

✓

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS
NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA: ANÁLISE
COMPARATIVA DE ALGUNS MÉTODOS.**

Engo. LUIS FERNANDO SANTOS PORCHIA
Orientador: Prof. Dr. MARIO F. MUCHERONI

DEDALUS - Acervo - EESC



31100036169

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

SÃO CARLOS
FEVEREIRO DE 1996



Class. Tese - FEESC
Cott. 4542
Tombo 078/96

Eng. Mecânica

st 0747637

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca - EESC-USP


P833i Porchia, Luis Fernando Santos
Identificação de sistemas dinâmicos no domínio da
frequência : análise comparativa de alguns métodos /
Luis Fernando Santos Porchia. -- São Carlos, 1996.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de
São Carlos-Universidade de São Paulo, 1996.
Orientador: Prof. Dr. Mario F. Mucheroni

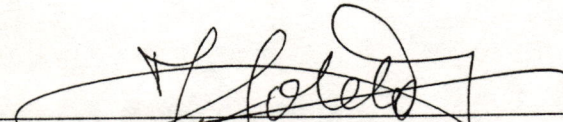
1. Mecânica aplicada. 2. Vibrações mecânicas. 3.
Análise modal. 4. Identificação no domínio da
frequência. I. Título

FOLHA DE APROVAÇÃO

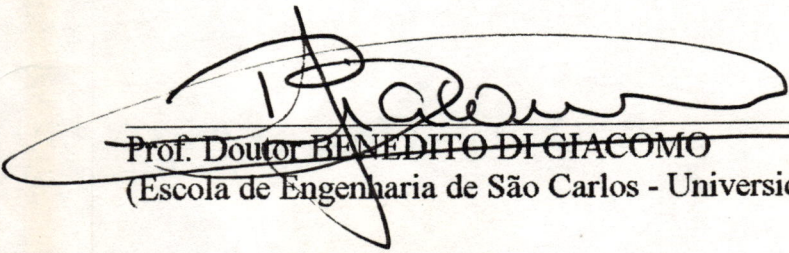
Dissertação defendida e aprovada em 22-03-1996
pela Comissão Julgadora:



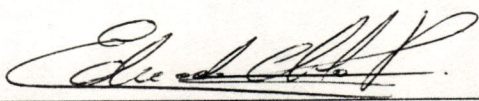
Prof. Doutor MARIO FRANCISCO MUCHERONI - Orientador
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



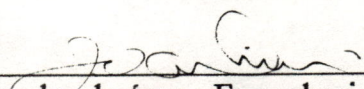
Prof. Doutor JOSÉ SOTELO JUNIOR
(Escola Politécnica - Universidade de São Paulo)



Prof. Doutor BENEDITO DI GIACOMO
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Dr. EDUARDO CLETO PIRES
Presidente da Comissão de Pós-Graduação



Coordenador da área - Engenharia Mecânica
Prof. Dr. JOÃO LIRANI

A meus pais NERY e MARIA HELENA e
à minha esposa ANDREIA

AGRADECIMENTOS

Ao finalizar este trabalho, gostaria de agradecer a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que o mesmo fosse realizado. Tentar lembrar de todos os nomes é impossível e sempre será cometida alguma injustiça, porém é não poderia deixar de citar aqueles que mais diretamente participaram deste processo.

- Ao Prof. Dr. Mario Francisco Mucheroni, pela orientação, amizade, apoio e compreensão que sempre estiveram presentes e sem as quais, com certeza, este trabalho não teria se concretizado.

- Ao colega doutorando MSc. Roberto Hideaki Tsunaki, pelo companheirismo e pela colaboração, principalmente durante a realização do ensaio experimental.

- Ao Prof. Dr. J. M. Balthazar, grande companheiro e incentivador.

- Ao Eng. MSc. Luis Augusto M. Gonçalves pela colaboração, até mesmo no período em que esteve ausente do país.

- Ao LAMAFE, em cujas instalações foram realizados o ensaio experimental e o desenvolvimento dos softwares.

- A todos os professores dos cursos efetuados e a aqueles que, mesmo sem tê-los ministrado, transferiram seu conhecimento.

- À CAPES, pela bolsa recebida em uma fase deste projeto.

A todos vocês só poderia expressar meu muito obrigado.

RESUMO

Os problemas relacionados às vibrações estruturais representam atualmente os principais fatores de risco e de limitação de projeto para muitas aplicações de engenharia. A integridade estrutural é fundamental para todas as estruturas. Assim, têm sido desenvolvidos vários métodos de identificação para ampliar o conhecimento das características dinâmicas estruturais.

Neste trabalho são comparados cinco métodos de identificação de parâmetros modais de uma estrutura, no domínio da frequência.

As respostas livre e forçada de sistemas lineares discretizados são apresentadas. São estudados os casos de sistemas sem e com amortecimento, sendo neste caso abordadas as distribuições do tipo proporcional e não proporcional.

Os cinco métodos de identificação foram implementados utilizando-se a linguagem de programação FORTRAN. A implementação numérica desses métodos está descrita através da apresentação dos fluxogramas e rotinas numéricas. Dados experimentais obtidos através de vários ensaios de uma placa engastada foram aplicados aos programas computacionais desenvolvidos.

A apresentação dos resultados é feita tanto na forma gráfica, como também na forma de tabela de erros médios obtidos durante o processo de ajustagem.

ABSTRACT

The problems related to structural vibration represent today the major hazard and design limitation for many engineering products. Structural integrity is fundamental for all structures. Therefore, several identification methods have been developed so as to enhance knowledge of structural dynamic characteristics.

In this work, five modal parameters identification methods of a given structure, in the frequency domain, are compared.

The free and forced responses to discretized linear systems are presented. Also, cases of systems with and without damping are studied and, in these cases the proportional and non-proportional distribution are discussed.

The five identification methods were implemented by means of FORTRAN programming language. These methods' numerical implementation is described through the presentation of flow charts and numerical routines. Data obtained through several experiments with a cantilever plate was applied to the computer programs developed.

Results are presented graphically and also in tables with the average errors obtained during the fitting process.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	ii
ABSTRACT	iii
SUMÁRIO	iv
1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Aspectos gerais dos métodos da análise modal	3
1.2 - Objetivos deste trabalho.....	7
1.3 - Apresentação dos capítulos	8
2 - RESPOSTA LIVRE DE SISTEMAS DISCRETIZADOS	10
2.1 - Modelo Espacial	12
2.1.1 - Condição de equilíbrio dinâmico.....	13
2.2 - Frequências naturais e modos de vibrar	17
2.2.1 - Sistemas amortecidos - caso geral.....	17
2.2.2 - Sistemas amortecidos - amortecimento proporcional	30
2.2.3 - Sistemas sem amortecimento	37
3 - RESPOSTA FORÇADA DE SISTEMAS DISCRETIZADOS	41
3.1 - Resposta harmônica de sistemas não amortecidos	41
3.2 - Resposta harmônica de sistemas amortecidos	46

3.2.1 - Amortecimento viscoso proporcional	46
3.2.2 - Amortecimento viscoso não proporcional.....	50
3.3 - Representação gráfica das FRF	53
3.3.1 - Sistemas não amortecidos.....	53
3.3.2 - Sistemas amortecidos.....	58
4 - IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	60
4.1 - Identificação modal de estruturas levemente amortecidas	61
4.2 - Método de Levy.....	63
4.3 - Método de Sanathanan e Koerner.....	76
4.4 - Método iterativo não linear	78
4.5 - Aproximação linear dos resíduos.....	82
4.6 - Método não linear modificado	83
5 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	88
5.1 - Rotinas numéricas utilizadas.....	89
5.2 - Fluxogramas dos métodos implementados.....	90
6 - ENSAIO EXPERIMENTAL, RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	100
6.1 - Ensaio experimental	100
6.2 - Resultados e discussões.....	102
6.2.1 - Análise da inclusão do resíduo de rigidez nos métodos de Levy e Sanathanan e Koerner.....	103

6.2.2 - Análise comparativa dos cinco métodos implementados	113
7 - CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS.....	135
7.1 - Conclusões.....	135
7.2 - Sugestões para trabalhos futuros.....	137
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	138
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR.....	141

1. Introdução

Os problemas relativos às vibrações estruturais representam, na atualidade, os principais fatores de risco e de limitação de projeto para uma ampla gama de aplicações de engenharia. A integridade estrutural é de fundamental importância para quase todas as estruturas, e por isso um completo e preciso conhecimento de suas características dinâmicas é essencial. Existe também grande número de componentes mecânicos em que a vibração está diretamente relacionada com sua baixa performance, causando mau funcionamento ou ainda desconforto, incluindo nesta categoria os ruídos. Em todos estes casos, é importante que os níveis de vibração que serão encontrados em serviço ou operação possam ser antecipados e mantidos sob um controle satisfatório (Ewins, 1984). Como consequência, a análise modal experimental é atualmente uma parte integrante de qualquer levantamento detalhado das características dinâmicas de uma estrutura (Liang et al, 1992).

A Análise Modal Experimental e os métodos de identificação correlatos, tanto do domínio do tempo como no da frequência, têm se desenvolvido rapidamente nestes últimos anos. Tem sido utilizada com sucesso para a validação de modelos teóricos assim como para avaliação de alguns parâmetros característicos de fenômenos de modelagem difícil, como por exemplo, os relativos ao amortecimento de estruturas. Este crescimento do número de trabalhos na área se deve ao desenvolvimento de equipamentos para a análise rápida de sinais. Deve-se destacar aqui alguns trabalhos importantes para início desta etapa: (Brown et al, 1979) e (Ewins, 1984).

A análise das propriedades dinâmicas de uma dada estrutura pode ser realizada através de dois procedimentos. O primeiro, que pode ser denominado Análise Modal Teórica, parte inicialmente de um modelo matemático, usando-se em geral uma técnica de discretização. O método dos elementos finitos, entre outros, é muito usado. Como resultado de qualquer processo de discretização são obtidos os parâmetros nas coordenadas identificadas como físicas ou espaciais (Clough e Penzien, 1975), dados pelas matrizes de massa, de rigidez e quando possível pela matriz de amortecimento. Estas matrizes são posteriormente usadas na formulação de um problema de autovalores e autovetores, cuja solução corresponde às frequências naturais e aos modos de vibrar. Uma dificuldade neste procedimento é a não obtenção dos parâmetros relativos ao amortecimento estrutural com a precisão necessária.

O segundo procedimento, que está relacionado ao escopo deste trabalho, executa o caminho inverso. Através de dados experimentais, são determinados os parâmetros modais do sistema físico e a partir destes são

determinadas suas características espaciais. Assim, através de alguma técnica de ajustagem de curvas aos dados experimentais pode-se extrair os parâmetros modais. Este procedimento pode fornecer boas estimativas para os amortecimentos estruturais, mesmo para valores altos, assim como para os parâmetros de sistemas com modos de vibrar fortemente acoplados (Minas e Inman, 1991).

1.1 - Aspectos gerais dos métodos da análise modal

Em uma das suas possíveis classificações, os métodos de identificação podem ser divididos em duas categorias: métodos no domínio da frequência e métodos no domínio do tempo.

Os métodos no domínio do tempo são baseados na extração dos parâmetros modais a partir da resposta do sistema ao impulso, que pode ser obtida diretamente através da excitação do sistema com um martelo de impacto ou indiretamente, através da transformada inversa de Fourier dos dados da resposta em frequência do sistema.

Embora os métodos de identificação no domínio do tempo não sejam explorados neste trabalho, é importante que sejam citados alguns dos métodos representativos nesta área, como o método da exponencial complexa (Brown et al, 1979), que é baseado no método de aproximações exponenciais de Prony, e requer a solução de um sistema linear do tipo Toeplitz e de um sistema linear de Van der Monde para a determinação dos parâmetros modais, e o método de Ibrahim (Ibrahim e Mikulcik, 1973), (Ibrahim, 1986) e (Ibrahim, 1987) que foi

inicialmente proposto utilizando a resposta livre do sistema descrita utilizando-se a formulação de estado.

A decisão entre trabalhar no domínio do tempo ou no da frequência envolve muitos fatores. Os métodos de identificação no domínio da frequência, porém, possuem algumas vantagens que não são encontradas nos métodos baseados no domínio do tempo, conforme a seguir (Pintelon et al, 1994):

- fácil redução de ruído: frequências não excitadas (ruído) são eliminadas (Schoukens et al, 1994).
- compactação de dados: Um grande número de medições no tempo são substituídas por um pequeno número de linhas espectrais (Schoukens et al, 1994).
- Quando utilizada a transformada discreta de Fourier para calcular o espectro, o ruído no domínio da frequência converge (com o número de medidas no tempo tendendo ao infinito) a uma distribuição normal (Bendat e Piersol, 1980).
- Não é necessária a determinação do estado inicial do sistema (Schoukens et al, 1994).
- Validação do modelo: a utilização de excitações periódicas permite uma excelente estimativa da função resposta em frequência (Guillaume et al, 1992).
- É muito fácil de se combinar dados obtidos em experimentos diferentes (Schoukens et al, 1994).

Existem várias técnicas de ajustagem de curvas no domínio da frequência. A escolha da técnica adequada depende, entre outros fatores, do

número de frequências naturais na faixa de frequência escolhida e conseqüentemente da ordem do modelo de ajuste, da capacidade computacional requerida e das formas de se definir a função erro a ser minimizada.

Estas técnicas podem ser classificadas em dois grandes grupos, dependendo da forma da função resposta em frequência (a partir deste momento denominada FRF) utilizada. Um primeiro usa a FRF na forma de um quociente de polinômios e um outro a FRF se apresenta na forma de frações parciais.

Para o primeiro grupo os coeficientes dos polinômios da função de transferência são determinados diretamente a partir de um sistema de equações derivadas da minimização de uma função erro. Este sistema de equações é em geral não linear e de difícil solução. Entretanto pode-se produzir um sistema linear de equações quando se admite uma ponderação para os erros.

Uma das primeiras aproximações foi feita por Levy (1959) que propôs a ponderação para o erro diretamente proporcional ao denominador da função de transferência. Devido a este tipo de ponderação, o método de Levy pode conduzir a resultados insatisfatórios e a problemas de instabilidade numérica, principalmente em ajustes em uma banda larga de frequências.

Com o objetivo de melhorar a sensibilidade do método de Levy aos erros em baixas frequências, Sanathanan e Koerner (1963) propuseram um método iterativo em que o erro é dividido por uma função ponderadora baseada no denominador da FRF identificado no passo anterior. Embora a sensibilidade do método tenha sido aumentada nas baixas frequências, os problemas de instabilidade numérica ainda permaneceram. Várias modificações

ou extensões do método de Sanathanan e Koerner tem sido publicados, entre os quais pode-se citar os trabalhos de Payne (1970), Mannetje (1973) e Stahl (1984).

Após a obtenção dos coeficientes dos polinômios, é feita a determinação dos coeficientes das frações parciais que fornecem os parâmetros modais.

Por outro lado, para o segundo grupo, com as FRF na forma de frações parciais, os parâmetros modais podem ser determinados diretamente. Entretanto, neste caso o conjunto de equações resultantes da minimização da função erro é sempre não linear, levando a um processo iterativo quando se deseja uma ajustagem com boa qualidade. Assim a qualidade das soluções obtidas depende das estimativas iniciais utilizadas (Busturia e Gimenez, 1985).

Pode-se realizar de forma alternativa, neste segundo grupo, uma simplificação assumindo-se que os parâmetros globais do sistema (frequências naturais e fatores de amortecimento), que são os parâmetros presentes na parte não linear da FRF, são conhecidos. Neste caso estes parâmetros devem ser determinados por algum outro método, restando então somente os parâmetros locais a serem determinados, o que conduz a um sistema linear (Ebersbach e Irretier, 1989). Este método é conhecido como Aproximação Linear dos Resíduos (LAR).

Com o objetivo de melhorar as condições de convergência do método iterativo não linear, Jeong, Okuma e Nagamatsu (1989) propuseram uma modificação, que consiste em se realizar o método iterativo não linear apenas

para identificar os parâmetros globais do sistema. Este método é baseado na introdução de uma nova FRF função somente dos parâmetros não lineares.

Ewins e Gleeson (1982) descreveram um método que consiste em se considerar inicialmente o sistema como sendo sem amortecimento, para identificação das frequências naturais e das constantes modais, sendo que em uma segunda etapa é feita a determinação dos fatores de amortecimento. Este método possui excelente estabilidade numérica e requer pouco esforço computacional, constituindo-se em uma boa alternativa para sistemas que se enquadrem em suas hipóteses de simplificação. Este método possui grande aplicação, devido a uma grande parte das estruturas mecânicas possuir comportamento caracterizado por baixo amortecimento (Braun, 1986).

1.2 - Objetivos deste trabalho

O objetivo deste trabalho é comparar a performance de alguns métodos de identificação dos parâmetros modais de uma estrutura, no domínio da frequência. Para esta comparação, estes métodos foram implementados utilizando-se a linguagem de programação FORTRAN e aplicados a dados experimentais obtidos através do ensaio de uma placa engastada. As FRF foram tomadas tanto na sua forma de frações parciais como também na forma de quociente de polinômios. As informações necessárias foram obtidas de conjuntos de dados de resposta em frequência, correspondentes à excitação em um único ponto e aos deslocamentos nos diversos pontos.

Também é feita, neste trabalho, uma discussão sobre a escolha do grau dos polinômios a serem ajustados no método de Levy e as relações dos coeficientes dos polinômios quando são incluídos os resíduos de massa e de rigidez no processo de ajustagem.

1.3 - Apresentação dos Capítulos

Os trabalhos realizados para atingir o objetivo proposto estão apresentados em capítulos conforme descrição a seguir.

O capítulo 2 trata da resposta livre de sistemas discretizados, apresentando o conceito dos modos de vibrar e do método da superposição modal. São apresentados tanto os sistemas sem amortecimento quanto os sistemas com amortecimento, do tipo proporcional ou não. São apresentadas as condições de ortogonalidade que possibilitam a transformação de coordenadas que desacopla o sistema de equações diferenciais resultante da modelagem do sistema.

No capítulo 3 é realizado o estudo da resposta de sistemas discretizados a excitações do tipo harmônica e apresentadas as expressões da FRF. Como no capítulo anterior, são estudados também os casos de sistemas sem e com amortecimento. No final deste capítulo é feita uma discussão sobre a representação gráfica das FRF, que é muito útil para a análise e validação dos dados amostrados e ajustados.

O capítulo 4 é dedicado à apresentação e dedução de alguns métodos de identificação no domínio da frequência e, em particular, dos métodos que

foram implementados. No item referente ao método de Levy é apresentado um estudo a respeito da escolha do grau dos polinômios do numerador e do denominador da FRF e seu relacionamento com a inclusão dos fatores residuais, que são inseridos ao modelo para compensar a influência dos modos fora da faixa de frequência amostrada.

O capítulo 5 trata da implementação numérica dos métodos, descrevendo, além de seus fluxogramas, as rotinas numéricas que foram utilizadas para solução dos sistemas lineares e do problema de raízes de polinômios. Foram implementados os métodos de Levy, Sanathanan e Koerner, estruturas levemente amortecidas e o método iterativo não linear.

O capítulo 6 é constituído da investigação experimental realizada e da análise comparativa da aplicação dos métodos implementados aos dados amostrados. Os resultados são apresentados tanto em forma de visualização gráfica, como também na forma de tabelas de erros médios encontrados nos processos de ajustagem.

Finalizando este trabalho o capítulo 7 apresenta conclusões sobre o estudo comparativo realizado e sugestões para trabalhos futuros.

2- Resposta livre de sistemas discretizados

O conhecimento dos fundamentos da análise modal é essencial para o sucesso de sua aplicação. Desta maneira, é apropriado que sejam discutidos vários aspectos da teoria de vibrações mecânicas, aplicada a sistemas lineares discretizados em vários graus de liberdade, que são utilizados em diferentes estágios da análise modal experimental.

Este capítulo apresenta a resposta livre e o capítulo seguinte apresenta a resposta forçada de sistemas lineares discretizados. As propriedades básicas de vibração, que constituem o embasamento da análise modal teórica e experimental, estão contidas nestes estudos.

Antes de se iniciar estas análises teóricas, é conveniente compreender os diferentes estágios da análise de vibrações. A figura 2.1 ilustra as três fases da análise de vibração teórica.

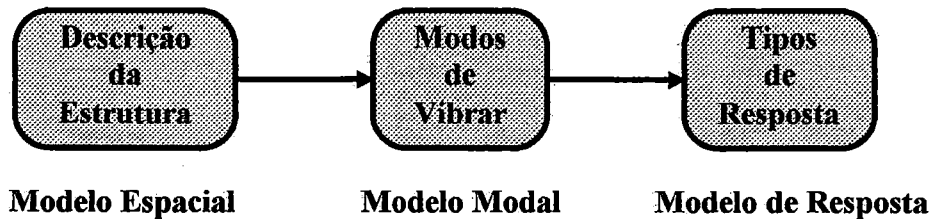


Figura 2.1 - Análise de Vibração Teórica

Geralmente, as análises teóricas iniciam-se com a descrição das características físicas da estrutura, através das propriedades de massa, rigidez e amortecimento. Este modelo é denominado modelo espacial.

A partir deste modelo pode ser realizada a análise modal teórica. Esta análise resulta na descrição do comportamento da estrutura através do modelo modal. Este modelo é definido por um conjunto de frequências naturais, com seus modos de vibrar correspondentes, e pelos fatores de amortecimentos modais. Conceitualmente deve-se observar que esta solução descreve as várias maneiras nas quais uma estrutura é capaz de vibrar naturalmente, ou seja, sem nenhuma excitação externa e que são chamadas de modos normais ou naturais da estrutura.

O terceira é a fase que possui o maior interesse, uma vez que representa como a estrutura irá vibrar em função de uma dada excitação, com que amplitudes e frequências. Obviamente, a resposta do sistema irá depender da intensidade e da natureza da excitação a que estará submetido. Neste

trabalho, por conveniência dos métodos que serão utilizados, a excitação será padronizada como sendo senoidal, gerando, então, o modelo de resposta.

É importante a compreensão da interdependência destes três modelos, uma vez que é nesta característica que a análise modal é fundamentada.

A análise modal experimental percorre o caminho inverso, ou seja, a partir das propriedades de resposta pode-se determinar as propriedades modais e finalmente as propriedades espaciais. Esta abordagem pode ser melhor compreendida através da figura 2.2.

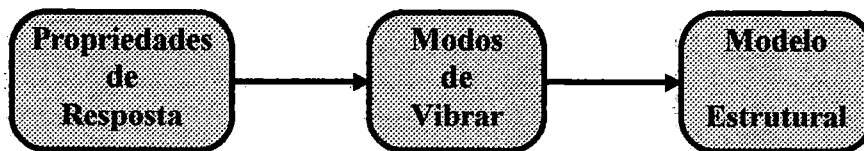


Figura 2.2 - Análise de Vibração Experimental

2.1 - Modelo Espacial

A análise de sistemas dinâmicos possui grande complexidade. Isto se deve às forças de inércia, resultantes dos deslocamentos estruturais, os quais por sua vez são influenciados pela magnitude das forças de inércia. Este ciclo fechado de causa e efeito pode ser resolvido diretamente somente formulando o problema em termos de equações diferenciais. A técnica de modelagem de sistemas com propriedades espaciais distribuídas continuamente resulta em equações diferenciais parciais, enquanto a técnica de modelagem por

discretização resulta em equações diferenciais ordinárias. No presente trabalho, conforme já mencionado anteriormente, serão considerados modelos discretizados cuja resposta livre será discutida a seguir.

2.1.1 - Condição de equilíbrio dinâmico

A equação de movimento de um sistema pode ser formulada por meio do equilíbrio das forças efetivas associadas a cada um dos graus de liberdade do sistema discretizado.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 f_{I1}(t) & + & f_{D1}(t) & + & f_{S1}(t) & + & \bar{f}_1(t) & = & 0 \\
 f_{I2}(t) & + & f_{D2}(t) & + & f_{S2}(t) & + & \bar{f}_2(t) & = & 0 \\
 f_{I3}(t) & + & f_{D3}(t) & + & f_{S3}(t) & + & \bar{f}_3(t) & = & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 f_{IN}(t) & + & f_{DN}(t) & + & f_{SN}(t) & + & \bar{f}_N(t) & = & 0
 \end{array} \tag{2-1}$$

Ou de maneira vetorial, suprimindo a indicação da variável tempo:

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S + \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \tag{2-2}$$

onde: \mathbf{f}_I é o vetor das forças de inércia $N \times 1$,

\mathbf{f}_D é o vetor das forças de amortecimento $N \times 1$,

f_s é o vetor das forças elásticas $N \times 1$,

\bar{f} é o vetor das forças externas $N \times 1$.

Cada força interna é expressa mais convenientemente por um conjunto apropriado de coeficientes de influência. Para as forças elásticas tem-se:

$$f_{s_i} = -[k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + k_{i3}x_3 + \dots + k_{iN}x_N] \quad (2-3)$$

sendo esta força elástica correspondente ao grau de liberdade da coordenada x_i .

Na forma geral tem-se:

$$f_{s_i} = -[k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + k_{i3}x_3 + \dots + k_{iN}x_N] \quad (2-4)$$

Os coeficientes k_{ij} são chamados coeficientes de influência de rigidez e são definidos como sendo a força correspondente à coordenada i devido a um deslocamento unitário na coordenada j e nulo nas demais.

Na forma matricial tem-se:

$$f_s = -Kx \quad (2-5)$$

onde

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & k_{N3} & \dots & k_{Ni} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

é a matriz dos coeficientes de influência de rigidez, chamada de matriz de rigidez e x é o vetor dos deslocamentos nas coordenadas físicas.

Da mesma maneira pode-se definir os coeficientes de influência de massa m_{ij} como sendo a força correspondente à coordenada i devido a uma aceleração unitária na coordenada j e nula nas demais.

Na forma matricial tem-se:

$$f_i = -M\ddot{x} \quad (2-7)$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1i} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2i} & \dots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & m_{N3} & \dots & m_{Ni} & \dots & m_{NN} \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

é denominada matriz de massa.

Assumindo o modelo viscoso (Bert, 1973) para o amortecimento pode-se definir os coeficientes de influência de amortecimento c_{ij} como sendo a força correspondente à coordenada i devido a uma velocidade unitária na coordenada j e nula nas demais.

Na forma matricial tem-se:

$$f_D = -C\dot{x} \quad (2-9)$$

onde

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2i} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & c_{N3} & \cdots & c_{Ni} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

é denominada matriz de amortecimento.

Substituindo as equações (2-5), (2-7) e (2-9) na equação (2-2) tem-se a equação matricial de equilíbrio dinâmico da estrutura:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = \bar{f} \quad (2-11)$$

No presente trabalho serão consideradas estruturas sem movimento de corpo rígido. Nestes casos as matrizes M , C e K são simétricas para a maioria das técnicas de obtenção do modelo discreto, como pode ser visto em Meirovich (1980).

2.2 - Frequências naturais e modos de vibrar

Neste item será considerado como determinar os modos de vibrar e as frequências naturais de um sistema linear discretizado em N graus de liberdade. Inicialmente será analisado o caso geral, ou seja, todos os sistemas amortecidos cujos autovetores frequentemente possuem componentes complexas, de maneira que os deslocamentos das diferentes coordenadas não estarão necessariamente em fase ou em oposição de fase. As linhas nodais neste caso não permanecem estacionárias. A seguir este caso geral será particularizado para os casos de sistemas sem amortecimento. As condições de ortogonalidade serão analisadas inicialmente para o caso geral, e posteriormente para os casos de amortecimento proporcional e sem amortecimento.

2.2.1 - -Sistemas amortecidos - caso geral

Em sistemas não conservativos a equação (2-11) para vibração livre com amortecimento viscoso assume a forma

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (2-12)$$

A solução deste sistema pode ser feita de maneira mais conveniente utilizando a formulação por variáveis de estado (Prevosto et al. 1991).

Nesta formulação o sistema de N equações de segunda ordem é transformado em um conjunto de $2N$ equações de primeira ordem.

Desta maneira, definindo-se o vetor de estado $q = q(t)$ por

$$q = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

e utilizando as N equações adicionais

$$M\ddot{x} - M\dot{x} = 0 \quad (2-14)$$

é possível escrever a partir de (2-11) e (2-14)

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

fazendo-se

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} = A \quad (2-16)$$

$$\begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} = B \quad (2-17)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{f} \\ 0 \end{bmatrix} = p \quad (2-18)$$

pode-se escrever

$$A\dot{q} - Bq = p \quad (2-19)$$

que recebe o nome de equação de estado. Para o caso livre reduz-se à

$$A\dot{q} - Bq = 0 \quad (2-20)$$

Este sistema possui solução composta de combinações lineares de funções do tipo

$$q = \psi e^{\lambda t} \quad (2-21)$$

que substituídas em (2-20) resulta :

$$B\psi = \lambda A\psi \quad (2-22)$$

definindo,

$$E = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

onde

I é a matriz identidade $N \times N$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ M^{-1} & -M^{-1}CM^{-1} \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

pode-se escrever o sistema na forma padrão

$$E\psi = \lambda \cdot \psi \quad (2-25)$$

Para N graus de liberdade, a matriz E é de ordem $2N \times 2N$, e existem $2N$ autovalores os quais aparecem usualmente em pares de complexos conjugados. Cada autovalor complexo está associado a um autovetor complexo, sendo que os $2N$ autovalores complexos também aparecem em pares complexos conjugados. É importante verificar que por se tratar de um sistema linear homogêneo sua solução não é única, ou seja, se o vetor ψ é solução do sistema, o vetor $\alpha\psi$ também será solução.

Condições de ortogonalidade

Os modos de vibrar da vibração livre possuem propriedades especiais que são muito utilizadas na análise de dinâmica estrutural. Estas propriedades

são chamadas de condições de ortogonalidade e serão determinadas a seguir. Para isto será tomada a equação (2-22) para o modo r , pré-multiplicada pelo autovetor do modo s transposto. Desta maneira tem-se

$$\boldsymbol{\psi}_s^T \mathbf{B} \boldsymbol{\psi}_r = \lambda_r \boldsymbol{\psi}_s^T \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}_r \quad (2-26)$$

de maneira análoga é possível escrever

$$\boldsymbol{\psi}_r^T \mathbf{B} \boldsymbol{\psi}_s = \lambda_s \boldsymbol{\psi}_r^T \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}_s \quad (2-27)$$

Lembrando-se que as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são por hipótese simétricas, as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} serão também simétricas, portanto a transposta da equação (2-27) é dada por

$$\boldsymbol{\psi}_s^T \mathbf{B} \boldsymbol{\psi}_r = \lambda_s \boldsymbol{\psi}_s^T \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}_r \quad (2-28)$$

subtraindo-se da equação (2-26) a equação (2-28) obtém-se

$$(\lambda_r - \lambda_s) \boldsymbol{\psi}_s^T \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}_r = 0 \quad (2-29)$$

Portanto

$$\boldsymbol{\psi}_s^T \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}_r = 0 \quad \text{para } \lambda_r \neq \lambda_s \quad (2-30)$$

e usando a equação (2-30) na equação (2-28) conclui-se que

$$\psi_s^T B \psi_r = 0 \quad \text{para } \lambda_r \neq \lambda_s \quad (2-31)$$

Para o caso de $r = s$, tem-se

$$\psi_r^T A \psi_r = a_r \quad (2-32)$$

$$\psi_r^T B \psi_r = b_r \quad (2-33)$$

e utilizando-se a matriz modal complexa do sistema $\Psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_{2N}]$,

obtem-se

$$\Psi^T A \Psi = \hat{A} \quad (2-34)$$

$$\Psi^T B \Psi = \hat{B} \quad (2-35)$$

onde \hat{A} e \hat{B} são matrizes diagonais.

Conforme visto anteriormente, a solução do sistema não é única. Pode-se normalizar os modos complexos conforme a seguir

$$\hat{\psi}_r = a_r^{-1/2} \psi_r \quad (2-36)$$

ou seja

$$\hat{\psi}_r^T A \hat{\psi}_r = 1 \quad (2-37)$$

e em consequência

$$\hat{\psi}_r^T B \hat{\psi}_r = \lambda_r \quad (2-38)$$

Assim para os modos complexos normalizados desta forma obtém-se

$$\hat{\Psi}^T A \hat{\Psi} = I \quad (2-39)$$

$$\hat{\Psi}^T B \hat{\Psi} = \Lambda \quad (2-40)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{2N} \end{bmatrix} \quad (2-41)$$

Uma forma muito importante de se escrever os autovalores λ_r é em função dos parâmetros modais do sistema

$$\lambda_r = -\delta_r + i\omega_{dr} \quad \text{e} \quad \lambda_r^* = -\delta_r - i\omega_{dr} \quad (2-42)$$

onde

$$\delta_r = \xi_r \omega_r \quad \text{e} \quad \omega_{dr} = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad (2-43)$$

sendo definidos:

ξ_r o fator de amortecimento modal

ω_r a frequência natural

ω_{dr} a frequência natural amortecida

Devido estar-se utilizando a formulação de estado tem-se a relação:

$$\Psi_r = \begin{bmatrix} \phi_r \\ \lambda_r \phi_r \end{bmatrix} \quad (2-44)$$

onde ϕ_r é o modo r de vibrar do problema $N \times N$.

A partir das definições apresentadas até o momento pode-se rearranjar as matrizes A e Ψ em uma forma padrão frequentemente utilizada.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda^* \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

com

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

$$\lambda^* = \begin{bmatrix} \lambda_1^* & & & \\ & \lambda_2^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N^* \end{bmatrix} \quad (2-47)$$

e

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi^* \\ \Phi\lambda & \Phi^*\lambda^* \end{bmatrix} \quad (2-48)$$

com

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_N] \quad (2-49)$$

$$\Phi^* = [\phi_1^* \quad \phi_2^* \quad \dots \quad \phi_N^*] \quad (2-50)$$

As condições de ortogonalidade podem ser utilizadas para transformar o sistema de equações dado por (2-20), que é um sistema acoplado, em um sistema de equações desacoplado, através de um processo denominado de desacoplamento modal (Foss, 1958).

Para realizar-se o desacoplamento modal, será utilizada neste caso a seguinte transformação de coordenadas

$$q = \Psi y \quad (2-51)$$

Onde as coordenadas y são chamadas de coordenadas normais do sistema.

A equação (2-51) aplicada à equação (2-20) resulta em

$$A\Psi\dot{y} - B\Psi y = 0 \quad (2-52)$$

pré-multiplicando a equação (2-52) por Ψ^T obtém-se

$$\hat{A}\dot{y} - \hat{B}y = 0 \quad (2-53)$$

que é um sistema desacoplado. Para um modo de vibrar r tem-se

$$a_r\dot{y}_r - b_r y_r = 0 \quad (2-54)$$

Da normalização dos modos complexos de vibrar é possível tirar a seguinte relação

$$\lambda_r = \frac{b_r}{a_r} \quad (2-55)$$

que substituída na equação (2-54) resulta

$$\dot{y}_r - \lambda_r y_r = 0 \quad (2-56)$$

Aplicando-se a esta equação a transformada de Laplace para condições iniciais não nulas, obtém-se

$$y_r(s) = y_r(0) \frac{1}{s - \lambda_r} \quad (2-57)$$

onde

$$y_r(0) = \frac{\psi_r^T A q(0)}{a_r} \quad (2-58)$$

e

$$q(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix} \quad (2-59)$$

Fazendo-se a transformada inversa de Laplace para obtenção da solução no tempo, tem-se

$$y_r(t) = y_r(0) e^{\lambda_r t} \quad (2-60)$$

Utilizando-se o método da superposição modal, a solução geral do problema livre fica

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^{2N} (y_r(0)e^{\lambda_r t}) \boldsymbol{\psi}_r \quad (2-61)$$

ou

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^N (y_r(0)e^{\lambda_r t} \boldsymbol{\psi}_r + y_r^*(0)e^{\lambda_r^* t} \boldsymbol{\psi}_r^T) \quad (2-62)$$

Das equações (2-16) e (2-30) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_s^T & \lambda_s \boldsymbol{\phi}_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_r \\ \lambda_r \boldsymbol{\phi}_r \end{bmatrix} = 0 \quad (2-63)$$

que resulta em

$$\boldsymbol{\phi}_s^T \mathbf{C} \boldsymbol{\phi}_r + (\lambda_s + \lambda_r) \boldsymbol{\phi}_s^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_r = 0 \quad (2-64)$$

Das equações (2-17) e (2-31) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_s^T & \lambda_s \boldsymbol{\phi}_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_r \\ \lambda_r \boldsymbol{\phi}_r \end{bmatrix} = 0 \quad (2-65)$$

que resulta em

$$-\phi_s^T \mathbf{K} \phi_r + \lambda_s \lambda_r \phi_s^T \mathbf{M} \phi_r = 0 \quad (2-66)$$

ou

$$\phi_s^T \mathbf{K} \phi_r = \lambda_s \lambda_r \phi_s^T \mathbf{M} \phi_r \quad (2-67)$$

As expressões (2-64) e (2-67) são as relações de ortogonalidade, em relação às matrizes de massa, rigidez e amortecimento, para o sistema com amortecimento viscoso qualquer.

Para modos que formam um par complexo conjugado tem-se os autovalores

$$\lambda_r = \omega_r \left(-\xi_r + i\sqrt{1 - \xi_r^2} \right) = -\omega_r \xi_r + i\omega_{dr} \quad (2-68)$$

$$\lambda_s = \lambda_r^* = \omega_r \left(-\xi_r - i\sqrt{1 - \xi_r^2} \right) = -\omega_r \xi_r - i\omega_{dr} \quad (2-69)$$

para $\xi_r < 1$

e os autovetores

$$\phi_s = \phi_r^* \quad (2-70)$$

De (2-64) tem-se

$$2\xi_r\omega_r = \frac{\phi_r^* C \phi_r}{\phi_r^* M \phi_r} = \frac{c_r}{m_r} \quad (2-71)$$

De (2-66) tem-se

$$\omega_r^2 = \frac{\phi_r^* K \phi_r}{\phi_r^* M \phi_r} = \frac{k_r}{m_r} \quad (2-72)$$

Desta maneira m_r , k_r e c_r podem ser chamados respectivamente de massa, rigidez e amortecimento modais, cujo significado, porém, não deve ser confundido com o significado destas constantes modais para os casos de sistemas com amortecimento proporcional ou de sistemas sem amortecimento, que serão estudados adiante.

2.2.2 - Sistemas amortecidos - amortecimento proporcional

Condições de ortogonalidade

Será estudado agora o caso em que a distribuição do amortecimento viscoso é do tipo proporcional (Caughey e O'Kelly, 1965). Neste tipo de distribuição a matriz de amortecimento assume a seguinte forma geral

$$C = M \sum_b a_b [M^{-1}K]^b \quad (2-73)$$

onde

a = constante arbitrária e

b = número inteiro

Um caso particular da distribuição de amortecimento proporcional é o chamado amortecimento de Rayleigh (1945), onde a matriz C é obtida tomando-se apenas os termos correspondentes a $b = 0$ e $b = 1$ na equação (2-73).

$$C = a_0 M + a_1 K \quad (2-74)$$

e este será o primeiro caso analisado. Substituindo (2-74) em (2-64) tem-se

$$\phi_s^T [a_0 M + a_1 K] \phi_r + (\lambda_s + \lambda_r) \phi_s^T M \phi_r = 0 \quad (2-75)$$

e então

$$a_1 \phi_s^T K \phi_r + (\lambda_s + \lambda_r + a_0) \phi_s^T M \phi_r = 0 \quad (2-76)$$

que substituindo-se (2-66) resulta em

$$(\lambda_s + \lambda_r + \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_s \lambda_r) \phi_s^T M \phi_r = 0 \quad (2-77)$$

e portanto

$$\phi_s^T M \phi_r = 0 \quad (2-78)$$

em consequência, de (2-64) tem-se

$$\phi_s^T C \phi_r = 0 \quad (2-79)$$

e de (2-66) tem-se

$$\phi_s^T K \phi_r = 0 \quad (2-80)$$

A seguir será estudado o caso para $b = 2$ na equação (2-73) que resulta em

$$C = a_2 K M^{-1} K \quad (2-81)$$

que substituída em (2-64) resulta em

$$a_2 \phi_s^T [K M^{-1} K] \phi_r + (\lambda_s + \lambda_r) \phi_s^T M \phi_r = 0 \quad (2-82)$$

pré-multiplicando (2-66) por $\phi_s^T \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \phi_s^{T^{-1}}$ obtém-se

$$\phi_s^T [\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}] \phi_r = \lambda_s \lambda_r \phi_s^T \mathbf{K} \phi_r \quad (2-83)$$

e substituindo (2-83) em (2-82), vem

$$a_2 \lambda_s \lambda_r \phi_s^T \mathbf{K} \phi_r + (\lambda_s + \lambda_r) \phi_s^T \mathbf{M} \phi_r = 0 \quad (2-84)$$

e de (2-67) obtém-se

$$(a_2 \lambda_s^2 \lambda_r^2 + \lambda_s + \lambda_r) \phi_s^T \mathbf{M} \phi_r = 0 \quad (2-85)$$

e desta maneira, são válidas as equações (2-78), (2-79) e (2-80).

Pode-se continuar este processo e mostrar que para qualquer b inteiro na equação (2-73) valem as condições de ortogonalidade dadas por (2-78), (2-79) e (2-80).

Para $r = s$ são definidos os coeficientes de massa, rigidez e amortecimento generalizados, ou massa modal e rigidez modal que são iguais respectivamente a:

$$\phi_r^T \mathbf{M} \phi_r = m_r \quad (2-86)$$

$$\phi_r^T \mathbf{K} \phi_r = k_r \quad (2-87)$$

$$\phi_r^T C \phi_r = c_r \quad (2-88)$$

De forma matricial tem-se

$$\Phi^T M \Phi = \hat{M} \quad (2-89)$$

$$\Phi^T K \Phi = \hat{K} \quad (2-90)$$

$$\Phi^T C \Phi = \hat{C} \quad (2-91)$$

onde

\hat{M} = matriz de massa modal $N \times N$,

\hat{K} = matriz de rigidez modal $N \times N$ e

\hat{C} = matriz de amortecimento modal $N \times N$

que são matrizes diagonais devido às propriedades de ortogonalidade.

A matriz Φ por ser composta pelos modos de vibrar, que representam as amplitudes relativas do movimento das N coordenadas, não é única. A normalização dos modos de vibrar pode ser feita através dos coeficientes de massa modal da estrutura, conforme a relação:

$$\hat{\phi}_r = m_r^{-1/2} \phi_r \quad (2-92)$$

ou seja

$$\hat{\phi}_r^T M \hat{\phi}_r = 1 \quad (2-93)$$

onde $\hat{\phi}_r$ = modo de vibrar r normalizado em relação à sua massa modal .

Para todos os modos normalizados tem-se

$$\hat{\Phi}^T M \hat{\Phi} = I \quad (2-94)$$

$$\hat{\Phi}^T K \hat{\Phi} = \Lambda \quad (2-95)$$

onde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \omega_3^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (2-96)$$

$\hat{\Phi}$ = matriz modal constituída dos N modos de vibrar normalizados.

O sistema de equações diferenciais (2-12) de maneira geral é acoplado, pois as matrizes M , C e K geralmente não são diagonais. Devido às condições de ortogonalidade pode-se fazer uma transformação de coordenadas que desacopla o sistema, que é dada por

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{y} \quad (2-97)$$

onde

$\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$: vetor dos deslocamentos nas coordenadas normais ou modais do sistema, $N \times 1$.

O sistema de equações resulta em

$$\hat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{K}} \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (2-98)$$

sendo o sistema novamente desacoplado.

Cada equação pode ser resolvida como se fosse de um sistema de um grau de liberdade. Desta maneira tem-se

$$m_r \ddot{y}_r + c_r \dot{y}_r + k_r y_r = 0 \quad (2-99)$$

e pode-se definir o fator de amortecimento modal ξ_r como

$$\xi_r = \frac{c_r}{2\sqrt{m_r k_r}} \quad (2-100)$$

Então a equação (2-99) assume a forma

$$\ddot{y}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{y}_r + \omega_r^2 y_r = 0 \quad (2-101)$$

cuja solução é

$$y_r(t) = C_r e^{-\xi_r \omega_r t} \text{sen}(\omega_{dr} t + \theta_r) \quad (2-102)$$

onde C_r e θ_r são constantes que dependem das condições iniciais.

2.2.3 - Sistemas sem amortecimento

condições de ortogonalidade

Da equação (2-64), é imediato demonstrar que para o caso de $C = 0$ valem as condições de ortogonalidade dadas por (2-78), (2-79) e (2-80).

Neste caso, a solução do sistema será

$$y_r(t) = C_r \text{sen}(\omega_r t + \theta_r) \quad (2-103)$$

onde C_r e θ_r são constantes que dependem das condições iniciais.

Uma análise mais detalhada da equação (2-62) conduz a importantes conclusões sobre os sistemas até aqui descritos, ou seja, amortecimento viscoso geral, amortecimento viscoso proporcional e sem amortecimento.

Sendo todos os autovalores complexos define-se:

$$y_r(0) = \rho_{0r} e^{i\theta_{0r}} \quad (2-104)$$

$$y_r^*(0) = \rho_{0r} e^{-i\theta_{0r}} \quad (2-105)$$

e portanto

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^N \rho_{0r} \left(e^{\lambda_r t + i\theta_{0r}} \phi_r + e^{\lambda_r^* t - i\theta_{0r}} \phi_r^* \right) \quad (2-106)$$

Substituindo (2-66) e (2-67) em (2-106) tem-se

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^N \rho_{0r} e^{-\omega_r \xi_r t} \left(e^{(\omega_{dr} t + \theta_{0r})i} \phi_r + e^{-(\omega_{dr} t + \theta_{0r})i} \phi_r^* \right) \quad (2-107)$$

que também pode ser escrita como:

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^N \rho_{0r} e^{-\omega_r \xi_r t} \left[\left(\cos(\omega_{dr} t + \theta_{0r}) + i \operatorname{sen}(\omega_{dr} t + \theta_{0r}) \right) \phi_r + \left(\cos(\omega_{dr} t + \theta_{0r}) - i \operatorname{sen}(\omega_{dr} t + \theta_{0r}) \right) \phi_r^* \right] \quad (2-108)$$

e obtém-se

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^N \rho_{0r} e^{-\omega_r \xi_r t} \left[(\phi_r + \phi_r^*) \cos(\omega_{dr} t + \theta_{0r}) + i(\phi_r - \phi_r^*) \operatorname{sen}(\omega_{dr} t + \theta_{0r}) \right] \quad (2-109)$$

definindo

$$\phi_r = \begin{bmatrix} g_{1r} + ih_{1r} \\ g_{2r} + ih_{2r} \\ g_{3r} + ih_{3r} \\ \vdots \\ g_{Nr} + ih_{Nr} \end{bmatrix} e \quad (2-110)$$

$$\phi_r^* = \begin{bmatrix} g_{1r} - ih_{1r} \\ g_{2r} - ih_{2r} \\ g_{3r} - ih_{3r} \\ \vdots \\ g_{Nr} - ih_{Nr} \end{bmatrix} \quad (2-111)$$

Substituindo em (2-109) vem

$$x = \sum_{r=1}^N 2\rho_{0r} e^{-\omega_r \xi_r t} [g_r \cos(\omega_{dr} t + \theta_{0r}) + h_r \text{sen}(\omega_{dr} t + \theta_{0r})] \quad (2-112)$$

$$x = \sum_{r=1}^N 2\rho_{0r} e^{-\omega_r \xi_r t} \begin{bmatrix} \sqrt{g_{1r}^2 + h_{1r}^2} \text{sen}(\omega_{dr} t + \theta_{0r} + \alpha_{1r}) \\ \sqrt{g_{2r}^2 + h_{2r}^2} \text{sen}(\omega_{dr} t + \theta_{0r} + \alpha_{2r}) \\ \vdots \\ \sqrt{g_{Nr}^2 + h_{Nr}^2} \text{sen}(\omega_{dr} t + \theta_{0r} + \alpha_{Nr}) \end{bmatrix} \quad (2-113)$$

onde

$$\alpha_{jr} = \tan^{-1} \left(\frac{g_{jr}}{h_{jr}} \right) \quad (2-114)$$

Desta maneira se :

$$1) \alpha_{1r} = \alpha_{2r} = \dots = \alpha_{jr} = \dots = \alpha_{Nr} \quad \text{onde } r = 1 \dots N$$

então o amortecimento é dito proporcional, e os modos de vibrar serão iguais aos do sistema conservativo correspondente.

$$2) \alpha_{1r} = \alpha_{2r} = \dots = \alpha_{jr} = \dots = \alpha_{Nr} = 0 \text{ ou } \pi \quad \text{onde } r = 1 \dots N$$

então o amortecimento é nulo.

3- Resposta forçada de sistemas discretizados

Conforme já mencionado no capítulo 2 deste trabalho, por conveniência dos métodos que serão utilizados, a excitação será padronizada como sendo senoidal, gerando, então, o modelo de resposta. Em função disto, neste capítulo será discutida a resposta de um sistema linear à excitação harmônica. As respostas forçadas, para sistemas amortecidos e não amortecidos, serão determinadas através do desacoplamento modal. Para os sistemas amortecidos serão analisados os casos de amortecimento viscoso com distribuição do tipo proporcional e distribuição do tipo não proporcional.

3.1 - Resposta Harmônica de sistemas não amortecidos

Sendo o vetor de excitação de um sistema linear definido como :

$$\bar{f} = f e^{i\omega t} \quad (3-1)$$

onde

f = vetor das forças aplicadas, $N \times 1$ e

ω = frequência de excitação.

e com $C = 0$, a equação (2-11) resulta em :

$$M\ddot{x} + Kx = f e^{i\omega t} \quad (3-2)$$

Utilizando na equação (3-2), a transformação de coordenadas definida por (2-97) e pré-multiplicando pela matriz modal transposta obtém-se

$$\Phi^T M \Phi \ddot{y} + \Phi^T K \Phi y = \Phi^T f e^{i\omega t} \quad (3-3)$$

que devido às propriedades de ortogonalidade pode ser escrita como

$$\hat{M} \ddot{y} + \hat{K} y = \Phi^T f e^{i\omega t} \quad (3-4)$$

e desta maneira obtém-se um sistema desacoplado de N equações nas coordenadas normais.

Para o modo de vibrar r pode-se escrever

$$m_r \ddot{y}_r + k_r y_r = \phi_r^T f e^{i\omega t} \quad (3-5)$$

que dividida por m_r resulta em

$$\ddot{y}_r + \omega_r^2 y_r = \frac{I}{m_r} \phi_r^T f e^{i\omega t} \quad (3-6)$$

Aplicando a transformada de Laplace aos dois lados da equação (3-6) e fazendo condições iniciais nulas, tem-se

$$Y_r(s^2 + \omega_r^2) = \phi_r^T f \frac{I}{m_r(s - i\omega)} \quad (3-7)$$

ou ainda

$$Y_r = \phi_r^T f \frac{I}{m_r(s - i\omega)(s^2 + \omega_r^2)} \quad (3-8)$$

Através da transformada inversa de Laplace da equação (3-8), obtém-se a resposta de regime permanente para o modo r , nas coordenadas normais, que é dada por

$$y_r = \phi_r^T f \frac{I}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \quad (3-9)$$

para $\omega \neq \omega_r$. A solução nas coordenadas físicas pode ser obtida por meio da superposição modal, ou seja

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^N \phi_r y_r \quad (3-10)$$

De (3-9) e (3-10) obtém-se

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^N \phi_r \phi_r^T \mathbf{f} \frac{1}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \quad (3-11)$$

A partir da resposta no tempo pode-se definir a matriz de receptância, que constitui o modelo de resposta do sistema, a partir de

$$\mathbf{x} = \alpha(\omega) \bar{\mathbf{f}} \quad (3-12)$$

onde

$$\alpha(\omega) = \sum_{r=1}^N \phi_r \phi_r^T \frac{1}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2)} \quad (3-13)$$

Cada elemento desta matriz é definido por

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{x_j}{f_k}(\omega) \quad (3-14)$$

onde

x_j = deslocamento da coordenada j

f_k = força isolada aplicada na coordenada k .

Portanto, a partir de (3-13) tem-se que

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{rj}\phi_{rk}}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2)} \quad (3-15)$$

onde

ϕ_{rj} = j -ésimo elemento do modo de vibrar r

ϕ_{rk} = k -ésimo elemento do modo de vibrar r .

Em sistemas não amortecidos a função receptância é real e, desta maneira, o ângulo de fase entre o deslocamento da estrutura na coordenada j e a força aplicada em k é 0 ou π .

A equação (3-15) pode ser escrita em função da constante modal, que é definida por

$${}_r A_{jk} = \frac{\phi_{rj}\phi_{rk}}{m_r} \quad (3-16)$$

Desta maneira

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r A_{jk}}{(\omega_r^2 - \omega^2)} \quad (3-17)$$

Os métodos de identificação no domínio do tempo e da frequência, em geral, fornecem os valores das constantes modais para posterior identificação dos modos de vibrar da estrutura. Além da função receptância, que é definida utilizando como variável de saída do sistema o deslocamento, também é frequente a utilização de outras duas funções: a mobilidade $\beta_{jk}(\omega)$, cuja variável de saída do sistema é a velocidade, e a inertância $\gamma_{jk}(\omega)$, cuja variável de saída do sistema é a aceleração. Desta maneira tem-se

$$\beta_{jk}(\omega) = i\omega \alpha_{jk}(\omega) \quad (3-18)$$

$$\gamma_{jk}(\omega) = -\omega^2 \alpha_{jk}(\omega) \quad (3-19)$$

3.2 - Resposta Harmônica de sistemas amortecidos

3.2.1 - Amortecimento viscoso proporcional

Sendo a excitação do sistema definida por (3-1), a equação (2-11) resulta em

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f e^{i\omega t} \quad (3-20)$$

Fazendo-se o desacoplamento modal, devido às condições de ortogonalidade, obtém-se

$$\hat{M}\ddot{y} + \hat{C}\dot{y} + \hat{K}y = \Phi^T f e^{i\omega t} \quad (3-21)$$

que para o modo r resulta em

$$\ddot{y}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{y}_r + \omega_r^2 y_r = \frac{1}{m_r} \phi_r^T f e^{i\omega t} \quad (3-22)$$

Na variável de Laplace a equação (3-22) possui a seguinte solução:

$$Y_r = \frac{1}{m_r} \phi_r^T f \frac{1}{(s - i\omega)(s^2 + 2\xi_r \omega_r s + \omega_r^2)} \quad (3-23)$$

Fazendo a transformada inversa de Laplace na equação (3-23), obtém-se a solução nas coordenadas normais, correspondente à resposta harmônica para o modo r que é dada por:

$$y_r = \frac{1}{m_r} \phi_r^T f \frac{1}{(\omega_r^2 - \omega^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega)} e^{i\omega t} \quad (3-24)$$

Em função da massa, rigidez e amortecimento modal, a solução (3-24) pode ser escrita também como

$$y_r = \phi_r^T f \frac{1}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r)} e^{i\omega t} \quad (3-25)$$

Utilizando a superposição modal, pode-se determinar a solução de regime permanente nas coordenadas físicas que é dada por

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^N \frac{1}{m_r} \boldsymbol{\phi}_r \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{f} \frac{1}{(\omega_r^2 - \omega^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega)} e^{i\omega t} \quad (3-26)$$

Da mesma forma que foi definida anteriormente tem-se a matriz de receptância do sistema com amortecimento viscoso proporcional

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{1}{m_r} \boldsymbol{\phi}_r \boldsymbol{\phi}_r^T \frac{1}{(\omega_r^2 - \omega^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega)} \quad (3-27)$$

cujos elementos são definidos por

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{1}{m_r} \phi_{rj} \phi_{rk} \frac{1}{(\omega_r^2 - \omega^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega)} \quad (3-28)$$

Fazendo ${}_r A_{jk} = \frac{\phi_{rj} \phi_{rk}}{m_r}$, escreve-se

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r A_{jk}}{(\omega_r^2 - \omega^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega)} \quad (3-29)$$

onde ${}_r A_{jk}$ é a constante modal.

O ângulo de fase entre a resposta e a força excitadora neste caso não é somente θ ou π , mas varia com a frequência de excitação e com o fator de amortecimento modal e é dado por

$$\theta = \text{ang}({}_r A_{jk}) - \tan^{-1} \left(\frac{2\xi_r \omega_r \omega}{\omega_r^2 - \omega^2} \right) \quad (3-30)$$

É importante notar que, conforme foi mostrado no capítulo 2, sistemas com amortecimento viscoso proporcional possuem os mesmos modos de vibrar dos sistemas não amortecidos correspondentes. Assim, nestes casos as constantes modais serão também reais.

Existe ainda uma outra forma de expressar a equação (3-29), resultante da fatoração do seu denominador em função de suas raízes complexas conjugadas, dada por

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{{}_r R_{jk}}{i\omega - \lambda_r} + \frac{{}_r R_{jk}^*}{i\omega - \lambda_r^*} \right) \quad (3-31)$$

onde ${}_r R_{jk}$ é denominado resíduo modal e relaciona-se com a constante modal ${}_r A_{jk}$, no caso de amortecimento viscoso proporcional, por

$${}_r R_{jk} = -i \frac{{}_r A_{jk}}{2\omega_{dr}} \quad (3-32)$$

ou

$${}_r R_{jk} = -i \frac{\phi_{rj} \phi_{rk}}{2m_r \omega_{dr}} \quad (3-33)$$

3.2.2 - Amortecimento viscoso não proporcional

Seja a excitação do sistema definida por

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = p e^{i\omega t} \quad (3-34)$$

Aplicando esta excitação na equação (2-19), formulada através de variáveis de estado, obtém-se

$$A\dot{q} - Bq = p e^{i\omega t} \quad (3-35)$$

Fazendo-se o desacoplamento modal, como mostrado no capítulo 2, obtém-se a seguinte equação matricial nas coordenadas normais

$$\hat{A}\hat{y} - \hat{B}y = \Psi^T p e^{i\omega t} \quad (3-36)$$

Lembrando que as matrizes \hat{A} e \hat{B} são diagonais, pode-se escrever para o modo r

$$a_r \dot{y}_r - b_r y_r = \psi_r^T p e^{i\omega t} \quad (3-37)$$

Esta equação também pode ser escrita, usando a relação (2-55), como

$$\dot{y}_r - \lambda_r y_r = \frac{I}{\alpha_r} \psi_r^T p e^{i\omega t} \quad (3-38)$$

cuja solução na variável de Laplace é dada por

$$Y_r = \frac{I}{\alpha_r} \psi_r^T p \frac{1}{(s-i\omega)(s-\lambda_r)} \quad (3-39)$$

Como nos casos anteriores a resposta de regime permanente, nas coordenadas normais, é obtida através da transformada inversa de Laplace da solução (3-39). Para o modo r tem-se então a seguinte solução no tempo

$$y_r = \psi_r^T p \frac{1}{\alpha_r (i\omega - \lambda_r)} e^{i\omega t} \quad (3-40)$$

Pelo método da superposição modal obtém-se a solução nas variáveis de estado, dada por

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^{2N} \boldsymbol{\psi}_r \boldsymbol{\psi}_r^T \mathbf{p} \frac{I}{\alpha_r(i\omega - \lambda_r)} e^{i\omega t} \quad (3-41)$$

A partir desta equação pode-se obter a matriz receptância que pode ser escrita como

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \boldsymbol{\psi}_r \boldsymbol{\psi}_r^T \frac{I}{\alpha_r(i\omega - \lambda_r)} \quad (3-42)$$

Uma vez que os autovalores e autovetores ocorrem em pares complexos conjugados, esta matriz tem cada elemento dado por

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{\phi_{rj} \phi_{rk}}{\alpha_r(i\omega - \lambda_r)} + \frac{\phi_{rj}^* \phi_{rk}^*}{\alpha_r^*(i\omega - \lambda_r^*)} \right) \quad (3-43)$$

que também podem ser escritos na forma

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{{}_r R_{jk}}{i\omega - \lambda_r} + \frac{{}_r R_{jk}^*}{i\omega - \lambda_r^*} \right) \quad (3-44)$$

onde ${}_r R_{jk}$ são os resíduos modais, dados por

$${}_r R_{jk} = \frac{\phi_{rj} \phi_{rk}}{\alpha_r} \quad (3-45)$$

Sendo complexos, estes resíduos podem ser dados por

$${}_r R_{jk} = {}_r U_{jk} + i {}_r V_{jk} \quad (3-46)$$

Desta maneira a equação (3-44) pode ser escrita como

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{{}_r U_{jk} + i {}_r V_{jk}}{i\omega - \lambda_r} + \frac{{}_r U_{jk} - i {}_r V_{jk}}{i\omega - \lambda_r^*} \right) \quad (3-47)$$

3.3 - Representação gráfica das FRF

Para finalizar este capítulo serão apresentadas algumas características da representação gráfica das FRF. É muito útil examinar a forma que as FRFs possuem quando representadas graficamente nas diversas formas possíveis, sendo este conhecimento fundamental para a validação e a interpretação dos dados medidos (Ewins, 1984).

3.3.1- Sistemas não amortecidos:

A figura 3.1 mostra um sistema com apenas dois modos de vibrar, que será utilizado para analisar as características da representação gráfica das FRF de ponto (quando a excitação e a captação ocorrem em um mesmo ponto)

e de transferência (quando a excitação é realizada em um ponto e a captação em um outro distinto). A escolha de um sistema com poucos modos de vibrar tem como objetivo somente facilitar a compreensão, sendo que a análise aqui apresentada aplica-se a sistemas com N modos de vibrar.

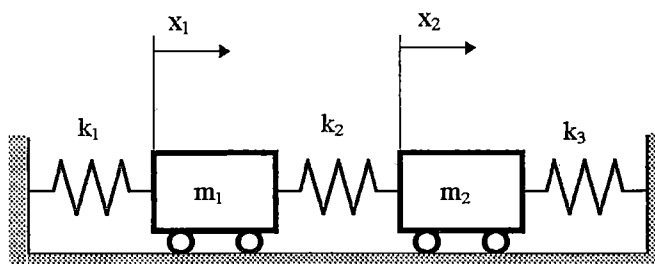


Figura 3.1 - Sistema com 2 Graus de Liberdade

A FRF de sistemas sem amortecimento é dada pela equação (3-17) e para o exemplo mostrado na figura 3.1 é igual a

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{{}_1A_{jk}}{(\omega_1^2 - \omega^2)} + \frac{{}_2A_{jk}}{(\omega_2^2 - \omega^2)} \quad (3-48)$$

Para o exemplo em particular, em função dos valores de $k_1=k_3=k$, $k_2=\sigma k$ e $m_1=m_2=1$, obtém-se as seguintes constantes modais:

$$\text{FRF de ponto:} \quad {}_1A_{11} = 1,0 \quad {}_2A_{11} = 1,0$$

$$\text{FRF de transferência:} \quad {}_1A_{21} = 1,0 \quad {}_2A_{21} = -1,0 \quad (3-49)$$

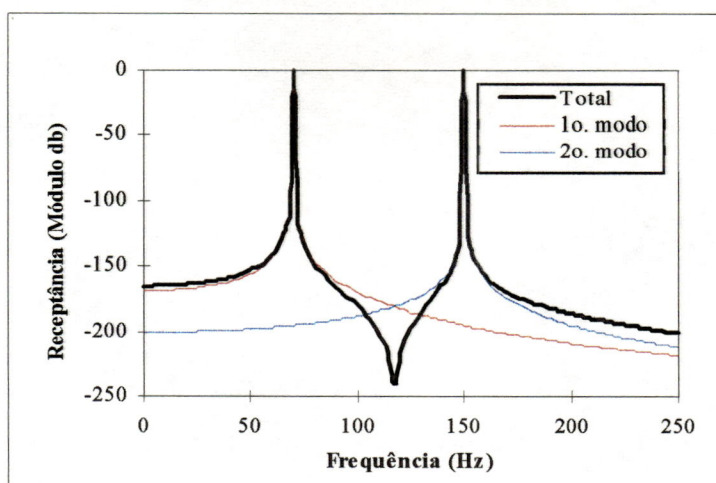


Figura 3.2 - FRF de ponto α_{11}

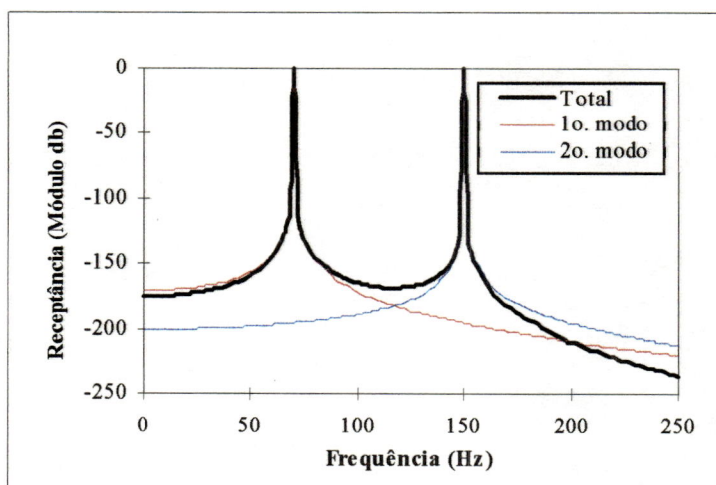


Figura 3.3 - FRF de transferência α_{21}

É possível separar cada um dos termos individuais associados a cada modo de vibrar como mostrado nas figuras 3.2 e 3.3. A forma exata da FRF total, entretanto, não é simplesmente a soma de cada curva individual como poderia ser imaginado. Isto é justificado pelo fato de neste gráfico estar representada apenas parte da informação, ou seja, o módulo, não sendo

representada a fase da receptância. Quando é realizada a somatória dos termos individuais relativos a cada modo, para a obtenção do FRF total, obviamente é fundamental que sejam levados em consideração os sinais de cada um destes termos.

Ao analisar as constantes modais do exemplo mostrado dadas por (3-49), pode-se verificar que a única diferença entre as FRFs de transferência e de ponto é o sinal das constantes modais referentes ao segundo modo. Como os gráficos mostram somente a informação de módulo, tem-se a impressão que este fato não exerce influência sobre as FRFs. Quando se considera, entretanto, que os dois termos são adicionados para gerar a FRFs do sistema, deve-se observar algumas características importantes que serão descritas a seguir.

Inicialmente, será analisada a FRF de ponto mostrada na figura 3.2. Deve ser notado que em frequências abaixo da primeira frequência natural as duas parcelas possuem o mesmo sinal sendo, desta maneira, aditivas e fazendo com que a curva da FRF total seja maior do que cada componente individual, e que a contribuição do segundo modo nesta faixa de frequências é muito pouco significativo. Um raciocínio semelhante conduz aos mesmos resultados, quando é aplicado à região de frequências altas, acima do segundo modo de vibrar. Na região entre as duas ressonâncias, no entanto, tem-se uma situação em que as duas componentes possuem sinais contrários, ou seja, são subtrativas. No ponto em que as curvas destas componentes se cruzam sua soma é zero uma vez que ambas possuem a mesma intensidade, porém com sinal contrário. Em um gráfico logarítmico, como o que está sendo analisado, neste ponto é produzida uma característica denominada de antiressonância. Nas vizinhanças

de cada ressonância, a contribuição do termo cuja frequência natural está adjacente é muito maior do que a contribuição do outro termo. Deste modo, o total é, na prática, o mesmo valor deste termo dominante. Isto significa fisicamente que a resposta de um sistema com N graus de liberdade sem amortecimento, na região de uma frequência natural, é totalmente dominada por este modo e que os modos restantes possuem influência insignificante.

Analisando agora a FRF de transferência mostrada na figura 3.3, é possível se utilizar a mesma metodologia usada anteriormente, somente com a diferença de que os dois termos neste caso possuem sinais contrários e, deste modo, nas regiões de frequências muito baixas e muito altas a FRF possuirá níveis um pouco mais baixos do que os das curvas das componentes individuais. Na região entre as ressonâncias as duas componentes possuem, neste caso, o mesmo sinal e então não é encontrado um ponto em que ambas se cancelam. Não há portanto a antirressonância. A frequência em que as componentes individuais se interceptam neste caso representam um mínimo na FRF total.

Os princípios mostrados até aqui podem ser estendidos para sistemas com N graus de liberdade, existindo uma regra fundamental: se dois modos consecutivos possuem constantes modais com mesmo sinal, então existirá uma antirressonância em uma frequência entre estas duas frequências naturais. Em contrapartida, se as duas constantes modais possuírem sinais opostos, não existirá uma antirressonância mas sim um ponto de mínimo. Uma importante característica que existe em uma antirressonância é que uma mudança de fase é associada à mesma.

Considerando a definição da constante modal, que vem do produto de dois elementos de autovetores (um associado ao ponto de excitação e o outro associado ao ponto de captação), é possível realizar um estudo de seu sinal. Considerando-se uma FRF de ponto, todas as constantes modais serão positivas, uma vez que a mesma será o quadrado de um número. No caso de uma FRF de transferência esta afirmação não pode ser feita, pois as constantes modais serão o resultado do produto de elementos de autovetores distintos, que poderá resultar positivo ou negativo.

3.3.2- Sistemas amortecidos:

Ao analisar os sistemas amortecidos chega-se à conclusão que a representação gráfica da FRF deste tipo de sistema é muito similar ao caso discutido no item anterior. As ressonâncias e antirressonâncias são atenuadas e os ângulos de fase não são exatamente 0 ou π mas o aspecto geral permanece o mesmo, conforme pode ser verificado na figura 3.3.

A maioria dos gráficos de FRFs possuem esta forma geral se os modos são relativamente separados, ou seja, desacoplados. Esta condição é satisfeita quando a separação entre as frequências naturais adjacentes, expressa em percentual de suas médias, for menor ou da mesma ordem de grandeza dos fatores de amortecimento modal.

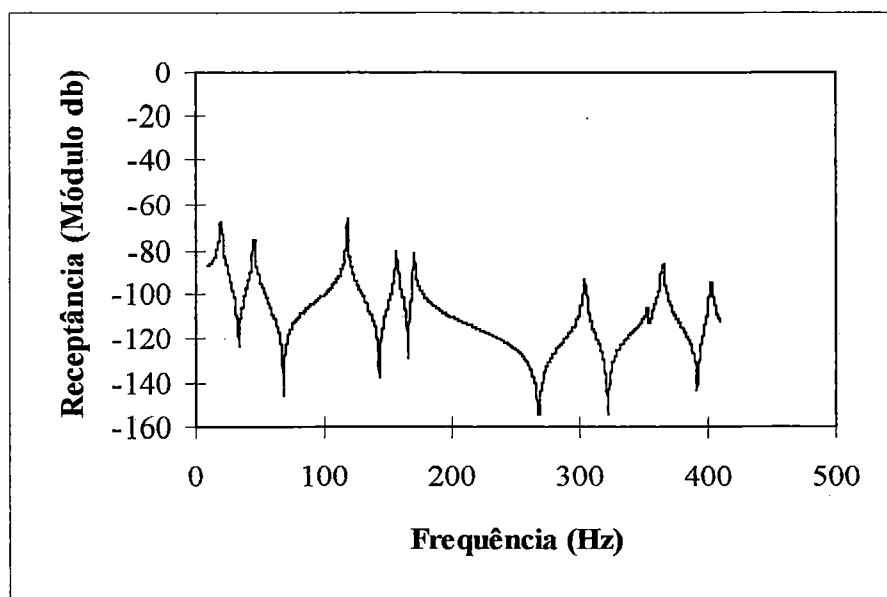


Figura 3.3 - FRF de ponto de sistema amortecido

A figura 3.4 mostra uma FRF de transferência de um sistema amortecido.

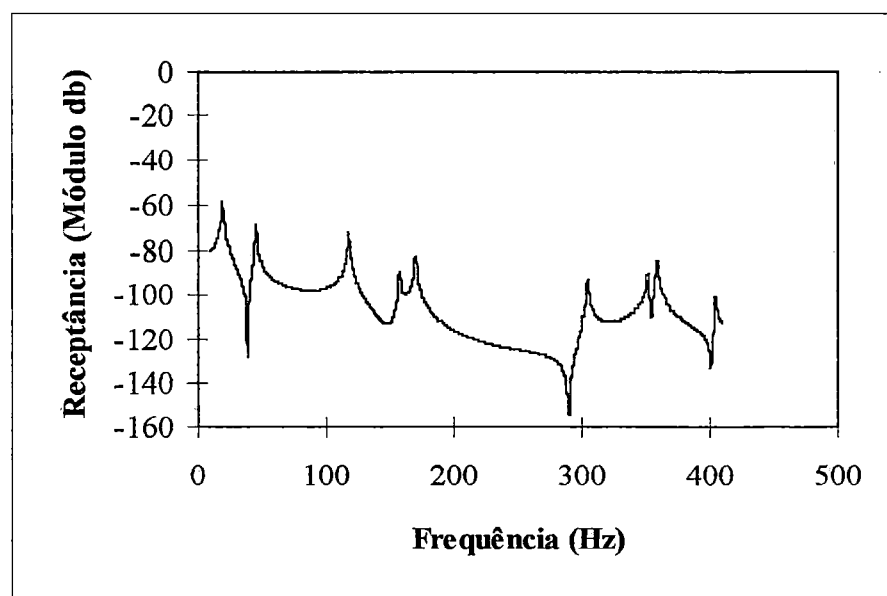


Figura 3.4 - FRF de transferência de sistema amortecido

4- Identificação de sistemas dinâmicos no domínio da frequência

Este capítulo trata da identificação de parâmetros modais de estruturas no domínio da frequência, aplicável a sistemas dinâmicos representados por modelos discretos com amortecimento do tipo viscoso, proporcional ou não.

A identificação das características dinâmicas de sistemas através de métodos no domínio do tempo também é amplamente utilizada atualmente. Entretanto este trabalho está concentrado nos métodos no domínio da frequência.

O algoritmo iterativo não linear é reconhecido por ser muito estável demandando, porém, um elevado tempo de computação. Sendo este método iterativo, uma estimativa inicial é necessária. Sua maior desvantagem é que o processo iterativo tende a divergir rapidamente se as estimativas iniciais, principalmente para as frequências naturais, não forem muito próximas dos valores corretos (Ebersbach e Irretier, 1989).

O método clássico de Levy (1959) permite a determinação dos parâmetros apenas com a escolha dos graus dos polinômios do numerador e do denominador da FRF. Este método não é iterativo e, portanto, não requer estimativas iniciais para os parâmetros.

Sanathanan e Koerner (1963) propuseram uma modificação para melhorar o ajuste do método de Levy em baixas frequências. Através de um processo iterativo, foi implementada uma função ponderadora para o erro que é função do denominador da FRF identificado no passo anterior, sendo na primeira iteração utilizado o método de Levy. Este método foi discutido e implementado também por Varoto (1991).

É importante ressaltar que não estão incluídos neste capítulo todos os métodos de identificação no domínio da frequência, mais sim uma parcela representativa das principais famílias que formam a base para o grande número de métodos existentes neste domínio.

4.1- Identificação modal de estruturas levemente amortecidas

Este método, proposto inicialmente por Ewins e Gleeson (1982), é destinado a aplicação em estruturas com baixo amortecimento. O método consiste em admitir inicialmente o sistema como sendo não amortecido e identificar as frequências naturais e as constantes modais. Numa etapa seguinte é feita então a determinação dos fatores de amortecimento.

Para um sistema não amortecido pode-se escrever para a FRF a seguinte expressão:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r A_{jk}}{(\omega_r^2 - \omega^2)} \quad (4-1)$$

Pode-se selecionar N frequências particulares $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ e escrever o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{jk}(\Omega_1) \\ \alpha_{jk}(\Omega_2) \\ \vdots \\ \alpha_{jk}(\Omega_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\omega_1^2 - \Omega_1^2)^{-1} & (\omega_2^2 - \Omega_1^2)^{-1} & \dots & (\omega_N^2 - \Omega_1^2)^{-1} \\ (\omega_1^2 - \Omega_2^2)^{-1} & (\omega_2^2 - \Omega_2^2)^{-1} & \dots & (\omega_N^2 - \Omega_2^2)^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\omega_1^2 - \Omega_N^2)^{-1} & (\omega_2^2 - \Omega_N^2)^{-1} & \dots & (\omega_N^2 - \Omega_N^2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1 A_{jk} \\ {}_2 A_{jk} \\ \vdots \\ {}_N A_{jk} \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

A solução deste sistema irá determinar o vetor das constantes modais ${}_r A_{jk}$.

A escolha das N frequências Ω_k deve ser feita tanto quanto possível nas antiressonâncias ou o mais próximo possível das mesmas. Dessa maneira obtém-se melhor precisão na ajustagem, principalmente nos casos de sistemas com representação modal incompleta, ou seja, sistemas que possuam modos que não estão presentes na faixa amostrada (Ewins e Gleeson, 1982).

É conveniente nesta fase a inclusão do amortecimento como forma de melhorar a precisão do ajuste. Isto pode ser feito diante da consideração de que para pequenos amortecimentos, a amplitude dos picos de ressonância de um dado modo possui pouca influência dos outros modos do sistema e pode-se, então, escrever a seguinte expressão

$$\xi_r = \frac{|A_{jk}|}{|\alpha_{jk}(\omega_r)|\omega_r^2} \quad (4-3)$$

Este método possui excelente estabilidade numérica e requer pouco esforço computacional, constituindo-se então em uma boa alternativa para sistemas que se enquadrem em suas hipóteses de simplificação.

4.2 - Método de Levy

Este método de identificação modal obtém os coeficientes da FRF do sistema escrita na forma de um quociente de dois polinômios dependentes da frequência,

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\sum_{l=0}^L a_l (i\omega)^l}{\sum_{q=0}^Q b_q (i\omega)^q} \quad (4-4)$$

ou seja

$$\alpha_{jk}(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_L s^L}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_Q s^Q} \quad (4-5)$$

onde a_l e b_q são, respectivamente, os coeficientes reais do numerador e denominador da função transferência. O polinômio do denominador desta equação (4-4) é denominado polinômio característico do sistema e suas raízes

são os autovalores λ_r , do sistema, discutidos em capítulos anteriores. Os coeficientes do polinômio do numerador estão relacionados com os resíduos modais e, conseqüentemente, com os autovetores.

Como este método foi desenvolvido originalmente para ajuste de um tipo genérico de FRF, serão utilizados, nesta parte do trabalho, graus L e Q para o polinômios do numerador e do denominador respectivamente. No final deste tópico será apresentado um estudo específico sobre os graus que deverão ser utilizados no caso particular da FRF que está sendo estudada.

Este método de identificação não fornece os parâmetros modais diretamente como o método iterativo não linear. Os coeficientes a_i e b_q são identificados e a partir deles os parâmetros modais podem ser determinados. As frequências naturais e os amortecimentos modais são determinados através das raízes do polinômio característico e os resíduos modais podem ser determinados por meio da expansão da FRF na forma polinomial em frações parciais, equação (4-4).

Para a aplicação do método de Levy é necessário que a FRF do sistema seja escrita na seguinte forma:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{N_1(\omega) + j\omega N_2(\omega)}{D_1(\omega) + j\omega D_2(\omega)} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \quad (4-6)$$

onde

$$N_1(\omega) = a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots$$

$$N_2(\omega) = a_1 - a_3 \omega^2 + a_5 \omega^4 - \dots$$

$$D_1(\omega) = b_0 - b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4 - \dots$$

$$D_2(\omega) = b_1 - b_3 \omega^2 + b_5 \omega^4 - \dots \quad (4-7)$$

Para tornar o sistema determinado no processo de ajustagem de curvas, é realizada uma normalização da função transferência com relação ao termo independente do denominador, ou seja $b_0 = 1$ e , desta maneira, a equação (4-6) possui $L+Q+1$ incógnitas sendo $L+1$ coeficientes a_i e Q coeficientes b_i .

Da mesma maneira que no item anterior, considera-se a obtenção dos dados amostrados através de ensaios e escritos na forma de suas partes real e imaginária conforme a seguir

$$H_{jk}(\omega_p) = Re(\omega_p) + i Im(\omega_p) \quad (4-8)$$

Define-se então a função erro na frequência ω_p como sendo

$$e_p = H_{jk}(\omega_p) - \frac{N(\omega_p)}{D(\omega_p)} \quad (4-9)$$

Esta função erro é não linear com relação aos coeficientes do polinômio complexo do denominador. Desta maneira o processo de

minimização da função erro global resulta em um sistema de equações não lineares. Ponderando o erro multiplicando-se a equação (4-9) pelo polinômio $D(\omega_p)$ obtém-se um sistema linear dado por

$$D(\omega_p)e_p = D(\omega_p)H_{jk}(\omega_p) - N(\omega_p) \quad (4-10)$$

Sendo esta equação complexa, pode ser reescrita em função de suas partes real e imaginária conforme a seguir

$$D(\omega_p)e_p = A(\omega_p) + iB(\omega_p) \quad (4-11)$$

Define-se então a função erro global a ser minimizada como

$$E = \sum_{p=1}^P \left\{ \left[D(\omega_p)e_p \right] \cdot \left[D(\omega_p)e_p \right]^* \right\} \quad (4-12)$$

que, através da equação (4-11), resulta em

$$E = \sum_{p=1}^P \left[A^2(\omega_p) + B^2(\omega_p) \right] \quad (4-13)$$

Em função das equações (4-6) e (4-11) pode-se determinar os valores de $A(\omega_p)$ e $B(\omega_p)$ como

$$A(\omega_p) = \operatorname{Re}(\omega_p)D_1(\omega_p) - \omega_p D_2(\omega_p)\operatorname{Im}(\omega_p) - N_1(\omega_p) \quad (4-14)$$

$$B(\omega_p) = \omega_p D_2(\omega_p)\operatorname{Re}(\omega_p) + D_1(\omega_p)\operatorname{Im}(\omega_p) - \omega_p N_2(\omega_p) \quad (4-15)$$

O processo de minimização é feito igualando-se a zero as derivadas parciais da equação (4-13) em relação a cada um dos coeficientes dos polinômios da função transferência

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = \sum_{p=1}^P (-A(\omega_p)) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = \sum_{p=1}^P (-\omega_p B(\omega_p)) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_2} = \sum_{p=1}^P (\omega_p^2 A(\omega_p)) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_3} = \sum_{p=1}^P (\omega_p^3 B(\omega_p)) = 0$$

⋮

$$\frac{\partial E}{\partial b_1} = \sum_{p=1}^P (-\omega_p \operatorname{Im}(\omega_p)A(\omega_p) + \omega_p \operatorname{Re}(\omega_p)B(\omega_p)) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_2} = \sum_{p=1}^P (-\omega_p^2 \operatorname{Re}(\omega_p)A(\omega_p) + \omega_p^2 \operatorname{Im}(\omega_p)B(\omega_p)) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_3} = \sum_{p=1}^P (-\omega_p^3 \operatorname{Im}(\omega_p)A(\omega_p) + \omega_p^3 \operatorname{Re}(\omega_p)B(\omega_p)) = 0 \quad (4-16)$$

⋮

À partir destas expressões obtém-se um sistema de equações lineares na forma

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (4-17)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \lambda_4 & \cdots & T_1 & S_2 & -T_3 & -S_4 & T_5 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & -\lambda_4 & 0 & \cdots & -S_2 & T_3 & S_4 & -T_5 & -S_6 & \cdots \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_4 & 0 & \lambda_6 & \cdots & T_3 & S_4 & -T_5 & -S_6 & T_7 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ T_1 & -S_2 & -T_3 & S_4 & T_5 & \cdots & U_2 & 0 & -U_4 & 0 & U_6 & \cdots \\ S_2 & T_3 & -S_4 & -T_5 & S_6 & \cdots & 0 & U_4 & 0 & -U_6 & 0 & \cdots \\ T_3 & -S_4 & -T_5 & S_6 & T_7 & \cdots & U_4 & 0 & -U_6 & 0 & U_8 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

$$\mathbf{x}^T = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ \cdots \ b_0 \ b_1 \ b_2 \ \cdots] \quad (4-19)$$

$$\mathbf{b}^T = [S_0 \ T_1 \ S_2 \ \cdots \ 0 \ U_2 \ 0 \ \cdots] \quad (4-20)$$

e os elementos da matriz \mathbf{A} e do vetor \mathbf{b} são dados por

$$\lambda_h = \sum_{p=1}^P \omega_p^h \quad (4-21)$$

$$S_h = \sum_{p=1}^P \omega_p^h \operatorname{Re}(\omega_p) \quad (4-22)$$

$$T_h = \sum_{p=1}^P \omega_p^h \operatorname{Im}(\omega_p) \quad (4-23)$$

$$U_h = \sum_{p=1}^P \omega_p^h \left[\operatorname{Re}^2(\omega_p) + \operatorname{Im}^2(\omega_p) \right] \quad (4-24)$$

Conforme pode ser visto na equação (4-18), a matriz A é formada por muitos zeros resultando, principalmente em função da largura da faixa de frequências utilizada na amostragem, em um sistema de equações lineares mal condicionado.

Algumas considerações importantes sobre o método de Levy:

- Uma desvantagem apresentada pelo método de Levy é a função erro global necessitar ser ponderada pelo polinômio característico do sistema $D(\omega_p)$, uma vez que quando este polinômio sofre grandes variações também grandes erros podem ser introduzidos no processo de ajustagem de curvas.

- Como o erro $e(\omega_p)$ geralmente tende a assumir um máximo relativo na região das ressonâncias, onde $D(\omega_p)$ assume seus valores mínimos, existe a tendência de existir uma baixa influência destas regiões na função erro E que está sendo minimizada.

- No caso em que se desejar ajustar a FRF em uma faixa muito grande de frequência, os elementos da matriz A serão pouco influenciados pelas baixas frequências. Este fato implica que não poderá ser obtido um bom ajuste nas baixas frequências.

A verificação destas observações será feita no capítulo referente à aplicação do método em dados experimentais.

A seguir será apresentado um estudo sobre a escolha dos graus dos polinômios neste método de ajustagem e seu relacionamento com a inclusão dos resíduos de massa e rigidez.

a) Caso geral sem resíduos

Seja o sistema com N modos de vibrar na faixa de frequência amostrada, pode-se escrever a FRF na forma

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{r R_{jk}}{i\omega - \lambda_r} + \frac{r R_{jk}^*}{i\omega - \lambda_r^*} \right] \quad (4-25)$$

que na variável de Laplace resulta em

$$\alpha_{jk}(s) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{r R_{jk}}{s - \lambda_r} + \frac{r R_{jk}^*}{s - \lambda_r^*} \right] \quad (4-26)$$

e pode ser transformada na forma de frações de segunda ordem

$$\alpha_{jk}(s) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{({}_r R_{jk} + {}_r R_{jk}^*)s - {}_r R_{jk} \lambda_r^* - {}_r R_{jk}^* \lambda_r}{s^2 - (\lambda_r + \lambda_r^*)s + \lambda_r \lambda_r^*} \right] \quad (4-27)$$

Lembrando que $\lambda_r = -\delta_r + i\omega_{dr}$ e ${}_r R_{jk} = {}_r U_{jk} + i {}_r V_{jk}$ tem-se

$$\alpha_{jk}(s) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{2 {}_r U_{jk} s - 2(-\delta_r {}_r U_{jk} + \omega_{dr} {}_r V_{jk})}{s^2 + 2\delta_r s + \delta_r^2 + \omega_{dr}^2} \right] \quad (4-28)$$

Definindo: ${}_r B_{jk} = 2 {}_r U_{jk}$,

$${}_r C_{jk} = -2(-\delta_r {}_r U_{jk} + \omega_{dr} {}_r V_{jk})$$

$$D_r = 2\delta_r$$

$$E_r = \delta_r^2 + \omega_{dr}^2$$

obtem-se

$$\alpha_{jk}(s) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{{}_r B_{jk} s + {}_r C_{jk}}{s^2 + D_r s + E_r} \right] \quad (4-29)$$

Desta maneira pode-se passar para a forma polinomial

$$\alpha_{jk}(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{2N-1} s^{2N-1}}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_{2N} s^{2N}} \quad (4-30)$$

onde é importante que seja lembrado que N é o número de modos na faixa de frequências amostrada. Fazendo-se

$$\bar{a}_n = \frac{a_n}{b_0} \quad \text{e} \quad \bar{b}_n = \frac{b_n}{b_0} \quad (4-31)$$

obtem-se

$$\alpha_{jk}(s) = \frac{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \dots + \bar{a}_{2N-1} s^{2N-1}}{1 + \bar{b}_1 s + \bar{b}_2 s^2 + \dots + \bar{b}_{2N} s^{2N}} \quad (4-32)$$

Da equação (4-32) conclui-se que o sistema possui $4N$ incógnitas, e que se os graus dos polinômios do numerador e do denominador da FRF forem escolhidos respectivamente iguais a $2N-1$ e $2N$, então não estarão sendo incluídos os resíduos de massa e de rigidez no processo de ajustagem.

b) Caso geral com resíduo de rigidez

A inclusão do resíduo de rigidez na equação (4-29) resulta em

$$\alpha_{jk}(s) = R_{jk}^K + \sum_{r=1}^N \left(\frac{r B_{jk} s + r C_{jk}}{s^2 + D_r s + E_r} \right) \quad (4-33)$$

onde $R_{jk}^K = \frac{I}{k_{jk}}$

Na forma polinomial tem-se

$$\alpha_{jk}(s) = R_{jk}^K + \frac{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \dots + \bar{a}_{2N-1} s^{2N-1}}{1 + \bar{b}_1 s + \bar{b}_2 s^2 + \dots + \bar{b}_{2N} s^{2N}} \quad (4-34)$$

$$\alpha_{jk}(s) = \frac{(R_{jk}^K + \bar{a}_0) + (R_{jk}^K \bar{b}_1 + \bar{a}_1) s + (R_{jk}^K \bar{b}_2 + \bar{a}_2) s^2 + \dots + (R_{jk}^K \bar{b}_{2N-1} + \bar{a}_{2N-1}) s^{2N-1} + (R_{jk}^K \bar{b}_{2N}) s^{2N}}{1 + \bar{b}_1 s + \bar{b}_2 s^2 + \dots + \bar{b}_{2N} s^{2N}} \quad (4-35)$$

ou ainda

$$\alpha_{jk}(s) = R_{jk}^K + \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{2N-1} s^{2N-1}}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_{2N} s^{2N}} \quad (4-36)$$

$$\alpha_{jk}(s) = \frac{(R_{jk}^K b_0 + a_0) + (R_{jk}^K b_1 + a_1) s + (R_{jk}^K b_2 + a_2) s^2 + \dots + (R_{jk}^K b_{2N-1} + a_{2N-1}) s^{2N-1} + (R_{jk}^K b_{2N}) s^{2N}}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_{2N} s^{2N}} \quad (4-37)$$

Da equação (4-35) conclui-se que o sistema possui $4N+1$ incógnitas, e que se os graus dos polinômios do numerador e do denominador da FRF forem escolhidos iguais a $2N$, então estará sendo incluído o resíduo de rigidez no processo de ajustagem.

c) Caso geral com resíduo de massa

A inclusão do resíduo de massa na equação (4-29) conduz a

$$\alpha_{jk}(s) = \frac{R_{jk}^M}{s^2} + \sum_{r=1}^N \left(\frac{B_{jk} s + C_{jk}}{s^2 + D_r s + E_r} \right) \quad (4-38)$$

onde $R_{jk}^M = -\frac{I}{m_{jk}}$

que na forma polinomial resulta em

$$\alpha_{jk}(s) = \frac{R_{jk}^M}{s^2} + \frac{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \dots + \bar{a}_{2N-1} s^{2N-1}}{1 + \bar{b}_1 s + \bar{b}_2 s^2 + \dots + \bar{b}_{2N} s^{2N}} \quad (4-39)$$

$$\alpha_{jk}(s) = \frac{R_{jk}^M + (R_{jk}^M \bar{b}_1) s + (R_{jk}^M \bar{b}_2 + \bar{a}_0) s^2 + \dots + (R_{jk}^M \bar{b}_{2N} + \bar{a}_{2N-2}) s^{2N} + \bar{a}_{2N-1} s^{2N+1}}{s^2 + \bar{b}_1 s^3 + \bar{b}_2 s^4 + \dots + \bar{b}_{2N} s^{2N+2}} \quad (4-40)$$

ou ainda

$$\alpha_{jk}(s) = R_{jk}^M + \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{2N-1} s^{2N-1}}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_{2N} s^{2N}} \quad (4-41)$$

$$\alpha_{jk}(s) = \frac{R_{jk}^M b_0 + (R_{jk}^M b_1) s + (R_{jk}^M b_2 + a_0) s^2 + \dots + (R_{jk}^M b_{2N} + a_{2N-2}) s^{2N} + a_{2N-1} s^{2N+1}}{b_0 s^2 + b_1 s^3 + b_2 s^4 + \dots + b_{2N} s^{2N+2}} \quad (4-42)$$

Deve ser observado que devido à maneira como foi deduzido o método de Levy, utilizando o coeficiente do termo de ordem zero do polinômio do denominador definido igual a 1, não é possível a inclusão do resíduo de massa no processo de ajustagem.

d) Caso geral com resíduo de massa e rigidez

A inclusão dos resíduos de massa e de rigidez na equação (4-29) resulta em

$$\alpha_{jk}(s) = R_{jk}^K + \frac{R_{jk}^M}{s^2} + \frac{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \dots + \bar{a}_{2N-1} s^{2N-1}}{1 + \bar{b}_1 s + \bar{b}_2 s^2 + \dots + \bar{b}_{2N} s^{2N}} \quad (4-43)$$

e na forma polinomial

$$\alpha_{jk}(s) = R_{jk}^K + \frac{R_{jk}^M}{s^2} + \frac{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \dots + \bar{a}_{2N-1} s^{2N-1}}{1 + \bar{b}_1 s + \bar{b}_2 s^2 + \dots + \bar{b}_{2N} s^{2N}} \quad (4-44)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{jk}(s) = & \left[R_{jk}^M + (R_{jk}^M \bar{b}_1) s + (R_{jk}^K + R_{jk}^M \bar{b}_2 + \bar{a}_0) s^2 + (R_{jk}^K \bar{b}_1 + R_{jk}^M \bar{b}_3 + \bar{a}_1) s^3 + \dots + \right. \\ & + (R_{jk}^K \bar{b}_{2N-2} + R_{jk}^M \bar{b}_{2N} + \bar{a}_{2N-2}) s^{2N} + (R_{jk}^K \bar{b}_{2N-1} + \bar{a}_{2N-1}) s^{2N+1} + \\ & \left. + (R_{jk}^K \bar{b}_{2N}) s^{2N+2} \right] : \left[s^2 + \bar{b}_1 s^3 + \bar{b}_2 s^4 + \dots + \bar{b}_{2N} s^{2N+2} \right] \end{aligned} \quad (4-45)$$

ou ainda

$$\alpha_{jk}(s) = R_{jk}^K + \frac{R_{jk}^M}{s^2} + \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{2N-1} s^{2N-1}}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_{2N} s^{2N}} \quad (4-46)$$

$$\alpha_{jk}(s) = \left[R_{jk}^M b_0 + (R_{jk}^M b_1) s + (R_{jk}^K b_0 + R_{jk}^M b_2 + a_0) s^2 + (R_{jk}^K b_1 + R_{jk}^M b_3 + a_1) s^3 + \dots + \right. \\ \left. + (R_{jk}^K b_{2N-2} + R_{jk}^M b_{2N} + a_{2N-2}) s^{2N} + (R_{jk}^K b_{2N-1} + a_{2N-1}) s^{2N+1} + \right. \\ \left. + (R_{jk}^K b_{2N}) s^{2N+2} \right] : \left[b_0 s^2 + b_1 s^3 + b_2 s^4 + \dots + b_{2N} s^{2N+2} \right] \quad (4-47)$$

Deve ser observado, novamente, que não é possível a inclusão dos resíduos de massa e rigidez, devido à forma da dedução do método de Levy, utilizando o coeficiente do termo de ordem zero do polinômio do denominador igual a 1.

4.3 - Método de Sanathanan e Koerner

Para reduzir os problemas inerentes à ponderação do erro pelo denominador da FRF, proposta pelo método de Levy, Sanathanan e Koerner (1963) propuseram uma modificação que conduz a um método iterativo, definindo uma nova função erro \bar{e}_{pL} , conforme a seguir

$$\bar{e}_{pL} = \frac{D_L(\omega_p) e_{pL}}{D_{L-1}(\omega_p)} \quad (4-48)$$

Usando a equação (4-9) da iteração L , obtém-se

$$\bar{e}_{pL} = \frac{D_L(\omega_p) H_{Lj}(\omega_p)}{D_{L-1}(\omega_p)} : \frac{N_L(\omega_p)}{D_{L-1}(\omega_p)} \quad (4-49)$$

onde L corresponde ao número da iteração atual. Desta maneira a função erro global a ser minimizada é dada por

$$E_L = \sum_{p=1}^P \left[\frac{A_L^2(\omega_p) + B_L^2(\omega_p)}{|D_{L-1}(\omega_p)|^2} \right] \quad (4-50)$$

Pode-se definir então uma função ponderadora como

$$W_L(\omega_p) = \frac{1}{|D(\omega_p)|_{L-1}^2} \quad (4-51)$$

e a equação (4-50) pode ser reescrita na seguinte forma

$$E_L = \sum_{p=1}^P \left\{ [A_L^2(\omega_p) + B_L^2(\omega_p)] W_L(\omega_p) \right\} \quad (4-52)$$

sendo então os elementos da matriz A_L definida por (4-18) dados por

$$\lambda_{hL} = \sum_{p=1}^P [\omega_p^h W_L(\omega_p)] \quad (4-53)$$

$$S_{hL} = \sum_{p=1}^P [\omega_p^h \operatorname{Re}(\omega_p) W_L(\omega_p)] \quad (4-54)$$

$$T_{hL} = \sum_{p=1}^P \left[\omega_p^h \operatorname{Im}(\omega_p) W_L(\omega_p) \right] \quad (4-55)$$

$$U_{hL} = \sum_{p=1}^P \left\{ \omega_p^h \left[\operatorname{Re}^2(\omega_p) + \operatorname{Im}^2(\omega_p) \right] W_L(\omega_p) \right\} \quad (4-56)$$

Nos capítulos seguintes serão feitas considerações a partir de resultados obtidos através da implementação deste método, onde poderá ser verificada a melhoria obtida pelo método iterativo em relação ao método de Levy.

Observa-se que o estudo realizado para escolha dos graus dos polinômios para o método de Levy se aplica também ao método de Sanathanan e Koerner.

4.4 - Algoritmo iterativo não linear

Sejam os dados experimentais, ou obtidos através de simulação, relativos a uma força de excitação em i e à resposta correspondente ao deslocamento em j , indicados por

$$H_{ji}(\omega_p) : \text{FRF experimental para } \omega = \omega_p \quad (4-57)$$

onde $p = 1, \dots, P$ (número de pontos amostrados)

Utilizando-se as relações (3-46) e (3-47), escreve-se a receptância como

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left\{ \frac{{}_r U_{jk} + i {}_r V_{jk}}{i(\omega - \omega_{dr}) + \delta_r} + \frac{{}_r U_{jk} - i {}_r V_{jk}}{i(\omega + \omega_{dr}) + \delta_r} \right\} \quad (4-58)$$

Para compensar a influência dos modos que estão fora da faixa de frequência medida é necessária a adição de termos residuais e a equação (4-58) passa a ser escrita como

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=n_1}^{n_2} \left\{ \frac{{}_r U_{jk} + i {}_r V_{jk}}{i(\omega - \omega_{dr}) + \delta_r} + \frac{{}_r U_{jk} - i {}_r V_{jk}}{i(\omega + \omega_{dr}) + \delta_r} \right\} + R_{jk}^K - \frac{R_{jk}^M}{\omega^2} \quad (4-59)$$

onde R_{jk}^K é a rigidez residual e R_{jk}^M é a massa residual.

Os vetores dos parâmetros modais que serão identificados podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T &= [\omega_{d1} \ \omega_{d2} \ \dots \ \omega_{dN} \ \delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_N] \\ \mathbf{v}_{jk}^T &= [{}_1 U_{jk} \ {}_2 U_{jk} \ \dots \ {}_N U_{jk} \ {}_1 V_{jk} \ {}_2 V_{jk} \ \dots \ {}_N V_{jk} \ R_{jk}^K \ R_{jk}^M] \end{aligned} \quad (4-60)$$

Definindo-se como erro na frequência ω_p

$$e_p = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [H_{jk}(\omega_p) - \alpha_{jk}(\omega_p)] \quad (4-61)$$

a função erro global a ser minimizada pode ser dada por

$$E = \sum_{p=1}^P e_p \cdot e_p^* \quad (4-62)$$

que corresponde à soma do quadrado de todas as diferenças entre os valores medidos e os valores analíticos, correspondentes ao modelo escolhido. Substituindo-se (4-61) em (4-62) obtém-se

$$E = \sum_{p=1}^P \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left\{ [H_{jk}(\omega_p) - \alpha_{jk}(\omega_p)] \cdot [H_{jk}^*(\omega_p) - \alpha_{jk}^*(\omega_p)] \right\} \quad (4-63)$$

Assim, a equação 4-3 pode ser expandida em série de Taylor como

$$\alpha_{jk}^{(1)} = \alpha_{jk}^{(0)} + \sum_{s=1}^{2N} \frac{\partial \alpha_{jk}^{(0)}}{\partial u_s} \Delta u_s + \sum_{s=1}^{2N+2} \frac{\partial \alpha_{jk}^{(0)}}{\partial v_{jks}} \Delta v_{jks} \quad (4-64)$$

Os valores de partida, correspondentes à FRF indicada como ⁽⁰⁾, devem ser determinados por um dos métodos clássicos. Em seguida, a aproximação seguinte indicada por ⁽¹⁾, é obtida através de (4-59) e (4-64).

Desde que a estrutura seja excitada em um único ponto j , através da substituição da forma da FRF dada pela equação (4-64) na equação (4-63) e de

um procedimento de minimização Gaussiana para as variáveis a serem determinadas Δu_s e Δv_{j_s} , obtém-se o seguinte sistema de equações lineares correspondentes

$$\begin{bmatrix} A & B_{11} & B_{21} & \cdots & B_{jk} \\ B_{11}^T & C & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ B_{21}^T & \mathbf{0} & C & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{jk}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v_{11} \\ \Delta v_{21} \\ \vdots \\ \Delta v_{jk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_{11} \\ d_{21} \\ \vdots \\ d_{jk} \end{bmatrix} \quad (4-65)$$

onde os elementos de cada submatriz da equação (4-65), para $k = 1, 2, \dots, 2N+2$ e $k = 1, 2, \dots, 2N+2$, são dados por

$$A_{lm} = \sum_{p=1}^P \sum_{j=1}^J \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \alpha_{jk}(\omega_p)}{\partial u_l} \frac{\partial \alpha_{jk}^*(\omega_p)}{\partial u_m} \right\} \quad (4-66)$$

$$B_{jklm} = \sum_{p=1}^P \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \alpha_{jk}(\omega_p)}{\partial u_l} \frac{\partial \alpha_{jk}^*(\omega_p)}{\partial v_{jkm}} \right\} \quad (4-67)$$

$$C_{lm} = \sum_{p=1}^P \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \alpha_{jk}(\omega_p)}{\partial v_{jkl}} \frac{\partial \alpha_{jk}^*(\omega_p)}{\partial v_{jkm}} \right\} \quad (4-68)$$

e os elementos do vetor d , para $k = 1, 2, \dots, 4N+2$, são dados por

$$d_{0l} = \sum_{p=1}^P \sum_{j=1}^J \operatorname{Re} \left\{ \left[H_{jk}(\omega_p) - \alpha_{jk}(\omega_p) \right] \frac{\partial \alpha_{jk}^*(\omega_p)}{\partial u_l} \right\} \quad (4-69)$$

$$d_{jkl} = \sum_{p=1}^P \operatorname{Re} \left\{ \left[H_{jk}(\omega_p) - \alpha_{jk}(\omega_p) \right] \frac{\partial \alpha_{jk}^*(\omega_p)}{\partial v_{jkl}} \right\} \quad (4-70)$$

Por conter muitos zeros, a solução deste sistema é relativamente simples. É também numericamente muito estável e converge a um mínimo local da função erro em poucas iterações se as estimativas iniciais forem boas.

O esforço computacional é relativamente severo devido ao número de derivadas das FRF que necessitam ser calculadas para cada frequência medida. A maior restrição a este método é que o processo iterativo tende a divergir caso os valores de partida não sejam suficientemente precisos, principalmente as frequências naturais. Neste caso, quando o valor da função erro cresce em relação ao valor da função erro obtida na iteração anterior, o vetor resultante do sistema de equações (4-65) pode ser multiplicado por um fator entre 0 e 1, de maneira à função erro atingir um valor menor (Busturia e Gimenez, 1985).

4-5 - Aproximação Linear dos Resíduos (LAR)

Sendo conhecidos, através de algum outro método, os parâmetros globais do sistema (frequências naturais e fatores de amortecimentos modais), somente os parâmetros locais (${}_r U_{jk}$ e ${}_r V_{jk}$) necessitam ser determinados (Ebersbach e Irretier, 1989).

O processo de minimização da função erro dada por (4-63) conduz a um sistema linear, a partir do qual os parâmetros locais são calculados diretamente, sem a necessidade de valores de partida, dado por

$$\begin{bmatrix} C & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{jk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{jk} \end{bmatrix} \quad (4-71)$$

onde os vetores v_{jk} são os definidos anteriormente por (4-60), os elementos da matriz C dados por (4-68) e os elementos do vetor z dados por

$$z_{jkl} = \sum_{p=1}^P \operatorname{Re} \left[H_{jk}(\omega_p) \frac{\partial \alpha_{jk}^*(\omega_p)}{\partial v_{jkl}} \right] \quad (4-72)$$

4-6 - Método não linear modificado

Com o objetivo de melhorar as condições de convergência do método iterativo não linear, mesmo com estimativas iniciais pouco exatas, Jeong, Okuma e Nagamatsu (1989) propuseram uma modificação neste método. Esta proposta consiste em se realizar o método iterativo não linear apenas para identificar os parâmetros globais do sistema e posteriormente utilizar o método conhecido como Aproximação Linear dos Resíduos (LAR) (Ebersbach e Irretier, 1989). O método é baseado na introdução de uma nova FRF função somente dos parâmetros não lineares.

Sendo a expressão da receptância dada por

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left\{ \frac{{}_rU_{jk} + i {}_rV_{jk}}{i(\omega - \omega_{dr}) + \delta_r} + \frac{{}_rU_{jk} - i {}_rV_{jk}}{i(\omega + \omega_{dr}) + \delta_r} \right\} \quad (4-73)$$

onde j é o ponto de excitação e k o ponto de captação.

Obtendo-se experimentalmente a FRF em um sistema com múltiplos graus de liberdade, com excitação em um único ponto, são definidas a parte real da FRF como H_{Rk}^p e a imaginária como H_{Ik}^p , onde k ($k=1...M$) é o ponto de resposta e ω_p é a frequência de excitação.

No processo de ajuste de curva no domínio da frequência com N graus de liberdade, os $2N+2NM$ parâmetros modais $\xi_r, \omega_{dr}, U_{rk}$ e V_{rk} ($r=1..N, k=1..M$), devem ser identificados de maneira a minimizar a função erro E dada por:

$$E = \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^M \left\{ (\alpha_{Rk}^p - H_{Rk}^p)^2 + (\alpha_{Ik}^p - H_{Ik}^p)^2 \right\} \quad (4-74)$$

onde α_{Rk}^p e α_{Ik}^p são, respectivamente, as partes real e imaginária da FRF identificada e que podem ser escritas na seguinte forma:

$$\alpha_{Rk}^p = \sum_{r=1}^N \left\{ \frac{U_{rk} \xi_r + V_{rk} (\omega_p - \omega_{dr})}{d_r} + \frac{U_{rk} \xi_r - V_{rk} (\omega_p + \omega_{dr})}{g_r} \right\} \quad (4-75)$$

$$\alpha_{Ik}^p = \sum_{r=1}^N \left\{ \frac{V_{rk} \xi_r - U_{rk} (\omega_p - \omega_{dr})}{d_r} - \frac{V_{rk} \xi_r + U_{rk} (\omega_p + \omega_{dr})}{g_r} \right\} \quad (4-76)$$

onde

$$d_r = \xi_r^2 + (\omega_p - \omega_{dr})^2 \quad (4-77)$$

$$g_r = \xi_r^2 + (\omega_p + \omega_{dr})^2 \quad (4-78)$$

Embora existam vários métodos que minimizam a equação (4-74), ou muito tempo computacional é exigido ou má convergência é ocasionada devido ao elevado número de parâmetros a identificar. É proposta então uma nova abordagem conforme a seguir.

Diferenciando parcialmente a equação (4-74) em relação a U_{rk} e V_{rk} e igualando-se a zero, tem-se

$$\sum_{p=1}^P \left\{ (\alpha_{Rk}^p - H_{Rk}^p) \frac{\partial \alpha_{Rk}^p}{\partial U_{rk}} + (\alpha_{Ik}^p - H_{Ik}^p) \frac{\partial \alpha_{Ik}^p}{\partial U_{rk}} \right\} = 0 \quad (4-79)$$

$$\sum_{p=1}^P \left\{ (\alpha_{Rk}^p - H_{Rk}^p) \frac{\partial \alpha_{Rk}^p}{\partial V_{rk}} + (\alpha_{Ik}^p - H_{Ik}^p) \frac{\partial \alpha_{Ik}^p}{\partial V_{rk}} \right\} = 0 \quad (4-80)$$

Existem parâmetros não lineares (ξ_r e ω_{dr}) e parâmetros lineares (U_r e V_r). Se os parâmetros não lineares são conhecidos, pode-se obter os parâmetros lineares diretamente sem iterações através da solução do sistema linear dado pela equação (4-80).

Desta maneira, pode-se assumir que as receptâncias α_{Rk}^p e α_{Ik}^p na equação (4-71) são função somente de ξ_r e ω_{dr} considerando que U_r e V_r como funções de ξ_r e ω_{dr} . Definindo γ_q ($q=1\dots 2N$) representando ξ_r e ω_{dr} ($r=1\dots N$) pode-se introduzir G_{Rk}^p e G_{Ik}^p em substituição a α_{Rk}^p e α_{Ik}^p como nas equações (4-81) e (4-82) a seguir.

$$\frac{\partial G_{Rk}^p}{\partial \gamma_q} = \frac{\partial \alpha_{Rk}^p}{\partial \gamma_q} = \sum_{r=1}^N \left\{ \frac{\partial \alpha_{Rk}^p}{\partial U_{rk}} \frac{\partial U_{rk}}{\partial \gamma_q} + \frac{\partial \alpha_{Rk}^p}{\partial V_{rk}} \frac{\partial V_{rk}}{\partial \gamma_q} \right\} \quad (4-81)$$

$$\frac{\partial G_{Ik}^p}{\partial \gamma_q} = \frac{\partial \alpha_{Ik}^p}{\partial \gamma_q} = \sum_{r=1}^N \left\{ \frac{\partial \alpha_{Ik}^p}{\partial U_{rk}} \frac{\partial U_{rk}}{\partial \gamma_q} + \frac{\partial \alpha_{Ik}^p}{\partial V_{rk}} \frac{\partial V_{rk}}{\partial \gamma_q} \right\} \quad (4-82)$$

Através da diferenciação parcial da equação (4-79) em relação a γ_q

tem-se

$$\sum_{p=1}^P \left\{ \frac{\partial \alpha_{Rk}^p}{\partial U_{rk}} \frac{\partial G_{Rk}^p}{\partial \gamma_q} + \frac{\partial \alpha_{Ik}^p}{\partial U_{rk}} \frac{\partial G_{Ik}^p}{\partial \gamma_q} \right\} = 0 \quad (4-83)$$

As derivadas parciais $\frac{\partial U_{rk}}{\partial \gamma_q}$ e $\frac{\partial V_{rk}}{\partial \gamma_q}$ são obtidas através da solução do

sistema de equações lineares dado por (4-83). Quando se obtém a sensibilidade da FRF em relação à γ_q os parâmetros modais que minimizam a equação (4-74) podem ser obtidos utilizando-se qualquer método iterativo. Se for utilizado o

método de Gauss-Newton, os novos valores dos parâmetros modais $\gamma_{\text{ novo}} = \gamma_{\text{ antigo}} + \delta\gamma$ podem ser obtidos resolvendo o sistema linear

$$A\delta\gamma = b \quad (4-84)$$

onde

$$A_{qt} = \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^M \left\{ \frac{\partial G_{Rk}^p}{\partial \gamma_q} \frac{\partial G_{Rk}^p}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial G_{Ik}^p}{\partial \gamma_q} \frac{\partial G_{Ik}^p}{\partial \gamma_t} \right\} \quad (4-85)$$

$$b_q = \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^M \left\{ (G_{Rk}^p - \alpha_{Rk}^p) \frac{\partial G_{Rk}^p}{\partial \gamma_q} + (G_{Ik}^p - \alpha_{Ik}^p) \frac{\partial G_{Ik}^p}{\partial \gamma_q} \right\} \quad (4-86)$$

5 - Implementação numérica

Este capítulo trata da implementação numérica dos métodos de identificação. Os fluxogramas dos programas de identificação e as rotinas numéricas que foram utilizadas, tanto para solução dos sistemas lineares como para a solução do problema de raízes de polinômios, são apresentados. Os métodos para estruturas levemente amortecidas, de Levy, de Sanathanan e Koerner, iterativo não linear e o método da aproximação linear dos resíduos foram implementados, utilizando-se a linguagem de programação FORTRAN. O software Microsoft PowerStation[®] foi adotado para compilação de todos os programas e o hardware utilizado foi da linha IBM PC.

5.1 - Rotinas numéricas utilizadas

Como este trabalho tem como objetivo analisar comparativamente os métodos de identificação, foram utilizados em todos os programas os mesmos métodos numéricos. Este procedimento buscou uniformizar a solução dos sistemas lineares que estão presentes em todos os programas. Para os métodos de Levy e de Sanathanan e Koerner é também necessária a solução do problema de raízes de polinômios.

Conforme já descrito nos capítulos anteriores, alguns métodos de identificação conduzem a sistemas lineares mal condicionados. Com o objetivo de minimizar esta dificuldade, rotinas numéricas reconhecidamente otimizadas foram escolhidas. Estas rotinas fazem parte da publicação *Numerical Recipes in FORTRAN* (Press et al, 1992), e somente suas principais características serão apresentadas, a seguir, neste trabalho.

O método adotado para solução dos sistemas lineares foi o da decomposição LU. Este método requer aproximadamente $\frac{1}{3}N^3$ execuções dos loops internos, cada um com uma multiplicação e uma divisão, sendo 1,5 vezes mais eficiente que a rotina de Gauss-Jordam. Com o objetivo de eliminar os erros acumulados durante o processo de solução dos sistemas lineares, uma rotina iterativa de melhoria da solução foi utilizada (ver *Numerical Recipes in FORTRAN*, Press et al, 1992).

Para determinação das raízes do polinômio do denominador das FRF identificadas, foi utilizada uma rotina que monta uma matriz do tipo

Hessenberg, cujos autovalores são as raízes desejadas. Este método foi escolhido em função dos sofisticados métodos de convergência presentes na rotina de determinação dos autovalores. Para aplicação deste método o polinômio deve possuir coeficientes reais sendo, desta maneira, completamente aplicável a este trabalho.

5.2 - Fluxogramas dos métodos implementados

A figura 5.1 mostra o fluxograma do programa desenvolvido utilizando o método descrito no item 4.1, destinado à identificação modal de estruturas levemente amortecidas. Inicialmente é realizada a entrada dos valores das N frequências naturais ω_r e das N frequências Ω_r escolhidas para o processo de identificação, bem como os valores das partes reais e imaginárias da FRF associadas a estas frequências. Embora não sejam necessários os valores da FRF amostrada durante o processo de ajustagem propriamente dito, os mesmos são lidos no arquivo em disco correspondente para cálculo do erro. Em seguida é montado o sistema linear e sua solução, que é realizada de acordo com a rotina numérica adotada já descrita anteriormente neste capítulo, fornece os valores das constantes modais ${}_r A_{jk}$. Os valores dos fatores de amortecimento modais ξ_r são então determinados e é feita a regeneração da FRF identificada. Em sua parte final, este programa calcula o erro resultante no processo de identificação e gera um arquivo em disco com os valores dos parâmetros modais identificados e da FRF identificada.

O fluxograma do programa que utiliza o método de Levy está mostrado nas figuras 5.2a e 5.2b. Os dados de entrada necessários são os graus dos polinômios do numerador e do denominador que constituem a FRF a ser identificada, respectivamente M e N . Em seguida é feita a leitura do arquivo de disco com os valores da FRF obtidos experimentalmente e montado o sistema de equações lineares descrito no item 4.2. A solução deste sistema fornece os $M + 1$ coeficientes do polinômio do numerador e os $N + 1$ coeficientes do polinômio do denominador da FRF. A seguir são determinadas as raízes do polinômio do denominador que são os autovalores λ_r , utilizando-se a rotina numérica descrita anteriormente neste capítulo, a partir dos quais são calculados os fatores de amortecimento modais ξ_r e as frequências naturais ω_r . No caso do resíduo de rigidez ter sido incluído, o mesmo é calculado. Neste ponto são calculados os resíduos modais ${}_r R_{jk}$. Finalmente, são calculados a FRF identificada e o erro associado e é gerado um arquivo de disco com os valores dos parâmetros modais identificados e da FRF identificada.

O método de Sanathanan e Koerner foi implementado pelo programa descrito pelo fluxograma dado pelas figuras 5.3a e 5.3b. Sua estrutura é basicamente a mesma do programa utilizado para a implementação do método de Levy, sendo a principal diferença a comparação do erro obtido nesta iteração L com o erro obtido na iteração $L - 1$ anterior, com o objetivo de estabelecer o final do processo de minimização do erro. No final de cada iteração é calculada a função ponderadora $W(\omega_p)$ que será utilizada para a montagem do sistema linear da iteração seguinte.

A figura 5.4 mostra o fluxograma do programa que utiliza o método Iterativo não-linear. Neste programa os dados de entrada são as frequências naturais ω_r , os fatores de amortecimento modais ξ_r e os resíduos modais ${}_rR_{jk}$ identificadas por algum outro método, que constituem os valores de partida do processo iterativo. A seguir é realizada a leitura do arquivo de disco com os valores da FRF obtidos experimentalmente. Em seguida é montado o sistema linear do método, cuja solução fornece os valores do incremento a ser aplicado aos parâmetros modais. Os novos valores dos parâmetros modais obtidos são então utilizados para montagem de um novo sistema linear. Este processo iterativo é finalizado quando o erro calculado atinge seu valor mínimo. Novamente, é gerado o arquivo de disco com os valores dos parâmetros modais identificados e da FRF identificada.

O fluxograma do programa que implementa o método da Aproximação linear dos resíduos é descrito através da figura 5.5. As frequências naturais ω_r e os fatores de amortecimento modais ξ_r constituem os dados de entrada. A seguir é realizada a leitura do arquivo de disco com os valores da FRF obtidos experimentalmente. O sistema linear correspondente a este método é montado e solucionado, fornecendo o valor das constantes modais ${}_rR_{jk}$. A FRF identificada e o erro são calculados e é gerado o arquivo de disco com os valores dos parâmetros modais identificados e da FRF identificada.

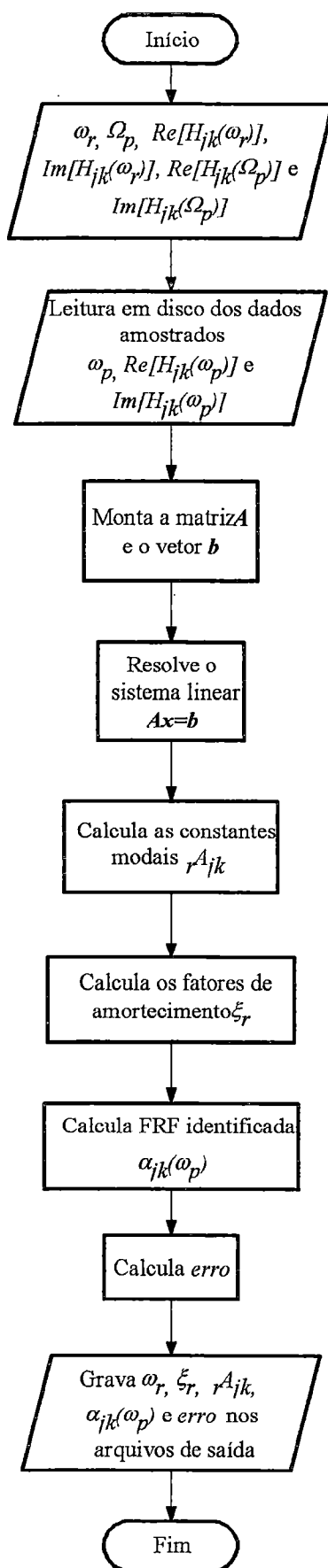


Figura 5.1 - Fluxograma do programa “Estruturas levemente amortecidas”

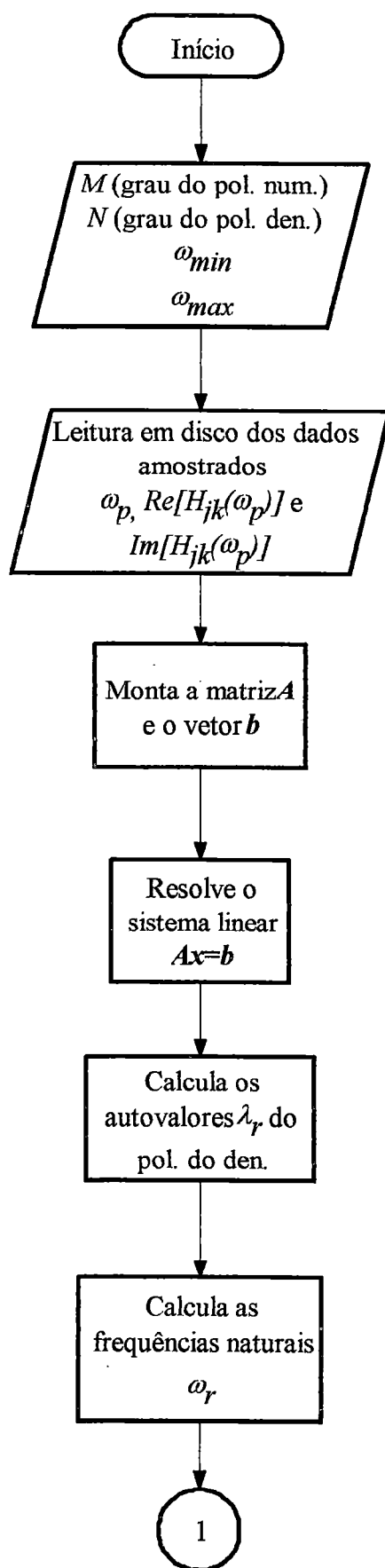


Figura 5.2a - Fluxograma do programa "Levy" Parte 1

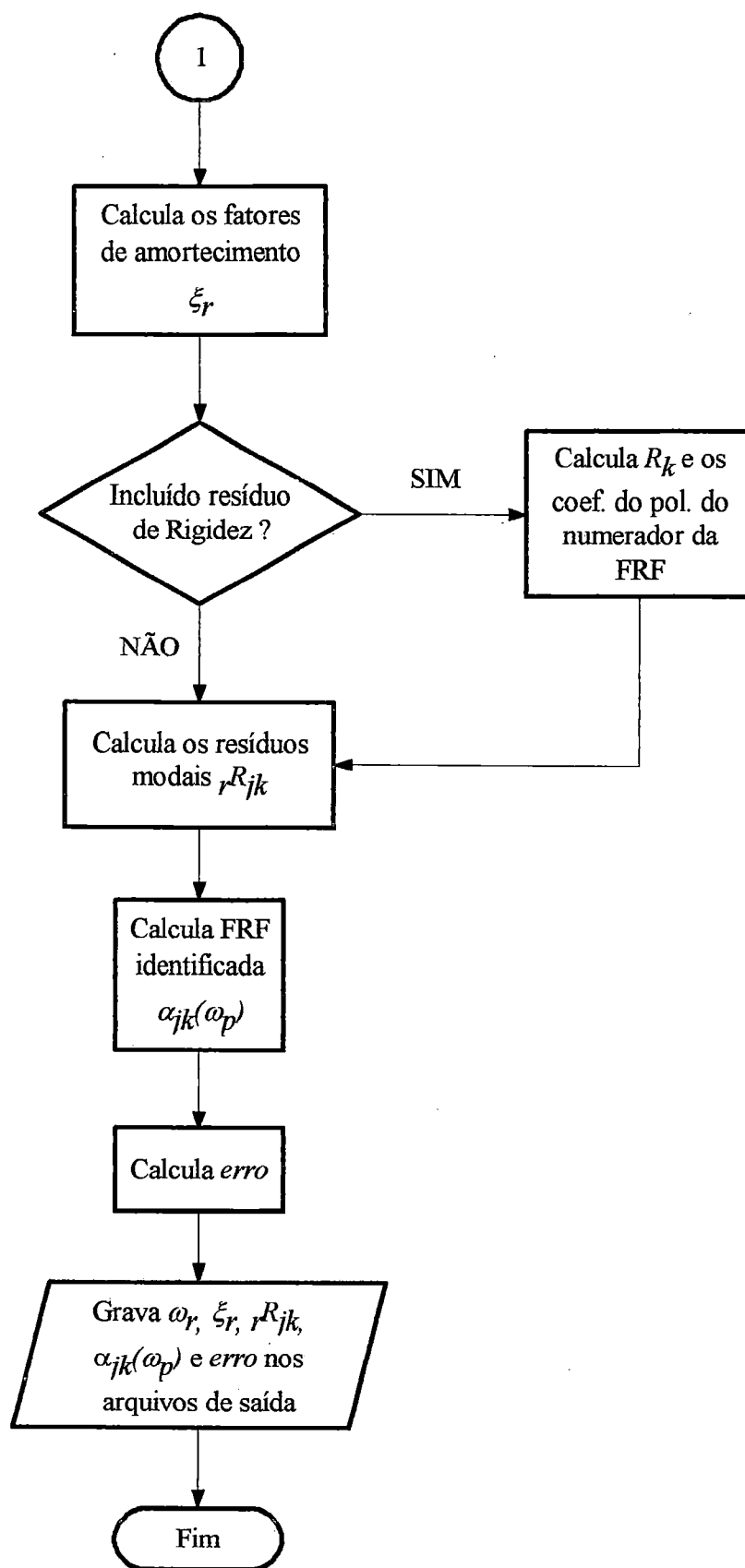


Figura 5.2b - Fluxograma do programa "Levy" Parte 2

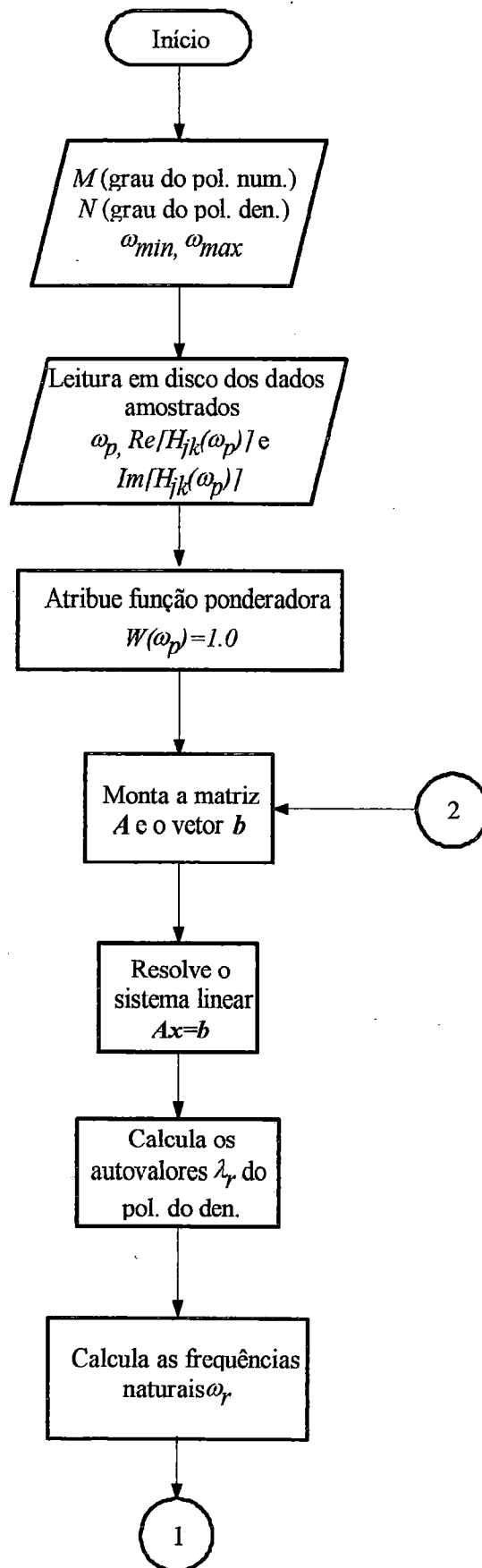


Figura 5.3a - Fluxograma do programa "Sanathanan e Koerner" Parte 1

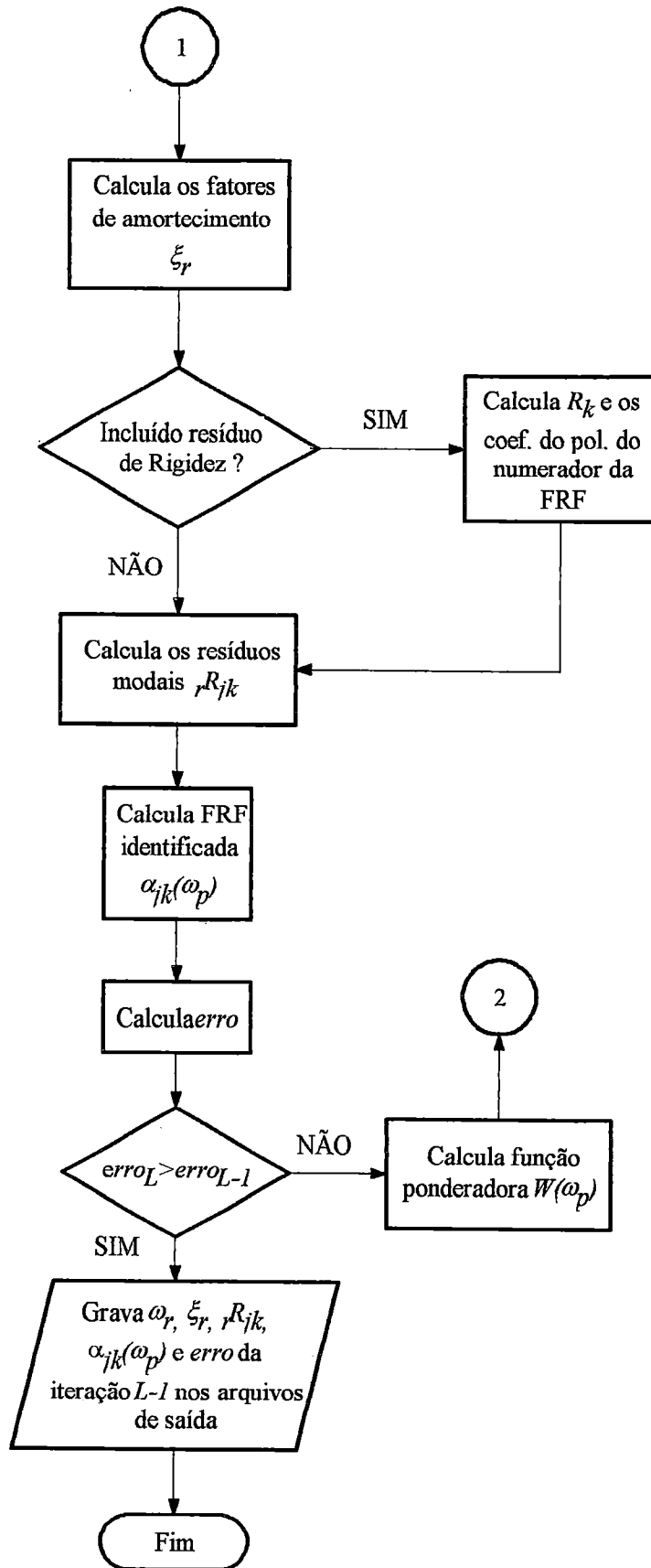


Figura 5.3b - Fluxograma do programa "Sanathanan e Koerner" Parte 2

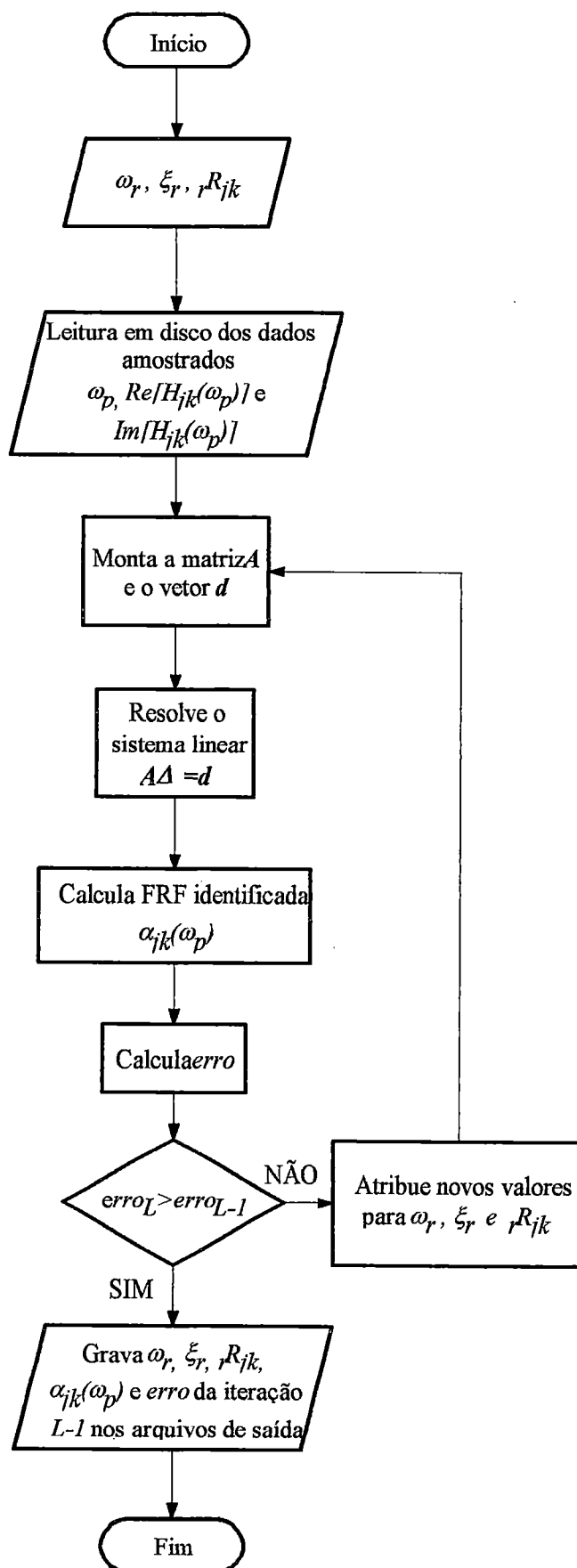


Figura 5.4 - Fluxograma do programa “Iterativo não linear”

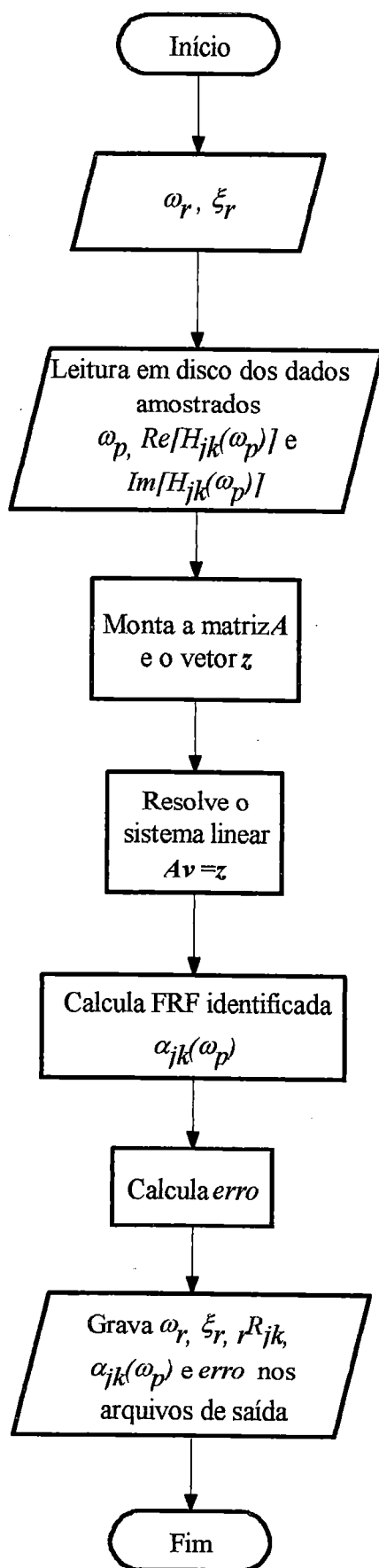


Figura 5.5 - Fluxograma do programa "Aproximação linear dos resíduos"

6 - Ensaio experimental, resultados e discussões

6.1 - Ensaio experimental

Para realizar a verificação dos métodos implementados e a análise comparativa, que é o objetivo deste trabalho, foram feitos ensaios experimentais numa placa retangular de alumínio, engastada em um dos lados e livre nos demais, representada esquematicamente na figura 6.1.

De maneira a simular o engastamento, a placa foi montada entre chapas de aço espessas, sendo este conjunto fixado rigidamente a uma base inercial.

A excitação foi realizada utilizando-se um excitador eletromagnético, e a forma de excitação utilizada foi a varredura de seno em uma faixa de 10 a 410 Hz. O ponto número 5 da figura 6.1 foi adotado como único para a



excitação. Este ponto foi escolhido em função do mesmo não pertencer a nenhuma linha nodal. A captação foi realizada nos pontos 1 a 17, gerando 17 FRF. Foi utilizado como padrão de nomenclatura a seguinte notação: FRF_{xy} , onde x representa o ponto de excitação e y representa o ponto de captação.

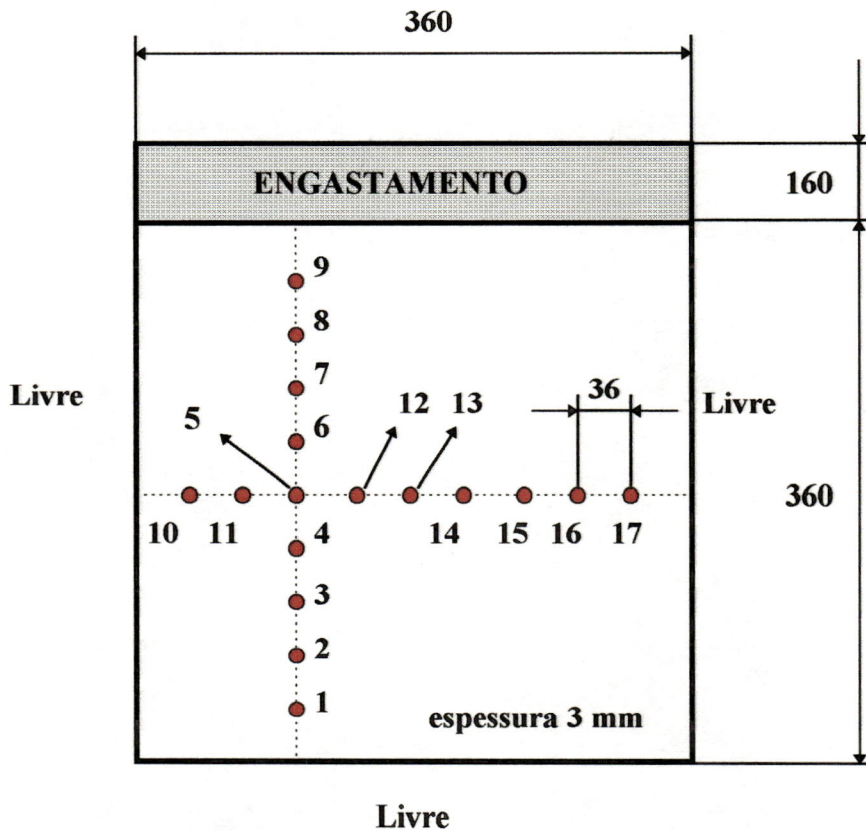


Fig. 6.1 - Placa ensaiada

A medição da força excitadora foi feita através de um transdutor de força enquanto que na medição da saída empregou-se um acelerômetro. Como este trabalho utiliza a receptância, foi necessária a realização de uma dupla integração para a obtenção dos deslocamentos.

A aparelhagem utilizada nesta investigação experimental encontra-se relacionada na tabela 6.1 a seguir.

Equipamento	Fabricante	Modelo
Acelerômetro	Brüel & Kjaer	4383
Analisador de espectro	Tektronix	2630
Amplificador de carga	Brüel & Kjaer	2626
Excitador eletromagnético	Brüel & Kjaer	4809
Gerador de sinais	Brüel & Kjaer	1047
Amplificador de potência	Brüel & Kjaer	2712
Transdutor de força	Brüel & Kjaer	8200

Tabela 6.1 - Equipamentos Utilizados

6.2 - Resultados e discussões

Os resultados que serão aqui apresentados foram obtidos através da utilização dos programas implementados, cuja descrição foi feita no capítulo 5, para identificação das FRF levantadas experimentalmente.

A apresentação dos resultados está dividida em duas partes. A primeira está concentrada nos métodos de Levy e Sanathanan e Koerner, discutindo a inclusão ou não do resíduo de rigidez no processo de identificação. A segunda realiza o estudo comparativo dos cinco métodos implementados em uma faixa de frequências de 0 a 410 Hz. Nesta segunda parte foram incluídos os resíduos de rigidez em todos os métodos e, nos métodos da aproximação linear dos resíduos e iterativo não linear, também o resíduo de massa.

6.2.1 - Análise da inclusão do resíduo de rigidez nos métodos de Levy e Sanathanan e Koerner.

Devido ao fato de que os métodos de Levy e Sanathanan e Koerner possuem limitação quanto à largura da faixa de frequências utilizada no processo de ajustagem, neste item serão apresentados resultados de ajustes realizados em duas faixas de frequências : 0 a 200 Hz e 0 a 410 Hz. Não será discutida neste item a aplicabilidade destes métodos à grandes faixas de frequência, a qual será feita no item subsequente, restringindo-se a análise apenas à influência da inclusão ou não do resíduo de rigidez no processo de ajuste.

Foram escolhidos como resultados significativos uma FRF de ponto e duas FRF de transferência.

As figuras 6.2 e 6.3 mostram o ajuste realizado pelo método de Levy na FRF55 (de ponto) e na FRF512 (de transferência) respectivamente, onde verifica-se claramente a qualidade do ajuste quando utilizado o resíduo de rigidez, sendo que o ajuste sem a inclusão deste resíduo resultou na não identificação da frequência associada ao segundo modo de vibrar. Em contrapartida, a figura 6.4 que representa o ajuste da FRF51 mostra que não houve diferença significativa entre os ajustes com e sem a inclusão do resíduo de rigidez.

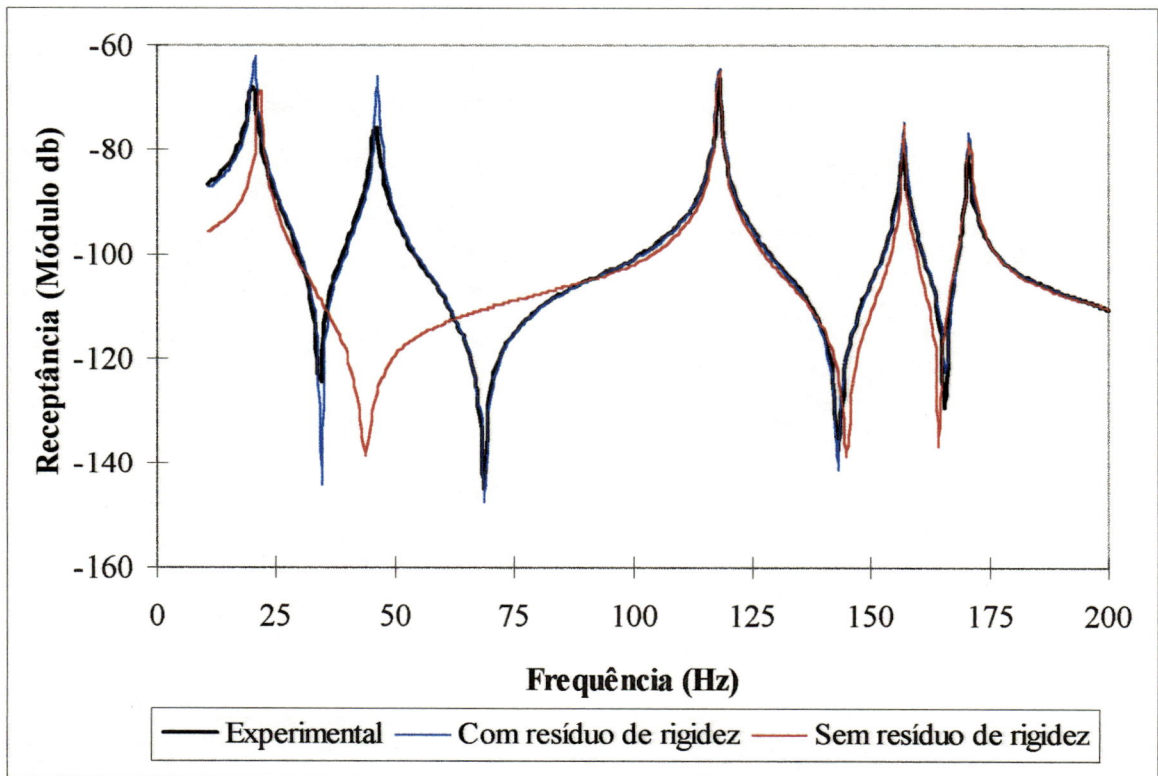


Fig. 6.2 - FRF55 método de Levy

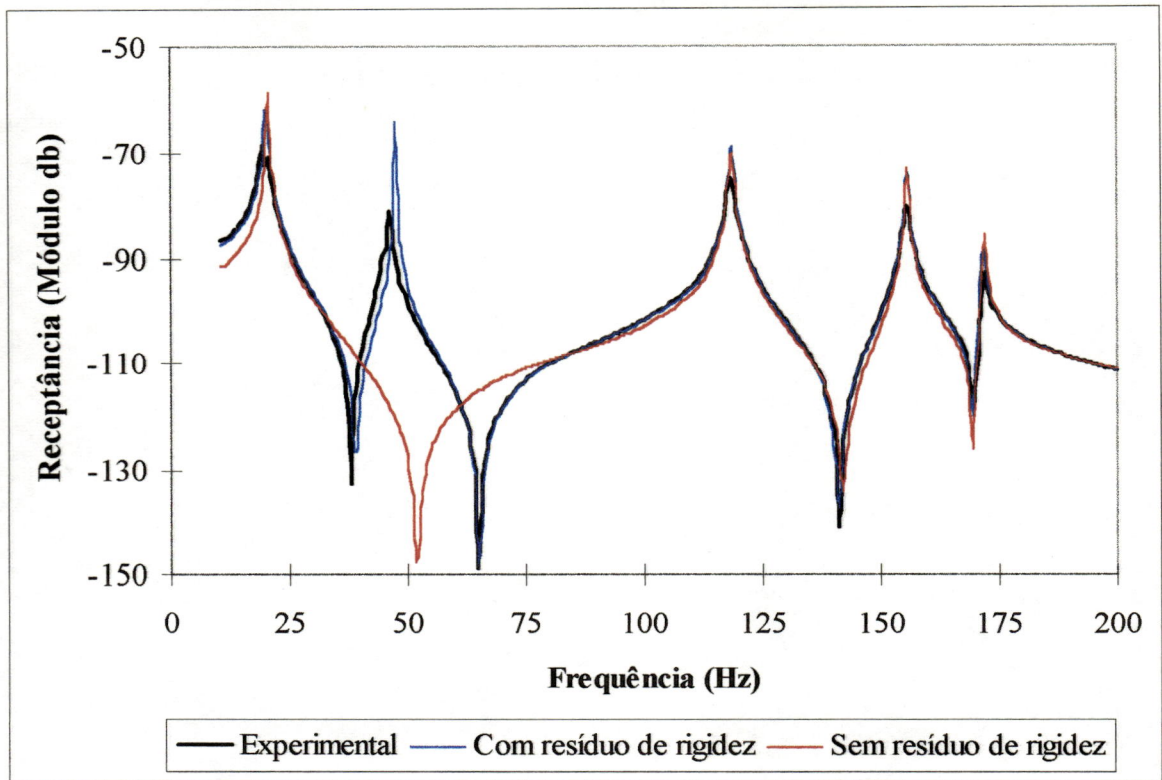


Fig. 6.3 - FRF512 método de Levy

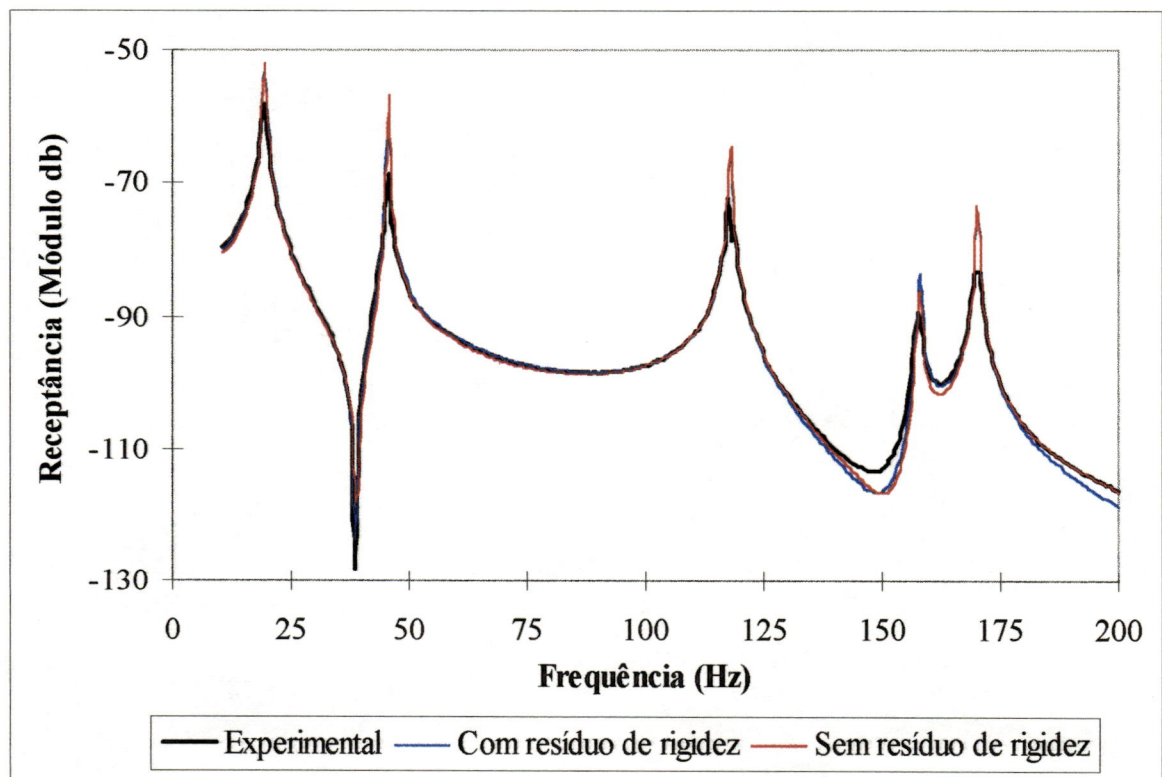


Fig. 6.4 - FRF51 método de Levy

A seguir serão apresentados resultados que utilizam a faixa de frequências de 0 a 410 Hz e que incluem, desta maneira, os quatro modos que estão presentes na faixa utilizada no ensaio experimental e que não estavam incluídos nos ajustes apresentados. Deve ser observado que a placa ensaiada é um sistema contínuo e portanto, sempre estarão sendo desconsiderados no ajuste alguns modos de vibrar.

As figuras 6.5 e 6.6 mostram, respectivamente, as FRF55 e FRF515 identificadas com e sem a inclusão de resíduo, desta vez utilizando-se para os ajustes, a faixa completa ensaiada. Novamente, é possível verificar que houve uma melhoria significativa no ajuste quando incluído o resíduo de rigidez. É importante observar que na FRF55 a melhoria foi muito mais significativa do que na FRF515.

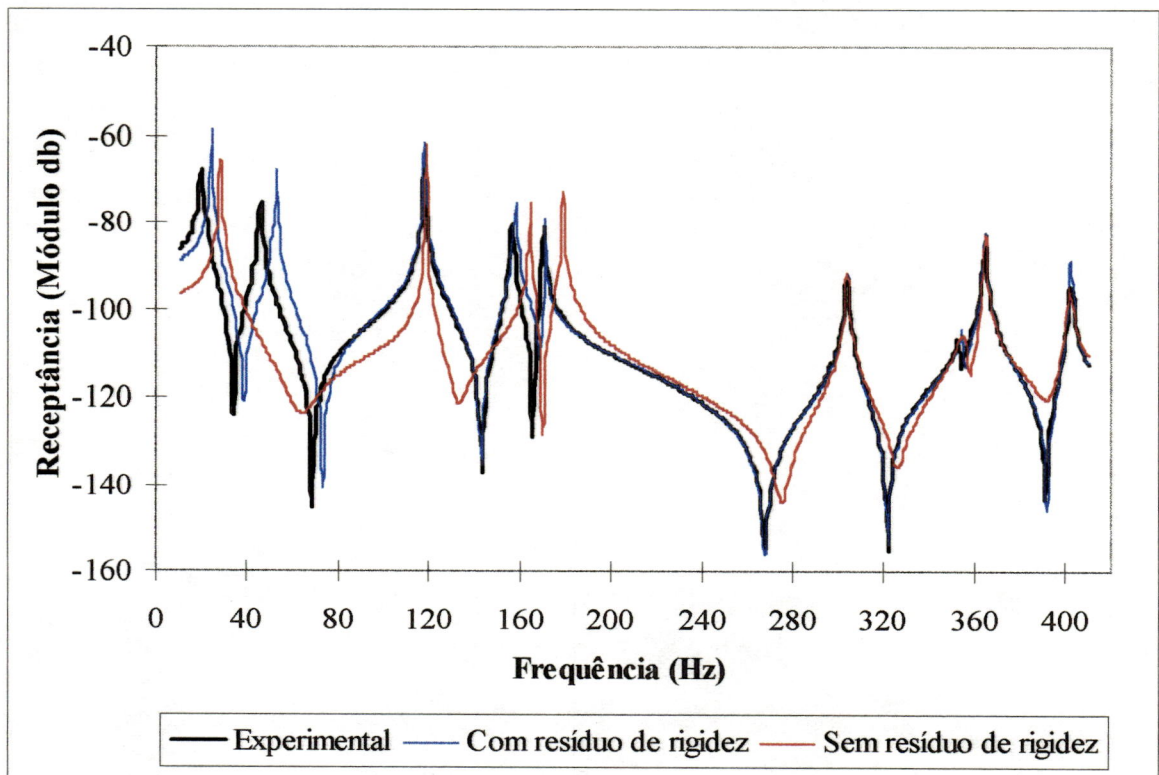


Fig. 6.5 - FRF55 método de Levy

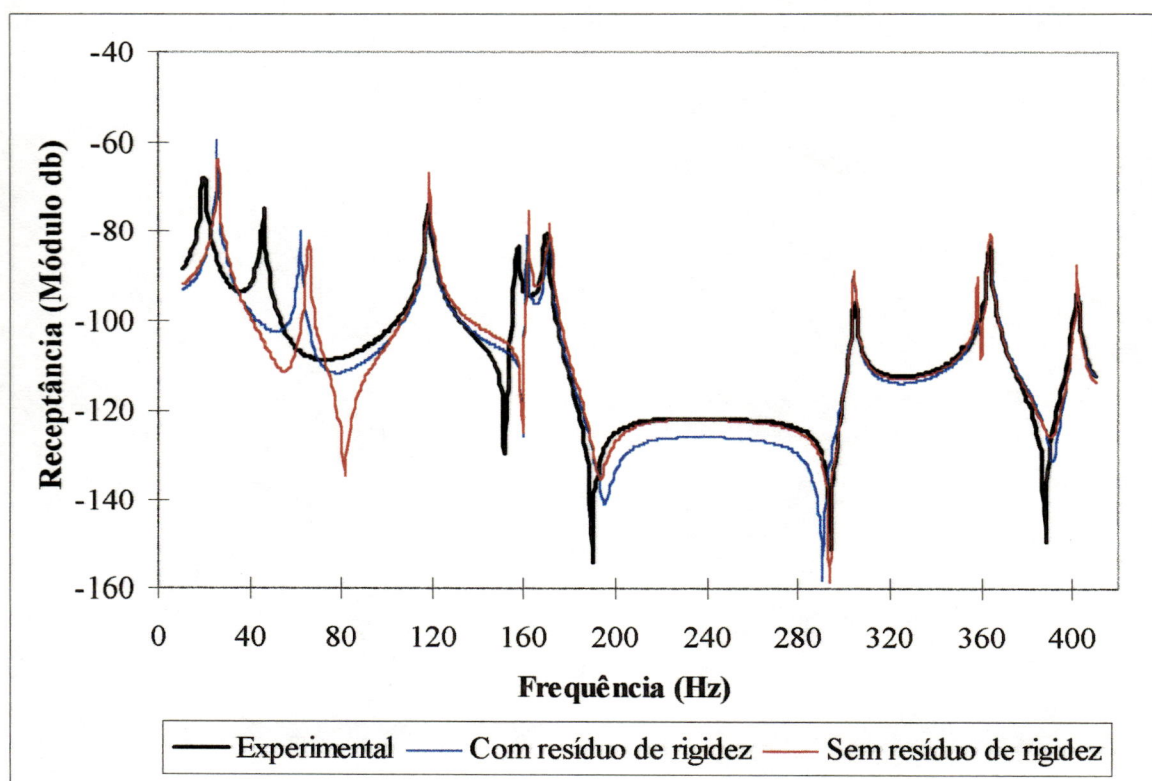


Fig. 6.6 - FRF515 método de Levy

A mesma metodologia utilizada para a análise do método de Levy foi aplicada ao método de Sanathanan e Koerner. As figuras 6.7 e 6.8 mostram o ajuste realizado com as FRF55 e FRF51, respectivamente, na faixa de 0 a 200 Hz, onde deve ser verificado que não houve diferença tão significativa com a inclusão do resíduo de rigidez no processo de ajustagem, como quando utilizado o método de Levy. Este fato é explicado, lembrando-se que o método de Sanathanan e Koerner é iterativo, onde cada nova iteração visa melhorar o ajuste da iteração anterior. A figura 6.9 apresenta o resultado do ajuste da FRF55 na faixa de 0 a 410 Hz e verifica-se que ocorreu um ganho de qualidade quando incluído o resíduo de rigidez no ajuste. Este resultado nesta ampla

faixa de frequência mostra que o processo iterativo não conseguiu melhorar sensivelmente o ajuste da primeira iteração onde é utilizado o método de Levy, que possui problemas quando utilizado em largas faixas de frequência e que conforme analisado anteriormente não apresentou bons resultados sem a inclusão do resíduo de rigidez.

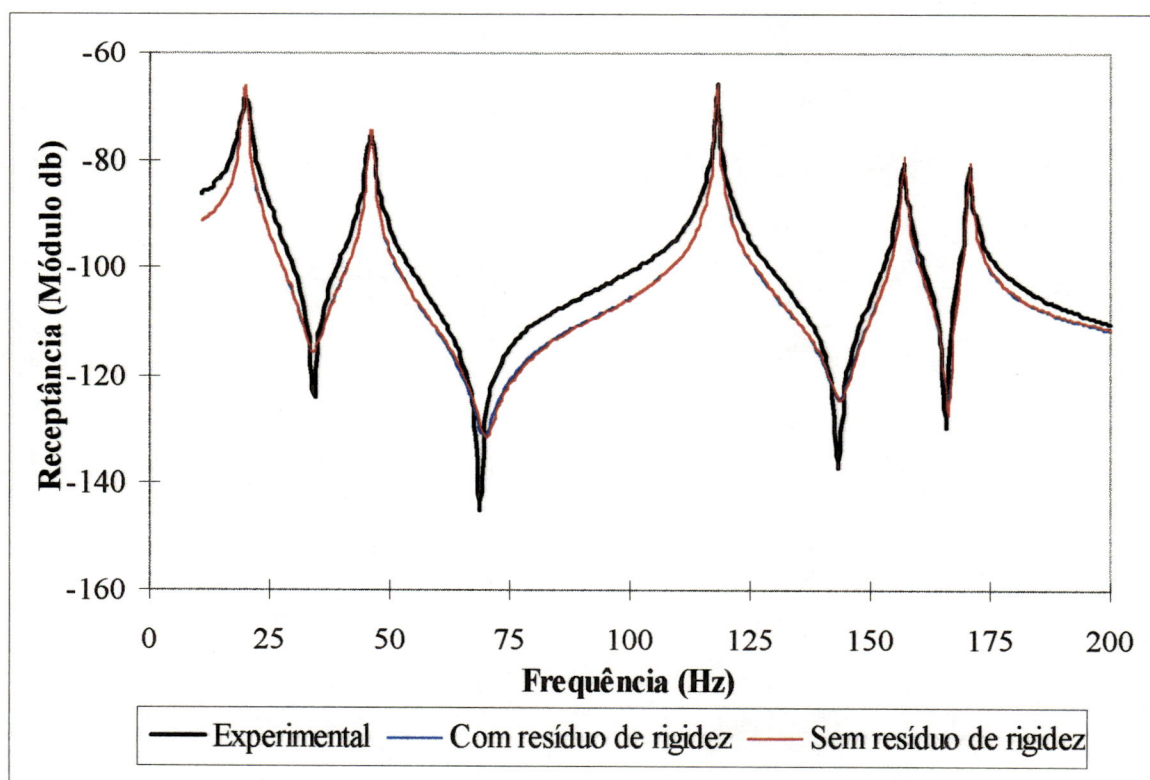


Fig. 6.7 - FRF55 método de Sanathanan e Koerner

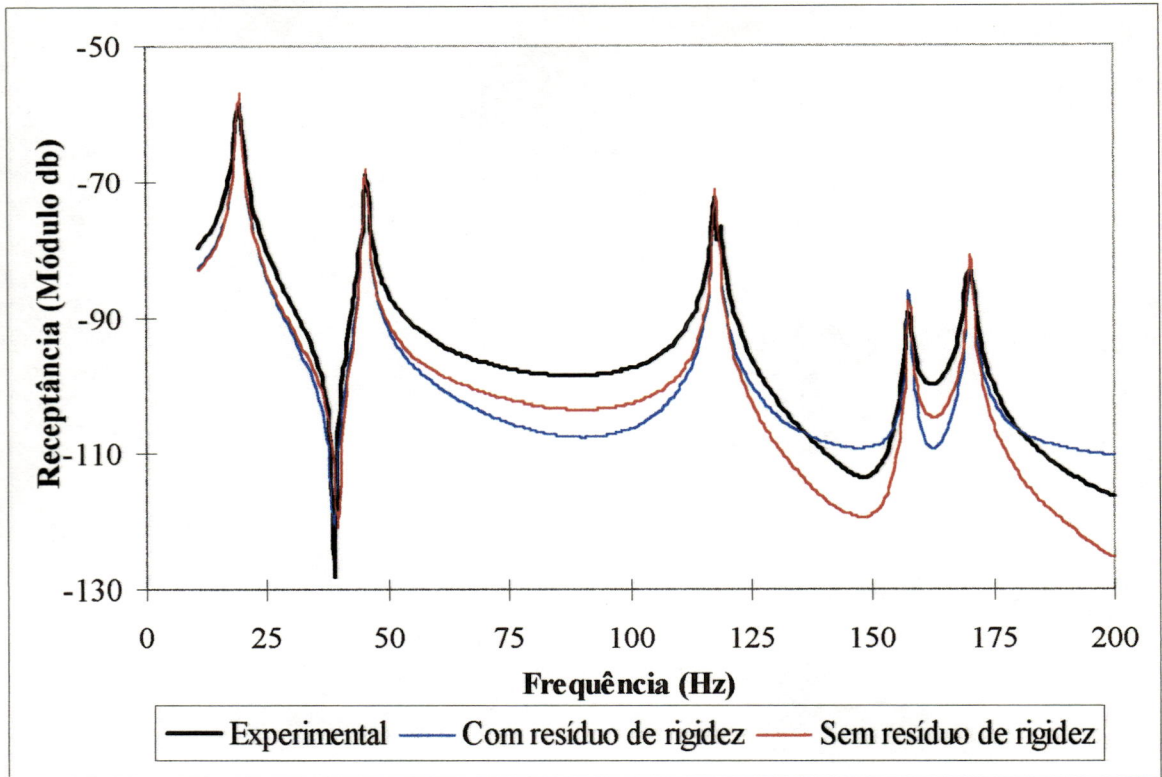


Fig. 6.8 - FRF51 método de Sanathanan e Koerner

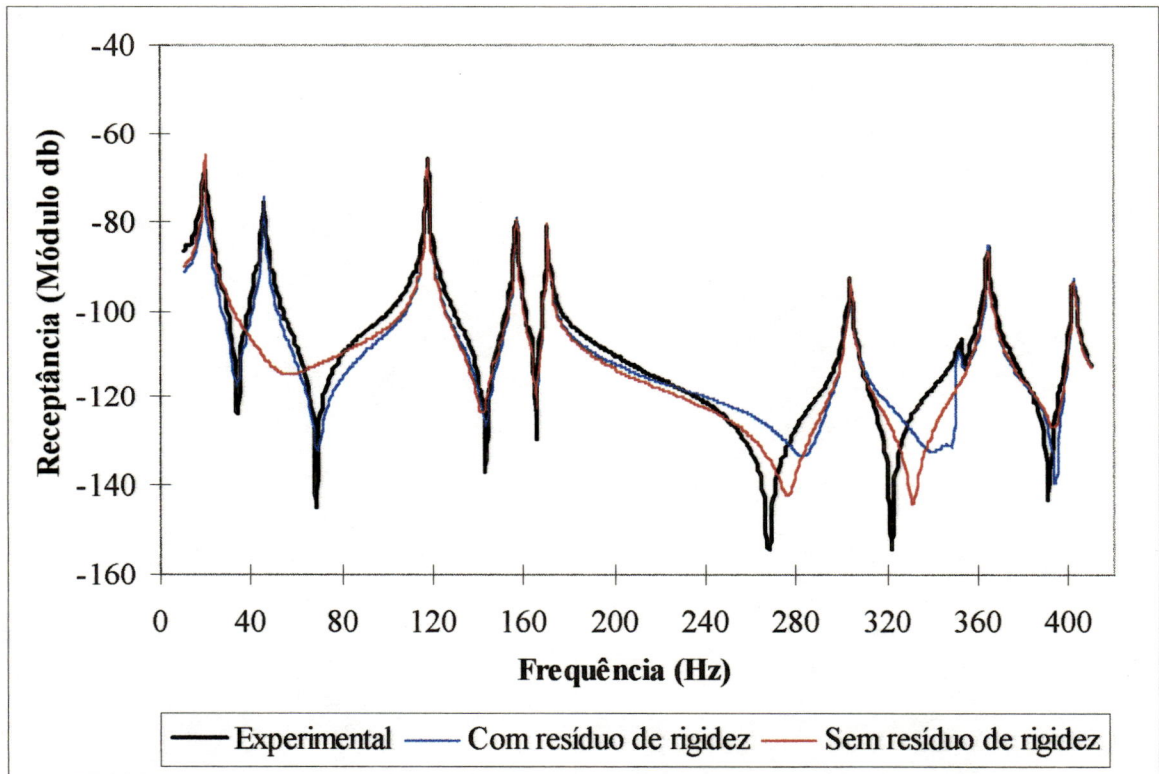


Fig. 6.9 - FRF55 método de Sanathanan e Koerner

A seguir será apresentada a tabela 6.2 que mostra os valores experimentais obtidos para as frequências naturais, bem como suas médias e desvio padrão. Esta tabela será útil na análise das tabelas subsequentes que apresentam os valores obtidos através dos métodos de identificação.

	ω_1 Hz	ω_2 Hz	ω_3 Hz	ω_4 Hz	ω_5 Hz	ω_6 Hz	ω_7 Hz	ω_8 Hz	ω_9 Hz
FRF51	19,38	46,63	117,5	157,5	170,0	304,4	351,3	358,8	404,4
FRF52	20,00	45,00	119,4	157,5	171,3	305,6	350,0	362,5	400,6
FRF53	19,38	46,25	119,4	157,5	171,9	305,0	347,5	365,6	398,1
FRF54	20,00	46,25	118,1	157,5	171,3	303,8	350,6	365,6	398,8
FRF55	20,00	46,25	118,1	156,9	170,6	303,8	352,5	365,0	402,5
FRF56	20,63	46,25	118,1	156,9	171,3	304,4	348,8	366,3	-----
FRF57	20,63	46,25	119,4	158,1	171,3	305,0	345,6	367,5	403,8
FRF58	20,00	45,63	120,0	158,8	171,3	306,3	349,4	368,1	404,4
FRF59	21,88	47,50	119,4	157,5	172,5	305,0	354,4	368,8	405,0
FRF510	20,00	45,00	116,3	157,5	167,5	300,6	353,8	366,9	403,8
FRF511	20,63	45,63	117,5	158,1	170,0	305,0	-----	366,3	403,8
FRF512	19,38	46,25	118,1	155,6	171,9	300,0	352,5	366,9	403,8
FRF513	20,00	46,25	118,3	155,0	171,3	298,8	353,8	367,5	403,8
FRF514	19,38	45,63	118,1	156,3	170,6	301,3	354,4	365,6	403,1
FRF515	20,00	46,25	118,1	157,5	170,0	305,0	352,5	363,8	401,9
FRF516	19,38	45,00	117,5	158,1	168,8	304,4	352,5	366,3	403,1
FRF517	19,38	45,63	116,7	156,9	166,9	300,0	353,8	366,3	403,1
Média	20,10	45,96	118,1	157,2	170,3	303,0	352,0	366,5	402,8
Desv. Pad.	0,715	0,655	1,048	1,071	1,665	2,511	2,689	1,317	1,980

Tabela 6.2 - Valores experimentais de frequências naturais

As tabelas 6.3 a 6.9 abaixo mostram os valores das constantes modais identificadas, dos resíduos de rigidez e do erro E definido pela expressão 4.63 que originaram as figuras apresentadas neste item. Os valores referentes aos ajustes na faixa de 0 a 410 Hz serão apresentados no item 6.2.2 a seguir.

FRF51 - Método de Levy 0 a 200 Hz						
Com resíduo de rigidez				Sem resíduo de rigidez		
Modo	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	${}_rR_{jk}$ (10^{-6})	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	${}_rR_{jk}$ (10^{-6})
1	19,51	11,6	-0,334+ i 658,0	19,50	11,0	-1,01+ i 623
2	45,55	2,43	0,396+ i 164	45,64	2,26	0,762+ i 150
3	117,9	1,28	1,10- i 140	117,9	1,31	1,08- i 144
4	157,9	0,886	0,339+ i 18,2	157,8	0,697	0,315+ i 14,3
5	170,2	1,06	-0,180- i 49,5	170,1	1,04	-0,0998- i 48,9

Tabela 6.3 - Parâmetros modais obtidos por ajustagem

FRF51 - Método de Sanathanan e Koerner 0 a 200 Hz						
Com resíduo de rigidez				Sem resíduo de rigidez		
Modo	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	${}_rR_{jk}$ (10^{-6})	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	${}_rR_{jk}$ (10^{-6})
1	19,41	16,2	0,345+ i 453	19,41	16,2	2,32+ i 454
2	45,39	1,94	-2,18+ i 93,0	45,39	1,94	-1,72+ i 92,9
3	117,8	0,742	12,8- i 70,9	117,8	0,746	13,3- i 70,8
4	157,7	0,707	0,295+ i 12,02	157,8	0,691	0,894+ i 11,9
5	170,3	0,899	-8,44- i 26,5	170,3	0,917	-7,56- i 26,9

Tabela 6.4 - Parâmetros modais obtidos por ajustagem

FRF55 - Método de Levy 0 a 200 Hz						
Com resíduo de rigidez				Sem resíduo de rigidez		
Modo	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	${}_rR_{jk}$ (10^{-6})	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	${}_rR_{jk}$ (10^{-6})
1	20,36	8,86	-1,49- i 263	21,59	3,76	-1,41- i 111
2	46,42	1,61	1,37- i 96,1	-	-	-
3	117,9	0,983	0,877- i 144	117,9	0,827	1,36- i 122
4	156,9	1,67	0,790- i 49,8	156,9	1,03	1,24- i 30,3
5	170,7	1,46	0,145- i 37,0	170,8	1,58	-0,419- i 39,3

Tabela 6.5 - Parâmetros modais obtidos por ajustagem

FRF55 - Método de Sanathanan e Koerner 0 a 200 Hz						
Modo	Com resíduo de rigidez			Sem resíduo de rigidez		
	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	${}_rR_{jk}$ (10^{-6})	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	${}_rR_{jk}$ (10^{-6})
1	19,75	8,75	17,7- i 152	19,74	8,84	17,6- i 152
2	45,94	1,22	-0,528- i 58,0	45,94	1,21	-0,505- i 58,0
3	118,0	0,326	14,4- i 89,9	118,0	0,326	14,4- i 89,9
4	156,9	2,05	2,39- i 34,9	156,9	2,05	2,43- i 34,9
5	170,6	1,62	5,04- i 25,8	170,6	1,62	5,08- i 25,8

Tabela 6.6 - Parâmetros modais obtidos por ajustagem

FRF512 - Método de Levy 0 a 200 Hz						
Modo	Com resíduo de rigidez			Sem resíduo de rigidez		
	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	${}_rR_{jk}$ (10^{-6})	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	${}_rR_{jk}$ (10^{-6})
1	20,27	10,5	-0,419+ i 270	20,66	7,24	-1,57+ i 183
2	47,52	1,42	0,477+ i 43,9	-	-	-
3	118,5	2,21	0,0362+ i 128	118,5	1,95	-0,336+ i 112,5
4	155,6	1,91	-1,48+ i 67,1	155,6	1,57	-1,55+ i 54,9
5	171,5	1,34	0,105+ i 13,6	171,9	1,51	0,405+ i 14,0

Tabela 6.7 - Parâmetros modais obtidos por ajustagem

	Resíduo de rigidez (10^{-8} m/N)	
	Levy	Sanathanan e Koerner
FRF51	-17,9	253
FRF55	95,0	7,82
FRF512	-64,2	-

Tabela 6.8 - Resíduos de rigidez identificados

	Erro na ajustagem ($10^{-6} \text{ m}^2/\text{N}^2$)			
	Levy		Sanathanan e Koerner	
	com resíduo	sem resíduo	com resíduo	sem resíduo
FRF51	29,2	28,6	16,1	16,1
FRF55	1,67	2,80	0,100	0,100
FRF512	1,20	3,41	-	-

Tabela 6.9 - Erro resultante da ajustagem

É também importante observar que, devido aos valores obtidos das constantes modais, onde a parte real é muito pequena em relação à parte imaginária, pode-se considerar a distribuição do amortecimento como sendo do tipo proporcional.

6.2.2 - Análise comparativa dos cinco métodos implementados.

As figuras 6.10 até 6.36 que estão apresentadas a seguir foram originadas da aplicação dos cinco métodos de ajuste implementados neste trabalho a sete FRF que foram levantadas através do ensaio experimental.

Com o intuito de verificar a qualidade do ajuste feito através do método de Levy, que mostrou-se eficiente quando utilizado em faixas estreitas de frequência, em faixas que contenham um número maior de modos, este método foi aplicado na faixa total de frequências utilizada no ensaio experimental. Os ajustes realizados para a FRF55 e FRF515 já foram apresentados nas figuras 6.5 e 6.6, enquanto que as figuras 6.10 a 6.14 mostram a identificação executada nas outras FRF.

Embora a maioria destes ajustes, utilizando-se o método de Levy, não possuam boa qualidade, deve ser notado que melhores resultados foram obtidos na região de altas frequências, enquanto que na região de baixas frequências, principalmente o primeiro e o segundo modo, piores resultados foram obtidos. Deve ser observado também que um grande erro é encontrado no processo de ajuste na região das ressonâncias, fato este diretamente ligado à ponderação do erro pelo denominador da FRF. Estas constatações já eram esperadas e justificam as afirmações feitas no capítulo 4, no item referente ao método de Levy.

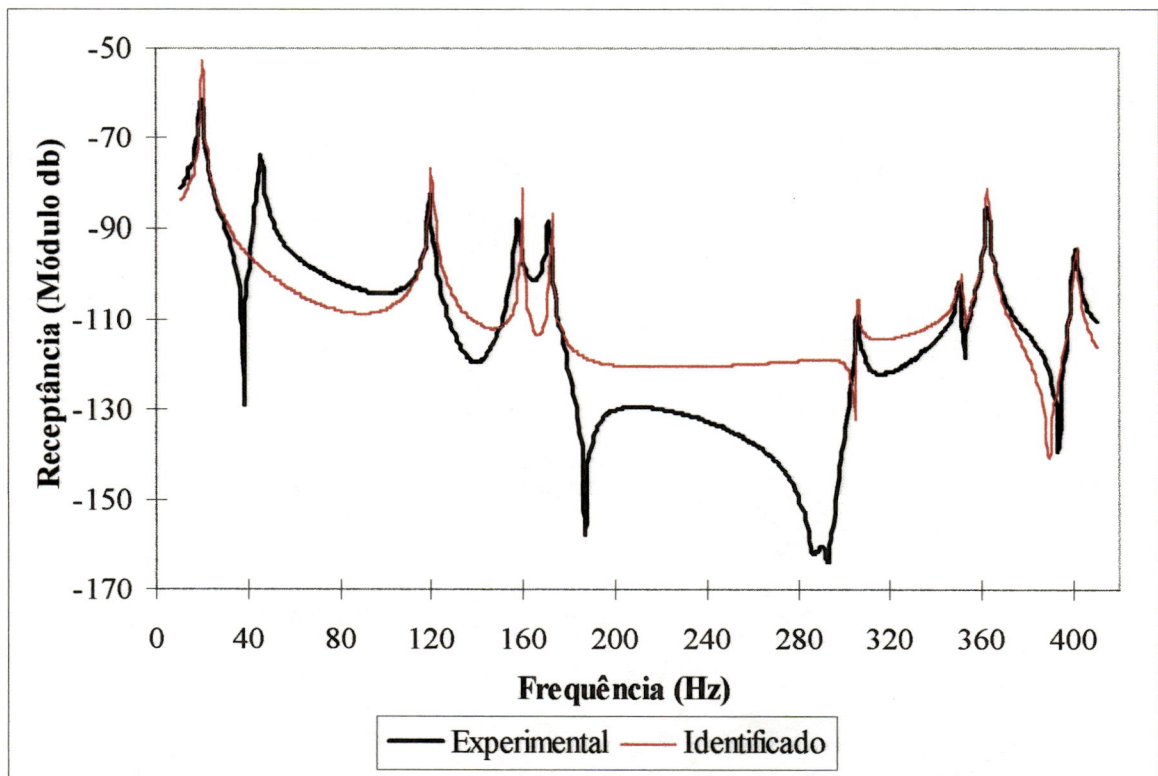


Fig. 6.10 - FRF52 método de Levy

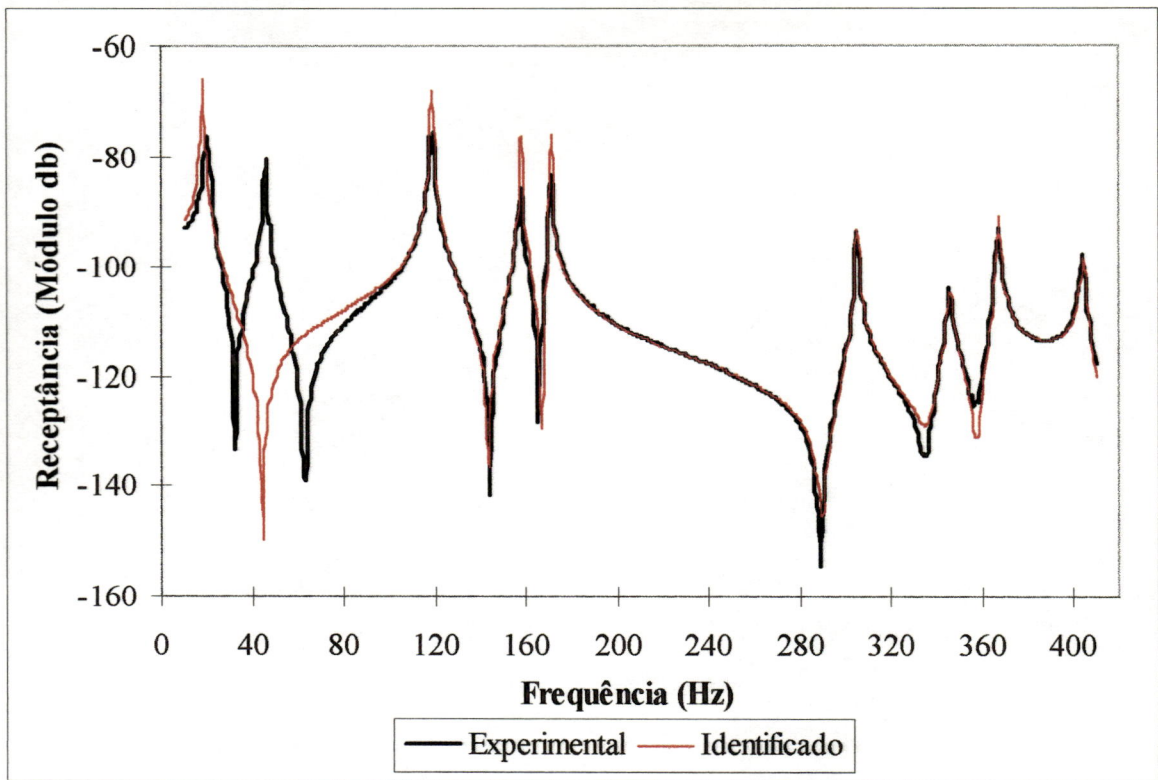


Fig. 6.11 - FRF57 método de Levy

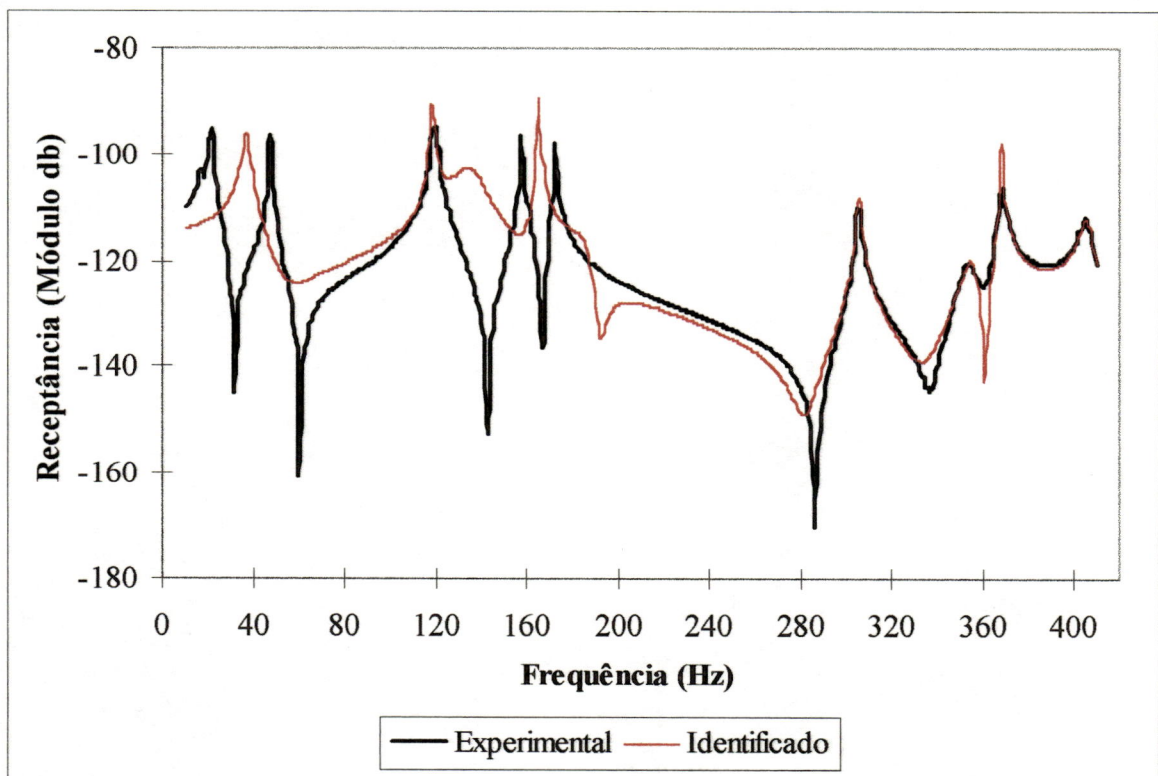


Fig. 6.12 - FRF59 método de Levy

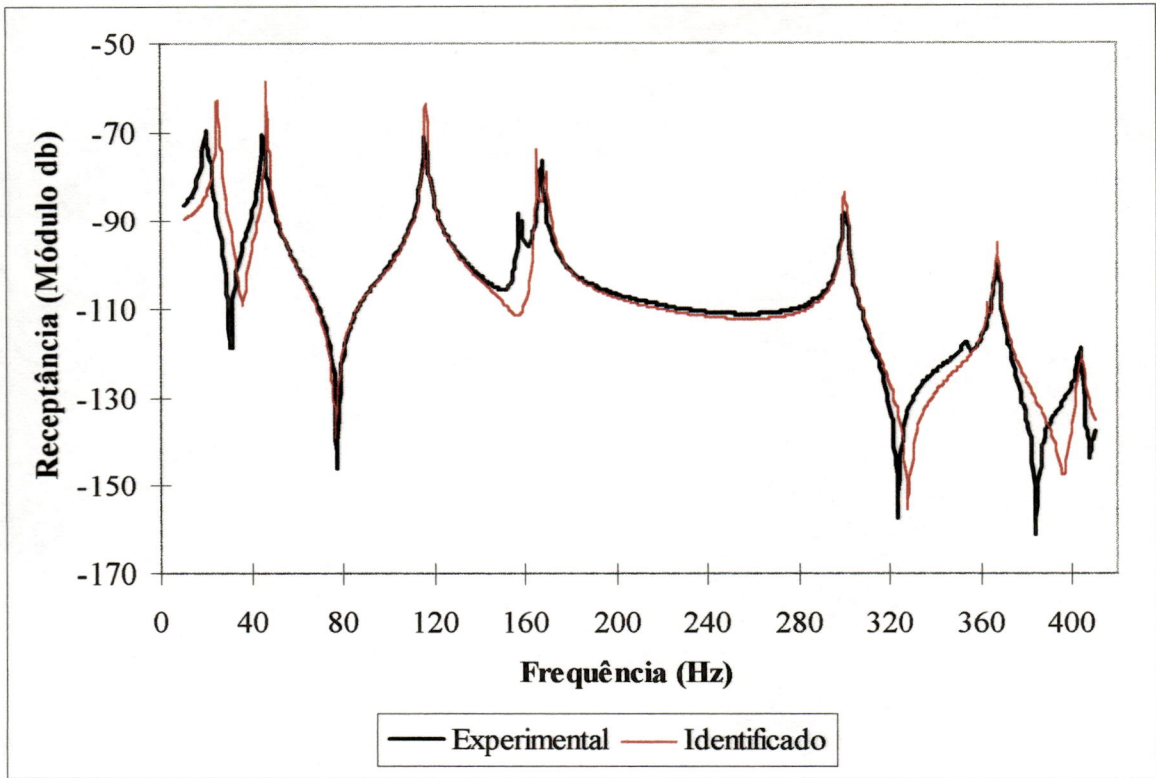


Fig. 6.13 - FRF510 método de Levy

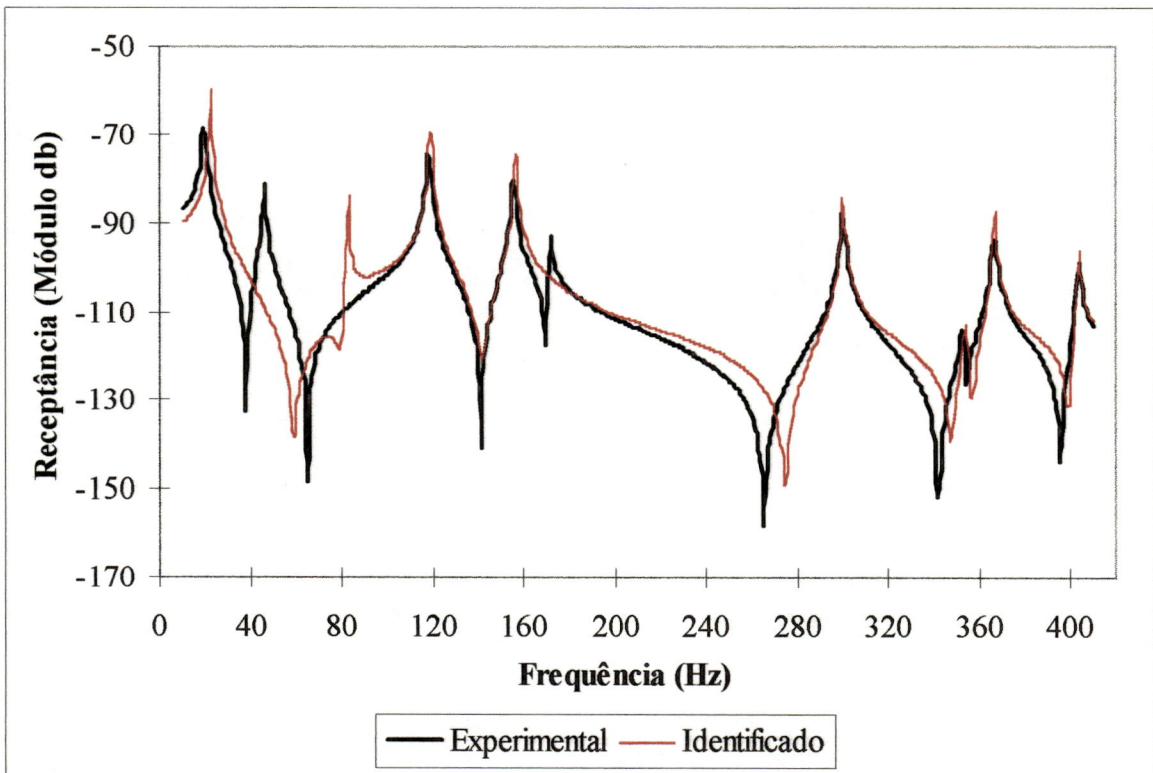


Fig. 6.14 - FRF512 método de Levy

Da mesma maneira que realizado para o método de Levy, o método de Sanathanan e Koerner foi utilizado na faixa total de frequências do ensaio

experimental, uma vez que foram obtidos bons resultados com este método na faixa de frequência de 0 a 200 Hz. O resultado do ajuste da FRF55 já foi apresentado através da figura 6.9. Nas FRF52 e FRF515 o método de Sanathanan e Koerner não conseguiu melhorar o ajuste obtido por Levy, finalizando o processo de ajustagem ainda na primeira iteração.

De maneira geral verifica-se que o método de Sanathanan e Koerner não atingiu resultados satisfatórios nesta ampla faixa de frequências. Deve ser observado, entretanto, que tanto para os ajustes feitos nas faixas de frequência de 0 a 200 Hz, quanto para a faixa total, este método realizou melhores ajustes do que o método de Levy nas faixas de baixa frequência e, devido à função ponderadora introduzida, conforme apresentado no capítulo 4, obteve-se melhores resultados na região das ressonâncias.

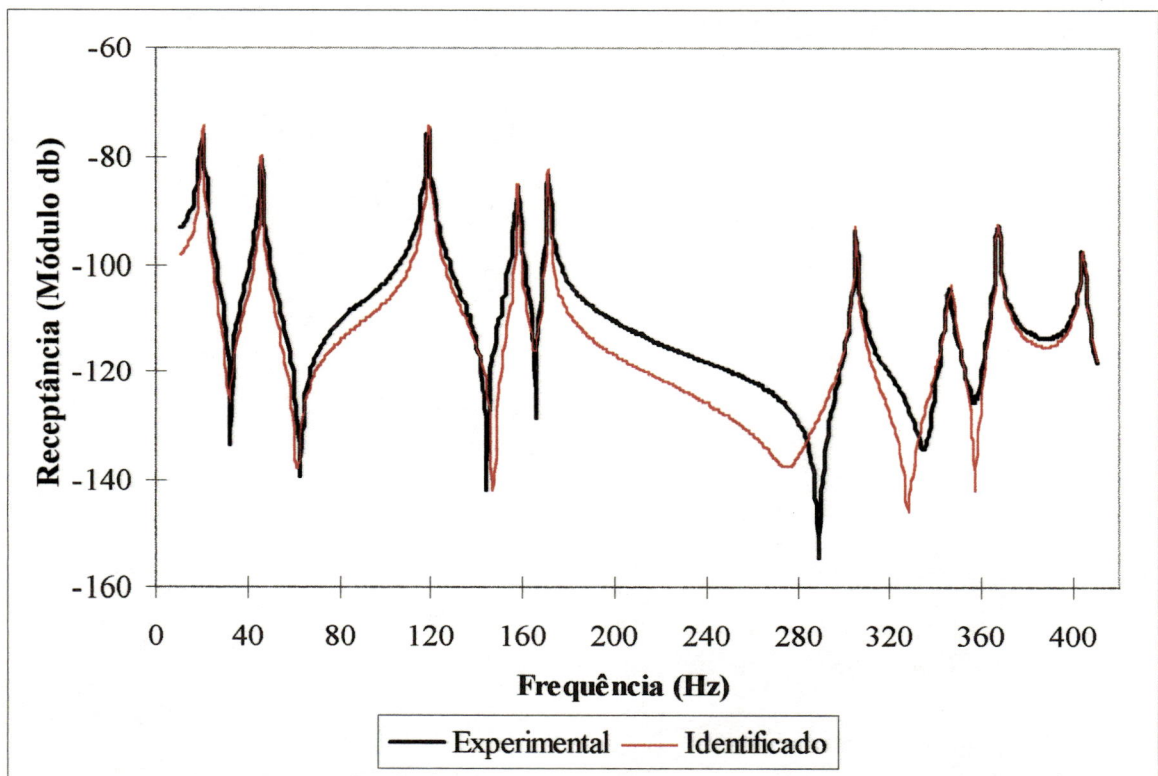


Fig. 6.15 - FRF57 método de Sanathanan e Koerner

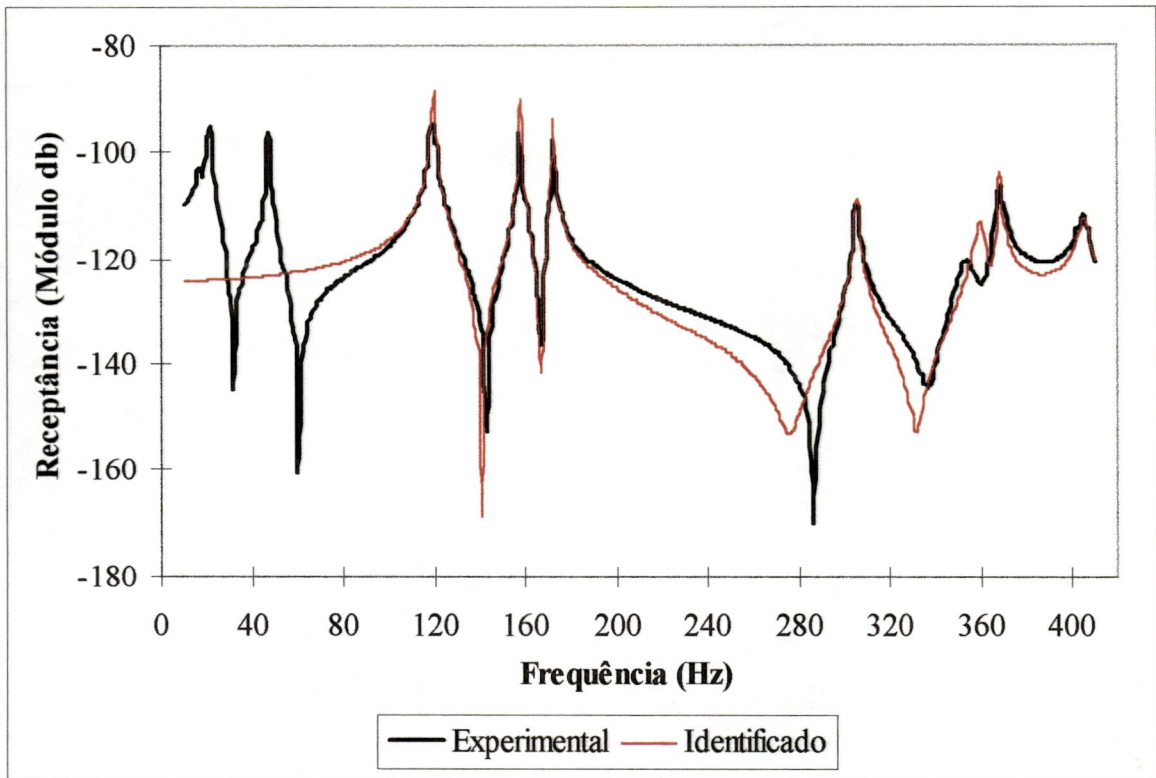


Fig. 6.16 - FRF59 método de Sanathanan e Koerner

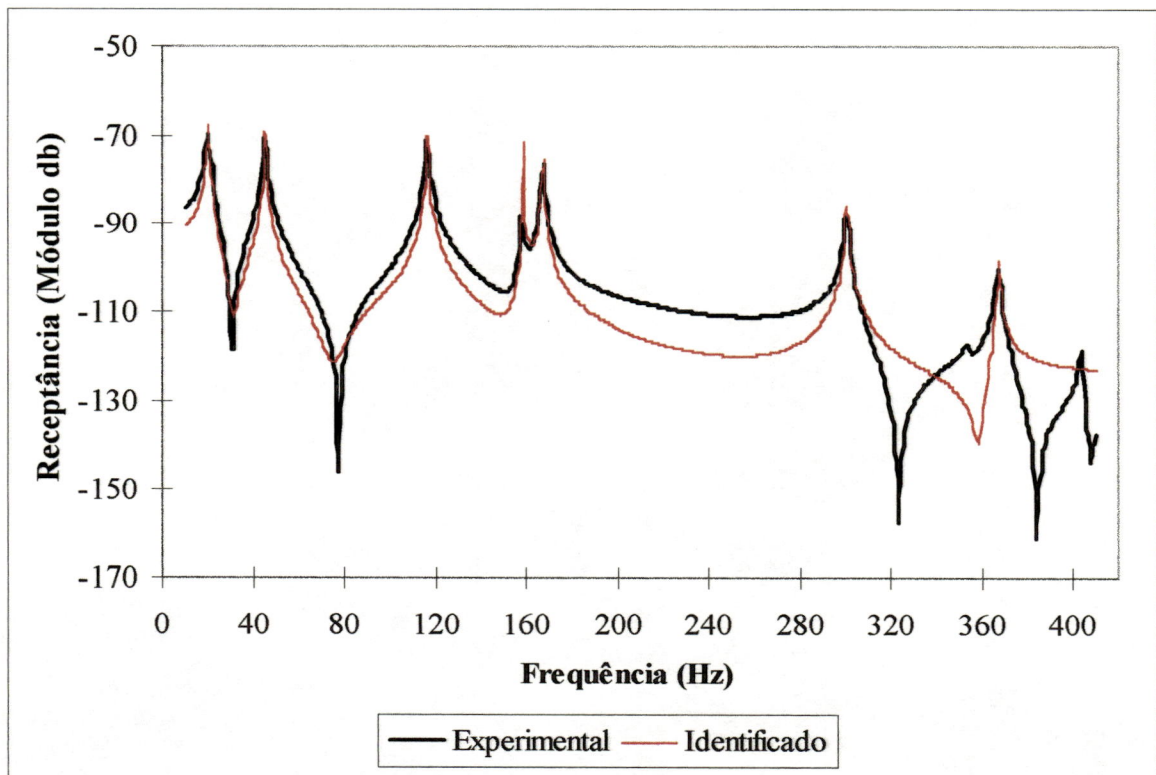


Fig. 6.17 - FRF510 método de Sanathanan e Koerner

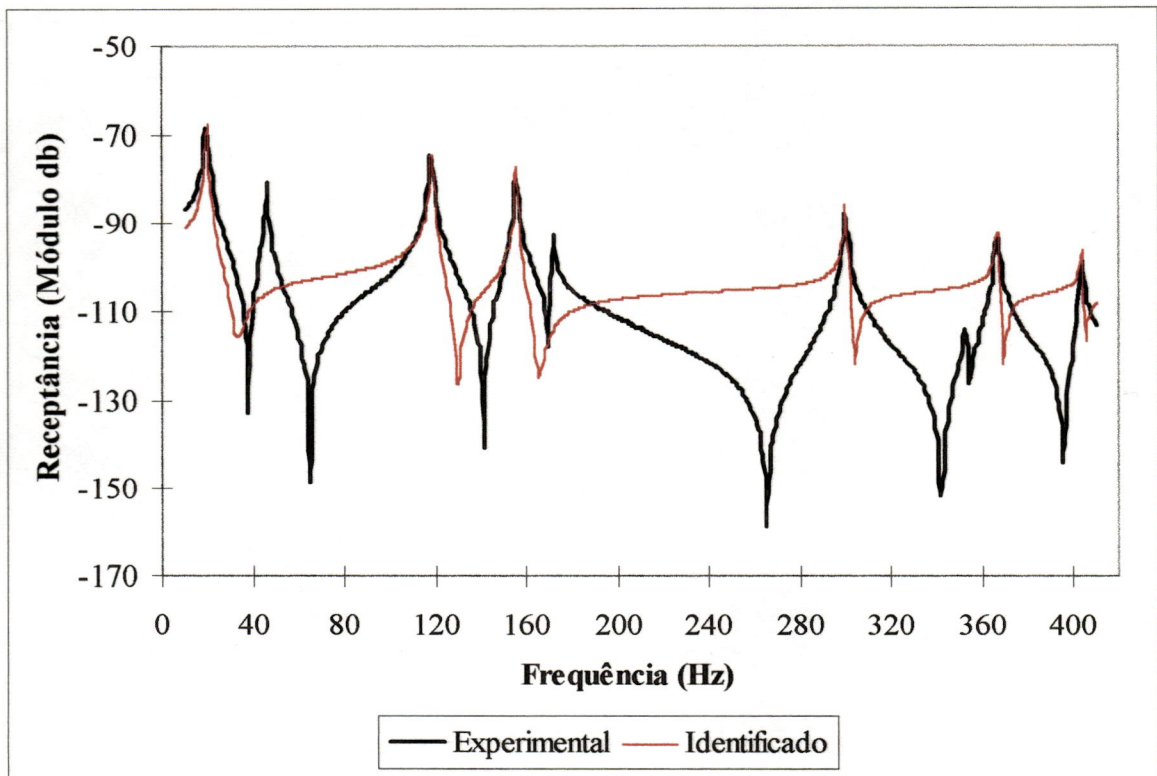


Fig. 6.18 - FRF512 método de Sanathanan e Koerner

A seguir são apresentados, através das figuras 6.19 a 6.25, os resultados dos ajustes realizados com a utilização do método para estruturas levemente amortecidas. Conforme pode ser verificado, a qualidade dos ajustes obtidos é excelente. Este fato é justificado verificando-se que a placa utilizada no ensaio enquadra-se nas hipóteses de trabalho deste método, ou seja, de que a estrutura possua baixo amortecimento e que a distribuição do mesmo seja do tipo proporcional, fato este claramente observável no item 6.2.1. acima, conforme as tabelas apresentadas.

No final deste capítulo serão apresentadas as tabelas com os valores obtidos nestes ajustes.

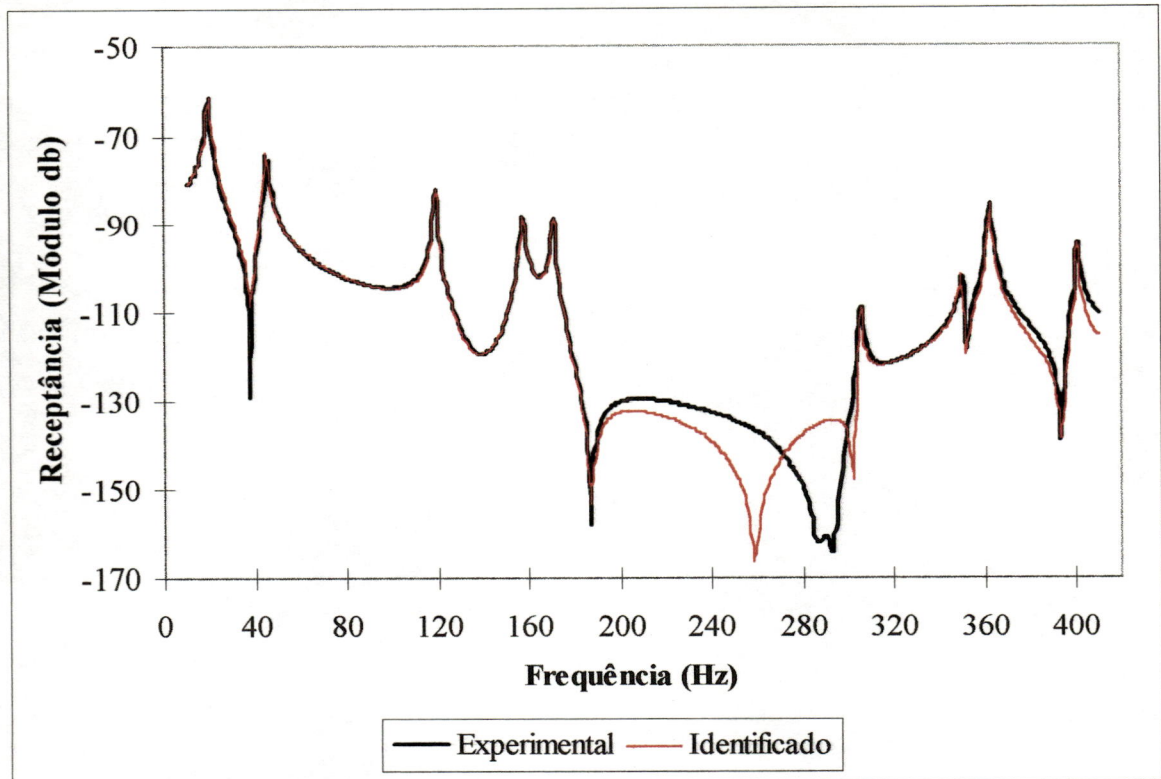


Fig. 6.19 - FRF52 método para estruturas levemente amortecidas

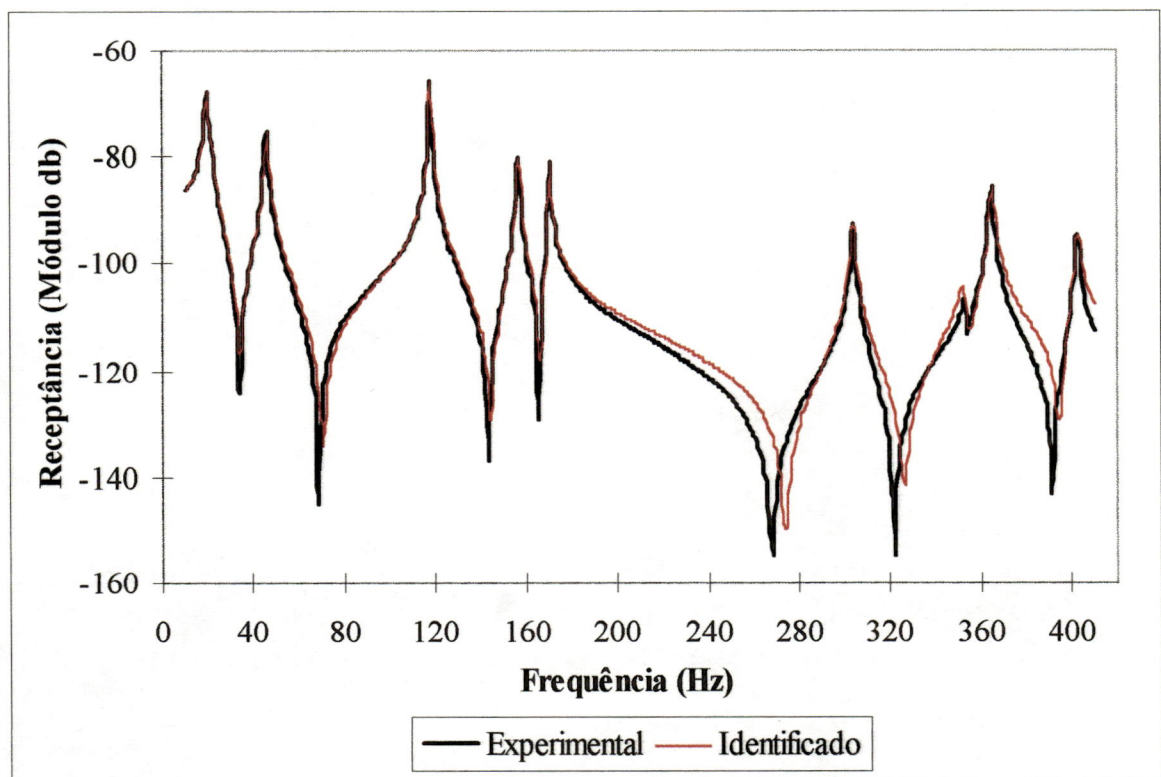


Fig. 6.20 - FRF55 método para estruturas levemente amortecidas

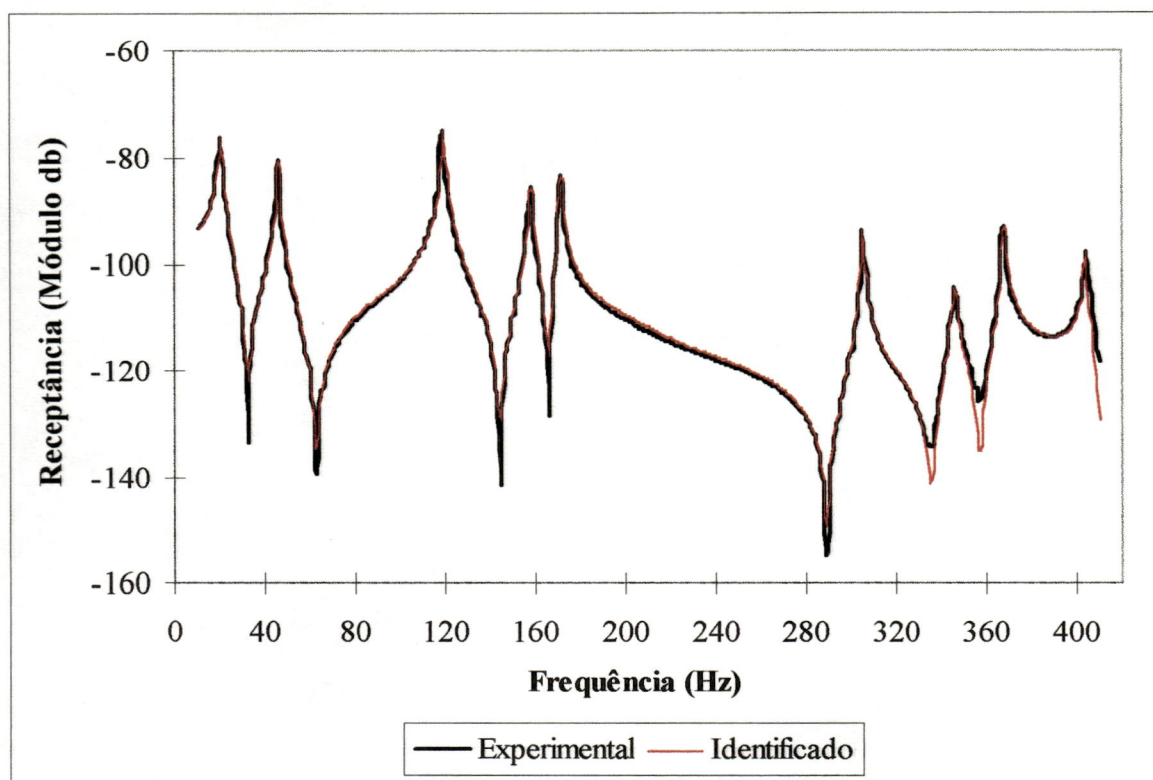


Fig. 6.21 - FRF57 método para estruturas levemente amortecidas

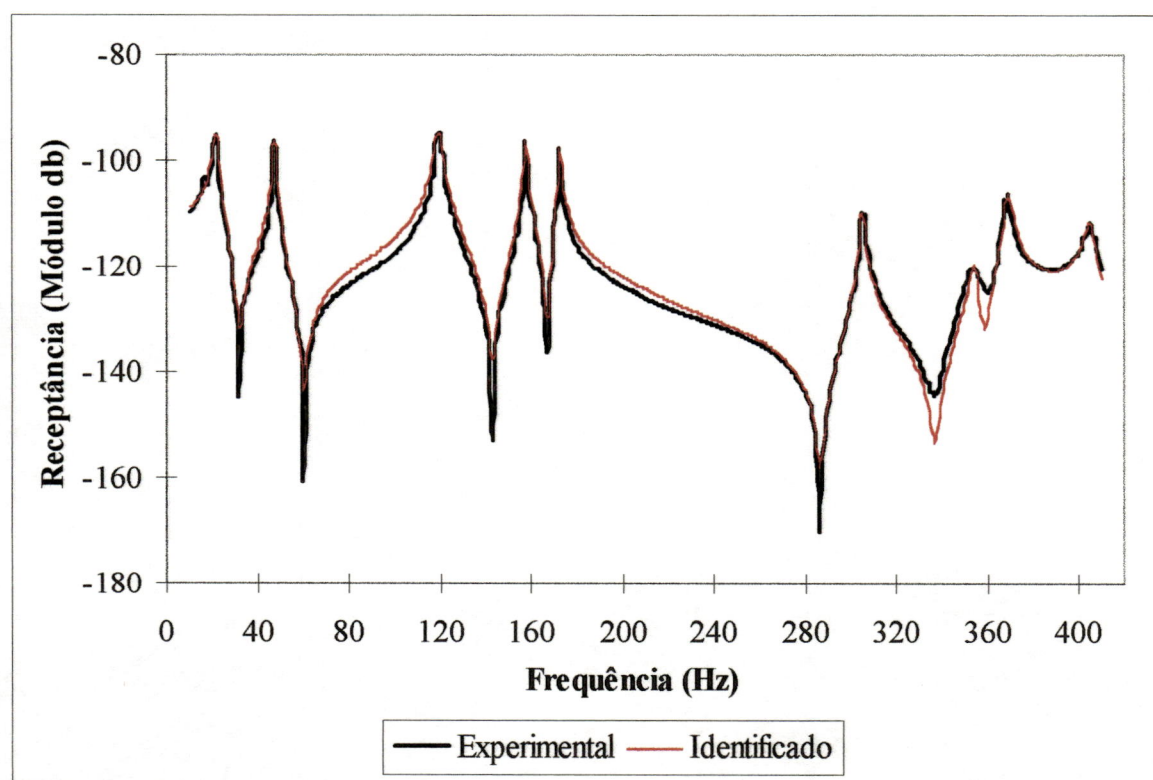


Fig. 6.22 - FRF59 método para estruturas levemente amortecidas

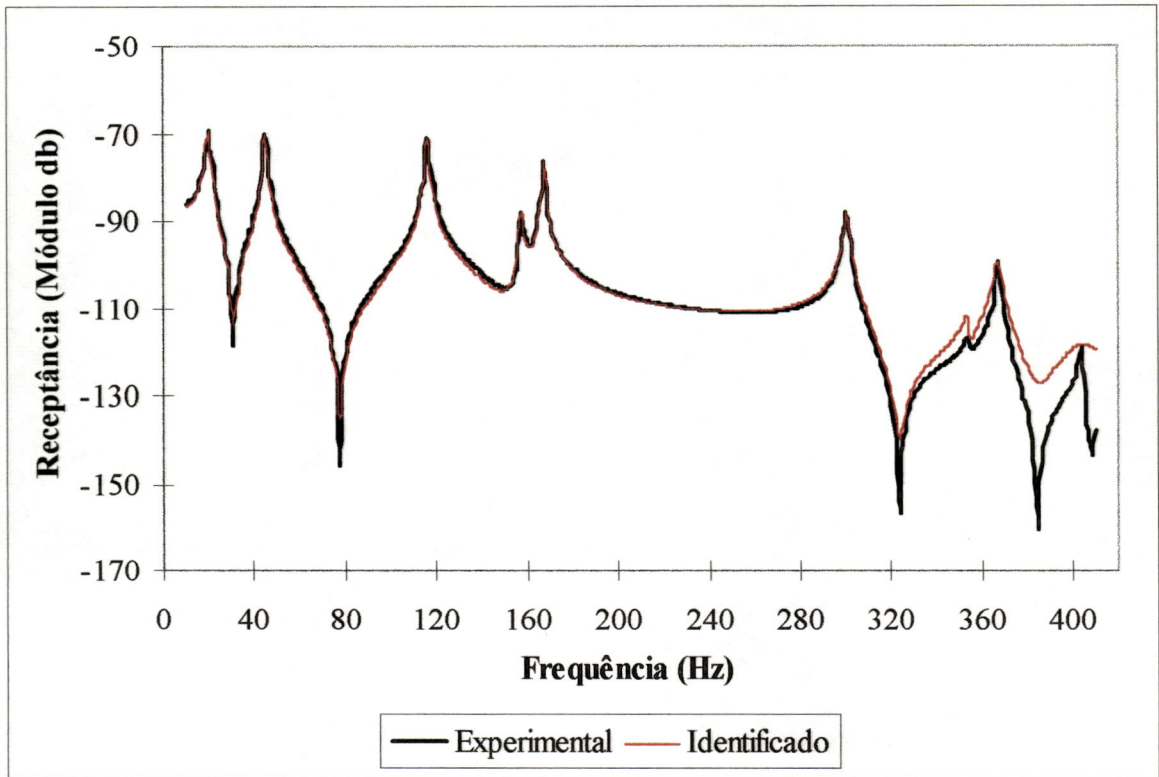


Fig. 6.23 - FRF510 método para estruturas levemente amortecidas

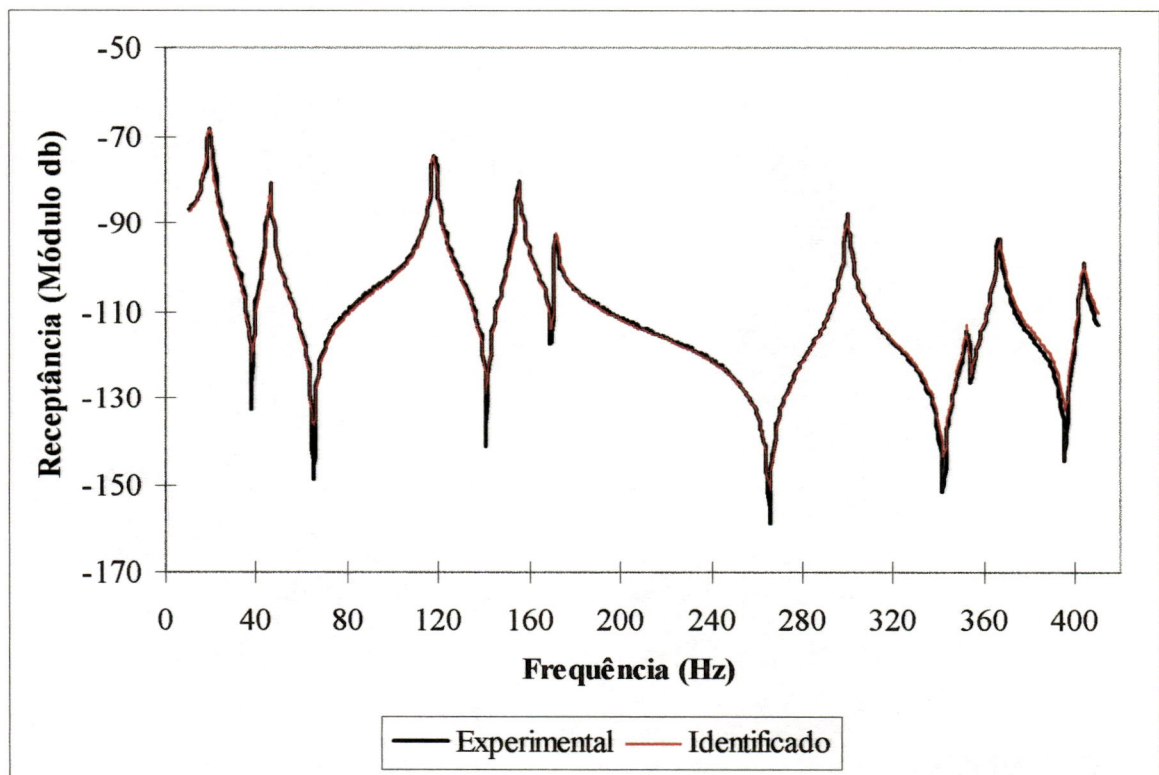


Fig. 6.24 - FRF512 método para estruturas levemente amortecidas

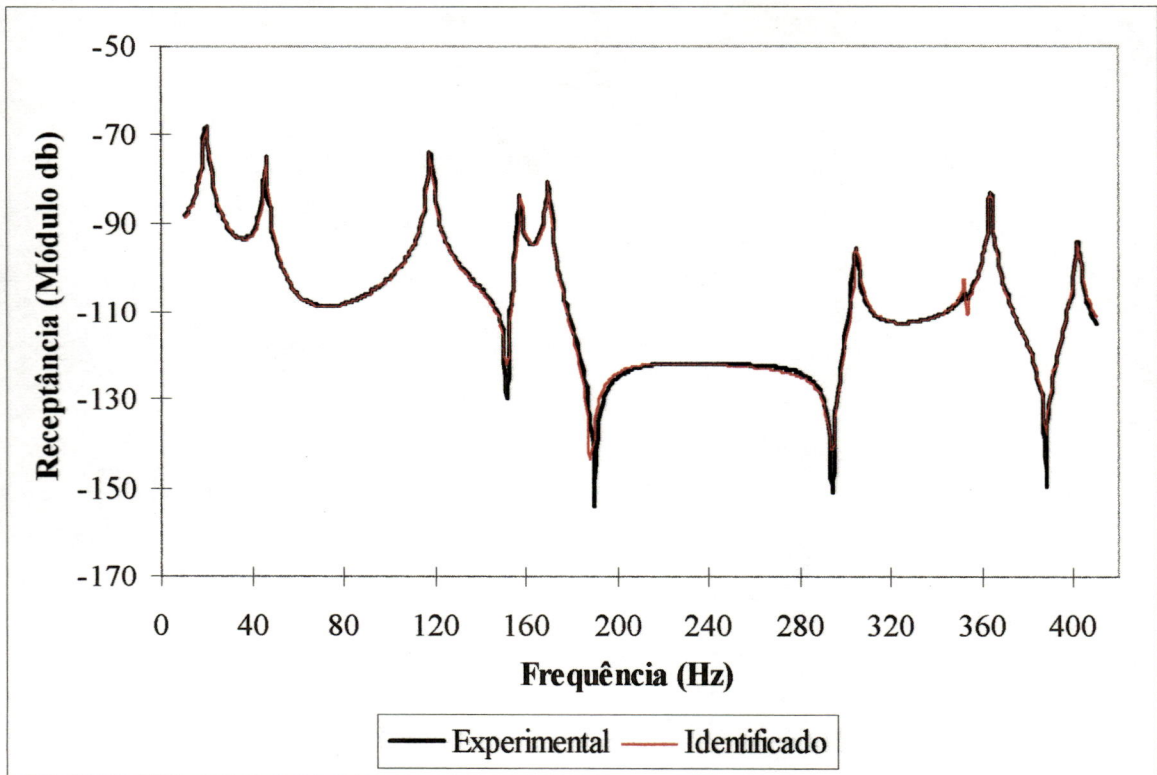


Fig. 6.25 - FRF515 método para estruturas levemente amortecidas

O método da aproximação linear dos resíduos necessita que sejam fornecidos os valores das frequências naturais e dos fatores de amortecimento modais previamente identificados por algum outro método. Neste trabalho foram utilizados os valores identificados através do método para estruturas levemente amortecidas. Os resultados obtidos podem ser considerados bons oferecendo um bom ajuste na maioria das FRF utilizadas. As imperfeições ocorridas no processo de ajuste utilizando-se este método, podem ser atribuídas à dificuldade da determinação do correto valor do fator de amortecimento modal em estruturas com baixo amortecimento.

Os resultados são apresentados por meio das figuras 6.26 a 6.32 a seguir.

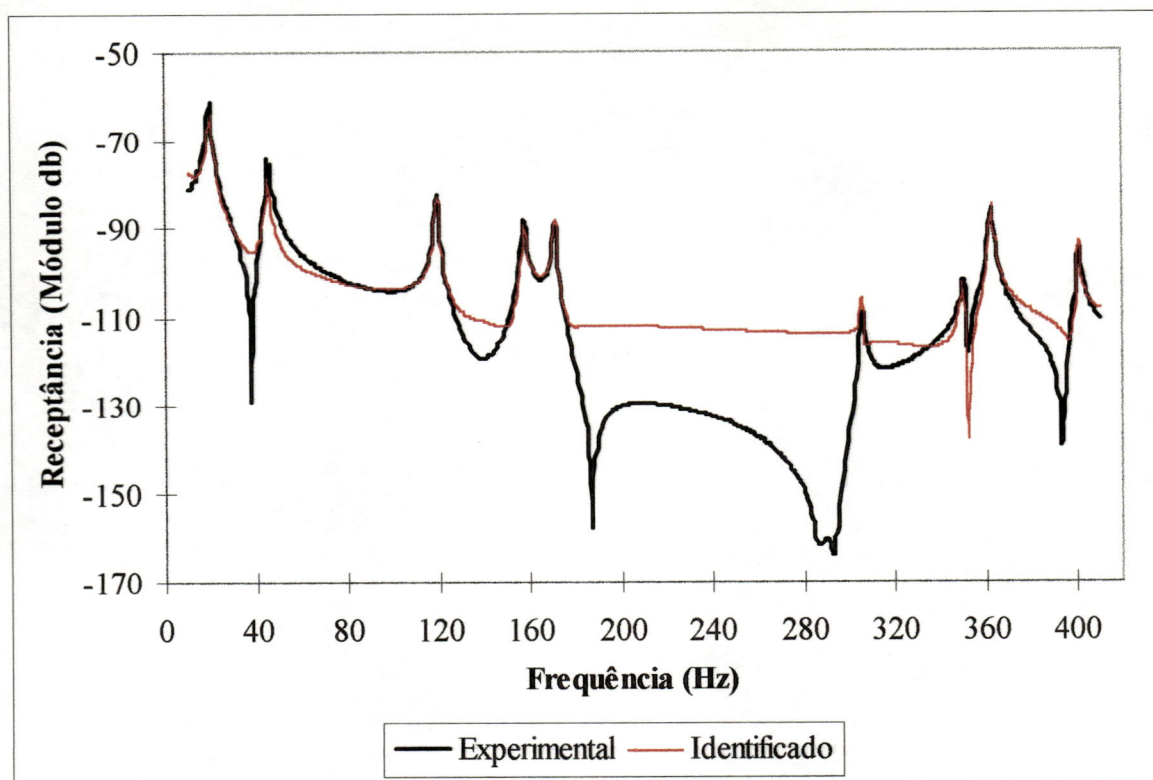


Fig. 6.26 - FRF52 método aproximação linear dos resíduos

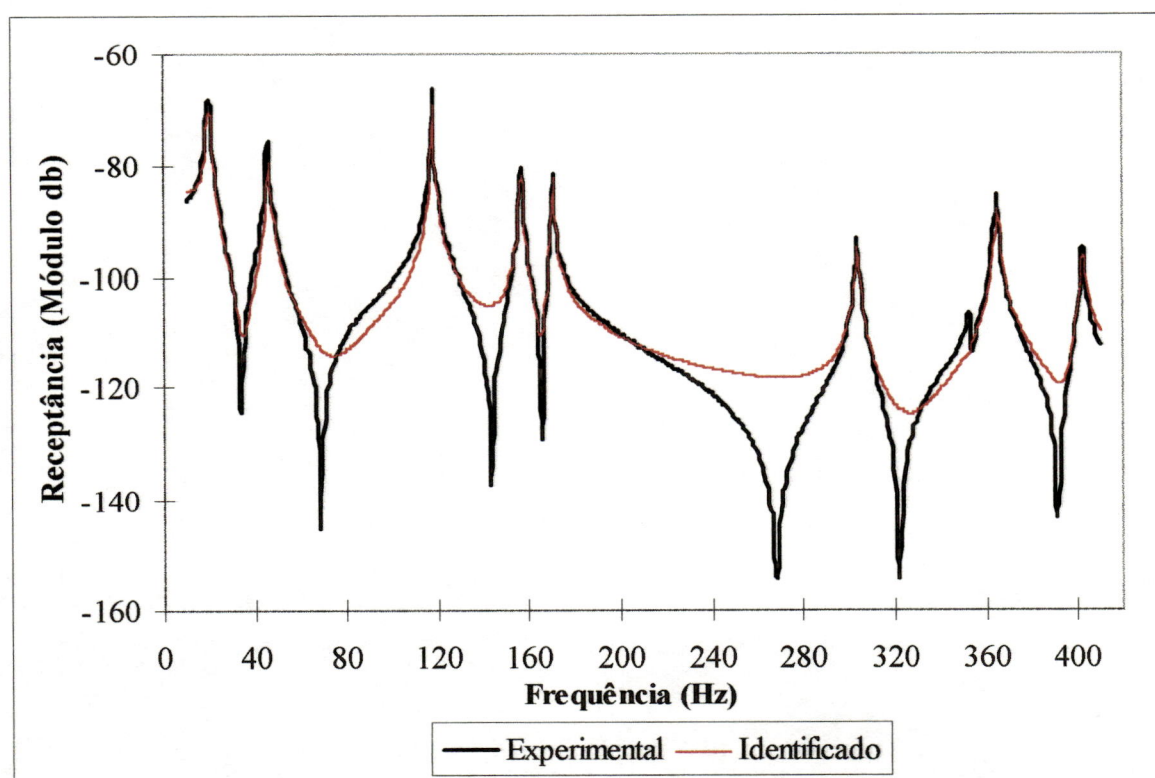


Fig. 6.27 - FRF55 método aproximação linear dos resíduos

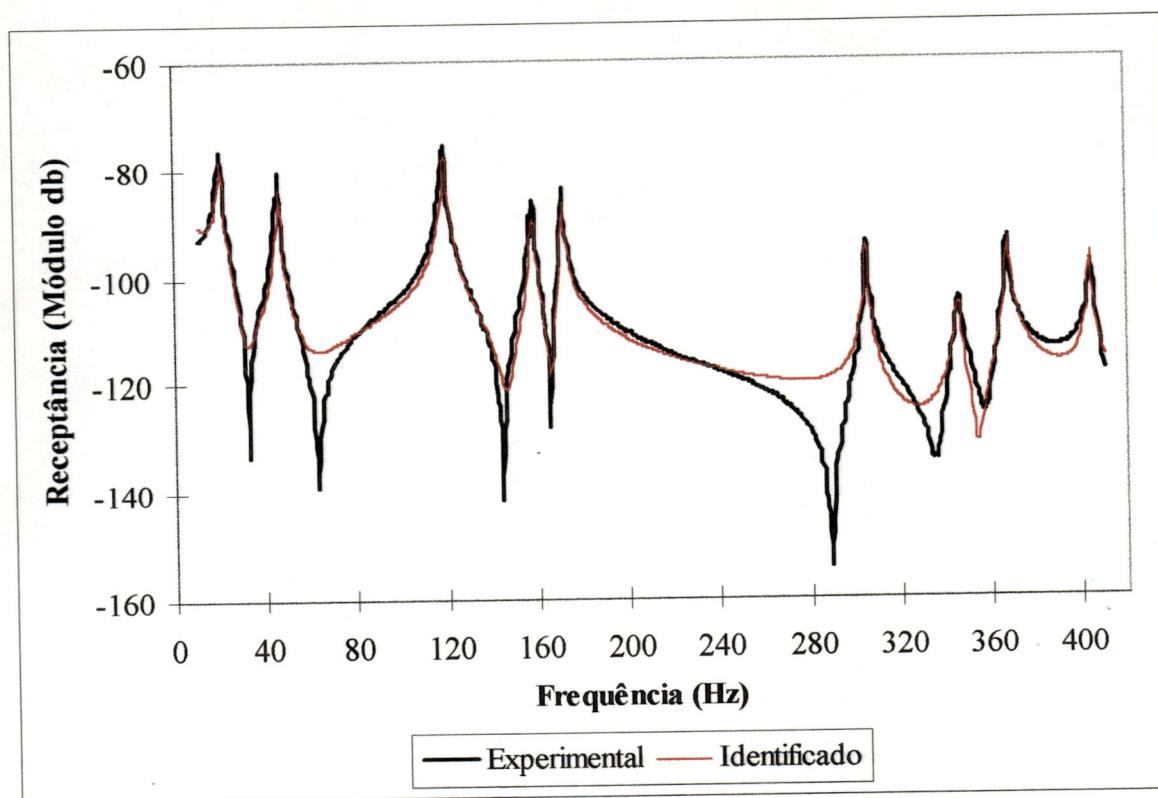


Fig. 6.28 - FRF57 método aproximação linear dos resíduos

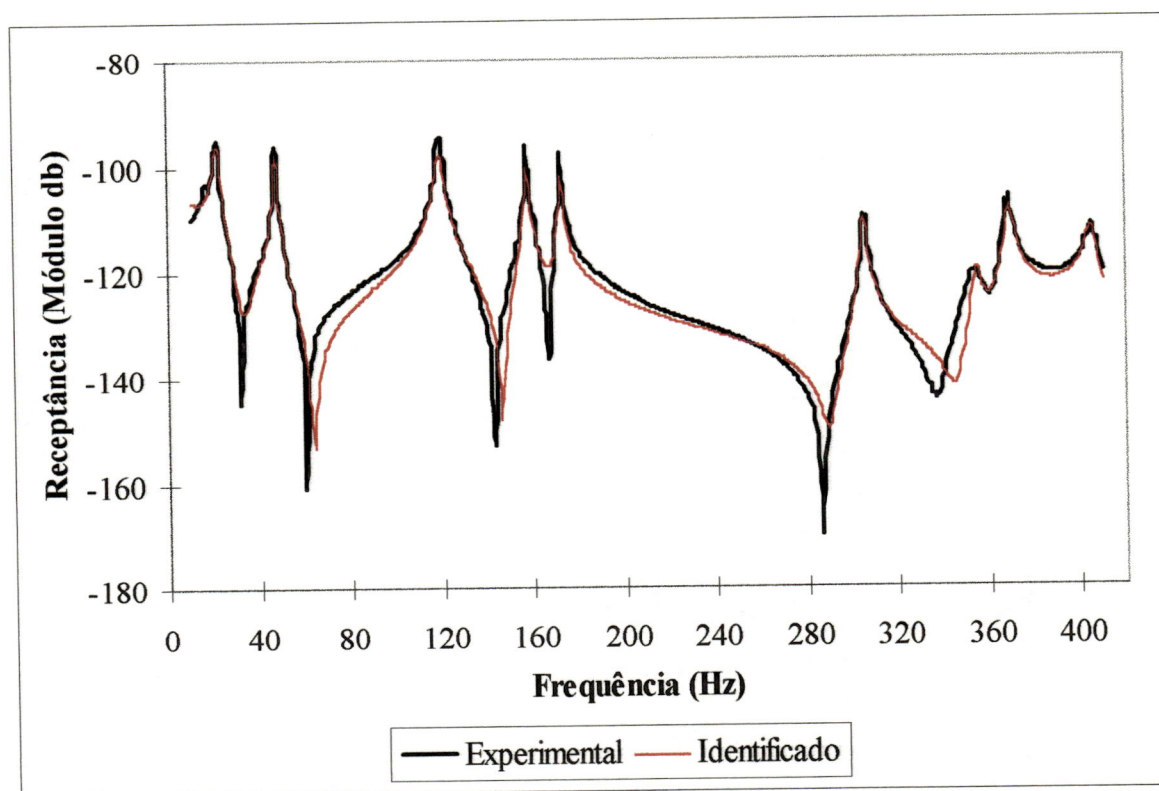


Fig. 6.29 - FRF59 método aproximação linear dos resíduos

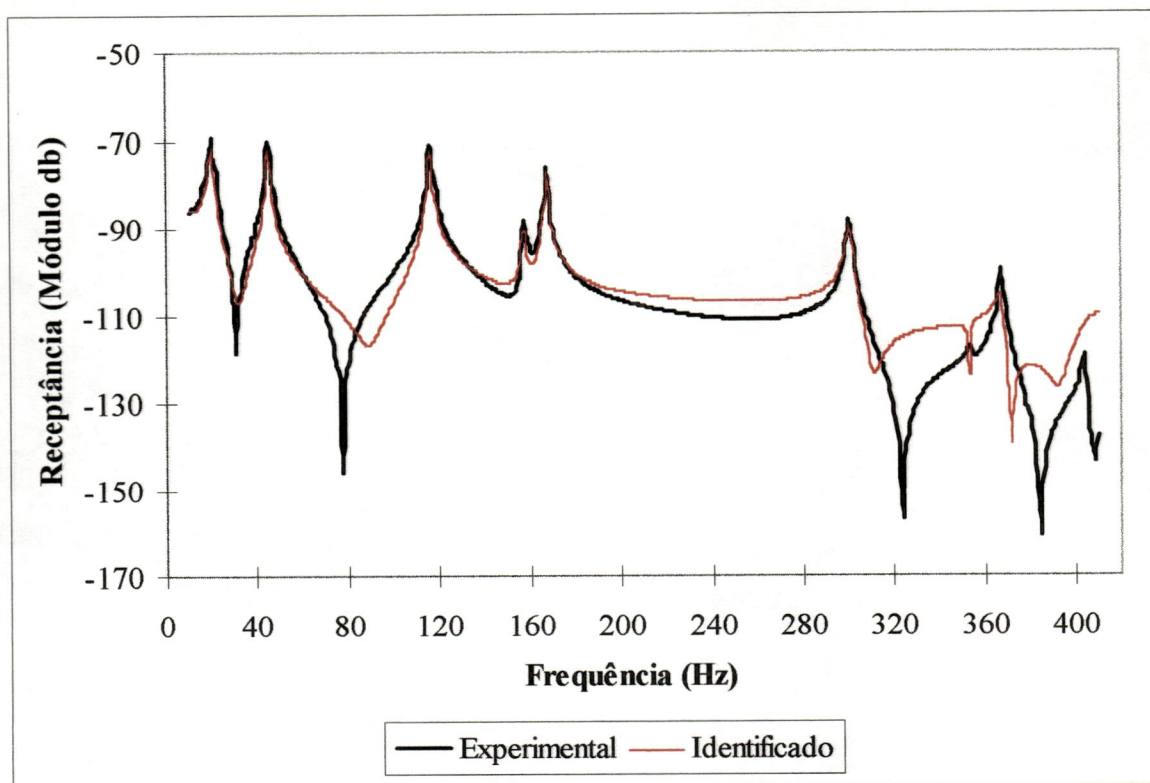


Fig. 6.30 - FRF510 método aproximação linear dos resíduos

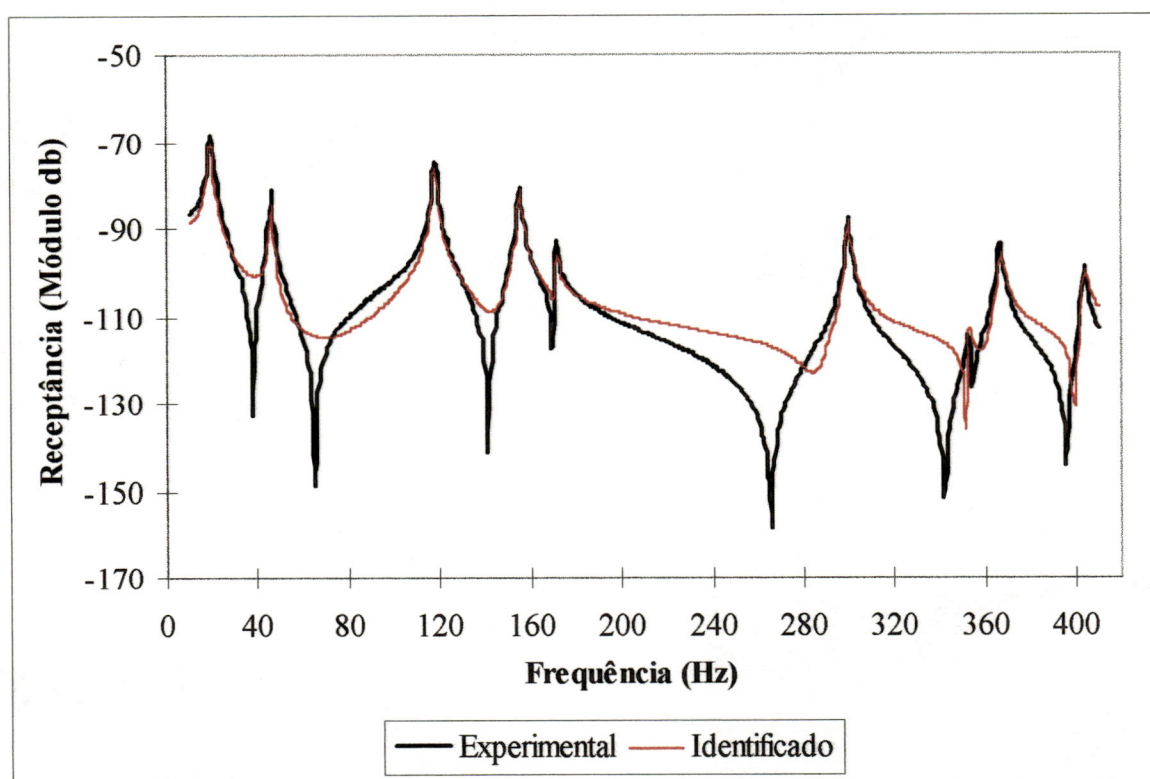


Fig. 6.31 - FRF512 método aproximação linear dos resíduos

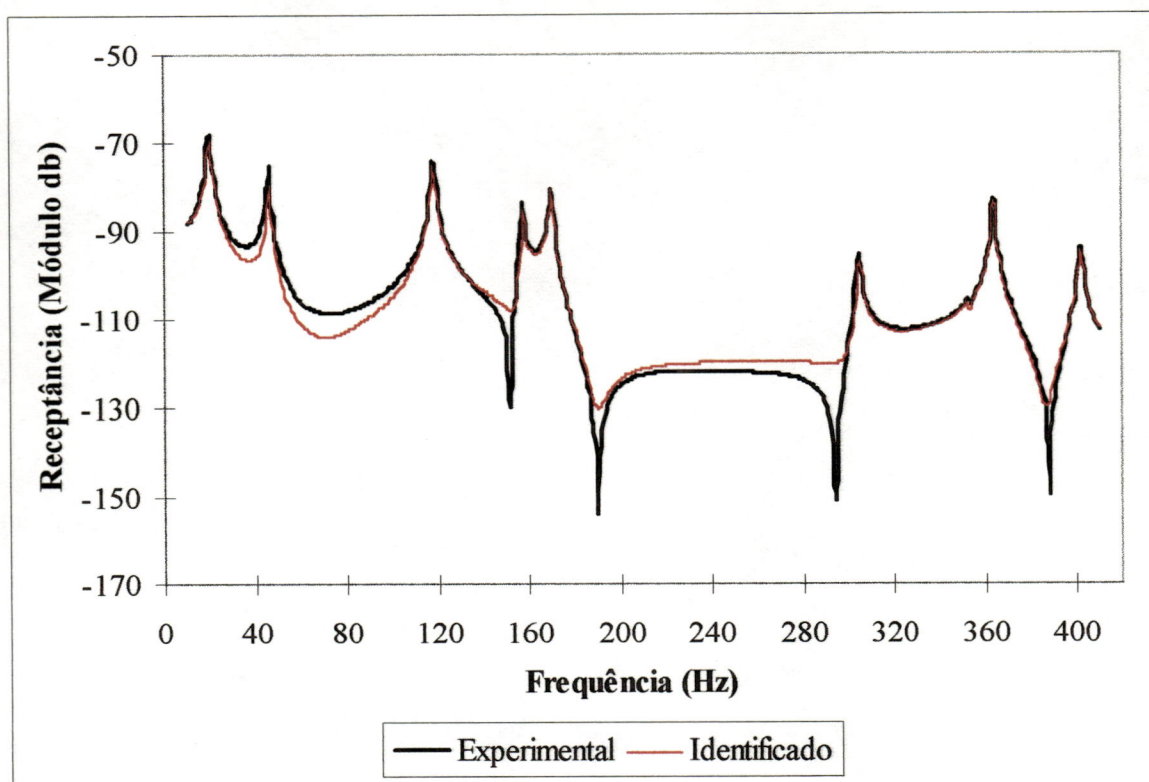


Fig. 6.32 - FRF515 método aproximação linear dos resíduos

O quinto método implementado foi o iterativo não linear. Conforme já abordado no capítulo 4 este método necessita de valores de partida de todos parâmetros modais os quais, neste trabalho, foram determinados utilizando-se novamente o método para estruturas levemente amortecidas. Os resultados obtidos foram muito bons em poucas iterações. As figuras 6.33 a 6.38 a seguir mostram os resultados obtidos. Na FRF10 não houve melhora no processo de ajustagem, mesmo com a multiplicação dos incrementos por fatores entre 0 e 1, conforme indicado por Bustúria e Gimenez (1985), ou seja, o erro divergiu. Após a apresentação das figuras, serão apresentadas também as tabelas com os valores correspondentes aos ajustes executados.

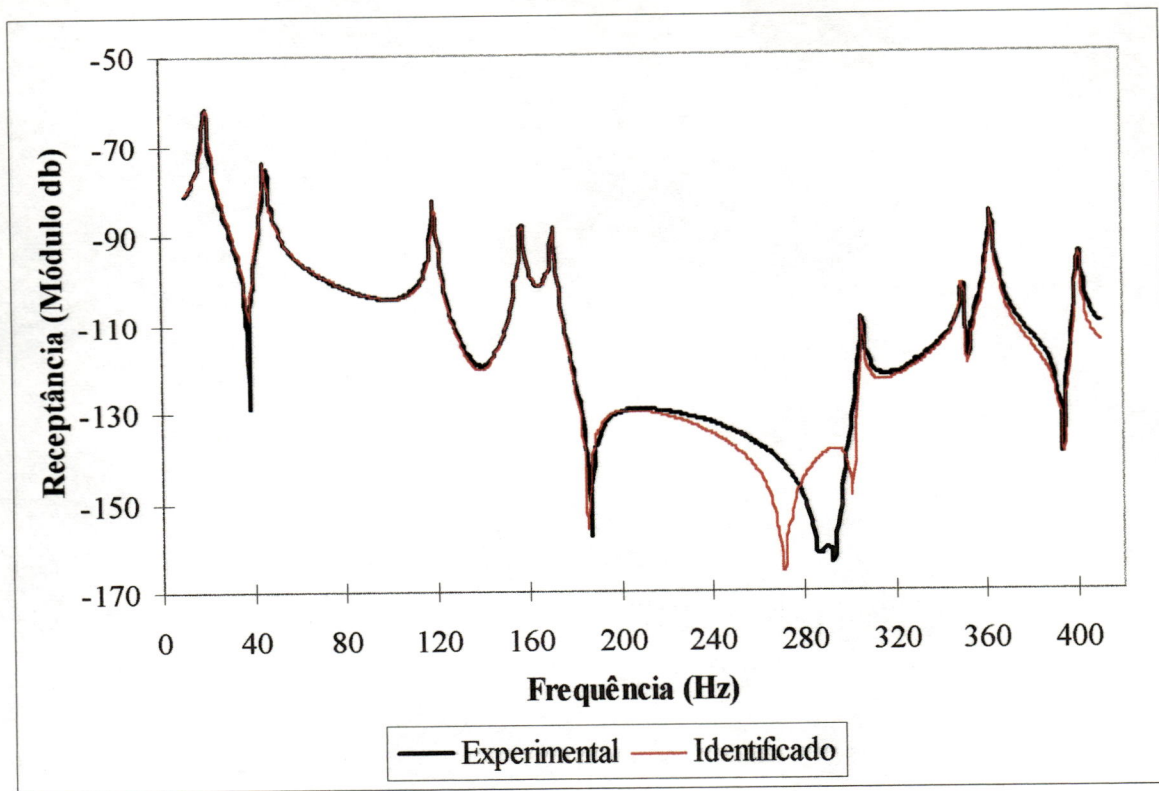


Fig. 6.33 - FRF52 método iterativo não linear

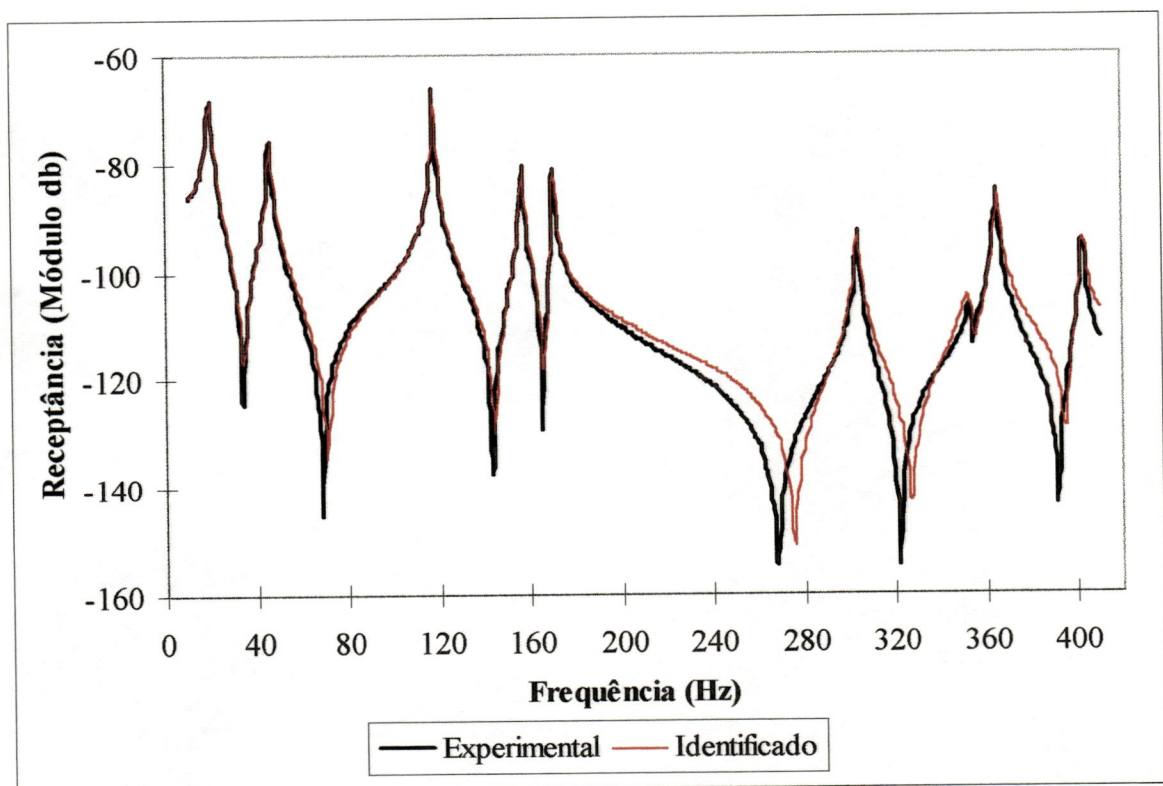


Fig. 6.34 - FRF55 método iterativo não linear

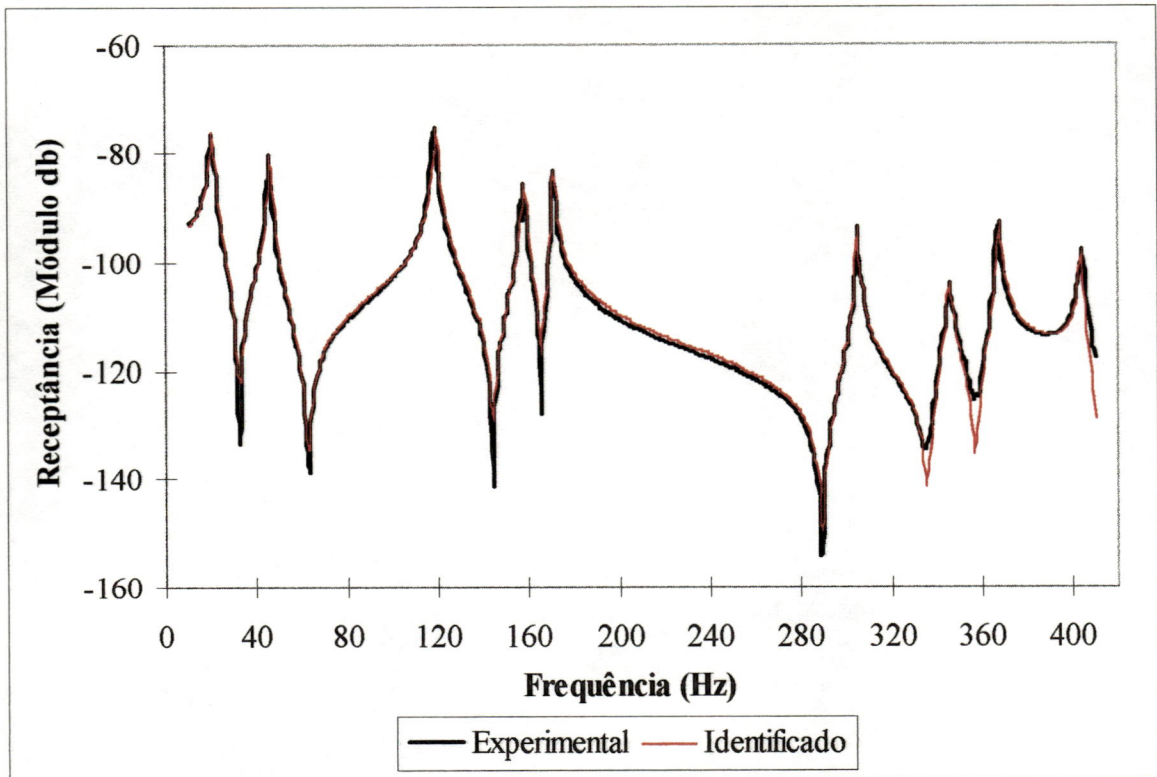


Fig. 6.35 - FRF57 método iterativo não linear

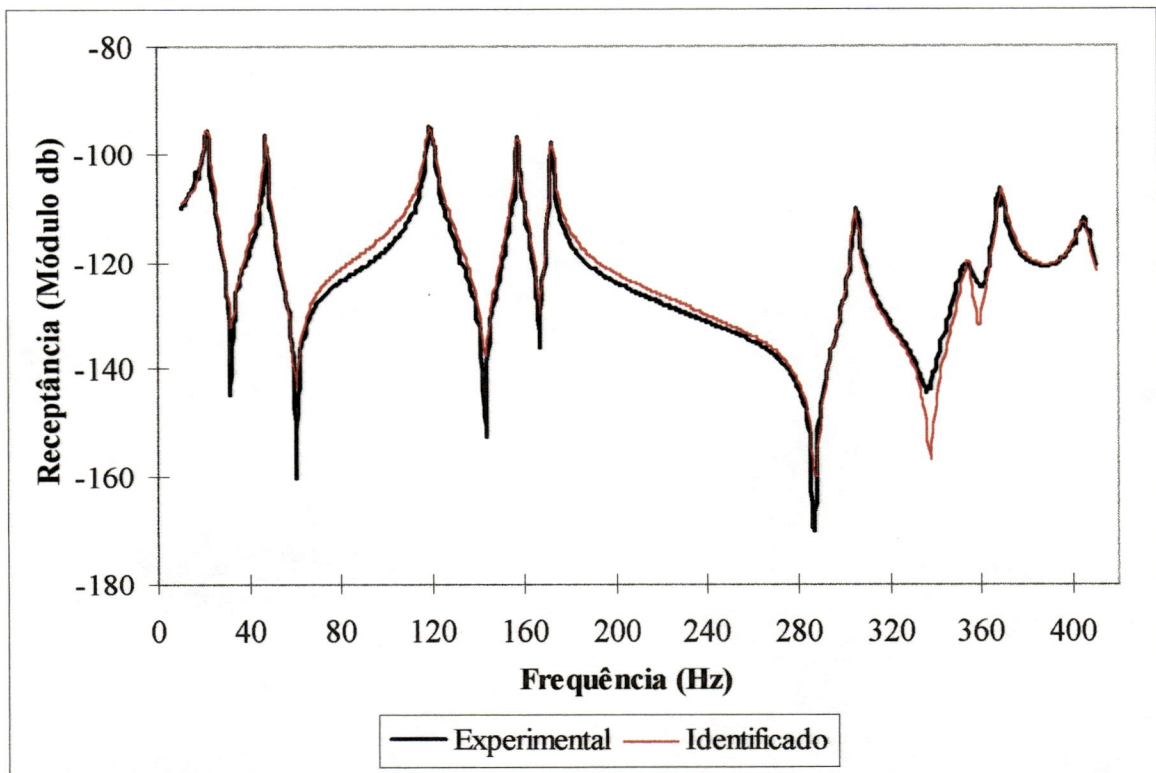


Fig. 6.36 - FRF59 método iterativo não linear

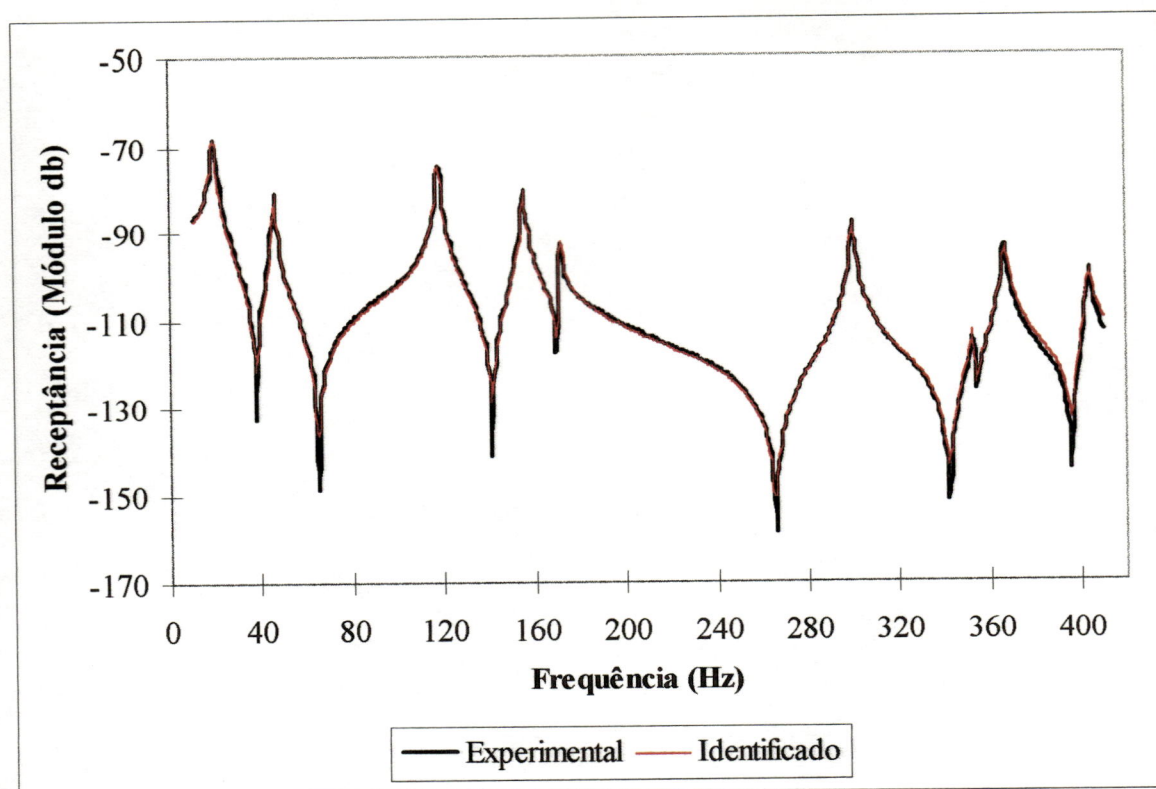


Fig. 6.37 - FRF512 método iterativo não linear

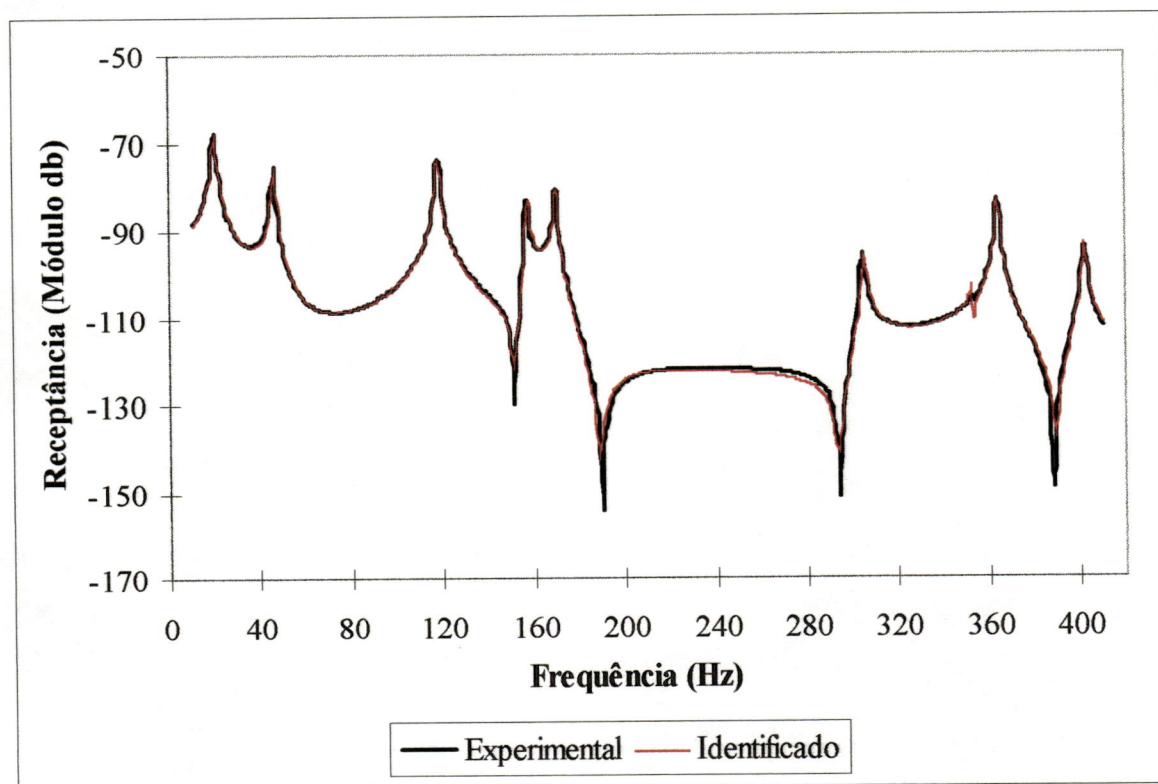


Fig. 6.38 - FRF515 método iterativo não linear

Finalizando este capítulo, serão apresentadas a seguir as tabelas 6.10 a 6.18 referentes aos valores obtidos nos ajustes utilizando os métodos para estruturas levemente amortecidas e iterativo não linear.

Método para estruturas levemente amortecidas 0 a 410 Hz						
Modo	FRF52			FRF55		
	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	rA_{jk} (10^{-3})	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	rA_{jk} (10^{-3})
1	20,22	36,8	-24,6	20,00	36,4	11,5
2	45,00	16,8	-13,7	46,3	13,9	9,87
3	119,4	4,35	9,32	118,1	2,64	36,8
4	157,5	5,06	-9,96	156,9	3,55	16,8
5	171,3	3,51	7,67	170,6	2,54	13,0
6	305,6	1,39	0,916	303,8	2,70	11,4
7	350,0	1,76	-3,40	352,5	5,08	5,95
8	362,5	1,53	-21,6	365,0	2,22	31,7
9	400,6	1,15	-6,88	402,5	2,56	15,6

Tabela 6.10 - Parâmetros modais obtidos por ajustagem

Método para estruturas levemente amortecidas 0 a 410 Hz						
Modo	FRF57			FRF59		
	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	rA_{jk} (10^{-3})	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	rA_{jk} (10^{-3})
1	20,65	38,0	-5,05	21,9	53,0	0,878
2	46,25	11,7	-4,81	47,50	13,7	0,951
3	119,4	5,85	-28,7	119,4	13,2	6,90
4	158,1	4,93	-12,8	157,5	4,82	3,64
5	171,3	3,56	-14,0	172,5	3,93	3,05
6	305,0	1,79	-7,00	305,0	3,11	1,86
7	345,6	3,10	-4,60	354,4	4,92	1,18
8	367,5	2,02	-12,5	369,0	4,16	5,56
9	404,0	1,61	6,84	405,0	5,58	-4,62

Tabela 6.11 - Parâmetros modais obtidos por ajustagem

Método para estruturas levemente amortecidas 0 a 410 Hz						
FRF510			FRF12			
Modo	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	rA_{jk} (10^{-3})	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	rA_{jk} (10^{-3})
1	20,0	36,4	-9,86	19,38	36,0	-10,2
2	45,00	12,2	-15,1	46,25	10,4	-4,02
3	116,3	5,12	-39,3	118,1	5,65	-29,2
4	157,5	4,71	9,07	155,6	4,23	-20,1
5	167,5	3,21	-27,4	171,9	3,25	-4,51
6	300,6	3,16	22,3	300,0	2,33	-17,1
7	353,8	3,26	1,13	352,5	2,12	-1,03
8	366,9	4,27	1,18	366,9	2,98	-16,7
9	403,8	29,5	1,10	403,8	2,59	-9,81

Tabela 6.12 - Parâmetros modais obtidos por ajustagem

Método para estruturas levemente amortecidas 0 a 410 Hz			
FRF515			
Modo	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	rA_{jk} (10^{-3})
1	20,00	36,6	-11,5
2	46,25	11,6	8,74
3	118,1	5,75	-31,7
4	157,5	4,00	-13,1
5	170,0	3,72	20,1
6	305,0	2,53	-7,88
7	352,5	0,934	1,23
8	363,8	1,68	30,0
9	401,9	2,32	14,9

Tabela 6.13 - Parâmetros modais obtidos por ajustagem

Método iterativo não linear 0 a 410 Hz						
Modo	FRF52			FRF55		
	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	${}_rR_{jk}$ (10^{-7})	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	${}_rR_{jk}$ (10^{-7})
1	20,01	36,9	-0,340+i 6140	20,01	36,4	0,333-i 2870
2	45,00	16,8	-0,899+i 1520	46,26	13,9	0,747-i 1070
3	119,4	4,35	-0,759-i 390	118,1	2,64	0,439-i 1560
4	157,5	5,04	-1,19+i 316	156,9	3,55	0,789-i 535
5	171,3	3,51	-0,901-i 224	170,6	2,54	0,630-i 380
6	305,5	1,35	-0,599-i 14,6	303,8	2,70	1,10-i 189
7	350,1	1,80	-0,774+i 49,5	352,5	5,24	2,60-i 87,2
8	362,5	1,52	-0,905+i 299	365,0	2,22	1,80-i 435
9	400,6	1,21	-0,862+i 88,7	402,5	2,51	1,98-i 193

Tabela 6.14 - Parâmetros modais obtidos por ajustagem

Método iterativo não linear 0 a 410 Hz						
Modo	FRF57			FRF59		
	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	${}_rR_{jk}$ (10^{-7})	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	${}_rR_{jk}$ (10^{-7})
1	20,64	37,9	-0,173+i 1220	21,90	52,9	0,145-i 201
2	46,25	11,7	-0,254+i 520	47,50	13,7	0,0941-i 100
3	119,4	5,84	-0,395+i 1200	119,4	13,2	0,269-i 289
4	158,1	4,94	-0,454+i 406	157,5	4,82	0,139-i 116
5	171,3	3,56	-0,354+i 408	172,5	3,92	0,117-i 88,2
6	305,0	1,79	-0,337+i 115	305,0	3,11	0,317-i 30,5
7	345,6	3,12	-0,759+i 67,0	354,3	5,04	1,09-i 17,3
8	367,5	2,02	-0,678+i 170	368,7	4,13	1,22-i 74,8
9	403,8	1,71	-0,439-i 87,1	405,0	6,97	-0,263+i 65,2

Tabela 6.15 - Parâmetros modais obtidos por ajustagem

Método iterativo não linear 0 a 410 Hz						
FRF512				FRF515		
Modo	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	rR_{jk} (10^{-7})	ω_r (Hz)	ξ_r (10^{-3})	rR_{jk} (10^{-7})
1	19,39	36,0	0,0454+i 2640	20,01	36,6	0,306+i 2880
2	46,25	10,4	0,113+i 435	46,25	11,6	0,412-i 944
3	118,1	5,65	0,189+i 1240	118,1	5,75	0,616+i 1340
4	155,6	4,24	0,189+i 646	157,5	3,99	0,604+i 416
5	171,9	3,27	0,163+i 131	170,0	3,75	0,593-i 590
6	300,0	2,34	0,186+i 285	305,0	2,52	1,04+i 129
7	352,5	2,08	0,146+i 14,4	352,5	0,944	0,707-i 17,7
8	367,0	2,98	0,345+i 228	363,7	1,69	1,51-i 412
9	403,8	2,57	0,420+i 121	401,8	1,92	0,567-i 168

Tabela 6.16 - Parâmetros modais obtidos por ajustagem

	Resíduos (10^{-8} m/N)	
	de rigidez	de massa
FRF52	8,04	2550
FRF55	-7,31	-2330
FRF57	2,68	895
FRF59	0,0327	-105
FRF512	-1,58	-494
FRF515	-2,65	-1110

Tabela 6.17 - Resíduos do método iterativo não linear

	Erro na ajustagem (10^{-6} m ² /N ²)	
	Iterativo não linear	Estruturas levemente amort.
FRF52	1,65	1,65
FRF55	0,671	0,671
FRF57	0,128	0,128
FRF59	0,00263	0,00264
FRF510	-	0,600
FRF512	0,390	0,390
FRF515	0,350	0,350

Tabela 6.18 - Erro resultante da ajustagem

7. Conclusões e Propostas de Trabalhos Futuros

7.1 - Conclusões

A observação dos resultados obtidos pela aplicação dos dados experimentais aos programas computacionais desenvolvidos conduz a conclusões relacionadas aos métodos de identificação implementados, que serão apresentadas a seguir.

Os métodos de Levy e Sanathanan e Koerner mostraram-se eficientes somente em faixas estreitas de frequência. Embora a não inclusão do resíduo de rigidez tenha resultado em ajustes de boa qualidade em alguns casos, os resultados obtidos com a inclusão deste resíduo sempre foram melhores do que aqueles obtidos sem a inclusão do mesmo. Desta maneira, é fortemente recomendável que todos os ajustes utilizando tais métodos sejam realizados com a inclusão do resíduo de rigidez.

O método destinado à estruturas levemente amortecidas alcançou resultados excelentes, quando comparado com os outros métodos testados. Sua eficácia ficou comprovada quando aplicado à estruturas que respeitem as hipóteses intrínsecas à sua definição.

O método da aproximação linear dos resíduos não mostrou-se muito eficiente no tipo de estrutura ensaiada, ou seja, com baixo amortecimento. Como neste método os parâmetros globais do sistema (frequências naturais e fatores de amortecimento) são considerados conhecidos e permanecem constantes, sua baixa performance pode estar vinculada a erros na determinação destes parâmetros, uma vez que somente os parâmetros locais do sistema, os resíduos modais, são ajustados.

O método iterativo não linear possibilitou ajustes de boa qualidade, sendo uma boa alternativa para as estruturas em que as condições inerentes ao método para estruturas levemente amortecidas não forem satisfeitas. É importante ressaltar, novamente, que este método depende de uma boa estimativa inicial, que foi feita neste trabalho utilizando-se o método para estruturas levemente amortecidas.

Todos os métodos iterativos revelaram deficiências no ajuste da região das antirressonâncias. Esta deficiência é relacionada aos erros serem mais significativos em regiões próximos às ressonâncias. Isto se deve ao fato dos ajustes terem sido realizados com as FRF na forma de real e imaginário, o que conduz a níveis muito baixos de resposta na região das antirressonâncias.

7.2 - Sugestões para trabalhos futuros

- Realização de ensaio experimental em estruturas com amortecimento maior com o objetivo de verificar se as conclusões obtidas neste trabalho são válidas também para este tipo de sistema.
- Implementação de um método que utiliza ajuste através da FRF na forma logarítmica, com o objetivo de melhorar o ajuste na região das antiressonâncias, conforme proposto por Sidman et al (1991).
- Realização de implementação e de análise comparativa semelhante à deste trabalho, utilizando-se como FRF a inertância. Esta sugestão visa evitar a ampliação do ruído na região de baixas frequências devida à dupla integração necessária para determinar os deslocamentos a partir das acelerações medidas

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BENDAT, J. S. & PIERSOL, A. G.
Engineering applications of correclation and spectral analysis
John Wiley & sons, 1980

2. BERT, C. W.
Material Damping : An Introductory Review of Mathmatical Models, Measures and Experimental Techniques
Journal of Sound and Vibration, vol 29 (2), 129 - 153, 1973

3. BRAUN, S. & RAM, Y.
Time and frequency identification methods in over determined systems
Mechanical Systems and Signal Processing, 1 (3) : 245-257, 1986

4. BROWN, D. L. ; ALLEMANG, R. J.; ZIMMERMAN, R. ;
MERGEAY, M.
Parameter estimation techniques for modal analysis.
S.A.E. paper (790221) : 828 - 846, 1979

5. BUSTURIA, J. M. and GIMENEZ, J.
Multiexcitation Multiresponse nonlinear least squares algorithm
Proc. 10th. Int. Seminar on Modal Analysis, part IV, Leuven, Belgium, 1985.

6. CAUGHEY, T. K. & O'KELLY, M. E. J.
Classical normal modes in damped linear dynamic systems
Journal of Applied Mechanics 25_ (3) : 583-588, 1965.

7. CLOUGH, R. PENZIEN, J.
Dynamics of structures
Mcgraw-hill ltd. , 1975

8. EBERSBACH, P. & IRRETIER, H.
Some applications of modal parameter estimation techniques.
Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences,
vol. XI (1) : 67-86, 1989.

9. EWINS, D. J.
Modal testing : theory and practice
London, John Wiley & sons Inc., 1984.

10. EWINS, D. J. & GLEESON, P. T.
A method for modal identification of lightly damped structures.
Journal of Sound and Vibration, 84 (1) : 57 - 79, 1982.

11. FOSS, K. A.
Co-Ordinates Which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems
Journal of Applied Mechanics,

12. GUILLAUME, P.; PINTELON, R.; SCHOUKENS, J.
Nonparametric Frequency response Function Estimators Based on Nonlinear Averaging Techniques
IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol 41 (6), 1992.
13. IBRAHIM, S. R. & MIKULCIK, E. C.
A time domain modal vibration test technique.
The Shock and Vibration Bulletin, 43 : 21-37, 1973.
14. IBRAHIM, S. R.
Modal identification techniques : Assessment and comparisons.
Proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conference,
vol. I : 831 - 839, 1986.
15. IBRAHIM, S. R.
An upper Hessenberg sparse matrix algorithm for modal identification on minicomputers.
Journal of Sound and Vibration, 113 (1) : 47-57, 1987.
16. JEONG., W. B.; OKUMA, M.; NAGAMATSU, A.
Experimental Identification of Mechanical Structure with Characteristic Matrices
JSME International Journal, series III, vol. 32 (1), 1989
17. LEVY, E. C.
Complex curve fitting.
IRE Trans. Autom. Control, AC-4: 37-43, 1959.
18. LIANG, Z. ; TONG, M. ; LEE, G. C.
Complex Modes in Damped Linear Dynamic Systems
The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis,
vol VII (1), 1 - 20, 1992
19. MANNETJE, J.J.
Transfer-Function Identification Using a Complex Curve-Fitting Technique
Journal Mechanical Engineering Science, vol 15 (5), 339 - 345, 1973
20. MEIROVITCH, L.
Computation Methods in Structural Dynamics.
Sijthoff & Noordhoff, 1980.
21. MINAS, C. ; INMAN, D. J.
Identification of a Nonproportional Damping Matrix from Incomplete Modal Information
Journal of Vibration and Acoustics
vol. 113, 219 - 224, 1991

22. PAYNE, P. A.
An Improved Technique for Transfer Function Synthesis from Frequency Response Data
IEEE Transactions on Automatic Control, 1970
23. PINTELON, R.; GUILLAUME, P.; ROLAIN, Y.; SCHOUKENS, J.; VAN HAMME, H.
Parametric Identification of Transfer Functions in the Frequency Domain - A Survey
IEEE Transactions on Automatic Control, vol 39 (11), 1994
24. PRESS, W. H. ; FLANNERY B. P.; TEUKOLSKY, W. T.; VETTERING, W. T.
Numerical Recipes. The Art of Scientific computing
Cambridge Univ. Press, New York, 2nd. Edition, 1992.
25. PREVOSTO, M; OLAGNON M.; BENVENISTE A.; BASSEVILLE M.; LE VEY, G.
State Space Formulation : A Solution to Modal Parameter Estimation
Journal of Sound and Vibration, 148 (2), 329 - 342, 1991
26. RAYLEIGH, L.
Theory of Sound, vol (1)
Dover Publications, 1945
27. SANATHANAN, C. K. & KOERNER, J.
Transfer function synthesis as a ratio of two complex polynomials.
IEEE Trans. Autom. Control, AC - 8 : 56-58, 1983.
28. SHOUKENS, J., PINTELON, R., VAN HAMME., H.
Identification of Linear Dynamic Systems Using Piecewise Constant Excitations : Use, Misuse and Alternatives
Automatica, vol 30 (7), 1153 - 1169, 1994
29. SIDMAN, M. D., DeANGELIS, F. E. & VERGHESE, G. C.
Parametric system identification on logarithmic frequency response data
IEEE Trans. Automat. Contr., vol 36 (9), 1065 - 1070, 1991
30. STAHL, H.
Transfer Function Synthesis Using Frequency Response Data
Int. J. Control, vol. 39 (3), 541 - 550, 1984.
31. VAROTO, P. L.
Análise Modal no Domínio da Frequência : Um Método de Identificação Multi - Modos
Dissertação de Mestrado, EESC, São Carlos, 1991

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

1. BLARICUM, M. L. & MITRA, R.
Problems and solutions associated with Prony's method for processing transient data
IEEE Transactions on antennas and Propagation, 26 (1) : 1978

2. BROWN, D. ; CARBON, G. ; RAMSEY, K.
Survey of excitation techniques applicable to the testing of automotive structures.
S.A.E. paper 770029, 1977.

3. CAWLEY, P.
The reduction of Bias error in transfer functions estimates using FFT based analyzers.
Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 106 (1) : 29-35, 1984.

4. CARRASCOSA, L. I. ; BUSTURIA, J. M. ; GIMENEZ, J. G.
Global experimental modal analysis. a comparison of different methods.
Proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conference, vol I : 311 - 321, 1985.

5. CHUNG, K. R. & LEE, C. W.
An efficient method for compensating truncated higher modes in structural dynamics modification.
Proc. Instn. Mech. Engrs., vol 200 (C1) : 41 - 48, 1986.

6. CRAIG JR, R. R. & SU, Y. -W. T.
On multiple shaker resonance testing.
AIAA Journal, 12 (7) : 924 - 931, 1974

7. CRAIG, R. R.
Structural dynamics : an introduction to computer methods.
John Wiley & sons, 1981.

8. CRANDALL, S. H.
The hysteretic damping model in vibration theory.
Proc. Instn. Mech. Engrs., vol 205 : 23 - 28, 1991

9. DALLY, J. W.; RILEY, W. F. ; McCONNELL, K. G.
Instrumentation for Engineering measurements.
John Wiley & sons Inc., 1984

10. DEBLAUWE, F.; BROWN, D. L.; ALLEMANG, R. J.
The polyreference time domain technique
Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference
vol. I : 832-845, 1987.

11. ELLIOTT, L. B. & MITCHELL, L. D.
The improved frequency response function and its effect on modal circle.
Journal of Applied Mechanics, 51 (3) : 657 - 663, 1984.
12. EWINS, D. J.
On how receptances enable dynamic behaviour prediction in structures.
Proc. Instn. Mech. Engrs., vol 205 : 29-30, 1991.
13. EWINS, D. J.
Estimation of peak resonant amplitudes.
Journal of Sound and Vibration, 43 (4) : 595 - 605, 1975.
14. EIKHOFF, P.
System identification. Parameter and state estimation.
John Wiley & sons, Bristol 1974
15. FILLOD, R. ; PIRANDA, J. ; BONNECASE, D.
Taking non linearities into account in modal analysis by curve fitting of transfer functions
Proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conference,
vol. I : 88 - 95, 1985.
16. FROBERG, C. E.
Introduction to numerical analysis
Addison-Wesley Publishing C., Inc., 1965
17. FULLEKRUG, U.
Survey of parameter estimation methods in experimental modal analysis.
Journal of the Soc. of Env. Engineering, 31 - 34, 1988.
18. GAUKROGER, D. R. ; SKINGLE, C. W. ; HERON, K. H.
Numerical Analysis of vector response loci.
Journal of Sound and Vibration, 29 (3) : 341 - 353, 1973.
19. GAUKROGER, D. R. ; SKINGLE, C. W. ; HERON, K. H.
The processing of response data to obtain modal frequencies and damping ratios.
Journal of Sound and Vibration, 35 (4) : 559 - 571, 1974.
20. GOYDER, H. G. D.
Methods and applications of structural modeling from measured structural frequency response data.
Journal of Sound and Vibration, 61 (2) : 209 - 230, 1980.
21. HALLAUER, W. L. & STAFFORD, J. F.
On the distribution of shaker forces in multiple-shaker modal testing
The shock and Vibration Bulletin, 48 (1) : 49 - 63, 1978

22. HE, J. & EWINS, D. J.
Compatibility of measured and predicted vibration modes in model improvement studies.
AIAA Journal, 29 (5) : 798 - 803, 1991.
23. HOLLKAMP, J. J. & BATILL, S. M.
Automated parameter identification and order reduction for discrete time series models
AIAA Journal, 29 (1) : 96 - 103, 1991.
24. HURTY, W. C. & RUBINSTEIN, M. F.
Dynamics of structures
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.
25. IBRAHIM, S. R. & MIKULCIK, E. C.
The experimental determination of vibration parameters from time responses
The Shock and Vibration Bulletin, 46 : 187-196, 1976.
26. IBRAHIM, S. R. & MIKULCIK, E. C.
A method for the direct identification of vibration parameters from the free responses
The Shock and Vibration Bulletin, 47 : 183-198, 1977.
27. IBRAHIM, S. R.
Modal confidence factor in vibration testing.
The Shock and Vibration Bulletin, vol. I : 65-75, 1978.
28. IBRAHIM, S. R.
Double least squares approach for use in structural modal identification
AIAA Journal, 24 (3) : 499 - 503, 1986.
29. JUANG, J. -N. & SUZUKI, H.
An eigensystem realization algorithm in frequency domain for modal parameter identification.
Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 110 (1) : 24 - 29, 1988.
30. KANO, H.
An identification method of multiinput, multioutput linear dynamical systems for the experimental modal analysis of mechanical structures.
Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 111 (2) : 146 - 152, 1989.
31. KENNEDY, C. C. & PANCU, C. D. P.
Use of vectors in vibration measurements and analysis.
Journal of Aeronautical Sciences, 14 9110 : 603 - 625, 1947.

32. KIM, K. -J. & SIM, C. -G.
A new curve fitting algorithm for modal parameter estimation.
Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference,
vol I : 133 - 139, 1987.
33. KIRSHENBOIM, J.
Real vs complex normal mode shapes
Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference
vol. II : 1594 - 1599, 1987.
34. LAMB, J. D.
An Improved Technique for Transfer Function Synthesis from Frequency Data
IEEE Transactions on Automatic Control, 480 - 483, 1970
35. LAMONTIA, M. A.
On the determination and use of residual flexibilities, inertia restraints and rigidity-body modes
Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference,
vol. I : 153 - 159, 1982.
36. LEURIDAN, J. ; LIPKENS, J.; VAN DER AUWERAER H.;
LEMBREGTS, F.
Global modal parameter estimation methods : an assessment of time versus frequency domain implementation.
Proceedings of the International Seminar on Modal Analysis,
vol II : 1-9, 1985.
37. LEURIDAN, J. M. ; ALLEMANG, R. J. ; BROWN, D. L.
Time domain parameter identification methods for linear modal analysis : a unifying approach
Journal of Vibration Acoustics, Stress and Reliability in Design, 108 :
1 - 8 , 1986.
38. LIN, P. L. & WU, Y. C.
Identification of multi-input multi-output linear systems from frequency response data.
Journal of dynamic system, measurement and control, 104
(1) : 58 - 64, 1982
39. MACBAIN, J. C.; KIELB, R. E.; LEISSA, A. W.
Vibration of twisted cantilevered plates - Experimental investigation
Trans. ASME journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 107:
187-196, 1985.
40. MACE, B. R.
The effects of transducer inertia on beam vibration measurements.
Journal of Sound and Vibration, 145 (3) : 365 - 379, 1991.

41. MEIROVITCH, L.
Analytical Methods in Vibrations
Collier-Macmillan limited, London, 1967.
42. MERGEAY, M.
Multi degree of freedom parameter estimation methods for modal analysis.
Annals of the CIRP, 31 (1) : 269-273, 1982.
43. MIRAMAND, N.; BILLAUD, J. F.; LELEUX, F.; KERNEVEZ, J. P.
Identification of structural modal parameters by dynamic tests at a single point
The Shock and Vibration Bulletin, 46 (5) : 197-212, 1976.
44. NASHIF, A. D.; JONES, D. I. G.; HENDERSON, J. P.
Vibration Damping
John Wiley & sons, 1985
45. NATKE, H. G.
Identification of structures : measurement, excitation, time series and modal analysis.
Laboratório de Dinâmica de Sistemas Mecânicos e Estruturas
I. T. Un. Federal do Espírito Santo, 1987.
46. NEWLAND, D. E.
On the modal analysis of non-conservative linear systems.
Journal of Sound and Vibration, 112 (1) : 69 - 96, 1987.
47. NEWLAND, D. E.
Mechanical Vibration Analysis and Computation.
Longman Scientific & Technical, 1989.
48. OLSEN, N.
Excitation functions for structural frequency response measurements.
Proceedings of the 2nd International Modal Analysis Conference,
vol. I : 894 - 902, 1984.
49. OOKUMA, M. & NAGAMATSU, A.
Experimental identification of a mechanical structure with characteristics matrices.
JSME International Journal, 30 (264) : 970 - 975, 1987.
50. PAPPA, R. S. & IBRAHIM, S. R.
A parametric study of the Ibrahim time domain modal identification algorithm
The shock and Vibration Bulletin, 51 (3) : 43 - 57, 1981.
51. PRONY, R.
Essai Experimental et Analytique.
J. l'Ecole Polytechnique, vol 1 N. 2, 1795

52. RADES, M.
Parameter identification of a structure with combined coulomb and hysteretic damping
Revue Romaine des Sciences Techniques, Serie de Mecanique appliquee,
27 (2) : 299 - 308, 1982.
53. RADES, M.
Modal Analysis using frequency response data.
The Shock and Vibration Digest, 1986.
54. RAMSEY, K. A.
Experimental modal analysis, structural modifications and FEM analysis on a Desk-top computer
Sound and Vibration, 17 (2) : 19 - 27, 1983.
55. RICHARDSON, M. H. & FORMENTI, D. L.
Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials
Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference,
vol. I : 167 - 181, 1982.
56. SELEGHIM JR., P.
Análise dinâmica de uma placa cantilever pelo método da superposição.
Dissertação de Mestrado, EESC - USP, São Carlos, 1990
57. SHIH, C. Y. ; TSUEI, Y. G. ; ALLEMANG, R. J. ; BROWN, D. L.
A frequency domain global parameter estimation method for multiple reference frequency response measurements.
Mechanical Systems and Signal Processing, 2 (4) : 349 - 365, 1988
58. SHIN, Y. C. ; EMAN, K. F. ; WU, S. M.
Experimental complex modal analysis of machine tool structures.
Journal of Engineering for Industry, 111 (2) : 116 - 124, 1989.
59. SMITH, K. E.
An evaluation of a least squares time domain parameter identification method for free response measurement.
2nd. International Modal Analysis Conference, 1984.
60. SMITH, W. R.
Least squares time domain method for simultaneous identification of vibration parameters from multiple free response records.
Proceedings of 22nd AIAA Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Atlanta : 194 - 201, April 1981.
61. SNOEYS, R. ; ROESEMS, D. ; VANDEURZEN, U. ; VANHONACKER, P.
Survey of modal analysis applications.
Annals of the C. I. R. P., 28 (2) : 497 - 510, 1979.

62. STROUD, R. C. ; SMITH, S. ; HAMMA, G. A.
MODALAB : A new system for structural dynamic testing.
The shock and vibration Bulletin, 46 (5) : 153 - 174, 1976.
63. STROUD, R. C.
Excitation, measurement and analysis methods for modal testing.
Sound and Vibration, 21 (8) : 12 - 27, 1987.
64. VAKAKIS, A. F. & CAUGHEY, T. K.
A technique for modal identification of interfering modes.
Journal of Sound and Vibration, 146 (3) : 361 - 380, 1991.
65. VAN DER AUWERAER, H. ; SAS, P. ; VANHERCK, P. ; SNOEYS, R.
Experimental modal analysis with stepped - sine excitation.
Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference,
vol I : 572 - 580, 1986.
66. VAROTO, P. S. & MUCHERONI, M. F.
Identificação de parâmetros modais no domínio da frequência. Trabalho
submetido ao XI Congresso Brasileiro e Engenharia Mecânica, XI COBEM,
1991.
67. VOLD, H.; KUNDRAT, J.; ROCKLIN, G. T. ; RUSSELL, R.
A multi-input modal estimation algorithm for minicomputers.
S.A.E. Transactions, vol 91, s. 1 : 815 - 821, 1982.
68. YOSHIMURA, T. & NAGAMATSU, A.
Modal parameter estimation with multi - reference curve fitting
JSME International Journal, 30 (261) : 476 - 481, 1987.
69. WANG, Z. & FANG, T.
A time domain method for identifying modal parameters.
Journal of Applied Mechanics, 53 (1) : 28 - 32, 1986.
70. WANG, S. ; SATO, H. ; O-HORI , M.
New approaches to the modal analysis for machine tool structure.
Journal of Engineering for Industry, 106 (1) : 40 - 47, 1984
71. WHITFIELD, A. H.
Transfer function synthesis using frequency response data.
International Journal of Control, 43 (5) : 1413 - 1426, 1986.