

**MOVIMENTO DE FLUIDOS CONDUTORES SUBMETIDOS À  
INFLUÊNCIA DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS  
EXTERNOS: CRIAÇÃO DE UM VÓRTICE  
MAGNETOHIDRODINÂMICO NA ÁGUA DO MAR**

**OSVALDO MISSIATO**



Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica

ORIENTADOR: Prof. Dr. Michael George Maunsell



São Carlos  
1998

Class. TESE-EESC ✓  
Codi. 4365  
Tombo T0138/98

31100203006

st 0979418

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca - EESC-USP

M67m Missiato, Osvaldo  
Movimento de fluidos condutores submetidos à  
influência de campos eletromagnéticos externos :  
criação de um vórtice magnetoidrodinâmico na água do  
mar / Osvaldo Missiato. -- São Carlos, 1998.

Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de São  
Carlos-Universidade de São Paulo, 1998.  
Área: Engenharia Mecânica  
Orientador: Prof. Dr. Michael George Maunsell

1. Magnetoidrodinâmica. 2. Vórtices. 3. Água do  
mar. I. Título

## FOLHA DE APROVAÇÃO

Candidato: Licenciado **OSVALDO MISSIATO**

Tese defendida e aprovada em 03-04-1998  
pela Comissão Julgadora:



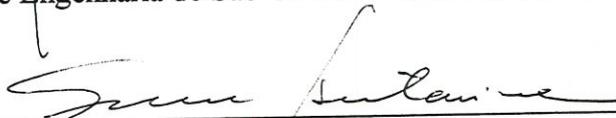
Prof. Doutor **MICHAEL GEORGE MAUNSELL (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Doutor **FERNANDO MARTINI CATALANO**  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



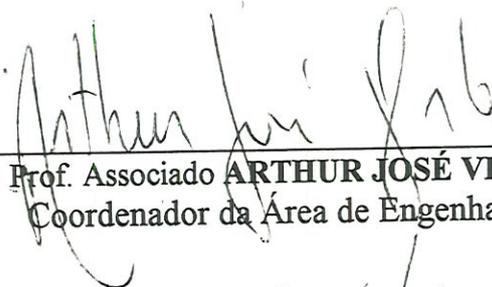
Prof. Titular **RUY ALBERTO CORRÊA ALTAFIM**  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Doutor **GERSON ANTONIO SANTARINE**  
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita" - Campus de Rio Claro)



Prof. Titular **IBERÊ LUIZ CALDAS**  
(Instituto de Física - Universidade de São Paulo)



Prof. Associado **ARTHUR JOSÉ VIEIRA PORTO**  
Coordenador da Área de Engenharia Mecânica



**JOSE CARLOS A. CINTRA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Dedico este pequeno trabalho à minha grande família*

*Margareth, Mariana e Victor Augusto*

## AGRADECIMENTOS

Sou grato a Deus por tudo e a minha esposa pela paciência e dedicação.

A AFA (Academia da Força Aérea) pela dispensa concedida.

Agradeço ao Professor “Mike” pela paciência, dedicação e coragem em me orientar neste trabalho. Agradeço, principalmente ao “velho Mike”, pela confiança em mim depositada.

Agradeço aos meus pais, Atilio e Ana Luiza, pelos seus esforços em dar e incentivar os meus estudos durante a fase mais importante da vida.

Agradeço ao CNPq e a CAPES, pelo auxílio concedido.

Nossos agradecimentos ao Professor Maurizio Ferrante, da Universidade Federal de São Carlos, por ceder seu laboratório, onde realizamos nossos primeiros experimentos.

Ao João Paulo Delicado (estudante de Iniciação Científica, pelo CNPq), por ter organizado o laboratório de medidas e acompanhado muito dos nossos experimentos em M.H.D., na Engenharia Mecânica, USP-São Carlos; contribuição de grande valor.

Ao Sargento Roberto Serrano, da AFA, aluno de Pós-Graduação (Mestrado), pela ajuda nas medidas e confecção dos rotores de medição.

Agradecimento especial ao Departamento de Engenharia Mecânica - EESC, pela acolhida, especialmente a Ana Paula pelos serviços de digitação.

E ao menino Philip Maunsell (“*in memoriam*”) por ter me ajudado na datilografia de um trabalho que realizei sobre fluídos impulsionados eletromagneticamente.

Finalmente agradeço as pessoas que sempre oraram por mim: Carmela, Georgete, Beth, Sandra e aos meus incentivadores: Laércio e Osvaldo Melo.

# SUMÁRIO

<b>SIMBOLOS, UNIDADES E DIMENSÕES.....</b>	<b>VI</b>
<u>PARAMETROS MAGNETOIDRODINÂMICOS</u> .....	VIII
<u>OUTRAS GRANDEZAS DE INTERESSE</u> .....	IX
<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>X</b>
<b>RESUMO.....</b>	<b>XII</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>XIII</b>
<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1. <u>OBJETIVOS</u> .....	1
2. <u>ALCANCE</u> .....	2
<b>CAPITULO I - O ESTADO DA ARTE.....</b>	<b>3</b>
<u>INTRODUÇÃO</u> .....	3
<b>CAPITULO II - 1 - VÓRTICES IMPULSIONADOS MAGNETOIDRODINAMICAMENTE.....</b>	<b>29</b>
<u>RESUMO</u> .....	29
<u>INTRODUÇÃO</u> .....	30
2.1 <u>CAMPOS ROTACIONAIS</u> .....	32
2.2 <u>FORÇA MAGNÉTICA E O TEOREMA DE KELVIN</u> .....	37
2.3 <u>VORTICIDADE E CIRCULAÇÃO</u> .....	39
2.4 <u>VORTICIDADE E ROTACÃO</u> .....	40
2.5 <u>VÓRTICES E VORTICIDADE</u> .....	41
2.6 <u>CONSIDERAÇÕES SOBRE A EQUACÃO DO MOVIMENTO</u> .....	42
<b>CAPITULO II - 2 - EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL DO LÍQUIDO CONDUTOR.....</b>	<b>45</b>
<u>SOLUÇÃO SIMPLIFICADA</u> .....	52
<u>CONDIÇÕES DE CONTORNO</u> .....	54
<u>DETERMINAÇÃO DA PRESSÃO</u> .....	55
<u>DETERMINAÇÃO DA VORTICIDADE</u> .....	56
<u>DETERMINAÇÃO DO PONTO ONDE OCORRE VELOCIDADE MÁXIMA</u> .....	57
<b>CAPITULO III - PARTE EXPERIMENTAL: GERAÇÃO DE UM VÓRTICE NA ÁGUA DO MAR POR MEIO DE M.H.D. ....</b>	<b>58</b>
<u>INTRODUÇÃO</u> .....	58
<u>HISTÓRICO</u> .....	59

<b><u>EXPERIMENTOS QUALITATIVOS</u></b> .....	67
<i>Parte Experimental</i> .....	68
1. <u>MONTAGEM E DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO</u> .....	68
<i>Determinação Teórica da Resistência Elétrica em Função do Campo Magnético</i> .....	72
<b><u>VALORES NUMÉRICOS E DADOS EXPERIMENTAIS</u></b> .....	74
<i>Medida da rotação do núcleo do vórtice</i> .....	74
<b>RESULTADOS EXPERIMENTAIS</b> .....	77
<b><u>COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES</u></b> .....	115
<u>COMENTÁRIOS</u> .....	115
<u>CONCLUSÕES</u> .....	119
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	120
<b><u>APÊNDICE</u></b> .....	1

## SIMBOLOS, UNIDADES E DIMENSÕES

<u>GRANDEZA</u>	<u>SIMBOLO</u>	<u>DIMENSÃO</u>	<u>S.U.M.K.S = S.I.</u>
carga	q	q	Coulomb
circulação	$\Gamma, K$	$L^2T^{-1}$	metro <sup>2</sup> /segundo
condutividade	$\sigma$	$M^{-1}L^{-3}TQ^2$	MHO/metro
corrente	I	$T^{-1}Q$	Ampère
campo elétrico	$\vec{E}$	$MLT^{-2}Q^{-1}$	volt/metro, $\frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}}$
campo magnético	$\vec{B}$	$MT^{-1}Q^{-1}$	Tesla
densidade	$\rho$	$ML^{-3}$	quilograma/m <sup>3</sup>
energia cinética	$E_c$	$ML^2T^{-2}$	Joule
energia potencial	$E_p$	$ML^2T^{-2}$	Joule
força	$\vec{F}$	$MLT^{-2}$	Newton
força/volume	$\vec{f}$	$ML^{-2}T^{-2}$	Newton/m <sup>3</sup>
permeabilidade	$\mu_2$	$MLQ^{-2}$	Henry/m
potencial elétrico	$\Phi$	$ML^2T^{-2}Q^{-1}$	Volt
potência	P	$ML^2T^{-3}$	Watt
pressão	p	$ML^{-1}T^{-2}$	Newton/m <sup>2</sup>

quantidade de movimento	<b>J</b>	$MLT^{-1}$	<u>quilograma-metro</u> segundo
resistência	<b>R</b>	$ML^2T^{-1}Q^{-2}$	Ohm
temperatura	<b>T</b>	T	Graus K, ou C°
velocidade	<b>V, q</b>	$LT^{-1}$	metro/segundo
velocidade ang.	<b><math>\Omega</math></b>	$T^{-1}$	radianos/segundo
viscosidade	<b><math>\mu, \eta</math></b>	$ML^{-1}T^{-1}$	<u>quilograma</u> metro segundo
viscosidade cinemática	$\nu = \frac{\mu}{\rho}$	$L^2T^{-1}$	(metro) <sup>2</sup> /segundo
vorticidade	<b>W</b>	$T^{-1}$	(segundo) <sup>-1</sup>

**(r,  $\theta$ ,  $\varphi$ )** → coordenadas esféricas

**(r,  $\theta$ , z)** → coordenadas cilíndricas (radial, azimutal, axial)

**t** → variável temporal (seg.)

**b, L** → escala de comprimento (m)

**$\alpha = \frac{a}{R_0}$**  → adimensional radial (constante)

**$x = \frac{r}{r_0}$**  → adimensional radial ( $\alpha \leq x \leq 1$ )

**A** → elemento de superfície (m<sup>2</sup>)

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \equiv \frac{D}{Dt}$$

## PARAMETROS MAGNETOIDRODINÂMICOS

<u>Quantidade</u>	<u>Comparação</u>	<u>Unidades</u>	<u>Símbolo</u>	<u>Nome</u>
Pressão	<u>pressão magnética</u> <u>pressão dinâmica</u>	$\frac{\mu_c H_0^2}{2}$ $\frac{\rho v^2}{2}$	$= R_H = N$	nº Pressão mag.
Força	<u>força magnética</u> <u>força viscosa</u>	$\frac{\sigma V \mu_c^2 H_0^2}{\mu V / L^2}$	$= H^2 = M^2$	nº de Hartmann
	<u>força magnética</u> <u>força viscosa</u>	$\frac{\sigma  \Delta \Phi  B_0}{\mu V / L^2}$	$= H^2 = M^2$	nº de Hartmann
	<u>força magnética</u> <u>força inércia</u>	$\frac{\sigma V \mu_c^2 H_0^2}{\rho V^2 / L}$	$= Rm^2$	nº magnético
	<u>força magnética</u> <u>força inércia</u>	$\frac{\sigma  \nabla \Phi  B}{\rho v^2 / L}$	$= Rm^2$	nº magnético
difusividade	<u>difusividade viscosa</u> <u>difusividade magnet.</u>	$\frac{\nu}{\nu_H}$	$= Pm$	nº de Prandtl magnético
<u>dinâmica magnética</u>	<u>dinâmica</u> <u>difusividade mag.</u>	$\frac{VL}{1/\sigma \mu_c}$	$= Rm$	nº de Reynolds magnético
<u>dinâmica magnética</u>	<u>dinâmica</u> <u>viscosa</u>	<u>força inércia</u> <u>viscosas</u>	$\frac{\rho V^2 / L}{\mu V / L^2}$	nº de Reynolds

## OUTRAS GRANDEZAS DE INTERESSE

$$K' = \frac{2J_0^2}{\pi\rho v^2} \quad (\text{adimensional associado à corrente de descarga})$$

$$S = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 v^2 \rho} \quad (\text{adimensional associado à corrente de descarga})$$

$$N = \frac{\rho\mu L}{\eta} \quad (\text{Reynolds radial, deve-se levar em conta o sinal})$$

$$J = \frac{xjr}{\sigma B_0 q_0} \quad (\text{adimensional associado à corrente elétrica})$$

$$\gamma_m = \frac{\sigma B^2}{\rho} \quad (\text{associado ao tempo que leva o sistema para adquirir o estado estacionário})$$

$$\lambda = \frac{1}{2} K' = \frac{J_0^2}{\pi\rho v^2} \quad (\text{definido no texto})$$

$$C_p = \frac{P - P_0}{P_d} = \quad \text{coeficiente de Pressão}$$

## LISTA DE FIGURAS

- FIGURA 1 - Esquema onde aparece a corrente sendo injetada dentro do meio fluido e o campo magnético induzido.
- FIGURA 2 - Aparelhagem básica dos primeiros experimentos.
- FIGURA 3 - Mostra aproximadamente as linhas do campo magnético do solenoide.
- FIGURA 4 - Circuito equivalente do campo elétrico aplicado ao fluido.
- FIGURA 5 - Distribuição das linhas do campo elétrico entre os eletrodos quando não há campo magnético.
- FIGURA 6 - Distribuição das linhas do campo elétrico entre os eletrodos, quando há campo magnético externo.
- FIGURA 7 - (1) Cuba cilíndrica, (2) solenoide, (3) cabo onde se liga ao eletrodo positivo, (4) eletrodo na forma de anel, ajustável no sentido vertical.
- FIGURA 8 - Rotor de Medição.
- FIGURA 9 - Gráfico da velocidade angular de rotação em função da diferença de potencial aplicado para um campo magnético fixo em 0,39T.
- FIGURA 10 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada:  $B = 0,39T$ .
- FIGURA 11 - Mesmo que a anterior, porém  $B = 0,39T$ . Notar que a água foi reutilizada.
- FIGURA 12 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada:  $B = 0,35T$ .
- FIGURA 13 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada:  $B = 0,39T$ .
- FIGURA 14 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada:  $B = 0,37T$ .  
Temperatura:  $25^{\circ} C$ .
- FIGURA 15 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada:  $B = 0,39T$ .  
Temperatura  $70^{\circ} C$ .
- FIGURA 16 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada:  $B = 0,37T$ .
- FIGURA 17 - Velocidade angular de rotação contra tensão aplicada:  $B = 0,36T$ . Rolha no lugar do rotor de medição.

- FIGURA 18 - Relação tensão-corrente no fluido sem campo magnético e com o campo aplicado de  $B = 0,39T$ .
- FIGURA 19 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada:  $B = 0,39T$ .
- FIGURA 20 - Variação da resistência elétrica em função do campo magnético para 3 valores de tensão aplicada.
- FIGURA 21 - Resistência elétrica em função do campo magnético para 3 valores diferentes da tensão aplicada.
- FIGURA 22 - Variação da resistência elétrica do fluido em função do campo magnético. Tensão aplicada:  $\Delta U = 30V$ .
- FIGURA 23 - Mapeamento do campo magnético em função do raio para  $Z \cong 0$ .
- FIGURA 24 - Tensão-corrente com  $B = 0,39T$ .
- FIGURA 25 - Variação da velocidade angular em função da tensão aplicada para  $B = 0,39T$  e rotor a 1,5 cm da superfície.
- FIGURA 26 - Variação angular de rotação em função da tensão aplicada com o rotor a 0,5 cm da superfície.
- FIGURA 27 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada:  $B = 0,39T$  e Temperatura =  $50^{\circ} C$ .
- FIGURA 28 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada:  $B = 0,39T$  e Temperatura  $\cong 70^{\circ} C$ . Água utilizada pela terceira vez consecutiva.
- FIGURA 29 - Variação da tensão em função da corrente para duas situações diferentes.
- FIGURA 30 - Variação da tensão em função da corrente.
- FIGURA 31 - Variação da tensão aplicada em função da corrente elétrica.
- FIGURA 32 - Tensão-corrente, alta temperatura.  $B = 0$      $T = 70^{\circ} C$
- FIGURA 33 - Relação tensão-corrente:  $B = 0,39T$ .
- FIGURA 34 - Gráfico da tensão-corrente.
- FIGURA 35 - Tensão-corrente. Água reutilizada e campo  $B = 0,39T$ .
- FIGURA 36 - Relação tensão-corrente.

## RESUMO

MISSIATO, O. (1998). *Movimento de fluídos condutores submetidos à influencia de campos eletromagnéticos externos: criação de um vórtice magnetohidrodinâmico na água do mar*. São Carlos, 1998. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Inicialmente é feito um levantamento bibliográfico sobre o “Movimento de Fluídos Condutores submetidos à Influência de Campos Eletromagnéticos”. Em seguida, optou-se pela água do mar como fluido de trabalho e a formulação fisico-matemática baseada no modelo magnetohidrodinâmico de líquidos fracamente condutores submetidos à influência de campos eletromagnéticos externos.

O sistema de equações, pelas simplificações impostas, acaba resultando em uma equação diferencial linear com solução analítica compatível com a realidade do problema. A distribuição da velocidade tangencial e da pressão no volume do fluido sob estudo são deduzidas.

Posteriormente, montou-se um experimento para gerar o vórtice M.H.D. com a realização de medida de grandezas físicas de interesse, por exemplo, tensão-corrente, velocidade angular de rotação, condutividade, temperatura, etc.

## ABSTRACT

MISSIATO, O. (1998). *The movement of conducting fluids under the influence of external electromagnetic fields: a magnetohydrodynamic vortex in sea water*. São Carlos, 1998. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

A review of the bibliography under the title, “the Movement of Fluid Conductors under the Influence of Electromagnetic Fields”, is presented. Sea water was chosen as the working fluid accompanied by physical-mathematical formulation based on the magnetohydrodynamic model for weakly conducting liquids submitted to external fields.

The system of equations under the imposed simplifications resulted in the definition of a differential linear equation with an analytical solution which is compatible with the reality of the problem. The tangential velocity distribution and pressure were deduced.

An experiment was set-up in which an M.H.D. vortex was generated and measurements of the physical parameters of interest were made, such as: voltage, current, angular velocity, conductivity, temperature, etc.

# INTRODUÇÃO

## 1. Objetivos

Um dos principais objetivos do trabalho foi entender a técnica de geração de vórtices por meio da magnetohidrodinâmica e também ganhar experiência na aplicação de interesse da física aplicada.

Não foi encontrado nenhum artigo que tratasse da geração de vórtices na água do mar. Isto sugere que o estudo representa uma contribuição significativa para física aplicada ou engenharia.

Um outro aspecto de certa importância é o estudo de líquidos fracamente condutores como elemento de trabalho em um experimento de M.H.D.. Água existe em abundância nos oceanos e sua utilização como meio propulsor é viável. O movimento rotacional da água do mar em um recipiente sem partes móveis, representa sem dúvida, um fenômeno experimental muito elegante e sua compreensão poderá facilitar a verificação de uma parte da magnetoidrodinâmica ainda pouco

explorada. Acredita-se que este experimento possa também servir como um elemento didático para a utilização em experimentos importantes de física experimental (por exemplo, para alunos dos primeiros anos nas escolas de Engenharia e mesmo de Física, Química, etc.).

## **2. Alcance**

Neste ponto acredita-se ser importante deixar muito claro como foi dividido o trabalho e até onde se conseguiu chegar com os aparelhos utilizados na parte experimental.

Este trabalho está dividido em três partes de igual importância:

- uma parte bibliográfica, na qual procurou-se mostrar o que foi feito, conseqüentemente, no que se pôde contribuir;
- um modelo teórico relativamente simplificado, compatível com a realidade do experimento realizado;
- e, finalmente, a parte experimental que comprova de maneira inequívoca a visualização qualitativa do vórtice gerado e alguns dados quantitativos relevantes que permitem se apontar para o futuro com a certeza de que, utilizando uma aparelhagem mais sofisticada conseguir-se-á dados ponto a ponto sobre as grandezas de interesse (pressão, velocidade) e então daí pode-se comparar com o modelo teórico proposto.

## **CAPITULO I - O Estado da Arte**

### **Introdução**

Aplicando-se uma diferença de potencial entre dois eletrodos contidos em um recipiente com líquido condutor e assim, espera-se a geração de uma corrente elétrica no líquido. Dependendo da condutividade elétrica do fluido, o campo magnético induzido pode ser suficiente para, interagindo com a corrente, criar a força de Lorentz a qual, sendo rotacional, pode induzir movimento do fluido dentro do recipiente.

Se o campo magnético induzido for desprezível é possível que ainda se tenha uma força razoável, desde que o fluido fique sob influência de um campo magnético externo relativamente intenso (da ordem de 1,0T).

Um dos objetivos é saber quanto movimento esta força é capaz de produzir, que valores assumem as grandezas: velocidade, pressão, vorticidade, etc.

associadas ao fluido em movimento. Ou, ainda mais, será que a combinação de tais “dispositivos” são capazes de gerar um vórtice magnetoidrodinâmico dentro do fluido condutor escolhido?

Estas questões certamente já surgiram dentro da comunidade científica, e, propostas com a intenção de resolvê-las, não faltaram. Na literatura especializada surgem nomes como os de MAECKER 1955<sup>(1)</sup> e AMSON 1965<sup>(2)</sup>, os quais reconheceram a grandeza e a importância dos violentos movimentos gerados pelas forças devido ao campo magnético induzido pelas correntes aplicadas em líquidos condutores porém, em nenhum deles aparece uma formulação adequada que tenha por suporte, a mecânica dos fluidos e, em se tratando de fluidos condutores submetidos à influência de campos eletromagnéticos.

Um dos pioneiros na tentativa de se dar uma solução para o problema em questão, foi ZHIGULEV, V.W., 1960<sup>(3)</sup>. Este autor mostra que uma descarga axialmente simétrica, em um meio de condutividade finita, é acompanhada pelo movimento do meio. Em seu artigo são utilizadas as equações da magnetohidrodinâmica, as quais resultam num sistema de equações diferenciais parciais não lineares onde apresenta soluções pelo método da similaridade. Comenta ainda, sobre a insuficiência da hidrostática na investigação de uma descarga com simetria axial. Nada é mencionado, no entanto, sobre o papel da vorticidade produzida pela força rotacional magnética.

Em 1960, UBEROI<sup>(4)</sup> analisa o movimento induzido pela passagem de uma corrente elétrica através de um fluido condutor incompressível (mercúrio). Obtém solução em forma fechada, assumindo pequenos Reynolds magnético e

ordinário ( $Rm = \mu\sigma UL$ ) e  $R = \frac{\rho UL}{\eta}$ , onde as forças eletromagnéticas são balanceadas por forças viscosas e de pressão. Num segundo problema considera o fluido condutor escoando em um tubo axisimétrico e a sua modificação devido à passagem de uma corrente elétrica. Obtém uma solução completa do movimento rotacional em forma fechada considerando pequenas variações no diâmetro do tubo para satisfazer um problema de condições de contorno, em ( $r = R$ ),  $R$  = raio do tubo. É a primeira vez que aparece claramente a magnetoidrodinâmica para pequenos Reynolds magnético e onde o autor chama a atenção para a seguinte aproximação: “A intensidade do campo eletromagnético afeta o movimento do fluido, mas o inverso não é verdadeiro”.

Um outro ponto importante de seu trabalho diz respeito à quebra de continuidade da corrente. Existe um limite para a aplicação de corrente no líquido (mercúrio) a partir da qual a força eletromagnética desaparece e com ela o movimento do meio (BREAKDOWN), e que a corrente fica confinada em certas regiões do fluido ao invés de se distribuir sobre toda a seção (do fluido) e, as correntes induzidas (secundária) fluem em circuitos fechados (closed loops).

Em 1960, LEWELLEN, W.S.<sup>(5)</sup>, estudou teoricamente vórtices induzidos magnetoidrodinamicamente em um fluido condutor, viscoso, considerando escoamento axisimétrico e bidimensional, tanto incompressível quanto compressível. Apresenta e discute rapidamente as equações que descrevem o movimento do fluido. Escolhe os campos elétrico e magnético de tal modo a criar uma força de campo tangencial (a qual é a responsável pela aceleração do fluido). Despreza o campo magnético induzido e mostra que o Reynolds magnético baseado na velocidade radial

é muito menor que a unidade ( $R_m \ll 1$ ). Com isso o problema reduz-se a uma equação diferencial, linear, de segunda ordem, para a velocidade tangencial. Resolve analiticamente em dois casos de interesse. Em um deles, considera corrente radial e noutro axial. Em seguida estende o problema para fluido compressível e faz um exemplo de aplicação considerando um gás aquecido à 3000K, e obtém um rendimento de 38%. Este valor diz respeito à energia elétrica que é utilizada em gerar o vórtice, enquanto que o restante vai diretamente para o aquecimento Joule e outras formas de dissipação (viscosidade, por exemplo).

A parte teórica do nosso trabalho, ora apresentado, assemelha-se à este artigo de Lewellen com geometria diferente, enquanto na parte experimental é utilizada água do mar.

Em 1966, PAO e LONG<sup>(3)</sup>, estudaram o escoamento magnetoidrodinâmico com a estrutura de um jato-vórtice de um fluido condutor incompressível considerando o problema tridimensionalmente. Apresentam uma teoria geral que reduz as equações do movimento e da indução magnética à cinco equações diferenciais ordinárias não-lineares.

Para simplificar o problema consideram duas aproximações pertinentes. A primeira considera o movimento do jato tão forte que  $\frac{J}{K^2} \gg 1$  e

$\frac{J}{v^2} \gg 1$ , onde  $J$  é a transferência de quantidade de movimento cinemático,  $K$  é a

circulação de velocidade,  $\nu$  é a viscosidade cinemática  $\nu = (\mu / \rho)$ , ( $K = rV$ ).

As equações simplificadas são integradas e obtém-se soluções analíticas considerando

condutividade infinita ou infinitesimal. Por outro lado, quando o movimento do vórtice é tão forte que  $\frac{K^2}{\nu^2} \gg 1$ , as equações simplificadas são integradas numericamente. Uma das conclusões importantes que esse artigo permite tirar é a grande modificação do campo de escoamento quando ocorre a interação magnetoidrodinâmica. Um aspecto interessante é que a intensidade do jato e do vórtice, no núcleo do escoamento é reduzida, e a largura da camada limite é aumentada, à medida que o campo magnético aumenta.

Isto significa que o campo magnético tem um efeito de difusão sobre o campo de escoamento. Outro ponto interessante é aquele onde a velocidade e o campo magnético são difundidos para fora da região de escoamento à medida que a viscosidade cinemática é aumentada ou a condutividade elétrica é reduzida. Deve-se ressaltar, no entanto, que esse é um trabalho essencialmente teórico.

Em 1969, LUNDQUIST, S.<sup>(7)</sup>, publicou um artigo intitulado “*On the hydromagnetic viscous flow generated by a diverging electric current*”, no qual apresenta uma solução estacionária, considerando fluido condutor, incompressível e baixo número de Reynolds magnético. Segundo o autor, isto corresponde a uma corrente elétrica abaixo de um valor crítico determinado pela viscosidade e resistividade (condutividade) do fluido. Apresenta uma solução geral da equação do movimento e, em seguida, particulariza para contorno sólido e, após, fronteira livre. A hipótese de baixo número de Reynolds conduz o autor a tecer observações sobre a validade das aproximações e chega a obter um valor limite para a corrente de descarga; no caso do mercúrio ( $I_0 \cong 300 \text{ Amp}$ ). (Correntes acima de tal valor gera instabilidades e causa o “breakdown”).

De acordo com o levantamento bibliográfico o trabalho que realmente fornece um suporte teórico adequado ao movimento de fluidos impulsionados por uma fonte de corrente elétrica é devido a SHERCLIFF, 1970<sup>(8)</sup>, apesar de ter considerado um fluido condutor incompressível e invíscido. O autor salienta o aspecto não linear das equações que descrevem o movimento do fluido, porém uma solução analítica é possível porque a não linearidade da equação do movimento aproxima-se de uma equação linear no quadrado da função de corrente de STOKES:

$$\left( \nabla \cdot \vec{V} = 0 \rightarrow r V_r = - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \text{ e } r V_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right), r \text{ é uma coordenada radial}$$

e  $z$  é axial.  $\Psi(r, z)$  é a função fluxo.

SHERCLIFF chama a atenção para o fato seguinte: “É a rotacionalidade da força magnética que determina o movimento do fluido”. O seu problema é caracterizado por três grandezas  $(\mu\sigma, \mu\rho, \mu I)$ , onde  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $I$  são respectivamente: permeabilidade magnética, condutividade elétrica, densidade ou massa específica e corrente elétrica. Não há um comprimento e uma velocidade característica, há contudo, um parâmetro adimensional denominado  $K$

$$\left[ K = \frac{(\mu I)(\mu\sigma)}{(\mu\rho)^{1/2}} \right], \text{ o qual governa a forma das soluções.}$$

SHERCLIFF, considera pequenos valores de  $K$  ( $\ll 1$ ), ou seja, movimento lento, incapaz de gerar força eletromotriz induzida. A corrente se espalha isotropicamente pelo fluido a partir da origem, determinando, assim, o  $\text{rot}(\vec{j} \times \vec{B})$  pelo volume todo, a qual da origem ao movimento. O parâmetro  $K$ ,

na verdade é uma forma diferente do número de Reynolds magnético. Para baixos

valores de  $K$ , as velocidades são da ordem de  $\frac{I}{r} \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2}$ , onde  $I$  é a corrente

elétrica, logo

$$R_m = \mu\sigma \times \text{vel} \times r = \mu\sigma \frac{I}{r} \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2} r = \mu\rho \times I \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2} = K$$

Deste modo o  $R_m$  é o mesmo por todo o escoamento independentemente da distância à origem.

SHERCLIFF dá bastante importância para escoamentos de fluidos condutores tendo em conta  $K \ll 1$ . Assim, depois de achar um valor para a velocidade do escoamento, ele chama a atenção para a seguinte situação: em um sistema finito, o fluido pode sofrer o processo de recirculação repetidamente e, portanto, ter ganhos intensos de velocidades.

Em seguida, calcula a perturbação da distribuição de corrente devido à indução eletromagnética, onde obtém uma inversão no sentido da mesma (corrente), ou seja, a indução eletromagnética tende a deslocar o fluxo de corrente total para as paredes e o eixo de simetria, assim, pensa ele, para altos valores de  $K$  a corrente pode ficar totalmente confinada nas paredes e no eixo, o que ele não tem certeza é como a distribuição de corrente altera o processo de geração da vorticidade.

Finalmente conclui que:

- 1) O modelo matemático utilizado pode ser inadequado para uma situação real. Pois, nestes casos, tem-se efeitos devido a viscosidade, tensão superficial, convecção do material e devido ao aquecimento ohmico, etc.
- 2) Classifica seu estudo como sendo a criação de vorticidade devido à força rotacional  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ , em contraste com casos muito familiares da, supressão de vorticidade! (Inclusive com trabalhos do próprio autor) <sup>(9)</sup>

Em 1971, SOZOU, C.<sup>(10)</sup>, considerou o campo de escoamento induzido em um fluido viscoso incompressível ocupando o interior de um cone de base circular, por uma fonte de corrente situada no vértice do cone. Ele obtém uma solução pelo método de similaridade. Na verdade sua solução é uma adaptação do problema do jato viscoso devido à SLEZKIN <sup>(10)</sup> LANDAU. Um ponto interessante de seu artigo é a discussão feita em comparação com a solução de SHERCLIFF (1970), principalmente no que diz respeito às condições de contorno. As condições de contorno usadas por SHERCLIFF implicam em que a velocidade tenha singularidades ao longo do eixo. Segundo SHERCLIFF, é necessário escolher estas condições de contorno para tornar a vorticidade finita próxima à parede. SOZOU, no entanto, considera velocidade finita ao longo do eixo e grande vorticidade .

SOZOU argumenta que é a hipótese de fluido invíscido que causa toda sorte de dificuldades (altera a na ordem da equação diferencial do momentum), porém, ele considera ainda desprezível o efeito da velocidade sobre o campo

eletromagnético. Define um parâmetro :  $K' = \frac{2J_0^2}{\pi\rho\nu^2}$ . (  $I_0$  é a corrente total da

fonte,  $\rho$  densidade do fluido e  $\nu$  é a viscosidade cinemática), e se este, ( $K'$ ), excede um certo “valor”, o campo de velocidades assume singularidades.

No final do artigo SOZOU levanta um argumento interessante: na prática não existe fluido sem viscosidade, o que existe é escoamento de fluido com pequena viscosidade e falar que a viscosidade é zero é muito diferente em falar que ela tende para zero.

(Para  $\nu$  não nulo e  $K' > 300.1$ , ocorrerem singularidades no campo de velocidades!)

NARAIN, J. P., and UBEROI, M.<sup>(11)</sup>, em 1971, estudaram a magnetoidrodinâmica de escoamentos conical (“*conical flows*”), no qual consideram o efeito de uma corrente elétrica divergente ou convergente sobre fluido condutor, viscoso, incompressível em regime estacionário, confinado em um cone de extensão infinita. Com o aumento da corrente a velocidade próxima ao eixo aumenta muito rapidamente. Segundo os autores, no caso de arcos elétricos as velocidades medidas assumem valores da ordem de  $300 \text{ m s}^{-1}$ , próximo ao eixo. Novamente concluem que, quando o parâmetro  $K > 300.1$ , ocorre singularidades no campo de velocidade. (Seria este valor universal de tal forma a valer para qualquer fluido, geometria, etc.?)

Em 1972, SOZOU retoma o problema do movimento de fluidos induzidos por um jato de corrente elétrica, mas considera a mesma geometria de SHERCLIFF. É o jato através de uma abertura circular no plano infinito. Faz uma expansão em série da função fluxo  $\Psi$ , e toma os três primeiros termos da série em função da abertura  $\left(\frac{a}{r}\right)$ , ( $r$  é o raio) circular no plano infinito; e chama a atenção

para o valor de  $K = \frac{2J_0^2}{\rho v^2}$  não poder exceder 300.1, pois haveria o problema de singularidade no campo de escoamento. Esta resolução está na forma de uma série, e contém a de SHERCLIFF).

Em 1973, NARAIN e UBEROI, retomam o problema de 1971, onde apresentam uma resolução analítica para escoamento invíscido e incompressível e uma resolução numérica para fluido viscoso causado por uma descarga cônica de corrente. Assumem as mesmas condições de contorno de SHERCLIFF, ou seja, velocidade transversal nula sobre o eixo e ainda, velocidade radial não nula sobre a parede do fluido invíscido (o fluido pode “escorregar” ao longo da parede). No caso invíscido, válida para todos os ângulos de cone escolhem a constante da resolução, como sendo o coeficiente  $\underline{v}$  e, desprezam o termo de inércia.

Com o aumento do parâmetro  $\lambda = \frac{\mu_e K_0^2}{\rho v^2} = \frac{1}{2} K$ , o fluxo

induzido aumenta e a “inversão do jato” próximo ao eixo intensifica sua magnitude (do fluxo), um valor crítico  $\lambda = \lambda_0$  é obtido no qual ocorre um aparente breakdown do método numérico, onde  $\lambda_0 = 2.56 \cdot 10^3 (\alpha_r)^{-6,30}$ ,  $\alpha_r$  ângulo do cone. Para  $\alpha = 90^\circ$  e  $30^\circ$ , os valores críticos de  $\lambda$  são 150 (ou  $K = 300$ ) e  $\lambda_c = 15 \times 10^6$ .

Em de 1972, SOZOU e ENGLISH<sup>(12)</sup>, deram continuidade aos trabalhos anteriores de SOZOU, priorizando a técnica computacional e levando em conta a interação da velocidade do escoamento com o campo eletromagnético. Esta

interação é “medida” pelo parâmetro adimensional  $\alpha = 4\pi\nu\sigma$ , onde  $\sigma$  é a condutividade elétrica do fluido,  $\nu$  é a viscosidade cinemática  $\left(\nu = \frac{\mu}{\rho}\right)$ .

Quando  $\alpha \ll 1$  o efeito da velocidade sobre o campo é desprezível. O escoamento não altera o campo.

Para alguns fluidos, por exemplo mercúrio,  $\alpha \ll 1$  e a solução anterior de SOZOU acaba sendo muito satisfatória.

O caso de  $\alpha \sim 1$  que é de interesse (em muitas pesquisas, ver trabalho 12), fornece uma solução exata satisfazendo todas as condições de contorno em M.H.D. com simetria axial.

Neste caso a corrente não é mais isotrópica. Após a aplicação do método computacional para se obter a solução, descobrem que o campo de velocidade modifica profundamente o campo eletromagnético que por seu lado modifica o campo de escoamento gerado. O valor de  $K$  crítico é modificado substancialmente. Para um certo valor de  $K$  fixado, quando  $K$  crítico é excedido, o campo de velocidade adquire singularidade. Discute os casos em que  $K_0 = 0$  e  $K_0 \neq 0$  ( $K_0$  é uma constante). Para  $K_0 = 0$ , o campo de escoamento é inteiramente devido à rotacionalidade da força  $\vec{J} \times \vec{B}$ . Neste, o efeito da velocidade sobre o campo eletromagnético, é o de aumentar o  $K$  crítico, e aumenta à medida que  $\alpha$  aumenta.

Para  $\alpha = 1$ ,  $K$  crítico é igual à 813 ( $K$  crít. = 813). Comenta, ainda, sobre a analogia com os problemas de jatos ou sorvedouros investigados por outros

autores e comenta sobre o fato de os jatos não satisfazerem as condições de contorno de velocidade zero ao longo do tubo ou parede. Agora, a equação do momentum contém um termo extra, força rotacional de Lorentz, que permite satisfazer todas as condições de contorno.

Para  $K_0 \neq 0$ :

Quando  $K = 0$  um campo finito de velocidade existe para todo  $K_0$  finito ( $K_0 > -15.344$ ). O valor negativo de  $K_0$  dá um jato de momentum e um valor positivo, um sorvedouro. Para  $K$  e  $\alpha$  fixados, os cálculos indicam um breakdown do campo de velocidades quando  $K_0 > -15.344$ .  $K_0$  também cresce monotonicamente com  $K$ , para  $\alpha$  fixo. O autor constrói uma tabela para valores de  $(\alpha/K)$  e  $K_0$ . Em conclusão, note-se que, quando o campo de velocidade é levado em conta na interação com o campo eletromagnético, grandes modificações são sentidas no campo de escoamento (a condutividade elétrica é muito alta).

Em 1973, SOZOU, C., analisa o fato de que em aplicações práticas, muitas vezes, a corrente elétrica pode exceder o valor crítico, sem que se tenha problemas de singularidades no escoamento (no campo de velocidades). Neste artigo propõe fornecer uma explicação para a discrepância entre a teoria e prática. Já no artigo anterior, 1972, SOZOU e ENGLISH, haviam chamado a atenção para a grandeza ( $\alpha = 4\pi\nu\sigma$ ):

Observaram eles: quando o parâmetro  $\alpha$  é da ordem da unidade ou maior, o valor de  $K$  para o qual o campo de velocidades sofre breakdown (quebra) é aumentado consideravelmente. Em muitas aplicações práticas o parâmetro  $\alpha$  é

pequeno e, assim, torna-se necessário uma outra explicação para a discrepância entre a teoria e a prática.

Inicialmente consideram que a corrente é radial e distribuída uniformemente dentro da região cônica sobre um eixo de simetria (e zero, fora desta região).

A parte rotacional da força de Lorentz gera um campo de velocidade na região cônica ocupada pela corrente. Esta se espalha dentro do resto do fluido, tal que, na interface há continuidade da velocidade e stress (das tensões). Seus cálculos mostram que, à medida que o ângulo do cone diminui assim também acontece com o valor de  $K$ , para os quais ocorre a singularidade. Ou seja, esta modificação não consegue, segundo o autor, fornecer a explicação desejada. O que resta, então? Resta olhar para a estrutura da corrente de descarga, isto é, a força que dá origem ao campo de velocidade! Nas palavras do autor: *“The main difference between theory and experient is the assumption of a point source and a radial current uniform within a cone; this can be illustrated by the following simple example...”*

Eles se basearam na geometria dos eletrodos para explicar a origem da rotacionalidade da força de Lorentz. Quando os eletrodos têm o mesmo tamanho, a força é irrotacional, mas, basta que se faça uma pequena modificação em um deles para que a mesma torne-se rotacional e, assim, de origem ao campo de escoamento. Levam em conta, também, dados experimentais devido à WOODS e MILNER<sup>(58)</sup>. Continuam com a discussão até chegarem às dificuldades de se manter um modelo não linear (que ocorre na prática) para explicarem a quebra de velocidade, a qual origina-se nos termos de inércia da equação do movimento. Finalmente, criam um

modelo modificado de corrente elétrica, redefinem o valor de  $\mathbf{K}$  para um valor muito menor. Sugerem que o escoamento gerado pela corrente de descarga comporte-se como nos modelos anteriores, porém somente uma parte da corrente total contribui para a força que origina o campo de escoamento, o parâmetro fundamental

$$2 \frac{J_0^2}{\pi \rho v^2}$$

deve ser multiplicado por um fator  $\lambda (< 1)$ , o qual é determinado

experimentalmente (depende das medidas e da distância entre os eletrodos).

SOZOU e PICKERING, 1975, dando continuidade a estudos anteriores, analisam o desenvolvimento do escoamento M.H.D. devido a uma descarga de corrente elétrica  $\mathbf{J}_0$ , de um ponto sobre uma placa separados por um fluido condutor, viscoso e incompressível em um espaço semi infinito. O campo de escoamento é a resposta do fluido à força de Lorentz criada por uma corrente elétrica e um campo magnético associado. O problema é resolvido numericamente.

O grande avanço proporcionado pelos autores é o fato de estudarem a evolução do campo de escoamento e não o regime permanente (*steady state*). O problema é formulado sobre a hipótese de que, estabelecendo a descarga, o campo eletromagnético é estabelecido instantaneamente. Desprezam o efeito da velocidade sobre o campo eletromagnético. O problema envolve uma equação diferencial de quarta ordem, não linear, parcial, a qual é decomposta em duas equações diferenciais de segunda ordem do tipo misto. São resolvidas por iteração. Faz estudos comparativos para os casos de regime permanente e aqueles que envolvem tempo. Observa-se grandes variações entre as duas situações.

Novamente em 1976, SOZOU, C. and PICKERING, W.M., retornaram o estudo do fluxo magnetoidrodinâmico devido à descarga de uma corrente elétrica em um recipiente hemisférico. Consideraram fluido condutor, incompressível, e uma descarga simétrica de uma fonte pontual para um hemisfério (superfície livre).

Constróem uma solução analítica para o caso linear (lento com viscosidade), e uma solução numérica do problema não linear. De acordo com o método computacional, quando a corrente de descarga assume determinados valores, ocorre breakdown da velocidade. Segundo os autores esta “quebra” origina-se no vértice do recipiente hemisférico. (parece motivadora esta hipótese)

Os valores de  $\mathbf{K}$  crítico são relativamente pequenos, da ordem de  $K_{crit} = 94.1$ , para o caso linear.

Para o problema não linear, quando se considera os termos (de inércia), os valores de  $\mathbf{K}$  são da ordem de 10. Na verdade, os valores de  $\mathbf{K}$  que incluem o crítico situam-se entre 18.5 e 20, ou seja,  $18.5 < K_c^0 < 20$ .

Em 1978, MOFFAT, H. K.<sup>(15)</sup>, fez um estudo intitulado “*Some Problems in the magnetohydrodynamics of Liquid Metals*”, onde destaca o caráter rotacional da força de Lorentz como sendo o grande responsável para a movimentação do fluido nos recipientes.

Ele destaca três tipos de problemas:

- 1) O problema da geração de rotação em um metal líquido pela aplicação de um campo magnético em rotação.

- 2) A geração de movimento celular pela aplicação de campos alternados e uma direção fixa e,
- 3) O problema da geração de movimento fluido pela injeção de uma corrente estacionária em um ponto (eletrodo pontual) sobre o contorno do fluido. (problema em estudo)

Antes de comentarmos o de nº 3 que nos diz respeito, destacamos a importância dada por MOFFAT a respeito da circulação do fluido.

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{x} = \nu \int_c d\vec{x} \cdot (\nabla \times \vec{W}), \quad \vec{W} = \nabla \times \vec{V} \text{ é a vorticidade.}$$

Não importa quão pequena a viscosidade possa ser, somente efeitos viscosos podem limitar o crescimento da circulação ao redor de  $C$  quando a força é rotacional.

*“It is evident from this that, no matter how small the viscosity of fluid may be, it is viscous effects alone that can limit the growth of circulation round  $C$  When a force is rotational.”* (MOFFAT, 1978)

MOFFAT começa analisando a dependência da vorticidade com a distância à fonte e o caráter não viscoso adotado por SHERCLIFF.

Comenta a solução de SOZOU levando em conta a viscosidade e a solução baseada em argumentos de similaridade por ele encontrada. Outro ponto que mereceu destaque em sua abordagem foi a dependência com  $r^{-3}$  da força de Lorentz. Quando é feita a integração ocorre divergência, se a mesma não for compensada por uma divergência na sucção exercida pela parede  $\theta = \pi/2$ ,  $R \rightarrow \infty$  ( $R$  é o raio),

isto implicaria em um não movimento ilimitado no fluido à medida que o raio tendesse para o infinito.

Comenta ainda, sobre a maneira mais fácil de se resolver o problema que é a dimensão finita do fluido e a substituição do eletrodo pontual por outro de dimensão finita. No entanto, outros problemas podem ocorrer como por exemplo (cavitação).

Finalmente conclui: *“It must be concluded that in spite of the conceptual simplicity of the idealised problem as posed by SHERCLIFF, the solutions that have so far been proposed have internal inconsistencies It should perhaps be noted more over that even if the laminar problem were fully understood, the flow is very likely to be unstable when  $K$  exceeds some critical value, and a turbulent state is then the most likely outcome!”*

ANDREWS, J.G. and CRAINE, R.E., em 1978 estudaram o escoamento de fluido em um hemisfério, induzido por uma fonte de corrente distribuída.

Consideraram uma solução em regime permanente de um fluido viscoso, incompressível e condutor em um recipiente hemisférico levando em conta várias representações axissimétricas de fonte de correntes elétricas distribuídas, que podem surgir no processo de soldagem. Efeitos inerciais são negligenciados e não ocorrem singularidades no campo de velocidades. Dão bastante ênfase para a distribuição de corrente. No final fazem uma boa discussão sobre a eliminação das singularidades com as fontes de correntes adotadas. Neste caso não ocorreu breakdown do campo de velocidades próximo a origem. Segundo os autores, na prática a corrente elétrica que entra no fluido é distribuída sobre uma região finita, e a

singularidade da força eletromagnética ( $\vec{j} \times \vec{B}$ ), inerente ao modelo de fonte pontual, não existe.

Finalmente, concluem o artigo citando a grande vantagem de se utilizar uma fonte distribuída de corrente (ao invés de pontual, pois é eliminado o breakdown na velocidade).

Uma desvantagem, contudo, é que no meio do fluido a solução linearizada é válida somente para pequenos números de Reynolds e as correntes máximas permitidas são da ordem de 5 a 15A, isto realmente representa um avanço em relação ao trabalho de SOZOU & PICKERING (1976) para a fonte pontual, mas ainda muito longe da realidade devido as centenas de ampères que ocorrem na prática (*several hundred ampères*). Acreditam que uma fonte não-linear distribuída será necessário para “acomodar” o problema.

No mesmo ano de 1978, SOZOU e PICKERING, consideram o eletrodo com dimensão finita e um recipiente hemisférico. A corrente é descarregada de um eletrodo circular que se localiza no centro do plano equatorial do esferóide. O eletrodo tem, por hipótese, um potencial constante. A vorticidade tem singularidade nas bordas do eletrodo como era de se esperar.

Observam que a velocidade tende a decrescer quando  $R_0$  (raio) decresce ( $R = R_0$  define a superfícies do esferóide). Esta observação está de acordo com os dados experimentais de WOODS e MILNER<sup>(58)</sup>. Em um experimento eles passaram várias correntes elétricas entre os dois eletrodos com diâmetro de 3mm e 15mm, respectivamente. Quando repetiram a experiência com o diâmetro dos

eletrodos dobrados (6mm) a velocidade máxima, observada para uma dada corrente, caiu pela metade.

O decréscimo na intensidade do campo de velocidade devido a um aumento no raio do eletrodo, é esperado pela teoria, ou seja, quando o raio aumenta a parte rotacional da força de Lorentz  $\vec{j} \times \vec{B}$ , que origina o campo da velocidade, decresce. (é fácil de se verificar no laboratório)

Um outro ponto de destaque do trabalho é que o campo de escoamento ao redor do anel, na junção do eletrodo, varia suavemente no campo de velocidade geral, mas depende da geometria do eletrodo e não da força de Lorentz que gera o campo. Isto sugere que a formação dos “eddys (redemoinhos) ao redor do anel do eletrodo é devido à geometria do problema e não da causa (rotacionalidade da força). Palavras do autor: “*It is worth looking into this aspect of the solution because, if this is indeed the case, it could have applications in other singular configurations, for example convection problems*”.

No mesmo ano de 1976, BOYAREVICH<sup>(19)</sup>, na Rússia, estuda o escoamento vorticoso eletricamente induzido devido a um eletrodo hemisférico (em que a região de singularidade é excluída ( $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ )). Apresenta uma solução analítica supondo várias hipóteses:

- 1) Ausência de velocidade normal na superfície livre
- 2) Desaparecimento das tensões tangenciais
- 3) Ausência de fontes do longo eixo de simetria
- 4) Decréscimo da velocidade no infinito!

Define um parâmetro  $S = \frac{\mu I^2}{2 \pi^2 v^2 \rho}$ , e encontra solução em

expansão em potência de  $S$ , ou seja,  $\psi = S\psi_1 + S^2\psi_2 + S^3\psi_3 + \dots$  (toma só os dois primeiros termos. No final do artigo ele discute as soluções em termos de  $S$  (até 500), neste caso ocorre uma reversão do fluxo (backflow) que pode variar o perfil da superfície.

Um detalhe importante do artigo está em uma citação do mesmo:

*“The singularity in the physical quantities of the problem at the origin determines the growth in the velocity over the entire region.”* (BOYAREVICH, 1976)

Em 1980, ATTHEY<sup>(17)</sup>, construiu um modelo matemático para o escoamento de fluido em tanque de soldagem para altas correntes elétricas. Considera problema dependente do tempo e correntes de ordem de 100A com número de Reynolds magnético entre 200 e 600, mas, dá uma solução numérica de estado estacionário, onde o problema de valor inicial é feito passo a passo, devido à técnica interativa de relaxação. Faz um estudo de estabilidade do fluxo e analisa resultados para corrente de 100A somente. Calcula as forças rotativas dentro do fluido (*stérring*) analiticamente e discute possíveis resultados.

Finalmente, apresenta uma boa discussão sobre o caráter do escoamento: laminar ou turbulento? O modelo utilizado, claro, é laminar e os resultados obtidos são compatíveis, mas este não descarta a possibilidade de turbulência quando se aumenta a velocidade, por exemplo.

CRAINE, R. E. e WEATHERILL, N. P. <sup>(18)</sup>, 1980, estudaram o escoamento de fluidos induzidos por uma fonte distribuída de corrente elétrica em

recipiente hemisférico superposta a um campo magnético externo uniforme paralelo ao eixo de simetria. Inicialmente desprezaram os efeitos inerciais e resolveram o problema analiticamente considerando uma fonte pontual, válida para baixa corrente e baixo campo. No caso do problema completo (com efeitos inerciais), utilizaram um esquema numérico considerando fonte pontual e, em seguida, fonte de corrente distribuída.

Descobrem que o fluxo na seção axial, através do tanque, é radialmente para fora da superfície livre. Este fato é contrário ao que é predito pela teoria, quando não há campo magnético externamente aplicado.

Segundo os autores o aspecto mais importante dos resultados por eles encontrado diz respeito à reversão na direção do escoamento do fluido no plano  $(r, \theta)$ , causado pela aplicação do campo magnético uniforme. Dão uma explicação para o fato baseados na equação do movimento; força centrífuga e o termo forçante. (Eletromagnetic forcing term). A força centrífuga é maior.

A equação do movimento com o termo forçante  $\vec{j} \times \vec{B}$ , escrita em coordenadas esféricas polares e a análise dos componentes resultante nas direções radial e angular  $(\theta)$  mostra que o único termo não nulo envolve a velocidade azimutal

$\omega$ , a qual representa a força centrífuga  $\left( \frac{\omega^2}{r \sin \theta} \right)$  por unidade de massa atuando em

uma direção perpendicular ao eixo (radialmente para fora). Observa-se experimentalmente que  $\omega$  é, via de regra, muito maior que  $u, v$  (radial, axial) e,

assim, o movimento no plano  $(\mathbf{r}, \theta)$  é governado pela grandeza relativa da força centrífuga e os componentes  $(\mathbf{r}, \theta)$  do termo eletromagnético.

SHERCLIFF, já havia observado em 1970, que o componente normal ao eixo  $\mu = 0, \theta = 90^\circ$  fornece o termo forçante que origina o movimento no plano  $(\mathbf{r}, \theta)$  (movimento azimutal ou SWIRL).

No fundo ele quer concluir que a força centrífuga vence a força eletromagnética, a qual tenta movimentar o fluido sobre o topo da superfície radialmente para dentro, e o movimento resultante é radialmente para fora (**em  $\mu = 0 = \cos \theta$** ).

Em 1981, BAYAREVICH, estuda o escoamento M.H.D. próximo de uma fonte pontual de corrente elétrica, onde faz um apanhado histórico desde LUNDQUIST (1969) abordando, também, pontos matemáticos como cálculos numéricos e propriedades e características integrais do escoamento.

Um ponto que merece destaque é a investigação do fluxo em uma direção oposta, variando as condições de transferência de vorticidade de uma superfície rígida para uma livre. Observa-se, agora, que a solução é regular para valores relativamente altos do parâmetro  $S$  (numericamente  $S = 10^9$ ). Na parte II de seu estudo  $S \rightarrow \infty$ . (análise do comportamento assintótico)

Quando se integra a equação do movimento ao longo de um contorno fechado  $C$  formado pelas linhas de corrente  $\psi = \text{cte}$  e uma parte da linha que conecta o início e o término da linha de corrente para  $\mathbf{r} = \mathbf{R} \rightarrow \infty$ , tem-se:

$$\int_c \vec{f}_e \cdot d\vec{e} = \nu\rho \int_c (\nabla \times \nabla \times \vec{V}) \cdot d\vec{l}$$

Assim, a circulação da força eletromagnética ao longo da curva  $\psi = \text{cte}$  é balanceada pelas forças viscosas somente.

Em 1983, BOIAREVICH, V. and SHCHERBININ, E. V.<sup>(19)</sup>, estudaram a rotação azimutal em escoamento meridional axisimétrico devido a um fonte de corrente elétrica. Os autores observaram que um escoamento meridional convergente mostra-se instável para uma perturbação azimutal axisimétricas quando o número de Reynolds crítico é excedido. Para eliminar a quebra de velocidade propõem: o acoplamento entre o escoamento convergente e o rotacional (*The flow solution breakdown is eliminated for the coupled converging and rotating flow*).

O processo físico sugerido para explicar a acertiva acima é a formação *of the draining-vortex*. A parte interessante do artigo é a tentativa para se explicar o mecanismo que sustenta a rotação; o aumento do momento angular na região do fluido é mantida pelo balanço da difusão viscosa e a convecção para o eixo de simetria. Consideram, também, a evidência experimental para a formação do vórtice.

Na introdução do artigo fazem um excelente apanhado histórico do problema, desde ZHIGULEV (1960).

A novidade, agora, é a possibilidade de se introduzir uma corrente oposta àquela que origina o movimento do fluido. Observam que esta corrente pode causar reversão no escoamento. Surge agora uma questão: *Why is the flow direction crucial for the solution?*

Apresentam uma longa discussão dos resultados e um método para explicar o mecanismo que sustenta a rotação do fluido, baseados na conservação do

momento angular. Na verdade estão propondo um mecanismo para a possível formação de um tornado tendo em conta uma propriedade dos escoamentos convergentes em adquirir uma grande velocidade de rotação como resultado de uma pequena perturbação azimutal, ou seja, existe uma transferência de energia de um escoamento meridional para uma rotação azimutal.

Em 1984, AJAYI, O. O., SOZOU, C. e PICKERING<sup>(20)</sup>, analisaram numericamente o movimento de fluido levando em conta os efeitos não lineares em um recipiente, devido a uma descarga de corrente elétrica. A corrente elétrica é descarregada dentro do fluido em um eletrodo circular o qual está localizado no centro do plano equatorial do recipiente, a parte restante do mesmo sendo livre.

Verificamos, até agora, que com eletrodos pontuais para um certo valor crítico de corrente ocorre breakdown na velocidade. Neste artigo, os autores mostram que, à medida que a área do eletrodo aumenta, a intensidade do campo de escoamento decresce, e assim para grandes eletrodos, grandes correntes podem ser descarregadas, sem que ocorra quebra de velocidade, ou seja, breakdown.

Porém, quando a corrente torna-se suficientemente grande a solução torna-se instável e, conseqüentemente, quebra de velocidade.

Analisam, neste ponto, os resultados de CRAINE em 1976, no qual não havia a quebra de velocidade, mas, provavelmente não usaram uma corrente suficientemente grande.

Um trabalho de grande destaque na literatura é devido à SOMMERIA<sup>(21)</sup>, 1988, onde um vórtice isolado e estacionário é produzido em uma camada horizontal de mercúrio de espessura conhecida em um forte campo uniforme vertical (1T). O vórtice, uma vez gerado, é forçado pela corrente elétrica a se mover

de um eletrodo no plano inferior para outro circular. O escoamento é investigado por fotografias de pequenas partículas seguindo a superfície superior livre, e por medidas de potencial elétrico. Observa-se que toda a corrente elétrica permanece em uma fina camada de HARTMANN de espessura da ordem de  $\left(\frac{a}{M}\right)$ , exceto no núcleo do

vórtice, onde a espessura vale  $\left(\frac{a}{M^{1/2}}\right)$ .  $M = H$  (número de Hartmann)

Uma característica importante do trabalho é a medida experimental da velocidade, resistência elétrica em função do campo magnético, momento angular, etc. (VER CAP. III)

O autor separa o campo de escoamento em duas regiões bastantes distintas. Uma região de escoamento bidimensional no bulk flow (núcleo do escoamento), em um plano perpendicular ao campo magnético e outra na camada de Hartmann. No núcleo do escoamento a inércia se torna importante mesmo em um campo magnético forte (1 Tesla), pois os efeitos do atrito de Hartmann e da corrente injetada são relativamente fracos, naquela região.

### Conclusão do Estado da Arte

- 1) Na prática a corrente elétrica pode exceder o valor crítico sem que ocorra qualquer problema de quebra do escoamento (*breakdown*)
- 2) A importância da viscosidade como um fator limitante da circulação. Teorema de Moffat.

- 3) A natureza turbulenta do escoamento em contraste com a hipótese de escoamento laminar adotado por vários autores.
- 4) Na prática as correntes elétricas assumem valores bem mais elevados do que a teoria supõe.
- 5) Mecanismo da transferência de energia. O sistema transfere energia para mecanismos inerentes à sua própria natureza.
- 6) Tamanho dos eletrodos e a intensidade da corrente de descarga são fatores de extrema importância para o movimento.

## CAPITULO II - 1 - Vórtices Impulsionados Magnetoidrodinamicamente

### Resumo

A partir de um campo de forças de Lorentz ( $\vec{j} \times \vec{B}$ ), um volume de fluido condutor, incompressível, viscoso em um recipiente cilíndrico é impulsionado magnetoidrodinamicamente gerando um movimento rotacional bastante intenso, ou seja, um vórtice o qual é estudado teórica e experimentalmente com o objetivo de se determinar a distribuição de velocidade, pressões, vorticidade, etc., no seio da massa fluidica. Inicialmente as equações da magnetoidrodinâmica (M.H.D.) para líquidos fracamente condutores são apresentadas e discutidos em todos os seus detalhes. Posteriormente, chega-se a uma equação diferencial de segunda ordem, linear, para a velocidade tangencial, e uma solução analítica é apresentada.

## Introdução

Existem vários estudos que tratam do movimento de fluidos condutores devidos a uma fonte de corrente elétrica, levando-se em conta o campo magnético induzido pela mesma. A corrente interage com o campo e produz a força de Lorentz que impulsiona o fluido. Nesses estudos o fluido de trabalho é, via de regra, o mercúrio ou algum metal líquido. Ou seja, a condutividade elétrica do fluido é relativamente alta e, assim, a lei de Ampère se aplica muito bem, gerando uma força

rotacional dada por,  $\nabla \times \vec{F} = \nabla \times \left[ \frac{(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}}{\mu} \right] \neq 0$  (notar que  $(\vec{B} \cdot \nabla)$  é

um operador e  $\nabla\vec{B}$  é um tensor de 2ª ordem o qual, como já se disse, acelera o fluido podendo criar a vorticidade. Como disse SCHERCLIFF<sup>(8)</sup> “... *it is the rotationality of the magnetic force that determines the motion.*”

Por outro lado, pouquíssimos estudos foram realizados com fluidos fracamente condutores com o intuito de se criar um vórtice magnetoidrodinâmico. Aparentemente poderia se argumentar que a força de Lorentz é muito fraca pois as correntes elétricas que aparecem no líquido, sendo proporcional à sua condutividade elétrica, seriam desprezíveis, e os campos induzidos igualmente. No entanto, o fluido pode estar submetido à influência de um forte campo magnético externo e, nesse caso, passaria a ser importante a lei de Ohm ( $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ) a qual, interagindo com o campo externo, geraria a força rotacional de Lorentz,  $\vec{F} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$ ,  $\vec{E} = -\nabla\Phi$ , capaz de impulsionar o líquido; no nosso caso, água do mar. O campo externo desempenha um papel fundamental.

Um trabalho importante no estudo de líquidos fracamente condutores em fortes campos externos é devido à BRAGUINSKII<sup>(22)</sup>, (maio, 1960). Este artigo é o suporte teórico onde nos apoiaremos. Além de todo o embasamento teórico de M.H.D., para a finalidade que se propõe, é discutida a rotação de um líquido por uma corrente transversal (“na direção radial”) aplicada em um condensador cilíndrico em um forte campo magnético externo ( $\mathbf{B}_z$ ). Nessa aplicação alguns resultados importantes são analisados, como por exemplo, que a velocidade azimutal (na camada de Hartmann), independe do campo magnético, externo,  $\mathbf{v} = \mathbf{I} \left( 4\pi \sqrt{\sigma\eta} \mathbf{R} \right)^{-1}$ ,  $\mathbf{R}$  é o raio do cilindro,  $\mathbf{I}$  é a corrente,  $\sigma$  é a condutividade e  $\eta$  é a viscosidade.

Outro ponto importante é o aumento da estabilidade do fluxo em rotação devido ao campo magnético. Braguinskii calcula, também, o tempo que se gasta para o fluido adquirir a velocidade  $\mathbf{v}$ . No caso,  $t = h \left( \mathbf{v} \gamma_m \right)^{-1/2}$ , onde

$$\gamma_m = \frac{\sigma \mathbf{B}^2}{\rho}, \quad \mathbf{v} = \frac{\eta}{\rho}, \quad t = h \left( \frac{\eta \sigma \mathbf{B}^2}{\rho^2} \right)^{-1/2}, \quad \rho \text{ é a densidade.}$$

Para  $h = 10\text{cm}$ ,  $B = 0,5 \text{ T}$ ,  $t \cong 1 \text{ minuto}$ . (no caso do mercúrio)

Um detalhe conceitual importante que foi desprezado por Braguinskii, diz respeito aos termos de inércia  $\rho(\vec{\nabla} \cdot \nabla)\vec{\nabla}$  na equação do movimento, esses termos foram desprezados comparados com  $\left( \mathbf{v} \nabla^2 \vec{\nabla} \right)$ . A justificativa para tal, é que

$\left(\frac{V}{\gamma m R}\right)^2 = N^{-2}$ ,  $N^{-1}$  razão entre os termos de inércia e magnético. Para uma

velocidade de  $1,0 \text{ ms}^{-1}$  e  $B = 0,4 \text{ T}$ ,  $R = 10 \text{ cm}$ ,  $N \sim 10^{-2}$ .

Essa hipótese, entretanto, não será aplicada em nosso estudo. Neste trabalho os termos de inércia são relativamente importantes, assim como os termos de viscosidade.

## 2.1 Campos Rotacionais

No estudo que será feito a seguir considera-se fluido condutor, incompressível, viscoso, submetidos à influência de campos eletromagnéticos externos.

Considere, em primeiro lugar, um campo magnético uniforme e uma densidade de corrente elétrica constante e perpendicular ao campo em toda a seção de um recipiente cilíndrico contendo um líquido condutor.

Nessas condições existe uma força atuando sobre o fluido, porém não é capaz de alterar a sua circulação. O rotacional do campo de forças é nulo.

Uma outra situação de grande interesse no estudo do confinamento magnético de um fluido condutor (plasma) para a obtenção da fusão termonuclear controlada é o estudo do equilíbrio M.H.D. estático, em que, o gradiente de pressão é equilibrado, em um dado instante, pela força de Lorentz, ou seja,  $\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$ .

Aplicando o rotacional sobre a equação acima tem-se,  $\nabla \times (\vec{j} \times \vec{B}) = 0$ .

Portanto, não basta ter um campo de forças, é preciso, além disso, que seu rotacional seja diferente de zero, para que haja movimento do fluido.

Uma geometria simples em que se tem o rotacional diferente de zero é aquela onde uma corrente elétrica é fornecida a um eletrodo pontiforme penetrando através de uma superfície não condutora após o qual ele flue para um outro eletrodo dentro do fluido de geometria arbitrária (esférica, plana, cilíndrica, etc.)<sup>(ver figura na página</sup>

<sup>34)</sup>. No caso do segundo eletrodo ser esférico e a corrente aplicada  $I$ , a densidade de

corrente será dada por  $\mathbf{j}_r = \frac{I}{2\pi R^2}$ ,  $R$  é o raio da área considerada. De acordo

com a lei de Ampère surge um campo magnético dado por

$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi R} \left[ \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \right]$ , onde  $\theta$  é o ângulo azimutal ( $r, \theta, \varphi$  coordenadas

esféricas). A interação da corrente/área com o campo magnético, gera a densidade de força, dada por:

$$f_\theta = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi R^3} \left( \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \right)$$

$\mu$  é a permeabilidade magnética do meio. Pela geometria e simetria do problema, o rotacional do campo de forças é dado por

$$(\nabla \times \mathbf{f})_\varphi = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 R^4} \left( \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \right) \neq 0$$

Assim, sendo a força eletromagnética rotacional, o fluido pode adquirir movimento. Este, segundo AJAI, SOUZOU e PICHERING<sup>(20)</sup>, pode atingir velocidade da ordem de  $300 \text{ ms}^{-1}$ , no mercúrio, ou em outro líquido altamente condutor.

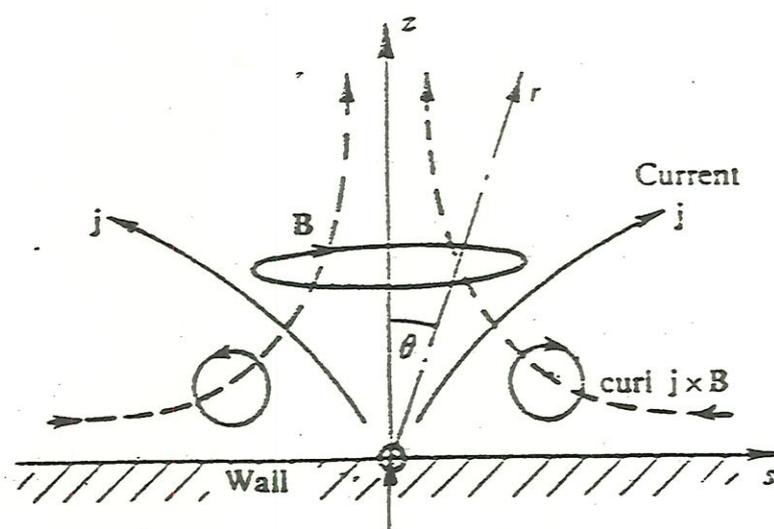


FIGURA 1 - Esquema onde aparece a corrente sendo injetada dentro do meio fluídico e o campo magnético induzido.

No diagrama acima  $\vec{j}$  é a densidade de corrente,  $\vec{B}$  é o campo magnético induzido. Ver Shercliff, ref. 8.

Repare que o campo magnético foi induzido pela própria corrente (ou seja, é um auto-campo). Existem situações onde os campos induzidos são desprezíveis principalmente quando o Reynolds magnético é muito pequeno ( $R_m =$

$\mu\sigma VL \ll 1$ ). É preciso, então, distinguir claramente os dois processos que levam (ou podem levar) ao vórtice M.H.D.

Dois casos a considerar:

a) Neste caso a corrente elétrica aplicada gera seu próprio campo magnético. Esse interaje com a corrente e dá a força de Lorentz. Se esta for rotacional o fluido pode adquirir movimento

Assim, têm-se:

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}, \vec{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} \quad \text{então}$$

$$\vec{f} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} \left[ (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \nabla \frac{B^2}{2} \right] \quad \text{e}$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \left[ (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \right] \neq 0 \quad \text{para que haja}$$

movimento do fluido. Note-se que  $(\vec{B} \cdot \nabla) \neq (\nabla \cdot \vec{B})$ .

Claro que para nosso estudo a força  $\vec{j} \times \vec{B}$  é fundamental (Se  $\vec{j} \times \vec{B} = 0$  não há o que se fazer!). Na grande maioria dos trabalhos citados no Capítulo I, a condutividade elétrica é muito grande. Portanto, a corrente elétrica que circula pelo fluido gera seu próprio campo magnético. Basta um pequeno campo elétrico para se ter uma corrente intensa. Ou por exemplo, sendo  $\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$  e se  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \rightarrow 0$  para que se tenha uma corrente finita. Neste caso, os efeitos dissipativos, por efeito joule, são desprezíveis.

b) No caso oposto, a condutividade elétrica é geralmente pequena e para se ter uma força razoável é necessário um forte campo magnético externo. Aplica-se então um campo intenso em um certo volume de fluido aproveitando a intensidade da densidade de corrente local ( $\vec{j}$ ) corrente/área. Se a densidade de corrente local é intensa junto com um forte campo magnético, é possível que se tenha uma força  $\vec{j} \times \vec{B}$  capaz de acelerar o líquido a partir do repouso. Assim, a escolha dos eletrodos é um fator importante e decisivo para o sucesso do experimento. Neste caso deve-se fazer uso da lei de Ohm, ao invés da lei de Ampère. Portanto,

$$\vec{f} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \underbrace{\sigma(\vec{E} \times \vec{B})}_1 + \underbrace{\sigma(\vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B}}_2$$

O termo ① é acelerador e muito maior que ② na grande maioria dos líquidos. Além disso o termo ②, de certa forma, representa um efeito de indução e possui um componente desacelerador:

$$\sigma(\vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \sigma[(\vec{V} \cdot \vec{B})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{B})\vec{V}].$$

Então, se o rotacional de  $\vec{f}$  for diferente de zero o fluido pode entrar em movimento. Esse é o princípio que será utilizado em nossos experimentos com água do mar.

$$\text{Realmente, } \nabla \times \vec{f} = \sigma \nabla \times [\vec{B} \times \nabla \Phi] \neq 0, \quad \text{com}$$

$$\vec{E} = -\nabla \Phi.$$

A título de curiosidade, quando se compara os dois termos (① e ②) com os valores dos experimentos percebe-se claramente a diferença:

$$\frac{|\sigma \vec{E} \times \vec{B}|}{|\sigma (\vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B}|} = 1.600 \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = |\nabla \phi| = 400 \text{ V/m} \\ \vec{B} \cong 0,3\text{T} \\ \vec{V} \cong 0,5 \text{ m/s} \end{array} \right., \text{ na condição do}$$

nosso experimento.

## 2.2 Força Magnética e o Teorema de Kelvin

Quando uma partícula carregada com uma carga elétrica  $q$  e velocidade  $\vec{V}$  penetra em um campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , fica sujeita a uma força dada por:

$$\vec{F} = q \vec{V} \times \vec{B}$$

Se ao invés de uma partícula for um fluido condutor, deve-se falar em uma densidade de força, ou seja, força por unidade de volume:

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$$

Sendo o rotacional de  $\vec{f}$  diferente de zero e, sendo ele o responsável pelo movimento do fluido via a vorticidade (definida pela rotacionalidade do vetor de

velocidade) vai modificar a circulação  $\Gamma$  do fluido alterando-se, deste modo, o teorema de Kelvin:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = \oint \frac{\vec{f}}{\rho} \cdot d\vec{s} = \iint_A \nabla \times \left[ \frac{\vec{f}}{\rho} \right] \cdot d\vec{A} \neq 0$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{\sigma}{\rho} \iint_A \nabla \times [\vec{B} \times \nabla\Phi] \cdot d\vec{A} \neq 0!$$

Onde  $\vec{f} = \sigma \vec{B} \times \nabla\Phi$  é a força de Lorentz.

Gostaríamos de chamar a atenção para um ponto importante: poucos estudos existem nesta área (fluidos fracamente condutores), pois, quando se compara a força magnética com a força de inércia, utilizando-se para isso a equação do movimento, chega-se à conclusão que esta razão é muito pequena e, assim, não valeria (a "pena") tal investimento. Agora, no entanto, temos que comparar:

$$\left[ \vec{j} \times \vec{B} = -\sigma \nabla\Phi \times \vec{B}, \text{ com } \rho(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \right]$$

$$\frac{|\vec{j} \times \vec{B}|}{\rho(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}} = \frac{|\sigma \nabla\Phi \times \vec{B}|}{\left| \rho \frac{V^2}{L} \right|} \approx 1, \text{ com os dados de nosso}$$

$$\text{experimento} \left\{ \begin{array}{l} \sigma \approx 5 \text{ s.I.}, \rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ \nabla\Phi = 400 \frac{\text{V}}{\text{m}}, v \approx 0,5 \text{ m/s} \\ \mathbf{B} \approx 04\text{T}, L = 10^{-1}\text{m} \end{array} \right.$$

ESSA COMPARAÇÃO É DE EXTREMA IMPORTÂNCIA PARA UM ESTUDO APROFUNDADO SOBRE A RELAÇÃO CUSTO-BENEFÍCIO. ISTO É, O TÊRMO APLICADO DESEMPENHA UM PAPEL CENTRAL NA GERAÇÃO DE MOVIMENTO, QUANDO COMPARADO AO TERMO INDUZIDO.

### 2.3 Vorticidade e Circulação

Por definição  $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s}$ ,  $\Gamma$  é a circulação e  $\vec{V}$  é o vetor velocidade.

Pelo teorema de Stokes  $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_A (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{A} = \iint_A \vec{w} \cdot d\vec{A}$ ,

$\vec{w}$  é o vetor vorticidade,  $A$  representa uma superfície, aberta.

Tanto a visualização quanto a medida da vorticidade são tarefas um tanto difíceis de serem realizadas. Entretanto, a circulação fornece um caminho razoável para se obter informações sobre a vorticidade. A vantagem da circulação é de ordem técnica. A partir de seu conceito pode-se medir a vorticidade integrada, mesmo quando ela se torna, teoricamente, infinita. Exemplo importante é o vórtice pontual. (livre)

O problema que estamos estudando permite encontrar um caminho para se medir a vorticidade. Partindo da lei de Ohm com o termo induzido e aplicando escalarmente o operador  $\nabla$ , vem:

$$\vec{j} = \sigma(-\nabla\Phi + \vec{V} \times \vec{B}) \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \vec{j} = 0. \quad \text{Então}$$

$$\nabla \cdot [-\nabla\Phi + \vec{V} \times \vec{B}] = -\nabla^2\Phi + \nabla \cdot (\vec{V} \times \vec{B}) = 0$$

Ou seja,

$\nabla^2 \Phi = (\vec{V} \cdot \nabla \times \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla \times \vec{V})$ . Como, por hipótese,

$\nabla \times \vec{B} = 0$ , tem-se  $\nabla^2 \Phi = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{V} = \vec{B} \cdot \vec{w}$ . Fazendo a discretização correta do operador Laplaciano, pode-se ver, artigo (23), que a vorticidade na direção do campo magnético, é dada por:

$$W_z = \frac{1}{L^2 B_0} \sum_{i=1}^N \Phi_i \quad \Phi_i \text{ é o potencial medido em relação a um potencial de}$$

base, por exemplo,  $\Phi_0 = 0$ .  $L$  é um comprimento adequado para o cálculo da diferença do potencial.

A vorticidade possui uma propriedade importante. Como

$$\vec{W} = \nabla \times \vec{V}, \text{ então } \nabla \cdot \vec{W} = 0 \text{ e, sendo por definição, } \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{V},$$

então,  $\vec{W} = 2\vec{\Omega}$ ,  $\vec{\Omega}$  é a velocidade angular do fluido. O núcleo central do vórtice na água do mar tem, aproximadamente, este comportamento.

## 2.4 Vorticidade e Rotação

A vorticidade está ligada ao conceito de momento angular e, assim, é comum se pensar que a palavra rotação é um sinônimo para vorticidade. Não se deve pensar, no entanto, que um escoamento de fluido necessite ser curvo para que não exista vorticidade, nem tão pouco se acreditar que a mesma não exista, se o escoamento for retilíneo.

Um artigo interessante sobre este assunto foi escrito por LINDGREN, E. RUNE<sup>(24)</sup>, no qual é explorado o carácter de dupla rotação para o vetor de

vorticidade (em casos especiais pode se degenerar para um escalar). Neste artigo o rotacional do vetor de vorticidade é dado por:

$$\nabla \times \vec{V} = \left( \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \right) \vec{b}, \quad \vec{b} \text{ é a binormal } (\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}) \text{ onde o vetor de}$$

vorticidade é interpretado como a soma de uma rotação macroscópica  $\vec{\Omega} = \frac{V}{r}$ , e

$$\text{outra microscópica, } \vec{W}' = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

A rotação macroscópica (velocidade angular)  $\vec{\Omega} = \frac{V}{r} \hat{b}$  é

determinada pela velocidade de translação e a curvatura local. A outra componente,

$$\vec{W}' = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{b}, \text{ especifica a velocidade angular da partícula sobre um dado eixo, em}$$

uma localização instantânea (em um certo instante, para uma dada posição). Assim,

para um corpo rígido  $\vec{W} = \vec{\Omega}$  e  $\nabla \times \vec{V} = 2\vec{\Omega}$ . Para um vórtice de Rankine,

$$\nabla \times \vec{V} = 0 \text{ e então, } \frac{V}{r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0, \text{ logo } \vec{W} = \frac{dV}{dr} = -\frac{V}{r} = \Omega, \text{ ou}$$

seja, a rotação macroscópica tem o mesmo valor que a microscópica, porém com o sentido invertido.

## 2.5 Vórtices e Vorticidade

Vórtices são estruturas com escalas macroscópicas, em contraste com a vorticidade que é microscópica.

Vórtices ocupam um volume finito no espaço, ou seja, possuem uma visualização que os caracterizam globalmente (Ex.: furacão, tornados, ralo de banheira, vórtice M.H.D. na água do mar).

A vorticidade segundo LUGT, H. J.<sup>(25)</sup>, com seu aspecto microscópico possui o potencial de gerar um padrão macroscópico no sentido visual porém espalha-se no volume onde se localiza, em “pequenos elementos”. Ainda, segundo este autor, a explicação global da dinâmica da vorticidade no mundo real, pode ser a chave para o entendimento da turbulência.

Talvez, aqui caiba o seguinte questionamento: “Se a vorticidade é capaz de criar estrutura em grande escala a partir de grandezas microscópicas, será que se pode utilizar o carácter distributivo da vorticidade magnetoidrodinâmica e concentrá-la em uma linha, e, a partir daí, utilizar-se dela para gerar energia útil? Ou força útil (sustentação)?”

## 2.6 Considerações sobre a Equação do Movimento

Considere um fluido condutor sob a influência de campos eletromagnéticos externos. A equação do movimento do fluido é dada por:

$$\rho \bar{\mathbf{a}} = - \nabla \mathbf{p} + \bar{\mathbf{f}}, \quad \bar{\mathbf{a}} = \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{V}}$$

$\mathbf{p}$  é a pressão, suposta escalar,  $\bar{\mathbf{f}}$  forças rotacionais ou não.

Aplicando o rotacional sobre a equação acima, elimina-se o termo de pressão (o qual geralmente não é conhecido) e, quaisquer outros termos irrotacionais

contidos em  $\vec{f}$ . Fisicamente isto significa que se a força  $\vec{f}$  for rotacional terá a tendência de imprimir um movimento de giro (SPIN) sobre um elemento do fluido ou variar seu estado de movimento.

No caso de ser irrotacional será eliminada juntamente com o gradiente de pressão e, assim, seus efeitos serão meramente de fornecer um ajustamento ao campo das pressões, não afetando a dinâmica do sistema.

Deve-se observar que em um escoamento magnetoidrodinâmico o fluido pode estar inteiramente envolvido por vórtices e não apenas algumas regiões, como por exemplo em um aerofólio produzindo sustentação. Neste caso a vorticidade é gerada pela interação do escoamento com a superfície do corpo, gerando circulação devido à viscosidade na camada limite. Na região (área ou volume) denominada potencial, não há vorticidade.

Muitos autores preferem trabalhar, quando possível, com a equação da vorticidade ao invés da equação do movimento, exatamente por eliminar os termos irrotacionais (pressão, campo gravitacional, campo elétrico conservativo, etc.).

A equação do transporte de vorticidade para um fluido incompressível pode ser descrita como:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{V} \times \vec{W}) = \frac{\nabla \times (\vec{j} \times \vec{B})}{\rho} + \eta \nabla^2 \vec{W}$$

$$\vec{W} = \nabla \times \vec{V} \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \vec{W} = 0$$

$$\eta = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{viscosidade dinâmica})$$

$\vec{W}$  é o vetor de vorticidade

As equações que descrevem o movimento do vortice ideal são facilmente deduzidas das equações acima e, são dadas por:

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\bar{\mathbf{V}} \times \bar{\omega}) = 0$$

$$\bar{\omega} = \nabla \times \bar{\mathbf{V}}$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{V}} = 0$$

## CAPITULO II - 2 - Equações que Governam o Escoamento Incompressível do Líquido Condutor

O líquido é suposto incompressível, assim  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ . Devido ao movimento do líquido condutor em um campo magnético externo surge uma força eletromotriz da ordem de  $\mathbf{VB}$  e uma corrente da ordem de  $\sigma\mathbf{VB}$ . O campo magnético devido a esta corrente é  $\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{R}_m \mathbf{B}$  e como  $\mathbf{R}_m = \mu\sigma V l \ll 1$ , será desprezado. A variação de  $\mathbf{B}_1$  produz um campo elétrico induzido  $\mathbf{E}_1 \sim \mathbf{R}_m (\mathbf{VB})$  e será desprezado. Assim o campo magnético é dado, é igual ao campo externo. ( $\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$  e  $\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = 0$ ),  $\vec{\mathbf{B}}$  é suposto uniforme.

A força de Lorentz, que é o termo que acelera o líquido depende da corrente elétrica que circula em seu interior. Os campos magnéticos induzidos por estas correntes são totalmente desprezíveis.

A densidade de corrente elétrica será dada por

$$\vec{j} = \sigma [\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}] = \sigma [-\nabla\Phi + \vec{V} \times \vec{B}] \text{ onde } \Phi \text{ é o potencial}$$

elétrico escalar e  $\vec{E} = -\nabla\Phi$ . Devido à lei de conservação da carga elétrica

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0, \text{ logo}$$

$$\nabla^2\Phi = \nabla \cdot [\vec{V} \times \vec{B}] = -\vec{V} \cdot \nabla \times \vec{B} + \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{V} = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{V}$$

e, como,  $\nabla \times \vec{V} = \vec{W}$  (é a vorticidade), então,  $\nabla^2\Phi = \vec{B} \cdot \vec{W}$ . Esta

equação pode ser utilizada para se determinar a vorticidade do fluido. Note que foi

suposto condutividade uniforme. Assim, a força eletromagnética por unidade de

volume será dada por  $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} = \sigma [(\vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \nabla\Phi \times \vec{B}]$ . Essa

equação pode ser simplificada tendo em vista que o primeiro termo, de uma certa

forma, é induzido pelo segundo, e como as velocidades são relativamente baixas o

módulo de  $[(\vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \sim VB^2$  é pequeno comparado ao módulo de

$|\nabla\Phi \times \vec{B}| \sim \frac{\Delta\Phi B}{L}$ . Em ordem de grandeza, tem-se

$$\frac{\Delta\Phi}{L} \sim 600 \frac{\text{Volt}}{\text{m}} \text{ e } V \sim 1.0 \text{ m}_s^{-1}, \text{ enquanto que } VB^2 \sim 10^{-2}.$$

Ordenando as idéias acima desenvolvidas, tem-se o seguinte sistema de

equações diferenciais que descrevem o escoamento de um fluido fracamente

condutor, incompressível em um forte campo magnético externo, em que se despreza

a corrente de deslocamento (fenômenos de baixa frequência,  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \sim 0$ ).

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} + \nabla p = -\mu (\nabla \times \nabla \times \vec{V}) + \vec{j} \times \vec{B} \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \quad (4)$$

$$\vec{j} = \sigma [\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}] \quad (5)$$

Onde  $\vec{V}$  é a velocidade,  $p$  é a pressão,  $\rho$  a massa específica (densidade),  $\vec{j}$  é a densidade de corrente,  $\vec{E}$  é o campo elétrico,  $\vec{B}$  o campo magnético,  $\sigma$  a condutividade elétrica e  $\mu$  é a viscosidade do fluido (água do mar) suposta constante.

Suponha um escoamento estacionário  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , com simetria axial

$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} = 0\right)$ , bidimensional, com a força impulsionadora (*the driving force*) derivada

de campos elétricos e magnéticos aplicados externamente, em um sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ . O campo magnético é devido a um solenóide,

assim,  $B_z = B_0 \cong \text{constante}$  e a equação (4) resulta em uma identidade. Por sua vez

a equação (1) dá  $rV_r = \text{const}$ .

A equação vetorial (5) dá

$$j_z = \sigma E_z \quad (7)$$

$$j_r = \sigma (E_r + B_0 V_\theta) \quad (8)$$

$$\mathbf{j}_\theta = 0 \quad (9)$$

As equações do movimento assumem a forma:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right) \quad (10)$$

$$v_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} = \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) + \frac{1}{\rho} (-B_0 j_r) \quad (11)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (12)$$

A conservação da carga ou continuidade da corrente garante que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_r) + \frac{\partial}{\partial z} j_z = 0 \quad (13)$$

Na região de interação do campo magnético com a densidade de corrente, ocorre a formação da camada de Hartmann que é altamente condutora e a corrente circula exatamente por ela. Sendo assim, na equação (13), o segundo termo é desprezível, comparado ao primeiro. Ou seja, no fundo o que se está admitindo é que o componente radial do campo magnético e axial da densidade de corrente são desprezíveis. Portanto,

$$r j_r = \text{cte} = c \quad (14)$$

Combinando as equações ( 11 ) e ( 14 ) tem-se

$$v_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_r V_\theta}{r} - \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} \right) = - \frac{B_0 c}{\rho r} \quad (15)$$

$$\text{Fazendo-se} \begin{cases} x = \frac{r}{r_0} & v = \frac{v_\theta}{v_{\theta_0}} \\ N = \frac{\rho V_r r}{\mu} \quad (\text{n}^\circ \text{ Reynolds radial}) \\ H = B_0 r_0 \left( \frac{\sigma}{\mu} \right)^{1/2} \quad (\text{n}^\circ \text{ de Hartmann}) \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{Seja ainda } J = \frac{x j_r}{\sigma B_0 V_{\theta_0}} = \frac{\text{constante}}{\sigma B_0 V_{\theta_0}}. \text{Trabalhando a equação}$$

(15), encontra-se sua forma adimensionalizada.

$$x^2 v'' + x v' (1 - N) - v(1 + N) = H^2 J x \quad (17)$$

que é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, linear, não homogênea com coeficientes variáveis. A solução da equação ( 17 ) é dada por:

$$V(x) = C_1 x^{N+1} + \frac{C_2}{x} + \frac{J}{2} \frac{H^2}{N} x \quad (18)$$

É interessante se observar que a parte referente ao vórtice viscoso está contida nos dois primeiros termos, e a parte final, contém os parâmetros magnetoidrodinâmicos como o número de Hartmann e o termo  $J$ , que representam a força impulsionadora de origem eletromagnética.

Para se encontrar as constantes  $C_1$  e  $C_2$  deve-se aplicar as condições de contorno adequadas ao problema.

$$V(x=1) = 0 \quad (19)$$

$$V(x=\alpha) = V_0, \quad V_0 \neq 0 \quad (20)$$

Aplicando as condições (19) e (20), vêm

$$V(1) = 0 \rightarrow C_1 + C_2 = \frac{JH^2}{2N} \quad (21)$$

$$V(x=\alpha) = V_0 \rightarrow C_1 \alpha^{N+1} + \frac{C_2}{\alpha} - \frac{JH^2}{2N} \alpha = V_0 \quad (22)$$

Resolvendo o sistema de equações (21) e (22), encontra-se



$$C_1 = \frac{V_0\alpha + \left(\frac{JH^2}{2N}\right)(\alpha^2 - 1)}{\alpha^{N+2} - 1} \quad (23)$$

$$C_2 = \frac{JH^2}{2N} - C_1 \quad (24)$$

Deve-se observar que as constantes dependem dos parâmetros  $J$ ,  $N$ ,  $H$  e que estes são escolhidos de maneira conveniente ao problema, pois são dados em função das propriedades do fluido e dos campos elétricos e magnéticos aplicados.

O parâmetro  $\alpha = \frac{a}{r_0}$ , deve ser determinado de maneira conveniente

já que o mesmo depende das grandezas aplicadas ( $B_0$ ,  $\nabla\Phi$ ), ou seja, campo magnético e da corrente elétrica.

Não trabalharemos mais aprofundadamente com a solução acima, já que nos parece viável uma outra solução mais “simples”. Conforme será ilustrado abaixo, é preciso analisar, entretanto, o que ocorre no núcleo do escoamento. Pela simetria do problema a velocidade azimutal deve se anular na origem. Como o fluido está escoando (girando) em um recipiente sem rotação, e sendo a velocidade nula próxima ao centro e em  $r = R$  (raio) ela deve passar por um máximo em algum ponto. Ou seja, a velocidade azimutal é máxima na parede do núcleo do vórtice. O núcleo do escoamento se comporta como se fosse um corpo rígido com velocidade crescente com a coordenada radial, até as paredes (do vórtice). Assim, para baixos valores da corrente (potencial aplicado),

$$V_{\theta} = \Omega r \quad 0 \leq r \leq a, \text{ onde } a \text{ é o raio da parede do vórtice.}$$

Uma possível justificativa para isso pode ser encontrada pelo seguinte raciocínio: a densidade de corrente radial em torno de  $r = 0$  é muito pequena.

$$\text{Assim, } \mathbf{j}_r \cong 0 = \sigma(\mathbf{E}_r + v\mathbf{B}_0), \quad v = \Omega r.$$

Então,

$$V_{AB} = - \int_a^b \mathbf{E}_r \, dr = \int_a^b (\Omega r \mathbf{B}_0) dr = \frac{1}{2} \Omega (b^2 - a^2) \mathbf{B}_0$$

$$V_{AB} = \frac{1}{2} \Omega \mathbf{B}_0 b^2$$

(A rotação cria uma diferença de potencial que pode ser utilizada para determinar a velocidade angular  $\Omega$ .)

Por outro lado, sendo a corrente paralela ao campo no entorno de  $r = 0$ , a força é nula ( $\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{B}} = 0$ ). Não há movimento axial, é fácil ver no experimento.

Repare que a condutividade do eletrodo é muito maior que a do líquido ( $\sigma \rightarrow \infty, \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{V}} \times \vec{\mathbf{B}} \rightarrow 0$ ). (Existe uma M.H.D. ideal quando  $\sigma \rightarrow \infty$ , não ocorrem efeitos dissipativos no fluido, claro que é um conceito teórico).

## SOLUÇÃO SIMPLIFICADA

Uma solução bastante simples (simplificada) do problema, mas que pelas observações do experimento, representa de certa forma a realidade, é aquela em que se considera apenas a velocidade azimutal  $v_{\theta}$  ( $v_r = 0, v_z = 0$ ). Isto se

justifica pelo forte campo magnético externo que é aplicado (tudo se passa como se o fluido ficasse suspenso pelo campo). É uma situação completamente diferente de um vórtice de pia, por exemplo, onde a velocidade radial é considerável (agora, de certa forma o líquido está preso ao campo magnético).

Portanto, considerando a equação do movimento na forma adimensionalizada com  $v_r = v_z = 0$ , tem-se:

$$x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + x \frac{\partial V}{\partial x} - V = x H^2 J \quad (27)$$

$$H^2 = \frac{\sigma}{\mu} R_0^2 B_0^2 \quad (\text{número de Hartmann convencional}) \quad (28)$$

$$J = \frac{x j_r}{\sigma B_0 q \theta_0} \quad (\text{adimensional associado a corrente elétrica}) \quad (29)$$

É fácil ver que a solução da equação acima vem dada por:

$$V(x) = C_1 x + \frac{C_2}{x} + \frac{H^2 J}{2} x \ln x \quad (30)$$

$C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração e devem ser determinadas pelas condições de contorno. Repare que a solução é singular na origem, e isso não deve causar grandes problemas já que uma coluna de ar (misturada ao líquido) que envolve a origem estende-se por todo eixo de simetria (eixo Z) (principalmente para grandes valores da tensão aplicada, por exemplo: 40v, B = 0,4T). Assim, as características dos fluidos (ar e água) sendo completamente diferentes não nos permite utilizar o mesmo

equacionamento físico-matemático. Assim, no momento, não nos preocuparemos com tal região.

### CONDIÇÕES DE CONTORNO

$$1) V(\mathbf{x} = 1) = 0 \text{ (condição de aderência)} \quad (31)$$

$$2) V(\mathbf{x} = \alpha) = V_0 \approx 0, \alpha = \frac{r}{r_0} \ll 1, \alpha \equiv X_0 \quad (32)$$

Aplicando as condições 1) e 2) na solução  $V(\mathbf{x})$ , encontra-se:

$$C_1 = \frac{H^2 J}{2} X_0 \ln X_0 \quad (33)$$

$$C_2 = -\frac{H^2 J}{2} X_0^2 \ln X_0 \quad (34)$$

À primeira vista esta solução dá uma indicação correta do fenômeno. Ou seja, se o campo magnético externo for anulado ou a corrente através de seu potencial for anulada, ou ambos, então não há escoamento. Por outro lado, poder-se-ia pensar na solução como sendo o vórtice clássico, acrescido do termo que representa a força eletromagnética impulsionadora. (terceiro termo do lado direito da equação (30)).

## DETERMINAÇÃO DA PRESSÃO

Fazendo-se  $v_r = 0$  na equação ( 10 ), vem:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_{\theta}^2}{r} \quad (35)$$

Definido um coeficiente adimensional

$$C_p = \frac{P - P_0}{P_d} \quad , \quad P_d = \frac{1}{2} \rho q_{\theta_0}^2 \quad , \quad V = \frac{V_0}{V_{\theta_0}} \quad , \quad x = \frac{r}{r_0} \quad (36)$$

Após a integração acima, vem:

$$C_p = \frac{(H^2 J)^2}{2} f(x), \quad (37)$$

$$f(x) = K_2^2 \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{3}{x^4} - 2 \ln x \right] + K_3 \left[ \frac{x^2}{4} \left( \ln x - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 x \right] + \\ + \frac{x^2}{2} \left[ \ln^2 x - \ln x + 1 \right] \quad (38)$$

onde

$$K_1 = 2P_d \left( \frac{H^2 J}{2} \right)^2 \quad (39)$$

$$K_2 = X_0^4 \ln^2 X_0 \quad (40)$$

$$K_3 = 2X_0^2 \ln X_0 \quad (41)$$

$P_0$  é a pressão na parede do vaso, ou em outro ponto conveniente.

## DETERMINAÇÃO DA VORTICIDADE

A vorticidade, por definição, é dada por:

$$\vec{W} = \nabla \times \vec{V}$$

Em coordenadas cilíndricas, o rotacional de  $\vec{V}$  é dado por:

$$\nabla \times \vec{V} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \hat{e}_r + \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_z \quad (42)$$

Como se está admitindo  $V_r = V_z = 0$ , então  $\vec{W} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \hat{e}_z$

Seja  $x = \frac{r}{r_0}$ ,  $V = \frac{V_\theta}{V_{\theta_0}}$ , então, sendo  $W_0 = \frac{V_{\theta_0}}{r_0}$

vem:

$$W = \frac{1}{x} \left( \frac{H^2 J}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left[ X_0^2 \ln X_0 \left( x - \frac{1}{x} \right) + x \ln x \right] \quad (43)$$

$$W = \left( \frac{H^2 J}{2} \right) \left[ X_0^2 \ln X_0 \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right) + \frac{1}{x} (\ln x + 1) \right] \quad (44)$$

Observe que para  $x = 1$  a velocidade é nula. No entanto, como a viscosidade é alta a vorticidade tem um valor relativamente alto

$$W(1) = \frac{H^2 J}{2} (0,95), \text{ o que faz sentido.}$$

## DETERMINAÇÃO DO PONTO ONDE OCORRE VELOCIDADE MÁXIMA

Sabendo-se que a velocidade é dada pela equação ( 30 ), podemos derivá-la e igualar a zero para encontrar a posição  $x$  onde ocorre máxima velocidade.

$$V(x) = C_1x + C_2x^{-1} + \frac{H^2J}{2} x \ln x$$

$$\frac{dV}{dx} = C_1 - \frac{C_2}{x^2} + \frac{H^2J}{2} [1 + \ln x] = 0 \quad (45)$$

Substituindo as equações ( 33 ) e ( 34 ), em ( 45 ), vem:

$$(X_0 \ln X_0)x^2 + X_0^2 \ln X_0 + x^2 (1 + \ln x) = 0 \quad (46)$$

A partir desta equação é possível se encontrar o ponto onde, teoricamente ocorre velocidade máxima e, portanto, o raio do núcleo do vórtice. Devemos notar que para cada valor de tensão e campo magnético dado, a velocidade assume valores diferentes e, conseqüentemente ponto de máximo diferente.

## **CAPITULO III - Parte Experimental: Geração de Um Vórtice na Água do Mar por Meio de M.H.D.**

### **Introdução**

Na literatura especializada poucos trabalhos experimentais existem sobre geração, medidas e análise de vórtices por meio de magnetoidrodinâmica. Segundo LONG e PAO<sup>(6)</sup>, isto se deve à natureza extremamente complexa de tal tipo de problema. Mesmo assim, todos tratam de fluidos com condutividade elétrica relativamente alta (mercúrio, sódio e várias ligas envolvendo metais líquidos), onde efeitos induzidos desempenham um papel importante.

A seguir, apresentar-se-á um experimento que trata da geração de um vórtice forçado, utilizando-se água do mar e campos eletromagnéticos escolhidos de modo conveniente.

Alguns resultados importantes podem ser destacados:

- Quanto maior a intensidade do campo magnético estático aplicado (para uma dada corrente), melhor o comportamento do vórtice. Se a aplicação da corrente elétrica ou do potencial, puder ser diminuída e ao mesmo tempo aumenta o campo magnético, menor a dissipação de energia por efeito Joule, e, portanto, maior a eficiência.
- A resistência elétrica do fluido aumenta com a aplicação do campo magnético, e com o aumento de sua intensidade.
- O vórtice possui um núcleo de raio mais ou menos conhecido, o qual depende fortemente dos campos aplicados e, apresenta uma forte estabilidade (pequenas perturbações não interferem na velocidade do giro).
- Velocidades médias de rotação do núcleo do vórtice da ordem de 1.200 R.P.M. foram medidas utilizando luz estroboscópica, para um campo magnético de 0,3T e tensão de 40v (repare que são valores médios).
- para valores da tensão aplicada da ordem de 30v ou mais, torna-se praticamente impossível as medidas da corrente elétrica devido às oscilações (a rotação faz a pressão cair e causar um efeito parecido com a cavitação), na verdade ocorre uma descontinuidade próximo ao eletrodo pontual.

## **Histórico**

Um dos trabalhos que trata do movimento de fluídos condutores, utilizando-se de campos eletromagnéticos aplicado externamente do ponto de vista teórico e experimental é devido à HUNT e MALCOM<sup>(27)</sup>, onde analisam a distribuição de velocidade e corrente elétrica em um líquido eletricamente condutor

contido em um recipiente em que se adapta convenientemente dois eletrodos circulares de diâmetro finito. Os eletrodos são colocados opostos um ao outro, em planos isolados e um campo magnético é aplicado externamente perpendicular ao plano dos eletrodos.

Considerando o número de HARTMANN muito maior que 1, descobrem que a corrente elétrica fica confinada em uma região bem definida dentro do escoamento unindo os dois eletrodos (uma região cilíndrica). Este efeito é levado em consideração para o cálculo da velocidade induzida em uma fina camada de espessura da ordem de  $H^{-1/2}$ , na circunferência do cilindro. No limite de  $H \rightarrow \infty$  a resistência do fluido, entre os eletrodos, torna-se aquela de um cilindro de fluido, unindo os dois eletrodos.

Para testarem a teoria alguns experimentos foram montados. Eles mediram, em função do campo magnético, a diferença de potencial entre os dois eletrodos de cobre, considerando o mercúrio como fluido condutor.

Utilizaram uma sonda de potencial elétrico para medir a distribuição do potencial no fluido, entre os discos, e na fina camada entre as bordas dos eletrodos e também as velocidades induzidas nas camadas, por meio do tubo de Pitot. As principais conclusões: A teoria está correta, o resultado das duas sondas correlacionam-se um com outro. Uma observação importante, do ponto de vista prático, é a comparação entre os resultados obtidos com o tubo de Pitot e a sonda de potencial elétrico. Os dados da região próximas as bordas dos eletrodos, medidos com o tubo de Pitot e a sonda de potencial elétrico, permitem concluir que existe uma diferença de 100 a 400% entre ambas técnicas, isto quando não se aplica as correções

de erros da sonda M.H.D. Quando as correções foram introduzidas as duas séries de medidas indicaram que as diferenças caíam para 30% e 150%.

Este trabalho experimental foi citado para se saber que nem sempre com eletrodos colocados dentro de um líquido condutor, e um campo magnético aplicado perpendicularmente ao plano dos mesmos, se tem um movimento rotacional global, cuja resultante dê um vórtice. Neste caso, existe rotação, porém com sentidos opostos, a ponto de se anularem sobre o eixo, no ponto médio da linha que os liga. Além disso, é importante se observar experimentalmente que o campo magnético não somente afeta a circulação devido à espessura das camadas cisalhantes e a grandeza da velocidade azimutal devido à dependência com o número de HARTMANN, mas também inibe diretamente a circulação; a vorticidade é perpendicular à direção do campo aplicado neste experimento. (No nosso estudo ela é paralela ao campo,  $\nabla \times \vec{V} = \vec{W}$ ,  $\vec{W} // \vec{B}$ ).

Em 1970, MALCON<sup>(28)</sup>, para investigar a instabilidade de uma camada cisalhante em rotação, utilizou um sensor de filme quente como um indicador de velocidade no mercúrio. O modelo experimental é igual ao anterior (HUNT - MALCON). Porém, os objetivos são outros. Os efeitos da corrente elétrica são mais intensos nas camadas próximas aos eletrodos, onde se dá o início das instabilidades com a ocorrência de ondas. A determinação da corrente crítica, segundo o autor, é um trabalho muito cansativo devido a necessidade de se aproximar das condições críticas muito lentamente para não forçar o início da instabilidade. Utilizando-se do sensor, consegue uma equação para a velocidade crítica:

$$\mu_{oc} = \frac{0,226}{a l^2 \sigma^{1/2} \eta^{1/2}} \frac{I_c}{M^{1/2}}$$

$I_c$  = corrente crítica

$M$  = número de Hartmann =  $H$

$\sigma$  = condutividade elétrica

$\eta$  = viscosidade,  $a$  e  $l$ , são parâmetros geométricos.

LEVIN<sup>(29)</sup>, 1980, considerou uma classe de escoamento em que a zona de rotação fica situada a uma certa distância das paredes do recipiente. Isto se parece com um escoamento rotacional, adjacente ao eixo de rotação. Um dos problemas sérios a ser enfrentado é aquele referente a estabilidade hidrodinâmica da camada livre em rotação, em um dado campo magnético (no caso, axial). (Aqui *a free rotating layer or a free vortex flow*).

A energia do vórtice é gerada como resultado da interação das tensões de Reynolds com o perfil da velocidade média. Após a montagem da equação, determina o Reynolds crítico em função do campo magnético e do Reynolds na ausência do campo, para concluir sobre o limite de estabilidade no caso de grandes

números de HARTMANN, ou seja,  $\left(\frac{H}{Re}\right)_{\text{critico}} = \text{cte} \frac{h}{b}$ , contrário á teoria de

estabilidade linear, onde,  $\left(\frac{H}{Re}\right)_{\text{critico}} = \text{constante}$ , independente da geometria.

$h$  - altura ,  $b$  - raio, do cilindro.

No mesmo ano, 1980, KLYUKIN, e outros <sup>(30)</sup>, fizeram uma investigação experimental de um vórtice em um campo magnético axial, considerando um recipiente cilindro de 10 cm de diâmetro interno e 7 cm de altura, contendo uma liga de gálio-indio. A seção de estudos foi montada no intervalo do eletromagneto, alimentado por um gerador de corrente contínua com uma indução de até 1,4T.

As componentes radial e azimutal da velocidade foram medidas no experimento. Um anemômetro de condução, com três eletrodos detetores, foi usado para o propósito acima.

Alguns resultados importantes foram apresentados:

- A distribuição de velocidade azimutal em função do raio, para diferentes campos magnéticos foram mostrados e é fácil de perceber que o principal do escoamento fica concentrado na região entre os eletrodos.
- À medida que a intensidade do campo aumenta, a uniformidade do escoamento, com respeito à altura do vaso, aumenta apreciavelmente. Essa é uma característica deste tipo de escoamento M.H.D.
- Um campo magnético, atuando sobre um escoamento de fluido condutor, tende a diminuir o gradiente de velocidade, ao longo de sua direção.
- Mantendo o campo magnético constante e variando a corrente elétrica fornecida ao sistema, a forma do perfil de velocidade não se altera. Por outro lado, um aumento no campo magnético torna o perfil mais estreito.
- É uma característica do escoamento M.H.D. para grandes valores do número de HARTMANN a formação de uma camada limite, altamente viscosa e condutora, perpendicular ao campo por onde circula a corrente elétrica.

Tudo se passa como se o fluido ficasse suspenso no forte campo magnético, existindo um núcleo potencial onde a viscosidade é considerada desprezível. Assim, a corrente total, neste núcleo, é nula. Utilizando-se deste fato os autores determinam a velocidade do escoamento. Aliás, BRAGUINSKII, 1960, já havia aplicado este raciocínio e determinado a velocidade (teoricamente).

$$V = \frac{I}{4\pi r \sqrt{\sigma \eta}} \quad I = \text{corrente}$$

$\sigma$  = condutividade elétrica

$\eta$  = viscosidade

Segundo os dados dos autores, a teoria está de acordo com a experiência.

Em 1988, ZHILIN e outros, realizaram medidas sobre um vórtice em um campo magnético axial. O vórtice fica longe das paredes. A aparelhagem é descrita no artigo, e as medidas foram feitas por meio de uma sonda em rotação.

As medidas foram feitas considerando como fluido de trabalho uma liga de (índio-gálio) com o campo magnético variando de (0,02-0,4) T e a distância entre os discos (eletrodos) de (48-280)mm e corrente nos eletrodos de (35-300)mA.

A máxima velocidade obtida variou (0,5-4,0) cm/s. Dentro da camada de HARTMANN a velocidade sofre uma variação exponencial, a qual é obtida através da equação da energia para o decaimento da rotação. Esse modelo de decaimento foi utilizado em vários estudos anteriores e serve para se calcular a dissipação viscosa na camada limite. Ver trabalho de BRAGUINSKII (1960).

Um dado experimental importante obtido dos experimentos é a variação do potencial elétrico ao longo do raio para várias altitudes do recipiente; o qual mostra que não existe variação acentuada ao longo da direção axial. Os dados mostram ainda, a existência de um núcleo potencial com distribuição de velocidade

$$\left( v \sim \frac{1}{r} \right).$$

Medem, também, a variação do potencial em função da variação da velocidade sobre a aceleração e decaimento do vórtice, em função do tempo, após a corrente ter sido estabelecida. Quando a corrente é ligada a camada longitudinal e a de HARTMANN são formadas juntas com o núcleo potencial. De certa maneira este artigo confirma algumas hipóteses devido a BRAGUINSKII, 1960, sobre a origem do núcleo potencial.

Em 1988, SOMMERIA, estudou vórtices impulsionados eletricamente em um forte campo magnético externo.

Um vórtice isolado é gerado em uma camada de mercúrio de espessura conhecida e forçado pela corrente elétrica (ele) caminha de um eletrodo para o outro dentro do líquido e seu escoamento é investigado por linhas marcadas nas fotografias por pequenas partículas que seguem a superfície superior, e por meio de medidas do potencial elétrico.

Novamente é observado que toda corrente elétrica permanece confinada na fina camada de HARTMANN, de espessura  $\frac{a}{H}$ , exceção feita ao núcleo

do vórtice de extensão horizontal  $\left( \frac{a}{H^{1/2}} \right)$  (a é a espessura da camada de mercúrio

no recipiente cilíndrico). Alguns estudos do decaimento do potencial são realizados e também a geração de um vórtice por pulsos de corrente.

É possível que este seja um dos trabalhos mais completos sobre a geração de vórtices por meio de campos eletromagnéticos. Além da análise teórica e experimental do vórtice, o autor tece comentários sobre a estabilidade da camada de Hartmann.

Alguns resultados importantes do trabalho de SOMMERIA dizem respeito ao grande aumento da resistência elétrica do fluido em função do campo magnético, a determinação do raio do núcleo do vórtice em função do inverso do

parâmetro de interação  $\left( N = \left( \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U} \right) \right)$ , e o decaimento do potencial elétrico em

função do tempo. Comparado ao decaimento de Hartmann, ocorre uma queda acentuada devido ao alongamento do núcleo por difusão viscosa durante o processo.

Observa, também, que a estabilidade do escoamento no estado estacionário é muito grande, que o momento angular  $(\mathbf{r}V_\theta)$  tende a se conservar em uma grande região do escoamento. Enfim, que a teoria para grandes números de Hartmann está em acordo com os dados experimentais.

## EXPERIMENTOS QUALITATIVOS

As primeiras observações sobre vórtices utilizando água do mar foram feitas no laboratório de pesquisas do Departamento de Engenharia dos Materiais, da Universidade Federal de São Carlos.

Foi utilizado um recipiente cilíndrico de diâmetro bem menor que o do solenóide do laboratório, onde o valor do campo magnético é da ordem de 0,6 Tesla. Os eletrodos utilizados foram de aço inoxidável; um sendo esférico de diâmetro 0,5cm e o outro um disco de 10 cm de diâmetro. O menor, localizado no centro da base do recipiente e o segundo localiza-se dentro do líquido a uns 6 cm de altura, formando uma espécie de cone. O sistema repousava sobre o solenóide de tal modo, a se beneficiar do máximo campo magnético possível (para aquela geometria). O campo magnético é alimentado por uma fonte de corrente de até 200A e tensão de 50V, facilmente controlada. Com a tensão aplicada de zero até 60V, e de fácil manuseio, foi possível realizar vários experimentos qualitativos e de fácil visualização onde se pode constatar no laboratório, a formação do vórtice magnetohidrodinâmico.

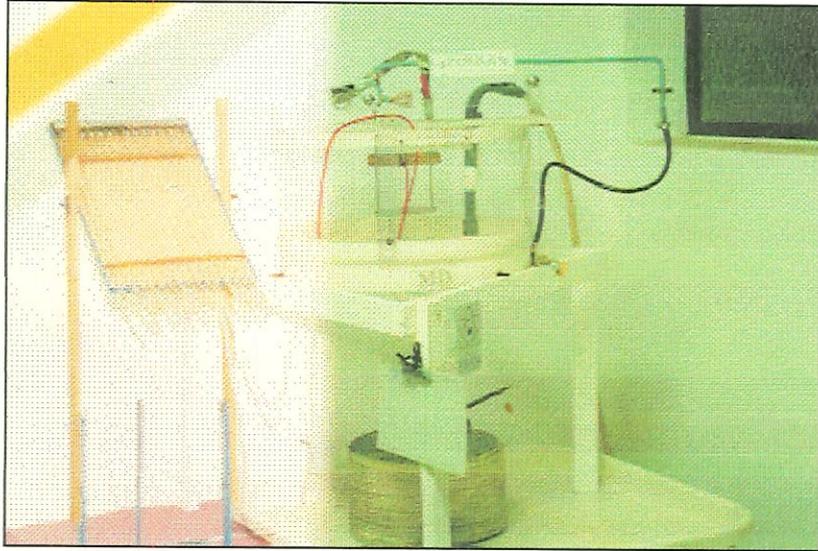


FIGURA 2 - Aparelhagem básica dos primeiros experimentos.

Um fato interessante aconteceu: realizava-se os experimentos e para testar uma idéia, retirou-se o eletrodo na forma de disco e no lugar colocou-se uma pequena barra cilíndrica presa à superfície do recipiente a uns 5 cm do centro, onde se localiza o eletrodo puntiforme e ligou-se os campos. Surpreendentemente, surgiu um vórtice ao longo do eixo de simetria até a superfície do recipiente. A explicação é que, mesmo com apenas um eletrodo em forma de barra vertical, localizada ao longo de um raio só, existe uma forte interação eletromagnética devido principalmente à densidade de corrente elétrica que se localiza no eletrodo puntiforme. É lá onde se dá a máxima interação entre a corrente e o campo magnético.

## Parte Experimental

### 1. Montagem e Descrição do Experimento

Em um recipiente de 13 cm de diâmetro e altura de 15 cm, com água do mar até 6 cm é feito um furo no centro do mesmo onde se coloca um eletrodo puntual de ouro, de 4 mm de diâmetro e um outro eletrodo na forma de anel, de latão

ou aço inox de raio 5cm, concêntrico ao primeiro. O sistema repousa sobre a base de um solenóide de 50 cm de diâmetro, com o cilindro colocado no centro do dispositivo magnético para que se tenha a máxima intensidade de campo magnético possível (ordem de 0,35T, valor médio). O solenóide é alimentado por uma fonte de corrente de até 90A. Um outro dispositivo elétrico fornece uma tensão regulável, a qual é aplicada entre os eletrodos para estabelecer um campo elétrico  $e$ , portanto, uma corrente elétrica no líquido. Esta tensão varia desde zero até 100 volts, dando um campo elétrico da ordem de zero até 15.000 V/m.

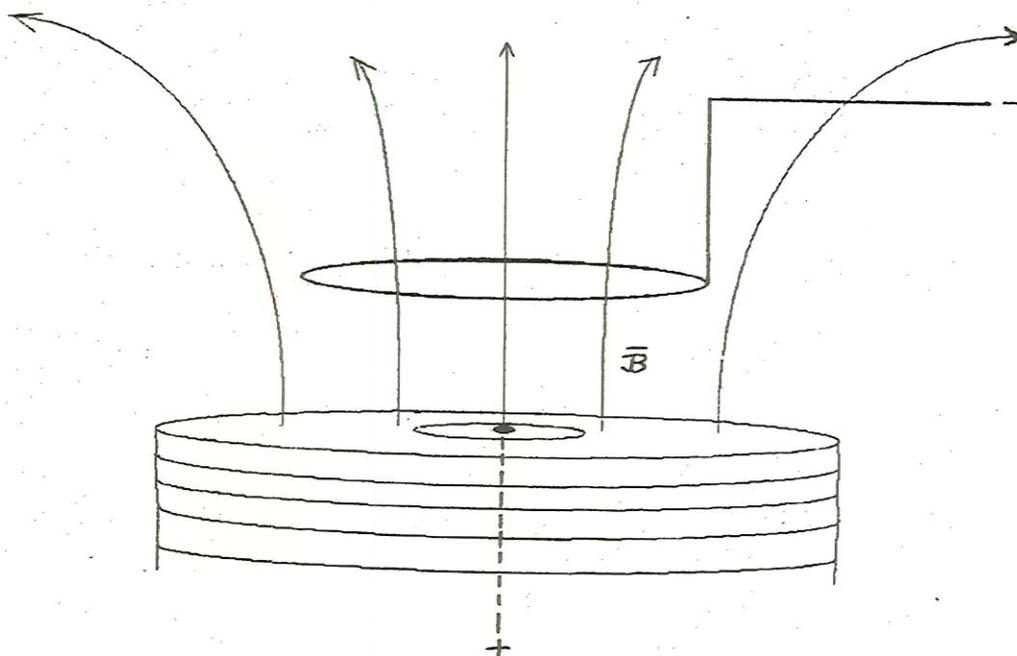


FIGURA 3 - Mostra aproximadamente as linhas do campo magnético do solenoide.

O campo elétrico é muito aproximadamente radial, e o campo magnético é semi-axial.

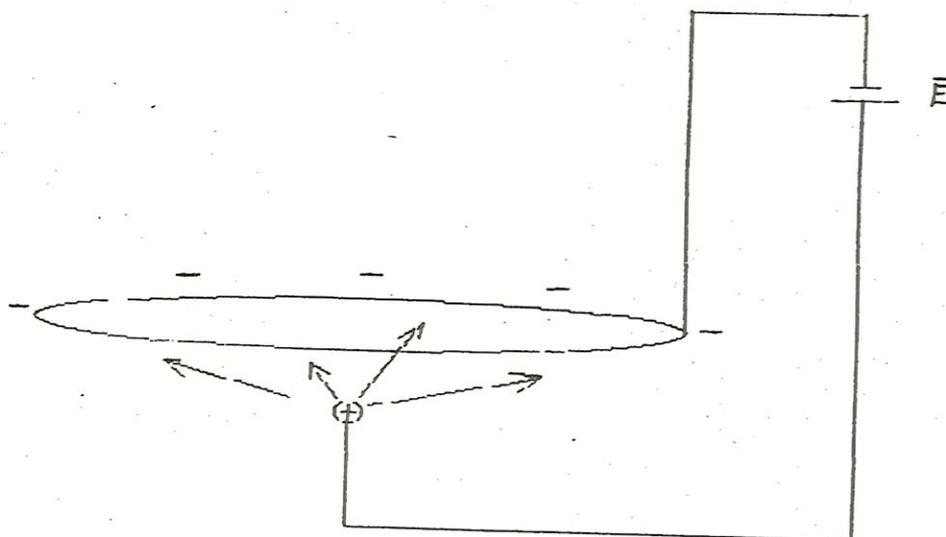


FIGURA 4 - Circuito equivalente do campo elétrico aplicado ao fluido

O anel pode se mover axialmente. Sem o campo magnético a corrente distribui-se muito aproximadamente como se fosse um cone.

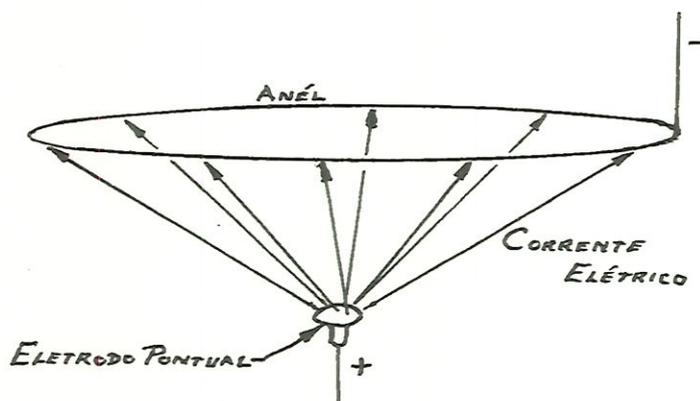


FIGURA 5 - Distribuição das linhas do campo elétrico entre os eletrodos quando não há campo magnético.

Em um forte campo magnético externo (0,35T), a corrente segue a camada de Hartmann, que é perpendicular ao campo. Neste caso a FIGURA 5 passaria a ter a configuração abaixo:

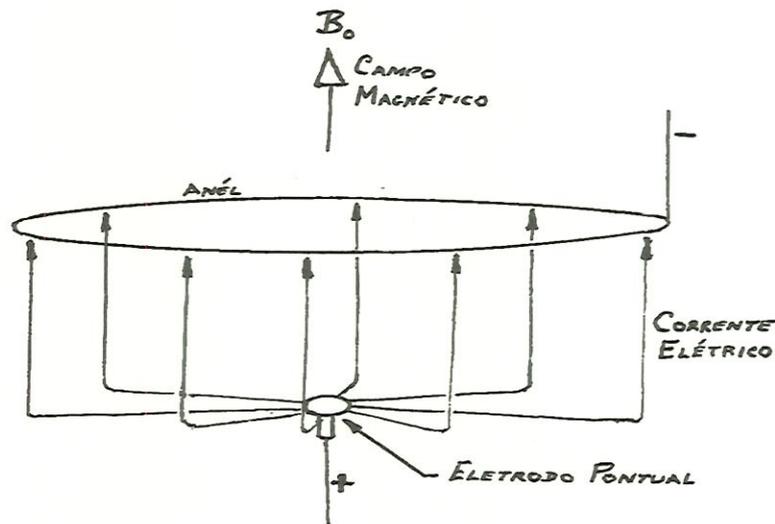


FIGURA 6 - Distribuição das linhas do campo elétrico entre os eletrodos, quando há campo magnético externo.

Note que as linhas de corrente sofrem influência do campo magnético aplicado e são deformadas como se pode ver na FIGURA 6. (A camada de Hartmann, assim formada, é altamente condutora e a corrente segue seu "caminho" através dela)

Sem campo magnético externo não há vórtice, isto justifica a não consideração do campo magnético induzido ( $\nabla \times \vec{B} = 0$ ), já que existe uma corrente elétrica circulando pelo líquido.

O eletrodo na forma de anel achou-se o mais conveniente para a realização dos experimentos (verificação experimental nossa). É bom deixar claro que, para a realização do vórtice, a forma deste eletrodo não tem nenhuma importância; pode ser puntiforme, placa cilíndrica, anel, esférico, etc.. O que decide

mesmo é o eletrodo pontual (ouro) o qual está no centro da base do recipiente cilíndrico. É fácil entender este fato. O que interessa é o produto vetorial entre a densidade de corrente elétrica e o campo magnético, isto é,  $\vec{j} \times \vec{B}$ . Próximo ao eletrodo de ouro  $\vec{j}$  é máximo e o campo é máximo, portanto, a força será máxima.

É importante deixar claro que o campo magnético não é uniforme em todo o volume (extensão) do líquido; porém a principal interação ocorre na base do recipiente onde a uniformidade é boa.

### **Determinação Teórica da Resistência Elétrica em Função do Campo Magnético**

Quando se mede a relação tensão-corrente no experimento do vórtice M.H.D., utilizando água do mar, observa-se uma diferença de valores quando o campo magnético está presente. Vários experimentos foram feitos e sempre se verificou esta discrepância. (mesmo sendo pequena em, algumas situações) Deve-se observar no entanto que nas várias medidas de tensão-corrente que foram realizadas os primeiros valores indicaram um aumento na corrente elétrica quando o campo magnético estava presente. Porém, com o aumento da tensão, essa tendência se inverte, indicando uma queda na corrente.

Para se ter uma idéia do fenômeno suponha que no núcleo do escoamento (bulk flow) a viscosidade seja desprezível. Então, de acordo com o artigo

de BRAGUINSKII<sup>(22)</sup>,  $\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2} = \mathbf{0}$  e  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \mathbf{0}$ . Devido à simetria do sistema,  $\mathbf{V} =$

$\mathbf{V}(\mathbf{r})$  e  $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ , assim  $\mathbf{j}_z = \mathbf{0}$  (corrente axial).

A corrente elétrica na camada de Hartmann,  $2\pi r \mathbf{j}$ , é independente do raio. E, como  $\mathbf{j}$  é proporcional à velocidade  $\mathbf{V}(\mathbf{j} = \sqrt{\sigma \eta} \mathbf{V})$ ,  $\mathbf{V}$  é proporcional a

$\left(\frac{1}{r}\right)$ , ou seja, o escoamento é potencial. Logo, sendo o escoamento irrotacional, a

força de viscosidade será nula e não haverá corrente radial, (exceto na camada de

Hartmann). Assim, sendo,  $\nabla \Phi = \vec{\mathbf{V}} \times \vec{\mathbf{B}}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \mathbf{V} \mathbf{B}_0$  e, de acordo com

BRAGUINSKII, a corrente total  $I$  está relacionada com a velocidade pela relação

$I = 2\pi r \sqrt{\sigma \eta} \mathbf{V}$  e, portanto,  $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \mathbf{V} \mathbf{B}_0 = \frac{I}{2\pi r} \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\sigma \eta}}$ . Sendo

$\mathbf{R} = \frac{\Delta \Phi}{I}$ , vem:  $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{B}_0}{2\pi \sqrt{\sigma \eta}} \ln \left( \frac{\mathbf{R}_0}{a} \right)$ , onde  $a$  é o raio do núcleo do

vórtice. Assim, se o campo magnético aplicado externamente aumenta, a resistência

elétrica deve aumentar. A corrente circula pela camada de Hartmann quando o campo

magnético está presente, e quanto maior o valor do campo menor a espessura da

mesma para uma dada quantidade de líquido no recipiente  $\left( \delta = \frac{h}{H} \right)$ . A área por

onde passa a corrente diminui e, portanto, a resistência deve aumentar  $\left( \mathbf{R} = \frac{\rho l}{s} \right)$ .

$\rho$  = resistividade elétrica

$l$  = escala de comprimento

$s$  = área da superfície por onde passa a corrente elétrica.

## **VALORES NUMÉRICOS E DADOS EXPERIMENTAIS**

### **Medida da rotação do núcleo do vórtice**

É um fato experimental que o vórtice possui um núcleo de formato cônico, constituído por uma coluna de ar aberto na parte superior à atmosfera e formado devido a força centrífuga da rotação do líquido, sendo o raio na base menor que na superfície, o qual gira com uma velocidade bem maior que o restante do líquido, no recipiente.

Baseado neste fato, dois dispositivos foram construídos, os quais dão uma indicação do giro do núcleo do vórtice.

Cada dispositivo possui uma “hélice” com duas pás de chapa de alumínio montados no plano do eixo e fixos em um cubo central na face plana do qual existe uma pequena marca em forma de X (xis), a qual é o alvo para a incidência de luz do estroboscópio. O cubo de cada medidor é livre a girar em volta de um pequeno rolamento e o conjunto é ligado a uma haste de pequeno diâmetro e de um certo comprimento. (veja diagrama a seguir). Os dispositivos são chamados de “Rotores de Medição” e giram com muita facilidade dentro do vórtice e foram aproveitados para indicar a rotação do mesmo, uma vez colocado de maneira adequada.

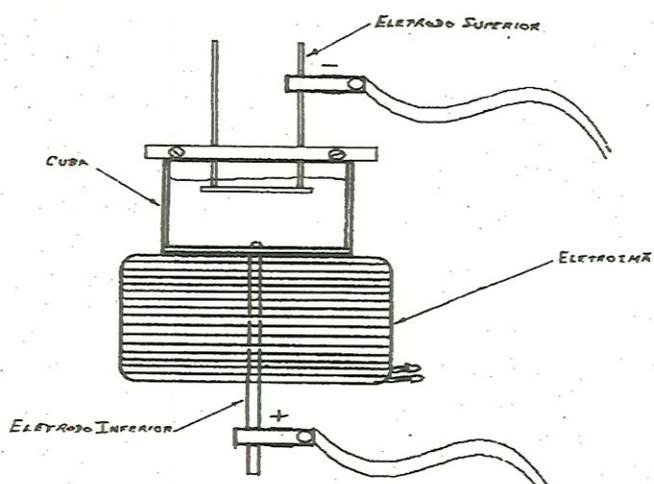


FIGURA 7 - (1) Cuba cilíndrica, (2) solenóide, (3) cabo onde se liga ao eletrodo positivo, (4) eletrodo na forma de anel., ajustável no sentido vertical.



## RESULTADOS EXPERIMENTAIS

1) Campo magnético médio,  $B = 0,39\text{T}$

nível de água: 6 cm

raio: 5,25 cm (do recipiente)

**Modelo:** STROBOTAC TYPE 153 L (calibrado em R.P.M.)

Eletrodo de ouro e latão

$\Delta U$ (V)	$\Omega$ (R.P.M.)
10	900
11	1050
20	1140
30	1500
40	1800

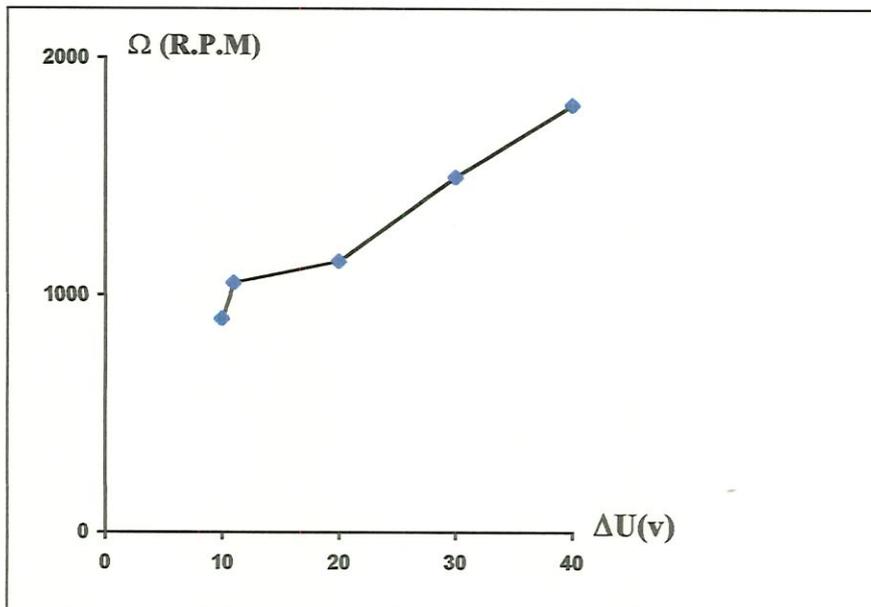


FIGURA 9 - Gráfico da velocidade angular de rotação em função da diferença de potencial aplicado para um campo magnético fixo em 0,39T.

2) Mesmos dados que experimento anterior, porém o aparelho da luz estroboscópica é outro.

**Modelo:** STROBOSCOPE PR 9103 (calibrado em ciclo/s)

$\Delta U$ (V)	$\Omega$ (ciclos/s)	$\Omega$ (R.P.M.)
20	24	1440
30	26	1560
35	27	1620
40	28	1680

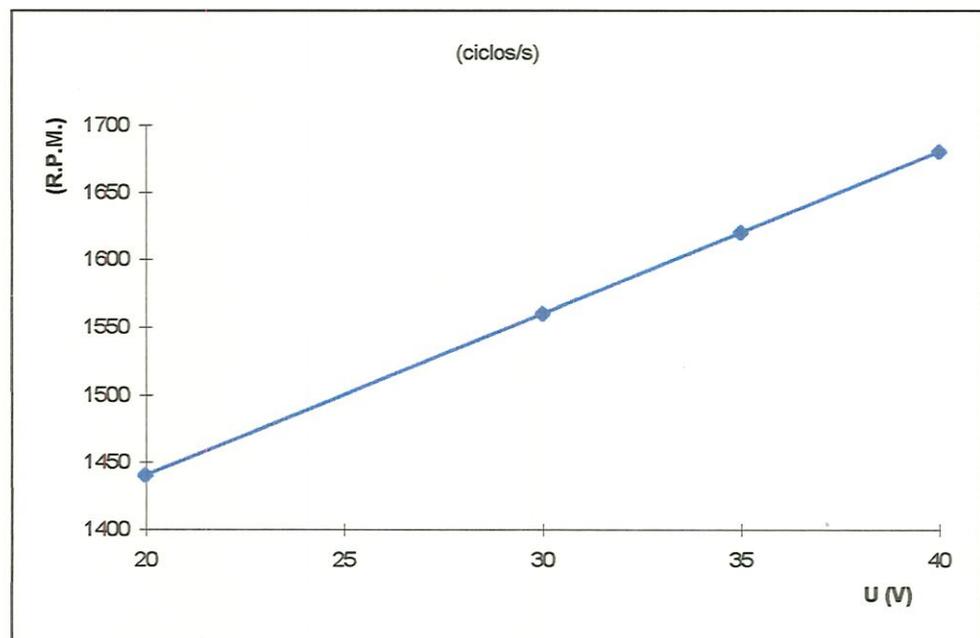


FIGURA 10 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada:  $B = 0,39T$

2) Campo magnético maior,  $B = 0,39\text{T}$ , mantidos constantes demais dados.

$\Delta U$ (v)	$\Omega$ (c/s)	$\Omega$ (R.P.M.)
20	30	1800
30	34	2040
40	39	2340

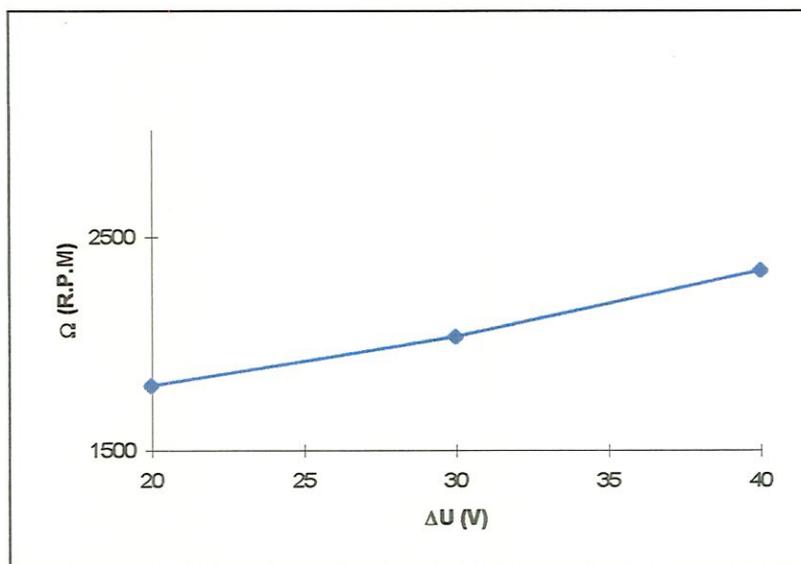


FIGURA 11 - Mesmo que a anterior, porém  $B = 0,39\text{T}$ .  
Notar que a água foi reutilizada.

3) Campo magnético  $B = 0,35\text{T}$ , (mantido fixo) nível de água: 7 cm.

raio: 5,25 cm

Eletrodo de ouro ou latão

$\Delta U$ (v)	$\Omega$ (c/s)	$\Omega$ (R.P.M.)
20	19	960
29	21	1260
35	23	1380
40	25	1600

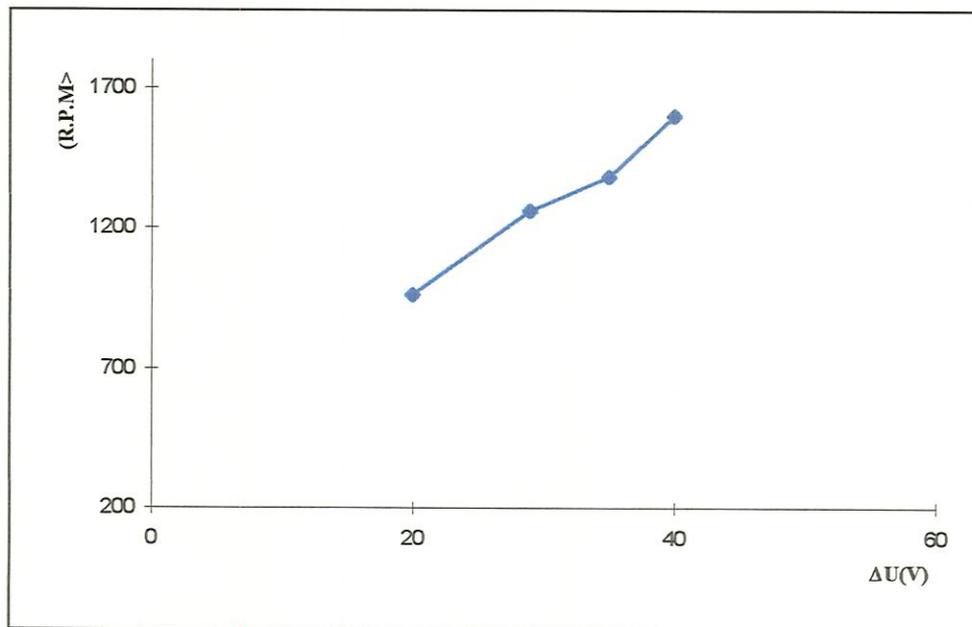


FIGURA 12 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada  $B = 0,35\text{T}$

4) Campo magnético  $B = 0,39\text{T}$ , mantido fixo

Rotor:  $R = 2,9\text{ cm}$

raio:  $5,25\text{ cm}$

Eletrodo de ouro e latão

$6\text{ cm}$  de  $\text{H}_2\text{O}$

aparelho (rotor) foi colocado a  $1,5\text{ cm}$  da superfície

$\Delta U\text{ (v)}$	$\Omega\text{ (c/s)}$	$\Omega\text{ (R.P.M.)}$
25	21	1260
30	21,5	1290
35	22	1320
40	23	1380
50	24	1440
60	24,5	1470

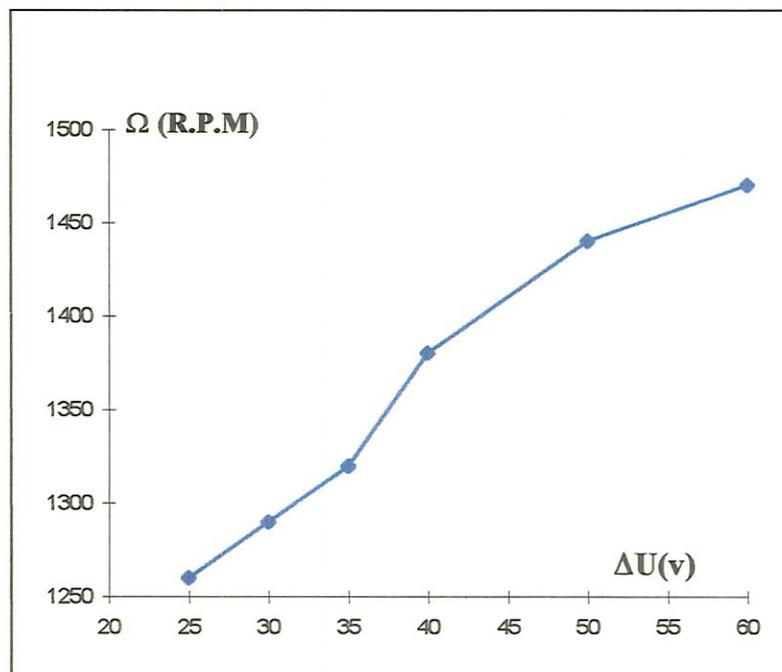


FIGURA 13 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada  $B = 0,39\text{T}$

6)  $B = 0,37T$  , 6 cm de  $H_2O$ .

Aparelho a 0,5 cm da superfície

Temperatura normal (ambiente)

raio: 5,25 cm

$\Delta U$ (v)	$\Omega$ (c/s)	$\Omega$ (R.P.M.)
20	18	1080
25	19	1140
30	19,5	1170
40	?	?

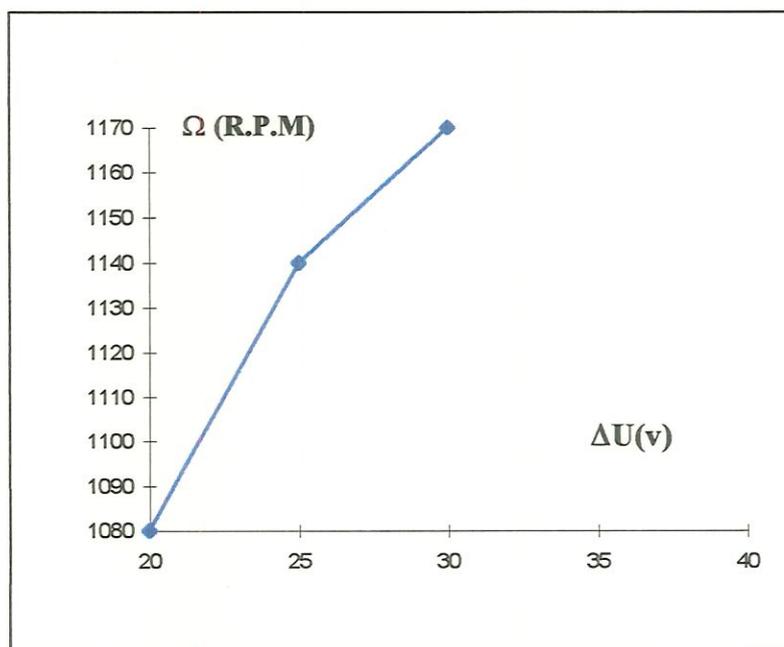


FIGURA 14 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada  $B = 0,37T$   
Temperatura  $25^\circ C$

6) Campo magnético  $B = 0,39\text{T}$ , nível 6 cm, raio = 5,25 cm

Aparelho a 1,5 cm da superfície

Temperatura elevada =  $70^\circ\text{C}$

$\Delta U$ (v)	$\Omega$ (c/s)	$\Omega$ (R.P.M.)
22	21,5	1290
30	23,5	1410
40	24,0	1440
50	26,0	1560

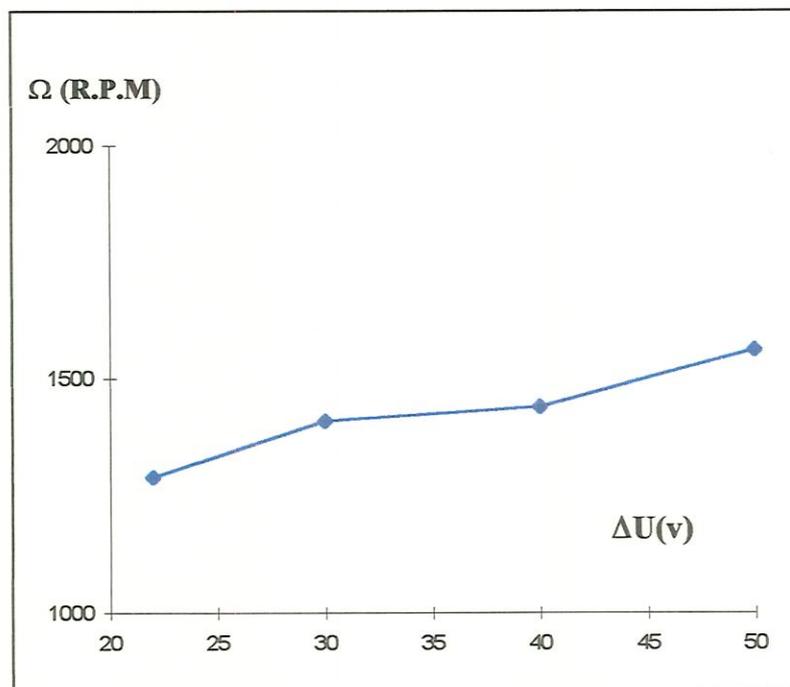


FIGURA 15 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada  
 $T = 70^\circ\text{C}$      $B = 0,39\text{T}$

7) Experimento  $B = 0,39\text{T}$  (aumentou-se raio do eletrodo na forma de anel).

(Ele encosta nas paredes do recipiente)!

Eletrodo de ouro e latão. Recipiente  $R = 5,25\text{cm}$ . Observar que o raio do eletrodo, na forma de anel, foi aumentado. Duas conseqüências:

1) O campo elétrico diminui.  $\left( \vec{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta r} \vec{e}_r \right)$ , para uma mesma diferença de potencial.

2) O efeito do campo magnético aumenta, aumentando a região de interação (maior número de linhas por unidade, de área).

Alguns dados: Temperatura  $50^\circ\text{C}$

$$\Delta U = 20\text{ V}$$

$$\Omega = 23\text{ c/s}$$

$$B = 0,39\text{T}$$

$$\Omega = 1380\text{ R.P.M.}$$

$$\text{Raio} = 5,25\text{ cm}$$

## 8) Experimento

Eletrodo de ouro e latão

 $B = 0,39\text{T}$ 

7 cm de água, recipiente de raio 5,25 cm

rotor pequeno (2,9 cm de diâmetro)

$\Delta U$ (V)	$\Omega$ (R.P.M.)
20	1140
29	1260
35	1380
40	1500

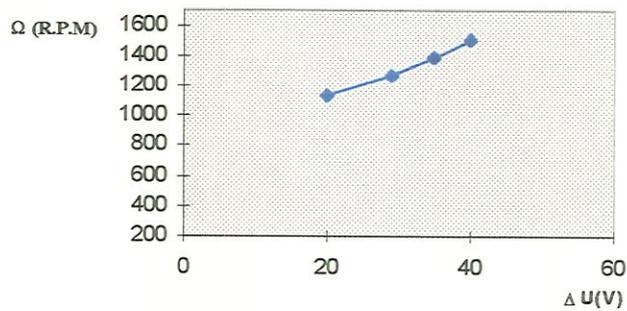


FIGURA 16 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada  
 $B = 0,39\text{T}$

9) Experimento: Medida da rotação do vórtice utilizando cortiça

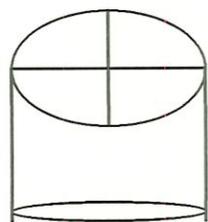
Campo magnético  $B = 0,36T$

Eletrodo de ouro e latão

Recipiente com 5 cm de água

Eletrodo de anél no fundo do recipiente

Raio = 5,25 cm



rolha de  
cortiça

$\Delta U$ (V)	$\Omega$ (R.P.M.)
20	350
30	615 ?
40	1100
50	1400

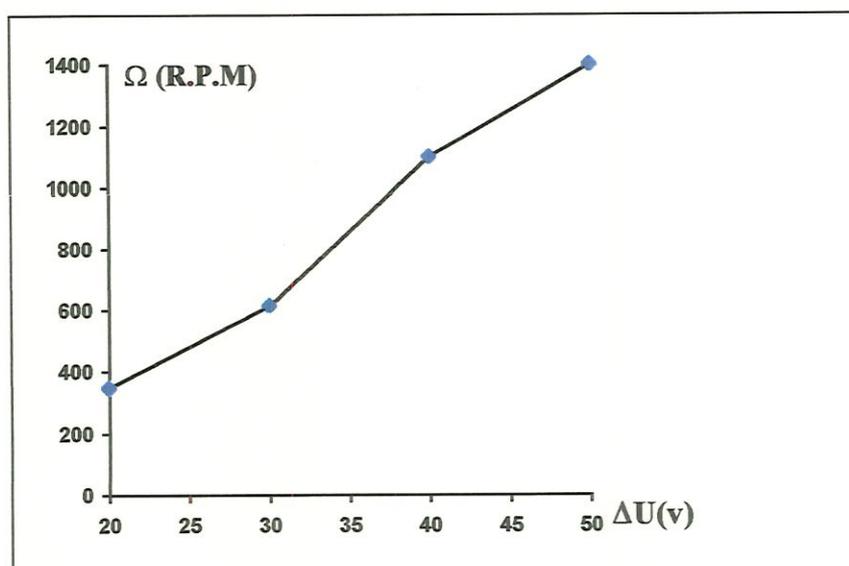


FIGURA 17 - velocidade angular de rotação contra tensão aplicada:  $B = 0,36T$   
Rolha no lugar do rotor de medição.

10) **Experimento:** Medidas de tensão-corrente  
(COM/SEM) Campo magnético

Altura da água: 6 cm

Recipiente maior: raio = 8 cm

$\Delta U(V)$	I (A)	$\Delta U (V)$	I (A)
0,0	0,0	1,8	0,0
1,7	0,03	2,5	0,05
3,2	0,06	4,4	0,22
3,8	0,13	6,2	0,46
5,0	0,26	7,4	0,62
6,3	0,40	9,4	0,91
8,0	0,69	11,3	1,21
9,58	0,90	13,2	1,38
10,8	1,09	16,6	1,90
11,4	1,20	17,3	2,02
13,4	1,48	19,3	2,32
15,8	1,67	21,2	2,60
17,0	1,86	23,7	2,96
18,0	2,17	26,3	3,30
19,3	2,35	28,7	3,52
20,6	2,51	31,6	4,18
23,2	2,87	32,7	4,35
24,6	3,03	35,6	4,52
27,0	3,45	40,8	5,02
28,6	3,67		
30,4	3,59		

SEM CAMPO MAGNÉTICO

CAMPO MAGNÉTICO

**B = 0,39T**

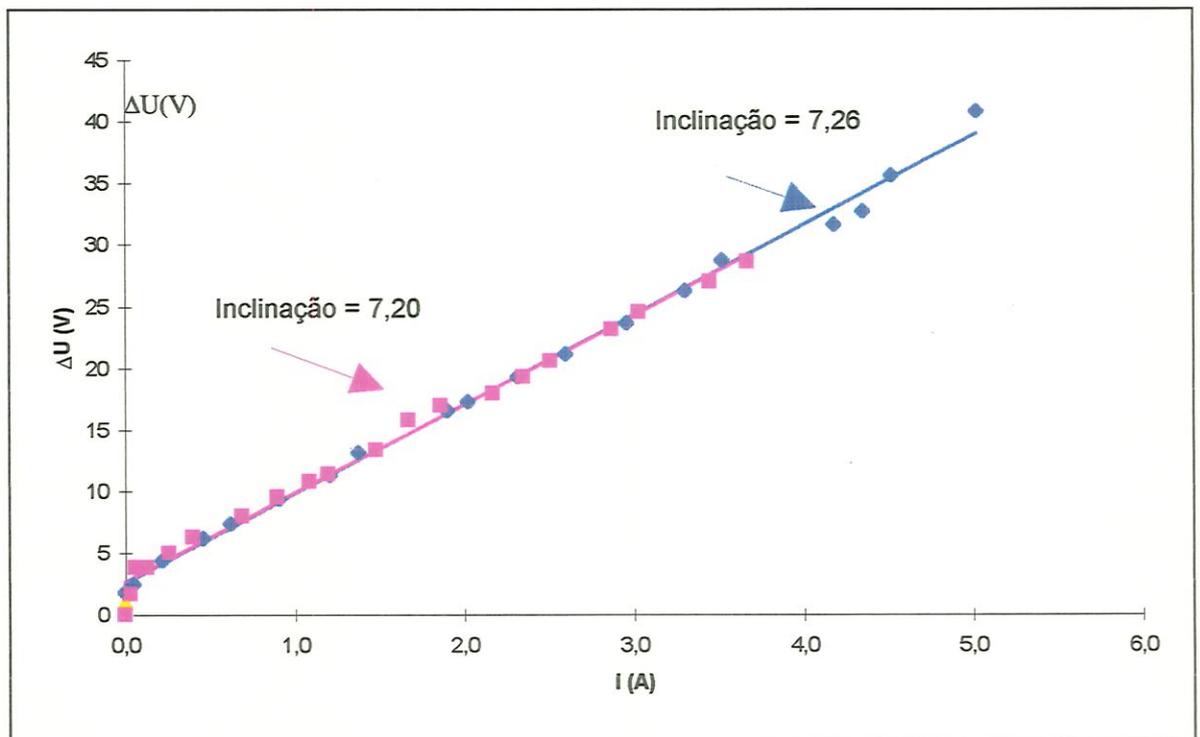


FIGURA 18 - Relação tensão-corrente no fluido sem campo magnético e com o campo aplicado de  $B = 0,39T$

□  $B = 0$

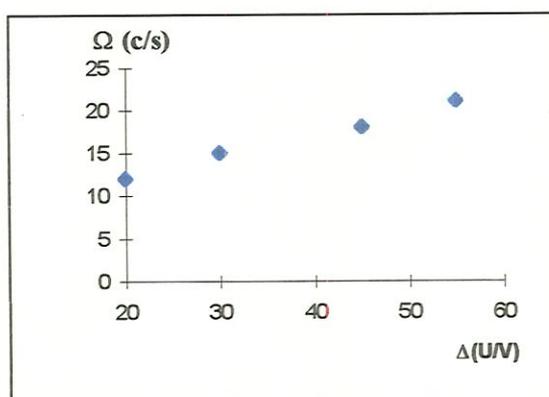
◇  $B = 0,39T$

Portanto, para  $B = 0$ ,  $R = \frac{\Delta U}{\Delta I} = 7,20(\Omega)$  e

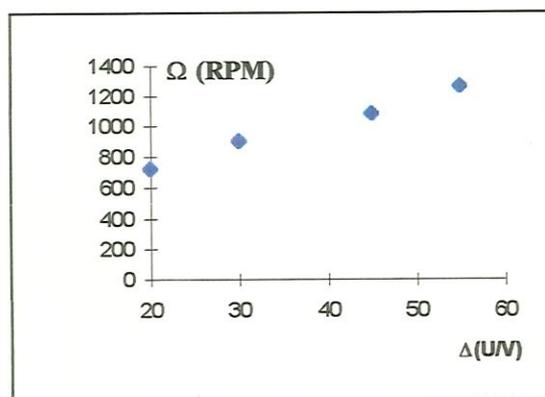
para  $B = 0,39T$ ,  $R = \frac{\Delta U}{\Delta I} = 7,26(\Omega)$

- 11) **Experimento:** Recipiente de raio  $R = 8 \text{ cm}$   
 Campo magnético  $B = 0,39\text{T}$   
 Altura da água =  $10,0 \text{ cm}$   
 Medidor: rotor de  $5,9 \text{ cm}$   
 Luz estroboscópica Aparelho PR 9103  
 Eletrodo de anel no fundo do recipiente  
 raio do anel =  $7,0 \text{ cm}$

$\Delta U \text{ (V)}$	$\Omega \text{ (c/s)}$	$\Omega \text{ (R.P.M.)}$
20	12	720
30	15	900
45	18	1080
55	21	1260



(a)



(b)

FIGURA 19 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada  $B = 0,39\text{T}$   
 a) em ciclo/s.  
 b) em R.P.M.

Observe que o raio do rotor aumentou. Isto significa que regiões de menores velocidade trocam quantidade de movimento com as pás do mesmo. Portanto, isto justifica uma menor R.P.M. para os mesmos valores de tensões aplicadas e, além disso, uma melhor eficiência do campo magnético (um melhor aproveitamento do campo magnético).

Uma outra verificação experimental mostrou a seguinte série de dados:

- recipiente de 16 cm de diâmetro, eletrodo na forma de anel, com 7 cm de raio e água até 7cm de altura no recipiente, com aparelho de luz estroboscópica modelo (STROBOSCOPE PR 9103, 220V), pode-se verificar que com um campo magnético de 0,39T e 35V de tensão aplicada utilizando um rotor de 2,9cm de diâmetro colocado próximo à superfície do recipiente, uma rotação de 21 ciclos/s.

Em seguida, foi fixado um valor de tensão e mediu-se a corrente elétrica para quatro valores diferentes do campo magnético médio.

12)

$\Delta U = 30V$	$\bar{B}_1 = 0,36$ $\bar{B}_2 = 0,37$ $\bar{B}_3 = 0,38$ $\bar{B}_4 = 0,39$	$\bar{I}_1 = 3,28A$ $\bar{I}_2 = 3,18A$ $\bar{I}_3 = 3,15A$ $\bar{I}_4 = 3,07A$	$R_1 = 7,9$ $R_2 = 9,4$ $R_3 = 9,5$ $R_4 = 9,8$
$\Delta U = 10V$ Praticamente não há vórtice	$\bar{B}_1 = 0,36T$ $\bar{B}_2 = 0,37T$ $\bar{B}_3 = 0,38T$ $\bar{B}_4 = 0,39T$	$\bar{I} = 0,85A$ $\bar{I} = 0,85A$ $\bar{I} = 0,85A$ $\bar{I} = 0,85A$	$R_1 = 11,7$ $R_2 = 11,7$ $R_3 = 11,7$ $R_4 = 11,7$
$\Delta U = 40V$	$\bar{B}_1 = 0,355T$ $\bar{B}_2 = 0,365T$ $\bar{B}_3 = 0,375T$ $\bar{B}_4 = 0,39T$	$\bar{I}_1 = 4,52A$ $\bar{I}_2 = 4,10A$ $\bar{I}_3 = 3,90A$ $\bar{I}_4 = 3,80A$	$R_1 = 8,85$ $R_2 = 9,76$ $R_3 = 10,3$ $R_4 = 10,5$

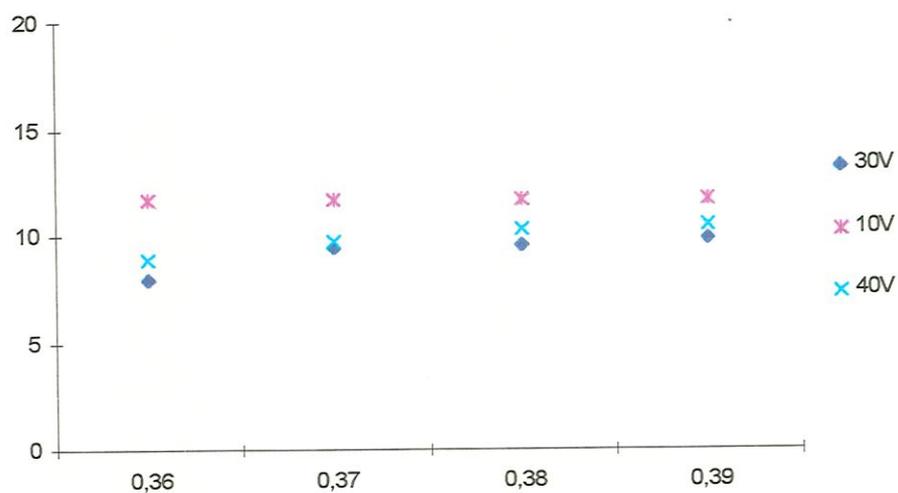


FIGURA 20 - Variação da resistência elétrica em função do campo magnético para 3 valores de tensão aplicada.

Obs.: Após uma certa voltagem é praticamente impossível medir valores corretos da corrente.

- 13) **Experimento:** Para uma dada tensão-corrente variar o campo magnético e anotar a corrente, e calcular a resistência.

$$1) \Delta U = 30V \quad \left( R = \frac{\Delta \Phi}{I} \times B \right)$$

B(T)	I (A)	R ( $\Omega$ )
0,36	3,28	9,15
0,37	3,18	9,43
0,38	3,11	9,65
0,39	3,06	9,80

- 2)  $\Delta U = 10V$       Aparelho: Miliampermetro  
Modelo:

B (T)	I (MA)	R ( $\Omega$ )
0,36	1000	10,0
0,37	1000	10,0
0,38	1000	10,0
0,39	1000	10,0

- 3)  $\Delta U = 40V$ , mesmo nível de água no recipiente. Água com temperatura elevada.

B (T)	I (MA)	R ( $\Omega$ )
0,36	3800	11,1
0,37	3900	10,3
0,39	3600	10,5

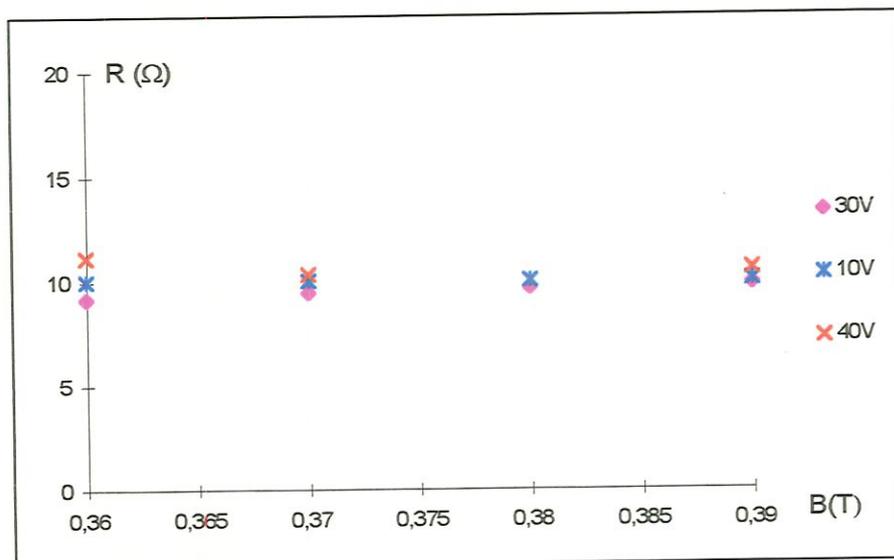


FIGURA 21 - Resistência elétrica em função do campo magnético para 3 valores diferentes da tensão aplicada.

14) **Experimento:** Mantendo a tensão constante e variando o campo

<u>TENSÃO</u>	<u>VALORES MÉDIOS (CORRENTE)</u>	<u>CAMPO B</u>
$\Delta U = 30V$	$I = 3,28 A$	$B_1 = 0,376 T$
	$R_1 = 9,14\Omega$	
$\Delta U = 30V$	$I = 3,18 A$	$B_2 = 0,365 T$
	$R_2 = 9,43\Omega$	
$\Delta U = 30V$	$I = 3,11 A$	$B_3 = 0,375 T$
	$R_3 = 9,64$	
$\Delta U = 30V$	$I = 3,06 A$	$B_4 = 0,39 T$
	$R_4 = 9,80\Omega$	

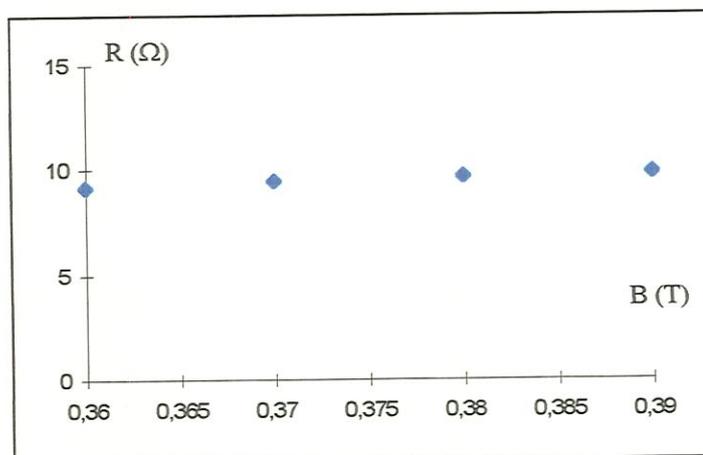


FIGURA 22 - Variação da resistência elétrica do fluido em função do campo magnético. Tensão aplicada  $\Delta U = 30V$

## MAPEAMENTO DO CAMPO MAGNÉTICO DO SOLENÓIDE

### 15) Experimento

#### Dados sobre campo magnético

utilizando Gaussímetro Modelo FW Bell - Model 4048

1) Corrente No Ap. de solda	Raio (cm)		Leitura (T)	
$I_1 = 83$ A (fornece corrente para o solenoide)	0,0	0,0	0,32	0,32
$I_2 = 79$ A	0,5	0,5	0,37	0,37
Amarelo - Amarelo	1,0	1,0	0,40	0,40
	1,5	1,5	0,46	0,46
	2,0	2,0	0,53	0,56
	2,5	2,5	0,24	0,24
			<b><math>\bar{B} = 0,39</math> T</b>	

2) Corrente	Raio (cm)		Leitura (T)	
77 A	0,0	0,0	0,30	0,30
74 A	0,5	0,5	0,35	0,36
Verde - Amarelo	1,0	1,0	0,37	0,38
	1,5	1,5	0,44	0,44
	2,0	2,0	0,53	0,53
	2,5		0,26	0,25
			<b><math>\bar{B} = 0,356</math> T</b>	

## 3) Verde - Amarelo

	Raio (cm)		Leitura (T)	
I = 73 A	0,0	0,0	0,30	0,30
I = 70 A	0,5	0,5	0,35	0,35
Temp. 48° C	1,0	1,0	0,37	0,38
	1,5	1,5	0,43	0,43
	2,0	2,0	0,51	0,49
	2,5		0,23	0,23

---


$$\bar{B} = 0,365 \text{ T}$$

## 4) Azul - Amarelo

	Raio (cm)		Leitura (T)	
I = 71 A	0,0	0,0	0,28	0,28
I = 68 A	0,5	0,5	0,34	0,34
Temperatura 47° C	1,0	1,0	0,37	0,36
	1,5	1,5	0,42	0,42
	2,0	2,0	0,53	0,53
	2,5		0,29	0,29

---


$$\bar{B} = 0,375 \text{ T}$$

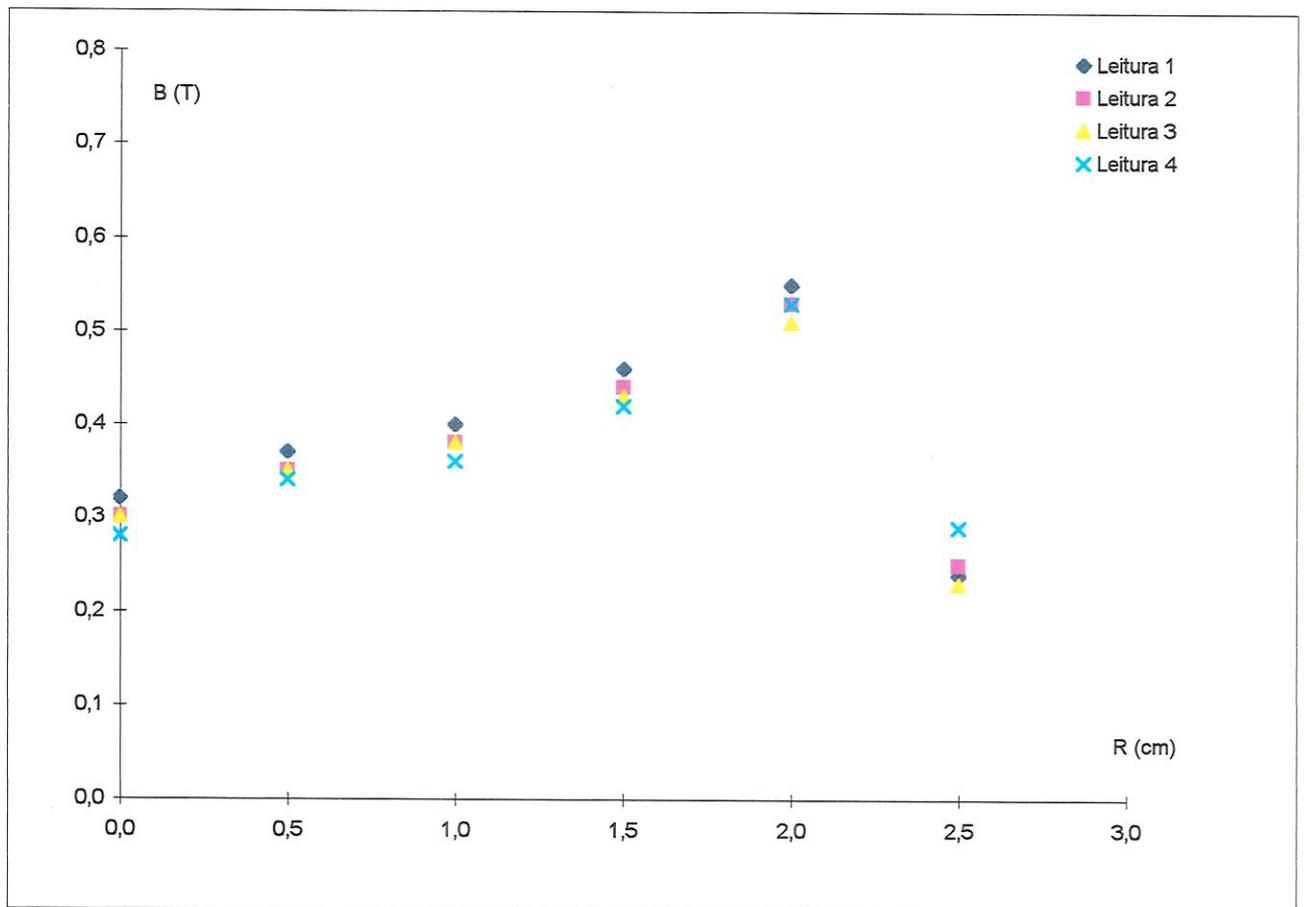


FIGURA 23 - Mapeamento do campo magnético em função do raio para  $Z \cong 0$ .

16) **Experimento:** Recipiente de raio  $R = 5,25$  cm, raio do anel = 4 cm

6 cm de água

Campo magnético:  $B = 0,39$ T

Relação TENSÃO-CORRENTE

$\Delta U(V)$	I (A)
0,0	0,0
1,4	0,01
1,8	0,05
2,2	0,10
3,0	0,19
4,0	0,31
5,2	0,45
6,4	0,60
7,5	0,73
8,6	0,87
9,2	0,96
10,3	1,10
10,5	1,11
12,0	1,34
13,4	1,50
15,5	1,80
17,2	2,00
22,2	2,30

$B = 0$

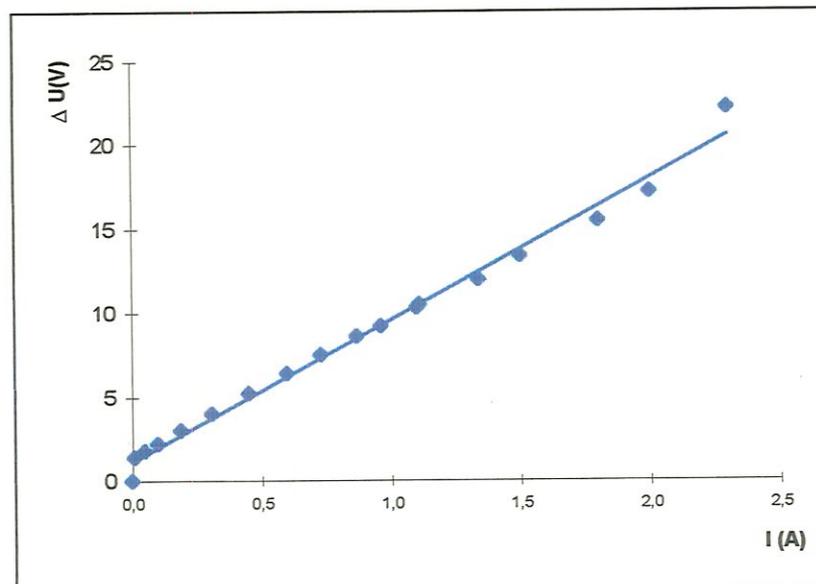


FIGURA 24 - Tensão-corrente com  $B = 0,39$ T

16) **Experimento:** Medida da rotação do vórtice utilizando um rotor de 2,9 cm de diâmetro.

Raio do anel = 4,0 cm

Altura da água: 6 cm

Recipiente de raio: 5,25 cm

Campo magnético médio = 0,39T

Rotor colocado a 1,5 cm da superfície

$\Delta U$ (V)	$\Omega$ (ciclos/s)
5	-?
10	-?
15	-?
20	20
25	21,0
30	21,5
35	22,0
40	23,0
50	24,0
60	24,5

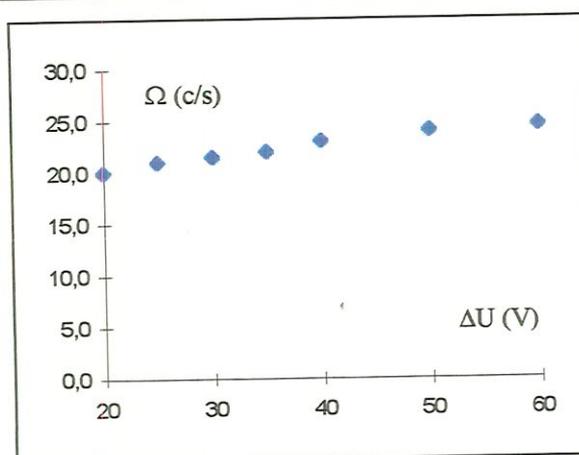


FIGURA 25 - Variação da velocidade angular em função da tensão aplicada para  $B = 0,39T$  e rotor a 1,5 cm da superfície

17) **Experimento:** Mesmo que o anterior, porém com o rotor colocado a 0,5 cm da superfície

$\Delta U$ (V)	I (A)	$\Omega$ (c/s)
20	3,25	18,0
25	3,90	19,0
30	5,0	19,5
35	5,5	20,0
40	6,6	21,0

Obs.: A partir de 35V a corrente oscila e os dados não são confiáveis.

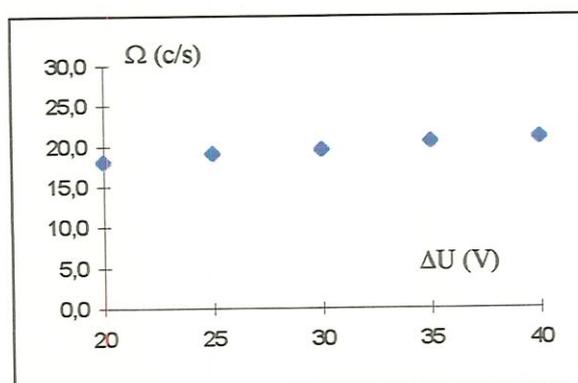


FIGURA 26 - Variação angular de rotação em função da tensão aplicada com o rotor a 0,5 cm da superfície.

18) **Experimento:** Mesmo que o anterior

Água estava “quente”  $T \cong 50^\circ \text{C}$

Aparelho a 1,5 cm da superfície

$\Delta U(\text{V})$	$I(\text{A})$	$\Omega(\text{c/s})$
15	2,22	21,0
22	3,60	21,5
30	-	23,5
40	-	24,0
50	-	26,0

Obs.: A partir de 30V a corrente oscilou muito e optamos por não anotar nenhum valor!

Ex.: 2,20 A; 3,80 A; 4,50 A p/  $\Delta U = 30\text{V}$ .

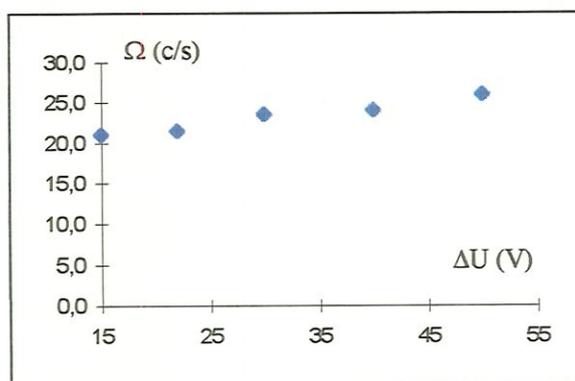


FIGURA 27 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada.  $B = 0,39\text{T}$  e temperatura =  $50^\circ \text{C}$



19) **Experimento:** Mesmos dados que o anterior porém movimentando o rotor dentro do recipiente e utilizando o aparelho: STROBOTAC TYPE 153L

$\Delta U(V)$	$\Omega$ (R.P.M.)
40	1575 - rotor próximo à base
	1410 - rotor na superfície
	1550 - rotor próximo à base
	1425 - rotor na superfície
50	1455 - rotor na superfície
	1665 - rotor no centro

Obs.: 1) A partir de 30V a corrente oscilava muito e optou-se por não anotar nenhum valor.

2) O rotor variou axialmente no recipiente.

20) **Experimento:** Recipiente com 6,0cm de água, raio = 8,0 cm

Campo  $B = 0,39 \text{ T}$

Temperatura = não foi anotada. Porém, a água estava muito quente.

$\Delta U(\text{V})$	I (A)	$\Omega$ (R.P.M.)
15	2,15	850
20	2,85	1100
25	-	1200
30	-	1300
35	-	1500

Obs.: O campo magnético foi aumentado o mesmo acontecendo com a rotação.

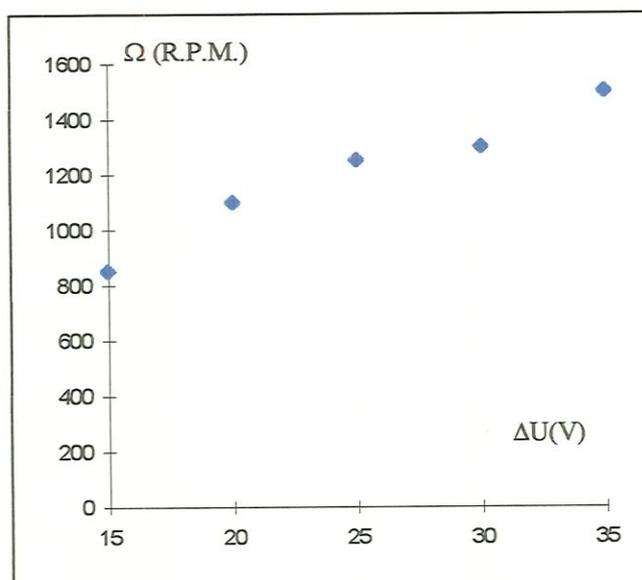


FIGURA 28 - Velocidade angular de rotação em função da tensão aplicada.  $B = 0,39\text{T}$  e  $T \cong 70^\circ \text{ C}$ . Água utilizada pela terceira vez consecutiva.

21) **Experimento:** Medida da TENSÃO-CORRENTE com e sem campo magnético aplicado.

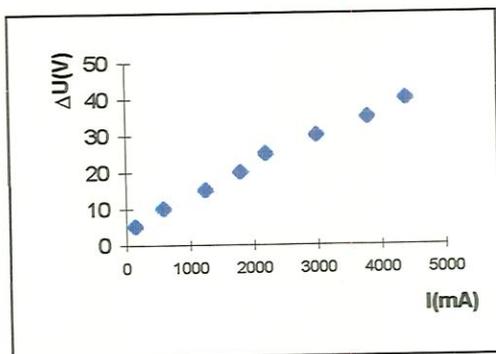
Água: 5,3 cm de profundidade e eletrodos na base.

$\Delta U(V)$	$I(mA)$
5	150
10	600
15	1250
20	1800
25	2200
30	3000
35	3800
40	4400

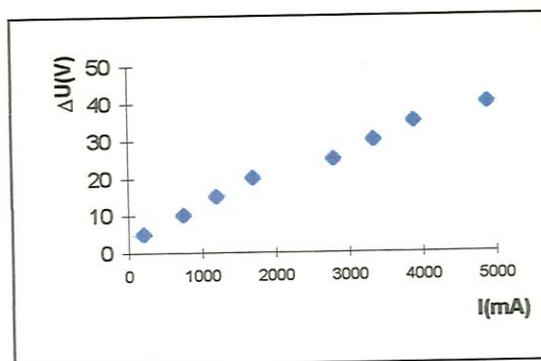
sem campo magnético  
 $B = 0$

$\Delta U(V)$	$I(mA)$
5	220
10	750
15	1200
20	1700
25	2150
30	2800
35	3350
40	3900
50	4900

$B = 0,39 T$



(a)



(b)

FIGURA 29 - Variação da tensão em função da corrente para duas situações diferentes: a)  $B = 0$   
b)  $B = 0,39T$

22) **Experimento:** Agora o eletrodo em anel é colocado a 5cm da base, mantendo a mesma posição radial.

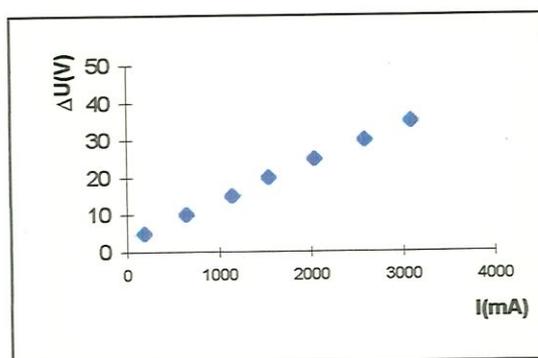
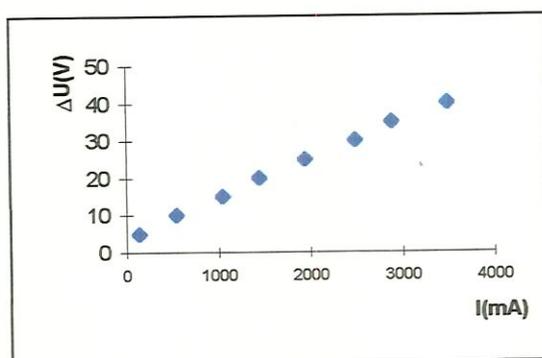
Mantida mesma água que experimento anterior

$\Delta U(V)$	$I(mA)$
5	150
10	550
15	1050
20	1450
25	1950
30	2500
35	2900
40	3500

sem campo magnético  
 $B = 0$

$\Delta U(V)$	$I(mA)$
5	200
10	650
15	1150
20	1550
25	2050
30	2600
35	3100

$B = 0,39 T$



(a) (b)  
FIGURA 30 - Variação da tensão em função da corrente  
a)  $B = 0$   
b)  $B = 0,39 T$

23) **Experimento:** Eletrodo colocado na base do recipiente

Água muito suja e quente

Campo magnético  $B \cong 0,39T$

$\Delta U$ (V)	I (mA)
5	250
10	900
15	1400
20	2000
25	2600
30	3200
35	3800
40	4500
45	—
50	—

Obs.: Em relação ao experimento anterior, nota-se um grande aumento da corrente elétrica e, a partir de 40V não se consegue medi-la! O vórtice está girando muito rapidamente, criando uma região de baixa pressão e provável interrupção da corrente.

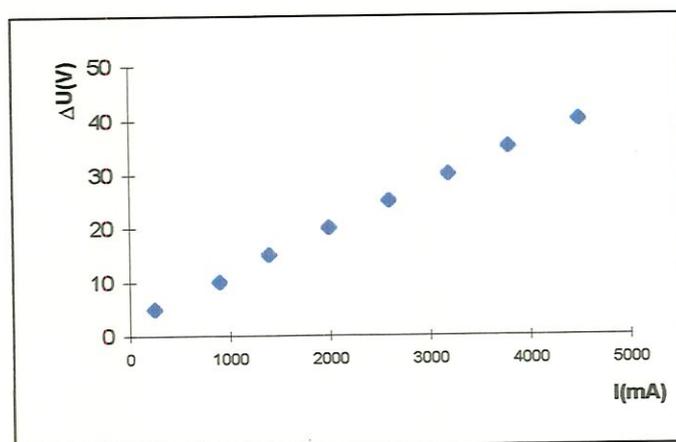


FIGURA 31 - Variação da tensão aplicada em função da corrente elétrica  
 $B = 0,39T$

24) Experimento: Sem campo magnético

Água já tinha sido utilizada

Temperatura elevada  $T \cong 70^\circ \text{C}$ 

$\Delta U$ (V)	I (mA)
5	350
10	870
15	1370
20	1900
25	2400
30	3000
35	3600
40	4200
50	5600

pouca oscilação

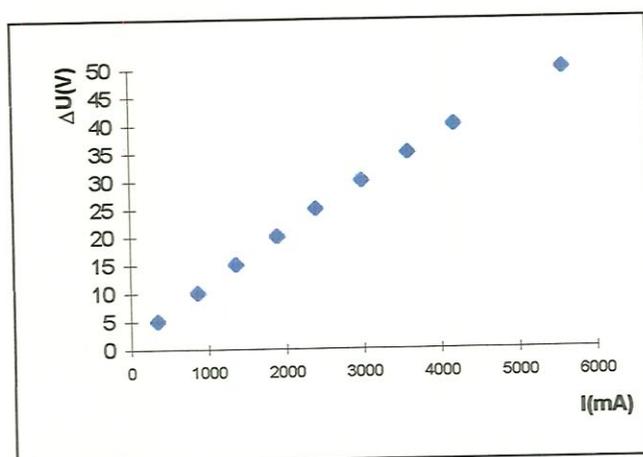
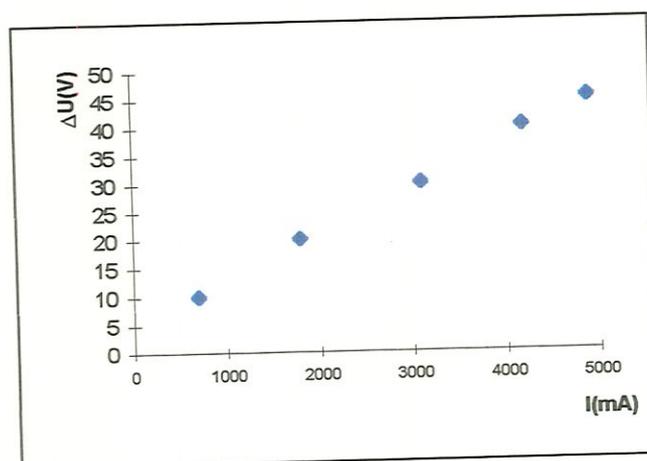


FIGURA 32 - Tensão-corrente, alta temperatura  
 $B = 0$   $T = 70^\circ \text{C}$

25) Experimento: Água suja (terceira utilização)Campo magnético  $B = 0,39\text{T}$ 

Eletrodo no fundo do recipiente

$\Delta U$ (V)	I (mA)
5	?
10	700
20	1800
30	3100
40	4200
45	4900

FIGURA 33 - Relação tensão-corrente.  $B = 0,39\text{T}$

26) Experimento: Medida da relação TENSÃO-CORRENTE

Eletrodo AÇO-INOX (anel)

5cm de água

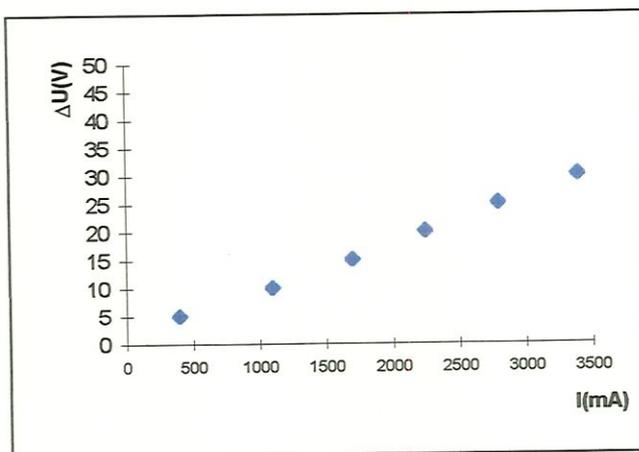
$\Delta U(V)$	$I(mA)$
5	400
10	1100
15	1700
20	2250
25	2800
30	3400

$\bar{B} = 0,39T$

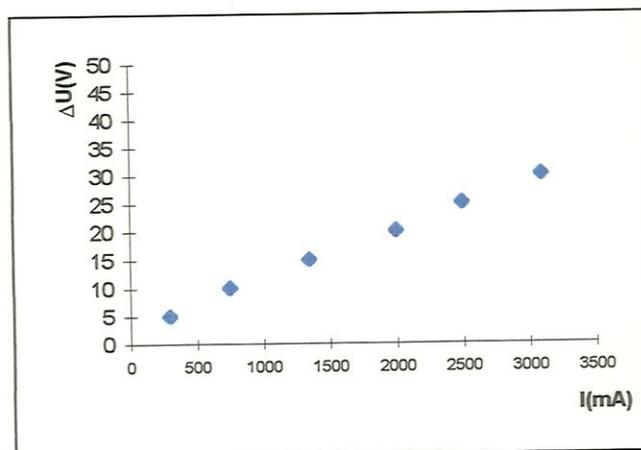
$\Delta U(V)$	$I(mA)$
5	300
10	750
15	1350
20	2000
25	2500
30	3100

não ocorreu  
oscilação

$B = 0$



(a)



(b)

FIGURA 34 - Gráfico da tensão-corrente

a)  $B = 0,39T$ b)  $B = 0$

$$1) \quad R = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{25 - 10}{2,80 - 1,1}$$

$$R_B = \frac{15}{170} \Omega = 8,82 \Omega$$

$$R = \frac{25 - 10}{2,5 - 0,75} = \frac{15}{1,75} \Omega$$

sem campo magnetico

$$R = 8,57 \Omega$$

$$2) \quad R = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{30 - 5}{3,4 - 0,4} = 8,06 \Omega$$

$$R = \frac{30 - 5}{3,1 - 0,3} = 8,9 \Omega$$

$$3) \quad R = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{30 - 15}{3,4 - 1,7} = 8,82 \Omega$$

$$R = \frac{30 - 15}{3,1 - 1,35} = 8,57 \Omega$$

$$\bar{R} = \frac{8,82 + 8,06 + 8,82}{3} = 8,56 \Omega$$

$$\bar{R} = 8,68 \Omega$$

Dados calculados do 26º experimento

30) Experimento: Medida da TENSÃO-CORRENTE

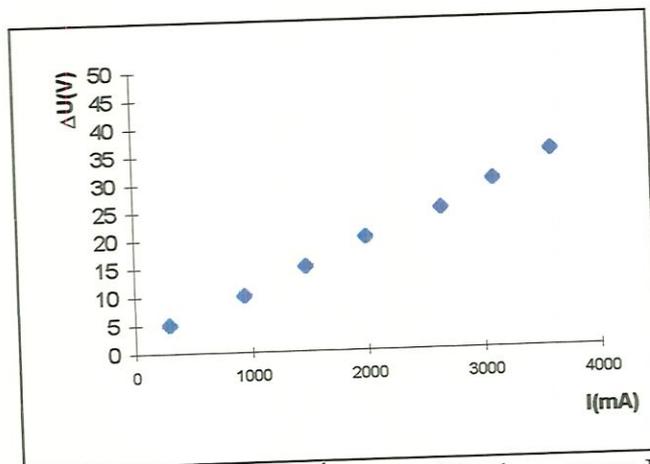
Eletrodo AÇO-INOX (anel)

Campo magnético:  $B = 0,39T$ 

Água já tinha sido utilizada

Água não fica suja (inversão da polaridade)

$\Delta U$ (V)	I (mA)	
5	300	
10	950	
15	1480	
20	2000	
25	2650	
30	3100	pouca
35	3600	oscilação

FIGURA 35 - Tensão-corrente. Água reutilizada e campo  $B = 0,39T$ .

$$R_1 = \frac{35 - 10}{3,6 - 0,95} = 9,43\Omega$$

$$R_2 = \frac{30 - 5}{3,1 - 0,3} = 8,93\Omega$$

$$R_3 = \frac{25 - 5}{2,65 - 0,3} = 8,51\Omega$$

VALOR MÉDIO:  $\bar{R} = 8,95\Omega$

28) **Experimento:** Relação TENSÃO-CORRENTE e cálculo da resistência  
5cm de água no recipiente

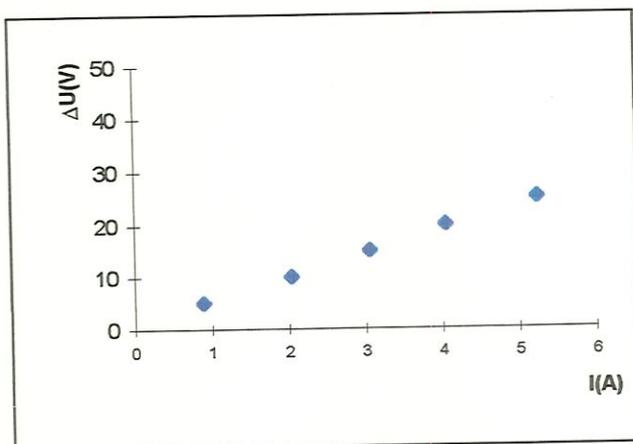
Eletrodo de latão desencapado, colocado na base do recipiente

Temperatura normal

$\Delta U(V)$	$I(A)$
5	0,9
10	2,04
15	3,07
20	4,06
25	5,25

$B = 0$

$$R = \frac{20 - 5}{4,06 - 0,9} = 4,75\Omega$$

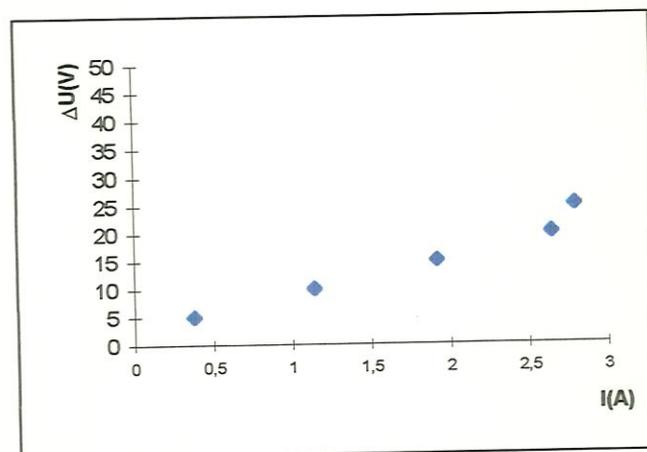


(a)

$\Delta U(V)$	$I(A)$
5	0,38
10	1,14
15	1,92
20	2,65
25	2,80

$\bar{B} = 0,39T$

$$R = 6,60\Omega$$



(b)

FIGURA 36 - Relação tensão-corrente

a)  $B = 0$

b)  $B = 0,39T$

Neste experimento nota-se claramente o aumento da resistência elétrica em função do campo magnético.

$$\Delta R = 1,85\Omega \quad (\text{experimental})$$

$$R = \frac{B_o}{2\pi\sqrt{\sigma\eta}} \ln\left(\frac{R_o}{a}\right) = \frac{0,39}{2\pi\sqrt{4,5 \times 1,6 \times 10^{-3}}} \ln 10 = 1,70$$

Teórico

Tomando outros valores para o cálculo da resistência experimental, como por exemplo:

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{20 - 10}{4 - 2} = 5\Omega \\ R_B &= \frac{20 - 10}{2,65 - 1,14} = 6,6\Omega \end{aligned} \right\} \Delta R = 1,6\Omega$$

Este valor de  $\Delta R = 1,6\Omega$ , está muito próximo do valor teórico  $\Delta R = 1,70\Omega$ , calculado pela fórmula:

$$\Delta R = \frac{B_o}{2\pi\sqrt{\sigma\eta}} \ln\left(\frac{R_o}{a}\right)$$

29) **Experimento:** Recipiente de diâmetro 50 cm

Água a 6,0cm de altura

Dois eletrodos de aço-inox. Um pontual e outro na forma de anel de 14cm de raio, concêntrico ao primeiro.

B = 0,39T

Foi utilizado o máximo (0,39T) campo magnético. O campo elétrico (diferença de potencial) foi aumentado lentamente até 65V onde, com o rotor de 2,9cm de diâmetro, foi possível se detectar uma rotação de 23 ciclos/s com o mesmo posicionado a 0,5cm da superfície.

O vórtice não permaneceu estável por mais de 10s. Várias tentativas foram feitas e sempre se verificou que o vórtice decaía, após um tempo relativamente curto.

Deve-se ter em conta que o volume de líquido, agora, foi aumentado sobremaneira, o mesmo não acontecendo com a corrente elétrica que é limitada nas condições do experimento.

Um outro experimento realizado no recipiente médio (8cm de raio) com campo  $B = 0,39T$  para uma diferença do potencial de 35V indicou uma rotação de 21 ciclos/s no rotor de 5,9cm de diâmetro. Observar-se-ia um vórtice muito mais estável se o rotor utilizado fosse o de diâmetro menor, neste caso, certamente, a indicação da rotação teria sido maior.

Utilizou-se esta água para uma medida de condutividade realizada no Laboratório de Hidráulica.

$\sigma = 4,31 \text{ s/m}$       água utilizada em vários experimentos -  $T = 25,9^\circ \text{ C}$

$\sigma = 4,42 \text{ s/m}$       água não utilizada       $T = 25,3^\circ \text{ C}$

## COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

### Comentários

- 1) A geometria dos eletrodos e o material do qual são feitos, constituem fatores importantes na experimentação. Verificou-se que o eletrodo de ouro é muito eficiente como elemento condutor (positivo), não possibilitando a introdução de impurezas adicionais ao líquido e garantindo um longo período de experimentação; o mesmo não acontecendo com outros eletrodos, por exemplo: aço inoxidável.
- 2) Uma análise das curvas de tensão-corrente mostra que existe uma boa linearidade entre essas variáveis principalmente quando não há campo magnético aplicado. Quando se aplica o campo magnético (repare que o campo não muda durante um dado experimento) e aumenta-se lentamente a tensão, nota-se que, após um certo valor a corrente começa a oscilar e o faz cada vez com maior amplitude. Nas condições experimentais, este efeito tem início por volta de 30V.

O fenômeno foi observado durante todas as medidas e deve estar relacionado com a queda de pressão estática no líquido causada pelo movimento do vórtice. Aliás, Shercliff<sup>(8)</sup>, pag. 248, já havia observado que: *"In a liquid the low pressures might conceivably cause intermittent cavitation, interrupting the current flow"*.

3. O aumento do campo magnético é um fator fundamental para a eficiência do sistema. O ideal seria manter a tensão baixa e aumentar o máximo possível o campo magnético externo. Neste caso o efeito Joule seria minimizado. Vários trabalhos recentes, que tratam de sistemas de geração de potência, apontam nesta direção <sup>(34, 53, 54, 56)</sup>
4. A corrente elétrica que passa pelo líquido provoca aumento da temperatura e conseqüentemente diminuição da densidade e viscosidade. Nos experimentos realizados foi possível se observar uma pequena melhora na velocidade angular de rotação. O vórtice parece girar com mais facilidade em temperaturas maiores.

Por um lado, deve-se notar que o aumento da temperatura aumenta a pressão e por outro que o aumento da velocidade a faz diminuir.

No fundo o que se quer é realmente provocar queda na pressão (um efeito hidrodinâmico) por meio de forças controláveis (eletromagnéticas).

Este objetivo foi realmente alcançado com simplicidade, praticidade e elegância.

5. Alguns experimentos foram realizados em um recipiente maior (60cm de diâmetro) com até 9cm de água e verificou-se a formação de um vórtice relativamente intenso com o campo máximo de 0,39T.

No entanto, após 12 a 15 segundos de formação, o vórtice começou a perder energia e desapareceu. Até onde se pode observar, nem aumentando muito a

tensão aplicada (65 a 70V) conseguiu-se reverter esta tendência. Note que o campo magnético não pode ser aumentado além do valor acima (precisar-se-ia de uma outra fonte ou outro solenóide maior)

No entanto, no mesmo recipiente com um nível de água dobrado (18 cm) e aumentando-se gradativamente a tensão aplicada até 35V e um campo magnético de 0,39T, o vórtice conseguiu se formar e se manter, apesar de ter uma velocidade de rotação bem menor que em recipientes menores. Foi preciso, no entanto, esperar um tempo relativamente grande para que a inércia do líquido fosse vencida.

6. Quando se compara os dados tomados por dispositivos diferentes, como é o caso página 76, é preciso se levar em conta que uma pequena mudança de posicionamento do rotor, dentro do recipiente, deve indicar valores distintos das rotações. No entanto, em ambos os casos, sempre se verificou que aumentando a tensão aplicada as R.P.M., aumentaram, para um dado valor do campo  $\vec{B}$ .

Ainda mais, o posicionamento do rotor ao longo do eixo axial indicou variações nas medidas da velocidade de rotação. Ela aumenta um pouco com a profundidade.

(veja pagina 100)

7. Apesar de a intensidade do campo magnético não ter sido grande foi possível perceber um aumento da resistência elétrica com o aumento do campo magnético, principalmente para valores tão altos quanto 30 a 40V, de tensão aplicada.

SOMMERIA<sup>(21)</sup> observou grandes variações na resistência elétrica em função do campo magnético, devido a variação da intensidade que conseguiu imprimir a essa variável (0,1 - 1,0)Tesla.

8. Um cálculo simplificado que pode ajudar na análise e conclusões sobre os dados da velocidade angular de rotação, pode ser encontrado aplicando o teorema do trabalho - energia cinética, para um elemento de volume do líquido.

Desprezando-se a viscosidade no núcleo do escoamento (Reynolds =  $10^4$ ),

$$\text{tem-se} \quad \mathbf{W}(\text{result}) = \Delta K = \frac{1}{2} \rho v^2 \Rightarrow$$

$$\int \mathbf{j} \mathbf{B} d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \rho v^2 \rightarrow 2\pi\sigma |\Delta\Phi| \mathbf{B}_0 = \frac{1}{2} \rho v^2, \quad \text{ou seja,}$$

$$V = \left( \frac{4\pi\sigma |\Delta\Phi| \mathbf{B}_0}{\rho} \right)^{1/2}$$

Por exemplo: Na posição onde há o interesse do cálculo (raio do núcleo do vórtice)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = 4,3 \text{ S/m} \\ \Delta\Phi = 160 \text{ v} \\ \mathbf{B} = 0,4 \text{ T} \\ \rho = 1030 \text{ kg/m}^3 \end{array} \right.$$

Substituindo acima vem:

$$V = 1,7 \text{ m/s}$$

Por outro lado, as medidas com o rotor indicaram uma rotação com um valor médio de aproximadamente 1300 R.P.M.. Então,

$$V = W_r = \frac{1300 \times 2\pi}{60} \times 1,2 \times 10^{-2} = 1,60 \text{ m/s}$$

ou seja, os dois resultados estão bem de acordo.

## **Conclusões**

A primeira conclusão importante que se pode tirar do trabalho é que a água do mar funciona relativamente bem como fluido condutor para aplicações em magnetoidrodinâmica de líquidos fracamente condutores. A velocidade angular adquirida pelo líquido comprova a afirmação acima.

Outra conclusão é que o aumento do campo magnético externo deve aumentar a eficiência do vórtice, pois a tensão aplicada aos eletrodos, no interior do meio, pode ser diminuída, fato que reduz significativamente o efeito Joule.

Também pode-se concluir que dados importantes foram obtidos por meio de técnicas simples de experimentação, como por exemplo, a velocidade angular de rotação do núcleo do vórtice, a comprovação da resistência elétrica do líquido em função do aumento do campo magnético aplicado e que o raio do núcleo do vórtice praticamente não depende das dimensões do recipiente. No entanto, a velocidade média do escoamento depende do volume de líquido.

## **SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

1. A aquisição de dados mais precisos.
2. Estudo da eletrólise da água do mar em campos magnéticos externos.
3. A utilização de campos magnéticos oscilatórios para a geração do vórtice.
4. Determinação do rendimento do sistema.
5. Realizar o experimento em um recipiente bem maior para verificar sua posterior aplicação como um gerador de potência.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) MAECKER, H.; Plasmaströmungen in Lichtbögen in folge eigenmagnetischer kompression Zeitschrift für Physik, 141, 1955, pag. 198-216. (ver comentários de Shercliff). (Ref. 8)
- (2) AMSON, J.C.; 1965 Brit. J. Appl. Phys. 16, 1169
- (3) ZHIGULEV, V.N.; 1960, Doklady, 130, 280, 00. Soviet - Phys. - Doklady, 5, 36.
- (4) UBEROI, M. S.; Magnetohydrodynamics at small magnetic Reynolds numbers - The Physics of Fluids, 1962, vol. 5, nro. 1, pag. 401-406.
- (5) LEWELLEN, W.S.; Magnetohydrodynamically driven vortices, Proc. Heat Transf. Fluid Mech. Inst. Stanford University Press, 1960, 1-17.
- (6) PAO, H. P. and LONG, R. P.; Magnetohydrodynamic jet-vortex in a viscous conducting fluid. Quart Journ. Mech. And Applied Math, vol. XIX, part. I, Pag. 1-26.

- (7) LUNDQUIST, S.; On the hydromagnetic viscous flow generated by a diverging electric current, 1969. Arkiv för fysik band 40, nro. 5, Pag. 89-95.
- (8) SHERCLIFF, J. A.; Fluid motions due to an electric current source. J. Fluid Mech., 1970, vol. 40, part 2. Pag. 241-250.
- (9) SHERCLIFF, J. A.; The dynamics of conducting fluids under rotational magnetic forces, Sci. Prog. Oxf., 1979, 66, pag. 151-170.
- (10) SLEZKIN,
- 43 (10) SOUZOU, C.; On fluid motions induced by an electric current source, J. Fluid Mech., 1971, vol. 46, part 1, Pag. 25-32.
- (11) WARAIN, J. P.; UBEROI, M. S.; Magnetohydrodynamics of conical flows, The physics of fluids, vol. 14, nro. 32, 1971, pag. 2687-2692.
- (12) SOZOU, C. and ...; English, Fluid motions induced by an electric current discharge - Proc. R. Soc. Lond. A 329, 1972, pag. 71-81.
- (15) MOFFAT, H. K.; On fluid flow induced by a rotating magnetic field. J. Fluid Mech. 1965, vol. 22, part. 3, Pag. 521-528.
- (15) MOFFAT, H. K.; Some Problems in the magnetohydrodynamics of liquid metals, ZAMM, 59 T65-T71, 1978.
- (17) ATTHEY, D. R.; A mathematical model for fluid flow in a weld pool at high currents, J. Fluid Mech. 1980, vol. 98, part. 4, pag. 787-801.
- (18) CRAINE, R. E. and WEATHERIL, N. P.; Fluid flow in a hemispherical container induced by a distributed source of current and a superimposed uniform magnetic field. J. Fluid Mech, 1980, vol. 99, part. 1, pag. 1-11.

- (19) BOJAREVICS, V. and SHCHERBININ, E. V.; Azimutal rotation in axisymmetric meridional flow due to an electric-current source. *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 126, pag. 413-430.
- (20) AJAYI, O. O., SOZOU, C. and PICKERING, W. M.; No linear fluid motions in a container due to the discharge of an electric current, *J. Fluid Mech.*, 1984, vol. 148, pag. 285-300.
- (21) SOMMERIA, J.; Electrically, driven vortices in a strong magnetic field, *J. Fluid Mech.*, 1988, vol. 189, Pag. 553-569.
- (22) BRAGINSKII, S. I.; Magnetohydrodynamics of weakly conducting liquids, *Soviet Physics JETP*, 1960, vol. 37 (10), nro. 5, Pag. 1005-1014.
- (24) LINDGREN, E. R. R.; Vorticity and Rotation *AM. J. Phys.*, 1980, 48(6), pag. 465-647.
- (25) LUGT, H. J.; Vortices and vorticity in fluid dynamics. *American scientist*, vol. 73, 1985, pag. 162-167.
- (27) HUNT, J. C. and MALCON, D. G.; Some electrically driven flows in magnetohydrodynamics, part. 2 - Theory and Experiment, *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 33, part. 4, pag. 775-801.
- (28) MALCOM, D. G.; An investigation of the stability off a magnetohydrodynamic shear layer. *J. Fluid Mech.*, 1970, vol. 41, part. 3, Pag. 531-544.
- (30) KLYUKIN, A., YU.B. KOLESNIKOV, LEVIN, V. B.; Experimental Investigation of a free rotating layer in an axial magnetic field. I Stable conditiows magnetohydrodynamics, january-march, 1980, nro. 1, pag. 93-98.
- (31) ANDREWS, J. G. and CRAINE, R. E.; 1978, *J. Fluid. Mech.* 84, 281.

- (32) BAYLIS, J. A.; Experiments on laminar flow in curved channels of square section. *J. Fluid Mech.*, 1971, part. 3, pag. 417-422.
- (33) BUTSENIEKS, J. E., ET AL; Magnetohydrodynamics fluid flows in a closed space with anonuniform electric current, *magnetohydrodynamics*, nro. 1, pag. 92-97, 1976.
- (34) CONVERT, D. and THIBAUT, J. P., External M.H.D. Propulsion, *Magnetohydrodynamics*, vol. 31, nro. 3, 1995, pag. 290-297.
- (35) HEISER, W. H. and SHERCLIFF, J. A.; A simple demoustration of the Hartmann layer. *J. Fluid Mech.*, 1965, vol. 22, part. 4, pag. 701-707.
- (36) HUNT, J. C. R. and STEWARTSON, K.; Magnetohydrodynamic flow in rectangular ductr. II, *J. Fluid Mech.*, 1965, vol. 23, part. 3, pag. 563-582.
- (37) HUNT, J. C. R. and WILLIAM, W. E.; Some electrically driven flows in magnetohydrodynamics, part. 1, Theory, *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 31, part. 4, pag. 705-722.
- (38) HUNT, J. C. R., SHERCLIFF, J. A.; Magnetohydrodynamics at high Hartmann nunber, *Ann Rev. Fluid Mech.*, 1971, 3, Pag. 37-62.
- (39) KALIS, Kh. E. and Yu. B. KOLESNIKOV; Influence of a homogeneous transverse magnetic field on shear flow of a viscous electrically conducting fluid *magnetohydrodynamics*, 1979, nro. 2, pag. 51-54.
- (40) KALIS, Kh. E., KOLESMIKOV, Yu. B.; Numerical study of a single vortex of a viscous incompressible electrically conducting fluid in a homeneous axial magnetic field, *magnitnaya gidrodinamika*, 1980, nro. 2, Pag. 57-61.

- (41) LEVIN, V. B.; Free rotating layer of an electrically conducting fluid in an axial magnetic field, *magnetohydrodynamics*, 1980, nro. 1, january-march, pag. 86-92.
- (42) MENG, J. C. S.; Physics, Electrochemistry and Engineering Optimization Analysis for Sea Water MHD Propulsion, *Magnetohydrodynamics*, vol. 29, nro. 3, 1993, pag. 211-239.
- (43) NARAIN, J.P. and UBEROI, M.S.; 1871, *Magnetohydrodynamics of Conical Flows*. *Phys. Fluids*. 14, 2687-2692.
- (44) ROBERTS, P. H.; *Magnetohydrodynamics*, *Encyclopedia of Applied Physics* vol. 9, 1994, VCH Publisher, In.
- (45) SHAPIRO, A. H.; *Vorticity*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1969.
- (46) SHCHERBININ, E. V.; Electrically conducting fluid in self magnetic field of an electric current, *magnetohydrodynamics*, nro. 1, january-march, 1975, pag. 68-74.
- (47) SHECHELUKHIN, E. M., et al...; Laminar Rotation of a conducting fluid driven by conductive forces in a cylindrical vessel, *Magnetohydrodynamics*, nro. 2, pp. 73-76, 1978.
- (48) SHERCLIFF, J. A.; Thermoelectric magnetohydrodynamics, *J. F. Mech.*, 1979, vol. 91, pag. 231-251.
- (49) Some electrically driven flow in magnetohydrodynamics, part. 3, The asymptotic theory for flow between circular electrodes, *J. Fluid Mech.*, 1969, vol. 38, part. 2, pag. 225-242.

- (50) SOZOU, C.; On magnetohydrodynamic flows generated by an electric current discharge, *J. Fluid Mech.* 1974, vol. 63, part. 3, pag. 665-671.
- (51) SOZOU, C.; 1972. *Phys. Fluids*, 15, 272.
- (52) SOZOU, C. and PICKERING, W. M.; 1976, *J. Fluid Mech.* 73, 641
- (53) TEMPELMEYER, K. E.; Electrical characteristics of the electrolysis process in an MHD sea water thruster, *Magnetohydrodynamics*, vol. 29, nro. 3, 1994, pag. 240-244.
- (54) THIBAUT, J. P., et al; Basic studies on sea water M.H.D. thrusters, *magnetohydrodynamics*, vol. 29, nro. 3, 1993, pag. 245-249.
- (55) UBEROI, M. S.; *Magnetohydrodynamics at small magnetic Reynolds number*, *The Physics of Fluids*, 1962, vol. 5, nro. 4, pag. 401-406.
- (56) VASIL'EV, A. P.; Critical parameters of a sea water conduction M.H.D. accelerator, *magnetohydrodynamics*, nro. 1, january-march, 1985, pag. 115-120.
- (57) WAECHTER, R. T.; Steady electrically driven flows, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1968, 64, 871, pag. 871-894.
- (58) WOODS, R.A. and MILNER; 1971, *Wild J. Res. Suppl.* 50, s 163.
- (59) ZHILIN, V. G., ET ALL; Measurements on an enclosed vortex in an axial magnetic field, 1988, *magnetohydrodynamics*, nro. 3, july-september, pag. 382-384.
- (60) SHERCLIFF, J.A. ; *A text book of magnetohydrodynamics*, Pergamon Press, 1965.

- (61) ROBINSON, T. and LARSON, K.; An experimental investigation of a magnetically driven rotating liquid-metal flow. 1973. J. Fluid. Mech. Vol. 60. Part. 4, pag. 641-664.

## APÊNDICE

Solução analítica do sistema de equações diferenciais considerando que a velocidade azimutal depende de (**R e Z**), mas com  $V_R = V_Z = 0$

$$\rho \left[ \frac{DV_r}{Dt} - \frac{V_\theta^2}{r} \right] = Fr - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[ \nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right], \text{ ou}$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] = Fr - \frac{\partial P}{\partial r} +$$

$$\mu \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right]$$

Pela hipótese de simetria axial,  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ , assumindo

$v_r = v_z = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ . Além disso, por hipótese  $F_r = 0$ , temos

$$+ \rho \frac{v_\theta^2}{r} = + \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\rho \left[ \frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right] = F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[ \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right]$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right] = F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} +$$

$$\mu \left[ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right]$$

Simplificando, tem-se:

$$\mu \left[ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] = - F_\theta$$

$$v_\theta = v_\theta (r, z)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = F_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z + \rho \bar{g}$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = F_z - \frac{\partial P}{\partial z} +$$

$$\mu \left[ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \rho \bar{g}$$

Por hipótese,  $F_z = 0$ , simplificando vem:

$$+ \frac{\partial P}{\partial z} = - \rho g$$

Devemos resolver o seguinte sistema de equações

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{v_\theta^2}{r}$$

$$- \frac{\partial P}{\partial z} = - \rho g$$

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} = - F_\theta = - j r B_z, B_z = B_0$$

Sujeito as condições de contorno.

$$V(r = R, Z = 0) = 0$$

$$V(r = a, Z = 0) = V_0, a \text{ é o raio do núcleo do vórtice.}$$

$$\text{Seja } V_\theta(r, Z) = V_\theta(r) + F(Z), |F(Z)| \ll |V_\theta(r)|$$

Substituindo na equação acima,

$$\frac{d^2 V_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} - \frac{F(z)}{r^2} + \frac{d^2 F}{dz^2} = r j B_0$$

Comparando o terceiro termo com o quarto na equação acima, pode-se ver que, de acordo com os dados experimentais,  $V_0 \gg F(z)$ . Assim, consegue-se fazer o desacoplamento das funções, ficando uma equação na variável  $r$  e outra na variável  $z$ . A equação radial já foi resolvida e a outra na variável  $z$  é trivial.