330	363	531	559	836	851	1179
954,9	61	63	169	186	329	363	530	560	831	856	1178
1909	60	63	169	186	328	364	527	563	823	865	1175
2864	60	63	169	186	327	365	523	568	813	875	1171
3819	60	63	169	186	325	367	519	573	804	885	1166
4774	60	63	169	186	322	369	515	579	794	896	1162
7162	60	64	168	187	315	374	504	594	771	922	1150
9549	59	64	167	187	306	379	494	611	748	948	1138
11507	59	65	166	188	298	385	485	628	727	975	1128
14324	58	65	165	189	295	388	484	630	708	1001	1127
16711	57	66	163	190	280	395	469	664	686	1028	1110
19099	57	66	162	191	271	399	462	667	681	1055	1102
21486	56	66	160	192	262	403	455	699	649	1079	1096
23873	56	67	159	193	254	407	449	715	631	1112	1084
25000	55	67	158	194	250	408	447	723	624	1124	1081
28648	54	68	155	195	238	412	440	747	600	1164	1072

Como o “software” Matlab ® foi configurado para manter o resultado em formato curto, para acomodar todos resultados obtidos na simulação na mesma janela, os números

encontrados estão arredondados para valores inteiros. A Tabela 6.4 mostra as frequências de “whirling” para alguns valores de velocidade de rotação.

Com os resultados obtidos nesta simulação pode-se traçar o diagrama de Campbell onde observa-se a influência do efeito giroscópico nas frequências naturais do rotor simulado. O gráfico é mostrado na Figura 6.2 para 11 frequências de “whirling”.

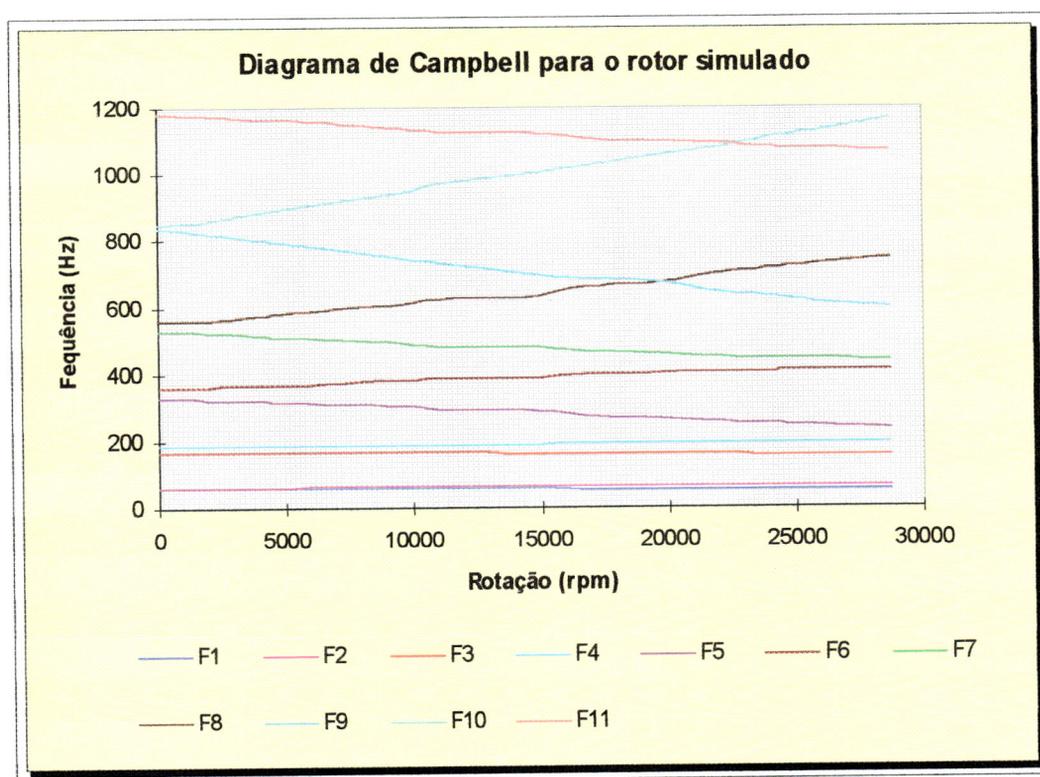


Figura 6.2 Diagrama de Campbell para rotor multi-disco.

A frequência de “whirling”  $F_{11}$  não foi comparada com o valor de referência, pois dados obtidos da literatura referenciada mostram apenas dez frequências de “whirling” para este modelo

## 6.2 ROTOR DE LAVAL MODIFICADO

O rotor de Laval é um modelo simplificado com apenas dois graus de liberdade que permitem algumas soluções analíticas, mostradas no capítulo 3. Foi simulado no programa GIROS um modelo ligeiramente diferente, conforme proposto por Lalanne (1990). Este modelo foi utilizado de maneira a comparar os resultados com a solução analítica mostrada no Capítulo 3 deste trabalho. Para a simulação foi utilizado o modelo da Figura 6.3, discretizado em quatro nós. Os apoios fixos foram modelados como vínculos que permitem rotações mas impedem deslocamentos, os elementos discretizados e suas posições são mostrados no desenho esquemático da Figura 6.3.

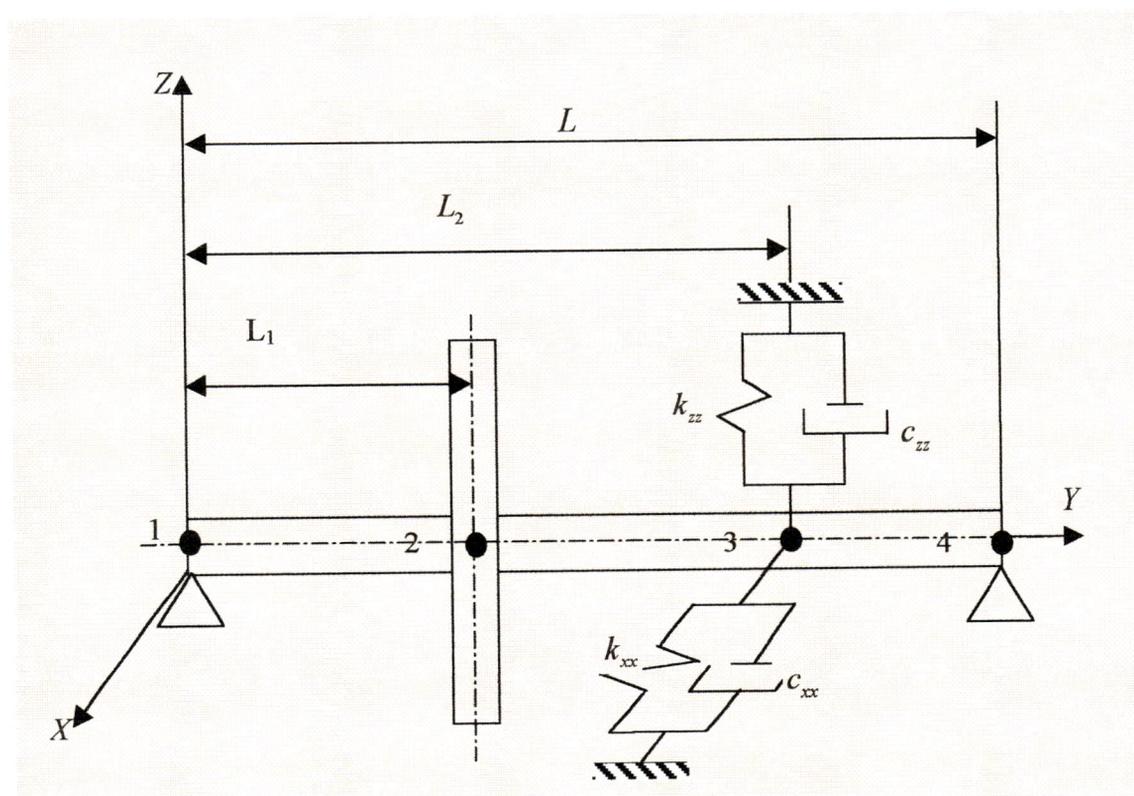


Figura 6.3 Rotor de Laval simulado (Lalanne, 1990)

As variáveis de entrada para este caso são mostradas na Tabela 6.5.

Tabela 6.5 Variáveis de entrada e cotas do rotor de Laval simulado

Símbolo	Valor	Unidade
$L$	0,4	$m$
$L_1$	0,13333	$m$
$L_2$	0,26666	$m$
$R_{int}$ (disco)	0,01	$m$
$R_{ext}$ (disco)	0,15	$m$
Espessura (disco)	0,003	$m$
$\rho$	7800	$kg/m^3$
$E$	$2 \cdot 10^{11}$	$N/m^2$
$\nu$	0,3	-
$I_{DY}$	0,1861	$kg \cdot m^2$
$I_{DX} = I_{DZ}$	$9,457 \cdot 10^{-2}$	$kg \cdot m^2$
$A_{eixo}$	$3,142 \cdot 10^{-4}$	$m^2$
$I_{eixo}$	$7,854 \cdot 10^{-9}$	$m^4$

Os valores dos amortecimentos e das rigidezes do elemento mancal do nó 3, são dados na Tabela 6.6

Tabela 6.6 Rigidez e amortecimento do mancal modificado

Símbolo	Valor	Unidade
$k_{xx}$	$2 \cdot 10^5$	$N/m$
$k_{zz}$	$5 \cdot 10^5$	$N/m$
$k_{xz} = k_{zx}$	0	$N/m$
$c_{zz}$	100	$N \cdot s/m$
$c_{xx}$	40	$N \cdot s/m$
$c_{xz} = c_{zx}$	0	$N \cdot s/m$

De forma análoga ao que foi desenvolvido no item anterior foram calculadas as frequências de “whirling” para várias velocidades de rotações. Adotando-se a resolução de  $100 \text{ (rad/s)}$  já utilizada obtém-se os resultados apresentados na Tabela 6.8. A solução

analítica deste modelo de Laval com dois graus de liberdade apresenta duas frequências naturais conforme mostrado no Capítulo 3. O modelo simulado foi discretizado com quatro nós, dois deles com apoios fixos. Desta forma este modelo possui 12 graus de liberdade. Portanto, é possível se calcular até a décima segunda frequência natural. Para efeito de comparação só é possível considerar apenas as duas primeiras frequências naturais.

Tabela 6.7 Comparação de frequências naturais para 955 rpm.

Frequência	Valor solução analítica (Hz)	Valor encontrado (Hz)	Erro relativo (%)
$F_1$	45,89	46,6	1,54
$F_2$	52,90	50,8	3,98

Os resultados das simulações permitem obter o gráfico das frequências de “whirling” por velocidades de rotações do eixo, mostrado na Figura 6.4.

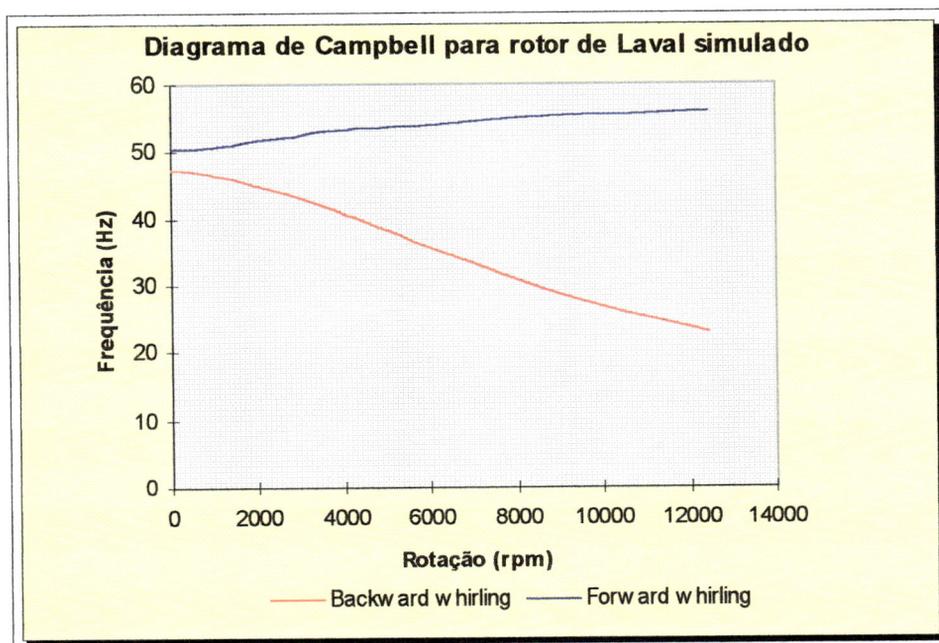


Figura 6.4 Diagrama de Campbell para rotor de Laval

Os erros ocorridos nos valores obtidos na simulação deste rotor para velocidade de rotação igual a 955 rpm com relação à solução analítica estão mostrados na Tabela 6.7

Tabela 6.8 Frequências de *whirling* para rotor de Laval

Rotação (rpm)	Frequências de "whirling" (Hz)	
	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>
0	47,3	50,4
954,9	46,6	50,8
1909	45,1	51,6
28648	43,2	52,3
3819	41,0	53,0
4774	38,6	53,5
6684	33,8	54,4
8594	29,4	55,1
10504	25,7	55,6
12414	22,7	56,0

### 6.3 ROTOR COM EIXO ESCALONADO

Um modelo de rotor escalonado foi utilizado como terceiro exemplo, como mostrado na Figura 6.5.

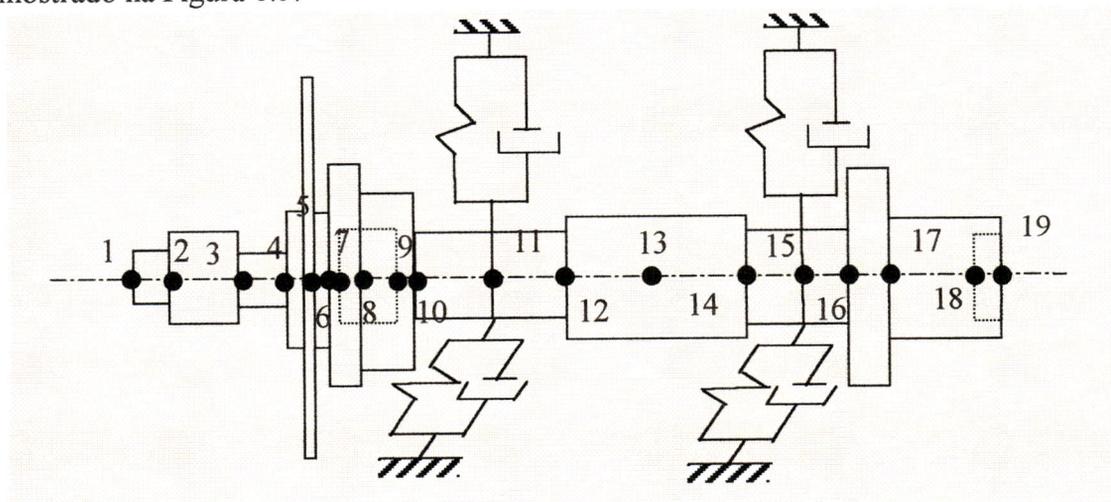


Figura 6.5 Rotor de eixo escalonado (Wang e Kirkhope, 1993)

Este rotor foi escolhido na literatura (Wang e Kirkhope, 1993) por se tratar de um modelo mais complexo, próximos de rotores reais, e cujos resultados podem ser comparados com valores já publicados. As posições dos nós e os dados de entrada são apresentados na Tabela 6.9.

Tabela 6.9 Dados de entrada dos elementos do modelo

Elemento	Nós	L (m)	Di (m)	De (m)	A (m <sup>2</sup> )	I (m <sup>4</sup> )
1	1-2	0,0127	0	0,01016	$8,1073 \cdot 10^{-5}$	$5,23 \cdot 10^{-10}$
2	2-3	0,0381	0	0,02032	$3,249 \cdot 10^{-4}$	$8,36 \cdot 10^{-9}$
3	3-4	0,0254	0	0,01524	$1,8241 \cdot 10^{-4}$	$2,64 \cdot 10^{-9}$
4	4-5	0,0127	0	0,04064	$13 \cdot 10^{-4}$	$1,33 \cdot 10^{-7}$
5	5-6	0,0127	0	0,04064	$13 \cdot 10^{-4}$	$1,33 \cdot 10^{-7}$
6	6-7	0,00508	0	0,06664	$35 \cdot 10^{-4}$	$9,68 \cdot 10^{-7}$
7	7-8	0,00762	0,03048	0,06664	$28 \cdot 10^{-4}$	$9,25 \cdot 10^{-7}$
8	8-9	0,0127	0,03556	0,05080	$100 \cdot 10^{-4}$	$2,48 \cdot 10^{-7}$
9	9-10	0,00762	0	0,05080	$200 \cdot 10^{-4}$	$3,26 \cdot 10^{-7}$
10	10-11	0,03048	0	0,02540	$5,067 \cdot 10^{-4}$	$2,04 \cdot 10^{-8}$
11	11-12	0,0254	0	0,02540	$5,067 \cdot 10^{-4}$	$2,04 \cdot 10^{-8}$
12	12-13	0,0381	0	0,03048	$7,2966 \cdot 10^{-4}$	$4,23 \cdot 10^{-8}$
13	13-14	0,0381	0	0,03048	$7,2966 \cdot 10^{-4}$	$4,23 \cdot 10^{-8}$
14	14-15	0,02032	0	0,02540	$5,0671 \cdot 10^{-4}$	$2,04 \cdot 10^{-8}$
15	15-16	0,01778	0	0,02540	$5,0671 \cdot 10^{-4}$	$2,04 \cdot 10^{-8}$
16	16-17	0,01016	0	0,07620	$46 \cdot 10^{-4}$	$1,65 \cdot 10^{-6}$
17	17-18	0,03048	0	0,04064	$13 \cdot 10^{-4}$	$1,33 \cdot 10^{-7}$

O elemento disco está localizado no nó 5 e seus dados estão apresentados na Tabela 6.10.

Tabela 6.10 Variáveis de entrada do elemento disco

Símbolo	Valor	Unidade
$I_{DX} = I_{DZ}$	0,00136	$kg.m^2$
$I_y$	0,00203	$kg.m^2$
$E$	$2,07.10^{11}$	$N/m^2$
$\rho$	7800	$kg/m^3$
$\nu$	0,3	-

O módulo de elasticidade  $E$ , a massa específica  $\rho$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$  são comuns aos elementos disco e eixo. Os valores dos amortecimentos e das rigidezes dos mancais localizados nos nós 11 e 15 estão apresentados na Tabela 6.11. Estes mancais são considerados iguais e com rigidezes iguais nas duas direções

Tabela 6.11 Valores de amortecimento e de rigidez dos mancais

Símbolo	Valor	Unidade
$k_{xx} = k_{zz}$	$4,34.10^7$	$N/m$
$k_{xz} = k_{zx}$	0	$N/m$
$c_{xx} = c_{zz}$	0	$N.s/m$
$c_{zx} = c_{xz}$	0	$N.s/m$

Com estes dados de entrada foram feitas as simulações deste rotor para uma velocidade de rotação igual a 30000 rpm. As frequências de “whirling” e o erro relativo em relação aos valores de referência, (Wang e Kirkhope, 1993) estão mostrados na Tabela 6.12.

Tabela 6.12 Frequências de “whirling” para 30000 rpm

<b>Frequência</b>	<b>Valor referência (rpm)</b>	<b>Valor encontrado (rpm)</b>	<b>Erro relativo (%)</b>
$F_1$	14733	14617	0,7
$F_2$	17823	17680	0,8
$F_3$	47275	46206	2,2
$F_4$	49371	49081	0,5
$F_5$	70461	69517	1,9
$F_6$	82710	82068	0,7
$F_7$	120525	117462	2,6
$F_8$	124637	121989	2,1
$F_9$	160069	151242	5,5
$F_{10}$	182730	176188	3,5
$F_{11}$	342323	302693	11,5
$F_{12}$	359544	322646	10,2

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES FINAIS

Analisando os resultados obtidos pelo programa GIROS, aplicado a três tipos de rotores, conclui-se que são satisfatórios. Tal fato pode ser atestado pela verificação dos índices de erros relativos em relação a valores de referência retirados da literatura especializada. Para o modelo de rotor multi-disco, os valores de erros relativos encontrados são praticamente nulos, sendo o maior erro encontrado da ordem de 1% para as frequências maiores, validando o programa proposto. No rotor de Laval modificado a simulação apresentou uma diminuição mais abrupta da primeira frequência, em relação a solução analítica. Isto pode ser constatado através do diagrama de Campbell do rotor de Laval modificado simulado, mostrado na Figura 6.4 e do gráfico da solução analítica mostrado na Figura 3.6. Esta diferença se deve ao fato de que a solução analítica do modelo de Laval modificado considera o eixo flexível de massa desprezível apoiado em mancais rígidos, o que não ocorre com o modelo discretizado apresentado no Capítulo 6. Na simulação apresentada neste capítulo, a massa e seus efeitos são considerados em todos os elementos de eixo. Além disso o programa de computador permite modelar mancais muito rígidos como apoios fixos, ou seja, como vínculos que impedem os deslocamentos mas permitem rotações. Todas essas considerações de modelagem fazem com que se aumente o efeito

giroscópico na frequência em oposição à rotação ou “backward whirling”, como chamado na literatura especializada. Para a segunda frequência ocorre a “forward whirling” ou frequência de rodopio no mesmo sentido da rotação e a diferença observada é menor.

O gráfico da Figura 6.4 mostra que o efeito é mínimo nas frequências baixas e mais acentuado nas altas frequências, aumentando com o incremento da velocidade de rotação.

O programa de computador GIROS também demonstrou-se bastante versátil, possibilitando a simulação de vários tipos de rotores, desde modelos simples até modelos mais completos do tipo multi-disco e com eixo escalonado. A subrotina denominada apoio fixo também permite simular mancais de rigidezes muito altas, como por exemplo os mancais de rolamentos. Outra característica demonstrada pelo programa de computador desenvolvido é o desempenho que exige pouco tempo de processamento, variável importante para qualificação de um programa de computador. Simulação feita em uma computador de 66 MHz com o programa instalado levou apenas dois minutos para resolver um rotor discretizado em dezenove nós, o que envolve matrizes de médio porte. Este fato permite afirmar que em computadores mais potentes é possível simular com rapidez rotores discretizado em centenas de nós.

A boa confiabilidade do algoritmo se deve às funções de biblioteca do Matlab® que demonstraram ser eficientes de maneira a tornar o programa de computador o mais simples possível evitando operações desnecessárias.

Como o programa matemático Matlab® é baseado em uma linguagem estruturada, não pode se fazer desvios do ponteiro na execução do programa. Assim a entrada de dados é sequencial para cada nó. Portanto a entrada de dados se torna um pouco lenta para rotores com muitos nós.

As matrizes giroscópicas somadas às matrizes de amortecimento causam importantes efeitos que não são considerados em programas de computador disponíveis especializados em elementos finitos. Alguns destes programas hoje já consideram o efeito giroscópico no elemento eixo mas não dispõem em suas bibliotecas elementos do tipo disco. O programa de computador GIROS contém este elemento.

Para melhoria deste trabalho e aprofundamento no tema dinâmica de rotação, algumas sugestões podem ser apresentadas. Estas sugestões se referem tanto à melhoria do programa proposto como outros temas. Embora o programa GIROS tenha um bom

desempenho, a entrada de dados pode ser considerada um pouco lenta e por conseguinte pode consumir tempo de analista. Assim, é necessário o desenvolvimento de uma interface gráfica com o usuário, tornando o programa mais amigável e facilitando a correção dos dados de entrada.

Desenvolvimento de modelos matemáticos próprios para os diversos tipos de mancais.

Implementação de rotinas específicas para o caso de determinados tipos de mancais, como por exemplo, os mancais hidrodinâmicos.

Análise teórica e experimentalmente rotores reais em diversas condições de excitação forçada, conforme mostrado no Capítulo 3 para o rotor de Laval.

Desenvolver métodos de medidas das vibrações de rotores através de transdutores sem contato. Em particular, sugere-se o desenvolvimento de um método experimental para medição de vibração de rotores, através do uso de técnicas que use o interferômetro "laser".

## BIBLIOGRAFIA

- ALMEIDA, M. T. (1979). *Efeito da temperatura nas velocidades críticas de eixos*. São Carlos. 350p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CHILDS, D. W. (1993). *Turbomachinery rotordynamics: phenomena, modeling and analysis*. New York, John Wiley & Sons Inc.
- CRAIG, R. R. (1981). *Structural dynamics: an introduction computer methods*. United State of America, John Wiley & Sons, Inc.
- CURTI, G. et al (1993). *Externally damped rotor system by the dynamic stiffness method*. In : Proceeding of International Analysis Conference.
- DEN HARTOG, J. P. (1956). *Mechanical vibration*. New York, McGraw-Hill.
- DIMAROGONAS, A. D. (1976). *Vibration engineering*. New York, West Pub Co.
- DIMENTBERG, F. M. (1961). *Flexural vibrations of rotating shafts*. Butterworth.

- EWINS, D.J.; BUCHER, I. (1997). Multidimensional decomposition of time-varying vibration response signals in rotating machinery. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.11(4), p. 577-601.
- FARIA, M. T. C. DE (1990). *Estudo do comportamento dinâmico de rotores flexíveis assimétricos através do método de elementos finitos*. Florianópolis. 127p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina.
- FERREIRA, J. V. (1989). *Balaceamento de rotores flexíveis*. Campinas. 257p., Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas.
- FLEMING, D. P. (1989). *Balancing of flexible rotors*, shock and vibration technology. P.15-23.
- GÉRADIN, M. et al (1998). Eigenvalue algorithms for stability and critical speed analysis of rotating system. In : PROCEEDING OF INTERNATIONAL ANALYSIS CONFERENCE.
- GRILLO, N. L. (1993). *Velocidades críticas de rotores simétricos e flexíveis pelo método de elementos finitos*. São Carlos. 112p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- GUNTER, E. J. (1966). *Dynamics stability of rotor bearing system*. NASA SP-113.
- INOUYE, M. (1976). *Método de determinação das velocidades críticas em eixos de seção variável*. São Carlos. 100p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- LACERDA, H. B. (1990). *Racionalização do método dos coeficientes de influência aplicado ao balaceamento de rotores flexíveis*. Uberlândia. 107p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia.
- LALANNE, M.; FERRARIS, G. (1990). *Rotordynamics prediction in engineering*. New York, John Wiley & Sons.

- MABIE, H. H. (1980). *Dinâmica das máquinas* : livros técnicos e científicos. Rio de Janeiro.
- MARKET, R. (1988). Modal balancing of flexible rotors with data acquisition from non-stationary run-up or run-down. In : PROCEEDING OF INTERNATIONAL ANALYSIS CONFERENCE.
- MATLAB REFERENCE GUIDE (1992). Massachusetts, Mathworks Inc.
- MEIROVITCH, L. (1986). *Elements of vibration analysis*. Singapore, McGraw hill.
- MUCHERONI, M. F. (1997). *Mecânica Aplicada às Máquinas*. Notas de Aulas SEM 108.
- NELSON, H.D.; MCVAUGH, J.M. (1975). The dynamics of rotor-bearing system using finite elements. In : THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, v.75, p.59.
- PAVANELLO, R. et al (1985). Análise do comportamento dinâmico de um hidrogenador. In : ANAIS DO CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA
- RAO, J. S. (1983). *Rotor dynamics*. New Delhi, John Wiley & Sons Inc.
- RAO, J. S.; SHARAN, A.M. (1993). The calculation of the natural frequencies of multi-disk rotor system using the influence coefficient method including the gyroscopic effect. *Mechanical Machine Theory*, v.29, n. 5, p. 739-748.
- SILVA, A. A. (1998) *Detecção e Análise Dinâmica de Falhas em Rolamentos*. São Carlos. 202p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- STERNLICHT, B.(1963). Stability and dynamics of rotors supported on fluid-film bearings. Trans ASME, *Journal of Engineering for Power*, p. 331-342, Oct.

TONDL, ALES (1965). *Some Problems of Rotor Dynamics*. Praga, House of the Czechoslovak Academy of Scienses

VANCE, J. M. (1988). *Rotordynamics of turbomachinery*. New York, John Wiley & Sons Inc.

WANG, W.; KIRKHOPE, J. (1994). New eigensolutions and modal analysis for gyroscopic/rotor system. Part 1: Undamped system. *Journal Sound of Vibrations*, v. 175, p.-159-70.

WANG, W.; KIRKHOPE, J. (1994). New eigensolutions and modal analysis for gyroscopic/rotor system. Part 2: Perturbation analysis for damped system. *Journal Sound of Vibrations*, v. 175, p.-171-83.

## ANEXO

São mostradas neste anexo as listagens dos programas fontes desenvolvidos para calcular as frequências de “whirling” e dos gráficos utilizados neste trabalho.

**%-----PROGRAMA DE CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS CRÍTICAS EM  
ROTORES UTILIZANDO MATRIZES A E B-----**

**%----- AGUINALDO SOARES DE OLIVEIRA-----**

% ENTRADA DO NÚMERO DE NÓS E FREQUÊNCIA DE ROTAÇÃO  
 NOS=input('ENTRE COM O NÚMERO DE NÓS DO ROTOR');  
 fo=input('ENTRE COM A ROTAÇÃO INICIAL DO EIXO (rad/s)');  
 ff= input('ENTRE COM A ROTAÇÃO FINAL DO EIXO (rad/s)');  
 inc=input('ENTRE COM O INCREMENTO DE ROTAÇÃO DO EIXO (rad/s)');

**%-----SUBROTINA PARA GERAR MATRIZES INTERMEDIARIAS**

M2=zeros(4\*NOS);  
 K2=zeros(4\*NOS);  
 C2=zeros(4\*NOS);  
 MD2=zeros(4\*NOS);  
 CD2=zeros(4\*NOS);  
 KM2=zeros(4\*NOS);  
 CM2=zeros(4\*NOS);

chavedisco=0;

chavemancal=0;

**%-----SUBROTINA GERAÇÃO DAS MATRIZES GLOBAIS EIXO**

for NO=1:NOS-1,

for I=1:8,

for J=1:4\*NOS,

for T=1:NO, % ATUALIZA a

if (I+(4\*T-4))==(J)

a(I,J)=1;

else

a(I,J)=0;

```

end
end
end
end

%-----SUBROTINA PARA GERAR A MATRIZ " M "
NO

%-----ENTRADA DE DADOS
sa=input('ENTRE COM A ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL DO EIXO (m^2);');
L=input('ENTRE COM O COMPRIMENTO DO EIXO (m);');
ro=input('ENTRE COM MASSA ESPECÍFICA DO EIXO (Kg/m^3);');
SL1=(ro*sa*L)/420;
M=SL1*[156 0 0 -22*L 54 0 0 13*L;0 156 22*L 0 0 54 -13*L 0;0 22*L 4*L^2 0 0
13*L -3*L^2 0;-22*L 0 0 4*L^2 -13*L 0 0 -3*L^2;54 0 0 -13*L 156 0 0 22*L;0 54
13*L 0 0 156 -22*L 0;0 -13*L -3*L^2 0 0 -22*L 4*L^2 0;13*L 0 0 -3*L^2 22*L 0 0
4*L^2];

%-----SUBROTINA PARA GERAR A MATRIZ "Ms"
%          ENTRADA DE DADOS
IN=input('ENTRE COM O MOMENTO DE INERCIA DE ÁREA DO
EIXO(m^4)');
ROI=(ro*IN)/(30*L);
Ms=ROI*[36 0 0 -3*L -36 0 0 -3*L;0 36 3*L 0 0 -36 3*L 0;0 3*L 4*L^2 0 0 -3*L -
L^2 0;-3*L 0 0 4*L^2 3*L 0 0 -L^2;-36 0 0 3*L 36 0 0 3*L;0 -36 -3*L 0 0 36 -3*L
0;0 3*L -L^2 0 0 -3*L 4*L^2 0;-3*L 0 0 -L^2 3*L 0 0 4*L^2];

%-----SUBROTINA PARA GERAR A MATRIZ "C"
%          ENTRADA DE DADOS
ROIW=(ro*IN*W)/(15*L);

```

```

C=ROIW*[0 -36 -3*L 0 0 36 -3*L 0,36 0 0 -3*L -36 0 0 -3*L;3*L 0 0 -4*L^2 -3*L
0 0 L^2;0 3*L 4*L^2 0 0 -3*L -L^2 0;0 36 3*L 0 0 -36 3*L 0;-36 0 0 3*L 36 0 0
3*L;3*L 0 0 L^2 -3*L 0 0 -4*L^2;0 3*L -L^2 0 0 -3*L 4*L^2 0];

```

```

%-----SUBROTINA PARA GERAR A MATRIX "K"

```

```

%                               ENTRADA DE DADOS

```

```

Elas=input('ENTRE COM O MÓDULO DE ELASTICIDADE (N/m^2)');

```

```

ni=input('ENTRE COM A CONSTANTE DE POISSON (sem dimensão)');

```

```

fax=input('ENTRE COM A FORÇA AXIAL(N)');

```

```

GC=Elas/(2*(1+ni));

```

```

ani=(12*Elas*IN)/(GC*sa*L^2);

```

```

kc=((Elas*IN)/((1+ani)*L^3))*[12 0 0 -6*L -12 0 0 -6*L;0 12 6*L 0 0 -12 6*L 0;0

```

```

6*L (4+ani)*L^2 0 0 -6*L (2-ani)*L^2 0;-6*L 0 0 (4+ani)*L^2 6*L 0 0 (2-

```

```

ani)*L^2;-12 0 0 6*L 12 0 0 6*L;0 -12 -6*L 0 0 12 -6*L 0;0 6*L (2-ani)*L^2 0 0 -

```

```

6*L (4+ani)*L^2 0;-6*L 0 0 (2-ani)*L^2 6*L 0 0 (4+ani)*L^2];

```

```

kf=(fax/(30*L))*[36 0 0 -3*L -36 0 0 -3*L;0 36 3*L 0 0 -36 3*L 0;0 3*L 4*L^2 0 0

```

```

-3*L -L^2 0;-3*L 0 0 4*L^2 3*L 0 0 -L^2;-36 0 0 3*L 36 0 0 3*L;0 -36 -3*L 0 0 36

```

```

-3*L 0;0 3*L -L^2 0 0 -3*L 4*L^2 0;-3*L 0 0 -L^2 3*L 0 0 4*L^2];

```

```

KE=kc+kf;

```

```

ME=M+Ms;

```

```

M1=a'*ME*a;

```

```

M3=M1+M2;

```

```

M2=M3;

```

```

K1=a'*KE*a;

```

```

K3=K1+K2;

```

```

K2=K3;

```

```

C1=a'*C*a;

```

```

C3=C1+C2;

```

```

C2=C3;

```

```

end                                % END DO FOR DO ELEMENTO EIXO

%                                ESPECIFICAÇÃO DOS ELEMENTOS DO ROTOR

for NO=1:NOS,
    NO
s=input('Entre com o elemento do nó especificado acima (disco,mancal ou eixo)', 's');
    if norm(s)==norm('disco');

%-----SUBROTINA GERAÇÃO DAS MATRIZES GLOBAIS DISCO
    for I=1:4,
        for J=1:4*NOS,
            for T=1:NO,      % ATUALIZA disco
                if (I+(4*T-4))==J
                    disco(I,J)=1;
                else
                    disco(I,J)=0;
                end
            end
        end
    end

%-----SUBROTINA QUE GERA AS MATRIZES DO DISCO
%                                ENTRADA DE DADOS
dint=input('ENTRE COM DIÂMETRO INTERNO DO DISCO (m)');
dext=input('ENTRE COM DIÂMETRO EXTERNO DO DISCO (m)');
espe=input('ENTRE COM A ESPESSURA DO DISCO (m)');
rodisc=input('ENTRE COM A MASSA ESPECÍFICA DO DISCO (Kg/m^3)');
INDISCX=input('ENTRE COM A INERCIA DO DISCO EM X (Kg.m^2)');
INDISCY=input('ENTRE COM A INERCIA DO DISCO EM Y (Kg.m^2)');

```

```

MDISC=(pi*(dext^2-dint^2)/4)*espe*rodisc;
MD=[MDISC 0 0 0;0 MDISC 0 0;0 0 INDISCX 0;0 0 0 INDISCX];
CD=[0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 -W*INDISCY;0 0 W*INDISCY 0];

```

```

MD1=disco'*MD*disco;
MD3=MD1+MD2;
MD2=MD3;

```

```

CD1=disco'*CD*disco;
CD3=CD1+CD2;
CD2=CD3;

```

```

chavedisco=1;
elseif norm(s)==norm('mancal');

```

```

%-----SUBROTINA GERAÇÃO DAS MATRIZES GLOBAIS MANCAL

```

```

for I=1:4,

```

```

    for J=1:4*NOS,

```

```

        for T=1:NO,      % ATUALIZA mancal

```

```

            if (I+(4*T-4))==J

```

```

                mancal(I,J)=1;

```

```

            else

```

```

                mancal(I,J)=0;

```

```

            end

```

```

        end

```

```

    end

```

```

end

```

```

%-----SUBROTINA QUE GERA AS MATRIZES DO MANCAL

```

```

    KXX=input('ENTRE COM KXX DO MANCAL (N/m)');

```

```

    KXZ=input('ENTRE COM KXZ DO MANCAL (N/m)');

```

```

    KZX=input('ENTRE COM KZX DO MANCAL (N/m)');

```

```

KZZ=input('ENTRE COM KZZ DO MANCAL (N/m)');
CXX=input('ENTRE COM CXX DO MANCAL (N.s/m)');
CXZ=input('ENTRE COM CXZ DO MANCAL (N.s/m)');
CZX=input('ENTRE COM CZX DO MANCAL (N.s/m)');
CZZ=input('ENTRE COM CZZ DO MANCAL (N.s/m)');
KM=[KXX KXZ 0 0;KZX KZZ 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0];
CM=[CXX CXZ 0 0;CZX CZZ 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0];

```

```

KM1=mancal'*KM*mancal;
KM3=KM1+KM2;
KM2=KM3;

```

```

CM1=mancal'*CM*mancal;
CM3=CM1+CM2;
CM2=CM3;

```

```

chavemancal=1;

```

```

else norm(s)==norm('eixo');
end
end
if chavedisco==0,
    if chavemancal==0
        for I=1:4*NOS,
            for J=1:4*NOS,
                MD3(I,J)=0;
                CD3(I,J)=0;
                KM3(I,J)=0;
                CM3(I,J)=0;
            end
        end
    end
end
end

```

```

end

if chavedisco==1,
    if chavemancal==0
        for I=1:4*NOS,
            for J=1:4*NOS,
                KM3(I,J)=0;
                CM3(I,J)=0;
            end
        end
    end
end

if chavedisco==0,
    if chavemancal==1,
        for I=1:4*NOS,
            for J=1:4*NOS,
                MD3(I,J)=0;
                CD3(I,J)=0;
            end
        end
    end
end

%-----SUBROTINA MONTAGEM DAS MATRIZES GERAIS ( M, C e K)
MGERAL=M3+MD3;
KGERAL=K3+KM3;

%----- SUBROTINA PARA DIMINUIR A ORDEM DAS MATRIZES "M", "C" e
"K" DEVIDO AOS APOIS FIXOS

sc=0;
sl=0;

```

```

for NO=1:NOS,
NO
s=input('Existe apoio no nó especificado acima (sim ou não)', 's');
if norm(s)~=norm('sim'),
m=((4*NO-2*sl)-3);
% RETIRAR LINHA
MGERAL=[MGERAL(1:m-1,1:4*NOS-
2*sc);MGERAL(m+2:4*NOS-2*sl,1:4*NOS-2*sc)];
KGERAL=[KGERAL(1:m-1,1:4*NOS-
2*sc);KGERAL(m+2:4*NOS-2*sl,1:4*NOS-2*sc)];
C3=[C3(1:m-1,1:4*NOS-2*sc);CGERAL(m+2:4*NOS-
2*sl,1:4*NOS-2*sc)];
CD3=[CD3(1:m-1,1:4*NOS-2*sc);CGERAL(m+2:4*NOS-
2*sl,1:4*NOS-2*sc)];
CM3=[CM3(1:m-1,1:4*NOS-2*sc);CGERAL(m+2:4*NOS-
2*sl,1:4*NOS-2*sc)];
sl=sl+1;
% RETIRAR COLUNA
MGERAL=[MGERAL(1:4*NOS-2*sl,1:m-1)
MGERAL(1:4*NOS-2*sl,m+2:4*NOS-2*sc)];
KGERAL=[KGERAL(1:4*NOS-2*sl,1:m-1)
KGERAL(1:4*NOS-2*sl,m+2:4*NOS-2*sc)];
C3=[C3(1:4*NOS-2*sl,1:m-1) CGERAL(1:4*NOS-
2*sl,m+2:4*NOS-2*sc)];
CD3=[CD3(1:m-1,1:4*NOS-2*sc);CGERAL(m+2:4*NOS-
2*sl,1:4*NOS-2*sc)];
CM3=[CM3(1:m-1,1:4*NOS-2*sc);CGERAL(m+2:4*NOS-
2*sl,1:4*NOS-2*sc)];

sc=sc+1;
end
end

```

```
%-----SUBROTINA PARA GERAR MATRIZES INTERMEDIARIAS
```

```
      ZEROS=zeros((4*NOS)-2*sc);
```

```
E=1
```

```
%%%%%%%%%
```

```
  for rot=fo:inc:ff,
```

```
    CGERAL=(C3+CD3)*rot+CM3;
```

```
%-----SUBROTINA MONTAGEM DAS MATRIZES "A" E "B"
```

```
  AGERAL=[ZEROS MGERAL;MGERAL CGERAL];
```

```
  BGERAL=[MGERAL ZEROS;ZEROS -KGERAL];
```

```
%----- SUBROTINA DE CÁLCULOS DOS AUTOVALORES
```

```
  [VG,DG]=eig(AGERAL,BGERAL);
```

```
%-----SUBROTINA ORDENAÇÃO DOS AUTOVALORES
```

```
  for I=1:(8*NOS)-4*sc,
```

```
    O(I)=abs(1/DG(I,I));
```

```
  End
```

```
%----- SUBROTINA DE ORDENAÇÃO DE VETOR
```

```
  for J=1:(8*NOS)-4*sc,
```

```
    for I=1:(8*NOS-1)-4*sc,
```

```
      if O(I)>O(I+1),
```

```
        AUX=O(I);
```

```
        O(I)=O(I+1);
```

```
        O(I+1)=AUX;
```

```
      end
```

```
    end
```

```
  end
```

```
%
```

```
      SAÍDA DE RESULTADOS
```

```
  for I=1:(8*NOS)-4*sc,
```



```
MATRIX(I,E)=O(I);  
end  
E=E+1  
end  
saida='FREQUÊNCIAS DE WHIRLING NA FORMA DE MATRIX';  
saida  
MATRIX
```

**%-----PROGRAMA DE CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS CRÍTICAS EM  
ROTORES UTILIZANDO MATRIZ D-----**

**%----- AGUINALDO SOARES DE OLIVEIRA -----**

% ENTRADA DO NÚMERO DE NÓS E FREQUÊNCIA DE ROTAÇÃO

NOS=input('ENTRE COM O NÚMERO DE NÓS DO ROTOR');

W=input('ENTRE COM A ROTAÇÃO DO EIXO (rad/s)');

% SUBROTINA PARA GERAR MATRIZES INTERMEDIARIAS

M2=zeros(4\*NOS);

K2=zeros(4\*NOS);

C2=zeros(4\*NOS);

MD2=zeros(4\*NOS);

CD2=zeros(4\*NOS);

KM2=zeros(4\*NOS);

CM2=zeros(4\*NOS);

chavedisco=0;

chavemancal=0;

% SUBROTINA GERAÇÃO DAS MATRIZES GLOBAIS EIXO

for NO=1:NOS-1,

for I=1:8,

for J=1:4\*NOS,

for T=1:NO, % ATUALIZA a

if (I+(4\*T-4))==J

a(I,J)=1;

else

a(I,J)=0;

end

end

end

end

%-----SUBROTINA PARA GERAR A MATRIZ " M "

NO

%

ENTRADA DE DADOS

sa=input('ENTRE COM A ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL DO EIXO (m^2)');

L=input('ENTRE COM O COMPRIMENTO DO EIXO (m)');

ro=input('ENTRE COM MASSA ESPECÍFICA DO EIXO (Kg/m^3)');

SL1=(ro\*sa\*L)/420;

M=SL1\*[156 0 0 -22\*L 54 0 0 13\*L;0 156 22\*L 0 0 54 -13\*L 0;0 22\*L 4\*L^2 0 0

13\*L -3\*L^2 0;-22\*L 0 0 4\*L^2 -13\*L 0 0 -3\*L^2;54 0 0 -13\*L 156 0 0 22\*L;0 54

13\*L 0 0 156 -22\*L 0;0 -13\*L -3\*L^2 0 0 -22\*L 4\*L^2 0;13\*L 0 0 -3\*L^2 22\*L 0 0

4\*L^2];

%-----SUBROTINA PARA GERAR A MATRIZ "Ms"

%

ENTRADA DE DADOS

IN=input('ENTRE COM O MOMENTO DE INERCIA DE ÁREA DO

EIXO(m^4)');

ROI=(ro\*IN)/(30\*L);

Ms=ROI\*[36 0 0 -3\*L -36 0 0 -3\*L;0 36 3\*L 0 0 -36 3\*L 0;0 3\*L 4\*L^2 0 0 -3\*L -

L^2 0;-3\*L 0 0 4\*L^2 3\*L 0 0 -L^2;-36 0 0 3\*L 36 0 0 3\*L;0 -36 -3\*L 0 0 36 -3\*L

0;0 3\*L -L^2 0 0 -3\*L 4\*L^2 0;-3\*L 0 0 -L^2 3\*L 0 0 4\*L^2];

%-----SUBROTINA PARA GERAR A MATRIZ "C"

%

ENTRADA DE DADOS

ROIW=(ro\*IN\*W)/(15\*L);

C=ROIW\*[0 -36 -3\*L 0 0 36 -3\*L 0;36 0 0 -3\*L -36 0 0 -3\*L;3\*L 0 0 -4\*L^2 -3\*L

0 0 L^2;0 3\*L 4\*L^2 0 0 -3\*L -L^2 0;0 36 3\*L 0 0 -36 3\*L 0;-36 0 0 3\*L 36 0 0

3\*L;3\*L 0 0 L^2 -3\*L 0 0 -4\*L^2;0 3\*L -L^2 0 0 -3\*L 4\*L^2 0];

```

%-----SUBROTINA PARA GERAR A MATRIX "K"
%
%          ENTRADA DE DADOS
Elas=input('ENTRE COM O MÓDULO DE ELASTICIDADE (N/m^2)');
ni=input('ENTRE COM A CONSTANTE DE POISSON (sem dimensão)');
fax=input('ENTRE COM A FORÇA AXIAL(N)');
GC=Elas/(2*(1+ni));
ani=(12*Elas*IN)/(GC*sa*L^2);
kc=((Elas*IN)/((1+ani)*L^3))*[12 0 0 -6*L -12 0 0 -6*L;0 12 6*L 0 0 -12 6*L 0;0
6*L (4+ani)*L^2 0 0 -6*L (2-ani)*L^2 0;-6*L 0 0 (4+ani)*L^2 6*L 0 0 (2-
ani)*L^2;-12 0 0 6*L 12 0 0 6*L;0 -12 -6*L 0 0 12 -6*L 0;0 6*L (2-ani)*L^2 0 0 -
6*L (4+ani)*L^2 0;-6*L 0 0 (2-ani)*L^2 6*L 0 0 (4+ani)*L^2];
kf=(fax/(30*L))*[36 0 0 -3*L -36 0 0 -3*L;0 36 3*L 0 0 -36 3*L 0;0 3*L 4*L^2 0 0
-3*L -L^2 0;-3*L 0 0 4*L^2 3*L 0 0 -L^2;-36 0 0 3*L 36 0 0 3*L;0 -36 -3*L 0 0 36
-3*L 0;0 3*L -L^2 0 0 -3*L 4*L^2 0;-3*L 0 0 -L^2 3*L 0 0 4*L^2];
KE=kc+kf;
ME=M+Ms;

M1=a'*ME*a;
M3=M1+M2;
M2=M3;

K1=a'*KE*a;
K3=K1+K2;
K2=K3;

C1=a'*C*a;
C3=C1+C2;
C2=C3;

end          % END DO FOR DO ELEMENTO EIXO
%          ESPECIFICAÇÃO DOS ELEMENTOS DO ROTOR
for NO=1:NOS,

```

```

NO
s=input('Entre com o elemento do nó especificado acima (disco,mancal ou eixo)','s');
if norm(s)==norm('disco');

```

```

%-----SUBROTINA GERAÇÃO DAS MATRIZES GLOBAIS DISCO

```

```

for I=1:4,
    for J=1:4*NOS,
        for T=1:NO,    % ATUALIZA disco
            if (I+(4*T-4))==J
                disco(I,J)=1;
            else
                disco(I,J)=0;
            end
        end
    end
end
end
end

```

```

%-----SUBROTINA QUE GERA AS MATRIZES DO DISCO

```

```

%
%          ENTRADA DE DADOS
dint=input('ENTRE COM DIÂMETRO INTERNO DO DISCO (m)');
dext=input('ENTRE COM DIÂMETRO EXTERNO DO DISCO (m)');
espe=input('ENTRE COM A ESPESSURA DO DISCO (m)');
rodisc=input('ENTRE COM A MASSA ESPECÍFICA DO DISCO (Kg/m^3)');
INDISCX=input('ENTRE COM A INERCIA DO DISCO EM X (Kg.m^2)');
INDISCY=input('ENTRE COM A INERCIA DO DISCO EM Y (Kg.m^2)');
MDISC=(pi*(dext^2-dint^2)/4)*espe*rodisc;
MD=[MDISC 0 0 0;0 MDISC 0 0;0 0 INDISCX 0;0 0 0 INDISCX];
CD=[0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 -W*INDISCY;0 0 W*INDISCY 0];

```

```

MD1=disco*MD*disco;
MD3=MD1+MD2;
MD2=MD3;

```

```

        CD1=disco*CD*disco;
        CD3=CD1+CD2;
        CD2=CD3;

chavedisco=1;

        elseif norm(s)~=norm('mancal');

%-----SUBROTINA GERAÇÃO DAS MATRIZES GLOBAIS MANCAL
        for I=1:4,
            for J=1:4*NOS,
                for T=1:NO,      % ATUALIZA mancal
                    if (I+(4*T-4))==(J)
                        mancal(I,J)=1;
                    else
                        mancal(I,J)=0;
                    end
                end
            end
        end

%-----SUBROTINA QUE GERA AS MATRIZES DO MANCAL
        KXX=input('ENTRE COM KXX DO MANCAL (N/m)');
        KXZ=input('ENTRE COM KXZ DO MANCAL (N/m)');
        KZX=input('ENTRE COM KZX DO MANCAL (N/m)');
        KZZ=input('ENTRE COM KZZ DO MANCAL (N/m)');
        CXX=input('ENTRE COM CXX DO MANCAL (N.s/m)');
        CXZ=input('ENTRE COM CXZ DO MANCAL (N.s/m)');
        CZX=input('ENTRE COM CZX DO MANCAL (N.s/m)');
        CZZ=input('ENTRE COM CZZ DO MANCAL (N.s/m)');
        KM=[KXX KXZ 0 0;KZX KZZ 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0];
        CM=[CXX CXZ 0 0;CZX CZZ 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0];

```

```
KM1=mancal'*KM*mancal;
```

```
KM3=KM1+KM2;
```

```
KM2=KM3;
```

```
CM1=mancal'*CM*mancal;
```

```
CM3=CM1+CM2;
```

```
CM2=CM3;
```

```
chavemancal=1;
```

```
else norm(s)==norm('eixo');
```

```
end
```

```
end
```

```
if chavedisco==0,
```

```
    if chavemancal==0
```

```
        for I=1:4*NOS,
```

```
            for J=1:4*NOS,
```

```
                MD3(I,J)=0;
```

```
                CD3(I,J)=0;
```

```
                KM3(I,J)=0;
```

```
                CM3(I,J)=0;
```

```
            end
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end
```

```
if chavedisco==1,
```

```
    if chavemancal==0
```

```
        for I=1:4*NOS,
```

```
            for J=1:4*NOS,
```

```
                KM3(I,J)=0;
```

```

        CM3(I,J)=0;
    end
end
end
end

if chavedisco==0,
    if chavemancal==1,
        for I=1:4*NOS,
            for J=1:4*NOS,
                MD3(I,J)=0;
                CD3(I,J)=0;
            end
        end
    end
end
end

%-----SUBROTINA MONTAGEM DAS MATRIZES GERAIS (M, C e K)
MGERAL=M3+MD3;
KGERAL=K3+KM3;
CGERAL=C3+CD3+CM3;

%----- SUBROTINA PARA DIMINUIR A ORDEM DAS MATRIZES "M", "C" e
        "K" DEVIDO AOS APOIS FIXOS

sc=0;
sl=0;

    for NO=1:NOS,
        NO
        s=input('Existe apoio no nó especificado acima (sim ou não)','s');
        if norm(s)==norm('sim'),
            m=((4*NO-2*sl)-3);
            % RETIRAR LINHA

```

```

MGERAL=[MGERAL(1:m-1,1:4*NOS-
2*sc);MGERAL(m+2:4*NOS-2*sl,1:4*NOS-2*sc)];
KGERAL=[KGERAL(1:m-1,1:4*NOS-
2*sc);KGERAL(m+2:4*NOS-2*sl,1:4*NOS-2*sc)];
CGERAL=[CGERAL(1:m-1,1:4*NOS-
2*sc);CGERAL(m+2:4*NOS-2*sl,1:4*NOS-2*sc)];
sl=sl+1;
% RETIRAR COLUNA
MGERAL=[MGERAL(1:4*NOS-2*sl,1:m-1)
MGERAL(1:4*NOS-2*sl,m+2:4*NOS-2*sc)];
KGERAL=[KGERAL(1:4*NOS-2*sl,1:m-1)
KGERAL(1:4*NOS-2*sl,m+2:4*NOS-2*sc)];
CGERAL=[CGERAL(1:4*NOS-2*sl,1:m-1)
CGERAL(1:4*NOS-2*sl,m+2:4*NOS-2*sc)];
sc=sc+1;
end
end

%-----SUBROTINA PARA GERAR MATRIZES INTERMEDIARIAS
ZEROS=zeros((4*NOS)-2*sc);
IDEN=ones((4*NOS)-2*sc);

%-----SUBROTINA MONTAGEM DAS MATRIZES
DGERAL=[ZEROS IDEN;(KGERAL^(-1)*MGERAL)
(KGERAL^(-1)*CGERAL)];

%----- SUBROTINA DE CÁLCULOS DOS AUTOVALORES
[VG,DG]=eig(DGERAL);

%-----SUBROTINA ORDENAÇÃO DOS AUTOVALORES
for I=1:(8*NOS)-4*sc,
O(I)=abs(imag(DG(I,I)));
End

```

```
%----- SUBROTINA DE ORDENAÇÃO DE VETOR
```

```
for J=1:(8*NOS)-4*sc,  
    for I=1:(8*NOS-1)-4*sc,  
        if O(I)>O(I+1),  
            AUX=O(I);  
            O(I)=O(I+1);  
            O(I+1)=AUX;  
        end  
    end  
end
```

```
%                SAÍDA DE RESULTADOS  
saida='FREQUÊNCIAS CRÍTICAS EM ORDEM CRESCENTE';  
    saida  
for I=1:(8*NOS)-4*sc,  
    O(I)  
end
```

### Programa para cálculo das curvas de Campbell para 2 DOF

%Definição das variáveis

a=2.871;

m=14.29;

k=1.195\*(10^6);

w1=w1(:);

w2=w2(:);

x=x(:);

f1=f1(:);

f2=f2(:);

omega=omega(:);

w10= sqrt(k/m)/(2\*pi);

w1(1)=w10;

w2(1)=w10;

x(1)=0;

f1(1)=0;

f2(1)=0;

omega=[0:0.15:150];

for l=[2:length(omega)]

w1(l)=sqrt(w10^2+(((a^2)\*omega(l)^2)/(2\*m^2))\*(1-  
sqrt(1+((4\*m^2)\*w10^2)/((a^2)\*omega(l)^2))));

w2(l)=sqrt(w10^2+(((a^2)\*omega(l)^2)/(2\*m^2))\*(1+sqrt(1+((4\*m^2)\*w10^2)/((a^  
2)\*omega(l)^2))));

end

f1=omega;

f2=0.5\*omega;

plot(omega\*60,w1,'r',omega\*60,w2,'b',omega\*60,f1,'c',omega\*60,f2,'m')

whitebg

title('Diagrama de Campbell')

xlabel('rpm')

```
ylabel('F(Hz)')
```

```
%Programa para cálculo das curvas de Campbell para 2 DOF rotores  
assimetricos
```

```
%Definição das variáveis
```

```
a=2.871;
```

```
m=14.29;
```

```
k1=1.195*10^6;
```

```
k2=1.570*10^6;
```

```
w1=w1(:);
```

```
w2=w2(:);
```

```
f1=f1(:);
```

```
f2=f2(:);
```

```
omega=omega(:);
```

```
w10= sqrt(k1/m)/(2*pi);
```

```
w20= sqrt(k2/m)/(2*pi);
```

```
w1(1)=w10;
```

```
w2(1)=w20;
```

```
f1(1)=0;
```

```
f2(1)=0;
```

```
p=w10^2*w20^2;
```

```
omega=[0:0.1:150];
```

```
for l=[2:length(omega)]
```

```
p1(l)=(w10^2/2)+(w20^2/2)+(a^2*omega(l)^2/(2*m^2));
```

```
w1(l)=sqrt(p1(l)-sqrt(p1(l)^2-p));
```

```
w2(l)=sqrt(p1(l)+sqrt(p1(l)^2-p));
```

```
end
```

```
f1=omega;
```

```
f2=0.5*omega;
```

```
plot(omega*60,abs(w1),'r',omega*60,abs(w2),'b',omega*60,f1,'c',omega*60,f2,'m')
```

```
axis([0 10000 0 100])
```

```

whitebg
title('Diagrama de Campbell para rotores assimetricos')
xlabel('rpm')
ylabel('F(Hz)')

```

**%Programa para cálculo das curvas de Campbell para 2 DOF e estudo do efeito da inércia de rotação**

**%Definição das variáveis**

```

R1=input('Entre com o raio interno do disco em (m)');
R2=input('Entre com o raio externo do disco em (m)');
Esp=input('Entre com a espessura do disco em (m)');
RO=input('Entre com a massa específica do disco em (Kg/m^3)');
Re=input('Entre com o raio do eixo (m)');
I=(pi*Re^4)/4;
Md=pi*(R2^2-R1^2)*Esp*RO;
Idy=(Md/2)*(R1^2+R2^2);
a=Idy*(pi/.4)^2*(cos(pi/3))^2+2*7800*I*12.34;
m=14.29;
k=1.195*(10^6);
w1=w1(:);
w2=w2(:);
x=x(:);
f1=f1(:);
f2=f2(:);
omega=omega(:);
w10= sqrt(k/m)/(2*pi);
w1(1)=w10;
w2(1)=w10;
x(1)=0;
f1(1)=0;
f2(1)=0;

```

```

omega=[0:0.15:150];

for l=[2:length(omega)]
w1(l)=sqrt(w10^2+(((a^2)*omega(l)^2)/(2*m^2))*(1-
sqrt(1+((4*m^2)*w10^2)/((a^2)*omega(l)^2))));
w2(l)=sqrt(w10^2+(((a^2)*omega(l)^2)/(2*m^2))*(1+sqrt(1+((4*m^2)*w10^2)/((a^
2)*omega(l)^2))));
end

f1=omega;
f2=0.5*omega;
plot(omega*60,w1,'r',omega*60,w2,'b',omega*60,f1,'c',omega*60,f2,'m')
title('Raio do eixo = 0.1m')
xlabel('rpm')
ylabel('F(Hz)')

```

**%Programa do gráfico frequência de ressonância**

```

%m=16.47;
%a=2.871;
%k=1.195*10^6;
omega=omega(:);
Q=Q(:);
Q(1)=0;
omega=[0:1:9000];
for l=[2:length(omega)]
Q(l)=abs((1.299*10^(-5)*(omega(l)^2))/(1.195*10^6-11.42*(omega(l)^2)));
end
loglog(Q,'r')
whitebg
title('Resposta da massa desbalanceada')
xlabel('rpm')

```

```
ylabel('Amp(m)')
```

```
%Programa do gráfico frequência de ressonância para resp.força assinc./simé
```

```
%m=16.47;
```

```
%a=2.871;
```

```
%k=1.195*10^6;
```

```
omega=omega(:);
```

```
Q=Q(:);
```

```
Q(1)=0;
```

```
omega=[0:1:9000];
```

```
for l=[2:length(omega)]
```

```
Q(l)=abs(1/(1.195*10^6-2.138*(omega(l)^2)));
```

```
end
```

```
loglog(Q,'r')
```

```
whitebg
```

```
title('Resposta da força assíncrona')
```

```
xlabel('rpm')
```

```
ylabel('Amp(m)')
```

```
%Programa do gráfico frequência de ressonância para força harmônica fixa no  
espaço e para uma rotação fixa em (rpm)
```

```
Fo=1;N=4000;
```

```
W=2*pi*N/60;
```

```
omega=omega(:);
```

```
F=[0:0.1:100];
```

```
w=2*pi*F;
```

```
Q1=Fo*(1.195*10^6-14.29*w.^2)/((1.195*10^6-14.29*w.^2).^2-  
8.243*W^2*w.^2);
```

```
Q2=Fo*(-2.871*W*w)/((1.195*10^6-14.29*w.^2).^2-8.243*W^2*w.^2);
```

```
whitebg
```

```

semilogy(F,abs(Q1),'r',F,abs(Q2),'b')
title('Resposta força harmônica fixa no espaço')
xlabel('Hz')
ylabel('Amp(m)')

```

**%Programa do gráfico de ressonância da massa desbalanceada para rotores assimétricos**

```

omega=[0:1:9000];      %Frequência em rpm
w=2*pi*omega/60;      %Frequência em rad/s
Q1=((1.570*10^6-17.17*w.^2).*w.^2*1.299*10^(-5))./(196.1*w.^4-
3.954*10^7*w.^2+1.877*10^12);
Q2=((1.195*10^6-17.17*w.^2).*w.^2*1.299*10^(-5))./(196.1*w.^4-
3.954*10^7*w.^2+1.877*10^12);
whitebg
semilogy(omega,abs(Q1),'r',omega,abs(Q2),'b')
title('Resposta da massa desbalanceada para rotores assimétricos')
xlabel('rpm')
ylabel('Amp(m)')

```

**%Programa do gráfico de ressonância da massa desbalanceada para rotores assimétricos**

```

omega=[0:1:9000];      %Frequência em rpm
w=2*pi*omega/60;      %Frequência em rad/s
Q1=(1.570*10^6-5.009*w.^2)./(10.71*w.^4-9.884*10^6*w.^2+1.877*10^12);
Q2=(1.195*10^6-5.009*w.^2)./(10.71*w.^4-9.884*10^6*w.^2+1.877*10^12);
whitebg
semilogy(omega,abs(Q1),'r',omega,abs(Q2),'b')
title('Ressonância da força assíncrona para rotores assimétricos')
xlabel('rpm')
ylabel('Amp(m)')

```

**%Programa do gráfico de ressonância da massa desbalanceada para rotores assimétricos**

```

omega=[0:1:5000];      %Frequência em rpm
w=2*pi*omega/60;      %Frequência em rad/s
W=(2*pi*4000)/60;     %Frequência de rotação rad/s
F=w/(2*pi);          %Frequência de rotação Hz
Q1=(1.570*10^6-14.29*w.^2)./(204.3*w.^4-(3.954*10^7+8.243*10^(-
2)*W^2)*w.^2+1.877*10^12);
Q2=(-2.871*W*w)./(204.3*w.^4-(3.954*10^7+8.243*10^(-
2)*W^2)*w.^2+1.877*10^12);
whitebg
semilogy(F,abs(Q1),'r',F,abs(Q2),'b')
title('Ressonância da força fixa no espaço para rotores assimétricos')
xlabel('Hz')
ylabel('Amp(m)')

```