

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

IDENTIFICAÇÃO AUTOMATIZADA DE MODELOS DINÂMICOS NO ESPAÇO DE ESTADO

ROBERTO HIDEAKI TSUNAKI



Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

ORIENTADOR: PROF. DR. MARIO FRANCISCO MUCHERONI

São Carlos
Setembro de 1999



Class.	TESE-EESC
Cott.	6502
Tombo	184/99

✓ 31100006983

S/S 1053277

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

T882i Tsunaki, Roberto Hideaki
Identificação automatizada de modelos dinâmicos no
espaço de estado / Roberto Hideaki Tsunaki. -- São
Carlos, 1999.

Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de São
Carlos-Universidade de São Paulo, 1999.
Área: Engenharia Mecânica.
Orientador: Prof. Dr. Mario Francisco Mucheroni.

1. Identificação. 2. Algoritmo ERA. 3. Análise
modal. 4. Espaço de estado. I. Título.

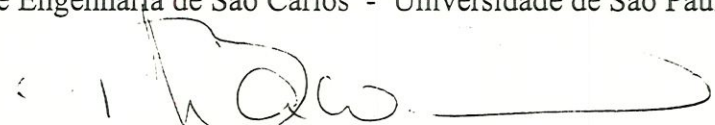
FOLHA DE APROVAÇÃO

Candidato: Engenheiro **ROBERTO HIDEAKI TSUNAKI**


Tese defendida e aprovada em 24.09.1999
pela Comissão Julgadora:



Prof. Doutor **MARIO FRANCISCO MUCHERONI (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Doutor **BENEDITO DI GIACOMO**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Doutor **FLAVIO DONIZETI MARQUES**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



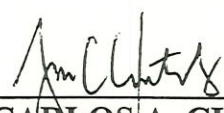
Prof. Titular **LUÍS CARLOS SANDOVAL GÓES**
(ITA - Instituto Tecnológico de Aeronáutica)



Prof. Livre-Docente **JOSÉ MANOEL BALTHAZAR**
(UNESP - Campus de Rio Claro)



Prof. Associado **ARTHUR JOSÉ VIEIRA PORTO**
Coordenador da Área de Engenharia Mecânica



JOSÉ CARLOS A. CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Para meus pais, Noriaki e Sizue.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Mario Francisco Mucheroni, pela orientação, incentivo e dedicação, imprescindíveis para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Benedito Di Giacomo pelo apoio e acolhida com que nos recepcionou no Laboratório de Metrologia.

Aos amigos do Laboratório de Metrologia, Alessandro, Vagner, Cláudio, Flores, Denise, Renata, Rosenda, Luís, Barata, Santoro, Barrão, Alexandre, Luísa, Almeida, Amélia, Rosana, Fabrício e Roxana, pelo incentivo e apoio.

Aos amigos do Laboratório de Simulação, Edilson, Orides, Zé Luiz, Sayuri, Ana Cristina, Ana Paula, Jandira, Lobão, Osvaldo Oshiro, Osvaldo Assato e Politano, pelo incentivo e companheirismo durante a realização deste trabalho.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia Mecânica, pela consideração e atenção com que sempre fui atendido.

Ao Prof. Dr. Glauco A. P. Caurin, da Universidade de Mogi das Cruzes, pelo apoio e acolhida nesta Universidade.

À Universidade de Mogi das Cruzes pela bolsa de estudos concedida na fase final deste trabalho.

À CAPES pela concessão de bolsa de estudos.

RESUMO

Os métodos de identificação de parâmetros modais possuem diversas fontes de erros. Mesmo que minimizados ou compensados os erros referentes aos procedimentos experimentais, restam aqueles erros relacionados aos métodos numéricos utilizados e às limitações intrínsecas dos algoritmos de identificação. Os primeiros trabalhos que descrevem métodos de identificação experimental de parâmetros modais datam da década de 1940. Atualmente pode-se contar com métodos mais poderosos, que proporcionam a identificação dos parâmetros modais com precisão em várias situações. Entretanto, vários aspectos ainda necessitam desenvolvimento para que se possa considerar a Análise Modal Experimental uma tecnologia de grande alcance e fácil aplicabilidade. Este trabalho desenvolve um procedimento para a identificação de modelos dinâmicos no espaço de estado através de técnicas e ferramentas que automatizam o processo de identificação mais que o usual. Os principais aspectos abordados são a determinação da ordem de sistemas, a utilização de equipamentos de baixo custo e o uso de métodos (índices de consistência) para qualificar os resultados do processo de identificação. O método de identificação que serve de base para este estudo é o Algoritmo de Realização de Sistemas - ERA. O procedimento foi validado através de dados obtidos em ensaios dinâmicos realizados numa placa de alumínio engastada em um dos lados.

ABSTRACT

The identification methods of modal parameters may have several sources of errors. When minimized or compensated those related to the experimental procedures, errors related to the used numerical methods and to the proper limitations of the identification algorithms remain. Early works describing methods of experimental identification of modal parameters date to the decade of 1940. Nowadays one can say that there are many powerful methods available that provide accurately the identification of modal parameters in several situations. However, some aspects still need to be developed so that it can be considered an Experimental Modal Analysis - EMA - as a technology of great extent and easy applicability. This work develops a procedure for the dynamical models identification in the state space through techniques and tools that permit the automation of the identification. The main aspects developed are the determination of the systems order, the use of low cost equipment and the application of several methods of confidence indexes to qualify the results of the identification process. The basic identification method used for this study is the Algorithm of Realization of Systems - ERA. The procedure proposed was validated through data obtained from dynamic measurements accomplished in an aluminum plate, clamped in one side and free in the other three.

SUMÁRIO

NOTAÇÃO	iii
LISTA DE ABREVIACÕES	vii
PREFÁCIO	ix
1 - INTRODUÇÃO	1
2 - MODELOS NO ESPAÇO DE ESTADO	10
2.1 - MODELOS NO ESPAÇO DE ESTADO EM TEMPO CONTÍNUO	10
2.2 - MODELOS NO ESPAÇO DE ESTADO EM TEMPO DISCRETO	16
2.3 - PARÂMETROS DE MARKOV E A MATRIZ HANKEL	20
2.4 - EQUAÇÕES DE ESTADO NAS COORDENADAS MODAIS	25
2.5 - OBSERVABILIDADE E CONTROLABILIDADE	27
3 - ALGORITMOS	34
3.1 - O ALGORITMO DE REALIZAÇÃO DE SISTEMAS - ERA	35
3.2 - OBTENÇÃO DE PARÂMETROS DE MARKOV ATRAVÉS DE FRFS.....	44
3.2.1 - ALGORITMO DE BAYARD	46
3.2.2 - ALGORITMO DE CHEN, JUANG E LEE.....	51
3.3 - ÍNDICES DE CONFIANÇA.....	55
3.3.1 - CRITÉRIO DE CORRELAÇÃO MODAL - MAC.....	58
3.3.2 - CRITÉRIO DE CORRELAÇÃO MODAL INVERSA - IMAC	58
3.3.3 - COLINERIDADE DA FASE MODAL PONDERADA - MPCW.....	59
3.3.4 - COERÊNCIA DA AMPLITUDE MODAL ESTENDIDA - EMAC	60
3.3.5 - INDICADOR DE CONSISTÊNCIA MODAL - CMI.....	65

4 - A IDENTIFICAÇÃO AUTOMATIZADA DE MODELOS DINÂMICOS	67
4.1 - O PROBLEMA PROPOSTO.....	68
4.2 - OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS DE MARKOV A PARTIR DE FRFs.....	69
4.3 - AUTOMATIZAÇÃO E CONDENSAÇÃO MODAL	72
5 - PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS E IMPLEMENTAÇÃO DOS ALGORITMOS	76
5.1 - PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS.....	76
5.1.1 - INTRODUÇÃO.....	77
5.1.2 - DESCRIÇÃO DO MODELO EXPERIMENTAL	82
5.1.3 - AQUISIÇÃO DOS DADOS EXPERIMENTAIS.....	85
5.2 - IMPLEMENTAÇÃO DOS ALGORITMOS.....	88
5.2.1 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	88
5.2.2 - OBTENÇÃO DE PARÂMETROS DE MARKOV ATRAVÉS DE FRFs	89
5.2.3 - IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO ERA E DOS ÍNDICES DE CONFIANÇA	90
5.2.4 - IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DE MÚLTIPLAS ESTIMATIVAS.....	90
5.2.5 - IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DE CONDENSAÇÃO MODAL	92
6 - RESULTADOS	99
6.1 - DADOS EXPERIMENTAIS.....	95
6.2 - RESULTADOS DA IDENTIFICAÇÃO	112
7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	135
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	139

NOTAÇÃO

$\{ \}$	Vetor ou Matriz coluna
$[]$	Matriz
$[]^+$	Pseudo-inversa de $[]$
ℓ	Número de linhas espectrais da FRF
m	Número de saídas
n	Graus de liberdade do sistema de segunda ordem
r	Número de entradas
t	Variável temporal
Δt	Intervalo de tempo constante
α	Número de parâmetros de Markov numa coluna de $[H(k)]$
β	Número de parâmetros de Markov numa linha de $[H(k)]$
$\phi_{a,ij}$	i -ésima componente do j -ésimo modo da estimativa a
ξ_n	Fator de amortecimento do modo n
ω_{nd}	Frequência natural amortecida do modo n

$\{f(w, t)\}$	Vetor força nas coordenadas generalizadas (n por l)
$\{x(t)\}$	Vetor de estado no tempo contínuo ($2n$ por l)
$\{x(k + l)\}$	Vetor de estado no tempo discreto ($2n$ por l)
$\{x(k)\}_M$	Vetor das coordenadas modais ($2n$ por l)
$\{u(k)\}$	Vetor de entrada no tempo discreto ($2n$ por l)
$\{u(t)\}$	Vetor de entrada (r por l)
$\{y(t)\}$	Vetor de saída (m por l)
$\{y(k)\}$	Vetor de saída no tempo discreto (m por l)
$\{w(t)\}$	Vetor deslocamento generalizado (n por l)
$\{\dot{w}(t)\}$	Vetor velocidade generalizado (n por l)
$\{\ddot{w}(t)\}$	Vetor aceleração generalizado (n por l)
$\{\phi_{a,j}\}$	j -ésimo modo da estimativa a (m por l)
$[0_{m \times r}]$	Matriz de zeros (m por r)
$[A_c]$	Matriz de estado do modelo no tempo contínuo ($2n$ por $2n$)
$[A_d]$	Matriz de estado do modelo no tempo discreto ($2n$ por $2n$)
$[B_c]$	Matriz de influência de entrada do modelo no tempo contínuo ($2n$ por r)
$[B_d]$	Matriz de influência de entrada do modelo no tempo discreto ($2n$ por r)
$[B_d]_M$	Matriz de influência de entrada nas coordenadas modais ($2n$ por r)

$[B_2]$	Matriz de influência de entrada (n por r)
$[C]$	Matriz de amortecimento (n por n)
$[C_c]$	Matriz de influência de saída no tempo contínuo (m por $2n$)
$[C_d]$	Matriz de influência de saída no tempo discreto (m por $2n$)
$[C_d]_M$	Matriz de influência de saída nas coordenadas modais (m por $2n$)
$[D_c]$	Matriz de transmissão direta no tempo contínuo (m por r)
$[D_d]$	Matriz de transmissão direta no tempo discreto (m por r)
$e^{[A]t}$	Matriz de Transição ($2n$ por $2n$)
$[G_d]$	Matriz de influência de saída para deslocamento (m por n)
$[G_v]$	Matriz de influência de saída para velocidade (m por n)
$[G_a]$	Matriz de influência de saída para aceleração (m por n)
$[H(k)]$	Matriz Hankel no instante $k\Delta t$ (αm por βr)
$[I_i]$	Matriz Identidade de ordem i
$[K]$	Matriz de rigidez (n por n)
$[M]$	Matriz massa (n por n)
$[P_p]$	Matriz de observabilidade
$[Q_p]$	Matriz de controlabilidade
$[R]$	Matriz dos vetores singulares à esquerda de $[H(0)]$ (αm por αm)
$[R_{2n}]$	Matriz com as $2n$ primeiras colunas de $[R]$ (αm por $2n$)
$[S]$	Matriz dos vetores singulares à direita de $[H(0)]$ (βr por βr)
$[S_{2n}]$	Matriz com as $2n$ primeiras colunas de $[S]$ (βr por $2n$)

- $[Y_k]$ Parâmetro de Markov no instante $k\Delta t$ (m por r)
- $[A]$ Matriz diagonal dos autovalores de $[A_d]$ ($2n$ por $2n$)
- $[\Psi]$ Matriz modal ($2n$ por $2n$)
- $[\Sigma]$ Matriz dos valores singulares de $[H(0)]$ (αm por βr)
- $[\Sigma_{2n}]$ Matriz diagonal com os $2n$ primeiros valores singulares de $[\Sigma]$
($2n$ por $2n$)

LISTA DE ABREVIÇÕES

APS	Espectro de Potência Médio (“ A verage P ower S pectrum”)
CMI	Indicador de Consistência Modal (“ C onsistent- M ode I ndicator”)
<i>n</i>DOF	<i>n</i> Graus de Liberdade (“ <i>n</i> D egrees O f F reedom”)
EMA	Análise Modal Experimental (“ E xperimental M odal A nalysis”)
EMAC	Coerência da Amplitude Modal Estendida (“ E xtended M odal A mplitude C oherence”)
ERA	Algoritmo de Realização de Sistemas (“ E igensystem R ealization A lgorithm”)
ERA/DC	Algoritmo de Realização de Sistemas com Correlação de Dados (“ E RA with D ata C orrelation”)
FRF	Função Resposta em Frequência (“ F requency R esponse F unctions”)
IDFT	Transformada Inversa de Fourier Discreta (“ I nverse D iscrete F ourier T ransform”)
IMAC	Critério de Correlação Modal Inversa (“ I nverse M odal A ssurance C riteria”)
MAC	Critério de Correlação Modal (“ M odal A ssurance C riteria”)
MDOF	Múltiplos Graus de Liberdade (“ M ulti D egrees O f F reedom”)

MIF	Função Indicadora de Modo (“ M ode I ndicator F unction”)
MIMO	Múltiplas Entradas – Múltiplas Saídas (“ M ulti I nput – M ulti O utput”)
MPC-W	Colinearidade da Fase Modal Ponderada (“ W eighted M odal P hase C ollinearity”)
OKID	“ O bserver/ K alman Filter I dentification”
OCID	“ O bserver/ C ontroller I dentification”
SDOF	Um Grau de Liberdade (“ S ingle D egree O f F reedom”)
SIMO	Uma Entrada – Múltiplas Saídas (“ S ingle I nput – M ulti O utput”)
SISO	Uma Entrada – Uma Saída (“ S ingle I nput – S ingle O utput”)
SSFD	Algoritmo de Identificação do Espaço de Estado no Domínio da Frequência (“ S tate- S pace F requency D omain”)
SVD	Decomposição em Valores Singulares (“ S ingular V alue D ecomposition”)

PREFÁCIO

A análise modal linear e não linear, teórica e experimental, têm sido objeto de pesquisa no Departamento de Engenharia Mecânica, da Universidade de São Paulo, em São Carlos.

Em anos recentes diversos trabalhos foram realizados. A tese de doutorado de Mucheroni [Mucheroni 1989] desenvolve um método analítico de obtenção dos modos de vibrar de placas parcialmente engastadas; a dissertação de Selegim [Selegim 1990] apresenta um estudo experimental em análise de tensões associados aos modos de vibrar; a dissertação de Varoto [Varoto 1991] aborda a identificação modal de estruturas utilizando um método no domínio da frequência; a tese de Shimano [Shimano 1994] desenvolve técnicas de análise modal teórica e experimental em tibia Humana; a dissertação de Porchia [Porchia 1997] estende o alcance dos métodos utilizados por Varoto; a tese de Taneguti [Taneguti 1997] trata da identificação modal de estruturas no domínio do tempo. No campo não linear a tese de Balthazar [Balthazar 1993] aborda aspectos qualitativos e quantitativos de modos não lineares através do comportamento global de soluções de regime permanente, de mapas de Poincaré e de métodos de perturbação e a dissertação de Tsunaki [Tsunaki 1994] apresenta um método de obtenção de modos normais lineares e não lineares no plano de fase.

A presente tese se insere nesta linha de pesquisa e se beneficia do amadurecimento proporcionado pelos trabalhos realizados anteriormente neste departamento.

Com o objetivo de obter uma melhor organização, esta tese foi dividida em sete capítulos descritos a seguir.

No capítulo 1 é feita a introdução do assunto abordado em conjunto com a pesquisa bibliográfica da linha de pesquisa estudada, onde são destacados aqueles trabalhos mais relevantes para o desenvolvimento desta tese.

Uma revisão da representação de modelos no espaço de estado, em tempo contínuo e tempo discreto, é apresentada no capítulo 2. Trata da teoria fundamental utilizada nos capítulos seguintes.

O capítulo 3 desenvolve o algoritmo de identificação, o método de transformação de dados do domínio da frequência para o domínio do tempo e os índices de confiança utilizados.

A proposta de identificação automatizada de modelos dinâmicos no espaço de estado é apresentada no capítulo 4.

O capítulo 5 contém a descrição dos procedimentos experimentais e computacionais utilizados para implementar a proposta de identificação automatizada. Neste capítulo é descrita a lógica de automatização aplicada.

A apresentação dos resultados obtidos e discussões é realizada no capítulo 6.

O capítulo 7 apresenta as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A competição por mercados vem impondo novos desafios às sociedades. A face mais visível deste processo tem sido o impacto causado no sistema empresarial, com a conseqüente reorganização estrutural observada nos mais diversos países e blocos econômicos. Em grande parte impulsionada pelo acelerado desenvolvimento tecnológico, esta competição tem colocado em evidência a capacitação do sistema de pesquisa nas nações, onde se busca uma maior integração entre universidade e indústria.

Neste cenário, caracterizado pela alta competitividade, as empresas se vêem obrigadas a oferecer produtos com maior qualidade, dentro de um reduzido ciclo de criação e aprimoramento de produtos.

No caso de produtos ligados à engenharia mecânica, uma das características que afetam diretamente a qualidade final destes produtos é o seu comportamento dinâmico. Desta forma, existe uma grande

necessidade por ferramentas que possibilitem o conhecimento do comportamento dinâmico de estruturas mecânicas.

A determinação de características dinâmicas de uma estrutura flexível pode ser realizada através de dois procedimentos. O primeiro, denominado Análise Modal Teórica, procura obter as características dinâmicas da estrutura através de métodos analíticos e numéricos. O segundo procedimento, denominado Identificação de Sistemas, obtém as características dinâmicas da estrutura através de dados experimentais.

O primeiro procedimento exige que inicialmente se formule um modelo matemático (representado por um conjunto de matrizes) da estrutura em estudo usando, por exemplo, alguma técnica de discretização espacial. O método dos elementos finitos é frequentemente utilizado nesta fase. Posteriormente as características dinâmicas são extraídas a partir do modelo obtido.

Como resultado do processo de discretização, obtém-se as características espaciais da estrutura representadas pelas matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento. Estes modelos são posteriormente usados na busca de formulações que possibilitem um desacoplamento do sistema. O problema desacoplado leva às frequências naturais e aos modos normais de vibrar.

Uma das principais dificuldades na formulação do modelo matemático é descrever adequadamente o comportamento dinâmico do sistema com um número limitado de graus de liberdade. Uma das decisões críticas no processo de formulação do modelo matemático é a escolha das hipóteses simplificadoras. A validade dos resultados da análise dinâmica depende das aproximações envolvidas na formulação do modelo

matemático da estrutura. O comportamento dinâmico real do sistema deve estar presente no modelo matemático estabelecido.

O segundo procedimento corresponde a um processo de síntese experimental. Em geral realiza o caminho inverso em relação ao primeiro. Através de dados experimentais são determinados os parâmetros modais da estrutura e a partir destes dados as características espaciais. Este procedimento corresponde, geralmente, a um processo de ajuste de curva ou de curvas aos dados experimentais e posterior extração dos parâmetros modais. Ao processo de identificação e aos demais aspectos relacionados aos procedimentos experimentais costuma-se denominar Análise Modal Experimental ou, resumidamente, pela sua abreviatura em inglês - EMA.

Em um grande número de situações o estudo do comportamento dinâmico de estruturas flexíveis, feito unicamente pelas técnicas de análise modal teórica, sofre fortes restrições. A origem destas restrições não somente envolvem as já mencionadas hipóteses simplificadoras, mas também a falta de conhecimento das condições de contorno físicas do sistema real, ou da interface entre os subsistemas e componentes como mancais, juntas e coxins. Um agravante é o quase total desconhecimento da matriz de amortecimento, que representa a dissipação de energia vibratória pelo sistema, na qual geralmente estão envolvidos diversos mecanismos desconhecidos.

Tendo em vista este conhecimento limitado, a obtenção das propriedades modais a partir de modelos teóricos pode acarretar imprecisões. Nestes casos, é quase sempre obrigatória a obtenção dos parâmetros modais através de ensaios experimentais, seja para

comparação ou correção de modelo obtido por análise modal teórica, ou ainda nos casos em que a obtenção de modelo analítico é impraticável.

Os métodos de identificação experimental de parâmetros modais também possuem diversas fontes de erros. Mesmo que eliminados ou minimizados aqueles referentes aos procedimentos experimentais, restam os relacionados aos métodos numéricos utilizados e as limitações intrínsecas aos algoritmos de identificação.

Apesar dos primeiros trabalhos em métodos de identificação experimental de parâmetros modais serem da década de 1940, somente em anos recentes pôde-se contar com métodos mais poderosos, que proporcionam a identificação dos parâmetros modais com precisão em várias situações (modos acoplados, modos fortemente localizados, sistemas MIMO). Em muitos casos, esta evolução foi propiciada principalmente pelo desenvolvimento e difusão de equipamentos apropriados, em geral de custo financeiro ainda elevado.

Atualmente tem-se a impressão que as questões fundamentais ligadas à identificação modal experimental foram superadas. Entretanto, vários aspectos ainda necessitam desenvolvimento para que se possa considerar a EMA uma tecnologia de grande alcance e fácil aplicabilidade. Apesar da existência de inúmeros programas comerciais de identificação à disposição, há ainda a necessidade de interação e intervenção de um especialista, com a experiência de alguns anos de formação na área, tanto para a análise dos resultados da identificação como para o planejamento e a realização dos procedimentos experimentais.

A utilização das técnicas de EMA ocorre principalmente nas áreas de pesquisa e desenvolvimento, em indústrias com produtos de alto

valor agregado, como nas indústrias aeroespaciais, automotivas e de máquinas de precisão. Por outro lado, principalmente nos últimos anos, a EMA tem se disseminado para outras áreas (eletrodomésticos, eletroeletrônicos, etc.), tendo em vista que agrega conteúdo tecnológico e pode representar um fator de diferenciação competitiva entre produtos. Além disso, o campo de aplicação tende a aumentar com a combinação de técnicas de outras áreas como acústica e controle ativo de ruído e vibração.

A combinação de equipamentos de alto custo e a necessidade de recursos humanos altamente especializados têm sido um empecilho à aplicação mais ampla das técnicas de EMA, principalmente em países em desenvolvimento como o Brasil. Desta forma, parte da pesquisa na área deve ser direcionada para superar estas dificuldades locais, possibilitando uma maior utilização da EMA pelo parque industrial nacional.

Neste contexto, este trabalho desenvolve procedimentos através de técnicas e ferramentas que tornem possível a aplicação de métodos de EMA dentro das condições locais. Os principais aspectos abordados são a aquisição de dados experimentais através de equipamentos de baixo custo financeiro e a automatização do processo de identificação. O método de identificação que serve de base para este estudo é o Algoritmo de Realização de Sistemas - ERA.

O ERA é um método de identificação considerado eficiente e poderoso, pois é capaz de identificar estruturas que apresentem comportamento dinâmico complexo. Ele foi desenvolvido por Juang e Pappa [Juang 1985; Pappa 1985] combinando o algoritmo de realização de sistemas de Ho-Kalman com a decomposição em valores

singulares - SVD, para obter uma realização mínima do sistema. Embora os métodos de realização mínima já fossem conhecidos, Juang e Pappa foram pioneiros na sua aplicação ao problema de identificação de parâmetros modais de estruturas flexíveis.

A utilização da SVD pelo ERA possibilita a determinação da ordem do sistema através da análise dos valores singulares. Além disso, a estrutura matemática do ERA facilita a aplicação direta de índices de confiança para a separação entre modos computacionais e modos físicos. Um estudo relacionando a presença de ruído com os valores singulares e os índices de confiança foi realizado Juang e Pappa [Juang 1986].

Com o propósito de minimizar a influência do ruído nos resultados da identificação, Juang, Cooper e Wright [Juang 1988b] desenvolveram um método baseado no ERA, denominado Algoritmo de Realização de Sistemas com Correlação de Dados - ERA/DC. Neste método, é utilizada uma matriz Hankel modificada, onde seus elementos são matrizes obtidas através da autocorrelação e correlação cruzada dos parâmetros de Markov. Uma desvantagem deste método é a dificuldade na determinação dos valores da defasagem temporal para a realização das correlações, de forma a otimizar a identificação.

Uma das dificuldades para a utilização de métodos de identificação baseados na realização de sistemas, como o ERA, é a obtenção experimental dos parâmetros de Markov diretamente. Existem duas abordagens para a obtenção dos parâmetros de Markov: através do processamento de dados experimentais obtidos no domínio do tempo e de dados obtidos no domínio da frequência.

No domínio do tempo, os desenvolvimentos mais recentes são devidos a Juang et al [Juang 1993], que propõem um método, denominado "Observer/Kalman Filter Identification" - OKID. Este método necessita da aquisição simultânea de dados de entrada e saída no domínio do tempo. Os parâmetros de Markov são obtidos a partir de um filtro de Kalman aplicados aos dados experimentais. Posteriormente, os parâmetros de Markov são utilizados para a identificação através do ERA ou do ERA/DC.

Uma variante do OKID, utilizado na identificação de sistemas em malha fechada, foi realizada por Juang e Phan [Juang 1993], denominada de "Observer/Controller Identification" - OCID. Este método torna possível a identificação de sistemas inerentemente instáveis, onde os dados experimentais somente podem ser adquiridos com a ação de uma malha de controle. Do mesmo modo que o algoritmo OKID, o OCID necessita da aquisição simultânea de dados de entrada e saída no domínio do tempo. Desta forma estes métodos necessitam de equipamentos sofisticados de aquisição e processamento de sinais, além de um grande número de sensores.

No domínio da frequência, a forma mais utilizada de dados experimentais é a Função de Resposta em Frequência - FRF. O modo mais direto de obtenção de parâmetros de Markov a partir de FRFs é através da aplicação da Transformada Inversa de Fourier Discreta - IDFT, transformando as FRFs do sistema em resposta ao pulso. Uma desvantagem deste método é que a sequência de parâmetros de Markov obtida é distorcida por efeitos de "aliasing".

Recentemente, Bayard [Bayard 1992] desenvolveu um método que estima os parâmetros de Markov de FRFs sem distorções. O inconveniente deste método é a necessidade de se resolver um problema de ajuste de curvas por otimização não-linear ou por um algoritmo iterativo linear aproximado, portanto, sujeito a de problemas de convergência. Posteriormente, Chen, Juang e Lee [Chen 1994], modificaram o algoritmo de Bayard de tal forma que o problema de ajuste é reformulado como um problema linear que pode ser resolvido por um método de mínimos quadrados em um só passo, não necessitando de inúmeras iterações.

Devido à dificuldade na análise dos resultados da identificação, alguns algoritmos visando a automatização do processo de identificação têm sido propostos. Algumas destas propostas, baseadas no ERA, fazem uso intensivo de índices de confiança e proporcionam a identificação autônoma de estruturas.

Um dos primeiros algoritmos de automatização, baseados no ERA, foi proposto por Pappa, Woodard e Juang [Pappa 1997a]. Neste trabalho, os autores utilizam dois índices, CMI e MAC, para realizar a condensação modal dos resultados obtidos de múltiplas estimativas (conjunto dos resultados de uma identificação). As estimativas foram realizadas em cinco grupos de dados experimentais, sendo que quatro destes grupos são constituídos de dados distintos e o quinto grupo reúne estes quatro grupos em um único conjunto. Para cada grupo foram realizadas seis estimativas, totalizando trinta estimativas. A primeira estimativa em cada grupo de dados identificou os parâmetros modais sobre os dados originais. As outras cinco estimativas foram realizadas

utilizando dados filtrados em cinco bandas de frequência sobrepostas, cobrindo toda a faixa de frequência. O objetivo básico do trabalho de Pappa, Woodard e Juang foi obter um método de identificação autônomo para ser utilizado como uma técnica de detecção de danos estruturais através do monitoramento contínuo ou periódico da estrutura, principalmente de espaçonaves.

Variando dois parâmetros internos do ERA, a dimensão da matriz Hankel e o número de modos assumidos, pode ser obtido um grande número de estimativas sobre um único conjunto de dados experimentais. Baseados nestes parâmetros, Pappa, James III e Zimmerman [Pappa 1997b], desenvolvem o seu algoritmo de automatização do processo de identificação. A condensação modal (redução do número de parâmetros modais identificados) é realizada através da aplicação do algoritmo de condensação de Pappa, Woodard e Juang [Pappa 1997a].

O objetivo deste trabalho é o estudo e desenvolvimento de técnicas que tornem possível a aplicação dos métodos mais complexos (MIMO) e poderosos de Análise Modal Experimental dentro de recursos limitados, tanto em equipamentos como em recursos humanos. Este objetivo pode ser alcançado com o desenvolvimento de três tópicos:

- Adequar a aquisição de dados experimentais, para a utilização no ERA, com a utilização de equipamento de baixo custo.
- Automatização do processo de identificação.
- Desenvolvimento de métodos que possibilitem a identificação de sistemas mecânicos que apresentem comportamento dinâmico complexo, numa faixa larga de frequência.

CAPÍTULO 2

MODELOS NO ESPAÇO DE ESTADO

Na descrição dos métodos utilizados para o desenvolvimento deste trabalho, é necessário o conhecimento de conceitos envolvidos na representação matemática de sistemas dinâmicos. Neste capítulo são desenvolvidos e discutidos conceitos relativos à representação de modelos dinâmicos no espaço de estado em tempo contínuo e em tempo discreto.

2.1 - MODELOS NO ESPAÇO DE ESTADO EM TEMPO CONTÍNUO

As equações de movimento de um sistema dinâmico, linear, invariante no tempo, de dimensão finita, com n graus de liberdade - n Dof, podem ser representadas através de um sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$[M]\{\ddot{w}(t)\} + [C]\{\dot{w}(t)\} + [K]\{w(t)\} = \{f(w,t)\} \quad (2.1)$$

onde $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez, respectivamente, todas de dimensão n por n ; $\{\ddot{w}(t)\}$, $\{\dot{w}(t)\}$ e $\{w(t)\}$ são os vetores aceleração, velocidade e deslocamento generalizado, respectivamente, todos de dimensão n por 1 ; e $\{f(w,t)\}$ é o vetor força nas coordenadas generalizadas, n por 1 . Deve-se observar que $\{f(w,t)\}$, também pode ser expresso por

$$\{f(w,t)\} = [B_2]\{u(t)\} \quad (2.2)$$

onde $[B_2]$ é a matriz de influência de entrada, de dimensão n por r , $\{u(t)\}$ é o vetor de entrada, de dimensão r por 1 , onde r é número de entradas (excitações externas). A matriz de influência de entrada, $[B_2]$, caracteriza a localização e os tipos de entrada. Substituindo a expressão (2.2) no sistema (2.1), obtém-se

$$[M]\{\ddot{w}(t)\} + [C]\{\dot{w}(t)\} + [K]\{w(t)\} = [B_2]\{u(t)\} \quad (2.3)$$

Multiplicando a equação (2.3) por $[M]^{-1}$ e juntando a identidade $\{\dot{w}(t)\} = \{\dot{w}(t)\}$ às equações de movimento (2.3), também denominadas de equações de configuração, este conjunto de equações pode ser reescrito como um sistema de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem:

$$\{\dot{x}(t)\} = [A_c]\{x(t)\} + [B_c]\{u(t)\} \quad (2.4)$$

onde

$$[A_c] = \begin{bmatrix} [0_{n \times n}] & [I_n] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \text{ é a matriz de estado (} 2n \text{ por } 2n \text{);}$$

$$[B_c] = \begin{bmatrix} [0_{n \times r}] \\ [M]^{-1}[B_2] \end{bmatrix} \text{ é a matriz de influência de entrada (} 2n \text{ por } r \text{);}$$

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} \{w(t)\} \\ \{\dot{w}(t)\} \end{Bmatrix} \text{ é o vetor de estado (} 2n \text{ por } 1 \text{);}$$

$[0_{n \times r}]$ é a matriz de zeros (n por r);

$[I_n]$ é a matriz Identidade de ordem n .

O sistema (2.4) corresponde às denominadas equações de estado e conserva a mesma informação dinâmica que a equação (2.3). O sub-índice c indica que as matrizes $[A_c]$ e $[B_c]$ pertencem à representação do sistema no tempo contínuo. O número de equações do sistema (2.4) é sempre par, $2n$, pois foi derivado de n equações de movimento de 2ª ordem (2.1). No caso geral, não existem restrições quanto ao número de equações de estado.

Na identificação experimental de parâmetros modais manipulam-se medidas (respostas) relacionadas ao vetor de estado ou à sua derivada. Assim, conforme o tipo de sensor (acelerômetro, extensômetro, vibrômetro a laser, etc.), pode-se medir, diretamente ou não, deslocamento, velocidade ou aceleração.

Um sistema de equações que expresse as m medidas de saída pode ser desenvolvido na seguinte forma

$$\{y(t)\} = [G_d]\{w(t)\} + [G_v]\{\dot{w}(t)\} + [G_a]\{\ddot{w}(t)\} \quad (2.5)$$

onde $\{y(t)\}$ é o vetor de saída do sistema, medido através de sensores, de dimensão m por 1 ; $[G_d]$, $[G_v]$ e $[G_a]$ são as matrizes de influência de saída para, respectivamente, deslocamento, velocidade e aceleração, todas de dimensão m por n .

As matrizes de influência de saída contém informações da localização dos pontos de medida em relação às variáveis nas coordenadas generalizadas. Mas podem também conter fatores de conversão entre as unidades físicas das medidas de saída e as unidades das variáveis de estado [Juang 1994]. Na maioria dos casos, o número de variáveis de saída m e a dimensão do vetor de estado $2n$ não são os mesmos ($m \neq 2n$).

Isolando o vetor aceleração na equação (2.3), substituindo-a na expressão (2.5) e reagrupando obtém-se

$$\begin{aligned} \{y(t)\} = & \left([G_d] - [G_a][M]^{-1}[K] \right) \{w(t)\} + \\ & + \left([G_v] - [G_a][M]^{-1}[C] \right) \{\dot{w}(t)\} + [G_a][M]^{-1}[B_2] \{u(t)\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Definindo

$$[C_c] = \begin{bmatrix} [G_d] - [G_a][M]^{-1}[K] & [G_v] - [G_a][M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \quad (2.7a)$$

e

$$[D_c] = [G_a][M]^{-1}[B_2] \quad (2.7b)$$

a equação (2.6) pode ser reescrita como

$$\{y(t)\} = [C_c]\{x(t)\} + [D_c]\{u(t)\} \quad (2.8)$$

onde $[C_c]$ é a matriz de influência de saída no espaço de estado, de dimensão m por $2n$; $[D_c]$ é a matriz de transmissão direta, m por r . A matriz $[D_c]$ é diferente de zero quando se realizam medidas de aceleração.

As equações (2.4) e (2.8) constituem o modelo no espaço de estado em tempo contínuo, que caracteriza totalmente a dinâmica do sistema e sua relação com as diversas medidas de saída que podem ser realizadas.

Uma solução completa de (2.4) pode ser obtida em duas etapas. Considera-se inicialmente a equação homogênea associada

$$\{\dot{x}(t)\} = [A_c]\{x(t)\} \quad (2.9)$$

Dada a condição inicial $\{x(t_0)\}$ no tempo $t = t_0$, pode-se facilmente obter a solução de (2.9) através de

$$\{x(t)\}_h = e^{[A_c](t-t_0)} \{x(t_0)\} \quad (2.10)$$

onde foi utilizada uma extensão do conceito da função exponencial escalar. A matriz $e^{[A_c](t-t_0)}$ é denominada matriz de transição de dimensão $2n$, que corresponde a uma série que converge uniformemente [Furuta 1988], dada por

$$e^{[A_c](t-t_0)} = [I_{2n}] + [A_c](t-t_0) + \frac{1}{2!}[A_c]^2(t-t_0)^2 + \dots \quad (2.11)$$

Na segunda etapa procura-se a solução particular de (2.4). Segundo Meirovitch [Meirovitch 1990], esta solução é dada por

$$\{x(t)\}_p = e^{[A_c](t-t_0)} \{\alpha(t)\} \quad (2.12)$$

onde $\{\alpha(t)\}$ é um vetor $2n$ por 1 . Derivando no tempo a expressão (2.12), obtém-se

$$\{\dot{x}(t)\}_p = [A_c]e^{[A_c](t-t_0)} \{\alpha(t)\} + e^{[A_c](t-t_0)} \{\dot{\alpha}(t)\} \quad (2.13)$$

Substituindo a solução particular (2.12) e a sua derivada (2.13) no sistema (2.4), resulta

$$e^{[A_c](t-t_0)} \{\dot{\alpha}(t)\} = [B_c]\{u(t)\} \quad (2.14)$$

Isolando $\{\dot{\alpha}(t)\}$ na equação (2.14) e integrando de t_0 a t , obtém-se

$$\{\alpha(t)\} = \int_{t_0}^t e^{[A_c](t_0-\tau)} [B_c] \{u(\tau)\} d\tau \quad (2.15)$$

Substituindo (2.15) em (2.12), resulta

$$\{x(t)\}_p = \int_{t_0}^t e^{[A_c](t-\tau)} [B_c] \{u(\tau)\} d\tau \quad (2.16)$$

Finalmente, a solução completa da equação de estado é a soma da solução homogênea (2.10) com a particular (2.16), válida para $t > t_0$,

$$\{x(t)\} = e^{[A_c](t-t_0)} \{x(t_0)\} + \int_{t_0}^t e^{[A_c](t-\tau)} [B_c] \{u(\tau)\} d\tau \quad (2.17)$$

2.2 - MODELOS NO ESPAÇO DE ESTADO EM TEMPO DISCRETO

Atualmente, na maioria dos procedimentos experimentais, são realizadas medidas que são representadas por sinais discretos no domínio temporal. Desta forma, é necessária uma representação do modelo em estudo no espaço de estado em tempo discreto. A hipótese fundamental para que se possa transformar a solução (2.17), da equação de estado em tempo contínuo, numa representação em tempo discreto é que o sistema tenha entradas discretizadas no tempo.

Sejam intervalos de tempo igualmente espaçados de Δt , de forma que a variável tempo t assuma os valores

$$t = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, k\Delta t, (k+1)\Delta t, \dots \quad (2.18)$$

Pode-se obter o vetor de estado $\{x(t)\}$, num dado tempo $t = (k+1)\Delta t$, em relação ao estado no tempo imediatamente anterior, $t_0 = k\Delta t$, através da equação (2.17)

$$\{x((k+1)\Delta t)\} = e^{[A_c]\Delta t} \{x(k\Delta t)\} + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{[A_c]((k+1)\Delta t - \tau)} [B_c] \{u(\tau)\} d\tau \quad (2.19)$$

Assume-se que o vetor de entrada $\{u(\tau)\}$ é constante entre intervalos de tempo. Este vetor deve satisfazer a relação [Juang 1987]

$$\{u(\tau)\} = \{u(k\Delta t)\} \quad \text{para} \quad k\Delta t \leq \tau < (k+1)\Delta t ; k=0,1,2,3, \dots \quad (2.20)$$

Substituindo $\{u(\tau)\}$, dado por (2.20), na equação (2.19), obtém-se

$$\{x((k+1)\Delta t)\} = e^{[A_c]\Delta t} \{x(k\Delta t)\} + \left[\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{[A_c]((k+1)\Delta t - \tau)} [B_c] d\tau \right] \{u(k\Delta t)\} \quad (2.21)$$

Pode-se simplificar a expressão (2.21) mudando-se a variável de integração para $\hat{\tau} = (k+1)\Delta t - \tau$ e os respectivos limites de integração

$$\{x((k+1)\Delta t)\} = e^{[A_c] \Delta t} \{x(k\Delta t)\} + \left[\int_0^{\Delta t} e^{[A_c] \hat{\tau}} [B_c] d\hat{\tau} \right] \{u(k\Delta t)\} \quad (2.22)$$

Definindo

$$[A_d] = e^{[A_c] \Delta t} \quad (2.23a)$$

e

$$[B_d] = \int_0^{\Delta t} e^{[A_c] \hat{\tau}} [B_c] d\hat{\tau} \quad (2.23b)$$

e utilizando-se a notação

$$\{x(k+1)\} = \{x(k+1)\Delta t\} \quad (2.24)$$

$$\{u(k)\} = \{u(k\Delta t)\}$$

a equação (2.22) pode ser escrita como

$$\{x(k+1)\} = [A_d] \{x(k)\} + [B_d] \{u(k)\} \quad (2.25)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

onde o sub-índice d nas matrizes $[A_d]$ e $[B_d]$ indica que estas matrizes pertencem à representação do sistema em tempo discreto.

A matriz de estado da representação em tempo discreto $[A_d]$, equação (2.23a), corresponde a uma série convergente, ver (2.11), dada por

$$[A_d] = e^{[A_c]\Delta t} = [I_{2n}] + [A_c]\Delta t + \frac{1}{2!}[A_c]^2\Delta t^2 + \dots \quad (2.26)$$

Pode-se também inverter a relação (2.23a)

$$[A_c] = \frac{1}{\Delta t} \ln([A_d]) \quad (2.27a)$$

onde foi utilizada uma extensão para o caso matricial, do conceito da função logaritmo natural escalar. Duas propriedades importantes relacionam as matrizes $[A_c]$ e $[A_d]$; os autovetores destas matrizes somente se diferenciam por um fator de escala e os autovalores se relacionam pela expressão

$$\text{autovalor}([A_c]) = \frac{1}{\Delta t} \text{autovalor}(\ln([A_d])) \quad (2.27b)$$

A expressão para a matriz de influência de entrada do modelo em tempo discreto, (2.23b), pode ser simplificada. Inicialmente calcula-se a integral desta equação, resultando

$$[B_d] = [e^{[A_c]\Delta t} - [I_{2n}]] [A_c]^{-1} [B_c] \quad (2.28)$$

Substituindo a equação (2.26) na (2.28), obtém-se

$$[B_d] = [[A_d] - [I_{2n}]] [A_c]^{-1} [B_c] \quad (2.29)$$

A inversibilidade da matriz de estado em tempo contínuo $[A_c]$ garante a validade das equações (2.28) ou (2.29). Este fato implica na condição que nenhum de seus autovalores deva ser igual a zero, ou em outras palavras, não deve haver modos de corpo rígido no sistema. Um autovalor igual a zero na matriz de estado em tempo contínuo $[A_c]$ corresponde a um autovalor igual à unidade na matriz de estado em tempo discreto $[A_d]$, como pode ser verificado pela equação (2.27b).

A equação de saída (2.8) também pode ser expressa em tempo discreto observando-se que $[C_d] = [C_c]$ e $[D_d] = [D_c]$. Assim

$$\{y(k)\} = [C_d]\{x(k)\} + [D_d]\{u(k)\} \quad (2.30)$$

As equações (2.25) e (2.30) formam a representação das equações de estado em tempo discreto.

2.3 - PARÂMETROS DE MARKOV E A MATRIZ HANKEL

Uma das vantagens da descrição do sistema em equações de estado em tempo discreto (2.25) e (2.30) é a facilidade de se obter os

vetores de estado e de saída para uma entrada específica, como será visto a seguir.

Seja o vetor de entrada representado pela sequência

$$\{u(0)\}, \{u(1)\}, \{u(2)\}, \dots, \{u(k)\} \quad (2.31)$$

Para a condição inicial $\{x(t=0)\} = \{x(0)\}$, os vetores de estado e de saída, equações (2.25) e (2.30), podem ser obtidos iterativamente para o vetor de entrada (2.31):

$$\begin{aligned} \{x(0)\} &= \{x(0)\}, \\ \{y(0)\} &= [C_d]\{x(0)\} + [D_d]\{u(0)\}, \\ \{x(1)\} &= [A_d]\{x(0)\} + [B_d]\{u(0)\}, \\ \{y(1)\} &= [C_d][A_d]\{x(0)\} + [C_d][B_d]\{u(0)\} + [D_d]\{u(1)\}, \\ \{x(2)\} &= [A_d]^2\{x(0)\} + [A_d][B_d]\{u(0)\} + [B_d]\{u(1)\}, \\ \{y(2)\} &= [C_d][A_d]^2\{x(0)\} + [C_d][A_d][B_d]\{u(0)\} + [C_d][B_d]\{u(1)\} + [D_d]\{u(2)\}, \\ \{x(3)\} &= [A_d]^3\{x(0)\} + [A_d]^2[B_d]\{u(0)\} + [A_d][B_d]\{u(1)\} + [B_d]\{u(2)\}, \\ \{y(3)\} &= [C_d][A_d]^3\{x(0)\} + [C_d][A_d]^2[B_d]\{u(0)\} + [C_d][A_d][B_d]\{u(1)\} + [C_d][B_d]\{u(2)\} + [D_d]\{u(3)\}, \\ &\vdots \\ \{x(k)\} &= [A_d]^k\{x(0)\} + \sum_{i=1}^k [A_d]^{i-1}[B_d]\{u(k-i)\}, \\ \{y(k)\} &= [C_d][A_d]^k\{x(0)\} + \sum_{i=1}^k [C_d][A_d]^{i-1}[B_d]\{u(k-i)\} + [D_d]\{u(k)\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Os dois últimos termos da sequência (2.32) descrevem o vetor de estado e de saída em qualquer instante de tempo $k\Delta t$ em função da sequência (2.31), que representa um vetor de entrada genérico.

Em grande parte dos casos, os métodos de identificação modal no domínio do tempo necessitam que o vetor de saída seja a resposta à entrada do tipo impulso ou pulso dependendo da análise que se faz. A resposta à entrada pulso pode ser obtida considerando-se inicialmente que somente uma das variáveis de entrada será ativada, por exemplo u_1 . Desta forma, o vetor de entrada (2.31) com entrada pulso na variável u_1 pode ser escrito como

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \dots, \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Para condições iniciais iguais a zero $\{x(0)\} = \{0\}$, a substituição de (2.33) no vetor de saída em (2.32), resulta

$$\begin{aligned} \{y(0)\} &= [D_d] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \{y(1)\} = [C_d][B_d] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \{y(2)\} = [C_d][A_d][B_d] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \\ \{y(3)\} &= [C_d][A_d]^2[B_d] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \dots, \{y(k)\} = [C_d][A_d]^{k-1}[B_d] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde o vetor de saída em cada instante de tempo tem dimensão m por l . Deve-se repetir o mesmo procedimento para as outras variáveis de entrada, resultando em vetores de saída semelhantes. Justapondo os

vetores de saída de mesmo instante de tempo em matrizes, é fácil verificar que resultam

$$\begin{aligned}
 [Y_0] &= [D_d], \\
 [Y_1] &= [C_d][B_d], \\
 [Y_2] &= [C_d][A_d][B_d], \\
 [Y_3] &= [C_d][A_d]^2[B_d], \\
 &\vdots \\
 [Y_k] &= [C_d][A_d]^{k-1}[B_d]
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

ou, numa forma compacta

$$[Y_k] = \begin{cases} [D_d] , & k = 0 \\ [C_d][A_d]^{k-1}[B_d] , & k > 0 \end{cases}
 \tag{2.36}$$

onde $[Y_k]$ são matrizes de dimensão m por r , correspondentes à resposta do sistema no instante de tempo $k\Delta t$. A n -ésima coluna de $[Y_k]$ é a resposta do sistema ao pulso aplicado na n -ésima entrada, mantendo-se todas as outras entradas iguais a zero. As matrizes $[Y_k]$ são denominadas de parâmetros de Markov do sistema.

A substituição de (2.36) no último termo da equação (2.32) resulta

$$\{y(k)\} = [C_d][A_d]^k\{x(0)\} + \sum_{i=0}^k [Y_i]\{u(k-i)\}
 \tag{2.37}$$

Para condições iniciais iguais a zero $\{x(0)\} = \{0\}$, a relação (2.37) fica

$$\{y(k)\} = \sum_{i=0}^k [Y_i] \{u(k-i)\} \quad (2.38)$$

A descrição do sistema através da expressão (2.38) é frequentemente denominada de descrição por sequência ponderada. Esta descrição expressa de forma compacta, através das respostas $[Y_k]$, a relação entre o vetor de saída e o vetor de entrada qualquer. Além disso, esta descrição não necessita o conhecimento de estados intermediários.

Ao invés de utilizar os parâmetros de Markov $[Y_k]$ isoladamente, pode-se justapô-los adequadamente em matrizes, como

$$[H(k-l)] = \begin{bmatrix} [Y_k] & [Y_{k+1}] & \cdots & [Y_{k+\beta-1}] \\ [Y_{k+1}] & [Y_{k+2}] & \cdots & [Y_{k+\beta}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [Y_{k+\alpha-1}] & [Y_{k+\alpha}] & \cdots & [Y_{k+\alpha+\beta-2}] \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

A matriz $[H(k-l)]$ é denominada de matriz Hankel generalizada de dimensão αm por βr . Ao se utilizar a matriz Hankel generalizada, os métodos de identificação têm à disposição, em uma única matriz, a informação necessária para realizar a identificação. Desta forma, pode-se realizar a identificação em um único passo. Em contraposição, alguns algoritmos de identificação que manipulam sequencialmente termos isolados de parâmetros de Markov, utilizam métodos iterativos

para a identificação e, conseqüentemente, podem sofrer problemas relacionados com a convergência numérica destes métodos.

Uma característica da matriz Hankel generalizada é o bom condicionamento numérico. Pode-se observar na expressão (2.39) a inexistência de ponderadores nos elementos de $[H(k-I)]$, que tornam os procedimentos numéricos de outros métodos mais sensíveis aos ruídos.

2.4 - EQUAÇÕES DE ESTADO NAS COORDENADAS MODAIS

Em muitas situações é desejável obter uma representação desacoplada do modelo no espaço de estado. Define-se a matriz modal $[\Psi] = [\{\psi_1\} \{\psi_2\} \cdots \{\psi_{2n}\}]$, dimensão $2n$ por $2n$, cujas colunas são formadas pelos autovetores de $[A_d]$. Uma transformação linear entre o vetor das coordenadas modais $\{x(k)\}_M$ e o vetor de estado $\{x(k)\}$ pode ser desenvolvida

$$\{x(k)\} = [\Psi]\{x(k)\}_M \quad (2.40)$$

Substituindo a (2.40) na equação de estado (2.25) e multiplicando-a por $[\Psi]^{-1}$, resulta

$$\{x(k+1)\}_M = [A]\{x(k)\}_M + [B_d]_M\{u(k)\} \quad (2.41)$$

onde $[B_d]_M = [\Psi]^{-1}[B_d]$ é a matriz de influência de entrada nas coordenadas modais, $2n$ por r , e $[A] = [\Psi]^{-1}[A_d][\Psi] = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}]$, $2n$ por $2n$, é a matriz diagonal formada pelos autovalores de $[A_d]$.

Os autovalores de $[A_d]$ estão relacionados, através da equação (2.27b), com os autovalores de $[A_c]$ e, portanto, com os fatores de amortecimento modal e as frequências naturais amortecidas do sistema em tempo contínuo.

Os elementos da matriz $[B_d]_M = [\Psi]^{-1}[B_d]$ definem a amplitude relativa com que cada modo é excitado através de uma determinada entrada. No caso das excitações externas serem entradas pulso, os elementos de $[\Psi]^{-1}[B_d]$ definem a amplitude inicial (ou fator de participação modal) de cada modo em relação a uma determinada entrada.

A equação de medida (2.30) também pode ser transformada para as coordenadas modais

$$\{y(k)\} = [C_d]_M \{x(k)\}_M + [D_d] \{u(k)\} \quad (2.42)$$

onde $[C_d]_M = [C_d][\Psi]$ é a matriz de influência de saída de dimensão m por $2n$. As colunas da matriz $[C_d]_M$ contém informação da forma dos modos (modos complexos) conforme a localização espacial dos sensores.

As equações (2.41) e (2.42) descrevem o sistema através de suas coordenadas modais (outro conjunto de variáveis de estado que caracteriza dinamicamente o mesmo sistema) e são denominadas de equações de estado nas coordenadas modais.

A equação (2.40) é um caso especial das transformações lineares possíveis entre variáveis de estado. Em vez de utilizar a matriz modal como a matriz de transformação e as coordenadas modais como variáveis de estado, pode-se utilizar um número infinito de matrizes de transformação e de vetores de estado que levem a uma representação de estado através de transformações de similaridade. Consequentemente, obtém-se um número infinito de matrizes de estado e de influência de entrada e saída que representam o modelo. Qualquer que seja a matriz de estado obtida, deve ter o mesmo comportamento dinâmico global, ou seja, deve possuir os mesmos autovalores.

2.5 - OBSERVABILIDADE E CONTROLABILIDADE

A teoria de sistemas no espaço de estado fornece base conceitual e ferramentas úteis na análise de métodos de identificação de parâmetros modais. Dois destes conceitos são os de observabilidade e controlabilidade, que desempenham papel fundamental no algoritmo de realização de sistemas - ERA. Uma explanação mais abrangente destes conceitos pode ser encontrada em [Juang 1994] e [Yang 1995].

A seguir são apresentados os aspectos essenciais dos conceitos de observabilidade e de controlabilidade e algumas propriedades associadas a estes conceitos, baseados em [Juang 1994]. A apresentação será de forma direta, sem provas de teoremas e derivações matemáticas.

OBSERVABILIDADE

Conhecido os vetores de entrada $\{u(k)\}$ e de saída $\{y(k)\}$, no intervalo de tempo finito $0 < k \leq p$, um estado $\{x(p)\}$ é dito observável se a partir de $\{u(k)\}$ e $\{y(k)\}$ determina-se completamente $\{x(p)\}$. Se todos os estados são observáveis, o sistema é denominado completamente observável ou observável.

Dado o estado inicial $\{x(0)\}$ e o vetor de entrada $\{u(k)\} = \{0_{r \times 1}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$, a condição necessária e suficiente para que o sistema seja completamente observável é que o estado inicial possa ser reconstruído através do conhecimento do vetor de saída $\{y(k)\}$. Substituindo $\{u(k)\} = \{0\}$ nas expressões (2.32), obtém-se

$$\begin{aligned} \{y(0)\} &= [C_d]\{x(0)\}, \\ \{y(1)\} &= [C_d][A_d]\{x(0)\}, \\ \{y(2)\} &= [C_d][A_d]^2\{x(0)\}, \\ &\vdots \\ \{y(p-1)\} &= [C_d][A_d]^{p-1}\{x(0)\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

ou, numa forma matricial

$$\begin{bmatrix} \{y(0)\} \\ \{y(1)\} \\ \{y(2)\} \\ \vdots \\ \{y(p-1)\} \end{bmatrix} = [P_p]\{x(0)\} \quad (2.44)$$

onde

$$[P_p] = \begin{bmatrix} [C_d] \\ [C_d][A_d] \\ [C_d][A_d]^2 \\ \vdots \\ [C_d][A_d]^{p-1} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

é a matriz de observabilidade, mp por $2n$. Existe uma única solução de (2.44) se e somente se $[P_p]$ tem posto $2n$.

Teorema 2.1: O sistema linear, em tempo discreto e de dimensão finita, de ordem $2n$ $\{x(k+1)\} = [A_d]\{x(k)\} + [B_d]\{u(k)\}$, com a equação de medida de ordem m , $\{y(k)\} = [C_d]\{x(k)\} + [D_d]\{u(k)\}$, é observável se e somente se a matriz de observabilidade $[P_p]$, de dimensão mp por $2n$, tem posto $2n$.

Uma interpretação física do conceito de observabilidade pode ser dada através da equação de medida nas coordenadas modais (2.42). Supondo-se que exista somente um sensor, a equação (2.32) fica

$$\{y(k)\} = \{c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{2n}\}_M \begin{Bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{2n}(k) \end{Bmatrix}_M + [D]\{u(k)\} \quad (2.46)$$

Se o sensor estiver localizado sobre a linha nodal do i -ésimo modo, então $c_i = 0$ e não haverá contribuição da coordenada modal x_{i_m} na saída $\{y(k)\}$, ou seja, este modo não será observável. Uma forma de aumentar a

observabilidade do vetor de saída é a utilização de um número maior de sensores.

CONTROLABILIDADE

O estado $\{x(p)\}$ de um sistema é dito controlável se a partir de um estado inicial qualquer $\{x(0)\}$, o sistema atingir o estado $\{x(p)\}$ em um intervalo de tempo finito sob alguma ação de controle. Se todos os estados são controláveis, o sistema é denominado completamente controlável ou controlável.

Seja o estado inicial $\{x(0)\} = \{0\}$. Assim, o penúltimo termo da equação (2.32) fica igual a

$$\{x(p)\} = \sum_{i=1}^p [A_d]^{i-1} [B_d] \{u(p-i)\} \quad (2.47)$$

ou

$$\{x(p)\} = \begin{bmatrix} [B_d] & [A_d][B_d] & [A_d]^2[B_d] & \cdots & [A_d]^{p-1}[B_d] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u(p-1)\} \\ \{u(p-2)\} \\ \{u(p-3)\} \\ \vdots \\ \{u(0)\} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Define-se a matriz de controlabilidade $[Q_p]$ de dimensão $2n$ por pr .

$$[Q_p] = \begin{bmatrix} [B_d] & [A_d][B_d] & [A_d]^2[B_d] & \cdots & [A_d]^{p-1}[B_d] \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Teorema 2.2: O sistema linear, em tempo discreto e de dimensão finita, de ordem $2n$ $\{x(k+1)\} = [A_d]\{x(k)\} + [B_d]\{u(k)\}$, é controlável se e somente se a matriz de controlabilidade $[Q_p]$, de dimensão $2n$ por pr , têm posto $2n$.

Uma interpretação física do conceito de controlabilidade pode ser dada através da equação de estado nas coordenadas modais (2.41). Supondo que exista somente um excitador, a equação (2.41) fica igual a

$$\begin{Bmatrix} x_1(p) \\ x_2(p) \\ \vdots \\ x_{2n}(p) \end{Bmatrix}_M = [A]\{x(p-1)\}_M + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n} \end{Bmatrix}_M \{u(p-1)\} \quad (2.50)$$

Se o excitador estiver localizado sobre a linha nodal do i -ésimo modo, então $b_i = 0$ e a entrada não conseguirá excitar o i -ésimo modo (a coordenada modal x_{iM}), ou seja, este modo não será controlável. Uma forma de aumentar a controlabilidade do vetor de estado é a utilização de um número maior de excitadores.

MATRIZ HANKEL E AS MATRIZES DE OBSERVABILIDADE E CONTROLABILIDADE

Uma característica importante da matriz Hankel generalizada (2.39) é que ela pode ser escrita em termos das matrizes de observabilidade (2.45) e controlabilidade (2.49). Esta característica pode ser facilmente observada substituindo os parâmetros de Markov (2.36) na matriz Hankel (2.39)

$$[H(k-l)] = \begin{bmatrix} [C_d][A_d]^{k-l}[B_d] & [C_d][A_d]^k[B_d] & \cdots & [C_d][A_d]^{k+\beta-2}[B_d] \\ [C_d][A_d]^k[B_d] & [C_d][A_d]^{k+1}[B_d] & \cdots & [C_d][A_d]^{k+\beta-1}[B_d] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [C_d][A_d]^{k+\alpha-2}[B_d] & [C_d][A_d]^{k+\alpha-1}[B_d] & \cdots & [C_d][A_d]^{k+\alpha+\beta-3}[B_d] \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Reagrupando a equação (2.51), obtém-se

$$[H(k-l)] = \begin{bmatrix} [C_d] \\ [C_d][A_d] \\ [C_d][A_d]^2 \\ \vdots \\ [C_d][A_d]^{\alpha-1} \end{bmatrix} [A_d]^{k-l} \begin{bmatrix} [B_d] & [A_d][B_d] & [A_d]^2[B_d] & \cdots & [A_d]^{\beta-1}[B_d] \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

ou

$$[H(k-l)] = [P_\alpha] [A_d]^{k-l} [Q_\beta] \quad (2.53)$$

A equação (2.53) expressa a matriz Hankel $[H(k-l)]$ em função das matrizes de observabilidade $[P_\alpha]$, controlabilidade $[Q_\beta]$ e da matriz de estado $[A_d]$.

Uma das vantagens de expressar a matriz Hankel na forma da equação (2.53) é tornar mais explícita uma discussão sobre o seu posto. O posto da matriz Hankel é igual ao menor posto entre as matrizes de observabilidade e controlabilidade. As matrizes de observabilidade e controlabilidade têm posto menor ou igual ao posto da matriz de estado. Se o sistema for completamente observável e controlável, o posto das

matrizes de observabilidade e de controlabilidade é o mesmo e é idêntico à ordem do sistema.

Para $k = l$ a matriz Hankel é igual a

$$[H(0)] = [P_\alpha] [Q_\beta] \quad (2.54)$$

CAPÍTULO 3

ALGORITMOS

Neste capítulo são apresentados os métodos e algoritmos utilizados para alcançar os objetivos traçados. Para facilitar a leitura, o capítulo foi dividido em três partes.

A seção 3.1 apresenta os aspectos fundamentais do Algoritmo de Realização de Sistemas - ERA. Este algoritmo é o método de identificação que serve de base para este trabalho.

O método de obtenção de parâmetros de Markov através de FRFs é apresentado na seção 3.2. São desenvolvidos o algoritmo de Bayard e as modificações propostas por Chen, Juang e Lee.

Na seção 3.3 são apresentados os índices de confiança: Critério de Correlação Modal - MAC, Critério de Correlação Modal Inversa - IMAC, Colinearidade da Fase Modal Ponderada - MPCW,

Coerência da Amplitude Modal Estendida - EMAC e Indicador de Consistência Modal - CMI.

3.1 – O ALGORITMO DE REALIZAÇÃO DE SISTEMAS - ERA

No capítulo anterior foi desenvolvida analiticamente a representação de modelos dinâmicos no espaço de estado. Em muitas situações não é possível obter um modelo analítico com a precisão desejada. Nestes casos, torna-se necessária a obtenção de um modelo através de dados experimentais. O processo de obtenção de uma representação de modelos no espaço de estado através de dados experimentais é denominado realização de sistemas.

Um problema relacionado com a realização de sistemas é a determinação da ordem do modelo, pois existem infinitas realizações que representam a mesma relação de entrada e saída. Realização mínima significa o modelo com a menor dimensão de espaço de estado, dentre os possíveis sistemas que têm a mesma relação de entrada e saída, dentro de um grau de precisão específico [Juang 1985].

O algoritmo de realização de sistemas - ERA é um algoritmo de realização mínima. Além disso, é balanceado internamente, o que garante que o modelo realizado seja completamente observável e controlável. O ERA consiste de duas etapas. Na primeira obtém-se as matrizes do modelo no espaço de estado em tempo discreto (a realização propriamente dita). Numa segunda etapa obtém-se os parâmetros modais do sistema realizado.

O ERA baseia-se nas relações existentes entre as matrizes Hankel no tempo $k = 1$, $[H(0)]$, e no tempo $k = 2$, $[H(1)]$. Inicialmente, decompõe-se a matriz Hankel $[H(0)]$, dimensão αm por βr , em valores singulares - SVD:

$$[H(0)] = [R][\Sigma][S]^T \quad (3.1)$$

A matriz $[R]$, de dimensão αm por αm , é uma matriz cujas colunas são os vetores singulares à esquerda de $[H(0)]$, ou seja, autovetores de $[H(0)][H(0)]^T$.

A matriz $[S]$, dimensão βr por βr , é uma matriz cujas colunas são os vetores singulares à direita de $[H(0)]$, ou seja, autovetores de $[H(0)]^T[H(0)]$. Tanto os vetores singulares à esquerda como os vetores singulares à direita são ortonormais entre si, ou seja,

$$\begin{aligned} [R]^T[R] &= [I_{\alpha m}] \\ &e \\ [S]^T[S] &= [I_{\beta r}] \end{aligned} \quad (3.2)$$

A Matriz $[\Sigma]$, dimensão αm por βr , é formada pelos valores singulares de $[H(0)]$. Portanto, seus elementos podem ser obtidos calculando-se a raiz quadrada dos autovalores de $[H(0)][H(0)]^T$. Pode-se colocar a matriz $[\Sigma]$ na forma

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} [\Sigma_{2n}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

onde

$$[\Sigma_{2n}] = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2n}], \quad (3.4)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{2n} \geq 0$$

Nas expressões (3.3) e (3.4) assume-se a existência de somente $2n$ valores singulares diferentes de zero. Ao realizar-se a SVD numa matriz Hankel montada com parâmetros de Markov, obtidos através de dados experimentais, não se têm valores singulares iguais a zero. Nem sempre é possível julgar criteriosamente onde se deve truncar a sequência de valores singulares. A escolha do número de valores singulares relevantes define a ordem do modelo e o número de modos identificados.

Pode-se formar a matriz $[R_{2n}]$, dimensão αm por $2n$, somente com as $2n$ primeiras colunas de $[R]$

$$[R] = \begin{bmatrix} [R_{2n}] & [R_0] \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Da mesma forma define-se a matriz $[S_{2n}]$, dimensão βr por $2n$, somente com as $2n$ primeiras colunas de $[S]$

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_{2n}] & [S_0] \end{bmatrix}^T \quad (3.6)$$

As matrizes $[R_{2n}]$ e $[S_{2n}]$ mantêm a propriedade da ortonormalidade,

$$[R_{2n}]^T [R_{2n}] = [I_{2n}] \quad (3.7a)$$

e

$$[S_{2n}]^T [S_{2n}] = [I_{2n}] \quad (3.7b)$$

Substituindo as equações (3.3), (3.5) e (3.6) na equação (3.1), obtém-se

$$\begin{aligned} [H(0)] &= [[R_{2n}] \ [R_0]] \begin{bmatrix} [\Sigma_{2n}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} [[S_{2n}] \ [S_0]]^T \\ &= [R_{2n}][\Sigma_{2n}][S_{2n}]^T \end{aligned} \quad (3.8)$$

Com a equação (3.8) pode-se definir a pseudo-inversa de $[H(0)]$

$$[H(0)]^+ = [S_{2n}][\Sigma_{2n}]^{-1} [R_{2n}]^T \quad (3.9)$$

Utilizando a equação (2.54), a pseudo-inversa $[H(0)]^+$ deve satisfazer a relação

$$\begin{aligned} [H(0)][H(0)]^+ [H(0)] &= [P_\alpha][Q_\beta][H(0)]^+ [P_\alpha][Q_\beta] \\ &= [H(0)] \\ &= [P_\alpha][Q_\beta] \end{aligned} \quad (3.10)$$

A equação (3.10) torna possível a obtenção de mais uma expressão para $[H(0)]^+$

$$[Q_\beta][H(0)]^+[P_\alpha] = [I_{2n}] \quad (3.11)$$

Uma realização de ordem mínima pode ser obtida através de manipulação algébrica do parâmetro de Markov $[Y_k]$. Observando a expressão para a matriz Hankel (2.39)

$$[H(k-I)] = \begin{bmatrix} [Y_k] & [Y_{k+1}] & \cdots & [Y_{k+\beta-1}] \\ [Y_{k+1}] & [Y_{k+2}] & \cdots & [Y_{k+\beta}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [Y_{k+\alpha-1}] & [Y_{k+\alpha}] & \cdots & [Y_{k+\alpha+\beta-2}] \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

pode-se escrever

$$[Y_k] = \begin{bmatrix} [I_m] & [0_m]_1 & [0_m]_2 & \cdots & [0_m]_{\alpha-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [Y_k] & [Y_{k+1}] & \cdots & [Y_{k+\beta-1}] \\ [Y_{k+1}] & [Y_{k+2}] & \cdots & [Y_{k+\beta}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [Y_{k+\alpha-1}] & [Y_{k+\alpha}] & \cdots & [Y_{k+\alpha+\beta-2}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_r] \\ [0_r]_1 \\ [0_r]_2 \\ \vdots \\ [0_r]_{\beta-1} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

ou, numa forma compacta

$$[Y_k] = [E_m]^T [H(k-I)] [E_r] \quad (3.14)$$

onde

$$[E_m] = \begin{bmatrix} [I_m] \\ [0_m]_1 \\ [0_m]_2 \\ \vdots \\ [0_m]_{\alpha-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [E_r] = \begin{bmatrix} [I_r] \\ [0_r]_1 \\ [0_r]_2 \\ \vdots \\ [0_r]_{\beta-1} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Substituindo a expressão (2.53) na (3.14), obtém-se

$$[Y_k] = [E_m]^T [P_\alpha] [A_d]^{k-1} [Q_\beta] [E_r] \quad (3.16)$$

Inserindo-se a identidade (3.11) nos dois lados da matriz de estado em (3.16), resulta

$$[Y_k] = [E_m]^T [P_\alpha] [Q_\beta] [H(0)]^+ [P_\alpha] [A_d]^{k-1} [Q_\beta] [H(0)]^+ [P_\alpha] [Q_\beta] [E_r] \quad (3.17)$$

Lembrando da equação (2.54) que $[H(0)] = [P_\alpha] [Q_\beta]$, a (3.17) fica igual a

$$[Y_k] = [E_m]^T [H(0)] [H(0)]^+ [P_\alpha] [A_d]^{k-1} [Q_\beta] [H(0)]^+ [H(0)] [E_r] \quad (3.18)$$

Substituindo $[H(0)]^+$ dada por (3.9) na (3.18), obtém-se

$$[Y_k] = [E_m]^T [H(0)] [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1} [R_{2n}]^T [P_\alpha] [A_d]^{k-1} [Q_\beta] [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1} [R_{2n}]^T [H(0)] [E_r] \quad (3.19)$$

A inversa da matriz de valores singulares pode ser decomposta na forma

$$[\Sigma_{2n}]^{-1} = [\Sigma_{2n}]^{-1/2} [\Sigma_{2n}]^{-1/2} \quad (3.20)$$

e substituída na equação (3.19), obtendo-se

$$[Y_k] = [E_m]^T [H(0)] [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2} [\mathcal{E}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T [H(0)] [E_r] \quad (3.21)$$

onde

$$[\mathcal{E}] = [\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T [P_\alpha] [A_d]^{k-1} [Q_\beta] [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2} \quad (3.22)$$

Substituindo a (3.8) na (3.21) e lembrando das relações (3.7), resulta

$$[Y_k] = [E_m]^T [R_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{1/2} [\mathcal{E}] [\Sigma_{2n}]^{1/2} [S_{2n}]^T [E_r] \quad (3.23)$$

A equação (3.22) pode ser escrita numa outra forma após alguma manipulação algébrica, dada por

$$\begin{aligned} & \left([\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T [P_\alpha] [A_d] [Q_\beta] [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2} \right)^2 = \\ & = [\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T [P_\alpha] [A_d] [Q_\beta] [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1} [R_{2n}]^T [P_\alpha] [A_d] [Q_\beta] [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Substituindo $[H(0)]^+$ dada por (3.9) na (3.24), resulta

$$\begin{aligned} & \left([\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T [P_\alpha] [A_d] [Q_\beta] [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2} \right)^2 = \\ & = [\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T [P_\alpha] [A_d] [Q_\beta] [H(0)]^+ [P_\alpha] [A_d] [Q_\beta] [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Utilizando a (3.11), pode-se simplificar a (3.25), obtendo-se

$$\left([\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T [P_\alpha] [A_d] [Q_\beta] [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2} \right)^2 = [\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T [P_\alpha] [A_d]^2 [Q_\beta] [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2} \quad (3.26)$$

Desta forma, por indução, a (3.22) assume a forma

$$[\mathcal{E}] = \left([\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T [P_\alpha] [A_d] [Q_\beta] [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2} \right)^{k-1} \quad (3.27)$$

A (3.27) pode ser simplificada calculando $[H(I)]$ através da (2.53), substituindo-a na (3.27), obtendo-se

$$[\mathcal{E}] = \left([\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T [H(I)] [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2} \right)^{k-1} \quad (3.28)$$

Finalmente, substituindo a equação (3.27) na (3.23), resulta

$$[Y_k] = [E_m]^T [R_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{1/2} \left([\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T [H(I)] [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2} \right)^{k-1} [\Sigma_{2n}]^{1/2} [S_{2n}]^T [E_r] \quad (3.29)$$

Comparando (3.29) com a equação (2.36),

$$[Y_k] = [C_d][A_d]^{k-1}[B_d] \quad (3.30)$$

pode-se obter a realização:

$$\begin{aligned} [A_d] &= [\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T [H(I)] [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2} \\ [B_d] &= [\Sigma_{2n}]^{1/2} [S_{2n}]^T [E_r] \\ [C_d] &= [E_m]^T [R_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

O conjunto das matrizes $[A_d]$, $[B_d]$ e $[C_d]$ obtido pelas expressões (3.31) é uma realização mínima do sistema. Posteriormente, esta realização pode ser transformada para um modelo de tempo contínuo, ou para as equações de estado nas coordenadas modais, obtendo-se os parâmetros modais.

Pode-se resumir o algoritmo ERA nas seguintes etapas:

- Obtenção dos parâmetros de Markov do sistema, $[Y_k]$, a partir de dados obtidos experimentalmente.
- Construção da matriz Hankel no tempo $k = 1$, $[H(0)]$, e no tempo $k = 2$, $[H(I)]$.
- Fazer a decomposição SVD em $[H(0)]$.

- Definir a ordem $2n$ do sistema, examinando-se os valores singulares de $[H(0)]$ e obter as matrizes $[\Sigma_{2n}]$, $[R_{2n}]$ e $[S_{2n}]$ a partir de (3.3), (3.5) e (3.6).
- Obtenção da realização de ordem mínima através da equação (3.31).
- Transformação das equações de estado para as coordenadas modais, através da obtenção dos autovalores e autovetores da matriz de estado. As frequências naturais amortecidas e os fatores de amortecimento podem ser obtidos dos autovalores, que correspondem aos elementos da diagonal da matriz de estado nas coordenadas modais. Os modos complexos correspondem às colunas da matriz de influência de saída nas coordenadas modais.

3.2 – OBTENÇÃO DE PARÂMETROS DE MARKOV ATRAVÉS DE FRFS

Os dados experimentais de entrada para o método ERA formam o conjunto de respostas ao pulso discreto, denominadas de sequência de parâmetros de Markov, que formam a matriz Hankel. Embora existam variantes do ERA no domínio da frequência, em todos os casos os dados devem ser transformados ou convertidos para o domínio do tempo na forma de sequências de parâmetros de Markov.

Uma das dificuldades que ocorre na aplicação de métodos de identificação baseados na realização de sistemas, como o ERA, é a obtenção dos parâmetros de Markov experimentalmente.

Na prática, a disponibilidade de dados no domínio da frequência tem predominado devido à difusão de analisadores de espectro microprocessados. Desta forma, existe grande interesse na obtenção das sequências de parâmetros de Markov a partir de Funções Resposta em Frequência - FRFs. Além disso, inúmeras técnicas estão disponíveis para a minimização das várias inconsistências na estimação de FRFs, o que é conveniente nestes casos.

Tradicionalmente, a Transformada Inversa de Fourier Discreta - IDFT é utilizada para transformar os dados do domínio da frequência para o domínio do tempo, transformando as FRFs do sistema em resposta ao pulso (ou sequências de parâmetros de Markov). Um erro inerente a este procedimento é a distorção das sequências de parâmetros de Markov por efeitos de "*aliasing*" [Oppenheim 1975].

Um método para obter as sequências de parâmetros de Markov através de FRFs foi desenvolvido por Bayard [Bayard 1992], denominado Algoritmo de Identificação de Espaço de Estado no Domínio da Frequência - SSFD. Além disso, neste caso, as sequências de parâmetros de Markov obtidas estão livres de efeitos de "*aliasing*".

O inconveniente do método desenvolvido por Bayard é a necessidade de se resolver um problema de ajuste de curvas por otimização não-linear ou por um algoritmo iterativo linear aproximado. Chen, Juang e Lee [Chen 1994], modificaram o algoritmo proposto por Bayard de forma que o problema de ajuste é reformulado como um

problema linear que é resolvido pelo método de mínimos quadrados em um só passo, não necessitando de inúmeras iterações.

Nesta seção são apresentados o algoritmo de Bayard e o algoritmo de Chen, Juang e Lee.

3.2.1 – ALGORITMO DE BAYARD

O ponto de partida do método de Bayard é a representação de modelos no domínio da frequência, que pode ser obtido facilmente através da aplicação da Transformada z .

Seja $\{x(z)\}$ a transformada z de $\{x(k)\}$

$$\{x(z)\} = Z(\{x(k)\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \{x(k)\} z^{-k} \quad (3.32)$$

Então, a transformada z de $\{x(k+1)\}$ torna-se

$$\begin{aligned} Z(\{x(k+1)\}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \{x(k+1)\} z^{-k} \\ &= z \sum_{k=0}^{\infty} \{x(k+1)\} z^{-(k+1)} \\ &= z \left(\sum_{k=-1}^{\infty} \{x(k+1)\} z^{-(k+1)} - \{x(0)\} \right) \\ &= z \left(\sum_{\hat{k}=0}^{\infty} \{x(\hat{k})\} z^{-\hat{k}} - \{x(0)\} \right) \\ &= z(\{x(z)\} - \{x(0)\}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Para condições iniciais nulas $\{x(0)\} = \{0\}$, a aplicação da transformada z na equação de estado (2.25) resulta

$$\{x(z)\} = (z[I] - [A_d])^{-1} [B_d] \{u(z)\} \quad (3.34)$$

O mesmo pode ser feito com a equação de medida (2.30). Utilizando o resultado anterior (3.34), pode-se obter

$$\{y(z)\} = ([C_d](z[I] - [A_d])^{-1} [B_d] + [D_d]) \{u(z)\} \quad (3.35)$$

Uma observação de (3.35) revela que a matriz

$$[G(z)] = [C_d](z[I] - [A_d])^{-1} [B_d] + [D_d] \quad (3.36)$$

é a função de transferência do sistema. A FRF pode ser obtida calculando a função de transferência do sistema ao longo do círculo unitário no plano z , ou seja

$$[G(z_k)] = [C_d](z_k[I] - [A_d])^{-1} [B_d] + [D_d] \quad (3.37)$$

onde

$$z(k) = z_k = e^{j \frac{2\pi k}{\ell}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \ell - 1 \quad (3.38)$$

A inversa na (3.37) é obtida, resultando

$$[G(z_k)] = \frac{[C_d] \text{adj}(z_k[I] - [A_d])[B_d] + d(z_k)[D_d]}{d(z_k)} \quad (3.39)$$

onde $d(z_k)$ é o polinômio característico de $[A_d]$.

A equação (3.39) mostra que a função de transferência pode ser representada por uma forma racional, com um polinômio matricial $[N(z_k)]$ no numerador e um polinômio escalar $d(z_k)$ no denominador, ou seja

$$[G(z_k)] = \frac{[N(z_k)]}{d(z_k)} \quad (3.40)$$

Os polinômios de (3.40) podem ser obtidos através da formulação de um problema de minimização da norma-2 do erro entre (3.40) e a matriz de FRF obtida experimentalmente

$$\min \left(\sum_{k=0}^{\ell-1} w^2(z_k) \left\| [\tilde{G}(z_k)] - \frac{[N(z_k)]}{d(z_k)} \right\|_2 \right) \quad (3.41)$$

onde $[\tilde{G}(z_k)]$ é a matriz de FRF obtida experimentalmente e $w^2(z_k)$ é uma função ponderadora de frequência.

Bayard propõe que o problema de minimização (3.41) seja solucionado baseando-se no algoritmo clássico de Sanathanan e Koerner [Sanathanan 1963]. Como o trabalho original de Sanathanan e Koerner é formulado no domínio s e trata de sistemas SISO, Bayard remete a dois

trabalhos anteriores de sua própria autoria e de colaboradores, que estenderam o alcance do algoritmo de Sanathanan e Koerner para o domínio z e sistemas MIMO.

Obtidos os polinômios $[N(z_k)]$ e $d(z_k)$, deve-se desenvolver uma expressão que relacione os parâmetros de Markov $[Y_i]$ com a função de transferência $[G(z)]$, ou seja, com $[N(z_k)]$ e $d(z_k)$. Esta expressão pode ser obtida aplicando-se a transformada z na equação (2.38)

$$Z(\{y(k)\}) = Z\left(\sum_{i=0}^k [Y_i] \{u(k-i)\}\right) \quad (3.42)$$

ou

$$\{y(z)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \sum_{i=0}^k [Y_i] \{u(k-i)\} \quad (3.43)$$

Assumindo-se que não existam forças aplicadas antes do instante inicial, a (3.43) pode ser reescrita como

$$\{y(z)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \sum_{i=0}^{\infty} [Y_i] \{u(k-i)\} \quad (3.44)$$

onde

$$\{u(k-i)\} = \{0\} \quad , \quad (k-i) < 0 \quad (3.45)$$

Manipulando-se a (3.44), resulta

$$\begin{aligned}
\{y(z)\} &= \sum_{i=0}^{\infty} [Y_i] \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \{u(k-i)\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} [Y_i] z^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k-i)} \{u(k-i)\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} [Y_i] z^{-i} \sum_{\hat{k}=-i}^{\infty} z^{-\hat{k}} \{u(\hat{k})\}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Substituindo a (3.45) na (3.46), obtém-se

$$\{y(z)\} = \sum_{i=0}^{\infty} [Y_i] z^{-i} \{u(z)\} \tag{3.47}$$

Finalmente, a equação (3.47) fornece uma expressão para a função transferência em função dos parâmetros de Markov,

$$[G(z)] = \sum_{i=0}^{\infty} [Y_i] z^{-i} \tag{3.48}$$

Novamente, a matriz de FRF pode ser obtida calculando a função de transferência do sistema ao longo do círculo unitário no plano z ,

$$[G(z_k)] = \sum_{i=0}^{\infty} [Y_i] z_k^{-i} \tag{3.49}$$

$$z_k = e^{j \frac{2\pi k}{\ell}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \ell-1$$

Igualando (3.40) com (3.49), obtém-se uma expressão que relaciona os parâmetros de Markov com os polinômios $[N(z_k)]$ e $d(z_k)$ da forma racional (3.40), ou seja

$$\frac{[N(z_k)]}{d(z_k)} = \sum_{i=0}^{\infty} [Y_i] z_k^{-i} \quad (3.50)$$

Obtidos os polinômios $[N(z_k)]$ e $d(z_k)$ através do problema de minimização (3.41), pode-se calcular recursivamente os parâmetros de Markov através da expressão (3.50).

3.2.2 – ALGORITMO DE CHEN, JUANG E LEE

Chen, Juang e Lee [Chen 1994] observam que a utilização do algoritmo de Sanathanan e Koerner para solucionar o problema de minimização (3.41), acarreta em dificuldades numéricas. Desta forma, propõem a utilização de uma forma fatorada da FRF (3.37) desenvolvida por Kailath [Kailath 1980]. Kailath demonstra que a expressão (3.37) pode ser fatorada na forma

$$[G(z_k)] = [E(z_k)]^{-1} [F(z_k)] \quad (3.51)$$

onde

$$\begin{aligned}
 [E(z_k)] &= [I_m] + [E_1]z_k^{-1} + [E_2]z_k^{-2} + \cdots + [E_p]z_k^{-p} \\
 &= [I_m] + \sum_{i=1}^p [E_i]z_k^{-i}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

e

$$\begin{aligned}
 [F(z_k)] &= [F_0] + [F_1]z_k^{-1} + [F_2]z_k^{-2} + \cdots + [F_p]z_k^{-p} \\
 &= \sum_{i=0}^p [F_i]z_k^{-i}
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Cada $[E_i]$ é uma matriz real de dimensão m por m e cada $[F_i]$ é uma matriz real de dimensão m por r .

Pré multiplicando a (3.51) por $[E(z_k)]$, obtém-se

$$[E(z_k)][G(z_k)] = [F(z_k)] \tag{3.54}$$

Substituindo-se (3.52) e (3.53) na (3.54), resulta

$$\begin{aligned}
 [G(z_k)] &= -[G(z_k)][E_1]z_k^{-1} - [G(z_k)][E_2]z_k^{-2} - \cdots - [G(z_k)][E_p]z_k^{-p} + \\
 &+ [F_0] + [F_1]z_k^{-1} + [F_2]z_k^{-2} + \cdots + [F_p]z_k^{-p}
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Pode-se obter ℓ equações, uma para cada $z_k = e^{j\frac{2\pi k}{\ell}}$, $k = 0, 1, 2, \dots, \ell - 1$.

Estas equações podem ser montadas com os valores da FRF obtidas experimentalmente $[\tilde{G}(z_k)]$:

$$\begin{aligned}
[\tilde{G}(z_0)] &= -[\tilde{G}(z_0)][E_1]z_0^{-1} - \dots - [\tilde{G}(z_0)][E_p]z_0^{-p} + [F_0] + [F_1]z_0^{-1} + \dots + [F_p]z_0^{-p} \\
[\tilde{G}(z_1)] &= -[\tilde{G}(z_1)][E_1]z_1^{-1} - \dots - [\tilde{G}(z_1)][E_p]z_1^{-p} + [F_0] + [F_1]z_1^{-1} + \dots + [F_p]z_1^{-p} \\
&\vdots \\
[\tilde{G}(z_{\ell-1})] &= -[\tilde{G}(z_{\ell-1})][E_1]z_{\ell-1}^{-1} - \dots - [\tilde{G}(z_{\ell-1})][E_p]z_{\ell-1}^{-p} + [F_0] + [F_1]z_{\ell-1}^{-1} + \dots + [F_p]z_{\ell-1}^{-p}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

ou, numa forma matricial

$$[\tilde{G}] = [\Theta][\Gamma] \tag{3.57}$$

onde

$$[\tilde{G}] = \left[[\tilde{G}(z_0)] \quad [\tilde{G}(z_1)] \quad \dots \quad [\tilde{G}(z_{\ell-1})] \right] \tag{3.58}$$

$$[\Theta] = \left[-[E_1] \quad -[E_2] \quad \dots \quad -[E_p] \quad [F_0] \quad [F_1] \quad [F_2] \quad \dots \quad [F_p] \right] \tag{3.59}$$

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix}
[\tilde{G}(z_0)]z_0^{-1} & [\tilde{G}(z_1)]z_1^{-1} & \dots & [\tilde{G}(z_{\ell-1})]z_{\ell-1}^{-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
[\tilde{G}(z_0)]z_0^{-p} & [\tilde{G}(z_1)]z_1^{-p} & \dots & [\tilde{G}(z_{\ell-1})]z_{\ell-1}^{-p} \\
[I_r] & [I_r] & \dots & [I_r] \\
z_0^{-1}[I_r] & z_1^{-1}[I_r] & \dots & z_{\ell-1}^{-1}[I_r] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
z_0^{-p}[I_r] & z_1^{-p}[I_r] & \dots & z_{\ell-1}^{-p}[I_r]
\end{bmatrix} \tag{3.60}$$

$[\tilde{G}]$ é uma matriz de dimensão m por $r\ell$, $[\Theta]$ é uma matriz de dimensão m por $((m+r)p+r)$ e $[\Gamma]$ é uma matriz de dimensão $((m+r)p+r)$ por $r\ell$.

Uma solução real para $[\Theta]$ pode ser obtida resolvendo a parte real ou imaginária de (3.57)

$$[\Theta] = \text{real}([\tilde{G}])[\text{real}([\Gamma])]^+ \quad (3.61)$$

ou

$$[\Theta] = \text{imag}([\tilde{G}])[\text{imag}([\Gamma])]^+ \quad (3.62)$$

Obtido $[\Theta]$ e por consequência $[E(z_k)]$ e $[F(z_k)]$, pode-se calcular os parâmetros de Markov igualando-se as expressões (3.49) e (3.51)

$$\sum_{i=0}^{\infty} [Y_i] z_k^{-i} = [E(z_k)]^{-1} [F(z_k)] \quad (3.63)$$

Pré-multiplicando os dois lados da (3.63) por $[E(z_k)]$, obtém-se

$$[E(z_k)] \sum_{i=0}^{\infty} [Y_i] z_k^{-i} = [F(z_k)] \quad (3.64)$$

ou

$$\left([I_m] + \sum_{i=1}^p [E_i] z_k^{-i} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} [Y_i] z_k^{-i} \right) = \sum_{i=0}^p [F_i] z_k^{-i} \quad (3.65)$$

Os parâmetros de Markov podem ser obtidos iterativamente expandindo-se os somatórios e produtos da (3.65) e igualando-se os termos de mesma ordem em z_k , resultando

$$\begin{aligned}
 [Y_0] &= [F_0] \\
 [Y_i] &= [F_i] - \sum_{j=1}^i [E_j][Y_{i-j}] \quad , \quad i = 1, 2, \dots, p \\
 [Y_i] &= - \sum_{j=1}^p [E_j][Y_{i-j}] \quad , \quad i = (p+1), (p+2), \dots, \infty
 \end{aligned}
 \tag{3.66}$$

Pela expressão (3.66) fica claro que a escolha do valor de p determina o número de parâmetros de Markov independentes que podem ser calculados.

3.3 – ÍNDICES DE CONFIANÇA

Uma das dificuldades do processo de identificação é qualificar os seus resultados. Na tentativa de minimizar esta dificuldade, índices de confiança foram desenvolvidos para quantificar numericamente a qualidade ou precisão dos parâmetros modais identificados.

Esta seção apresenta a forma de obtenção de cinco índices de confiança: Critério de Correlação Modal – MAC; Critério de Correlação Modal Inversa – IMAC; Colinearidade da Fase Modal Ponderada – MPCW; Coerência da Amplitude Modal Estendida – EMAC; e Indicador de Consistência Modal - CMI.

Na formulação dos índices de confiança são utilizados conceitos relacionados com as matrizes de influência de entrada e saída nas coordenadas modais, definidas pelas equações (2.41) e (2.42). As

formas dos modos (complexos) correspondem às colunas da matriz de influência de saída nas coordenadas modais, definida pela (2.42), ou seja

$$[C_d]_M = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \cdots \{\phi_j\} \cdots \{\phi_{2n}\}] \quad (3.67)$$

onde $\{\phi_j\}$ é o j -ésimo modo (complexo).

Para os modos identificados correspondentes a uma dada estimativa a , pode-se utilizar a notação

$$[C_d]_{M,a} = [\{\phi_{a,1}\} \{\phi_{a,2}\} \cdots \{\phi_{a,j}\} \cdots \{\phi_{a,2n}\}] \quad (3.68)$$

$$\{\phi_{a,j}\} = \{\phi_{a,1j} \ \phi_{a,2j} \ \cdots \ \phi_{a,mj}\}^T \quad (3.69)$$

onde

$\{\phi_{a,j}\}$ é a forma do modo na estimativa a ;

$\phi_{a,ij}$ é a i -ésima componente do j -ésimo modo da estimativa a .

Os fatores de participação modal são definidos em função dos elementos da matriz de influência de entrada. Os fatores de participação modal para o j -ésimo modo, correspondem à j -ésima linha da matriz de influência de entrada nas coordenadas modais, ou seja

$$[B_d]_M = \begin{bmatrix} \{\varphi_1\}^T \\ \{\varphi_2\}^T \\ \vdots \\ \{\varphi_j\}^T \\ \vdots \\ \{\varphi_{2n}\}^T \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

onde $\{\varphi_j\}$ é o vetor contendo os componentes do fator de participação modal do j -ésimo modo.

Para os fatores de participação modal identificados numa dada estimativa a , pode-se utilizar a notação

$$[B_d]_{M,a} = \begin{bmatrix} \{\varphi_{a,1}\}^T \\ \{\varphi_{a,2}\}^T \\ \vdots \\ \{\varphi_{a,j}\}^T \\ \vdots \\ \{\varphi_{a,2n}\}^T \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

onde

$$\{\varphi_{a,j}\}^T = \{\varphi_{a,1j} \quad \varphi_{a,2j} \quad \dots \quad \varphi_{a,rj}\} \quad (3.72)$$

$\{\varphi_{a,j}\}^T$ é o fator de participação modal do j -ésimo modo da estimativa a ;

$\varphi_{a,ij}$ é o i -ésimo componente do fator de participação modal do j -ésimo modo da estimativa a .

3.3.1 – CRITÉRIO DE CORRELAÇÃO MODAL - MAC

O MAC é utilizado para comparar numericamente a forma entre um par de modos, obtidos teoricamente ou identificados experimentalmente [Ewins 1984]. Ele mede o grau de correlação entre as formas dos modos (reais ou complexos) comparados.

Define-se o MAC entre o j -ésimo modo da estimativa a e o k -ésimo modo da estimativa b como

$$\text{MAC}(j,k) = \frac{\left| \sum_{i=1}^m \phi_{a,ij} \phi_{b,ik}^* \right|^2}{\left(\sum_{i=1}^m \phi_{a,ij} \phi_{a,ij}^* \right) \left(\sum_{i=1}^m \phi_{b,ik} \phi_{b,ik}^* \right)} \quad (3.73)$$

onde ϕ^* é o complexo conjugado de ϕ .

Os valores numéricos que o MAC pode assumir variam entre 0 e 1. De modo geral, considera-se que um valor acima de 0,9 significa uma boa correlação da forma dos dois modos e um valor abaixo de 0,1 significa formas modais totalmente descorrelacionadas.

3.3.2 – CRITÉRIO DE CORRELAÇÃO MODAL INVERSA - IMAC

Em trabalho recente, Mitchell [Mitchell 1998] observa que o MAC pode ser insensível a pequenas mudanças na forma do modo. A causa apontada é de que os componentes próximos às linhas anti-nodais dominam o cálculo do MAC, devido à grande amplitude destes termos. Por

outro lado, pequenas mudanças na forma dos modos devem ser mais facilmente detectadas na região próxima às linhas nodais. Desta forma, Mitchell propõe um novo índice - IMAC, baseando-se na inversa da forma dos modos (complexos).

O IMAC é definido como

$$\text{IMAC}(j,k) = \frac{\left| \sum_{i=1}^m \phi_{a,ij}^{-1} (\phi_{b,ik}^*)^{-1} \right|^2}{\left(\sum_{i=1}^m \phi_{a,ij}^{-1} (\phi_{a,ij}^*)^{-1} \right) \left(\sum_{i=1}^m \phi_{b,ik}^{-1} (\phi_{b,ik}^*)^{-1} \right)} \quad (3.74)$$

Os valores numéricos e a interpretação destes valores são os mesmos do MAC.

3.3.3 – COLINEARIDADE DA FASE MODAL PONDERADA - MPCW

O MPCW verifica a consistência espacial dos resultados da identificação. Ele quantifica o grau de comportamento monofase do modo, em outras palavras, o quanto o modo se aproxima do modo normal clássico (real) [Pappa 1993].

Seja $\{\phi_{a,j}^R\}$ e $\{\phi_{a,j}^I\}$, respectivamente, a parte real e imaginária do modo $\{\phi_{a,j}\}$. Define-se MPCW do j -ésimo modo como

$$\text{MPCW}(j) = \left(\frac{\mu_j^+ - \mu_j^-}{\mu_j^+ + \mu_j^-} \right)^2 \quad (3.75)$$

onde

$$\mu_j^{+,-} = \frac{\{\phi_{a,j}^R\}^T \{\phi_{a,j}^R\} + \{\phi_{a,j}^I\}^T \{\phi_{a,j}^I\}}{2} \pm \{\phi_{a,j}^R\}^T \{\phi_{a,j}^I\} \sqrt{\left(\frac{\{\phi_{a,j}^R\}^T \{\phi_{a,j}^R\} - \{\phi_{a,j}^I\}^T \{\phi_{a,j}^I\}}{2 \{\phi_{a,j}^R\}^T \{\phi_{a,j}^I\}} \right)^2 + 1} \quad (3.76)$$

Os valores numéricos que o MPCW pode assumir variam entre 0 e 1. Um valor próximo de 0 significa um modo com os ângulos de fase completamente não correlacionados e um valor próximo de 1 significa um modo real.

3.3.4 – COERÊNCIA DA AMPLITUDE MODAL ESTENDIDA - EMAC

O EMAC quantifica a consistência temporal dos parâmetros modais identificados [Pappa 1993]. A evolução temporal, de $t_0 = 0$ a $t = T_1$, dos componentes da forma modal é comparada com os correspondentes componentes localizados no último bloco de linhas da matriz de observabilidade modal (o bloco correspondente à $t = T_1$). Esta comparação possibilita a obtenção de um índice de consistência temporal.

Seja $t = T_1$ o tempo correspondente ao último bloco de linhas da matriz de observabilidade modal. A evolução temporal no tempo $t = T_1$,

para o i -ésimo componente do j -ésimo modo da estimativa α , pode ser calculada através de

$$\hat{\phi}_{a,ij}(T_1) = \phi_{a,ij} e^{s_j T_1} \quad (3.77)$$

onde

$\hat{\phi}_{a,ij}(T_1)$ é a estimativa do componente i no tempo T_1 ;

s_j é o autovalor de tempo contínuo do modo j .

Obtida uma estimativa da componente do modo, dada por (3.77), deve-se compará-la com a correspondente componente da matriz de observabilidade modal. Seja a matriz de observabilidade modal, αm por $2n$, definida por

$$[P_\alpha]_M = [R_{2n}][\Sigma_{2n}]^{1/2} [\Psi] \quad (3.78)$$

O bloco formado pelas m últimas linhas de $[P_\alpha]_M$ é uma matriz que contém a forma dos modos no tempo $t=T_1$. Utilizando a notação $\tilde{\phi}_{a,ij}(T_1)$ para indicar a i -ésima componente do j -ésimo modo desta matriz, pode-se compará-la com $\hat{\phi}_{a,ij}(T_1)$. Inicialmente, comparam-se as magnitudes destas componentes através do índice dado por

$$\begin{aligned}
 Mag_{ij}^S &= \frac{|\hat{\phi}_{a,ij}(T_1)|}{|\tilde{\phi}_{a,ij}(T_1)|}, \text{ para } |\hat{\phi}_{a,ij}(T_1)| \leq |\tilde{\phi}_{a,ij}(T_1)| \\
 &= \frac{|\tilde{\phi}_{a,ij}(T_1)|}{|\hat{\phi}_{a,ij}(T_1)|}, \text{ para } |\tilde{\phi}_{a,ij}(T_1)| < |\hat{\phi}_{a,ij}(T_1)|
 \end{aligned}
 \tag{3.79}$$

Um índice para relacionar os ângulos de fase também pode ser desenvolvido, dado por

$$\begin{aligned}
 Ang_{ij}^S &= 1 - \frac{\left| atan2\left(\frac{\tilde{\phi}_{a,ij}(T_1)}{\hat{\phi}_{a,ij}(T_1)}\right) \right|}{\frac{\pi}{4}}, \text{ para } \left| atan2\left(\frac{\tilde{\phi}_{a,ij}(T_1)}{\hat{\phi}_{a,ij}(T_1)}\right) \right| \leq \frac{\pi}{4} \\
 &= 0, \text{ para } \left| atan2\left(\frac{\tilde{\phi}_{a,ij}(T_1)}{\hat{\phi}_{a,ij}(T_1)}\right) \right| > \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}
 \tag{3.80}$$

Pode-se definir um EMAC de saída para a i -ésima componente do j -ésimo modo utilizando-se os dois índices definidos em (3.79) e (3.80), através de

$$EMAC_{ij}^S = Mag_{ij}^S Ang_{ij}^S
 \tag{3.81}$$

O mesmo procedimento utilizado para desenvolver o EMAC de saída, também pode ser empregado para definir um EMAC de entrada. Compara-se a evolução temporal dos componentes de participação modal,

de $t_0 = 0$ a $t = T_2$, com os correspondentes componentes no último bloco de colunas da matriz de controlabilidade modal (o bloco correspondente à $t = T_2$).

Seja $t = T_2$ o tempo correspondente ao último bloco de colunas da matriz de controlabilidade modal. A evolução temporal no tempo $t = T_2$, para a i -ésima componente do fator de participação modal do j -ésimo modo da estimativa a , pode ser calculada através de

$$\hat{\varphi}_{a,ij}(T_2) = \varphi_{a,ij} e^{s_j T_2} \quad (3.82)$$

onde $\hat{\varphi}_{a,ij}(T_2)$ é a estimativa da i -ésima componente do fator de participação modal do j -ésimo modo no tempo T_2 e s_j é o autovalor de tempo contínuo do modo j .

Obtida uma estimativa da i -ésima componente do fator de participação modal, dada por (3.82), deve-se compará-la com a correspondente componente da matriz de controlabilidade modal. Seja a matriz de controlabilidade modal, $2n$ por βr , definida por

$$[Q_\beta]_M = [\Psi]^{-1} [\Sigma_{2n}]^{1/2} [S_{2n}]^T \quad (3.83)$$

O bloco formado pelas r últimas colunas de $[Q_\beta]_M$ formam uma matriz que contém os fatores de participação modal no tempo $t = T_2$. Utilizando a notação $\tilde{\varphi}_{a,ij}(T_2)$ para indicar a i -ésima componente do fator de

participação modal do j -ésimo modo da estimativa α , pode-se compará-la com $\hat{\phi}_{a,ij}(T_2)$. Inicialmente, comparam-se as magnitudes destas componentes através do índice

$$\begin{aligned} Mag_{ij}^E &= \frac{|\hat{\phi}_{a,ij}(T_2)|}{|\tilde{\phi}_{a,ij}(T_2)|}, \text{ para } |\hat{\phi}_{a,ij}(T_2)| \leq |\tilde{\phi}_{a,ij}(T_2)| \\ &= \frac{|\tilde{\phi}_{a,ij}(T_2)|}{|\hat{\phi}_{a,ij}(T_2)|}, \text{ para } |\tilde{\phi}_{a,ij}(T_2)| < |\hat{\phi}_{a,ij}(T_2)| \end{aligned} \quad (3.84)$$

Um índice para relacionar os ângulos de fase também pode ser desenvolvido, dado por

$$Ang_{ij}^E = 1 - \frac{\left| \text{atan2} \left(\frac{\tilde{\phi}_{a,ij}(T_2)}{\hat{\phi}_{a,ij}(T_2)} \right) \right|}{\frac{\pi}{4}}, \text{ para } \left| \text{atan2} \left(\frac{\tilde{\phi}_{a,ij}(T_2)}{\hat{\phi}_{a,ij}(T_2)} \right) \right| \leq \frac{\pi}{4} \quad (3.85)$$

$$= 0, \text{ para } \left| \text{atan2} \left(\frac{\tilde{\phi}_{a,ij}(T_2)}{\hat{\phi}_{a,ij}(T_2)} \right) \right| > \frac{\pi}{4}$$

Pode-se definir um EMAC de entrada para a i -ésima componente do fator de participação modal do j -ésimo modo utilizando-se os dois índices definidos em (3.84) e (3.85), através de

$$EMAC_{ij}^E = Mag_{ij}^E Ang_{ij}^E \quad (3.86)$$

Finalmente, um EMAC global para o j -ésimo modo pode ser obtido pela expressão

$$EMAC_j = \frac{\left(\sum_{i=1}^m EMAC_{ij}^S |\phi_{a,ij}|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^r EMAC_{ij}^E |\varphi_{a,ij}|^2 \right)}{\left(\sum_{i=1}^m |\phi_{a,ij}|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^r |\varphi_{a,ij}|^2 \right)} \quad (3.87)$$

Os valores numéricos que o EMAC pode assumir variam entre 0 e 1. Um valor acima de 0,9 significa boa consistência temporal na forma dos modos identificados e um valor abaixo de 0,1 significa baixa consistência.

3.3.5 – INDICADOR DE CONSISTÊNCIA MODAL - CMI

Uma das dificuldades de utilizar o MPCW e o EMAC isoladamente, é o fato de que estes índices são unidimensionais, isto é, um quantifica a consistência espacial e o outro a consistência temporal dos resultados da identificação. O CMI foi criado para quantificar simultaneamente a consistência temporal e a espacial, obtida pela multiplicação entre MPCW e EMAC:

$$CMI = MPCW * EMAC \quad (3.88)$$

Valores de CMI maiores de 0,8 significam que o modo foi identificado com alto grau de confiança. Valores de CMI menores de 0,2

significa modos identificados com baixa grau de confiança ou modos não físicos.

CAPÍTULO 4

A IDENTIFICAÇÃO AUTOMATIZADA DE MODELOS DINÂMICOS

A área de identificação de parâmetros modais pode ser considerada uma disciplina bem desenvolvida, com forte fundamentação analítica e experimental. Em decorrência dos avanços ocorridos nas últimas duas décadas, inúmeros métodos podem ser utilizados para identificar estruturas com as mais diversas características.

A aplicação dos métodos de identificação mais avançados requer, em geral, a utilização de equipamentos de custo financeiro elevado. Além disso, o conhecimento necessário para a realização dos procedimentos experimentais, bem como para a análise dos resultados dos algoritmos de identificação, exigem recursos humanos altamente

especializados. Estes requisitos têm sido um empecilho à aplicação mais ampla das técnicas de análise modal experimental. Desta forma, existe grande demanda por técnicas que simplifiquem não só os procedimentos experimentais, mas também a análise dos resultados da identificação.

Neste contexto, esta tese propõe a adoção de técnicas e procedimentos que possibilitem a superação destas dificuldades.

O objetivo principal é a implementação computacional de algoritmos que possibilitem, com pouca intervenção do usuário, a identificação automatizada de estruturas que apresentem comportamento dinâmico complexo, numa faixa larga de frequência. Além disso, a aquisição dos dados experimentais deve ser realizada sem a utilização de equipamentos sofisticados.

4.1 - O PROBLEMA PROPOSTO

Na identificação de estruturas que apresentem comportamento dinâmico complexo, em geral, é aplicado um método de identificação que possibilite o tratamento de dados obtidos na forma de múltiplas entradas e múltiplas saídas - MIMO. Desta forma, pode-se identificar estruturas com alta densidade modal, modos fortemente acoplados ou ainda com pólos repetidos.

Dentre os métodos com capacidade de processar dados MIMO destes tipos de estruturas, se destaca o Algoritmo de Realização de Sistemas - ERA. Este algoritmo foi escolhido como base para este trabalho por ter sido extensivamente testado e aplicado com sucesso nos mais

variados tipos de estruturas, sendo considerado um método eficiente e robusto.

Duas dificuldades são inerentes aos métodos que processam dados MIMO. A primeira se relaciona com o procedimento para a obtenção dos dados experimentais, em que se utilizam equipamentos sofisticados com grande capacidade de aquisição e processamento simultâneos de vários canais. A segunda dificuldade é a análise dos resultados dos algoritmos de identificação, que nestes casos identifica um número maior de modos do que os realmente existentes na faixa de frequência analisada.

A proposta desta tese contém duas partes, relacionadas aos métodos e procedimentos adotados para superar as dificuldades citadas. A primeira parte descreve o procedimento experimental e numérico adotado para a obtenção das sequências de parâmetros de Markov a partir de um conjunto de Funções Resposta em Frequência - FRFs, obtidas na forma SISO. A segunda parte trata da automatização do processo de identificação onde se descreve a metodologia adotada para obter e qualificar os resultados da identificação, sem qualquer intervenção do usuário.

A seguir são descritas as duas partes da proposta de identificação automatizada que são desenvolvidas neste trabalho.

4.2 - OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS DE MARKOV A PARTIR DE FRFs

Uma das dificuldades que ocorrem na aplicação de métodos de identificação baseados na realização de sistemas, como o ERA, é a obtenção dos parâmetros de Markov experimentalmente.

Na prática, a disponibilidade de dados no domínio da frequência têm predominado devido à difusão de analisadores de espectro microprocessados. Desta forma, existe grande interesse na obtenção das sequências de parâmetros de Markov a partir de um conjunto de FRFs.

Na obtenção das FRFs é desejável que se utilizem algoritmos que processem múltiplas entradas e múltiplas saídas simultaneamente. A vantagem, nestes casos, é a precisão obtida na estimativa das FRFs [Allemang 1996]. As principais causas de uma melhor precisão na estimativa simultânea de FRFs são a distribuição uniforme de energia pelo sistema e a consistência temporal dos dados. Uma desvantagem desta forma de obtenção de FRFs é a necessidade de utilização de equipamentos de elevado custo financeiro, consistindo de sistemas de aquisição de sinais multicanais e de grande número de sensores e excitadores.

Este trabalho propõe a utilização de sistemas com somente dois canais de aquisição. Desta forma obtém-se FRFs correspondentes a sistema SISO; posteriormente estas FRFs podem ser agrupadas para formar sistemas MIMO. As vantagens são a simplicidade do sistema de aquisição e o reduzido número de sensores necessários a este procedimento.

Os problemas decorrentes da má distribuição de energia em algumas estruturas, devido ao procedimento adotado, podem ser parcialmente contornados com uma maior variação na localização dos pontos de excitação, ou seja, com um número maior de entradas. Embora a excitação seja realizada em um único ponto a cada vez, a variação de sua localização ao longo da estrutura possibilita, que no conjunto total de



dados experimentais, exista informação suficiente de modos localizados, ou de estruturas com alto grau de amortecimento.

Para melhorar a consistência temporal do conjunto de FRFs obtidas isoladamente será utilizado, em parte, um método baseado no algoritmo desenvolvido por Bayard [Bayard 1992], denominado Algoritmo de Identificação de Espaço de Estado no Domínio da Frequência - SSFD. Este método estima globalmente as sequências de parâmetros de Markov através de um conjunto de FRFs obtidas experimentalmente. Desta forma, melhora-se a consistência temporal das sequências de parâmetros de Markov.

Devido a problemas numéricos e de convergência no algoritmo utilizado por Bayard será utilizado uma versão modificada deste algoritmo, desenvolvido por Chen, Juang e Lee [Chen 1994].

Embora não exista na literatura testes com o algoritmo de Chen, Juang e Lee no caso onde se utiliza um número elevado de pontos de medida, pode-se deduzir da expressão (3.60) que este algoritmo é numericamente sensível à quantidade de saídas (m) e ao número de parâmetros de Markov independentes (p) que se deseja obter em cada sequência. De fato, testes preliminares com este algoritmo confirmam esta observação. Desta forma, para minimizar erros numéricos e o esforço computacional, este algoritmo será aplicado em subconjuntos de FRFs de cada vez.

4.3 - AUTOMATIZAÇÃO E CONDENSAÇÃO MODAL

Uma característica importante do ERA quando utilizado na identificação de estruturas que apresentem comportamento dinâmico complexo, é a identificação de um número maior de modos do que aqueles realmente existentes na faixa de frequência analisada, dificultando a análise dos resultados da identificação. Para auxiliar a análise dos resultados, inúmeros índices foram desenvolvidos para qualificar e quantificar numericamente a qualidade ou precisão dos parâmetros modais identificados, tornando possível detectar e isolar modos mal identificados ou não existentes (não-físicos) no modelo real. Por outro lado, não existe garantia de que todos os modos verdadeiros (ou significativos), dentro da faixa de frequência analisada, sejam identificados.

Uma forma de melhorar a qualidade da identificação e aumentar a probabilidade de identificação de todos os modos verdadeiros é a combinação dos resultados de múltiplas estimativas. O êxito desta abordagem depende de como são realizadas as diferentes estimativas e quais os critérios utilizados para a combinação dos resultados. Como este procedimento resulta num conjunto de parâmetros modais menor que os identificados é genericamente denominado de condensação modal. O resultado final é o conjunto com os parâmetros modais (frequência natural amortecida, fator de amortecimento modal e forma dos modos) melhor identificados.

A análise dos resultados e a condensação modal exigem um grau elevado de conhecimento e experiência de quem os realizam, sendo

uma provável fonte de erros e incertezas. Desta forma, é desejável o desenvolvimento de algoritmos que automatizem estes processos e possibilitem a identificação de estruturas sem a intervenção do usuário.

Recentemente, Pappa, Woodard e Juang [Pappa 1997a] propuseram algoritmos visando a automatização do processo de identificação de estruturas baseados no ERA. Estes autores utilizam dois índices, CMI e MAC, para realizar a condensação dos resultados obtidos a partir de múltiplas estimativas. As várias estimativas são obtidas pelo processamento de cinco grupos de dados experimentais diferentes através de filtros sintonizados em seis bandas de frequência distintas, gerando os dados de entrada para trinta estimativas.

Em um trabalho posterior, Pappa, James III e Zimmerman [Pappa 1997b], com o mesmo objetivo de automatização do processo de identificação, apresentam uma forma de obter várias estimativas sobre um mesmo conjunto de dados experimentais. Variando dois parâmetros internos do ERA, a dimensão da matriz Hankel (neste caso, o número de colunas αm) e o número de modos assumidos ($2n$), podem ser obtidos um grande número de estimativas. A condensação modal é realizada de forma semelhante à utilizada por Pappa, Woodard e Juang [Pappa 1997a].

Embora os resultados destes trabalhos iniciais tenham sido satisfatórios, há necessidade de melhorá-los. No primeiro trabalho, são identificados 24 modos entre 33 existentes. No segundo trabalho, todos os modos foram identificados com alto grau de confiança (7 modos na faixa analisada), Apesar do êxito da identificação, deve-se levar em conta que o tempo de processamento foi bem maior (aproximadamente seis vezes) que

no primeiro trabalho, devido à grande dimensão da matriz Hankel utilizada.

Esta tese, inspirada na filosofia de automatização utilizada neste dois trabalhos, propõe modificações nos algoritmos apresentados. O objetivo é melhorar os resultados da identificação e possibilitar a identificação do maior número de modos dentro da faixa de frequência analisada.

Uma modificação foi realizada no algoritmo para a obtenção de múltiplas estimativas. Será utilizada uma única base de dados experimentais e as estimativas serão realizadas sobre as matrizes Hankel compostas por dados processados por IDFT e pelo método de Chen, Juang e Lee. Desta forma, altera-se a quantidade relativa de informação dos diversos modos contidos na matriz Hankel, favorecendo a identificação de determinados modos. Será utilizada matrizes Hankel de dimensões diferentes se for necessária a realização de um número maior de estimativas.

Com o propósito de tornar os resultados da identificação mais confiáveis, será utilizada uma outra etapa de condensação nos resultados finais. Este procedimento deve ser adotado quando se quiser identificar modelos com comportamento dinâmico complexo numa faixa larga de frequência, pois nestes casos existe a possibilidade de modos mal identificados passarem pela condensação. O resultado final deve estar desprovido de modos mal identificados e de modos repetidos.

Para verificar a validade desta proposta, todos os algoritmos utilizados foram programados e testados sobre uma estrutura com alta densidade modal, em uma faixa larga de frequência, com uma relação de

oitenta vezes entre a frequência natural do último modo em relação à frequência natural do primeiro modo.

CAPÍTULO 5

PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS E IMPLEMENTAÇÃO DOS ALGORITMOS

Na primeira parte deste capítulo são descritos e discutidos os procedimentos utilizados para a obtenção dos dados experimentais que foram usados para verificar a validade do método proposto. Na segunda parte são descritas a implementação computacional e a estrutura lógica dos algoritmos que geram as múltiplas estimativas e realizam a automatização da identificação modal.

5.1 – PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

Esta seção apresenta os procedimentos e equipamentos envolvidos na aquisição dos dados experimentais e a descrição do protótipo ensaiado.

5.1.1 - INTRODUÇÃO

Os conceitos relativos à análise modal experimental são aqui descritos. É dada ênfase àqueles relacionados às formas de realização de ensaios experimentais com o objetivo de obtenção de dados para utilização nos diversos métodos de identificação de parâmetros modais. Alguns autores [Ewins 1984, Allemang 1996] se referem a estes ensaios como Ensaios Modais (“Modal Testing”).

Os procedimentos experimentais são de grande importância, pois a consistência e a precisão na identificação dos parâmetros modais depende diretamente da qualidade e da forma de obtenção dos dados experimentais.

Uma forma de descrever procedimentos utilizados em ensaios modais é através de conceitos e definições que Allemang e Brown formalizaram [Allemang 1994, Allemang 1996]. O principal conceito se refere ao espaço característico, através do qual pode-se facilmente analisar as diversas maneiras de realizar os ensaios experimentais.

O espaço de medida para um problema de identificação de parâmetros modais pode ser visualizado ocupando um volume, com os eixos coordenados definidos em termos de três conjuntos característicos. Dois eixos do volume correspondem à informação espacial e o terceiro eixo à informação temporal.

As coordenadas espaciais são definidas em termos dos graus de liberdade de entrada (aqui denominado de referência) e de saída (resposta) do sistema. O eixo temporal pode ser tanto tempo ou

frequência, dependendo do domínio no qual se quer realizar as medidas.

Estes três eixos definem um volume tridimensional que é denominado espaço característico. Os três eixos que definem o espaço característico podem ser observados na Figura 5.1.

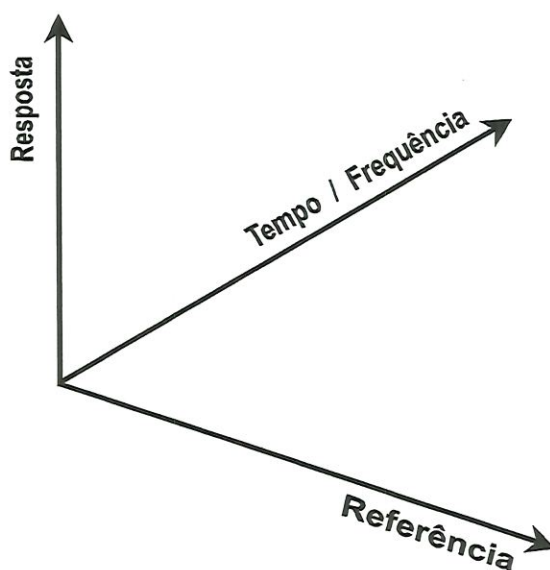


Figura 5.1 – Espaço característico.

Com a definição do espaço característico torna-se simples a descrição das diversas formas de realização dos ensaios e obtenção dos dados experimentais em função da exigência específica de cada método de identificação. Uma vantagem é a possibilidade de classificação de diversos métodos sob esta ótica.

Os métodos que identificam sistemas SISO (uma entrada e uma saída), possuem baixa informação espacial e, conseqüentemente, proporcionam pouca informação sobre as formas modais. A Figura 5.2 mostra o espaço característico de um ensaio SISO, representado por uma reta paralela ao eixo temporal.

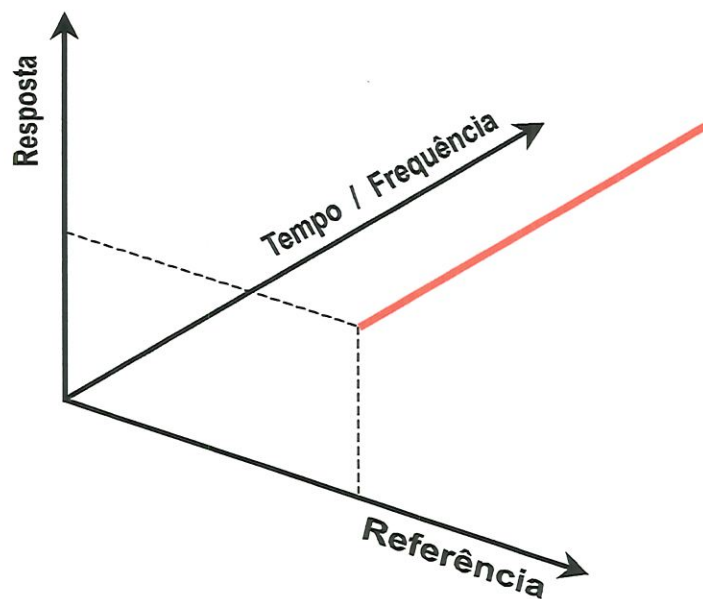


Figura 5.2 – Espaço característico de sistemas SISO.

Os dados experimentais que devem ser obtidos para os métodos de identificação de sistemas SIMO (uma entrada – várias saídas) podem ser representados por retas contidas em um plano paralelo ao plano formado pelos eixos de resposta e tempo/frequência, como apresentado na Figura 5.3. Devido à distribuição espacial das respostas, os dados experimentais possuem boa informação espacial e possibilitam a identificação das formas modais com razoável precisão.

Uma forma de obtenção de dados experimentais para ser utilizado em métodos de identificação mais sofisticados e poderosos, como

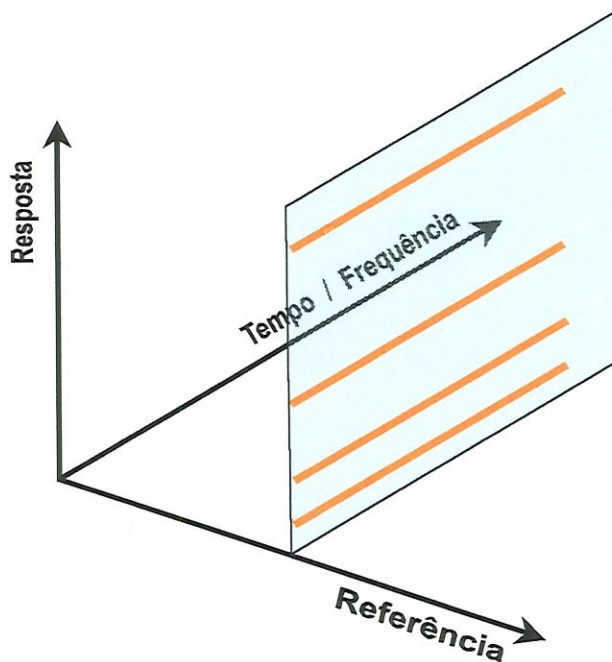


Figura 5.3 – Espaço característico de sistemas SIMO.

o ERA, pode ser apreciada na Figura 5.4. Esta forma se constitui em medidas MIMO (múltiplas entradas - múltiplas saídas), formando planos paralelos no espaço característico. Devido à grande quantidade de informações espaciais e temporais contidas neste conjunto de dados, os métodos com capacidade de processar os dados obtidos desta forma podem identificar melhor modos localizados e acoplados.

Embora a obtenção de dados experimentais na forma MIMO seja aquela que possibilita melhor qualidade e melhor consistência, também é a forma que requer uma maior capacidade nos equipamentos de

aquisição e de processamento de dados, bem como um maior número de sensores.

Por outro lado, é possível realizar várias aquisições distintas na forma SISO e agrupá-las para formar um conjunto de dados MIMO. Esta tese utiliza este procedimento para atingir o objetivo de minimização de

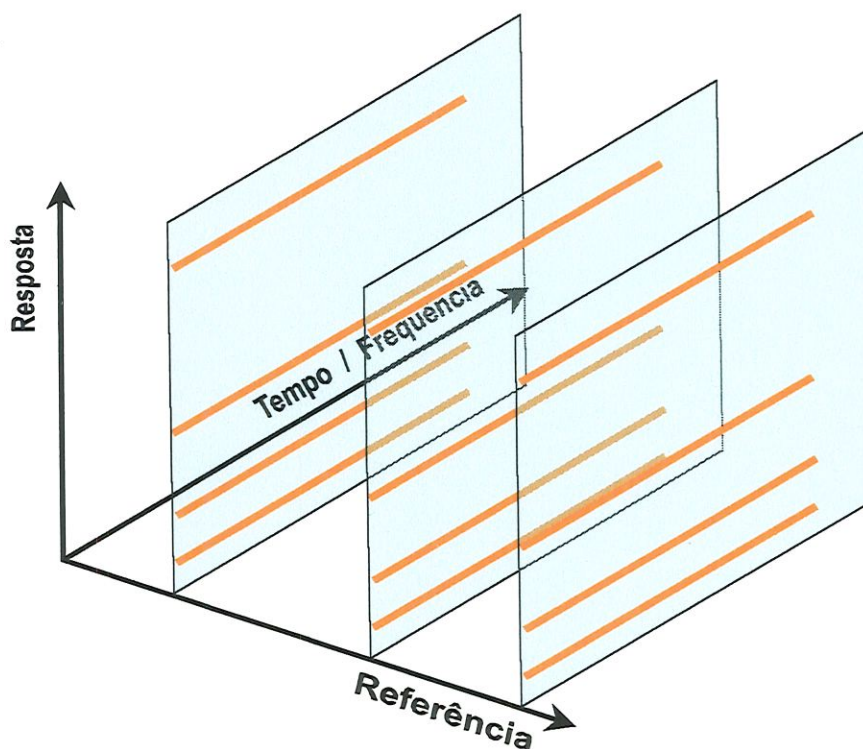


Figura 5.4 – Espaço característico de sistemas MIMO.

recursos em equipamentos. Um dos inconvenientes que pode ocorrer com este procedimento são os problemas de consistência temporal nos dados adquiridos. Entende-se por consistência temporal a variabilidade dos parâmetros do sistema ao longo do tempo. Esta variabilidade se reflete nos dados experimentais, que foram obtidos sob diferentes condições.

A consistência temporal deve ser considerada quando dados experimentais são adquiridos em ensaios distintos e analisada conforme a estrutura que é objeto de identificação. No caso de estruturas extremamente leves a utilização de um número grande de acelerômetros pode adicionar massa considerável ao sistema. Por outro lado, a mudança de posição de um único acelerômetro modifica as características do conjunto estrutura-sensor a cada medida. Este mesmo raciocínio deve ser aplicado ao se comparar os efeitos da utilização de um ou mais excitadores simultaneamente.

5.1.2 – DESCRIÇÃO DO MODELO EXPERIMENTAL

O modelo experimental utilizado para testar o método proposto é uma placa quadrada de alumínio. Esta placa está engastada em um dos seus lados através de placas espessas de aço e todo o conjunto foi fixado à uma base inercial. A Figura 5.5 traz uma foto da placa, do engaste e da base inercial.

Para realizar os ensaios, a placa foi marcada com a localização dos pontos de entrada e saída. A Figura 5.6 mostra a localização dos 2 pontos de entrada (excitação) e as dimensões da placa. A localização dos pontos de entrada, *A* e *B*, foi escolhida arbitrariamente e devem ser suficientes para a excitação de todos os modos na faixa de frequência de interesse.

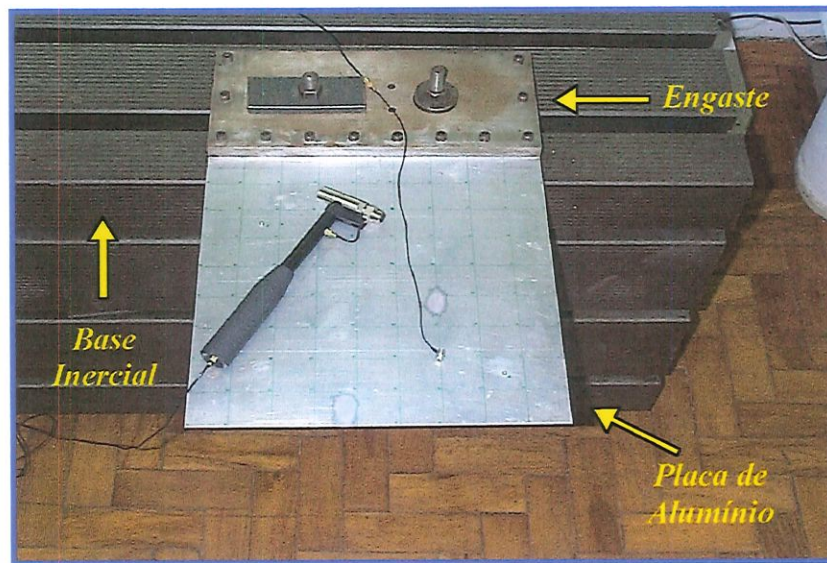


Figura 5.5 – Placa de alumínio utilizada

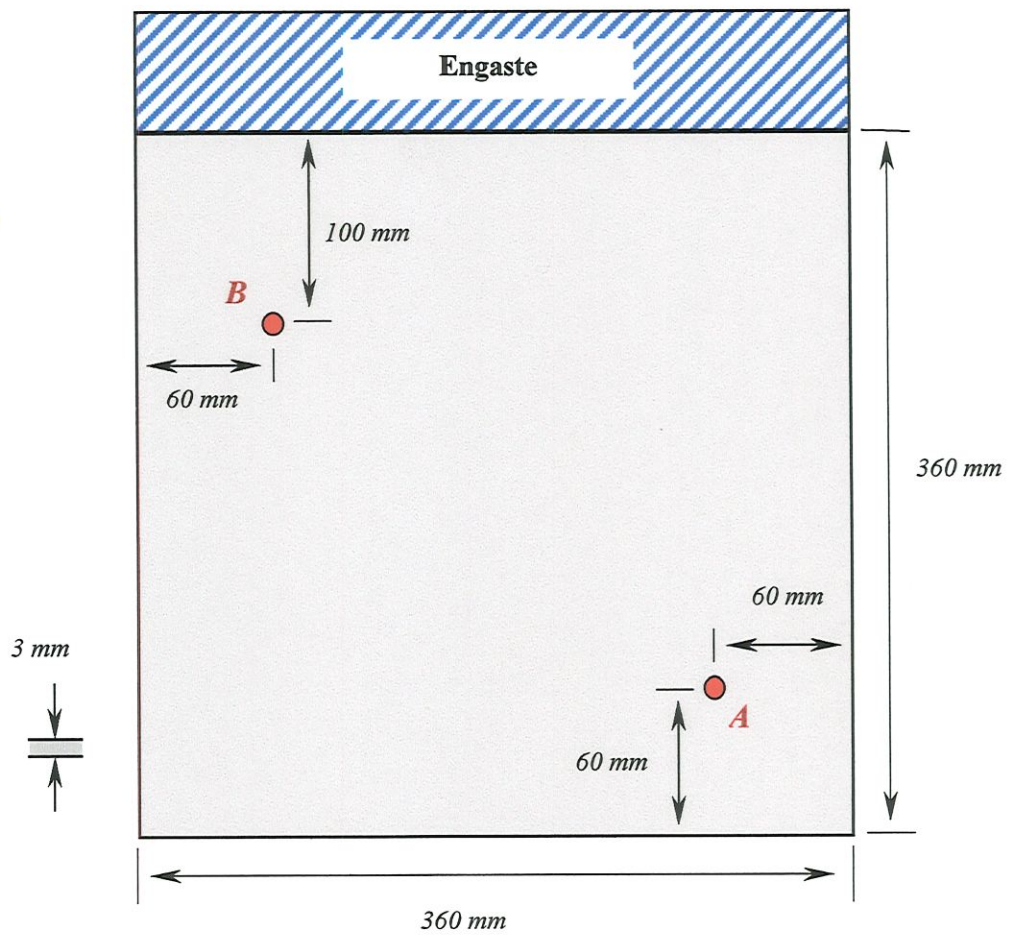


Figura 5.6 – Localização dos pontos de entrada e dimensões da placa.

A localização dos pontos de saída é apresentada na Figura 5.7. Foram marcados 100 pontos de saída. A localização destes pontos foi determinada de forma a que ficassem igualmente espaçados. O número de saídas deve ser suficiente para se obter uma boa resolução das formas modais.

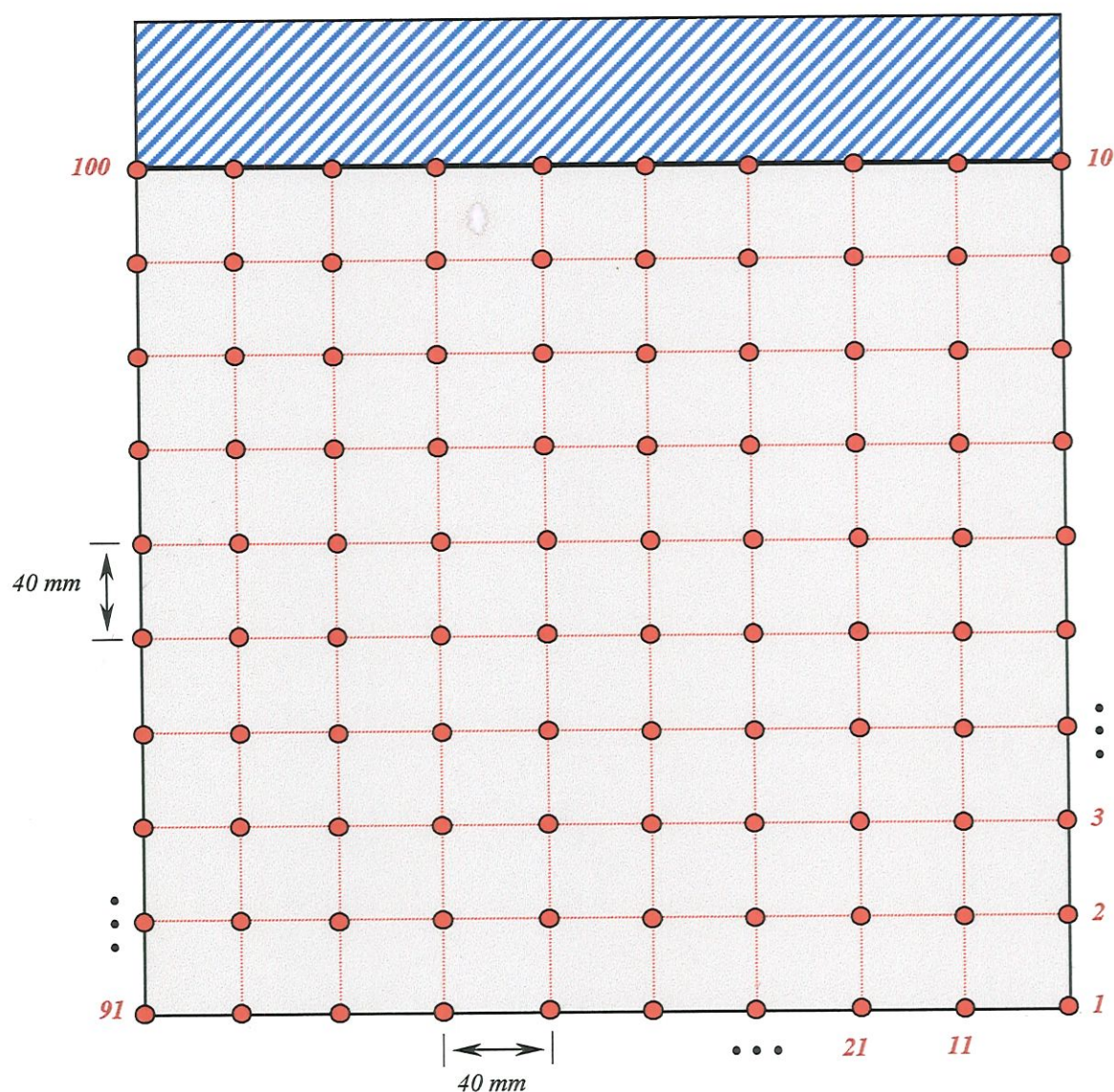


Figura 5.7 – Localização dos pontos de saída.

5.1.3 – AQUISIÇÃO DOS DADOS EXPERIMENTAIS

Os ensaios foram realizados com o objetivo de obter Funções de Resposta em Frequência - FRFs. O tipo de entrada utilizada foi o impulso, com a utilização de martelo de impacto instrumentado como fonte excitadora. Foram escolhidos 2 pontos de excitação, conforme mostra a Figura 5.6. Como saída foram medidas as acelerações em cada um dos 100 pontos descritos na Figura 5.7. Nos pontos de entrada foram coladas pequenas esferas de aço para facilitar e direcionar a excitação. Nos pontos de saída foi utilizado um mini-acelerômetro piezoelétrico cuja fixação à placa de alumínio foi feita com a utilização de cera apropriada, conforme mostra a Figura 5.8.

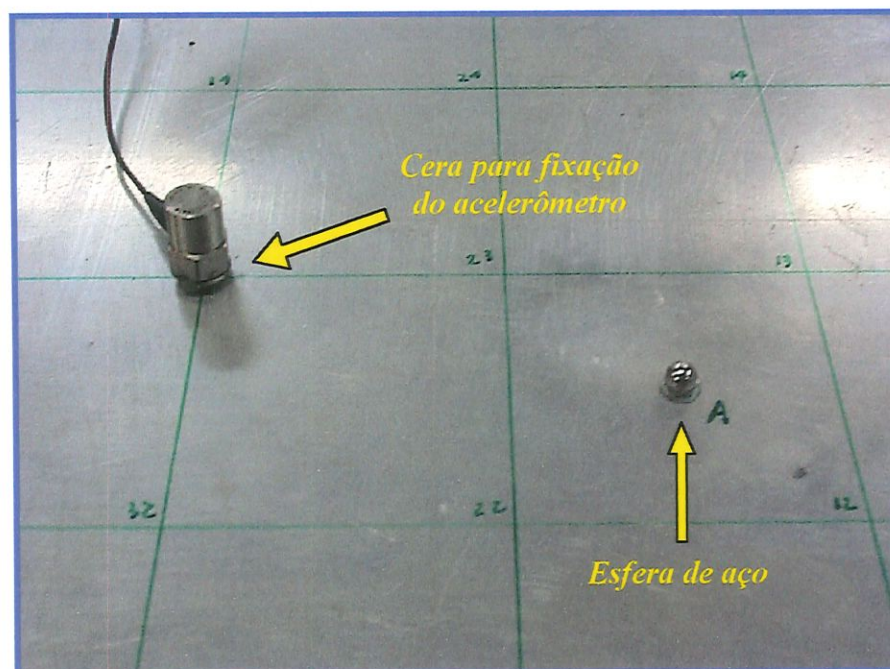


Figura 5.8 – Fixação do acelerômetro e da esfera de aço.

Os ensaios foram realizados aplicando-se a entrada do tipo impulso em cada um dos 2 pontos de entrada. A FRF pode ser obtida através das medidas da força desta entrada e da aceleração em cada ponto de saída. Variando-se os pontos de entrada e de saída pode-se obter 200 FRFs. Os sinais das medidas de força e de aceleração são amplificados através de amplificadores de carga apropriados e são filtrados e processados por um analisador de sinais. Posteriormente, a FRF gerada pelo analisador é transmitida para um microcomputador através de uma interface paralela IEEE-488. A figura 5.9 mostra uma foto da montagem experimental.

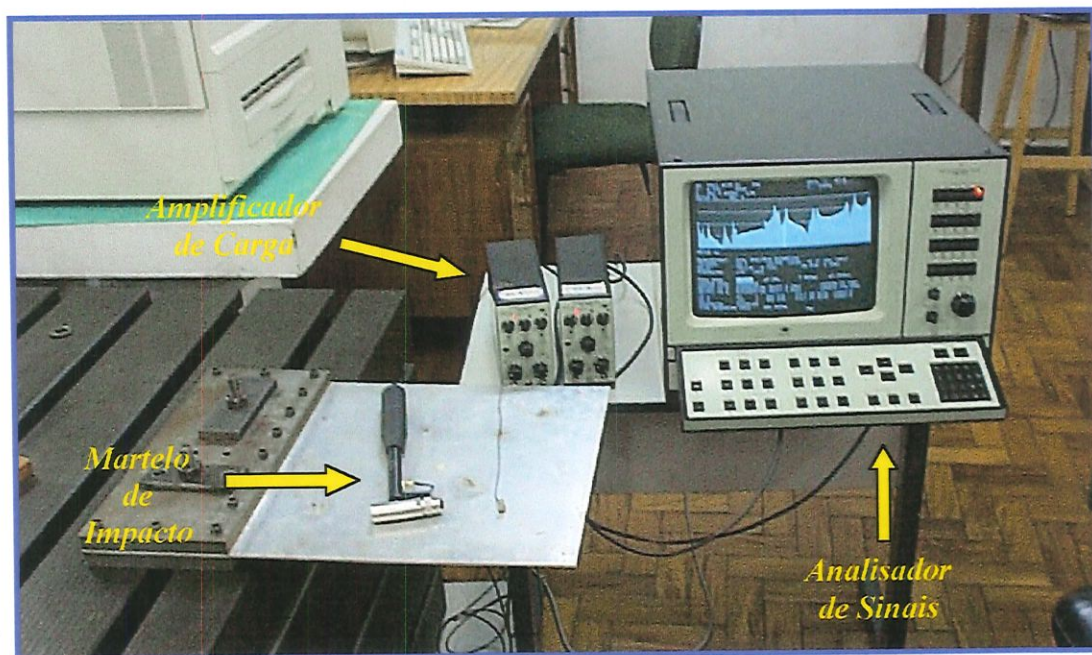


Figura 5.9 – Montagem Experimental.

A Tabela 5.1 relaciona os equipamentos utilizados nos ensaios experimentais, com seus modelos e algumas especificações técnicas.

Tabela 5.1 – Relação dos equipamentos utilizados.

EQUIPAMENTOS UTILIZADOS
Analizador de Sinais de Dois Canais B&K - Modelo 2032
Amplificadores B&K - Modelo 2626.
Martelo de Impacto B&K - Modelo 8202. Sensibilidade com Atenuador = 1,0 pC/N. Massa com Célula de Carga = 311 gramas.
Célula de Carga B&K - Modelo 8200 Sensibilidade = 4,05 pC/N.
Mini-Acelerômetro B&K - Modelo 4375. Sensibilidade = 0,319 pC/ms ⁻² . Massa = 2,4 gramas.

A faixa de frequência de interesse foi determinada como sendo de 0 a 1600 Hz. Para que se excite adequadamente essa faixa de frequência, o martelo de impacto foi utilizado com uma ponteira de aço. O analisador tem uma resolução de 800 linhas, o que significa uma resolução de 2 Hz nesta faixa de frequência.

Na obtenção das FRFs foi utilizado o recurso de “averaging” (5 médias) para minimizar os efeitos de ruído. Além disso, foi utilizada uma janela exponencial nos sinais de força e de aceleração.

5.2 - IMPLEMENTAÇÃO DOS ALGORITMOS

Esta seção descreve a implementação computacional e a estrutura lógica dos algoritmos que fazem parte do método proposto.

5.2.1 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Todos os algoritmos foram programados na linguagem MATLAB[®] v 5.2 processado em microcomputador P-II 266 com 128 Mb de memória, sob o sistema operacional Windows[®]98.

A linguagem MATLAB[®] na versão 5.2 permite que os dados sejam modelados tridimensionalmente, possibilitando uma programação condensada. Este tipo de modelagem de dados foi utilizada para facilitar a representação das FRFs e das sequências de parâmetros de Markov, onde a terceira dimensão foi utilizada como eixo de tempo ou frequência.

Um recurso da linguagem MATLAB[®] que foi muito utilizado é a sua grande capacidade de indexação de vetores e matrizes. Este recurso foi extremamente útil na programação da condensação modal.

Após a programação dos algoritmos o código foi, na medida do possível, otimizado com relação à sua velocidade de execução.

5.2.2 – OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS DE MARKOV ATRAVÉS DE FRFs

A obtenção das sequências de parâmetros de Markov através de FRFs é realizada através do algoritmo de Chen, Juang e Lee.

A implementação do algoritmo de Chen, Juang e Lee pode ser dividida em duas etapas. Na primeira se obtém as matrizes da decomposição das FRFs. Na segunda etapa, calcula-se os parâmetros de Markov a partir das matrizes resultantes da decomposição. O programa resultante deste algoritmo foi denominado de *FRFMARKV*.

Os dados de entrada (FRFs) deste programa devem estar no formato de uma matriz tridimensional de dimensão m por r por ℓ , onde m é o número de pontos de respostas (saídas), r é o número de pontos de referências (entradas) e ℓ é o número de linhas espectrais de cada FRF. Cada elemento desta matriz deve estar no formato de um número complexo.

Os dados de saída do programa é uma matriz tridimensional de dimensão m por r por $(p+v)$, onde p é o número de parâmetros de Markov linearmente independentes e v é o número de parâmetros de Markov linearmente dependentes. Cada elemento desta matriz é um número real.

5.2.3 - IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO ERA E DOS ÍNDICES DE CONSISTÊNCIA

Pode-se dividir a implementação do algoritmo ERA e dos índices EMAC, MPCW e CMI em seis etapas. Na primeira montam-se as matrizes Hankel $[H(0)]$ e $[H(1)]$. Numa segunda etapa aplica-se a SVD na matriz $[H(0)]$. Na terceira etapa, estabelece-se a ordem do sistema $2n$. Na quarta etapa obtém-se as matrizes $[\Sigma_{2n}]$, $[R_{2n}]$, $[S_{2n}]$ e as matrizes do sistema realizado $[A_d]$, $[B_d]$ e $[C_d]$. Na quinta etapa, transforma-se o sistema para as coordenadas modais, obtendo-se as matrizes $[A]$, $[B_d]_M$ e $[C_d]_M$. Finalmente, na sexta etapa, obtém-se os parâmetros modais e calculam-se os índices EMAC, MPCW e CMI. A Figura 5.10 traz o fluxograma que mostra a sequência das etapas descritas.

Os dados finais desta sequência de subrotinas são os parâmetros modais e os índices EMAC, MPCW e CMI correspondentes.

5.2.4 - IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DE MÚLTIPLAS ESTIMATIVAS

As múltiplas estimativas da identificação podem ser obtidas de várias formas. Uma das formas de obtenção das múltiplas estimativas é realizando um grande número de sistemas de ordens ($2n$) diferentes, a partir de um único par de matrizes Hankel $[H(0)]$ e $[H(1)]$. Estes sistemas podem ser realizados variando-se o valor de n . Desta forma, a ordem dos sistemas que podem ser realizados vão de 2 até o valor da menor

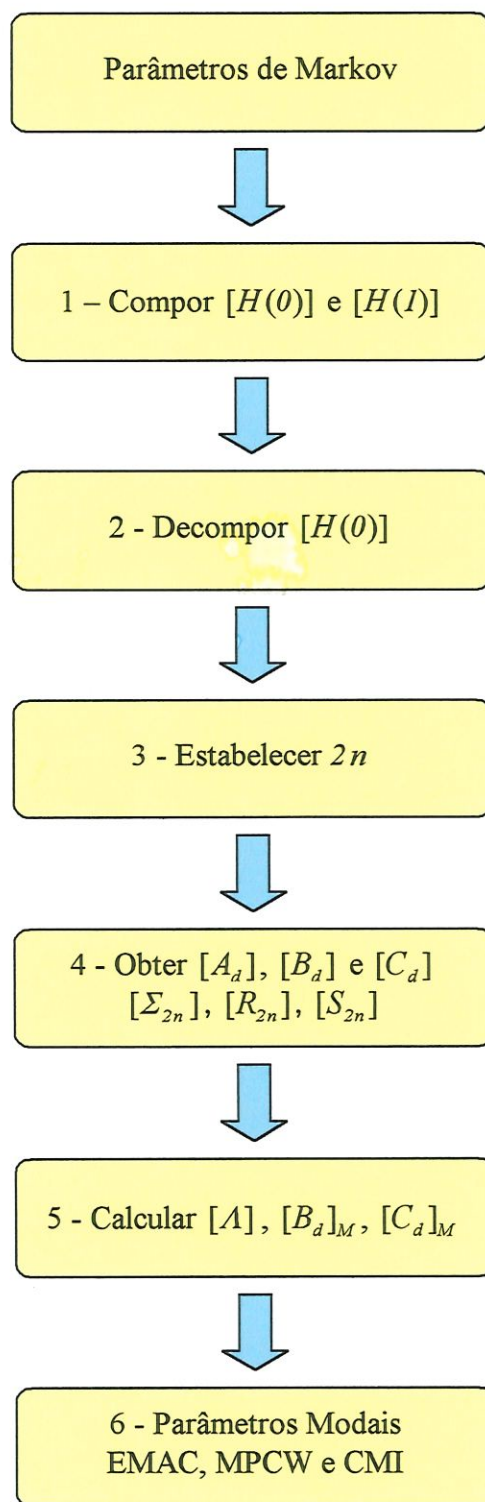


Figura 5.10 – Fluxograma da implementação do ERA, EMAC, MPCW e CMI.

dimensão da matriz Hankel (geralmente o número de colunas βr), em incrementos de 2.

Uma segunda forma de obtenção de múltiplas estimativas é realizando sistemas a partir de pares diferentes de matrizes Hankel $[H(0)]$ e $[H(I)]$. Basta compor pares de matrizes Hankel de dimensões diferentes das utilizadas anteriormente para que se altere a quantidade relativa de informação dos diversos modos contidos nestas matrizes.

Outros pares de matrizes Hankel podem ser compostas com sequências de parâmetros de Markov distintas das utilizadas anteriormente. Pode-se obter sequências de parâmetros de Markov através do algoritmo de Chen, Juang e Lee.

Este trabalho utiliza em conjunto as várias formas de geração de múltiplas estimativas.

A implementação do algoritmo de obtenção de múltiplas estimativas é feita através de modificações na implementação do ERA e dos índices de consistência, descritas na seção anterior. A Figura 5.11 traz o fluxograma da implementação do algoritmo de geração de múltiplas estimativas utilizando pares de matrizes Hankel de dimensões diferentes.

5.2.5 - IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DE CONDENSAÇÃO MODAL

A condensação modal é realizada em três etapas. A primeira etapa é destinada à eliminação, dentro de critérios específicos, de parâmetros modais mal identificados ou de modos computacionais para uma dada estimativa. A segunda parte envolve a comparação de

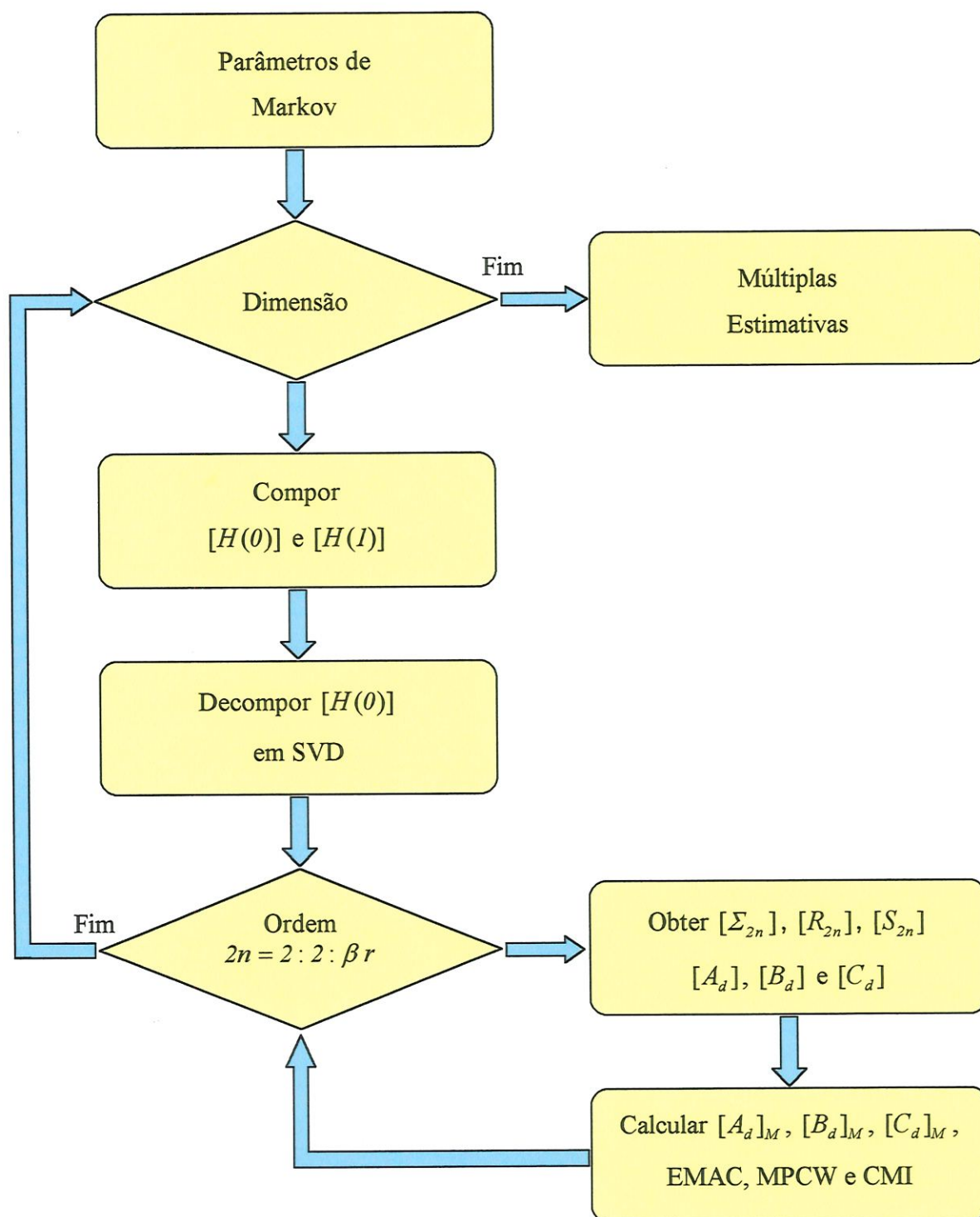


Figura 5.11 – Fluxograma da implementação das múltiplas estimativas.

parâmetros modais e índices de consistência de duas estimativas diferentes. A partir dos resultados desta comparação pode-se determinar se existem modos semelhantes entre os dois conjuntos de estimativas e o grau de semelhança ou, caso contrário, se um determinado modo foi identificado somente numa estimativa. Desta forma, pode-se escolher entre modos semelhantes o melhor identificado ou, ainda, adicionar modos que não haviam sido identificados pelas estimativas anteriores.

Alguns dos critérios utilizados na etapa de eliminação de parâmetros modais de uma estimativa devem ser estabelecidos através do conhecimento prévio do comportamento dinâmico da estrutura. No caso do modelo ensaiado (placa de alumínio), um critério estabelecido é de que modos com amortecimento superior a 10% devem ser eliminados. Outros critérios podem ser utilizados para eliminar modos computacionais. Um destes critérios é o que elimina modos com frequência dentro da faixa de 1% do final da faixa de frequência analisada. A Tabela 5.2 mostra os critérios utilizados para a eliminação de parâmetros modais de uma estimativa. Os valores foram escolhidos arbitrariamente e podem ser ajustados pelo usuário.

A comparação entre dois conjuntos de parâmetros modais distintos é realizada através do Critério de Correlação Modal – MAC (ou do IMAC). Calcula-se o MAC entre o modo de uma estimativa e os modos de outra estimativa (ou outro conjunto de parâmetros modais), cujas frequências se diferenciem no máximo em 10%. Estabelece-se um valor de referência para o MAC (por exemplo, 50%). Valores de MAC superiores ao valor de referência é um indicativo de que os pares de modos considerados

são os mesmos. Caso contrário, considera-se que os modos comparados não são os mesmos. Através deste critério pode-se distinguir modos distintos mas de mesma frequência. O valor escolhido para o MAC representa um limiar que pode ser ajustado pelo usuário.

Tabela 5.2 – Critérios utilizados na eliminação de parâmetros modais.

CRITÉRIO	EFEITO ESPERADO / ELIMINAR
Amortecimento < 0%	Modos computacionais
Amortecimento > 10%	Modos mal identificados Modos computacionais
$0,99 \omega_{\max} \leq \omega_{nd} \leq \omega_{\max} \#$	Frequência de Aquisição
$\omega_{nd} = 0 \#$	Modos de corpo rígido
$\omega_{nd} \leq 0.01 \omega_{\min} \#$	Modos computacionais
CMI < 30%	Modos mal identificados

ω_{nd} = frequência natural amortecida; ω_{\max} = limite superior da faixa de frequência analisada; ω_{\min} = limite inferior da faixa de frequência analisada.

A Figura 5.12 mostra um fluxograma com a lógica do algoritmo de condensação modal.

A implementação do algoritmo de condensação modal é feita em conjunto com o algoritmo de múltiplas estimativas e abrange o ERA e

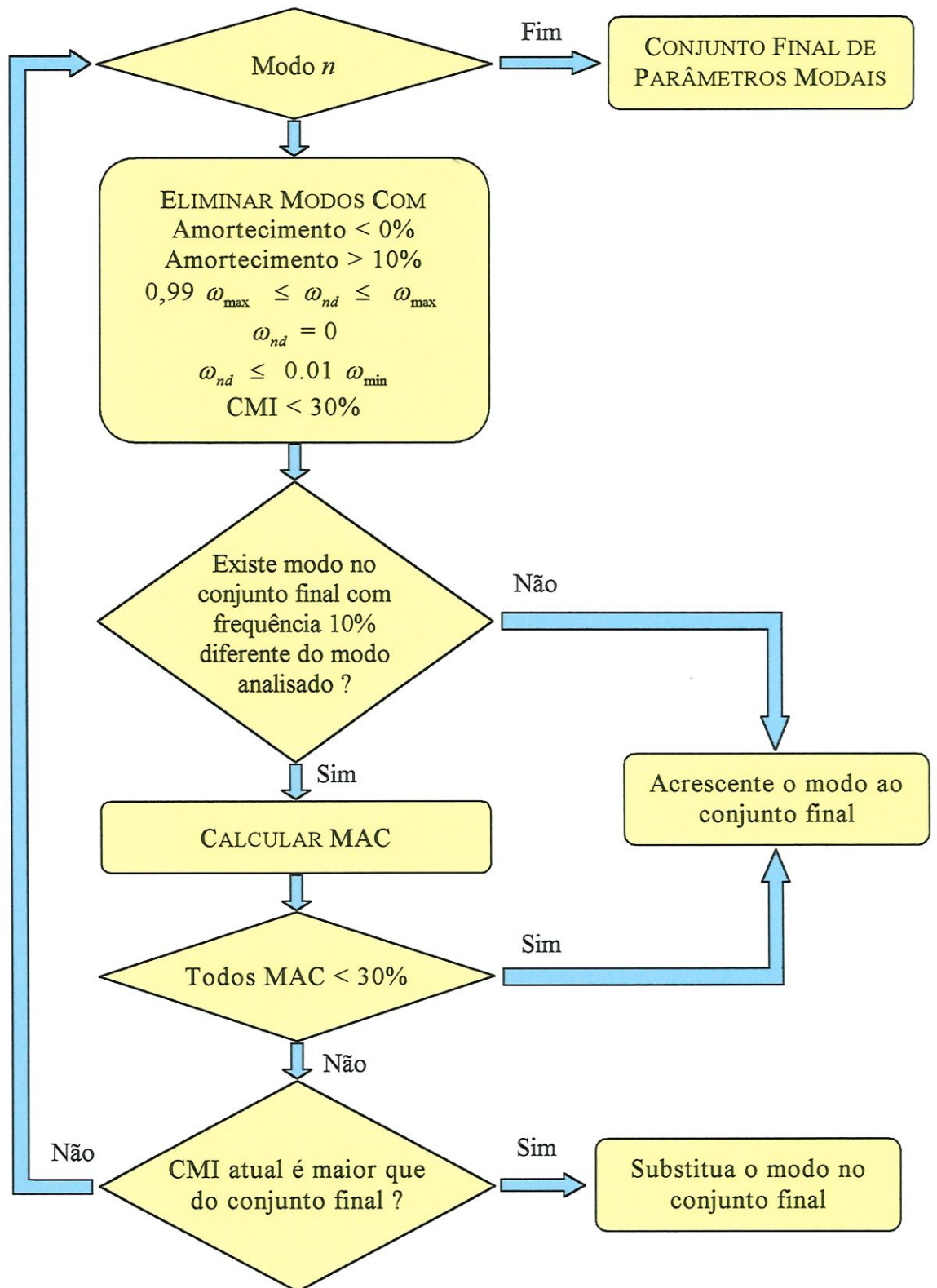


Figura 5.12 – Fluxograma da condensação modal.

todos os índices de consistência utilizados. A implementação deste conjunto de algoritmos constituem a automatização proposta. O programa resultante foi denominado de *AUTOID*. A Figura 5.13 mostra um fluxograma do *AUTOID*.

Uma terceira etapa de condensação modal é realizada nos resultados finais da identificação. Ela se constitui no cálculo do MAC entre todos os modos presentes no conjunto final. Através das análises dos valores de MAC e das formas modais obtidas é possível a eliminação de modos mal identificados ou de modos identificados duplamente e que passaram pelas condensações anteriores.

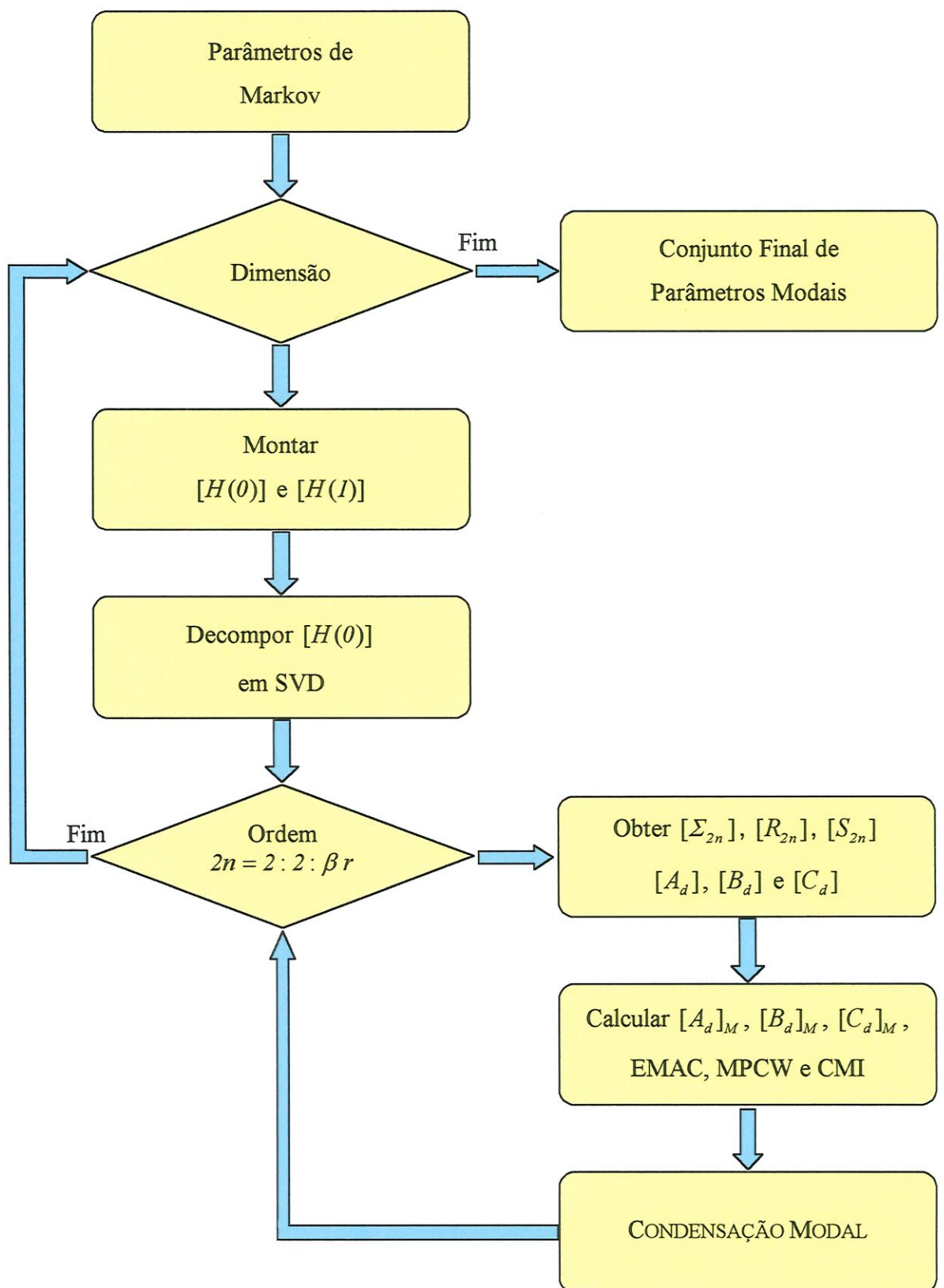


Figura 5.13 – Fluxograma do método de identificação automatizada AUTOID.

CAPÍTULO 6

RESULTADOS

Este capítulo apresenta os dados experimentais obtidos e os resultados da identificação automatizada. Na seção 6.1 são mostrados os dados experimentais originais, dados crus, e aqueles que sofreram algum processamento e que são utilizados pelo algoritmo de identificação. Os resultados do algoritmo de automatização da identificação são apresentados e discutidos na seção 6.2.

6.1 – DADOS EXPERIMENTAIS

Os dados experimentais originais são as Funções Resposta em Frequência. A Figura 6.1 mostra a amplitude de três FRFs, representativas do conjunto total das duzentas FRFs medidas. As fases correspondentes às FRFs mostradas na Figura 6.1 podem ser vistas na

Figura 6.2. A notação utilizada para indicar a localização da entrada e da saída das FRFs é descrita em função das marcações assinaladas na placa de alumínio mostrada nas Figuras 5.6 e 5.7. Desta forma, FRF-B24 indica que esta Função Resposta em Frequência foi obtida medindo-se a força aplicada no ponto *B* e a aceleração no ponto 24.

Pode-se observar que existe uma grande variação das amplitudes das FRFs A01 e B24 em relação à amplitude da FRF-A70. Além disso a FRF-A70 está contaminada por uma quantidade considerável de ruído. A baixa amplitude relativa e a contaminação por ruído ocorreram em todas as FRFs cujas acelerações são medidas nos pontos localizados próximos ao engastamento, que correspondem a 10% do total de FRFs medidas.

Os gráficos da Figura 6.1 apresentam uma grande quantidade de modos presentes na faixa de frequência analisada, demonstrando a complexidade do comportamento dinâmico do modelo nesta faixa.

Uma comparação entre as FRFs A01 e B24 mostra que a FRF-A01 possui uma quantidade maior de picos visíveis que a FRF-B24. Duas possíveis razões para este fato são a localização dos pontos de excitação e dos pontos de resposta. O ponto de medida da aceleração (resposta) da FRF-A01 está localizado num dos cantos da extremidade livre da placa de alumínio, por onde possivelmente não passa nenhuma linha nodal. Por outro lado, o ponto de medida da aceleração da FRF B24 está localizado dentro da placa de alumínio, provavelmente muito próximo da linha nodal de um ou mais modos dentro da faixa de frequência de análise. O mesmo pode-se dizer dos dois pontos de excitação, localizados a

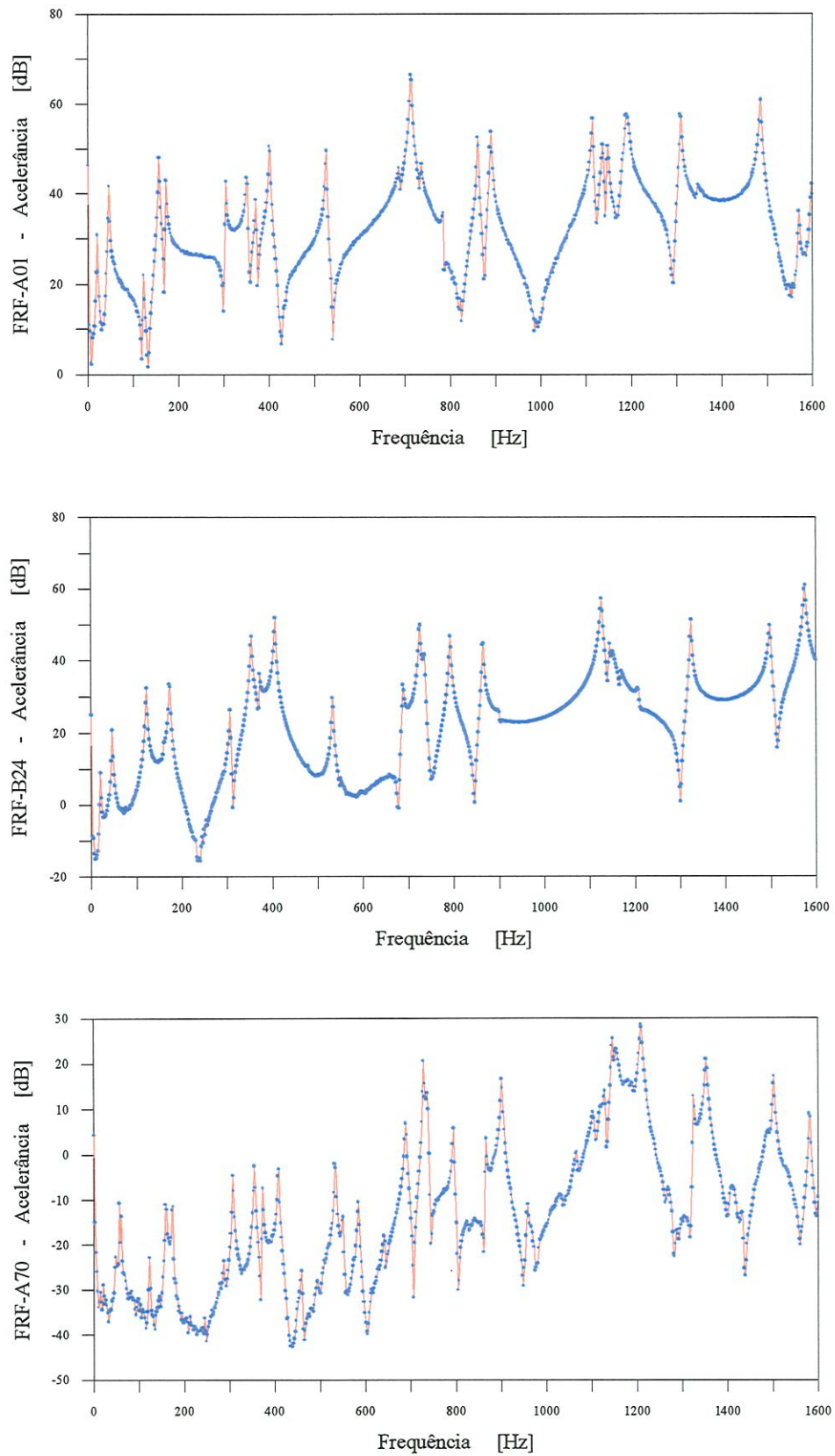


Figura 6.1 – Amplitude das FRFs obtidas experimentalmente.

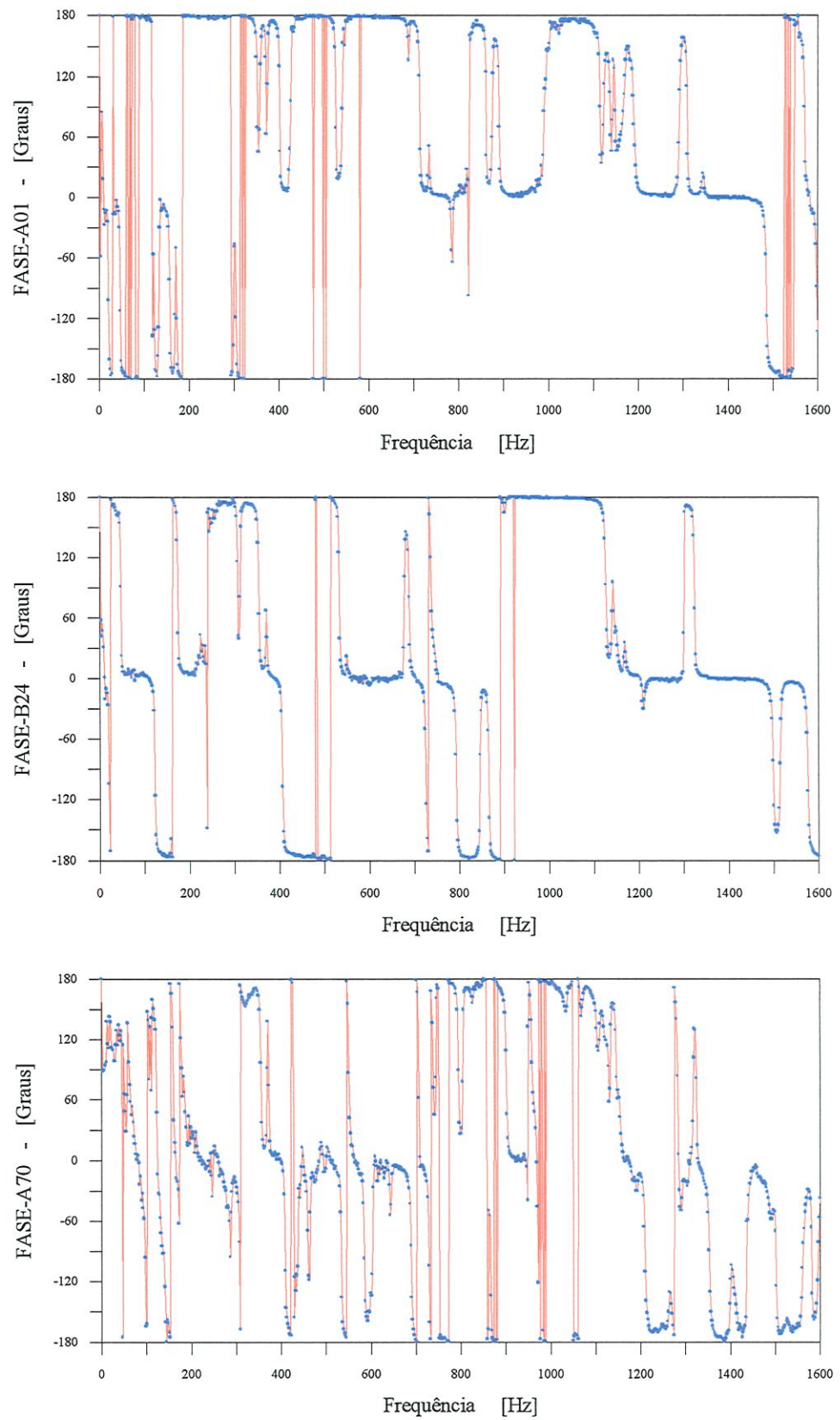


Figura 6.2 – Fase das FRFs obtidas experimentalmente.

uma certa distância das extremidades da placa de alumínio. Dependendo da distância relativa entre a localização dos pontos de entrada e as linhas nodais dos diversos modos, a entrada deve excitar com amplitudes diferentes os diversos modos.

A localização dos acelerômetros está diretamente ligada ao grau de observabilidade do sistema e a localização das excitações está diretamente ligada ao grau de controlabilidade do sistema. O conjunto total de FRFs traz informações sobre os graus de observabilidade e de controlabilidade, relativas às localizações das saídas e entradas do sistema. Por outro lado, deve-se levar em conta que limitações ocasionadas por procedimentos experimentais, que não estão relacionadas com a localização dos pontos de entrada e saída, também afetam diretamente os graus de observabilidade e de controlabilidade contidos nas FRFs. Exemplos destas limitações experimentais são a resolução das FRFs e o nível de ruído presentes nos dados experimentais.

A partir das FRFs medidas podem ser obtidas as respostas ao impulso correspondentes (ou sequências de parâmetros de Markov). O conjunto das respostas ao impulso formam os dados de entrada para o Algoritmo de Realização de Sistemas - ERA. As respostas ao impulso foram obtidas de duas formas: através da Transformada Inversa de Fourier Discreta - IDFT e através do algoritmo de Chen, Juang e Lee, descrito na seção 3.2.2.

A Figura 6.3 traz três gráficos das respostas ao impulso obtidas por IDFT, correspondentes às FRFs mostradas na Figura 6.1.

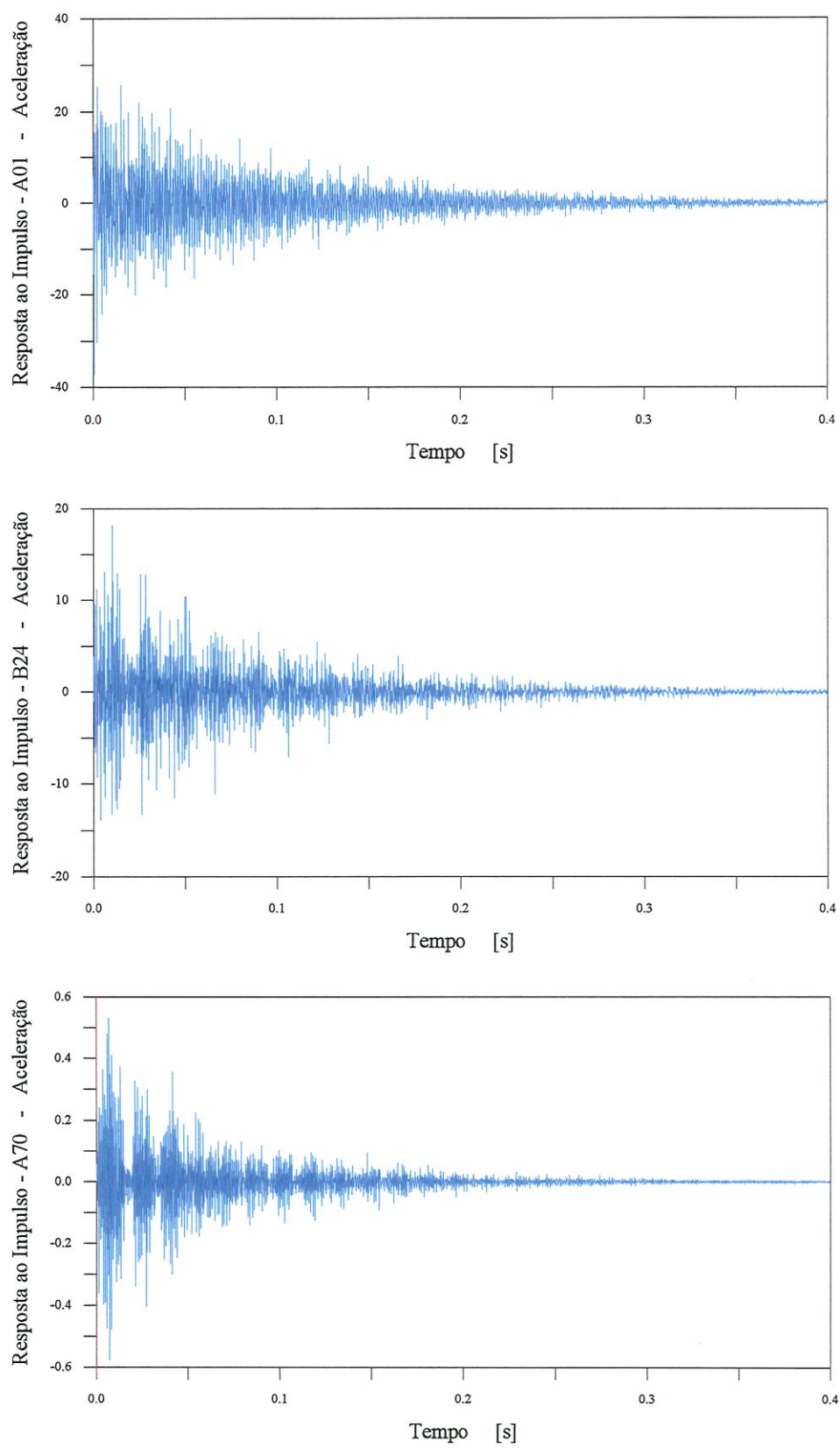


Figura 6.3 – Respostas ao Impulso obtidas por IDFT.

Pode-se notar a diferença de amplitude entre as respostas obtidas e, em certo grau, pode-se avaliar o nível de amortecimento presente no modelo.

As mesmas respostas ao impulso, correspondentes àquelas apresentadas na Figura 6.3, obtidas pelo método de Chen, Juang e Lee podem ser vistas na Figura 6.4. Foram calculados 542 pontos para cada resposta, sendo 91 pontos linearmente independentes e 451 linearmente dependentes. O método de Chen, Juang e Lee foi aplicado em grupos de 10 FRFs de cada vez, correspondentes a 5 pontos de medida de saída e 2 pontos de medida de entrada. Os 5 pontos de medida de saída foram tomados sequencialmente, obedecendo à numeração apresentada na Figura 5.7.

Uma comparação entre as respostas ao impulso obtidas pelos dois métodos pode ser vista na Figura 6.5. São comparados os 160 primeiros pontos das respostas ao impulso mostradas anteriormente.

Para realizar uma pré-análise do modelo testado, foram calculados o espectro de potência médio – APS e a função indicadora de modo – MIF. O APS e o MIF podem ser calculados através das expressões (6.1) e (6.2).

$$APS(\omega_i) = \frac{\sum_{j=1}^N |G_j(\omega_i)|^2}{N} \quad (6.1)$$

$$MIF(\omega_i) = \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^N |\operatorname{real}(G_j(\omega_i))| |G_j(\omega_i)|}{\sum_{j=1}^N |G_j(\omega_i)|^2} \right) 1000 \quad (6.2)$$

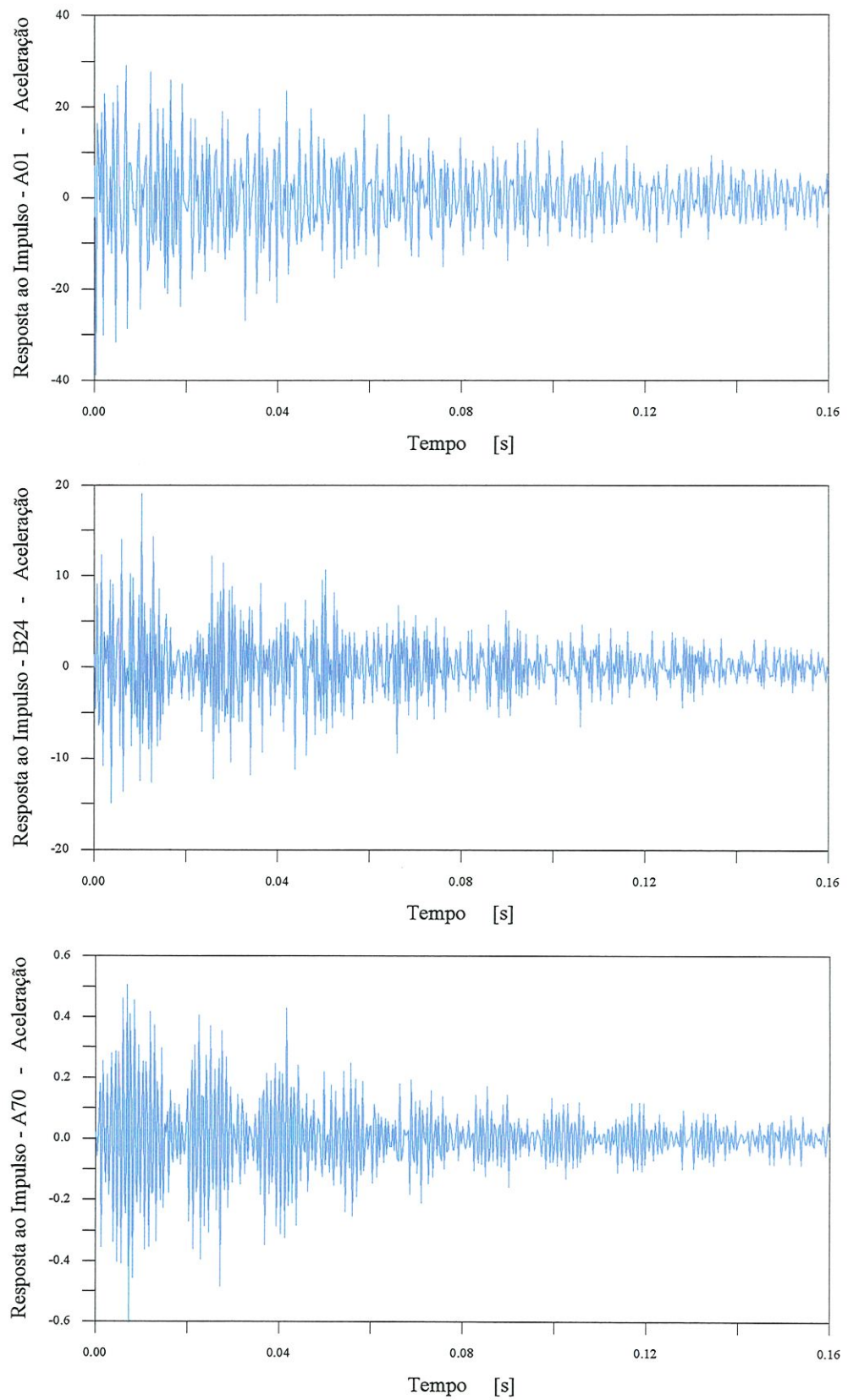


Figura 6.4 – Respostas ao Impulso obtidas pelo método de Chen et al.

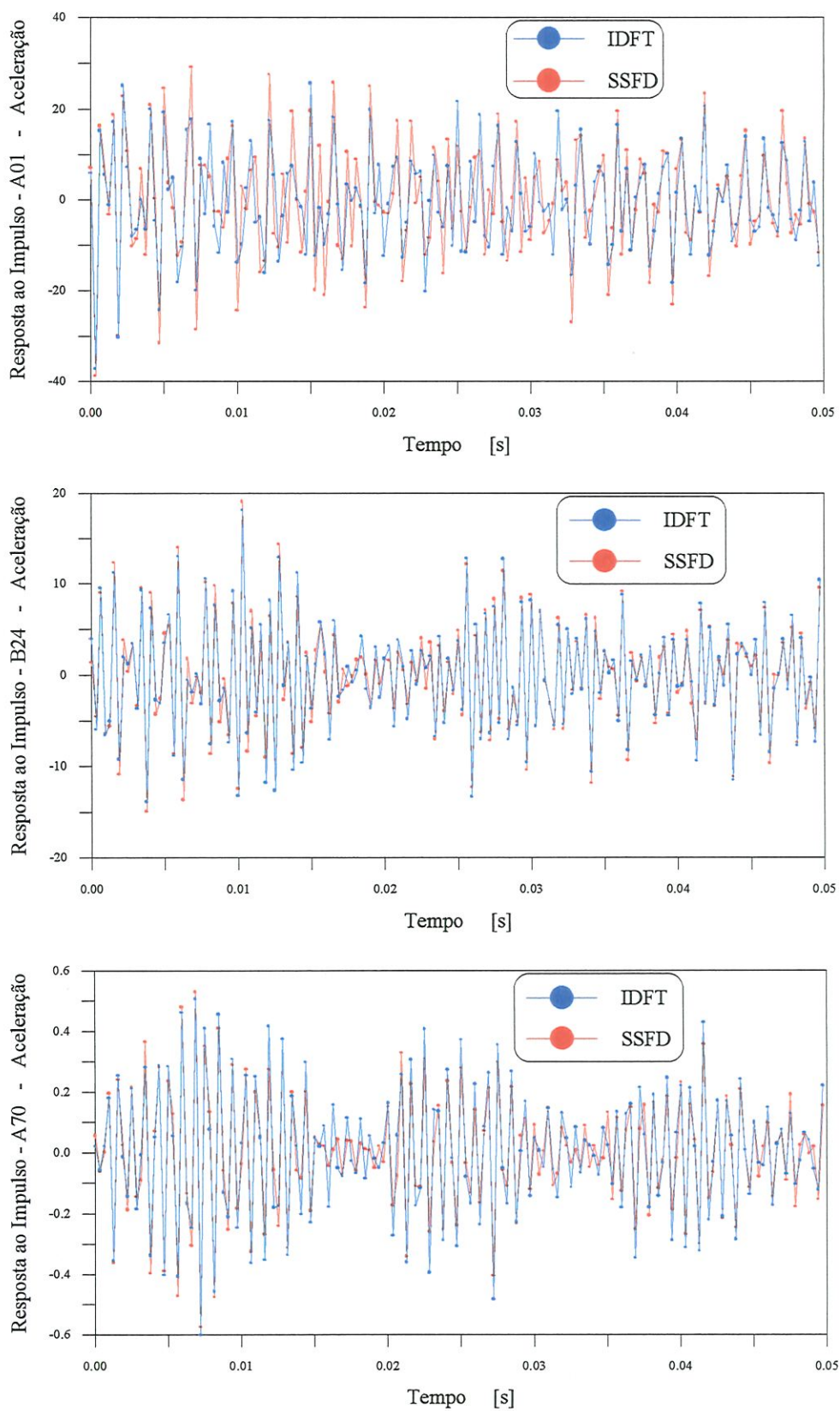


Figura 6.5 – Comparação das respostas ao impulso.

onde $G_j(\omega_i)$ é o valor da j -ésima FRF na frequência ω_i e N é o número total de FRFs.

A Figura 6.6 apresenta os resultados do APS aplicado ao conjunto total das FRFs obtidas. O APS apresenta um pico na frequência natural de cada modo e a sua amplitude relativa. Pode-se notar que a variação da amplitude dos modos (em aceleração) é da ordem 10^5 , sendo que o modo de frequência mais baixa apresenta a menor amplitude. Este é um dos indicativos das dificuldades que podem surgir na identificação dos modos e que podem influenciar diretamente a qualidade dos resultados da identificação. Um outro dado que se pode tirar do APS é uma estimativa da ordem do sistema através do número total de picos existentes. Uma avaliação preliminar indica um número provável de 25 a 30 modos. Devido à alta densidade modal torna-se praticamente impossível avaliar o número exato de picos em determinadas regiões da faixa de frequência analisada.

Uma análise complementar através de APS foi realizada nas FRFs divididas em dois grupos separados, A e B , conforme a localização do ponto de excitação. A Figura 6.7 apresenta um gráfico comparativo dos dois APS obtidos. Esta comparação torna possível o conhecimento das amplitudes com que cada modo é excitado em função da localização do ponto de excitação. Fica evidente que nenhum dos pontos de entrada é capaz de excitar adequadamente todos os modos. Além disso, a relação de amplitudes dos modos excitados através do ponto B aumentou consideravelmente, atingindo uma magnitude da ordem 10^5 , com o primeiro modo sendo menos excitado que os outros.

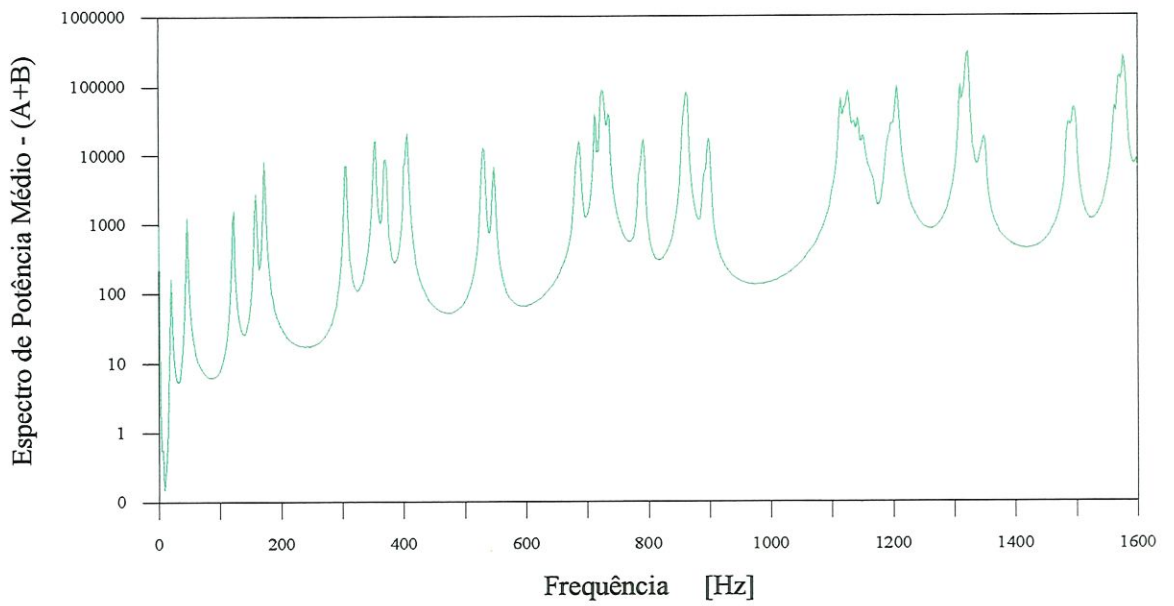


Figura 6.6 – Espectro de Potência Médio – APS – Todas as FRFs.

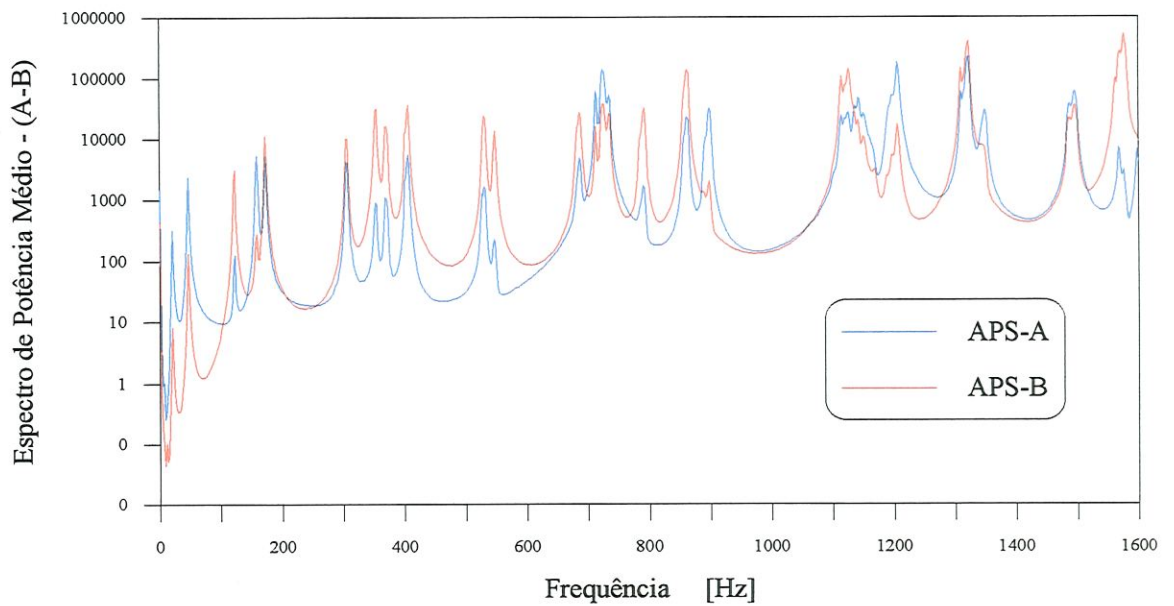


Figura 6.7 – Comparação de APS por ponto de excitação.

Uma análise dos dados experimentais através da Função Indicadora de Modo – MIF também foi realizada. A Figura 6.8 apresenta o gráfico da MIF obtida utilizando todas as FRFs. A MIF possui uma alta resolução modal; neste caso apresentando pelo menos um pico para cada modo. Devido à perda relativa de consistência temporal, em parte em função dos procedimentos experimentais adotados, a contagem dos picos supera o número de modos realmente existentes. Observa-se o deslocamento das frequências naturais em determinadas regiões da faixa de frequência analisada, principalmente nas regiões com grande concentração modal. A variabilidade das frequências naturais no conjunto de FRFs obtidas compromete a qualidade e dificulta a identificação de determinados modos.

Uma análise complementar através da MIF também foi realizada. Novamente, as FRFs foram divididas em dois grupos separados, *A* e *B*, conforme a localização do ponto de excitação. A Figura 6.9 apresenta um gráfico comparativo das duas MIF obtidas. A comparação não mostra diferenças significativas entre as MIFs obtidas. Embora não tenha sido realizada, pode-se calcular a MIF agrupando-se as FRFs pela localização dos pontos de medidas de aceleração, possibilitando a análise da variabilidade das frequências naturais em função da localização do acelerômetro.

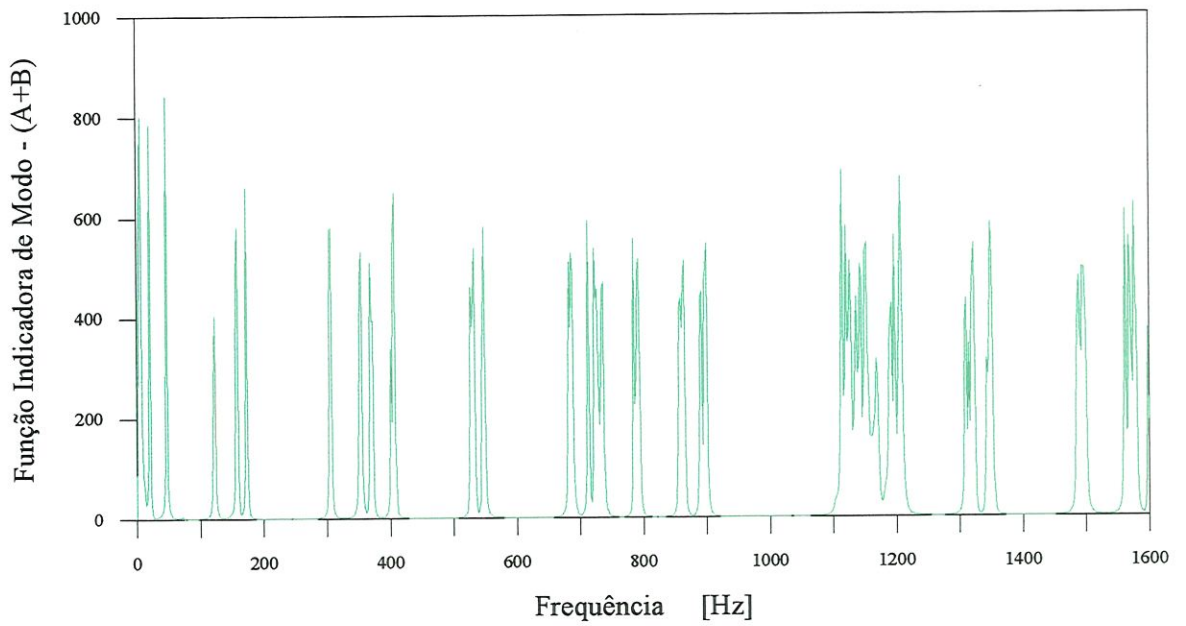


Figura 6.8 – Função Indicadora de Modo – MIF – Todas as FRFs.

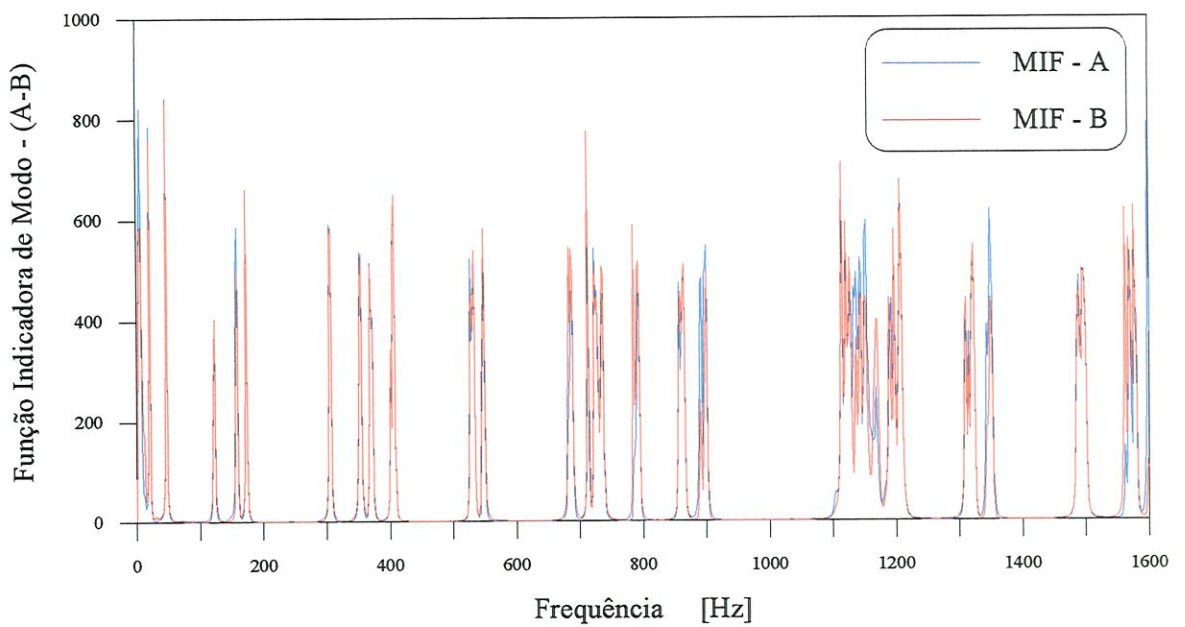


Figura 6.9 – Comparação de MIF por ponto de excitação.

6.2 – RESULTADOS DA IDENTIFICAÇÃO

Inicialmente são apresentados os resultados da identificação em que os dados de entrada utilizados são as 200 respostas ao impulso obtidos pela Transformada Inversa de Fourier Discreta - IDFT.

Com os dados das respostas ao impulso compõem-se as matrizes Hankel $[H(0)]$ e $[H(1)]$, cuja dimensão escolhida é de 3000 linhas (αm ; $\alpha = 30$, $m = 100$) por 180 colunas (βr ; $\beta = 90$, $r = 2$).

Através do ERA, a identificação é realizada decidindo-se o número de modos existentes nas matrizes Hankel pela análise dos valores singulares. O número de modos assumidos é estabelecido ao se reter os $2n$ primeiros valores singulares da decomposição em SVD de $[H(0)]$ e as correspondentes $2n$ primeiras colunas das matrizes de vetores singulares, ou seja, escolhendo-se a dimensão de $[\Sigma_{2n}]$, $[R_{2n}]$ e $[S_{2n}]$.

A Tabela 6.1 traz os autovalores identificados para dois valores de ordem do sistema, $2n = 56$ e $2n = 58$. Os autovalores foram convertidos para tempo contínuo (e divididos por 2π) e omitidos um dos autovalores quando da existência do conjugado complexo correspondente. Os casos apresentados são representativos de uma identificação realizada pelo ERA e mostra a dificuldade da análise destes resultados.

A Tabela 6.2 mostra os autovalores que restam após a eliminação de modos que não passaram pelos critérios de amortecimento ($\xi < 0$ e $\xi > 10\%$), proximidade dos limites da faixa de

Tabela 6.1 – Autovalores para dois valores de ordem do sistema.

$2n = 56$	$2n = 58$
- 10,234 + 176,03i	- 3,8445 + 170,89i
- 4,4747 + 305,17i	- 2,7653 + 304,94i
- 323,48	- 3,3054 + 354,71i
- 2,1457 + 357,37i	- 11,372 + 372,61i
- 2,6713 + 403,4i	- 2,3701 + 404,37i
- 33,814 + 407,45i	- 2,2734 + 532,31i
- 1,4333 + 533,9i	- 15,634 + 565,47i
- 2,2159 + 685,23i	- 2,2863 + 685,76i
- 1,4117 + 717,48i	- 1,6768 + 717,7i
- 1,531 + 724,02i	- 1,6968 + 724,25i
- 3,4046 + 732,84i	- 3,4094 + 733,06i
- 2,3639 + 790,07i	- 2,0323 + 790,87i
- 1,3126 + 860,16i	- 1,2578 + 860,23i
- 1,5897 + 896,87i	- 1,5835 + 896,79i
- 2,7935 + 1116,1i	- 2,468 + 1115,9i
- 3,9216 + 1121,6i	- 3,9922 + 1121,8i
- 3,3401 + 1131i	- 1,6391 + 1130,4i
- 4,3708 + 1147,5i	- 4,1473 + 1147,3i
- 9,3263 + 1153i	- 3,9632 + 1154,6i
- 8,3718 + 1191i	- 7,6992 + 1190,6i
- 2,6705 + 1204,2i	- 2,6532 + 1204,2i
- 1,7751 + 1309,7i	- 1,134 + 1310i
- 1,8986 + 1321,4i	- 1,5354 + 1321,6i
- 2,9533 + 1346,2i	- 2,9725 + 1346,3i
- 5,9919 + 1490,7i	- 4,5307 + 1489,1i
- 6,1638 + 1495,2i	- 3,9362 + 1497,2i
- 3,1554 + 1562,3i	- 2,2033 + 1562,3i
- 1,1894 + 1573,9i	- 0,99203 + 1574i
- 8,2095 + 1600i	- 7,9597 + 1600i
	- 1400,2 + 1600i

frequência e $CMI < 30\%$. Os autovalores identificados estão acompanhados pelos respectivos valores de CMI.

Tabela 6.2 – Autovalores e CMI para duas ordens do sistema.

Modos Assumidos $2n = 56$		Modos Assumidos $2n = 58$	
Autovalores	CMI %	Autovalores	CMI %
- 2,2159 + 685,23i	53,6	- 2,7653 + 304,94i	43,5
- 1,5310 + 724,02i	33,0	- 2,3701 + 404,37i	45,2
- 3,4046 + 732,84i	46,7	- 2,2863 + 685,76i	45,9
- 2,3639 + 790,07i	51,6	- 1,6968 + 724,25i	31,3
- 1,3126 + 860,16i	58,6	- 3,4094 + 733,06i	46,2
- 1,5897 + 896,87i	49,8	- 2,0323 + 790,87i	47,5
- 2,6705 + 1204,2i	50,4	- 1,2578 + 860,23i	59,1
- 1,7751 + 1309,7i	35,9	- 1,5835 + 896,79i	49,4
- 1,8986 + 1321,4i	51,6	- 2,6532 + 1204,2i	50,2
- 2,9533 + 1346,2i	47,0	- 1,134 + 1310i	41,9
- 1,1894 + 1573,9i	41,8	- 1,5354 + 1321,6i	52,9
		- 2,9725 + 1346,3i	46,9
		- 0,99203 + 1574i	47,3

Cada um dos dois conjuntos de modos identificados apresentados na Tabela 6.2 forma uma estimativa do modelo ensaiado. Nota-se que nenhum dos dois conjuntos identificou um número de modos próximo dos valores indicados pela análise de APS e MIF realizados anteriormente. Na verdade, para um modelo complexo como o ensaiado,

praticamente torna-se impossível a identificação de quase todos os modos em uma única estimativa. Além disso, nota-se uma flutuação nos valores de CMI de modos identificados nas duas estimativas. Uma dificuldade adicional é a possibilidade da identificação mais de uma vez de um mesmo modo.

As dificuldades citadas mostram a necessidade de realização de um grande número de estimativas e a aplicação de um método que possa condensar os resultados em um único conjunto, à medida que são realizadas as estimativas. Este conjunto deve apresentar os modos melhor identificados, com o maior valor de CMI obtido entre todas as estimativas. Além disso não deve haver repetição de um mesmo modo dentro do conjunto.

As múltiplas estimativas são obtidas variando-se o número de modos assumidos, $2n$, de 2 até 180 em passos 2. Desta forma, para um único par de matrizes Hankel $[H(0)]$ e $[H(I)]$, é possível a obtenção de um grande número de estimativas. Deve-se realizar a condensação entre os resultados das estimativas utilizando-se o MAC para comparar modos identificados, cujas frequências naturais não difiram umas das outras em mais de 10%. Para pares de modos cuja forma modal apresentem alta correlação (valores altos de MAC), deve-se escolher o que tiver o maior valor de CMI. A Tabela 6.3 apresenta os resultados condensados a partir das 90 estimativas realizadas.

Uma análise dos resultados da Tabela 6.3 ainda deixa dúvidas sobre a existência de modos mal identificados ou repetidos. Uma nova condensação modal deve ser realizada nestes resultados para se eliminar

Tabela 6.3 – Resultados - IDFT.

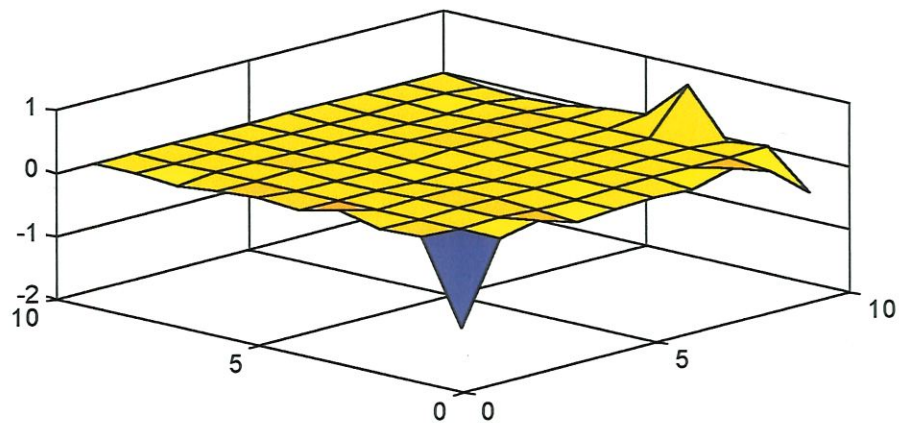
Modo	ω_{nd} Hz	ξ_n %	GMI %	Estimativa $2n$
1	21,4	7,81	47,4	174
2	45,9	1,94	94,8	176
3	121,1	0,779	96,5	162
4	157,5	0,337	82,4	118
5	172,4	0,550	92,4	156
6	304,5	0,324	85,6	122
7	352,5	0,398	82,9	156
8	369,2	0,266	73,8	142
9	405,2	0,397	71,7	114
10	405,6	0,241	83,4	180
11	547,1	0,307	78,1	144
12	682,3	0,265	71,8	152
13	684,9	0,303	61,5	88
14	713,9	0,071	72,9	150
15	724,5	0,079	55,9	116
16	734,1	0,195	62,0	158
17	790,6	0,179	65,8	122
18	855,5	0,232	60,5	178
19	858,5	0,194	63,7	146
20	862,4	0,093	66,8	152
21	895,6	0,198	49,5	164
22	898,3	0,178	73,9	156
23	1112,1	0,359	64,8	158
24	1113,1	0,187	70,6	150
25	1124,4	0,192	34,4	122
26	1149,0	0,312	47,6	136
27	1205,5	0,172	80,4	146
28	1308,7	0,167	64,5	142
29	1319,6	0,086	62,2	124
30	1344,5	0,166	49,4	178
31	1347,2	0,184	63,3	82
32	1486,7	0,164	57,9	104
33	1493,1	0,165	49,4	150
34	1495,7	0,125	59,3	102
35	1574,5	0,096	49,7	92

modos mal identificados que não puderam ser eliminados pela condensação efetuada anteriormente. O primeiro passo dessa nova condensação é o cálculo do MAC entre todos os modos. Deve-se verificar pares de modos que apresentem MAC superior a 5%. Estes pares de modos geralmente possuem frequências naturais razoavelmente distintas ($>10\%$), e ambos ou pelo menos um deles teve a forma modal mal identificada. Isto deve ser comprovado pelos gráficos tanto do modo real como do complexo.

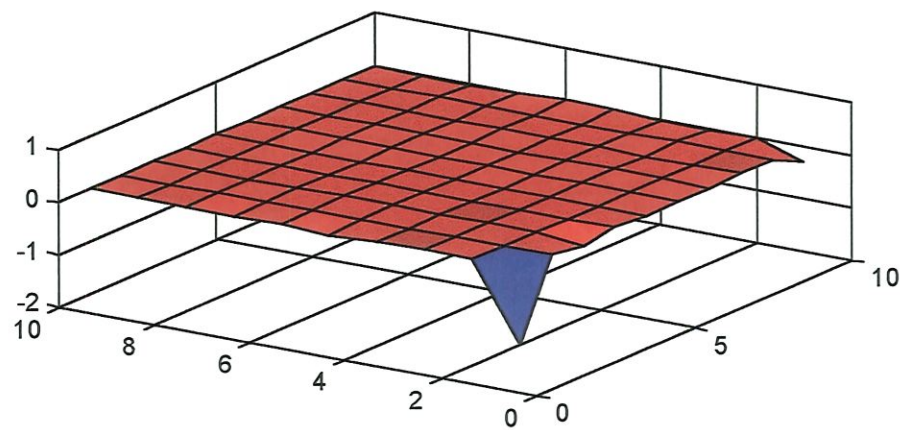
Um exemplo de pares de modos com MAC superior a 5% ocorre com o vigésimo e o vigésimo sexto modos. Estes dois modos possuem um MAC de 65%, apesar das frequências distintas, e apresentam formas modais mal definidas e semelhantes. A figura 6.10 apresenta o modo real destes dois modos. A não ser nos casos onde a estrutura apresente modos localizados, as formas modais apresentadas na Figura 6.10 é um indicativo de modos mal identificados e devem ser eliminados dos resultados, apesar do valor alto de CMI. A forma peculiar destes modos deve possibilitar o desenvolvimento de um índice que os detectem com facilidade.

Os resultados finais, obtidos após esta última condensação, estão apresentados na Tabela 6.4. A última coluna da tabela indica a estimativa da qual provém o modo identificado. Foram identificados 24 modos no total. Os valores de CMI indicam que a maioria dos modos foram identificados com um bom grau de consistência.

Uma tentativa de utilizar o IMAC, ao invés do MAC, como índice para verificar o grau de correlação entre as formas modais não foi



20^o modo – 862,4 Hz



26^o modo – 1149,0 Hz

Figura 6.10 – Modos reais.

Tabela 6.4 – Resultados condensados - IDFT.

Modo	ω_{nd} Hz	ξ_n %	CMI %	Estimativa $2n$
1	21,4	7,81	47,4	174
2	45,9	1,94	94,8	176
3	121,1	0,779	96,5	162
4	157,5	0,337	82,4	118
5	172,4	0,550	92,4	156
6	304,5	0,324	85,6	122
7	352,5	0,398	82,9	156
8	369,2	0,266	73,8	142
9	405,6	0,241	83,4	180
10	547,1	0,307	78,1	144
11	684,9	0,303	61,5	88
12	724,5	0,079	55,9	116
13	734,1	0,195	62,0	158
14	790,6	0,179	65,8	122
15	862,4	0,093	66,8	152
16	898,3	0,178	73,9	156
17	1124,4	0,192	34,4	122
18	1149,0	0,312	47,6	136
19	1205,5	0,172	80,4	146
20	1319,6	0,086	62,2	124
21	1347,2	0,184	63,3	82
22	1486,7	0,164	57,9	104
23	1495,7	0,125	59,3	102
24	1574,5	0,096	49,7	92

bem sucedida. As causas podem ser o número e a extensão das linhas nodais presentes em grande parte das formas modais do modelo ensaiado.

Um outro conjunto de estimativas foi realizado através da utilização de respostas ao impulso obtidas pelo método de Chen, Juang e Lee. As matrizes Hankel compostas com estas respostas ao impulso são de dimensões idênticas às utilizadas anteriormente. Os resultados das estimativas obtidas foram condensados da mesma forma que no caso anterior e o resultado final está apresentado na Tabela 6.5. Foram identificados 21 modos, na sua maioria com bons índices de consistência.

Os resultados finais dos dois grupos de estimativas apresentados nas Tabelas 6.4 e 6.5 mostram que alguns modos foram identificados somente em um dos grupos. Além disso, nenhum dos dois grupos possui todos os modos identificados com maior consistência, dentre aqueles que são comuns aos dois grupos. O resultado da condensação dos dois grupos é apresentado na Tabela 6.6.

Foram identificados 25 modos no total, a grande maioria com boa consistência, representada por valores altos de CMI. As exceções se concentram praticamente nos dois modos em torno de 1140 Hz. De certa forma, este fato já era esperado devido à alta densidade modal e à variabilidade nas frequências dos modos desta região, mostradas pela APS e MIF. Para tentar melhorar a consistência destes modos, foi realizado um corte na região anterior à 1040 Hz e posterior à 1240 Hz de todas as funções respostas em frequência. Através da aplicação da IDFT nestes dados pode-se obter um conjunto de respostas ao impulso filtrado de forma a preservar a região citada.

Tabela 6.5 – Modos identificados.

Modo	ω_{nd} Hz	ξ_n %	CMI %	Estimativa $2n$
1	19,5	3,01	72,4	160
2	45,8	1,9	89,5	166
3	121,2	0,813	94,3	166
4	157,7	0,433	81,7	130
5	304,7	0,367	82,9	148
6	352,9	0,418	79,6	118
7	369,9	0,421	72,3	118
8	529,4	0,260	52,2	154
9	547,1	0,310	70,8	146
10	685,2	0,300	62,3	98
11	724,9	0,063	50,7	132
12	734,1	0,310	57,6	86
13	791,2	0,187	58,9	134
14	860,9	0,144	60,3	64
15	898,3	0,251	61,3	136
16	1205,5	0,250	57,7	94
17	1320,8	0,096	52,2	100
18	1347,9	0,182	58,3	84
19	1486,8	0,142	47,7	118
20	1496,9	0,129	52,3	116
21	1576,7	0,043	52,2	118

Tabela 6.6 – Resultado da condensação entre os dois conjuntos.

Modo	ω_{nd} Hz	ξ_n %	CMI %
1	19,5	3,00	72,4
2	45,9	1,94	94,8
3	121,1	0,779	96,5
4	157,5	0,337	82,4
5	172,4	0,550	92,4
6	304,5	0,324	85,6
7	352,5	0,398	82,9
8	369,2	0,266	73,8
9	405,6	0,241	83,4
10	529,4	0,260	52,1
11	547,1	0,307	78,1
12	685,2	0,300	62,3
13	724,5	0,079	55,9
14	734,1	0,195	62,0
15	790,6	0,179	65,8
16	862,4	0,093	66,8
17	898,3	0,178	73,9
18	1124,4	0,192	34,4
19	1149,0	0,312	47,6
20	1205,5	0,172	80,4
21	1319,6	0,086	62,2
22	1347,2	0,184	63,3
23	1486,7	0,164	57,9
24	1495,7	0,125	59,3
25	1576,7	0,043	52,2

Com a utilização destas respostas ao impulso, foram compostas matrizes Hankel de dimensão 4000 por 240 e realizadas 120 estimativas, com o número de modos assumidos variando de 2 a 240 em incrementos de 2. O resultado apontou dois modos identificados, um em 1130,7 Hz com CMI de 36,5 e o outro em 1183,9 Hz, com CMI de 84,9. Uma análise pelo MAC indica que estes modos apresentam alto grau de correlação com o 18° e 19° modos da Tabela 6.6. Como possuem CMI menores que os identificados pela última estimativa, foram substituídos por estes.

Finalmente, o conjunto otimizado dos parâmetros modais (autovalores) identificados é apresentado na Tabela 6.7. Para servir de parâmetro de comparação, na mesma tabela são apresentados os resultados das frequências naturais obtidas pelo método dos elementos finitos. Foi utilizado o programa ANSYS 5.4 e o modelo foi analisado através de uma malha com 1296 elementos do tipo “casca”.

Os modos complexos identificados foram convertidos para as formas modais reais e estão desenhados nas Figuras 6.11 a 6.19. O método utilizado para a conversão é o denominado método “padrão” onde cada elemento do modo real é equivalente à magnitude multiplicada pelo cosseno da fase do elemento correspondente do modo complexo.

As curvas de FRFs regeneradas podem ser obtidas através das matrizes que representam o modelo de estado nas coordenadas modais em tempo discreto identificadas. A condensação modal também envolve os elementos das matrizes que representam o modelo no espaço de estado. A Figura 6.20 apresentam as FRFs regeneradas, correspondentes às FRFs mostradas na Figura 6.1.

Tabela 6.7 – Resultado final.

Identificação				Elementos Finitos	
Modo	ω_{nd} Hz	ξ_n %	CMI %	Modo	ω_n Hz
1	19,5	3,00	72,4	1	20,0
2	45,9	1,94	94,8	2	48,4
3	121,1	0,779	96,5	3	122,1
4	157,5	0,337	82,4	4	156,6
5	172,4	0,550	92,4	5	177,0
6	304,5	0,324	85,6	6	310,1
7	352,5	0,398	82,9	7	353,6
8	369,2	0,266	73,8	8	368,4
9	405,6	0,241	83,4	9	408,9
10	529,4	0,260	52,1	10	533,7
11	547,1	0,307	78,1	11	556,9
12	685,2	0,300	62,3	12	686,2
13	724,5	0,079	55,9	13	717,8
14	734,1	0,195	62,0	14	741,9
15	790,6	0,179	65,8	15	801,1
16	862,4	0,093	66,8	16	862,6
17	898,3	0,178	73,9	17	908,1
18	1130,7	0,003	36,5	18	1133,7
				19	1150,7
19	1183,9	0,224	84,9	20	1152,9
				21	1165,8
20	1205,5	0,172	80,4	22	1204,7
21	1319,6	0,086	62,2	23	1313,3
22	1347,2	0,184	63,3	24	1360,9
23	1486,7	0,164	57,9	25	1488,3
24	1495,7	0,125	59,3	26	1515,7
25	1576,7	0,043	52,2	27	1583,2

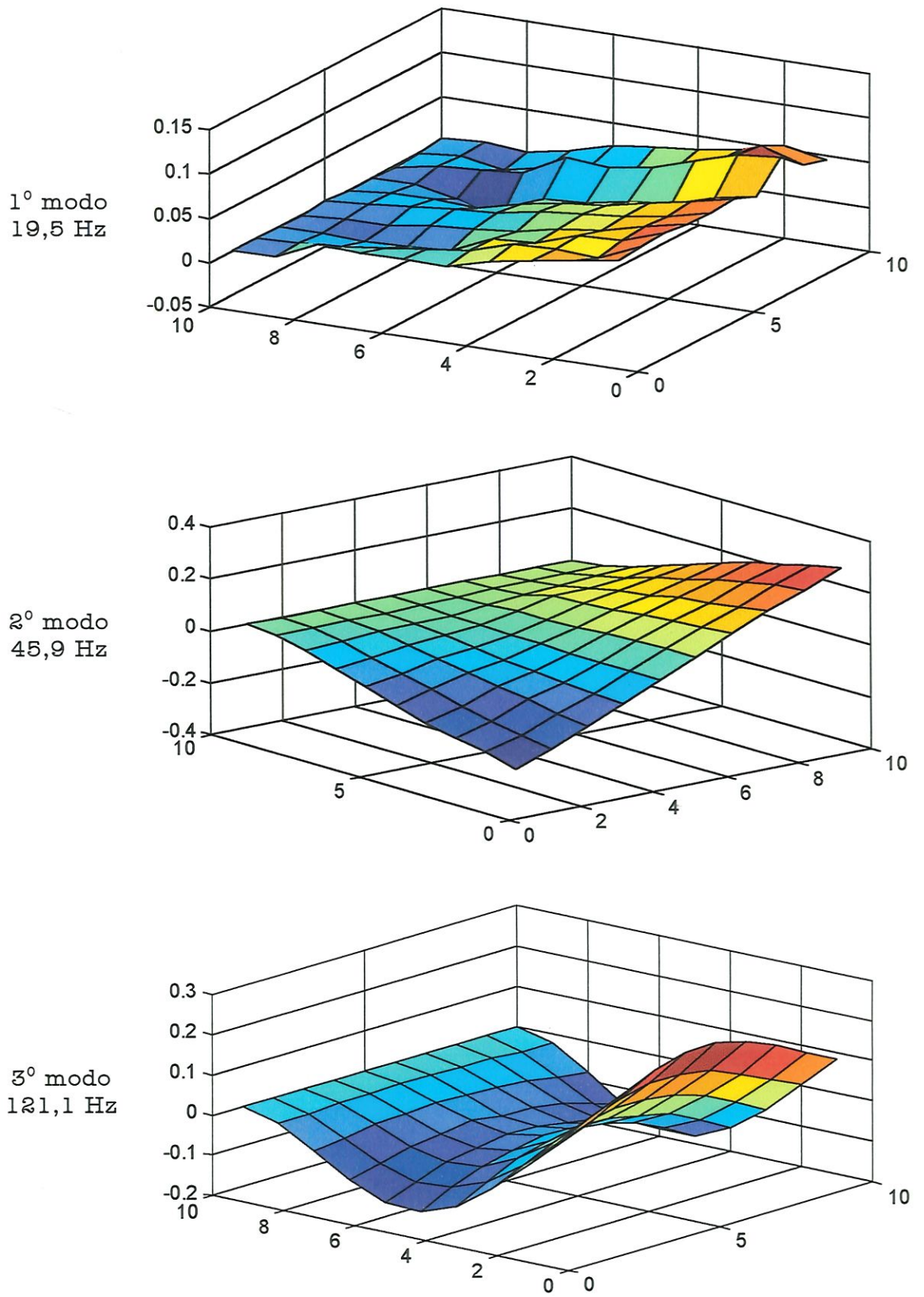


Figura 6.11 – Modos reais – 1º modo ao 3º modo.

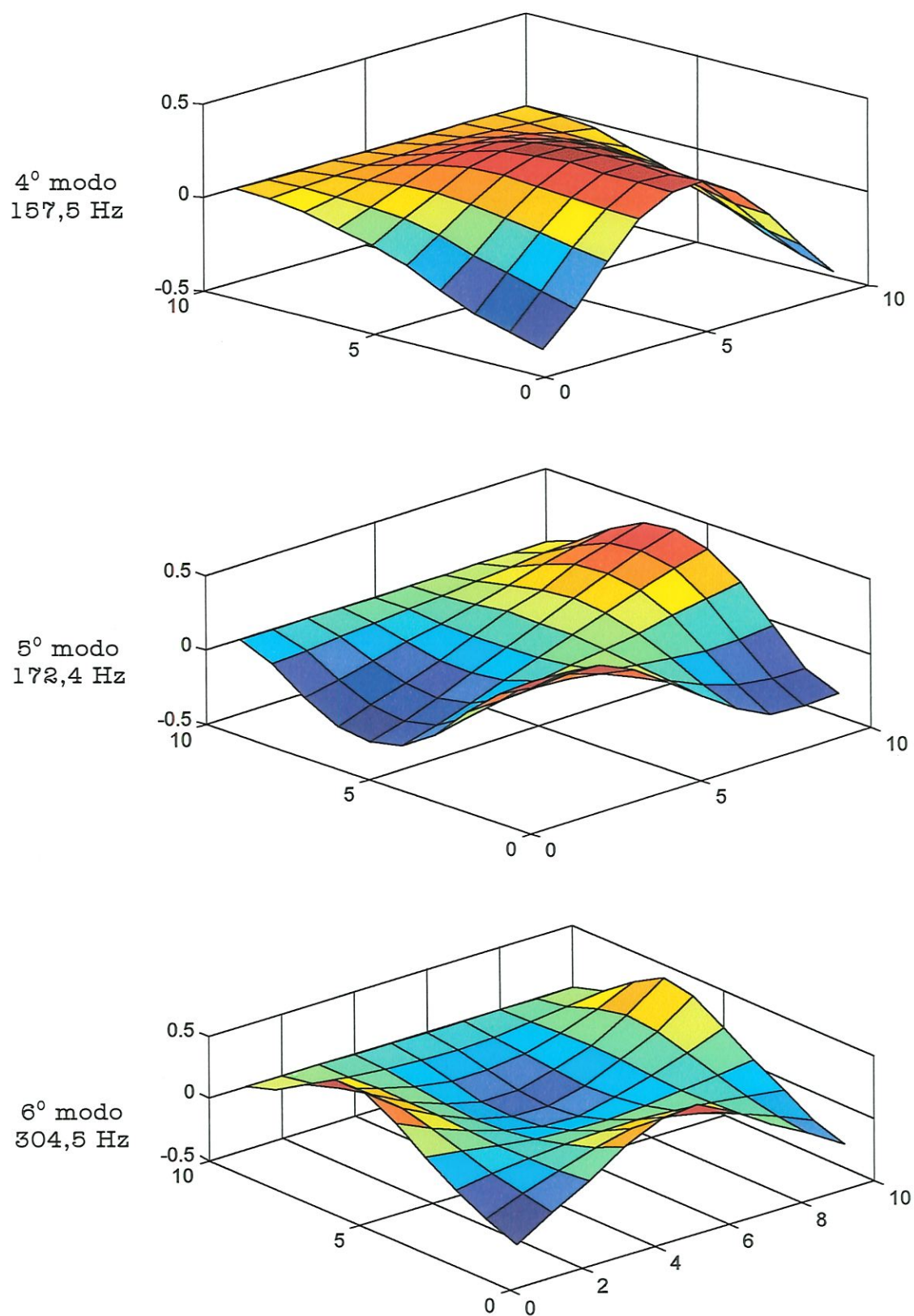
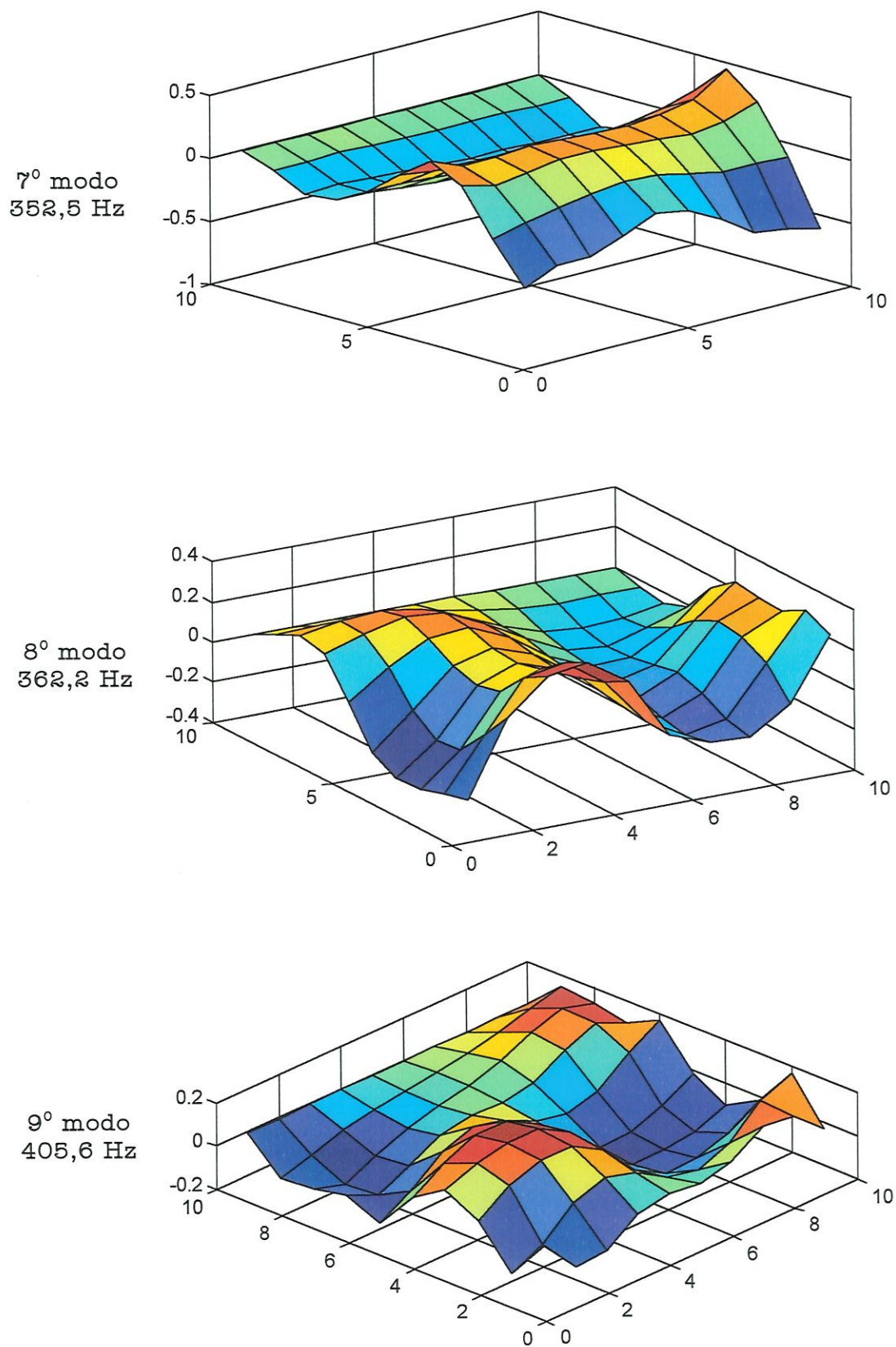


Figura 6.12 – Modos reais – 4^o modo ao 6^o modo.

**Figura 6.13** – Modos reais – 7^o modo ao 9^o modo.

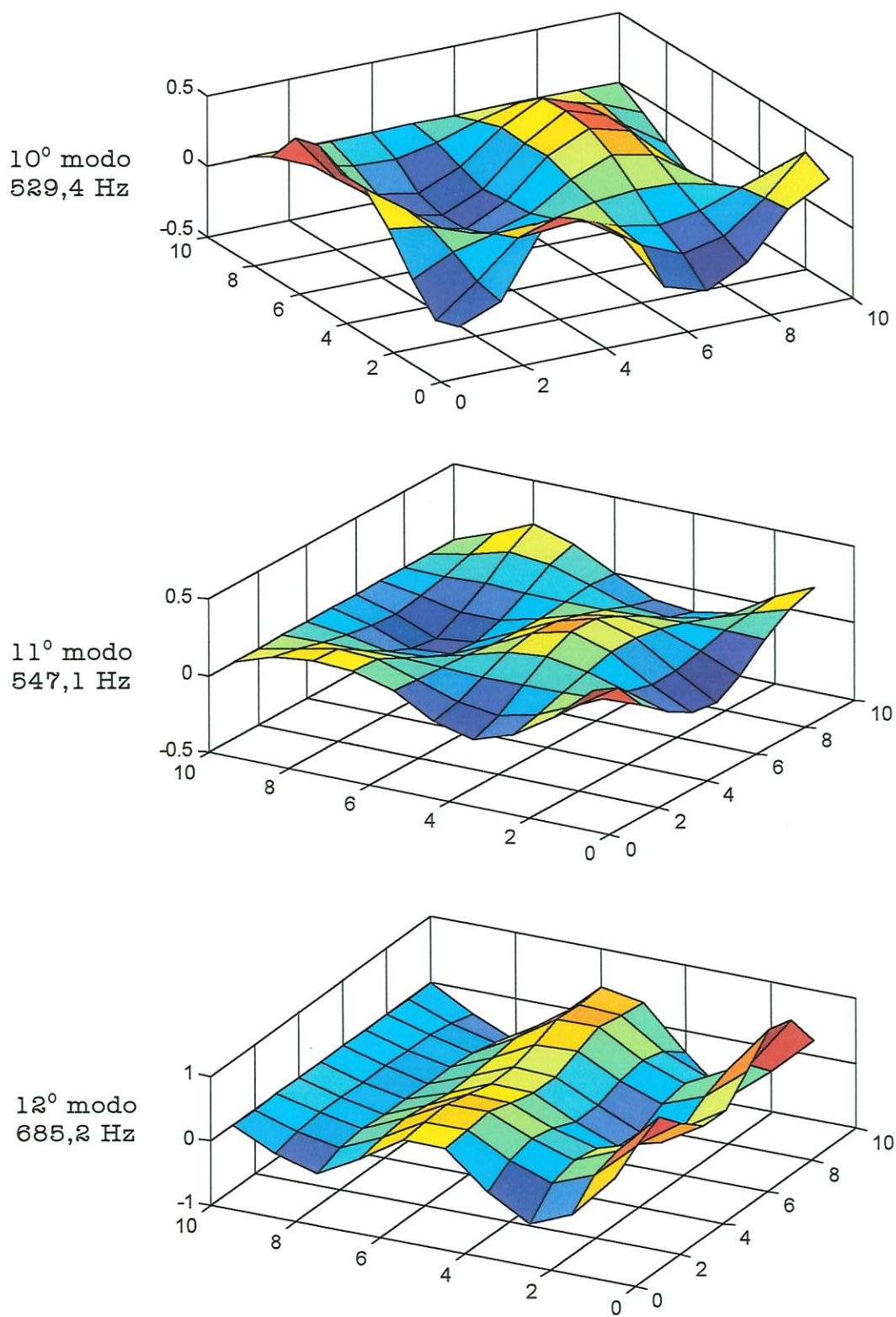
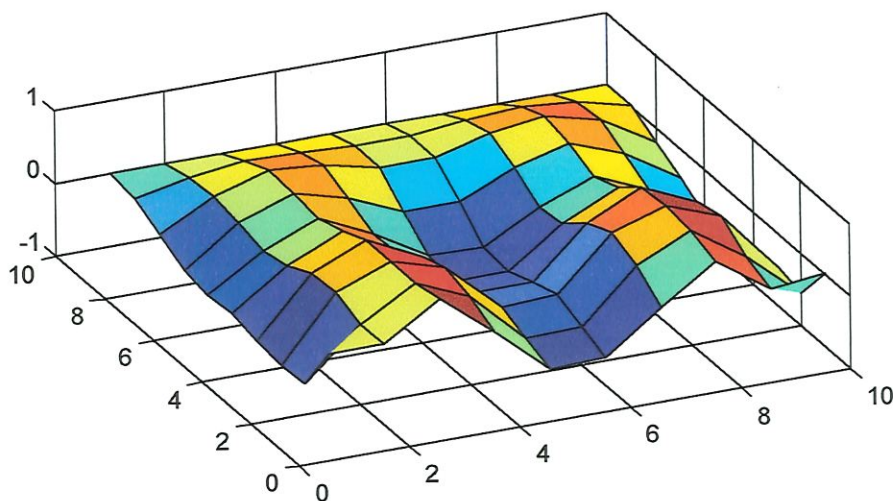
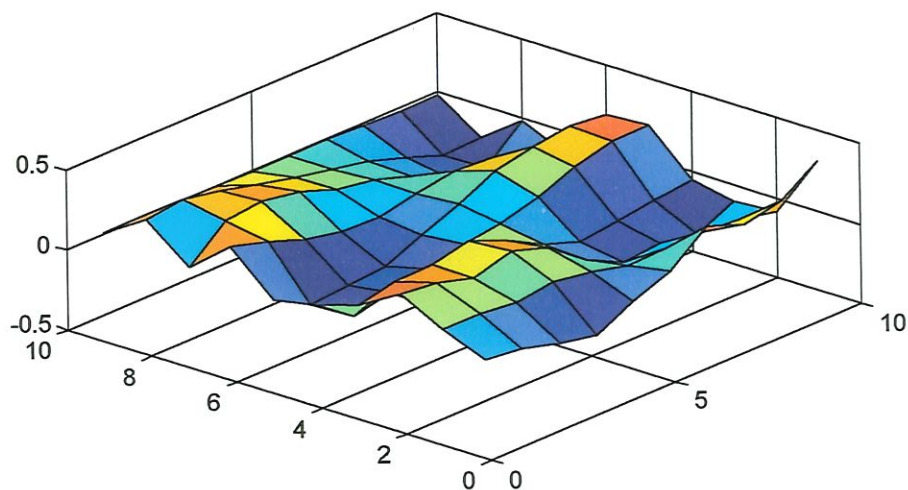


Figura 6.14 – Modos reais – 10^o modo ao 12^o modo.

13^o modo
724,5 Hz



14^o modo
734,1 Hz



15^o modo
790,6 Hz

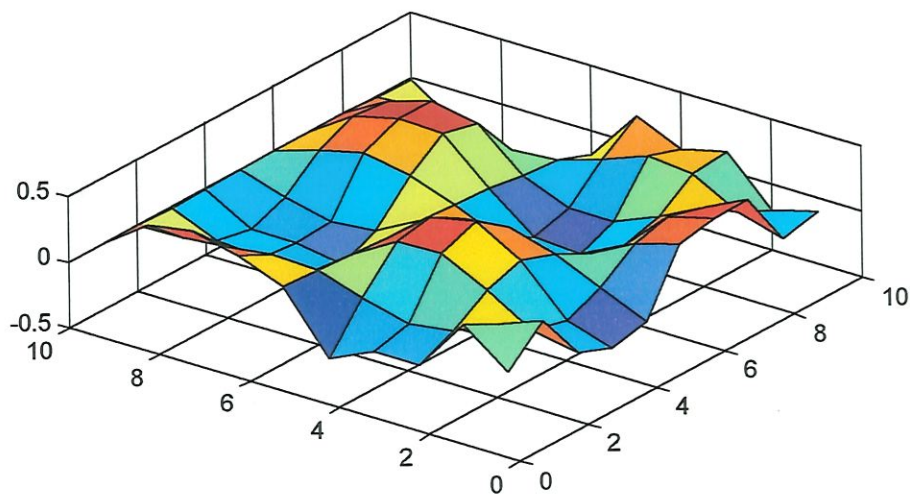
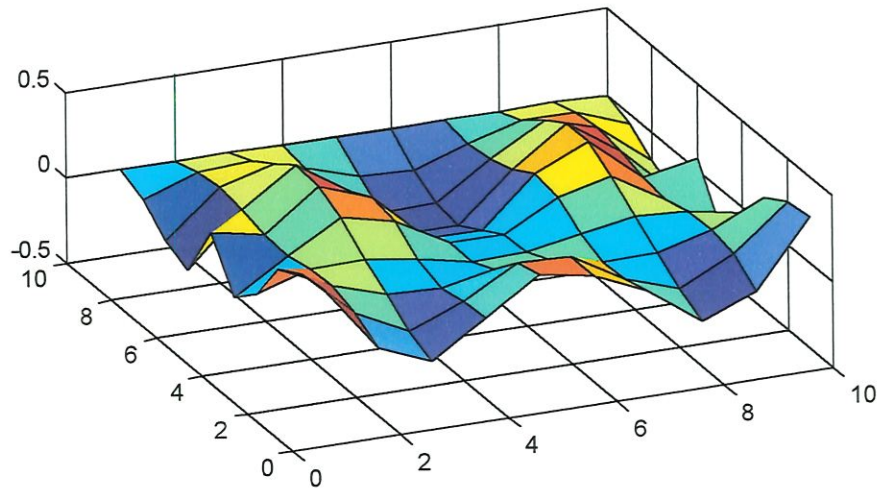
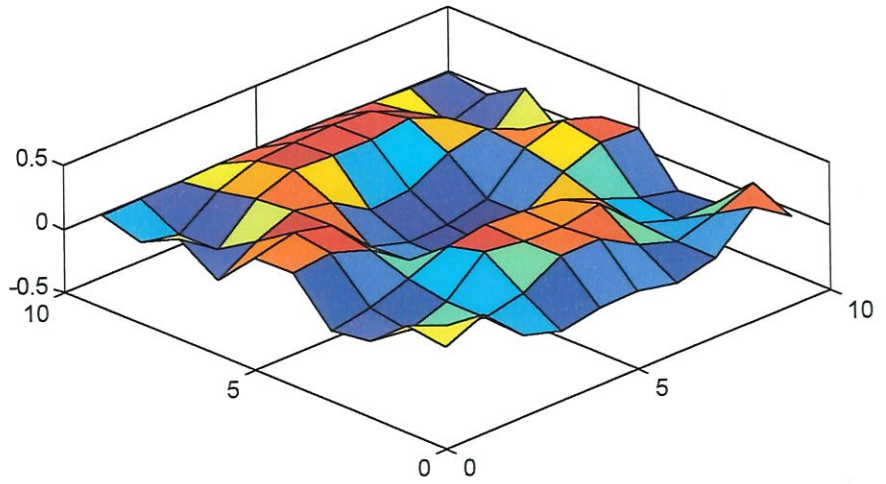


Figura 6.15 – Modos reais – 13^o modo ao 15^o modo.

16^o modo
862,4 Hz



17^o modo
898,3 Hz



18^o modo
1131 Hz

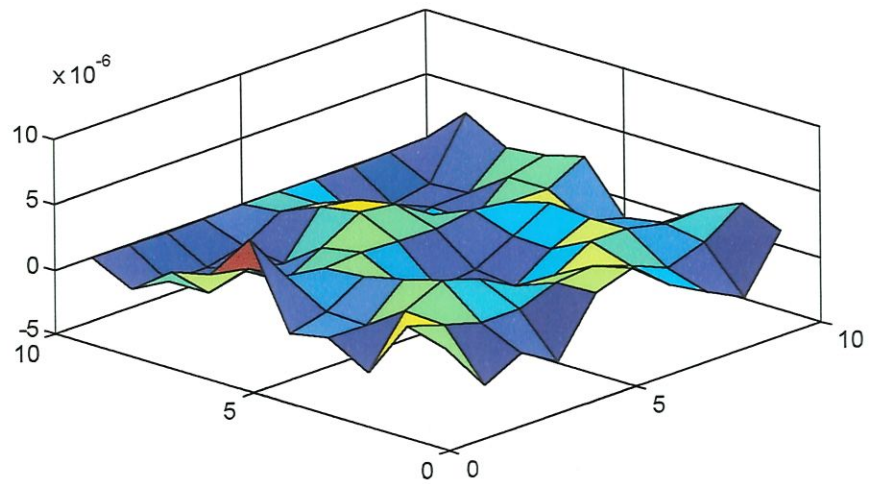


Figura 6.16 – Modos reais – 16^o modo ao 18^o modo.

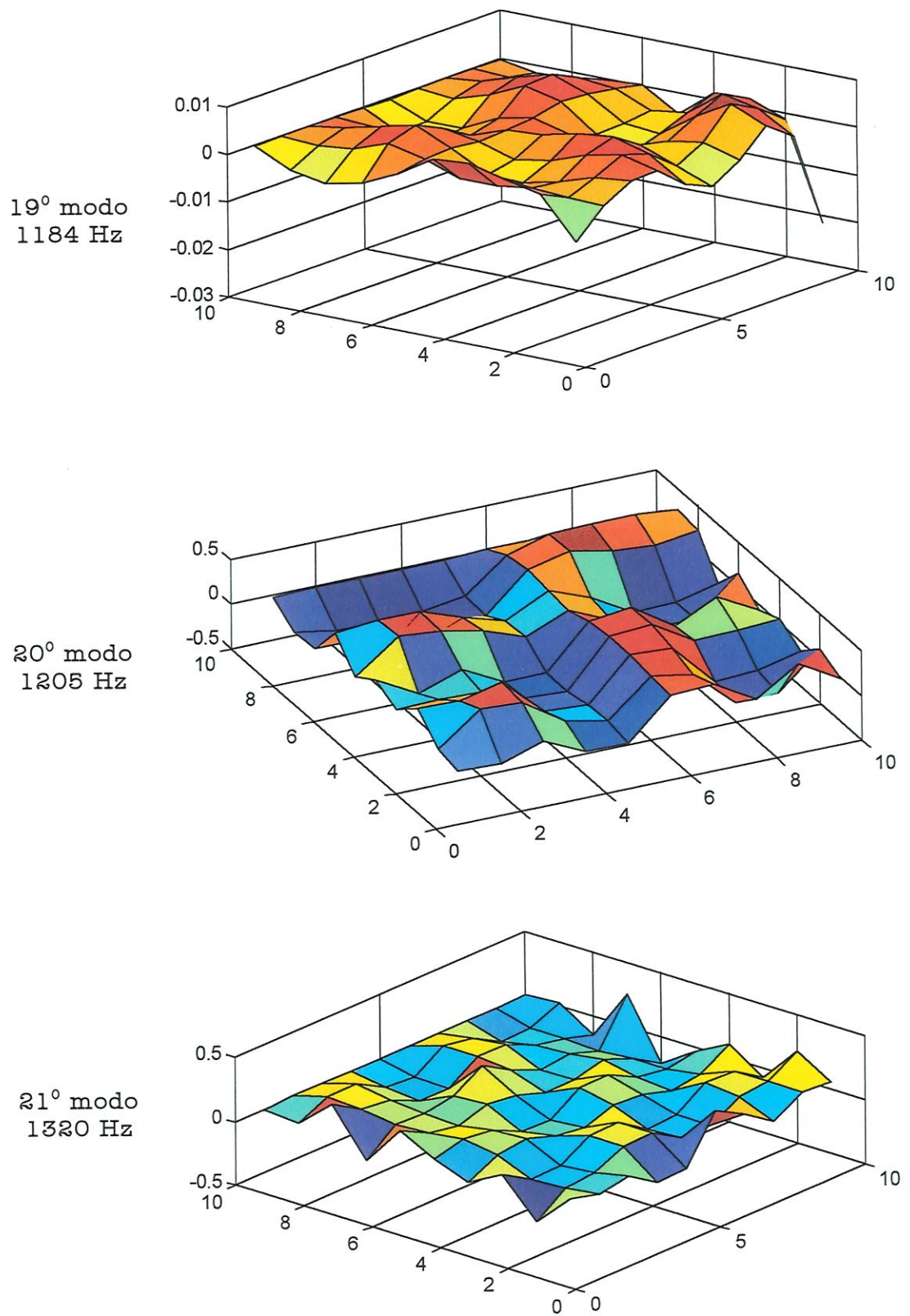


Figura 6.17 – Modos reais – 19^o modo ao 21^o modo.

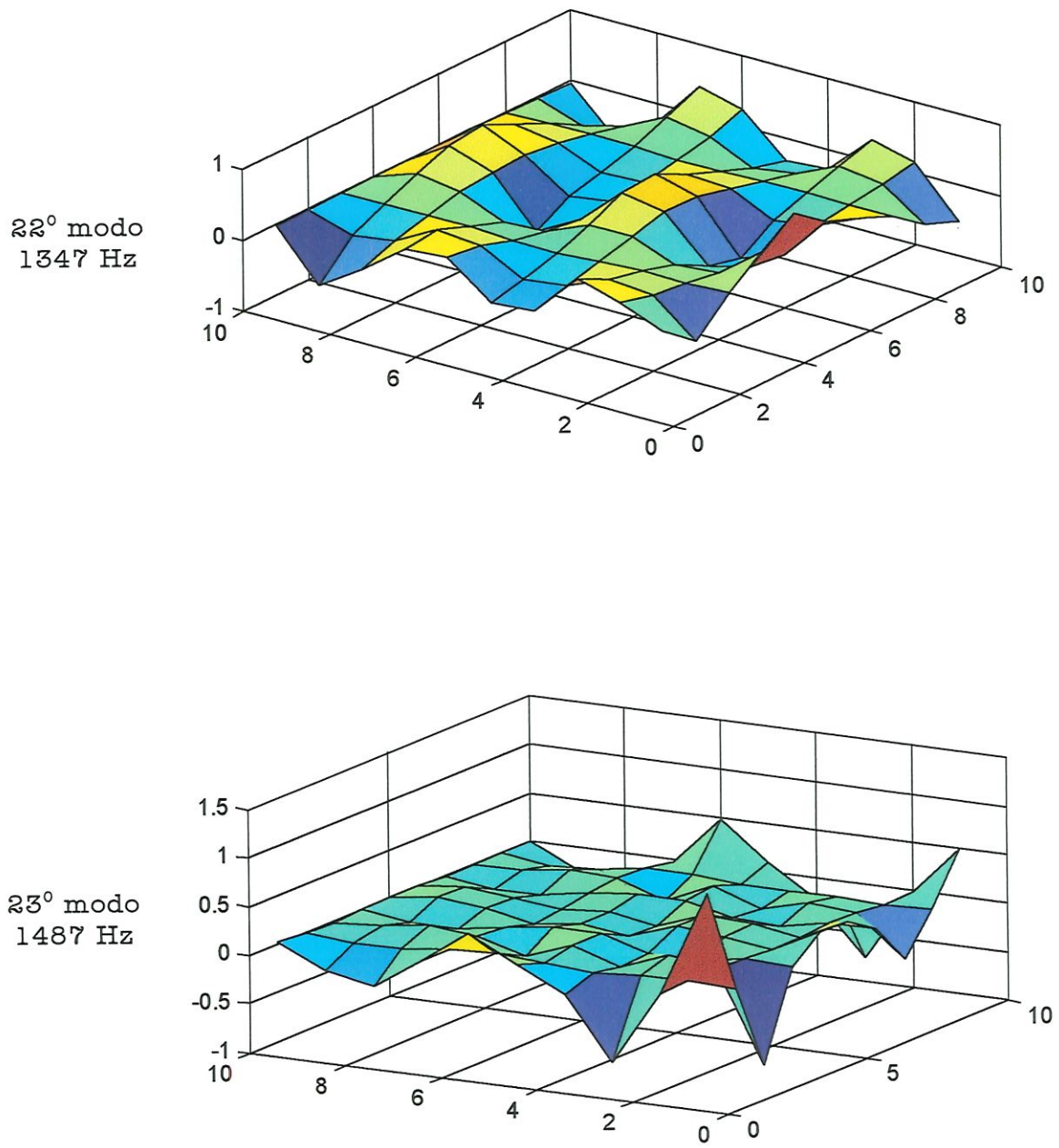
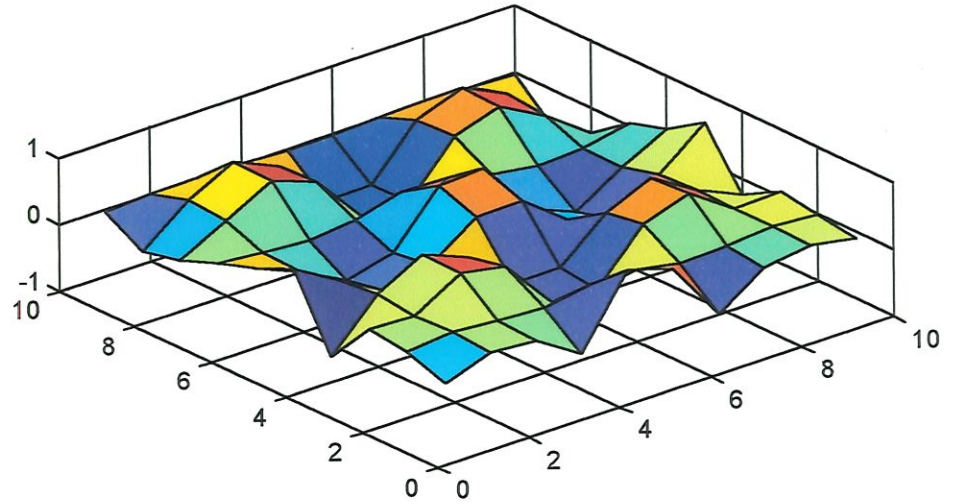


Figura 6.18 – Modos reais – 22º modo e 23º modo.

24^o modo
1496 Hz



25^o modo
1578 Hz

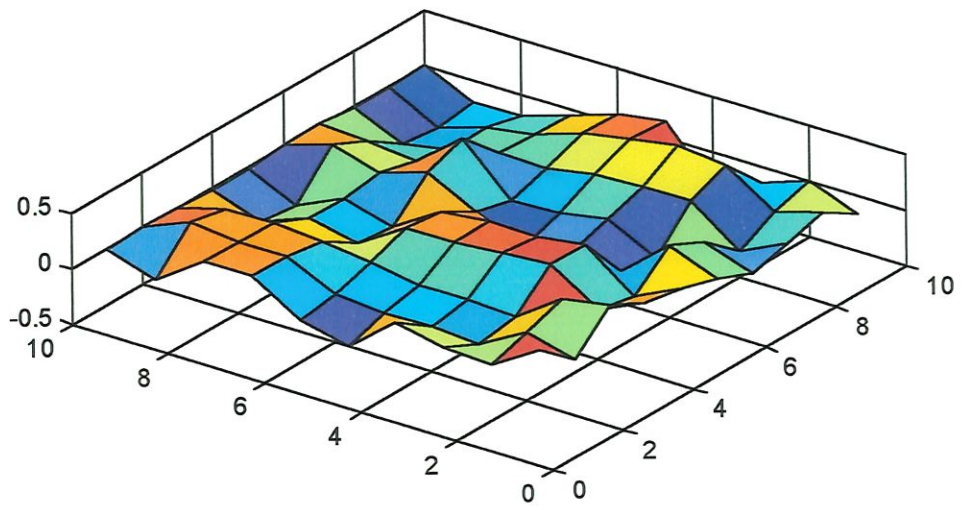


Figura 6.19 – Modos reais – 24^o modo e 25^o modo.

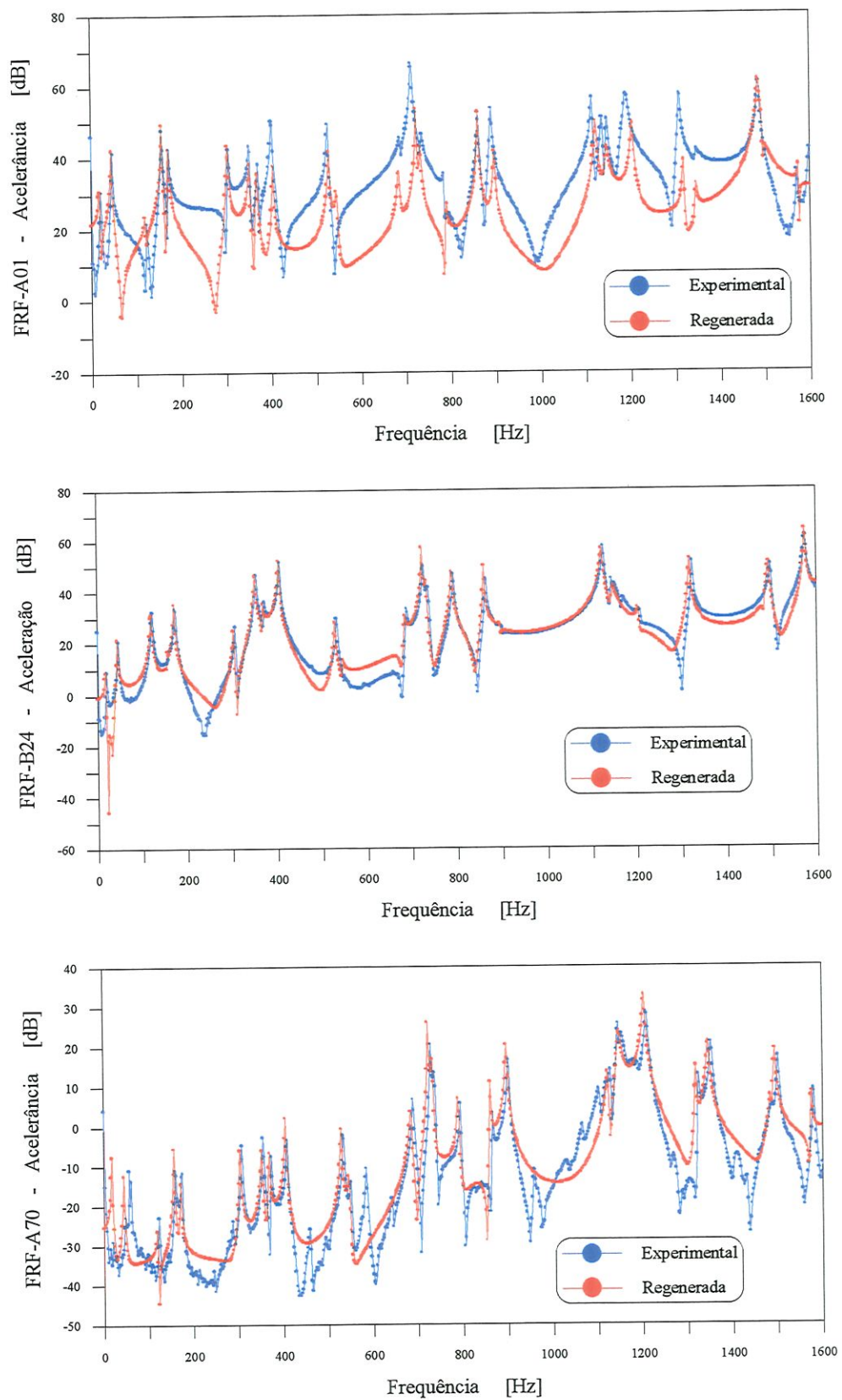


Figura 6.20 – Comparação das FRFs.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, uma metodologia para a automatização do processo de identificação foi apresentada e desenvolvida. A metodologia proposta envolve a aquisição de dados experimentais utilizando equipamentos de baixo custo financeiro e deve proporcionar a identificação de sistemas dinâmicos complexos em uma faixa larga de frequência.

Para testar a viabilidade do algoritmo proposto, foram realizados ensaios em um modelo experimental com o objetivo de fornecer os dados necessários para a realização da identificação.

A partir dos resultados obtidos na identificação do modelo experimental, pode-se destacar as seguintes conclusões:

- A técnica proposta mostrou-se eficiente, identificando 25 modos de um total de 27, presentes na faixa de frequência analisada. Tendo em vista que a estrutura que serviu de modelo possui comportamento dinâmico complexo, com alta densidade modal e formas modais com numerosas linhas nodais, pode-se prever que a sua aplicação em outros modelos resultará numa identificação correta.
- O algoritmo de automatização não exige praticamente intervenção do usuário e a avaliação dos resultados pode ser realizada com o auxílio de índices de consistência.
- A etapa de condensação modal adicional mostrou-se eficiente e necessária quando aplicada na identificação de sistemas complexos em uma faixa larga de frequência. Apesar de ser dependente do analista, apenas na última fase da condensação modal, desenvolvimentos futuros podem eliminar esta dependência.
- Os procedimentos experimentais (aquisição não simultânea dos dados experimentais) utilizados nos ensaios se mostraram eficientes, não comprometendo os resultados. A utilização de um número grande de acelerômetros, numa aquisição simultânea em vários canais, certamente seria mais prejudicial à identificação da estrutura leve que serviu de modelo experimental.

- A utilização do algoritmo de realização de sistemas – ERA proporciona uma representação de estado completo, que é útil se o propósito da identificação é o controle do comportamento vibratório do modelo ensaiado.
- A metodologia proposta serve de base para um programa de detecção de falhas estruturais, principalmente quando existe a necessidade de identificação periódica da estrutura.
- Não existe limite para o número de pontos de medidas com os procedimentos experimentais utilizados. Desta forma, pode-se obter formas modais com alta resolução espacial, necessária para a verificação de resultados obtidos pelo método de elementos finitos, principalmente quando o modelo possui formas modais espacialmente complexas.
- O tempo total de processamento dos dados foi de uma hora e meia. Uma hora para a conversão dos dados para o domínio do tempo e meia hora para a identificação do modelo. O tempo de processamento diminui exponencialmente para modelos de menor dimensão.

Como resultado destas conclusões, podem ser feitas propostas para trabalhos futuros:

- Desenvolvimento de um índice de consistência para detectar formas modais mal identificadas que ainda assim possuem valor elevado de CMI.

-
- Desenvolvimento de um índice de consistência para a caracterização de modos com alto amortecimento.
 - Realizar estudos com a aplicação de taxas de decimação nas respostas ao impulso que servem de base para a composição dos matrizes Hankel.
 - Avaliar o desempenho do IMAC em estruturas mais simples.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [**Allemang 1994**]; Allemang, R.J., Brown, D.L. and Fladung, W., "Modal Parameter Estimation: A Unified Matrix Polynomial Approach," *Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference*, pp. 501-514, Honolulu, 1994.
- [**Allemang 1996**]; Allemang, R.J. and Brown, D.L., "Experimental Modal Analysis," in *Shock and Vibration Handbook*, ed. Cyril M. Harris, 4^o ed., McGraw-Hill, New York, 1996.
- [**Allemang 1998**]; Allemang, R.J. and Brown, D.L., "A Unified Matrix Polynomial Approach to Modal Identification," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 211, No. 3, pp. 301-322, 1998.
- [**Balthazar 1993**]; Balthazar, J.M., *Sobre Teoria de Vibrações Mecânicas Não Lineares: Aspectos Geométricos de Movimentos Regulares e Irregulares*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 1993.
- [**Bayard 1992**]; Bayard, D.S., "An Algorithm for State-Space Frequency Domain Identification Without Windowing Distortions," *Proceedings of the Control and Decision Conference*, pp. 1707-1712, December 1992.

- [Chen 1994]; Chen, C.-W., Juang, J.N. and Lee, G., "Frequency Domain State-Space System Identification," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 116, pp. 523-528, October 1994.
- [Ewins 1984]; Ewins, D.J., *Modal Testing: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [Furuta 1988]; Furuta, K., Sano, A. and Atherton, D., *State Variable Methods in Automatic Control*, John Wiley & Sons, Chichester, 1988.
- [Gilbert 1963]; Gilbert, E.G., "Controllability and Observability in Multivariable Control Systems," *SIAM Journal on Control*, Vol. 1, No. 2, pp. 128-151, 1963.
- [Juang 1985]; Juang, J-N. and Pappa, R.S., "An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 8, No. 5, pp. 620-627, 1985.
- [Juang 1986]; Juang, J-N. and Pappa, R.S., "Effects of Noise on Modal Parameters Identified by the Eigensystem Realization Algorithm," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 9, No. 3, pp. 294-303, 1986.
- [Juang 1987]; Juang J-N., "Mathematical Correlation of Modal-Parameter-Identification Methods Via System-Realization Theory", *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 2, No. 1, pp. 1-18, 1987.
- [Juang 1988a]; Juang J-N. and Pappa, R.S., "A Comparative Overview of Modal Testing and System Identification for Control of Structures", *Shock and Vibration Digest*, Vol. 20, No. 5, pp. 4-15, 1988.



- [**Juang 1988b**]; Juang J-N., Cooper, J.E. and Wright, J.R., "An Eigensystem Realization Algorithm Using Data Correlations (ERA/DC)," *Control-Theory and Advanced Technology*, Vol. 4, No. 1, pp. 5-14, 1988.
- [**Juang 1992**]; Juang, J-N. and Phan, M., "Identification of System, Observer and Controller from Closed-Loop Experimental Data." Paper No. 92-4620, *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, South Carolina, 1992.
- [**Juang 1993**]; Juang, J-N., Phan, M., Horta, L.G. and Longman, R.W., "Identification of Observer/Kalman Filter Markov Parameters: Theory and Experiments." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, No. 2, pp. 320-329, 1993.
- [**Juang 1994**]; Juang J-N., *Applied System Identification*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.
- [**Juang 1997**]; Juang J-N., "Unification of Several System Realization Algorithms," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 1, pp. 67-73, 1997.
- [**Kailath 1980**]; Kailath , T., *Linear System*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- [**Kalman 1963**]; Kalman, R.E., "Mathematical Description of Linear Dynamical Systems," *SIAM Journal on Control*, Vol. 1, No. 2, pp. 152-192, 1963.
- [**Maia 1997**]; Maia, N.M.M. and Silva, J.M.M., *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, John Wiley & Sons, 1997.
- [**McConnell 1995**]; McConnell, K.G., *Vibration Testing: Theory and Practice*, Wiley, 1995.

- [**Meirovitch 1990**]; Meirovitch, L., *Dynamics and Control of Structures*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [**Mitchell 1998**]; Mitchell, L.D., "Increasing the Sensitivity of the Modal Assurance Criteria (MAC) to Small Mode Shape Changes: the IMAC," *Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference*, pp. 64-69, 1998.
- [**Mucheroni 1989**]; Mucheroni, M.F., *Método da Superposição para a Análise de Vibrações Livres de Placas Retangulares*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 1989.
- [**Oppenheim 1975**]; Oppenheim, A.V. and Schafer, R.W., *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [**Pappa 1985**]; Pappa, R.S. and Juang, J-N., "Galileo Spacecraft Modal Identification Using an Eigensystem Realization Algorithm," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 33, No. 1, pp. 15-33, 1985.
- [**Pappa 1993**]; Pappa, R.S., Elliott, K.B. and Shenck, A., "Consistent-Mode Indicator for the Eigensystem Realization Algorithm," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, No. 5, pp. 852-858, 1993.
- [**Pappa 1997a**]; Pappa, R.S., Woodard, S.E. and Juang, J-N., "A Benchmark Problem for Development of Autonomous Structural Modal Identification," *Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference*, pp. 1071-1077, 1997.
- [**Pappa 1997b**]; Pappa, R.S., James III, G.H. and Zimmerman, D.C., "Autonomous Modal Identification of the Space Shuttle Tail Rudder," *NASA Technical Memorandum 112866*, June 1997.

- [**Porchia 1997**]; Porchia, L.F., *Identificação de Sistemas Dinâmicos no Domínio da Frequência: Análise Comparativa de Alguns Métodos*, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 1997.
- [**Sanathanan 1963**]; Sanathanan, C.K. and Koener, J., "Transfer Function Synthesis of a Ratio of Two Complex Polynomials," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 8, pp. 56-58, 1963.
- [**Selegim Jr. 1990**]; Selegim Jr., P., *Análise Dinâmica de uma Placa Cantilever pelo Método da Superposição*, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 1990.
- [**Shimano 1994**]; Shimano, A.C., *Análise das Propriedades Geométricas e Mecânicas da Tíbia Humana: Proposta de Metodologia*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 1994.
- [**Taneguti 1997**]; Taneguti, L.Y., *Análise de Desempenho do Método de Identificação ITD*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 1997.
- [**Tsunaki 1994**]; Tsunaki, R.H., *Determinação de Modos Normais Lineares e Não-Lineares no Espaço de Fase*, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 1994.
- [**Varoto 1991**]; Varoto, P.S., *Análise Modal no Domínio da Frequência: Um Método de Identificação Multi-Modos*, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 1991.
- [**Yang 1995**]; Yang, B., "Modal Controllability and Observability of General Mechanical Systems," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 117, pp. 510-515, October 1995.