

*A COMPARAÇÃO ENTRE DUAS CONDIÇÕES DE  
CONTORNO NUM MODELO NÃO PERMANENTE  
UNIDIMENSIONAL, APLICADO AO  
ESVAZIAMENTO DE UM CANAL RETANGULAR*

Aluna: Lunalva Azevedo Neves



Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil área Hidráulica e Saneamento.



Orientador: Prof. Titular Hans George Arens

São Carlos

1999

|        |           |
|--------|-----------|
| Class. | TESE-EESC |
| Cutt.  | 3921      |
| Tombo  | 255/99    |

311 0000 7809

S/S 1060301

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

N518c

Neves, Lunalva Azevedo

A comparação entre duas condições de contorno num modelo não permanente unidimensional, aplicado ao esvaziamento de um canal retangular / Lunalva Azevedo Neves. -- São Carlos, 1999.

Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de São Carlos-Universidade de São Paulo, 1999.

Área: Hidráulica e Saneamento.

Orientador: Prof. Dr. Hans George Arens.

1. Superfície livre. 2. Profundidade crítica.
  3. Modelo não permanente unidimensional em canais.
- I. Título.

## FOLHA DE APROVAÇÃO

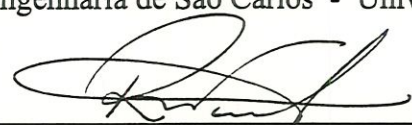
Candidata: Engenheira **LUNALVA AZEVEDO NEVES**

Tese defendida e aprovada em 08-10-1999  
pela Comissão Julgadora:



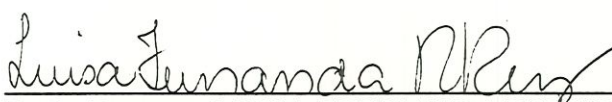
---

Prof. Titular **HANS GEORGE ARENS (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)




---

Prof. Doutor **RODRIGO DE MELO PORTO**  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



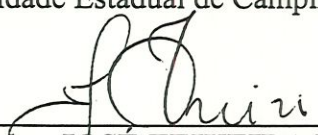
---

Profa. Doutora **LUISA FERNANDA RIBEIRO REIS**  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



---

Prof. Doutor **EVALDO MIRANDA COIADO**  
(Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP)



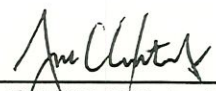
---

Prof. Titular **JOSÉ TEIXEIRA FREIRE**  
(Universidade Federal de São Carlos - UFSCar)



---

Prof. Associado **EDUARDO CLETO PIRES**  
Coordenador da Área de Hidráulica e Saneamento



---

**JOSÉ CARLOS A. CINTRA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

## DEDICATÓRIA

Aos meus pais, e irmãos,  
a tudo que representam  
para mim.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por me fazer acreditar que vale a pena lutar e ter esperança, por me mostrar que podemos extrair muita coisa boa da vida.

Ao Prof. Titular, Hans George Arens, meu muito obrigada, pelos ensinamentos científicos que tive oportunidade de usufruir, e também pelo ser humano que é, fazendo a mim e aos demais orientandos crescer não só como profissionais, mas também como cidadãos.

Aos colegas de Doutorado, João Abner e Augusto, pelo estímulo e colaborações no decorrer do curso.

Aos professores do SHS da EESC agradeço pelas contribuições científicas transmitidas no decorrer das disciplinas, e aos funcionários agradeço pelos serviços prestados.

Ao Sr. Edson Cornetta do Laboratório de Hidráulica, pelo auxílio e amizade na realização dos ensaios.

Ao Sr. Luiz Carlos e Sr. Vadinho, agradeço pela ajuda aos ensaios.

Aos funcionários da Pós-Graduação e da Biblioteca Central, pela assistência dispensada.

À Prof. Irmã Sara Ney, que, há muito tempo, de forma muito simples, me ensinou que vale a pena acreditar e lutar.

Ao CNPq, pela concessão de bolsa de estudos.

E a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a execução deste trabalho.

## SUMÁRIO

|  |           |
|--|-----------|
| Lista de símbolos.....   | i         |
| Lista de tabelas.....  | iv        |
| Lista de figuras.....  | v         |
| Resumo.....  | x         |
| Abstract.....  | xi        |
| <b>1. INTRODUÇÃO.....</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1 Justificativa da pesquisa.....   | 1         |
| 1.2 Objetivos.....   | 3         |
| 1.3 Considerações preliminares.....  | 4         |
| <b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>   | <b>9</b>  |
| 2.1 Ruptura de Barragem.....   | 9         |
| 2.2 Condição de Contorno.....  | 11        |
| 2.3 Análise Dimensional da Equação de Saint Venant.....  | 15        |
| 2.4 Distribuição de Pressão em uma Tubulação em Regime Permanente.....                               | 16        |
| 2.5 Medidor de Velocidade em Regime Não Permanente em Canais.....                                    | 16        |
| 2.6 Condições de Contorno para escoamento Permanente em Canal de Seção<br>Retangular e Circular..... | 18        |
| 2.6.1 Introdução.....  | 18        |
| 2.6.2 A Condição Inicial e as Condições de Contorno.....   | 18        |
| 2.6.2.1 Condição Inicial.....  | 18        |
| 2.6.2.2 Condição de Contorno.....  | 19        |
| <b>3. METODOLOGIA.....</b>   | <b>29</b> |
| 3.1 Introdução.....  | 29        |
| 3.2 Modelo Físico.....   | 30        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 3.2.1     | A Geometria Retangular.....   | 31        |
| 3.2.1.1   | Forma Adimensional.....   | 33        |
| 3.2.2     | Geometria Circular.....   | 34        |
| 3.2.1.1   | Forma Adimensional.....   | 35        |
| 3.3       | Modelo Analítico.....   | 36        |
| 3.4       | Procedimento para a Integração Numérica das Equações.....                 | 41        |
| 3.4.1     | Método MacCromack.....  | 41        |
| 3.4.2     | Método Lax-Wendroff.....  | 43        |
| 3.4.3     | Método das Características.....   | 46        |
| 3.4.4     | Condição de Contorno.....   | 47        |
| 3.4.5     | Estabilidade.....   | 47        |
| 3.5       | O Modelo Experimental.....  | 47        |
| 3.6       | Algoritmo do Programa Computacional do Método de Lax-Wendroff.....        | 51        |
| <b>4.</b> | <b>CLASSIFICAÇÃO DOS MODELOS DE ESCOAMENTO NÃO PERMANENTE.....</b>        | <b>54</b> |
| 4.1       | Introdução.....   | 54        |
| 4.2       | Definição dos Modelos de Simulação do escoamento em Canais.....           | 58        |
| 4.2.1     | Modelos Armazenamento.....  | 58        |
| 4.2.2     | Onda Cinemática.....  | 60        |
| 4.2.3     | Modelo de Difusão.....  | 63        |
| 4.2.4     | Modelo Hidrodinâmico.....   | 64        |
| <b>5.</b> | <b>INTRODUÇÃO À ANÁLISE DIFERENCIAL DAS EQUAÇÕES DE SAINT VENANT.....</b> | <b>65</b> |
| 5.1       | Introdução.....   | 65        |
| 5.2       | Equação da Continuidade.....  | 66        |
| 5.3       | Equação da Quantidade de Movimento.....                                   | 70        |
| 5.4       | Análise Dimensional.....  | 76        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>6. HIPÓTESES E APROXIMAÇÕES.....</b>   | <b>79</b>  |
| 6.1 Pressão Hidrostática.....   | 79         |
| 6.1.1 A Equação Básica.....   | 79         |
| 6.1.2 Distribuição da Pressão em uma Seção do Canal.....  | 83         |
| 6.1.2.1 Escoamento Paralelo.....  | 83         |
| 6.1.2.2 Escoamento Curvilíneo.....  | 85         |
| 6.1.2.3 Efeito da Declividade na Distribuição da Pressão.....   | 87         |
| 6.1.2.4 Análise Dimensional da Pressão Hidrostática.....  | 89         |
| 6.2 Aproximação da Declividade.....   | 93         |
| 6.3 Coeficientes de Distribuição da Velocidade.....   | 94         |
| 6.4 Resistência ao Escoamento.....  | 97         |
| <b>7. TÉCNICAS NUMÉRICAS USADAS PARA RESOLVER AS EQUAÇÕES<br/>DO ESCOAMENTO NÃO PERMANENTE EM CANAIS.....</b> | <b>100</b> |
| 7.1 Método das Características.....   | 103        |
| 7.1.1 Conclusão do Método das Características.....  | 109        |
| 7.2 Outros Métodos Numéricos.....   | 110        |
| 7.2.1 Diferenças Finitas.....   | 111        |
| 7.2.2 Esquemas Explícitos.....  | 112        |
| 7.2.3 Método de MacCormack.....   | 112        |
| 7.2.3.1 Discretização Numérica.....   | 114        |
| 7.2.3.2 Viscosidade Artificial.....   | 116        |
| 7.2.3.3 Conclusões do Esquema MacCormack.....   | 118        |
| 7.2.4 Método Lax-Wendroff.....  | 118        |
| 7.2.5 Conclusão dos Métodos Explícitos.....   | 123        |
| 7.2.6 Esquemas Implícitos.....  | 123        |
| 7.2.7 Esquema de Preissmann.....  | 124        |
| 7.2.8 Conclusão dos Métodos Implícitos.....   | 126        |
| 7.2.9 Elementos Finitos.....  | 127        |



|  |     |
|--|-----|
| <b>8. COMPARAÇÃO DA ESTABILIDADE, CONVERGÊNCIA E CONSISTÊNCIA.....</b>   | 129 |
| 8.1 Introdução.....  | 129 |
| 8.2 Estabilidade.....  | 130 |
| 8.3 Consistência.....  | 133 |
| 8.4 Convergência.....  | 133 |
| 8.5 Conclusão.....   | 134 |
| <b>9. TESTES PRELIMINARES DOS MÉTODOS NUMÉRICOS EM UM CANAL RETANGULAR CUJA CONDIÇÃO DE CONTORNO A JUSANTE É UMA SENÓIDE.....</b>  | 136 |
| 9.1 Apresentação do Modelo Matemático.....   | 136 |
| <b>10. MODELAÇÃO MATEMÁTICA DA SUPERFÍCIE LIVRE DE UM CANAL DE SEÇÃO CIRCULAR, CONSIDERANDO O COEFICIENTE DE CORREÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO <math>C_{st}</math> .....</b> | 145 |
| 10.1 Demonstração dos Parâmetros de uma Seção circular.....  | 148 |
| 10.2 Método Regula-Falsi.....  | 151 |
| <b>11. ENSAIOS PRELIMINARES.....</b>   | 156 |
| 11.1 A Calibração dos Transdutores de Pressão Usados nos Ensaios do Canal Retangular.....  | 158 |
| <b>12. DISCUSSÕES SOBRE O MODELO NUMÉRICO RETANGULAR E CIRCULAR.....</b>   | 160 |
| 12.1 As Curvas Previstas pelo Modelo Computacional nos Canais Retangulares   | 160 |
| 12.2 As Curvas Previstas pelo Modelo Computacional na Geometria Circular.....  | 165 |
| 12.3 As Curvas Experimentais (Geometria Retangular) e a Calibração do Modelo.....  | 167 |
| <b>13. CONCLUSÕES.....</b>   | 171 |
| <b>14. BIBLIOGRAFIA.....</b>   | 175 |
| 14.1 Bibliografia Consultada.....  | 182 |

## **APÊNDICE I**

|  |    |
|--|----|
| <b>1. CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO</b> ..... | 1  |
| 1.1 Condições Iniciais.....                      | 1  |
| 1.2 Condições de Contorno.....                   | 2  |
| 1.2.1 Condições Externas.....                    | 3  |
| 1.2.1.1 Vertedores.....                          | 4  |
| 1.2.1.2 Medidores de Profundidade Crítica.....   | 7  |
| 1.2.1.2.1 Vertedores de Crista Larga.....        | 10 |
| 1.2.1.2.2 Medidor Parshall.....                  | 13 |
| 1.2.1.3 Comportas.....                           | 21 |
| 1.2.2 Condições Internas.....                    | 22 |

## **APÊNDICE II**

|   |    |
|---|----|
| <b>1. CÁLCULO DO PERFIL DO ESCOAMENTO GRADUALMENTE VARIADO EM REGIME PERMANENTE</b> ..... | 1  |
| 1.1 Definição do Perfil do escoamento.....  | 1  |
| 1.2 Classificação dos Perfis Longitudinais.....   | 3  |
| 1.3 Métodos de Cálculo do Perfil do escoamento em Regime Permanente.....                  | 12 |
| 1.3.1 Métodos para Aplicação em Canais Uniforme.....                                      | 12 |
| 1.3.1.1 O Método da Integração Gráfica.....   | 12 |
| 1.3.1.2 Método da Integração Direta.....  | 14 |
| 1.3.1.3 Método de Diferenças Finitas.....   | 15 |
| 1.3.2 Métodos Estáveis para Aplicação em Canais Irregulares.....                          | 17 |
| 1.3.2.1 Considerações Preliminares.....   | 17 |
| 1.3.2.2 Análise dos Valores Médios dos Parâmetros.....                                    | 18 |
| 1.3.2.3 Métodos Gráficos.....   | 20 |
| 1.3.2.3.1 Método de Escoffier.....  | 21 |
| 1.3.2.3.2 Método de Ezra.....   | 24 |
| 1.3.2.4 Método de Grimm.....  | 27 |

## **APÊNDICE III**

## LISTA DE SÍMBOLOS

|          |   |
|----------|---|
| $a_s$    | aceleração  |
| $A$      | área da seção transversal do canal  |
| $A'$     | parâmetro da equação do método Lax-Wendroff   |
| $A^*$    | parâmetro da equação adimensional do método Lax-Wendroff  |
| $A_n$    | área nominal  |
| $B$      | largura do canal  |
| $B'$     | parâmetro da equação do método Lax-Wendroff   |
| $B^*$    | parâmetro da equação adimensional do método Lax-Wendroff  |
| $c_1$    | fator de proporção da profundidade $h_e$ , que corresponda ao trecho $X_0$ , onde a distribuição de pressão é não hidrostática usado em canal retangular em escoamento não permanente |
| $C$      | o subscrito $c$ indica corretor   |
| $c$      | celeridade  |
| $c'$     | pressão devido a ação centrífuga  |
| $C_s$    | coeficiente de distribuição de pressão em superfície livre em regime permanente   |
| $C_{st}$ | coeficiente de distribuição de pressão em superfície livre em regime não permanente   |
| $C$      | coeficiente de Chezy  |
| $C^+$    | curva de característica positiva  |
| $C^-$    | curva de característica negativa  |
| $C'$     | parâmetro da equação do método Lax-Wendroff   |
| $C^*$    | parâmetro da equação adimensional do método Lax-Wendroff  |
| $C_d$    | coeficiente de vazão  |

|           |   |
|-----------|---|
| $d$       | o subscrito $d$ indica a jusante  |
| $E$       | energia específica  |
| $F$       | parâmetro da equação do método MacCormack   |
| $F^*$     | parâmetro da equação do método Lax-Wendroff e MacCormack                                  |
| $F_r$     | número de Froude  |
| $g$       | aceleração de gravidade   |
| $G$       | parâmetro do Método MacCormack  |
| $G^*$     | parâmetro adimensional do método MacCormack   |
| $h$       | profundidade do escoamento  |
| $\bar{h}$ | distância da superfície da água ao centro de gravidade da área molhada                    |
| $\hat{h}$ | distância do centro de gravidade da seção circular ao centro de gravidade da área molhada |
| $h_c$     | profundidade crítica  |
| $h_e$     | profundidade da extremidade de jusante do canal   |
| $H_e$     | carga de energia  |
| $H_n$     | profundidade nominal  |
| $H^*$     | profundidade adimensional do escoamento   |
| $I$       | vazão de entrada no trecho  |
| $L_n$     | comprimento nominal do canal  |
| $m$       | o subscrito $m$ refere a valores médios   |
| $n$       | coeficiente de Manning  |
| $p$       | subscrito $p$ indica preditor   |
| $P$       | perímetro molhado   |
| $q$       | vazão de contribuição lateral por unidade de comprimento do trecho                        |
| $Q$       | vazão   |
| $Q_n$     | vazão nominal   |
| $R$       | raio  |
| $R_h$     | raio hidráulico   |

|                 |   |
|-----------------|---|
| S               | comprimento de trecho adimensional  |
| S               | armazenamento   |
| S <sub>f</sub>  | declividade da linha de energia   |
| S <sub>o</sub>  | declividade do fundo do canal   |
| t               | tempo   |
| t <sup>*</sup>  | tempo adimensional  |
| t <sub>n</sub>  | tempo nominal   |
| u               | o subscrito u indica a montante   |
| V               | velocidade média na seção transversal   |
| V <sub>n</sub>  | velocidade média adimensional na seção transversal                            |
| V               | velocidade adimensional   |
| W               | largura da garganta do medidor Parshall                                       |
| x               | espaço na direção longitudinal  |
| z               | nível   |
| Z               | elevação da superfície da água acima do plano de referência                   |
| y               | profundidade do escoamento  |
| ΣF <sub>e</sub> | somatória das forças externas que atuam na massa fluída                       |
| X <sub>o</sub>  | trecho do canal onde a distribuição de pressão não é hidrostática             |
| Δx              | comprimento de integração   |
| σ               | erro  |
| ε               | desvio  |
| α'              | coeficiente de pressão  |
| α               | coeficiente de Coriolis, coeficiente de correção do fluxo de energia cinética |
| β               | coeficiente de Boussinesq, coeficiente de correção da quantidade de movimento |
| γ               | peso específico   |
| ρ               | massa específica  |
| φ               | ângulo de inclinação no fundo do canal  |

## LISTA DE TABELAS

|                        |  |     |
|------------------------|--|-----|
| <b>Tabela 2.1</b>      | Resultados Experimentais (Rajaratman e Muralidhar (1964)).....   | 22  |
| <b>Tabela 4.1</b>      | Modelos de Simulação do escoamento em canais.....  | 57  |
| <b>Tabela 4.2</b>      | Resumo das características das características dos modelos de escoamento.....  | 58  |
| <b>Tabela 5.1</b>      | Análise da equação da continuidade.....  | 69  |
| <b>Tabela 6.1</b>      | Valores médios do coeficiente de rugosidade de Manning para vários materiais de superfície.....  | 98  |
| <b>Tabela 9.1</b>      | Resultados do esquema Lax-Wendroff aplicado em um canal onde se considera que a profundidade de jusante varie segundo uma senóide com o tempo..... | 144 |
| <b>Tabela 9.2</b>      | Resultados do esquema Lax-Wendroff Roberson e Crowe (1997).....  | 188 |
| <br><b>APÊNDICE I</b>  |  |     |
| <b>Tabela 1.1</b>      | Relação empírica vazão–profundidade .....  | 18  |
| <b>Tabela 1.2</b>      | Dimensões Padronizadas de Medidores Parshall .....   | 18  |
| <b>Tabela 1.3</b>      | Limites de aplicação: Medidor Parshall com escoamento livre.....   | 19  |
| <br><b>APÊNDICE II</b> |  |     |
| <b>Tabela 1.1</b>      | Tipos de perfis de escoamento em canais prismáticos.....   | 5   |

## LISTA DE FIGURAS

|                    |   |    |
|--------------------|---|----|
| <b>Figura 1.1</b>  | Canal retangular.....   | 5  |
| <b>Figura 1.2</b>  | Apresentação do comportamento do coeficiente de distribuição de pressão não permanente em superfície livre.....       | 8  |
| <b>Figura 2.1</b>  | Canal convergente-divergente usado por Bellos et al. (1992).....  | 9  |
| <b>Figura 2.2</b>  | Comparação dos métodos de Elementos Finitos e Diferença Finita com dados experimentais Bellos et al. (1992).....      | 10 |
| <b>Figura 2.3</b>  | Situação de referência.....   | 11 |
| <b>Figura 2.4</b>  | Condições de montante de superfície livre.....  | 12 |
| <b>Figura 2.5</b>  | Condições de jusante de superfície livre.....   | 13 |
| <b>Figura 2.6</b>  | Contornos típicos.....  | 14 |
| <b>Figura 2.7</b>  | Detalhes do medidor bistático ADVP.....   | 17 |
| <b>Figura 2.8</b>  | A condição de cotorno crítica (condição convencional).....  | 19 |
| <b>Figura 2.9</b>  | O parâmetro $Q/D^{5/2}$ em função de $h_e/D$<br>CD. Smith 1962 e N. Rajaratnam e D. Muralidhar 1964.....              | 21 |
| <b>Figura 2.10</b> | Curva da vazão para canais circular horizontal, usando-se a profundidade crítica Rajaratnam e D. Muralidhar 1964..... | 21 |
| <b>Figura 2.11</b> | A região de saída de um canal onde os perfis de pressões não são lineares.....  | 23 |
| <b>Figura 2.12</b> | A superfície livre na saída de um canal retangular ( $h_e=13,20$ cm), [Khan e Steffler (1996)].....                   | 25 |
| <b>Figura 2.13</b> | A pressão no fundo na saída de um canal retangular ( $h_e=13,20$ cm), [Khan e Steffler (1996)].....                   | 25 |
| <b>Figura 2.14</b> | Os perfis de pressão na saída de um canal retangular ( $h_e=13,20$ cm), [Khan e Steffler (1996)].....                 | 26 |

|                    |   |     |
|--------------------|---|-----|
| <b>Figura 2.15</b> | A função $C_{st}(x)$ estimada a partir dos perfis Figura 2.14 e Figura 2.15 e a utilizada neste trabalho.....                       | 26  |
| <b>Figura 2.16</b> | As curvas referentes ao comprimento do trecho final $X_0$ (geometria circular) B. Clausnitzer e W. H. Hager (1997).....             | 27  |
| <b>Figura 3.1a</b> | Canal retangular, com controle a jusante.....   | 30  |
| <b>Figura 3.1b</b> | Esquema do canal retangular e as secções de medida a,b,c,d,e e f ( $x=0, x=L/6, x=L/3, x=L/2, x=2L/3$ e $x=5L/6$ ).....             | 31  |
| <b>Figura 3.2</b>  | Esquema do canal circular.....  | 34  |
| <b>Figura 3.3</b>  | Volume de controle para o desenvolvimento das Equações do escoamento no canal.....  | 36  |
| <b>Figura 3.4</b>  | Esquema de ensaio.....  | 48  |
| <b>Figura 3.5</b>  | Diagrama do sistema de medida.....  | 50  |
| <b>Figura 5.1</b>  | Seção Longitudinal.....   | 67  |
| <b>Figura 5.2</b>  | Quantidade de movimento.....  | 70  |
| <b>Figura 6.1</b>  | Forças agindo em uma partícula que se move ao longo de uma linha de corrente.....   | 81  |
| <b>Figura 6.2</b>  | Casos típicos de escoamento em canal<br>a) Escoamento paralelo com $\theta \approx 1$<br>b) Escoamento em queda livre.....          | 84  |
| <b>Figura 6.3</b>  | Escoamento curvilíneo<br>a) Distribuição da pressão no escoamento côncavo<br>b) Distribuição da pressão no escoamento convexo ..... | 85  |
| <b>Figura 6.4</b>  | Distribuição da pressão para escoamento em canais com declividade.....  | 88  |
| <b>Figura 7.1</b>  | Discretização do método das características.....  | 103 |
| <b>Figura 7.2</b>  | Linhas características para escoamentos subcrítico e supercrítico   | 108 |
| <b>Figura 7.3</b>  | Esquema de diferenças finitas.....  | 114 |
| <b>Figura 7.4</b>  | Sistema de malha de dois passos para o esquema Lax Wendroff   | 119 |



|                     |  |     |
|---------------------|--|-----|
| <b>Figura 9.1</b>   | Canal retangular, cuja condição de contorno no reservatório, é uma senóide.....  | 137 |
| <b>Figura 9.2</b>   | Definição do sistema da malha para as equações de diferença finita.....  | 139 |
| <b>Figura 9.3</b>   | Apresentação dos métodos Lax-Wendroff e Características, com a profundidade de jusante variando segundo uma senóide..... | 142 |
| <b>Figura 9.4</b>   | Apresentação dos métodos MacCormack e Características, com a profundidade de jusante variando segundo uma senóide.....   | 142 |
| <b>Figura 9.5</b>   | Apresentação dos métodos MacCormack e Lax-Wendroff, com a profundidade de jusante variando segundo uma senóide.....      | 143 |
| <b>Figura 10.1a</b> | Perfil de um escoamento em uma seção circular.....   | 145 |
| <b>Figura 10.1b</b> | Esquema do canal circular.....   | 146 |
| <b>Figura 10.2</b>  | Conduto circular operando parcialmente cheio.....  | 148 |
| <b>Figura 10.3a</b> | A função $f(\theta_0)$ no intervalo $0,1 < \theta < \pi/2$ .....   | 152 |
| <b>Figura 10.3b</b> | A função $f(\theta_0)$ no intervalo $\pi/2 < \theta < \pi$ .....   | 153 |
| <b>Figura 10.4</b>  | Demonstração do método Regula-Falsi.....   | 154 |
| <b>Figura 10.5</b>  | Análise do intervalo das raízes.....   | 155 |
| <b>Figura 11.1</b>  | O ensaio preliminar de volume total escoado<br>$V_{total} = Vol_{inicial} - Vol_{final}$ (geometria circular).....       | 157 |
| <b>Figura 11.2</b>  | As curvas $Vol_{total}(t)$ para $h_n = 45$ mm e $h_n = 67,14$ mm.....  | 157 |
| <b>Figura 12.1a</b> | As curvas $h^*_e(t^*)$ na seção de saída com as duas condições de contorno ( $h_n = 200$ mm, $L_n = 3$ m).....           | 161 |
| <b>Figura 12.1b</b> | As curvas $V^*(t^*)$ na seção de saída com as duas condições de contorno ( $h_n = 200$ mm, $L_n = 3$ m).....             | 161 |
| <b>Figura 12.2a</b> | Curvas $h^*(t^*)$ para canais retangulares muito largos ( $H_n/B = 0$ , $H_n/L_n = 0,0667$ )- condição crítica.....      | 162 |
| <b>Figura 12.3a</b> | Curvas $V^*(t^*)$ para canais retangulares muito largos ( $H_n/B = 0$ , $H_n/L_n = 0,0667$ )- condição crítica.....      | 162 |

|                     |  |     |
|---------------------|--|-----|
| <b>Figura 12.2b</b> | Curvas $h^*(t^*)$ para canais retangulares muito largos ( $H_n/B = 0$ , $H_n/L_n = 0,0667$ )- coeficiente de pressão variável $C_s = 0,85$ , $X_0/h_e = 0,5$ ..... | 163 |
| <b>Figura 12.3b</b> | Curvas $V^*(t^*)$ para canais retangulares muito largos ( $H_n/B = 0$ , $H_n/L_n = 0,0667$ )- coeficiente de pressão variável $C_s = 0,85$ , $X_0/h_e = 0,5$ ..... | 163 |
| <b>Figura 12.4</b>  | Superposição das curvas 12.2a e 12. 3a.....  | 163 |
| <b>Figura 12.5</b>  | Superposição das curvas 12.2b e 12. 3b.....  | 164 |
| <b>Figura 12.6</b>  | A influência do coeficiente de saída $C_s$ para um valor constante de $X_0/h_e$ ( $X_0/h_e = 0,5$ ).....   | 164 |
| <b>Figura 12.7</b>  | A influência do coeficiente $X_0/h_e$ de saída para um valor constante $C_s$ ( $C_s = 0,85$ ).....   | 164 |
| <b>Figura 12.8</b>  | Curvas $h^*(t^*)$ para canais circulares ( $H_n/D = 0,5$ ) - condição crítica.....   | 166 |
| <b>Figura 12.9</b>  | Curvas $h^*(t^*)$ para canais circulares ( $H_n/D = 0,746$ ) - condição crítica.....   | 166 |
| <b>Figura 12.10</b> | Curvas $h^*(t^*)$ para canais circulares ( $H_n/D = 0,5$ ) –coeficiente de pressão variável $C_s = 0,85$ , $X_0/h_e = 15$ .....                                    | 166 |
| <b>Figura 12.11</b> | Curvas $h^*(t^*)$ para canais circulares ( $H_n/D = 0,746$ ) –coeficiente de pressão variável $C_s = 0,85$ , $X_0/h_e = 15$ .....                                  | 167 |
| <b>Figura 12.12</b> | As seções a e b do banco de ensaios ( $x_a = 2L_n/3$ , $x_b = 5L_n/6$ ).....   | 167 |
| <b>Figura 12.13</b> | A superposição das curvas experimentais das seções a e b (9 curvas).....   | 168 |
| <b>Figura 12.14</b> | O ajuste das curvas $h^*(t^*)$ teóricas nas seções a.,b,c,d e f ( $H_n = 200\text{mm}$ , $H_n/B = 0,667$ , $H_n/L_n = 0,0667$ ).....                               | 168 |
| <b>Figura 12.15</b> | O ajuste das curvas $h^*(t^*)$ teóricas nas seções a.,b,c,d e f ( $H_n = 150\text{mm}$ , $H_n/B = 0,5$ , $H_n/L_n = 0,05$ ).....                                   | 169 |

|                     |  |     |
|---------------------|--|-----|
| <b>Figura 12.16</b> | O ajuste das curvas $h^*(t^*)$ teóricas nas seções a.,b,c,d e f ( $H_n=100\text{mm}$ , $H_n/B=0,334$ , $H_n/L_n=0,0334$ )..... | 169 |
|---------------------|--|-----|

|                     |  |     |
|---------------------|--|-----|
| <b>Figura 12.17</b> | Superposição das curvas da Figuras 12.14, 12.15 e 12.16..... | 170 |
|---------------------|--|-----|

### APÊNDICE I

|                   |                               |    |
|-------------------|-------------------------------|----|
| <b>Figura 1.1</b> | Vertedor.....                 | 6  |
| <b>Figura 1.2</b> | Vertedor de crista larga..... | 10 |
| <b>Figura 1.3</b> | Queda Livre.....              | 13 |
| <b>Figura 1.4</b> | Medidor Parshall.....         | 14 |

### APÊNDICE II

|                   |   |    |
|-------------------|---|----|
| <b>Figura 1.1</b> | Classificação do perfil do escoamento gradualmente variado.....       | 6  |
| <b>Figura 1.2</b> | Princípio do método de integração gráfica.....                        | 13 |
| <b>Figura 1.3</b> | Escoamento gradualmente variado.....                                  | 15 |
| <b>Figura 1.4</b> | O método de Escoffier para a determinação do perfil longitudinal..... | 22 |
| <b>Figura 1.5</b> | Definição do trecho de um canal.....                                  | 23 |
| <b>Figura 1.6</b> | O método de Erza para a determinação do perfil longitudinal.....      | 26 |
| <b>Figura 1.7</b> | Perfil longitudinal de uma curva de remanso.....                      | 28 |
| <b>Figura 1.8</b> | Método de Grimm para a determinação do perfil longitudinal.....       | 30 |

### APÊNDICE III

|                   |  |   |
|-------------------|--|---|
| <b>Figura 1.1</b> | Manobra da Comporta em um Canal Retangular                               | 1 |
| <b>Figura 1.2</b> | Manobra da Comporta em um Canal Circular                                 | 2 |
| <b>Figura 1.3</b> | Apresentação das Seis Tomadas de Pressão                                 | 2 |
| <b>Figura 1.4</b> | Apresentação do Circuito do Transdutor de Pressão em um Canal Retangular | 3 |
| <b>Figura 1.5</b> | Apresentação do Circuito Eletrônico                                      | 3 |

## RESUMO

O escoamento não permanente em canais retangulares e circulares é descrito por um conjunto de equações diferenciais parciais hiperbólicas, com as condições de contorno e as condições iniciais.

Neste trabalho de pesquisa, o escoamento não permanente em um canal retangular de declividade nula, resultante da manobra instantânea de uma comporta, foi experimentalmente e numericamente investigado. Portanto, o intuito foi verificar o comportamento do nível de água ao longo do canal, e principalmente em um trecho a montante da comporta, o qual corresponda a  $X_0 = c_1 h_e$ , em um canal de seção retangular, onde  $h_e$  é a profundidade da água na extremidade de jusante do canal, e  $c_1$  a constante que será aplicada em escoamento não permanente. Para um canal de seção circular, o estudo se restringiu apenas ao procedimento numérico.

As técnicas numéricas usadas para solucionar as equações do escoamento não permanente, neste trabalho, são: o método MacCormack, o método Lax-Wendroff e o método das Características. As técnicas numéricas são demonstradas, e suas eficiências são comparadas. Os resultados numéricos foram calculados, utilizando-se duas condições de contorno, os quais se aproximam bem dos resultados experimentais.

## ABSTRACT

This Thesis mainly focus on that the unsteady flows in open channel with rectangular and circular sections, which are governed by partial differential equations, *i. e.*, Saint Venant equations, and corresponding initial and boundary conditions.

In the research, the unsteady flow in rectangular open channel, resulted by an abrupt opening of a gate, have been experimently and numerically investigated. The object of this research is to verify the behaviours of the depth of flow in the up-reach of the gate, *i. e.*, from the gate to the water-depth  $c_1 h_e$ , where  $h_e$  represents the water-depth at the downstream end of open channel, and  $c_1$  a constant in unsteady flow. For the open channel with circular section, the research is only carried out by using numerical model.

Three explicit finite-difference schemes (MacCormack, Lax-Wendroff and Characteristics) are employed and compared each other for analysing the unsteady, free-surface flows which have instantaneous discontinuous. The ability and precision of the numerical schemes for modelling the discontinuous flows are presented in detail.

The proposed boundary condition in this Thesis is compared with experimental results and the theoretical results of critical water-depth in open channel flow. The boundary conditions used in the models are very significant. The error introduced by boundaries is propagated and reflect through all of the grid points.

The good precision can be verified by the comparison between the theoretical results and experimental results. The proposed boundary condition can be used in the short channels conveniently.

## **1. INTRODUÇÃO**

### **1.1 JUSTIFICATIVA DA PESQUISA**

Os escoamentos não permanentes em canais são fenômenos em que desafios maiores se concentram na análise das grandezas físicas que têm seus valores alterados no espaço e no tempo.

Os fenômenos físicos relacionados com o escoamento não permanente de superfície livre em canais naturais e artificiais são diversos. Alguns destes fenômenos físicos não permanentes são brevemente resumidos.

a) Na estação de abastecimento: manobra de bombas, e comportas, operações de chaminés de equilíbrio, etc.

b) Nos canais de irrigação: controle automático do escoamento, vazão abrupta ou interrupções de escoamento lateral, etc.

c) Nos canais de navegação: manobras de eclusas e comportas, etc.

d) Os rios intermitentes da região Nordeste do Brasil ocasionam déficit hídrico elevado e chuvas que apresentam uma irregular distribuição temporal e espacial. Com isto, torna-se necessária a utilização de sistemas de aproveitamento integrado dos recursos hídricos disponíveis, ou seja, a procura de metodologias adequadas para realizar um eficiente manejo da água evitando-se desperdícios.

O fenômeno de esvaziamento e enchimento de canais ocorre regularmente em muitos sistemas de irrigação, e por isso o coeficiente de distribuição de pressão pode tornar-se uma consideração importante na análise do modelo hidráulico não permanente correspondente. É importante lembrar que em ruptura de barragem, onde as curvaturas das linhas de corrente são acentuadas, pode-se aplicar o modelo de esvaziamento de um canal desenvolvido nesta pesquisa.

O resultado de uma manobra instantânea de uma comporta localizada a jusante de um canal é um escoamento descontínuo que apresenta certas dificuldades em relação à simulação matemática. Isso porque o fenômeno físico requer considerações especiais no trecho distante, aproximadamente, de  $X_0 = c_1 h_e$  a montante da comporta, devido aos efeitos das curvaturas das linhas de correntes.

Dada a complexidade do escoamento na região da profundidade crítica ( $y_c$ ), esta condição de contorno é em geral aproximada, considerando-se todo o sistema operando com distribuição de pressão hidrostática, ou seja, usando-se as equações de Saint Venant.

A profundidade crítica é significativa em muitos problemas de escoamento em canal, pois o controle em muitas estruturas hidráulicas é estabelecido em condições críticas. Ela deve ser cuidadosamente avaliada dentro dos projetos hidráulicos. Uma descontinuidade pode introduzir instabilidade hidráulica em um sistema real, e causar instabilidade numérica em um modelo de escoamento não permanente

Um projeto ótimo é aquele onde os fenômenos hidráulicos são modelados matematicamente, minimizando os custos, maximizando a eficiência do sistema, sem que subestime ou superestime os resultados.

## 1.2 OBJETIVOS

Com o melhoramento das técnicas computacionais e o avanço da tecnologia, tem aumentado o interesse pelo conhecimento hidrodinâmico relativo aos procedimentos dos fenômenos físicos não permanentes, resultantes das estruturas hidráulicas, manobra de comportas, operações de bombas e complexidades topológicas.

Neste trabalho de pesquisa, o escoamento não permanente resultante da abertura instantânea de uma comporta foi experimentalmente e numericamente investigado. Portanto, o intuito foi verificar o comportamento do nível de água em um trecho a montante da comporta, o qual corresponda  $X_0 = c_1 h_e$ , em um canal de seção retangular.

O objetivo principal dessa pesquisa foi o desenvolvimento de um programa computacional para determinar a superfície livre que ocorre durante o processo de esvaziamento de um canal retangular curto, usando-se um modelo unidimensional (equações de S. Venant) para representar o fenômeno.

Utilizou-se dois métodos numéricos e duas diferentes condições de contorno para obter as curvas características do fenômeno (profundidade, velocidade) comparando-se os resultados previstos com alguns valores experimentais.

Como objetivos específicos, tem-se:

a) A proposição de um coeficiente de distribuição de pressão para descrever os efeitos da aceleração vertical na superfície livre após a abertura de uma comporta;



b) A comparação dos resultados teóricos com os experimentais para verificar a eficiência do coeficiente de distribuição de pressão através de vários perfis da lâmina d'água de um canal de seção retangular;

c) A verificação da precisão dos métodos, MacCormack, Lax Wendroff na utilização do coeficiente de distribuição de pressão, em um trecho de escoamento descontínuo, a ser estudado, correspondendo a  $X_0=c_1h_e$ , situado a montante da abertura de uma comporta;

d) Elaboração de um programa computacional em linguagem Pascal,

com a finalidade de simular o escoamento não permanente em canais de seção retangular, mediante a resolução das equações básicas de Saint Venant, que regem o fenômeno em conjunto com a formulação do coeficiente de distribuição de pressão proposto neste trabalho, por dois métodos numéricos em condição não permanente: MacCormack e Lax-Wendroff.

Dessa forma, este trabalho, além de contribuir para o desenvolvimento teórico e experimental, através da metodologia do coeficiente de distribuição de pressão, tem sua aplicação prática na eficiência dos projetos dos sistemas das redes de irrigação, saneamento, drenagem, etc.

### **1.3 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES**

Na modelação matemática do escoamento não permanente, o engenheiro deve possuir conhecimento da dinâmica do escoamento para ter condições de decidir-se pelo uso de um modelo bidimensional ou unidimensional. Mas a questão importante a ser levada em consideração é quando esquemas bidimensionais de metodologia mais

complexa que podem se tornar facilmente acessíveis pela maior parte dos escritórios de engenharia. Como decidir se um problema particular requer ou não o uso de um modelo bidimensional, se não se tem conhecimento suficiente da dinâmica do escoamento não permanente, sabendo-se que outros esquemas muito mais simples, como os modelos unidimensionais, também podem prever resultados precisos.

Considerados os efeitos da aceleração vertical devido à manobra da comporta, optou-se pela introdução de um coeficiente de distribuição de pressão em um modelo unidimensional, com o intuito de proporcionar esquemas mais simples para utilização pela maior parte dos escritórios de engenharia sobre a dinâmica do escoamento, porém de resultados mais precisos. Assim sendo, este modelo poderá apresentar a mesma capacidade de precisão que os modelos bidimensionais.

O escoamento hidrodinâmico é descrito por meio das equações da continuidade e da quantidade de movimento, em conjunto com as condições iniciais e de contorno, e o coeficiente de distribuição de pressão. O modelo matemático do escoamento não permanente, com a utilização dos conceitos mencionados, é representado pela seguintes equações:

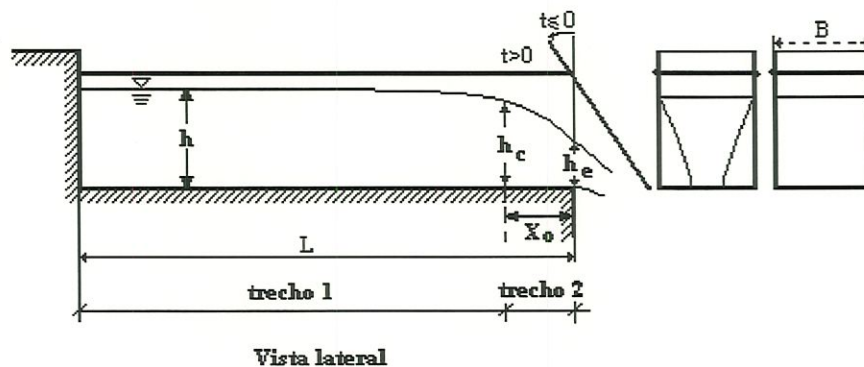


Figura 1.1 Canal retangular

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Vh) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hV) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta hV^2 + C_{st} \frac{gh^2}{2}) = -ghS_f \quad (1.2)$$

A perda  $S_f$  é calculada através das fórmulas válidas para o regime permanente. No caso dos canais retangulares é comum optar-se pela fórmula de Manning

$$S_f = \frac{n^2}{R_H^{4/3}} V|V| \quad (1.3)$$

Para corrigir os termos cinéticos e da quantidade de movimento também é comum recorrer-se aos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  de Coriolis e de Boussinesq, , que aparecem nas equações principais ou nas condições de contorno. Esses coeficientes são definidos respectivamente por

$$\alpha = \frac{\int_0^h V^3 d\eta}{V_m^3 h} \quad (1.4)$$

$$\beta = \frac{\int_0^h V^2 d\eta}{V_m^2 h} \quad (1.5)$$

onde  $\eta$  é a coordenada vertical da velocidade, medida a partir do fundo do canal e definida no intervalo  $0 \leq \eta \leq h$

A hipótese da distribuição hidrostática da pressão normalmente não acarreta desvios significativos mas em alguns casos (curvatura acentuada das linhas de

corrente) é conveniente recorrer-se ao coeficiente de correção da distribuição de pressão  $C_{st}$  que, na geometria retangular, pode ser definido por

$$C_{st} = 2 \frac{\int_0^h \frac{p}{\gamma} d\eta}{h^2} \quad (1.6)$$

que atua sobre os termos derivados da força de pressão.

Na verdade esse coeficiente desempenha um papel similar ao dos coeficientes de Coriolis ( $\alpha$ ) e Boussinesq ( $\beta$ ) que atuam respectivamente sobre os termos correspondentes da energia cinética e da quantidade de movimento.

Por não conhecer o perfil de distribuição de pressão na seção a montante da abertura da comporta, a utilização da equação (1.6) no processo de descritização dos métodos numéricos acarreta dificuldade analítica. Para facilitar o uso do coeficiente de distribuição de pressão não hidrostático  $C_{st}(x)$ , nos processos numéricos, recorreu-se a uma outra função mais simples, neste caso optou-se por uma parábola [Equação (1.7)], a qual é representativa do procedimento de esvaziamento do canal .

$$C_{st} = (1 - C_s) * S * (2 - S) + C_s \quad (1.7)$$

Na qual:  $C_{st}$  é o coeficiente de distribuição de pressão não permanente;  $C_s$  é o coeficiente de distribuição de pressão permanente;  $S(x)$  é um parâmetro que varia de 0 até 1, ou seja,  $S = NI * \frac{dx}{X_0}$ ;  $X_0 = c_1 h_e$  (comprimento admitido conforme literatura do regime permanente);  $NI$  = número de intervalos de  $dx$  contidos na distância longitudinal de  $X_0$ ;  $dx$  = intervalo do comprimento do canal ( $L_n$ ).

É evidente que a distribuição de pressão hidrostática conduz a  $C_{st}=1$  e em trechos (Figura 1.2) onde essa hipótese não é verdadeira  $C_{st}$  é uma função de  $x$ .

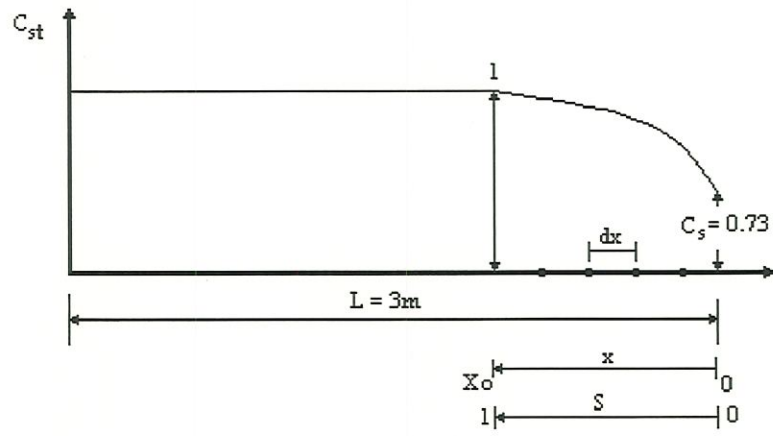


Figura 1.2 Apresentação do comportamento do coeficiente de distribuição de pressão não permanente em superfície livre.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 RUPTURA DE BARRAGEM

Para a modelação do rompimento de barragem considerado subcrítico (Figura [2.1]), Hicks *et al.* (1997) mostraram, pelos resultados obtidos (Figura [2.2]) que o esquema unidimensional representa bem este tipo de problema, ou seja, os modelos unidimensionais proporcionam resultados precisos tanto quanto os esquemas bidimensionais. Chegou-se a essa conclusão pela comparação entre os dados experimentais de Bellos *et al.* (1992), o esquema implícito de quatro pontos e o método dos elementos finitos.

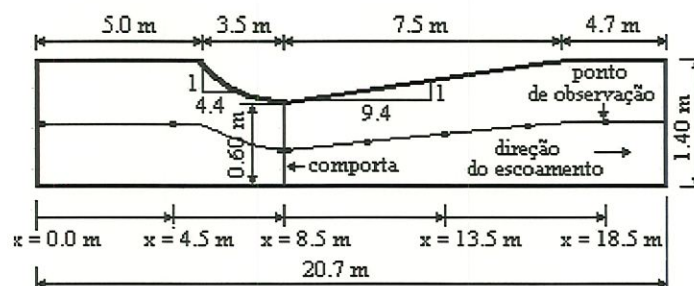


Figura 2.1 Canal convergente-divergente usado por Bellos et al. (1992)

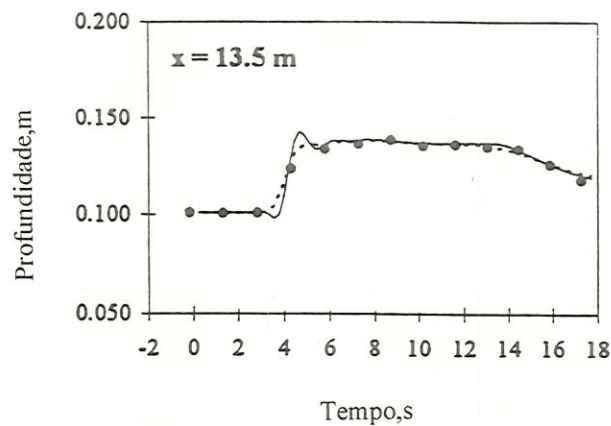


Figura 2.2 Comparação dos métodos de Elementos Finitos, e Diferença Finita com dados experimentais. Bellos *et al.* (1992)

Rahman *et al.* (1997) analisaram a descontinuidade das variáveis ocasionadas pela transição de canais. As transições do canal podem ser muito complexas dependendo do tamanho, forma e natureza do canal e das condições iniciais. Além disso, se um mesmo canal contém o escoamento subcrítico e supercrítico, a análise torna-se muito difícil. Assim sendo, foi apresentada uma técnica de malha adaptativa, que se mostrou muito eficiente por produzir uma melhor solução e resolução das mudanças das variáveis do escoamento, tanto em regime subcrítico quanto em regime supercrítico.

Bellos, Soulis e Sakkas (1992) fez uma análise bidimensional do comportamento do escoamento não permanente, cujo resultado obtido dos dados medidos, foi satisfatório.

Fennema e Chaudhry (1987) usaram dois esquemas numéricos, capazes de simular os escoamentos subcrítico e supercrítico, que descrevem o escoamento

produzido pela ruptura de uma barragem. Para obter os resultados, foram usados um esquema explícito, formulado por Gabutti e um esquema implícito, formulado por Beam e Warming, os quais foram comparados com a solução analítica e apresentaram bons resultados.

Jha et al. (1995) utilizaram diferentes esquemas para a modelação de rompimento de barragem. Diante da análise dos vários métodos, concluíram que os esquemas de ordem maior, proporcionam resolução melhor em problemas de descontinuidade.

## 2.2 CONDIÇÃO DE CONTORNO

1- Tubulação de esgoto unindo dois reservatórios.

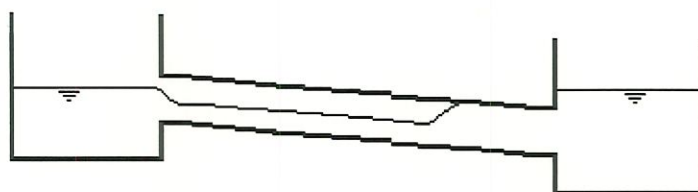


Figura 2.3 Situação de referência.



Analisando-se o escoamento não permanente em uma tubulação de esgoto ligando dois reservatórios, apresentaram diferentes condições de contorno, cujas equações são usadas em associação com a equação da característica positiva ou negativa (Capart et al. [1998] ).

### 1.1 Condições de contorno a montante

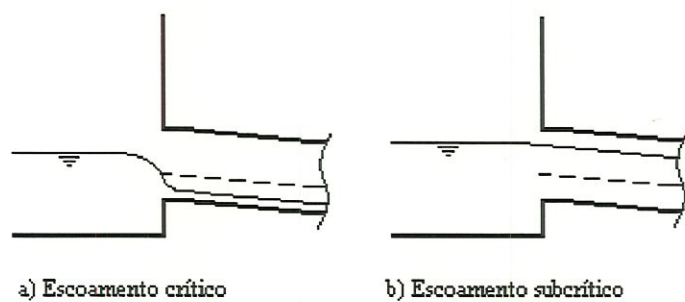


Figura 2.4 Condições de montante de superfície livre.

## 1.2 Condições de contorno a jusante

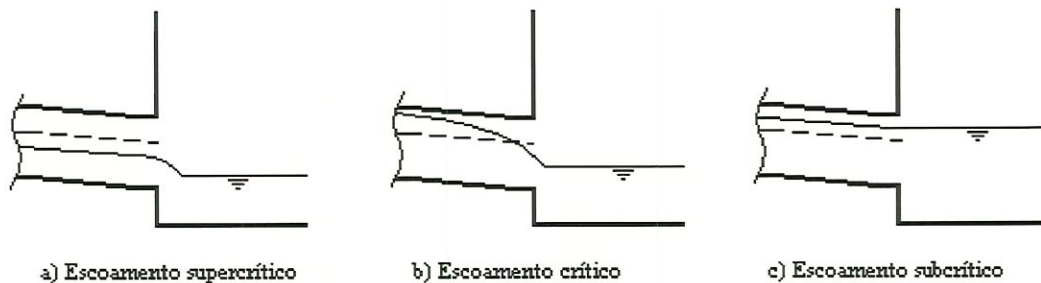


Figura 2.5 Condições de jusante de superfície livre

## 2. Dispositivos de controle

Para o escoamento unidimensional, a malha característica, além de ser propícia para ser usada no contorno, dá resultados satisfatórios e, portanto, será empregada neste trabalho (Chaudhry [1993]).

Com este procedimento, resolver-se-á a equação da característica positiva simultaneamente com a condição imposta pelo contorno da condição de jusante, enquanto que a equação da característica negativa será utilizada com a condição de contorno a montante. A condição de contorno pode especificar a variação no tempo da profundidade, velocidade (vazão), ou a combinação destas variáveis. Por exemplo, para um reservatório de nível constante, a profundidade do escoamento permanece constante; a velocidade do escoamento é sempre zero para uma comporta fechada; e a relação entre a profundidade do escoamento e a vazão é especificada por uma curva-chave. Similarmente, a vazão de uma comporta aberta parcialmente é função da profundidade do escoamento a montante da comporta.

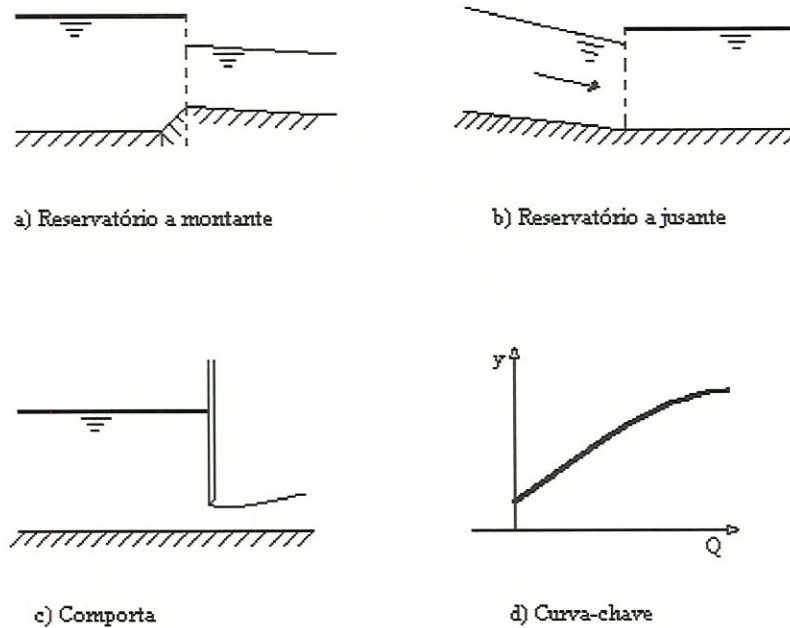


Figura 2.6 Contornos típicos.

Com relação à Figura (2.6), as equações seguintes descrevem as condições impostas por diferentes contornos. Estas equações são resolvidas simultaneamente com as equações da característica positiva e ou negativa, para determinar as condições do escoamento no contorno.

Reservatório a montante:

$$h_{i,1}^{k+1} = h_{res} - (1+k) \frac{(V_{i,1}^{k+1})^2}{2g} \quad (2.1)$$

Reservatório a jusante:

$$h_{i,n+1}^{k+1} = h_{res} - (1-k) \frac{(V_{i,n+1}^{k+1})^2}{2g} \quad (2.2)$$

Comporta:

$$Q_{i,n+1}^{k+1} = C_d A_g \sqrt{2gh_{i,n+1}^{k+1}} \quad (2.3)$$

Curva –chave:

$$Q = f(h_{i,n+1}^{k+1}) \quad (2.4)$$

em que  $k$  = coeficiente de perda de carga (entrada e saída);  $h_{res}$  = profundidade do reservatório;  $Q$  = vazão;  $C_d$  coeficiente de vazão;  $A_g$  = área da comporta aberta.

### 2.3 ANÁLISE DIMENSIONAL DA EQUAÇÃO DE SAINT VENANT

Strelkoff e Clemmens (1998) mostram como a análise dimensional da Equação de Saint Venant facilita a interpretação dos vários parâmetros dos fenômenos físicos, como, por exemplo, a análise dos perfis de água de um canal para diferentes números de Froude. Portanto, sugerem que a forma adimensional é útil para analisar as propriedades hidrodinâmicas em geral, expressando as mesmas informações de forma compacta.

## **2.4 DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO EM UMA TUBULAÇÃO EM REGIME PERMANENTE**

Garg (1966) e Montes (1997) analisaram, a jusante do escoamento de uma tubulação retangular, os efeitos de vários parâmetros, como a distribuição da pressão, o coeficiente de Manning e o coeficiente da quantidade de movimento. Com as pesquisas, verificaram que a distribuição de pressão em regime permanente, com a tubulação operando com carga máxima (tubulação cheia), com queda livre a jusante, é altamente dependente da rugosidade das paredes e do número de Froude.

## **2.5 MEDIDOR DE VELOCIDADE EM REGIME NÃO PERMANENTE EM CANAIS**

O anemômetro Doppler laser (LDA) opera baseado no princípio Doppler e foi usado para medir, instantaneamente, a distribuição da velocidade e da turbulência (Song e Graf [1996]). O LDA é especialmente estável para medir escoamentos não permanentes, por não perturbar o escoamento (Nezu, Kadota e Nakagawa [1997]).

O perfilador de velocidade Doppler acústico (ADV) é baseado no efeito Doppler, e foi desenvolvido para medir velocidades e turbulência da água em canais, rios e lagos (Song e Graf [1996]). Este instrumento apresenta resultados precisos quando há transporte de sedimento no escoamento, ou seja, não é afetado pela qualidade da água (Lemmin e Rolland [1997]).

Uma nova técnica do perfilador acústico (ADV), apresentada por Lemmin e Rolland (1997), adapta-se ao escoamento turbulento e, portanto, amplia sua

aplicabilidade. Este instrumento é útil para medir perfis instantâneos em condições de escoamento turbulento. Isto indica que as escalas de turbulência são suficientemente resolvidas com o uso do perfilador de velocidade Doppler acústico bistático (ADVP). O sistema bistático pode medir perfis de duas componentes do vetor velocidade instantânea sem nenhuma restrição à condição do escoamento.

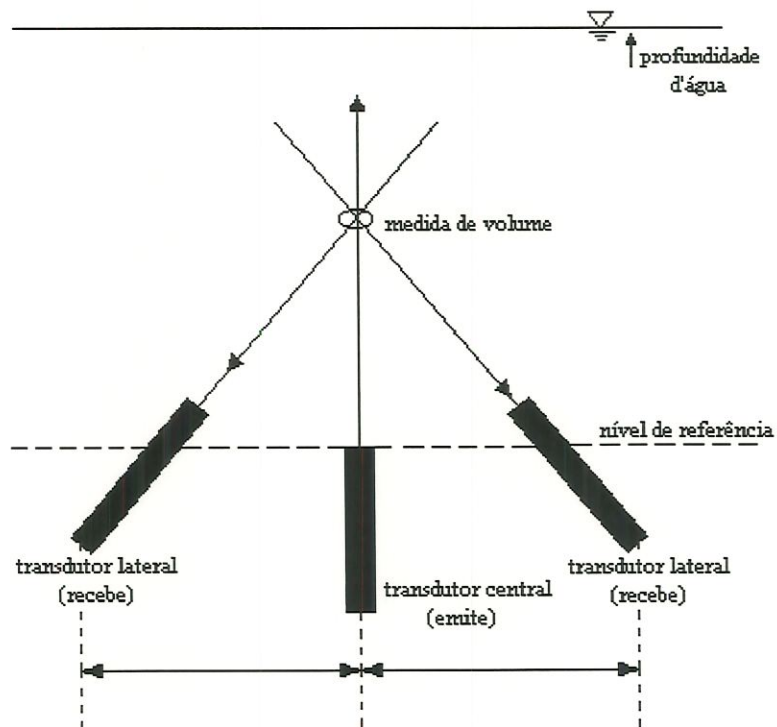


Figura 2.7 Detalhes do medidor bistático ADVP.

## **2.6 CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA ESCOAMENTO PERMANENTE EM CANAL DE SEÇÃO RETANGULAR E CIRCULAR.**

### **2.6.1 INTRODUÇÃO**

O escoamento em queda livre, um problema clássico da hidráulica desde décadas passadas, oferece dificuldade considerável na sua análise matemática devido a condição de contorno ser não linear e também ao fato de o contorno ou a vazão não serem conhecidos anteriormente. A existência do ponto crítico, que tem sido usado para dividir o escoamento subcrítico e supercrítico, resulta em muito mais complicações. Portanto, devido ao uso da sua importância prática na engenharia, muitos estudos foram feitos durante décadas.

### **2.6.2 A CONDIÇÃO INICIAL E AS CONDIÇÕES DE CONTORNO.**

#### **2.6.2.1 CONDIÇÃO INICIAL**

A condição inicial do escoamento (água em repouso) implica em  $h(x,0)=H_n$  e  $V(x,0)=0$  para qualquer coordenada  $x$  do intervalo  $0 \leq x \leq L_n$ .

### 2.6.2.2 CONDIÇÃO DE CONTORNO

No início do canal onde  $x=0$ , tem-se como condição de contorno  $V(0,t)=0$  para qualquer instante  $t$  o que acarreta  $Q(0,t)=0$ .

Entretanto, na extremidade de jusante, o escoamento se caracteriza por uma saída em queda livre que se inicia no instante  $t=0$  com as condições de repouso  $h_e=h(L_n,0)=H_n$  e  $V_e=V(L_n,0)=0$ .

A partir desse momento a determinação de  $h_e$  e  $V_e$  faz parte da solução numérica de um sistema bidimensional bem mais complexo e da sua interligação com o escoamento no canal.

Para contornar essa dificuldade recorreu-se às condições de contorno “quasi permanentes”, ou seja, as condições de contorno utilizadas nos escoamentos permanentes.

Duas condições se destacam:

#### A CONDIÇÃO CRÍTICA

É a condição na qual se considera que o escoamento na secção final ( $x=L_n$ ) ocorra nas condições críticas, ou seja, a correlação entre a vazão  $Q_c$  e a profundidade  $h_c$  na secção de saída obedeça a expressão  $Q_c = A_c \sqrt{gh_c}$ . Nessa condição o trecho final de comprimento  $X_0$  é desprezado ( $X_0 \ll L_n$ ) como mostra a Figura (2.8).

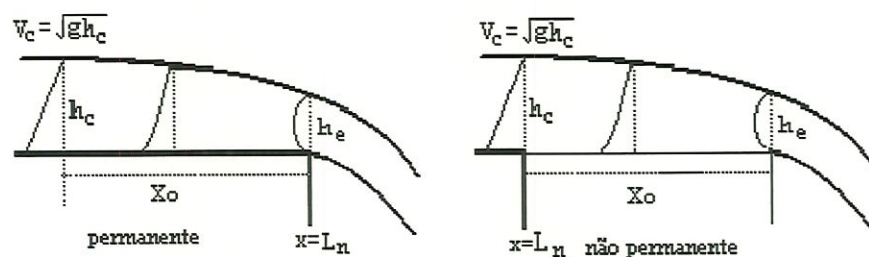


Figura 2.8 A condição de contorno crítica (condição convencional)



Com essa hipótese a velocidade passa repentinamente do seu valor inicial  $V_c = 0$  para  $V_c = \sqrt{gh_c}$  (em degrau) ocasionando desvios que podem ser significativos. É de se esperar, entretanto, que o seu valor se aproxime rapidamente do seu valor real, melhorando o ajuste a medida que os termos não permanentes decrescem.

A condição de contorno na secção final do canal é então expressa pelas fórmulas clássicas válidas para os escoamentos permanentes que são, na geometria retangular

$$Q_c = A_c \sqrt{gh_c} \quad (2.5)$$

e nos canais circulares

$$\frac{Q}{\sqrt{g}D^{2,5}} = 0,925 \left( \frac{h_e}{D} \right)^{1,912} \quad \text{onde } h_e = 0,725 h_c \text{ o que acarreta}$$

$$Q = 0,50 \sqrt{g} D^{2,5} \left( \frac{h_c}{D} \right)^{1,912} \quad (2.6)$$

A Figura (2.9) mostra a determinação experimental dessa última expressão (C.D. Smith 1962 e N. Rajaratnam e D. Muralidhar 1964) e que é válida apenas para valores de  $h_c/D$  menores do que **0,84**

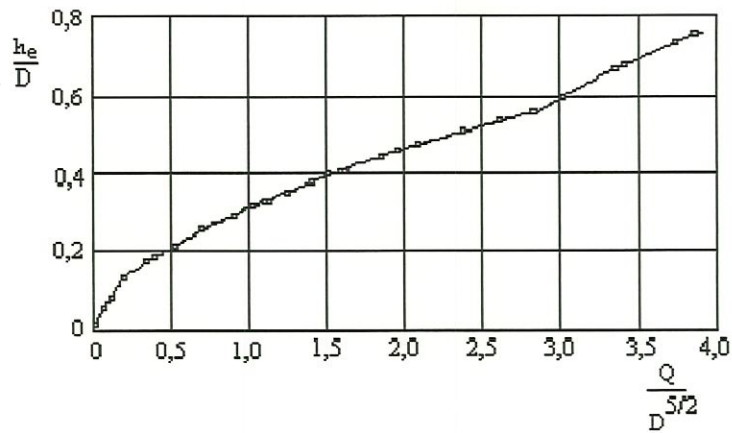


Figura 2.9 O parâmetro  $Q/D^{5/2}$  em função de  $h_e/D$   
C.D. Smith 1962 e N. Rajaratnam e D. Muralidhar 1964)

Para canais que apresentam declividades, tanto os valores de  $h_e/h_c$  quanto os de  $(C_s)$  variam com a declividade relativa  $S_o/S_c$ , (Rajaratnam e Muralidhar [1964]).

#### ANÁLISE DOS DADOS EXPERIMENTAIS

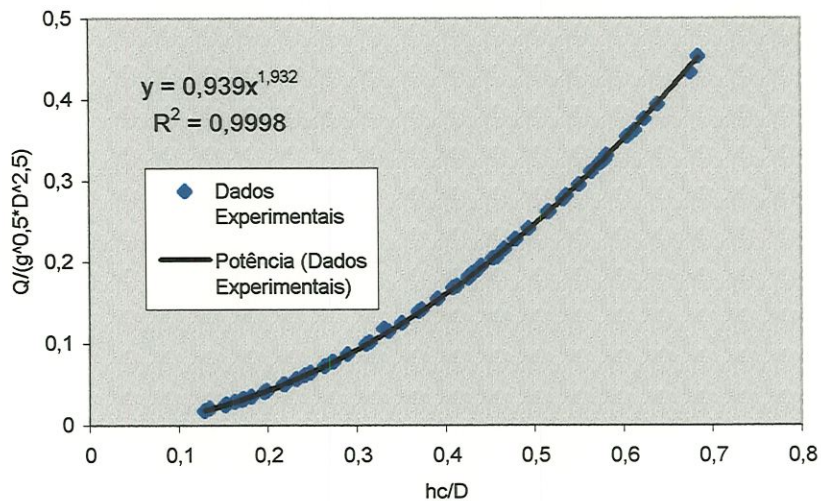


Figura 2.10 Curva da vazão para canais circular horizontal, usando-se a profundidade crítica. (Rajaratnam e Muralidhar [1964])

Tabela 2.1 Resultados Experimentais (Rajaratnam e Muralidhar[1964])

| EXPERIMENTOS | $\frac{y_c}{D}$ | $\frac{Q}{\sqrt{g}D^{2,5}}$ |
|--------------|-----------------|-----------------------------|
| A            | 0,374           | 0,141                       |
|              | 0,427           | 0,182                       |
|              | 0,494           | 0,241                       |
|              | 0,537           | 0,282                       |
|              | 0,580           | 0,326                       |
|              | 0,640           | 0,394                       |
|              | 0,677           | 0,433                       |
|              | 0,565           | 0,311                       |
|              | 0,533           | 0,277                       |
|              | 0,480           | 0,228                       |
|              | 0,458           | 0,206                       |
|              | 0,454           | 0,204                       |
|              | 0,431           | 0,185                       |
|              | 0,336           | 0,1143                      |
|              | 0,315           | 0,1012                      |
|              | 0,273           | 0,0769                      |
| 0,426        | 0,1798          |                             |
| B            | 0,441           | 0,1945                      |
|              | 0,232           | 0,0560                      |
|              | 0,135           | 0,0202                      |
|              | 0,370           | 0,1390                      |
|              | 0,479           | 0,2280                      |
|              | 0,685           | 0,4530                      |
|              | 0,582           | 0,3310                      |
|              |                 |                             |
| C            | 0,625           | 0,3760                      |
|              | 0,605           | 0,3540                      |
|              | 0,574           | 0,3207                      |
|              | 0,551           | 0,2955                      |
|              | 0,517           | 0,2620                      |
|              | 0,480           | 0,2277                      |
|              | 0,436           | 0,1890                      |
|              | 0,409           | 0,1677                      |
|              | 0,311           | 0,0987                      |
|              | 0,274           | 0,0773                      |
|              | 0,248           | 0,0635                      |
|              | 0,219           | 0,0498                      |
|              | 0,199           | 0,0415                      |
|              | 0,182           | 0,0347                      |
|              | 0,173           | 0,0314                      |
|              | 0,163           | 0,0281                      |
|              | 0,152           | 0,0246                      |
|              | D               | 0,392                       |
| 0,413        |                 | 0,1706                      |
| 0,392        |                 | 0,1543                      |
| 0,351        |                 | 0,1246                      |
| 0,331        |                 | 0,1180                      |
| 0,290        |                 | 0,0860                      |
| 0,264        |                 | 0,0716                      |
| 0,242        |                 | 0,0601                      |
| 0,218        |                 | 0,0494                      |
| 0,196        |                 | 0,0402                      |
| 0,171        |                 | 0,0308                      |
| 0,154        |                 | 0,0249                      |
| 0,129        |                 | 0,0174                      |
| 0,614        |                 | 0,3620                      |
| 0,516        |                 | 0,2612                      |
| 0,467        |                 | 0,2160                      |

## O COEFICIENTE DE PRESSÃO $\tilde{C}_{st}(x)$

Essa condição de contorno introduz na equação da quantidade de movimento, a variação do coeficiente de pressão  $C_{st}(x)$  no trecho final do canal, ou seja, introduz no sistema a variação das forças de pressão na vizinhança da comporta onde os perfis das pressões não satisfazem a condição hidrostática.

Na verdade esse coeficiente desempenha um papel similar ao dos coeficientes de Coriolis ( $\alpha$ ) e Boussinesq ( $\beta$ ) que atuam respectivamente sobre os termos correspondentes da energia cinética e da quantidade de movimento.

De fato, no trecho final do canal, a montante da comporta, a distribuição de pressão deixa de ser linear a partir do ponto  $x=L_r-X_0$  onde  $h=h_c$  e  $C_{st}=1$ , passando  $C_{st}$  a assumir valores decrescentes ( $C_{st}<1$ ) até atingir o valor final  $c_s$  na seção de saída.

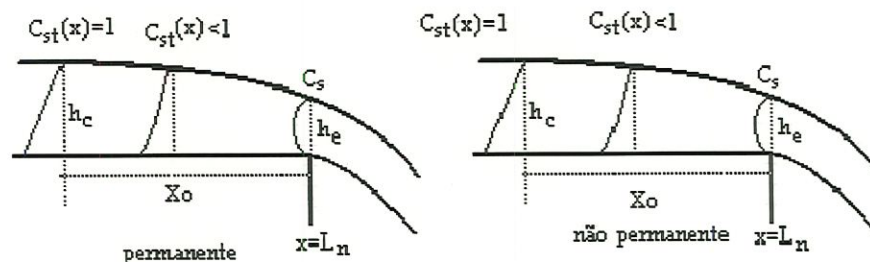


Figura. 2.11 A região de saída de um canal onde os perfis de pressões não são lineares.

Delleur et. al (1956) sugere que o coeficiente de pressão na saída de um canal retangular, em regime permanente, seja calculado por

$$C_s \left( \frac{h_e}{h_c} \right)^3 - 3 \left( \frac{h_e}{h_c} \right) + 2 = 0 \quad (2.7)$$

e, assumindo que  $\frac{h_e}{h_c} \approx 0,76$  tem-se que  $C_s=0,638$ .

Uma série de outros autores obtiveram para a razão  $\frac{h_e}{h_c}$  valores compreendidos entre **0,705** e **0,781**, sendo as diferenças atribuídas à geometria e às condições de rugosidade na saída do canal, o que mostra que, em regime permanente, é de se esperar que os valores variem no intervalo **0,328-0,72**.

Sabe-se também que a razão entre o comprimento característico de saída  $X_o$  e a profundidade crítica  $h_c$  geralmente está no intervalo  $3 \leq \frac{X_o}{h_c} \leq 4$  (Henderson [1966]) mas existem poucas informações sobre a distribuição efetiva de pressão nesse trecho final.

Todavia, o modelo numérico de A . Khan e P.M. Steffler (1996) [Figura (2.12)] fornece algumas informações muito úteis que permitem estimar o comportamento do coeficiente de pressão na saída de um canal retangular, cujas dimensões são próximas às do banco de ensaios utilizado no laboratório do SHS/EESC.

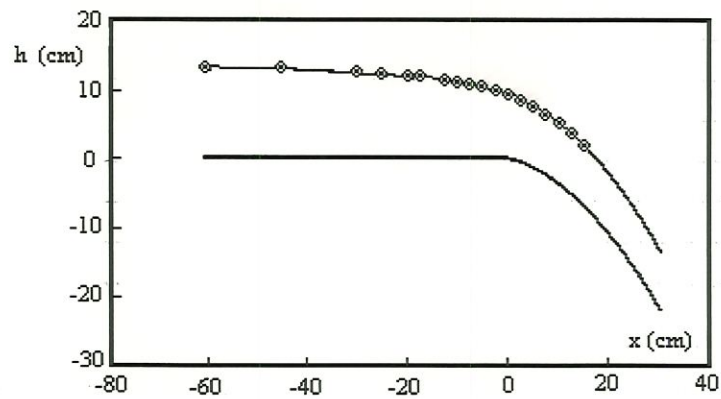


Figura 2.12 A superfície livre na saída de um canal retangular  
( $h_c=13,20$  cm), [Khan e Steffler (1996)]

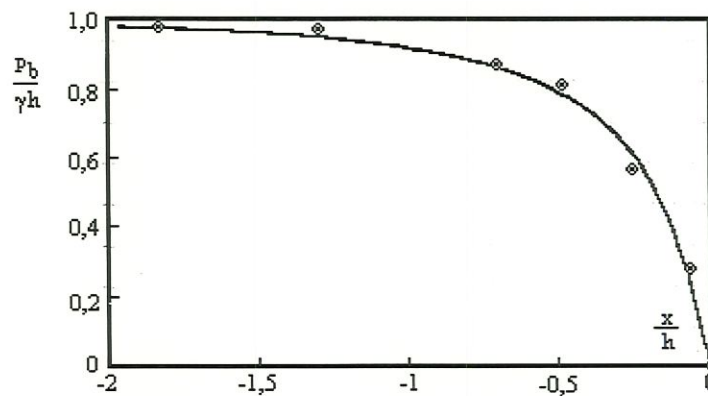


Figura 2.13 A pressão no fundo na saída de um canal retangular  
( $h_c=13,20$  cm), [Khan e Steffler (1996)].

Realmente, nota-se nas Figuras (2.12 e 2.13) que a uma distância  $1,5h_c$  da secção de saída, a pressão no fundo e o perfil de pressão praticamente já se igualam aos seus valores hidrostáticos e, uma vez que  $h/h_c=0,725$  tem-se  $Xo=2h_c$ .

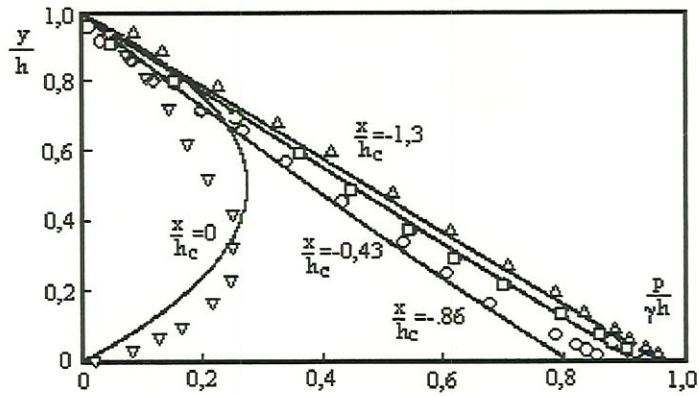


Figura 2.14 Os perfis de pressão na saída de um canal retangular ( $h_c=13,20$  cm), [Khan e Steffler (1996)].

Na geometria retangular o coeficiente de pressão

$$C_{st} = \frac{\int_A p dA}{\gamma \bar{h} A} \quad (2.8)$$

se transforma em 
$$C_{st} = 2 \int_0^1 \frac{p(\frac{y}{h})}{\gamma h} d(\frac{y}{h}) \quad (2.9)$$

e por interpolação, a partir dos perfis da Figura 2.14, determinou-se as curvas características de  $C_{st}(x)$  na região final do canal utilizado pelos dois pesquisadores (Figura 2.15).

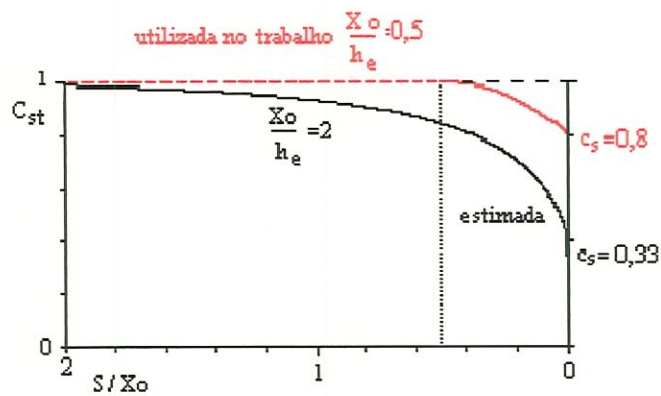


Figura 2.15 A função  $C_{st}(x)$  estimada a partir dos perfis Figura 2.14 e Figura 2.15 e a utilizada nesse trabalho.

Para introduzir a função  $C_{st}(x)$  nos algoritmos computacionais de uma forma bem simples, adotou-se como função representativa uma parábola. Os parâmetros  $C_s$  e a razão  $X_o/h_c$  foram tomados como coeficientes de calibração, ou seja, foram calculados para ajustar as curvas teóricas aos pontos colhidos experimentalmente.

Não foi encontrada nenhuma informação sobre o valor do coeficiente  $C_s$  na saída de dutos circulares. Entretanto, algumas indicações permitem avaliar o comprimento do trecho final  $X_o$  como os valores sugeridos por Henderson (1966).

| $\frac{Q}{D^2 \sqrt{gD}}$ | $\frac{h_c}{D}$ | $\frac{X_o}{D}$ |
|---------------------------|-----------------|-----------------|
| 0,65                      | 0,82            | 0,25            |
| 0,54                      | 0,75            | 0,65            |
| 0,47                      | 0,70            | 2,6             |

e as curvas de B. Clausnitzer e W.H.Hager (1997) da Figura (2.16) que propõe a utilização da reta

$$\frac{X_o}{h_c} = 5 + 0,90 \frac{Q}{\sqrt{gD h_c^4}} \quad (2.10)$$

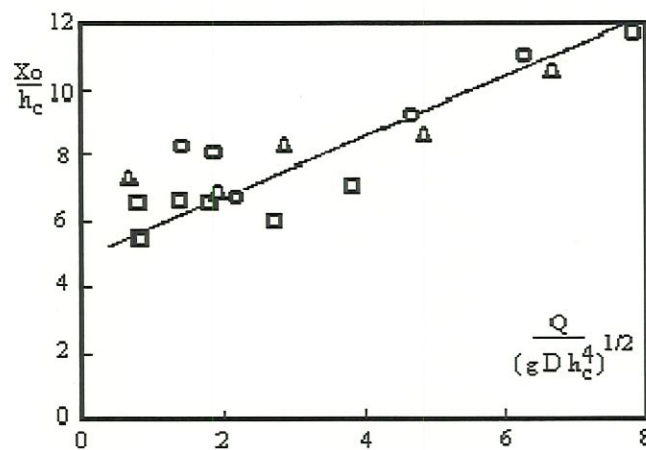


Figura 2.16 As curvas referentes ao comprimento do trecho final  $X_o$  (geometria circular) B. Clausnitzer e W.H.Hager (1997)



Finalmente, introduzida no sistema de equações, a função  $C_{st}(x)$  atua sobre os termos provenientes das forças de pressão, transformando a equação da quantidade de movimento da geometria retangular em

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(h^*V^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}(h^*V^{*2} + C_{st} \frac{gh^{*2}}{2}) = -\frac{f}{8} V^* |V^*| \frac{(2h^* \frac{H_n}{B} + 1)}{\frac{H_n}{L_n}} \quad (2.11)$$

e na geometria circular em

$$\frac{\partial Q^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*}(\frac{Q^{*2}}{A^*} + C_{st} \bar{h}^* A^*) = -\frac{f}{8} \frac{L_n H_n}{A_n} V^* |V^*| P^* \quad (2.12)$$

### **3. METODOLOGIA**

#### **3.1 INTRODUÇÃO**

A simulação de escoamento descontínuo em um canal representa um problema de interesse experimental e teórico. O escoamento resultante de uma manobra em uma comporta a jusante de um canal é um escoamento descontínuo, comumente encontrado na natureza ou construído pelo homem, e o projeto e a operação de muitas estruturas hidráulicas dependem da simulação precisa do escoamento associado. Do ponto de vista teórico, o perfil de escoamento descontínuo cria alguns problemas devido à hipótese da distribuição hidrostática de pressão. Os efeitos causados pela curvatura das linhas de escoamento deverão ser corrigidos com a inclusão de um coeficiente de distribuição de pressão, proposto por este trabalho.

### 3.2 MODELO FÍSICO

As Figuras (3.1a) e (3.1b) mostram o sistema físico alvo dos estudos aqui desenvolvidos, isto é um canal retangular com controle a jusante, cuja manobra provocará o escoamento não permanente. A superfície de água no canal está inicialmente em repouso, como mostrado. Na extremidade de jusante do canal, haverá uma abertura brusca de uma comporta, onde o nível de água variará com o tempo. O modelo numérico a ser desenvolvido prevê o perfil da superfície e a velocidade da água no canal em função do tempo.

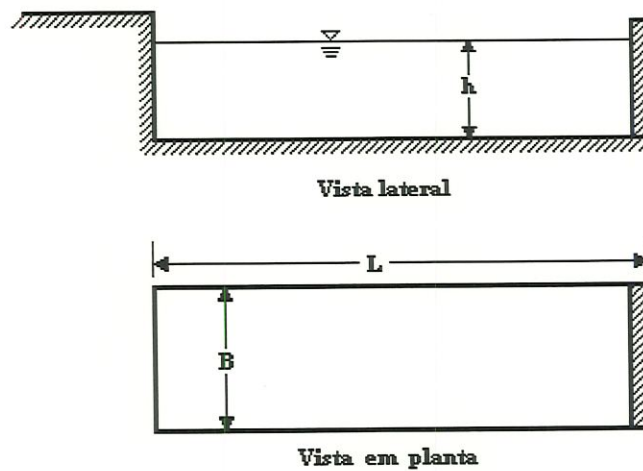
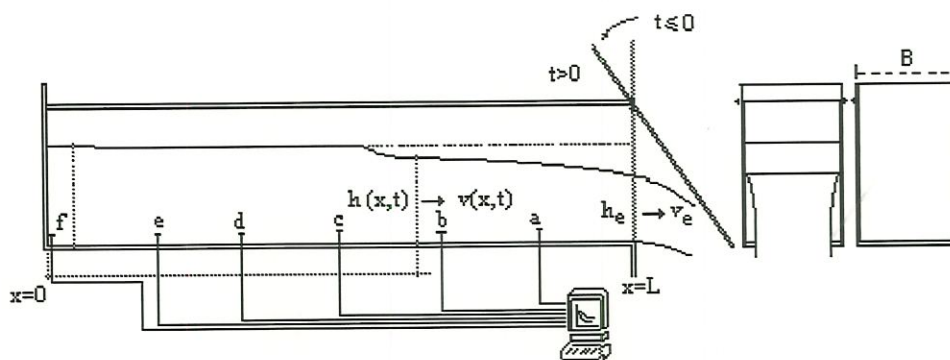


Figura 3.1a Canal retangular, com controle a jusante.

### 3.2.1 A GEOMETRIA RETANGULAR



**Figura 3.1b** Esquema do canal retangular e as secções de medida a,b,c,d,e e f( $x=0, x=L/6, x=L/3, x=L/2, x=2L/3, x=5L/6$ )

O modelo físico proposto do escoamento não permanente depende da manobra da comporta localizada na extremidade da jusante do canal. A Figura (3.1b) mostra uma comporta móvel sendo usada para simular vários perfis de água com queda livre. O fenômeno físico do escoamento não permanente foi simulado mediante a abertura da comporta, operada manualmente e rapidamente, através de uma alavanca.

Na extremidade da montante do canal, ou seja na parede, a velocidade será considerada zero em todo o instante da ocorrência do fenômeno. Na extremidade de jusante, o manuseio da comporta é suficiente para garantir o escoamento não permanente por um certo tempo, proporcionando as condições necessárias para a análise do coeficiente de distribuição de pressão no escoamento de superfície livre ao longo do canal. Para a aplicação do modelo matemático, é necessário o conhecimento das condições de contorno e das condições iniciais.

Os resultados da aplicação das equações que descrevem os efeitos a jusante do canal devido a abertura da comporta não são tão representativos, dada a hipótese de a

distribuição hidrostática da pressão não representar apropriadamente a ocorrência do fenômeno físico. Por isso, aceita-se que soluções numéricas baseadas nas formulações alternativas das equações básicas levem a resultados diferentes para o mesmo problema físico.

A abertura de uma comporta em um canal retangular é caso típico de escoamento não permanente. O resultado do escoamento foi descrito adequadamente dentro de um contexto de um modelo matemático unidimensional. Para esse caso, como objetivo deste trabalho, propor-se-á um coeficiente de distribuição de pressão no trecho que corresponda a  $X_0 \geq x \geq 0$  a montante da comporta, e, nos demais trechos do canal, considerar-se-á a hipótese da distribuição hidrostática de pressão.

O esvaziamento do canal foi simulado através da solução do sistema formado pelas equações da continuidade e da quantidade de movimento, respectivamente

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} + ghA \right) = gA(S_o - S_f) \quad (3.2)$$

Para canais retangulares horizontais tem-se que  $S_o=0$ ,  $A=Bh$  e

$$S_f = \frac{f}{8} \frac{V|V|}{gR_h} \quad (\text{fórmula geral da perda de carga}) \text{ ou}$$

$$S_f = \frac{n^2}{R_h^{4/3}} V|V| \quad (\text{fórmula de Manning})$$

onde o raio hidráulico é  $R_H = \frac{A}{B + 2h}$

O sistema se simplifica em

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Vh) = 0 \quad (3.3)$$

e

$$\frac{\partial(hV)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hV^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = -ghS_f \quad (3.4)$$

### 3.2.1.1 FORMA ADIMENSIONAL

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*}(V^*h^*) = 0 \quad (3.5)$$

e

$$\frac{\partial(h^*V^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left( h^*V^{*2} + \frac{gh^{*2}}{2} \right) = -\frac{f}{8} V^* |V^*| \frac{\left( 2h^* \frac{H_n}{B} + 1 \right)}{\frac{H_n}{L_n}} \quad (3.6)$$

onde  $x^* = \frac{x}{L_n}$ ,  $t^* = \frac{t}{t_n}$ ,  $h^* = \frac{h}{H_n}$ ,  $V^* = \frac{V}{V_n}$ , com  $V_n$  e  $t_n$  definidos

por  $V_n = \sqrt{gH_n}$  e  $t_n = \frac{L_n}{V_n}$

A solução desse sistema normalmente é obtida através de métodos numéricos cuja solução fornece as curvas  $h^*(x^*, t^*)$  e  $V^*(x^*, t^*)$  tendo como parâmetros os dois coeficientes  $\frac{H_n}{B}$  e  $\frac{H_n}{L_n}$ .

Em canais muito largos o coeficiente  $\frac{H_n}{B}$  deixa de ter influência e o sistema passa a depender apenas do valor de  $\frac{H_n}{L}$ .

### 3.2.2 GEOMETRIA CIRCULAR

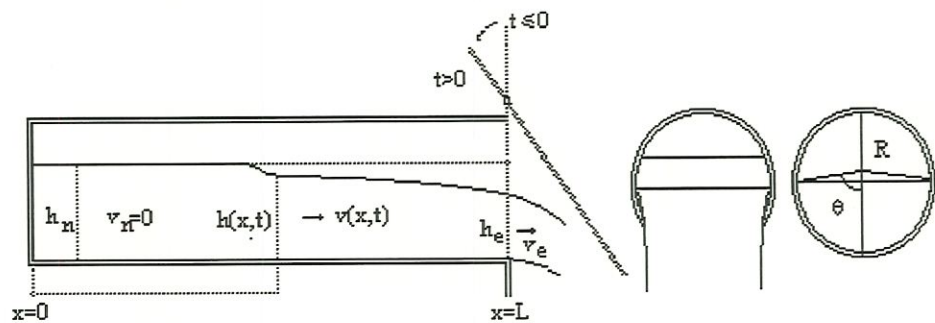


Figura 3.2 Esquema do canal circular

Na geometria circular as equações principais se mudam em

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.7)$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} + g y_{cg} A \right) = g A (S_0 - S_f) \quad (3.8)$$

onde as grandezas geométricas são expressas como funções do ângulo central  $\theta$  e são expressas por

$$h = R(1 - \cos\theta) \text{ que acarreta } \theta = \arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right) \quad (3.9)$$

$$A = R^2(\theta - \text{sen } \theta \cos \theta) \quad (3.10)$$

$$p = 2\theta R \quad (3.11)$$

$$R_H = \frac{R}{2} \frac{(\theta - \text{sen } \theta \cos \theta)}{\theta} \quad (3.12)$$

$$y_{cg} = R \left( \frac{2}{3} \frac{\text{sen}^3 \theta}{(\theta - \text{sen } \theta \cos \theta)} - \cos \theta \right) \quad (3.12)$$

$$g y_{cg} A = R^3 \left( \frac{2}{3} \text{sen}^3 \theta - \cos \theta (\theta - \text{sen } \theta \cos \theta) \right) \quad (3.13)$$

### 3.2.2.1 FORMA ADIMENSIONAL

Em forma adimensional (e com  $S_0=0$ ) o sistema pode ser descrito por

$$\frac{\partial A^*}{\partial t^*} + \frac{\partial Q^*}{\partial x^*} = 0 \quad (3.14)$$

e

$$\frac{\partial Q^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{Q^{*2}}{A^*} + Y_{cg} A^* \right) = -\frac{f}{8} \frac{L_n H_n}{A_n} V^* |V^*| P^* \quad (3.15)$$

onde  $A^* = \frac{A}{A_n}$ ,  $Q^* = \frac{Q}{Q_n}$ ,  $P^* = \frac{p}{H_n}$ ,  $Y_{cg} = \frac{y_{cg}}{H_n}$ ,  $Q_n = V_n A_n$  onde

$$V_n = \sqrt{g H_n} \text{ e } t_n = \frac{L_n}{V_n}.$$



Nesse caso a solução também é obtida através de métodos numéricos com a obtenção das curvas  $h^*(x^*, t^*)$  e  $V^*(x^*, t^*)$  que tem como parâmetro um único coeficiente  $f \frac{L_n H_n}{A_n}$ .

### 3.3 MODELO ANALÍTICO

O primeiro passo é demonstrar as equações diferenciais. Para tal, assumiu-se que o movimento do escoamento é unidimensional, isto é, a velocidade é uniforme através de cada seção do canal. Considere-se o volume de controle mostrado na Figura (3.3), com profundidade  $h$  e a velocidade  $V$  definida de  $x$  a  $x + \Delta x$ . A equação da continuidade para este volume de controle é

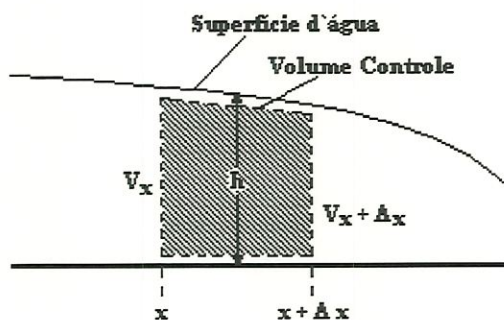


Figura 3.3 Volume de controle para o desenvolvimento das equações do escoamento no canal.

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} \rho h B dx + \rho v B h \Big|_{x+\Delta x} - \rho v B h \Big|_x = 0 \quad (3.16)$$

onde  $B$  é a largura do canal. Desde que  $x$  e  $x+\Delta x$  não variem com o tempo, a derivada da integral torna-se

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} \rho h B dx = \int_x^{x+\Delta x} \frac{d}{dt} (\rho h B) dx \quad (3.17)$$

Dividindo-se a Equação (3.17) por  $\rho B \Delta x$

$$\frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial h}{\partial t} dx + \frac{Vh|_{x+\Delta x} - Vh|_x}{\Delta x} = 0 \quad (3.18)$$

e tomando-se o limite como  $\Delta x \rightarrow 0$ , chega-se a:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Vh) = 0 \quad (3.19)$$

Esta expressão é a forma diferencial da equação da continuidade.

Aplicando-se a equação do movimento para o volume de controle, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} \rho h V B dx + \rho V^2 B h|_{x+\Delta x} - \rho V^2 B h|_x = \frac{\gamma h^2 B}{2} \Big|_x - \frac{\gamma h^2 B}{2} \Big|_{x+\Delta x} - F_f \quad (3.20)$$

onde  $\gamma h/2$  representa a pressão no centro da superfície de controle, e  $F_f$  é a força devido a resistência do escoamento. A força de pressão é dada por  $\gamma h^2 B/2$ . Após algumas aproximações, dividindo-se por  $\rho B \Delta x$ , e tomando-se o limite quando  $\Delta x$  aproxima de zero, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(hV) + \frac{\partial}{\partial x}\left(hV^2 + \frac{gh^2}{2}\right) = -ghS_f \quad (3.21)$$

que é a forma da equação da quantidade de movimento.

Assim sendo, o escoamento não permanente, em canais retangulares, pode ser calculado através da solução do sistema formado pela equação da continuidade e da quantidade de movimento, respectivamente

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Vh) = 0 \quad (3.22)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}(hV) + \frac{\partial}{\partial x}\left(hV^2 + \frac{gh^2}{2}\right) = -ghS_f \quad (3.23)$$

onde a perda  $S_f$  é calculada através das fórmulas válidas para o regime permanente. No caso dos canais retangulares é comum optar-se pela fórmula de Manning

$$S_f = \frac{n^2}{R_h^{4/3}} V|V| \quad (3.24)$$

ou equação Universal da perda de carga

$$S_f = \frac{f}{8} \frac{V|V|}{gR_h} \quad (3.25)$$

Com a finalidade de corrigir os termos cinéticos e da quantidade de movimento, é comum recorrer-se aos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  de Coriolis e de Boussinesq, que aparecem nas equações principais ou nas condições de contorno.

$$\alpha = \frac{\int_0^h V^3 d\eta}{V_m^3 h} \quad (3.26)$$

e

$$\beta = \frac{\int_0^h V^2 d\eta}{V_m^2 h} \quad (3.27)$$

onde  $\eta$  é a coordenada vertical da velocidade, medida a partir do fundo do canal e definida no intervalo  $0 \leq \eta \leq h$ .

E com o propósito de corrigir os efeitos das forças de pressão na vizinhança da comporta onde os perfis das pressões não satisfazem a condição hidrostática o coeficiente  $C_{st}$  foi considerado na equação da quantidade de movimento.

Em casos onde há curvatura acentuada das linhas de corrente e o comprimento dos canais são curtos é conveniente recorrer-se ao coeficiente de distribuição de pressão  $C_{st}$  que, na geometria retangular, pode ser definido por

$$C_{st} = 2 \frac{\int_0^h \frac{p}{\gamma} d\eta}{h^2} \quad (3.28)$$

que atua sobre os termos derivados das forças de pressão.

Pelo não conhecimento do perfil da distribuição de pressão, testou-se outras funções mais simples e admitiu-se que o coeficiente de distribuição de pressão em regime não permanente, no trecho  $X_o$ , apresenta o comportamento de uma parábola satisfazendo 3 condições:

1.  $C_{st}(x)$  assume o valor  $C_s$  na seção de saída do canal o que implica em  $C_{st}(L_n) = C_s$ ;
2.  $C_{st}(x)$  assume o valor  $I$  no início do trecho de saída, que dista  $X_o$  da seção final do canal o que implica em  $C_{st}(L_n - X_o) = I$ ;
3. Tem a tangente nula nesse ponto.

A função da parábola adotada é a seguinte:

$$C_{st} = (1 - C_s) * S * (2 - S) + C_s \quad (3.29)$$

onde:

$C_{st}$  é o coeficiente de distribuição de pressão não permanente;

$C_s$  é o coeficiente de distribuição de pressão permanente;

$S_1(x)$  é um parâmetro que varia de 0 até 1, ou seja

$$S_1 = NI * \frac{dx}{X_0}$$

$X_0 = c_1 h_e$  (comprimento admitido conforme literatura do regime permanente)

$NI$  = número de intervalos de  $dx$  contidos na distância longitudinal de  $X_0$

$dx$  = intervalo do comprimento do canal ( $L_n$ ).

Os parâmetros  $C_s$  e a razão  $X_0/h_e$  foram tomados como coeficientes de calibração, ou seja, foram calculados para ajustar as curvas teóricas aos pontos colhidos experimentalmente.

É evidente que a distribuição de pressão hidrostática conduz a  $C_{st} = 1$  e em trechos onde essa hipótese não é verdadeira  $C_{st}$  é uma função de  $x$ . A introdução desses coeficientes modifica apenas a equação da quantidade de movimento e, dessa forma, o sistema principal transforma-se em

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Vh) = 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hV) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta hV^2 + C_{st} \frac{gh^2}{2}) = -ghS_f$$

O esvaziamento de um trecho  $L_n$  de canal horizontal de geometria retangular, através da abertura brusca da comporta de jusante, pode ser calculado resolvendo-se o sistema de equações acima, com as seguintes condições de contorno:

a-Condição de montante -  $V(0,t)=0$  → velocidade nula na parede de montante

b-Condição de jusante

$$1 - C_{st}(L,0) = C_s$$

$$2 - C_{st} = C_s(x)$$

c-Diferentes funções  $C_{st}$  foram então testadas visando obter o melhor ajuste entre os resultados do modelo computacional em confronto com alguns resultados experimentais, medidos principalmente no trecho final do canal, que apresenta as maiores curvaturas nas linhas de corrente. As equações da continuidade e movimento representam as duas equações a serem resolvidas para modelar o perfil da superfície da água e a distribuição da velocidade.

### 3.4 PROCEDIMENTO PARA A INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES

Vários métodos de diferenças finitas explícitos e implícitos têm sido citados na literatura para resolver numericamente estas equações. Na modelação do fenômeno físico proposto neste trabalho, serão usados três métodos numéricos: MacCormack, Lax-Wendroff e o método das Características.

#### 3.4.1 MÉTODO MacCormack

As equações da continuidade e da quantidade de movimento na forma conservativa podem ser escritas na forma de matriz como

$$G_t + F_x + S = 0 \quad (3.31)$$

em que

$$G = \begin{pmatrix} A \\ VA \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} VA \\ V^2 A + g \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ -gA(S_o - S_f) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

O esquema MacCormack é um método explícito de dois passos, o corretor e o preditor.

### Preditor

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{G_i^p - G_i^k}{\Delta t} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_i^k - F_{i-1}^k}{\Delta x}$$

Após algumas substituições destas diferenças finitas dentro da Equação (3.31), tem-se:

$$G_i^p = G_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_i^k - F_{i-1}^k) - S_i^k \Delta t \quad (3.34)$$

### Corretor

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{G_i^c - G_i^k}{\Delta t} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_i^p - F_{i-1}^p}{\Delta x}$$

Substituindo-se estas diferenças finitas e  $S = S_i^p$  dentro da Equação (3.31), obtém-se:

$$G_i^c = G_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_i^p - F_{i-1}^p) - S_i^p \Delta t \quad (3.36)$$

em que o índice  $c$  refere-se ao valor da variável após o passo corretor. O valor de  $G_i$ , no tempo desconhecido  $k+1$  é dado por

$$G_i^{k+1} = \frac{1}{2} (G_i^p + G_i^c) \quad (3.37)$$

### 3.4.2 MÉTODO LAX-WENDROFF

Para a demonstração do método, serão introduzidas novas variáveis para os grupos de parâmetros que aparecem nas equações da continuidade e da quantidade de movimento:

$$hV = A' \quad (3.38)$$

$$hV^2 + \frac{gh^2}{2} = B' \quad (3.39)$$

$$e \quad ghS_f = C' \quad (3.40)$$



O esquema de Lax Wendroff, é demonstrado por dois passos relacionados com o tempo: o primeiro, de  $n$  a  $(\bar{n})$ ; o segundo de  $n$  a  $n+1$ .

Em seguida será representado o primeiro passo na equação da continuidade, em forma de diferença finita

$$\frac{h_i^- - h_{i,n}}{\Delta t / 2} + \frac{A'_{i+1,n} - A'_{i-1,n}}{2\Delta x} = 0 \quad (3.41)$$

Após algumas substituições, o valor de  $h_i^-$  é dado por

$$h_i^- = \frac{1}{2}(h_{i+1,n} + h_{i-1,n}) - \frac{\Delta t}{4\Delta x}(A'_{i+1,n} - A'_{i-1,n}) \quad (3.42)$$

Correspondentemente, o passo intermediário para  $A_i^-$  da equação do movimento, Equação (3.23), é

$$A_i^- = \frac{1}{2}(A'_{i+1,n} + A'_{i-1,n}) - \frac{\Delta t}{4\Delta x}(B'_{i+1,n} - B'_{i-1,n}) - \frac{\Delta t}{2}C'_{i,n} \quad (3.43)$$

Complementando-se este passo de tempo, calcula-se a velocidade:

$$V_i^- = \frac{A_i^-}{h_i^-} \quad (3.44)$$

Com os valores de  $h_i^-$  e  $V_i^-$  obtidos no passo intermediário, obtêm-se os valores correspondentes de  $B_i^-$ , e  $C_i^-$  calculados pelas Equações (3.39) e (3.40).

No segundo passo, procede-se de  $n$  até  $n+1$ , utilizando-se as variáveis do passo intermediário para as derivadas espaciais. O segundo passo para a equação da continuidade é representada por:

$$\frac{h_{i,n+1} - h_{i,n}}{\Delta t} + \frac{A'_{i+1} - A'_{i-1}}{2\Delta x} = 0 \quad (3.45)$$

Isolando-se o valor de  $h_{i,n+1}$ , tem-se:

$$h_{i,n+1} = h_{i,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (A'_{i+1} - A'_{i-1}) \quad (3.46)$$

Similarmente, obtém-se o valor de  $A'_{i,n+1}$  através da equação da quantidade de movimento:

$$A'_{i,n+1} = A'_{i,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (B'_{i+1} - B'_{i-1}) - C'_i \Delta t \quad (3.47)$$

Para o cálculo de  $V_{i,n+1}$ , serão usados  $A'_{i,n+1}$  e  $h_{i,n+1}$ , encontrando-se, desta forma, a velocidade no novo nível de tempo. A integração continua sucessivamente da mesma maneira de  $n+1$  a  $n+2$ . O procedimento tem continuidade até o limite de tempo definido pelo fenômeno físico.

Uma consideração especial é necessária para o contorno de montante e jusante. No contorno de montante, onde  $i=1$ , é usado o esquema progressivo para obter  $h_i^-$  no passo intermediário.

$$h_i^- = h_{i,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (A'_{2,n} - A'_{1,n}) \quad (3.48)$$

Para o segundo passo em  $n+1$ , o valor de  $h$  a montante é

$$h_{1,n+1} = h_{1,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A'_{2,n} - A'_{1,n}) \quad (3.49)$$

O valor de  $h$  no contorno de jusante é estabelecido pelo nível do canal, o qual é a informação de entrada para a análise da pesquisa.

### 3.4.3 MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

O método das características resolve as equações acompanhando as linhas características, ou seja, transforma as equações diferenciais parciais, Equações (3.22) e (3.23), em equações diferenciais ordinárias, Equações (3.50), (3.51), (3.52) e (3.53), que representam com precisão a propagação das perturbações do escoamento ao longo do canal:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} = g(S_o - S_f) \quad (3.50)$$

$$\frac{dx}{dt} = V + c \quad (3.51)$$

$$\frac{dV}{dt} - \frac{g}{c} \frac{dy}{dt} = g(S_o - S_f) \quad (3.52)$$

$$\frac{dx}{dt} = V - c \quad (3.53)$$

As Equações (3.50) e (3.52) são válidas, se as Equações (3.51) e (3.53) forem satisfeitas. A Equação (3.51) traça uma curva no plano  $x-t$ , a qual corresponde à característica positiva,  $C^+$ . Similarmente, a Equação (3.53) traça a curva da característica negativa,  $C^-$ .

### 3.4.4 CONDIÇÃO DE CONTORNO

Na condição de contorno, aplicar-se-á o método das características, cuja malha é propícia, tanto para o cálculo dos pontos interiores quanto para o dos pontos externos. Na condição de montante, será usada a característica positiva, e na condição de jusante, a característica negativa.

### 3.4.5 ESTABILIDADE

Para satisfazer a condição de estabilidade dos três esquemas numéricos, a condição de Courant ( $C_n \leq 1$ ) deverá ser atendida para todos os pontos da malha, definida em todo intervalo de tempo.

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|V| + \sqrt{gh}} \quad (3.54)$$

Esta restrição no intervalo de tempo é comumente conhecida como a condição de Courant.

## 3.5 O MODELO EXPERIMENTAL

Neste trabalho de pesquisa, o escoamento não permanente resultante da abertura instantânea de uma comporta será experimental e numericamente investigado. O intuito é verificar o comportamento da distribuição de pressão de um canal de seção retangular, em um trecho a montante da comporta, correspondendo a  $c_1 h_e$ .

Para modelar o escoamento unidimensional, decidiu-se usar um canal retangular com uma manobra a jusante para produzir os efeitos dinâmicos de um escoamento que possa ser descrito adequadamente no contexto de um modelo matemático unidimensional. Neste trabalho, propor-se-á um coeficiente de distribuição

de pressão no trecho correspondente a  $c_1 h_e$  a montante da comporta, e nos demais trechos, aplicar-se-á a hipótese de distribuição hidrostática de pressão.

A demonstração do fenômeno físico no canal retangular, com a comporta a jusante é mostrada na Figura (3.4).

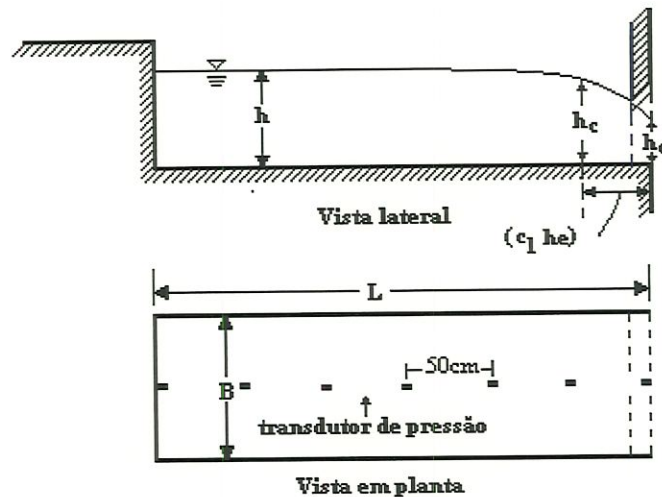


Figura 3.4 Esquema de ensaio

Um canal curto de seção retangular foi confeccionado com uma chapa de aço lisa, dobrada em forma retangular nas dimensões  $300\text{mm} \times 300\text{mm} \times 300\text{mm}$  com um comprimento de  $L=3\text{m}$ . O canal de seção uniforme foi construído no laboratório de Hidráulica do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de São Paulo de São Carlos. A Figura (3.4) mostra o esquema dos parâmetros a serem utilizados nos ensaios da manobra da comporta em um canal retangular.

O canal foi então fechado numa das suas extremidades e nivelado segundo um plano horizontal ( $S_o=0$ ).

Na extremidade aberta montou-se uma comporta vertical basculante, articulada na sua parte superior e que, operada manualmente, foi utilizada para se efetuar manobras rápidas de abertura na seção final, gerando um escoamento de saída em queda livre.

Os trabalhos prosseguiram com uma série de ensaios de esvaziamento iniciados com a água em repouso ( $V_n=0$ ) e com profundidades iniciais de  $H_n=200mm/150mm/100mm$ .

O nível  $h$  da superfície livre foi medido em cada instante empregando-se transdutores de pressão (*Motorola série MPX*), com capacidade de leitura de  $1\text{ m.c.a.}$ , em 6 seções distintas (a,b,c,d,e,f), adotando-se como hipótese a distribuição de pressão hidrostática.

Portanto para representar o comportamento do escoamento não permanente foi necessário medir a pressão estática em seis (6) pontos ao longo do canal (Figura [3.4]). Estas posições foram localizadas ao longo da linha do centro do escoamento do canal para evitar os efeitos laterais da camada limite. A pressão estática é diretamente relacionada com a profundidade da água através da hipótese da distribuição hidrostática da pressão. Para obter a pressão, foram usados transdutores de pressão, os quais transmitem seus sinais através de voltagem, têm linearidade e estabilidade, e que, para serem processados, precisam ser amplificados.

Os sinais de saída dos transdutores, por sua vez, foram registrados por um sistema de aquisição de dados, obtendo-se dessa maneira as curvas experimentais  $h(x,t)$  para  $x=0$ ,  $x=L/6$ ,  $x=L/3$ ,  $x=L/2$ ,  $x=2L/3$ ,  $x=5L/6$ .

Todos os sinais foram convertidos e registrados em um computador, que tem um sistema de aquisição de dados. Com a finalidade de garantir bons resultados para esta pesquisa, vários experimentos foram realizados e os sinais registrados e em seguida processados, para que os resultados fossem depois comparados com os gráficos plotados por dois diferentes métodos. Um diagrama do esquema do sistema de medida é mostrado na Figura (3.5).

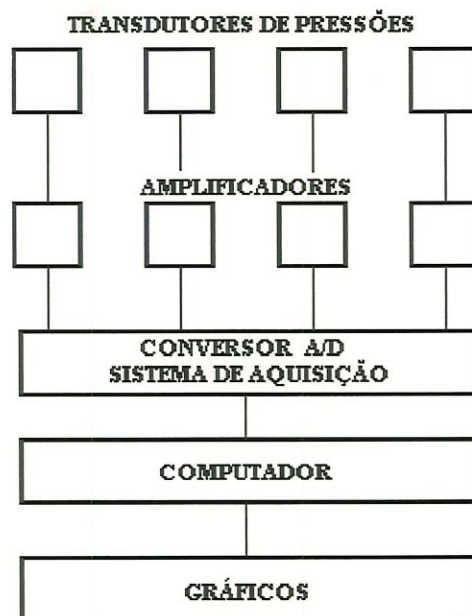


Figura 3.5 Diagrama do sistema de medida

## Experimentos

Os principais parâmetros do escoamento da superfície livre induzida são:

- a - geometria do canal;
- b - rugosidade;
- c – profundidade da água a montante do canal;
- d – condição de contorno

Para verificar a precisão dos aparelhos, uma série de experimentos foi desenvolvida. Os sinais emitidos pelos aparelhos tem um erro admissível de **0,5%**. Para garantir esta porcentagem de erro nos sinais elétricos, vários experimentos com as mesmas condições foram realizados. Se a média dos valores dos sinais estiver na faixa de erro admissível, então está assegurado que os sinais não apresentam ruídos.

Concluindo-se a calibragem e a precisão dos instrumentos, os ensaios para a pesquisa foram desenvolvidos e os dados processados.

### 3.6 ALGORITMO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL DO MÉTODO DE Lax-Wendroff

O esquema de Lax-Wendroff, é demonstrado por duas etapas relacionadas com o espaço de tempo: a primeira, de  $n$  a  $(\bar{n})$ ; a segunda de  $n$  a  $n+1$ .

a) A primeira etapa de tempo ocorre de  $n$  a  $(\bar{n})$ :

**1º Passo:** Conhecendo-se os valores das condições iniciais de  $h$  e  $V$ , calcula-se os valores de  $A'$  e  $B'$  e  $C'$ .

$$hV = A'$$

Se  $X_0 \geq x \geq 0$

$$hV^2 + C_{st} \frac{gh^2}{2} = B'$$

$$C_{st} = (1 - C_s) * S * (2 - S) + C_s$$

$C_s = 0,8$  (Canal retangular)

$$S = NI * \frac{dx}{X_0} \text{ (É um parâmetro que varia de } 0 \text{ até } 1)$$

$X_0 = 0,5 h_e$  (Comprimento admitido conforme literatura do regime permanente)

$NI$  = número de intervalos de  $dx$  contidos na distância longitudinal de  $X_0$

$dx$  = intervalo do comprimento do canal ( $L_n$ )



Se  $x \geq x_0 \geq 0$

$$hV^2 + C_{st} \frac{gh^2}{2} = B'$$

$$C_{st}=1$$

$$e \quad ghS_f = C'$$

**2º Passo:** Calcula-se o valor de  $h_i^-$ , através da equação da continuidade.

$$h_i^- = \frac{1}{2}(h_{i+1,n} + h_{i-1,n}) - \frac{\Delta t}{4\Delta x}(A'_{i+1,n} - A'_{i-1,n})$$

**3º Passo:** Calcula-se o valor de  $A_i^-$ , através da equação da quantidade de movimento

$$A_i^- = \frac{1}{2}(A'_{i+1,n} + A'_{i-1,n}) - \frac{\Delta t}{4\Delta x}(B'_{i+1,n} - B'_{i-1,n}) - \frac{\Delta t}{2}C'_{i,n}$$

**4º Passo:** Para complementar este passo de tempo obtém-se em seguida :

$$V_i^- = \frac{A_i^-}{h_i^-}, B_i^- \text{ e } C_i^-$$

b) A segunda etapa de tempo se processa de  $n$  a  $n+1$ :

**1º Passo:** Utilizando-se as variáveis obtidas no intervalo de tempo  $n$  a ( $\bar{n}$ ), calcula-se as variáveis para o intervalo de tempo  $n$  a  $n+1$ .

$$h_{i,n+1} = h_{i,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (A'_{i+1}^- - A'_{i-1}^-)$$

**2º Passo:** Similarmente, obtém-se o valor de  $A'_{i,n+1}$  através da equação da quantidade de movimento:

$$A'_{i,n+1} = A'_{i,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (B'_{i+1}^- - B'_{i-1}^-) - C'_{i,n} \Delta t$$

**3º Passo:** Para o cálculo de  $V_{i,n+1}$ , serão usados  $A'_{i,n+1}$  e  $h_{i,n+1}$ , encontrando-se, desta forma, a velocidade no novo nível de tempo. A integração continua sucessivamente da mesma maneira de  $n+1$  a  $n+2$ . O procedimento tem continuidade até o limite de tempo definido pelo fenômeno físico.

## **4 CLASSIFICAÇÃO DOS MODELOS DE ESCOAMENTO NÃO PERMANENTE**

### **4.1 INTRODUÇÃO**

As equações que descrevem os escoamentos unidimensionais, não permanentes, de superfície livre são um conjunto de equações diferenciais parciais não lineares, comumente designadas equações de Saint Venant.

Duas equações descrevem o escoamento não permanente em canais são as equações da continuidade e da quantidade de movimento, que se baseiam nos princípios da conservação da massa e da conservação da quantidade de movimento, respectivamente. Ambas são conhecidas como equações de Saint Venant.

Aplicando-se a lei da conservação de massa a um volume de controle num canal prismático, a equação da continuidade pode ser escrita como:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

na qual  $A$  = área molhada,  $Q$  = vazão,  $t$  = tempo e  $x$  = distância ao longo do canal

Aplicando-se a lei da conservação da quantidade de movimento a um volume de controle, a equação da quantidade de movimento pode ser escrita como:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \left( \frac{\partial h}{\partial x} - S_0 + S_f \right) = 0 \quad (4.2)$$

onde:

$g$  = aceleração da gravidade;

$S_0$  = declividade do fundo do canal;

$S_f$  = declividade da linha de energia..

Admitindo-se que as equações de resistência de regime permanente sejam válidas também para o escoamento não permanente, o valor de  $S_f$  pode ser calculado usando-se as fórmulas de Manning ou Chezy.

Até agora, foram abordadas no capítulo 2 as simplificações adotadas na dedução das equações de Saint Venant. As Equações (4.1) e (4.2) são comumente consideradas como equações completas apesar das simplificações, já que podem representar o escoamento da maioria dos problemas em rios, canais, reservatórios e superfície da bacia.

O escoamento de uma onda num canal produz atenuação e deslocamento da onda devido:

- ao armazenamento (tanto na calha normal como nas áreas de inundação);
- ao atrito com as superfícies do canal e difusão por causa do gradiente de pressão.

Nas equações, esses efeitos são representados pela continuidade de massa, que considera o amortecimento devido à variação da capacidade de armazenamento do sistema e pela equação de quantidade de movimento, que representa a gravidade, atrito, pressão e a inércia do fluxo.

Os rios e canais podem ter diferentes características, predominando em cada caso, um ou mais efeitos sobre o escoamento. Henderson ( 1966) utilizou a equação dinâmica sem o termo de escoamento lateral e mostrou que ela pode ser expressa como:

$$Q = C \sqrt{R \left( S_0 - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{g} \frac{\partial h}{\partial t} \right)} \quad (4.3)$$

na qual o termo de resistência é representado pelo coeficiente da equação de Chézy. Os valores dos termos com sinal negativo são pequenos em rios com grande declividade, onde a força de gravidade é preponderante. Quando ocorrem efeitos de jusante sobre o escoamento, ou a declividade da linha de água altera substancialmente a vazão, a pressão deve ser considerada. Já os termos de inércia passam a ser importantes quando ocorrem variações consideráveis de velocidade.

Os sistemas de escoamento podem ter diferentes características, predominando, em cada caso, um ou mais efeitos sobre o fluxo. Chow (1986) classificou os modelos de escoamento em hidrológicos e hidráulicos.

Os modelos são classificados segundo os termos utilizados nas equações de Saint Venant. Os modelos podem ser do tipo Armazenamento, Onda Cinemática, Difusão e Dinâmico (Tabelas [4.1] e [4.2]). A seguir apresenta-se uma discussão sobre os modelos.

Tabela 4.1 - Modelos de Simulação do Escoamento em Canais

| Modelos         | Equações  |
|-----------------|---|
| Armazenamento   | $\frac{dS}{dt} = I - Q$ e $S = f(I, Q)$   |
| Onda Cinemática | $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$ e $S_f = S_0$                                 |
| Difusão         | $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$ e $S_f = S_0 - \frac{\partial h}{\partial x}$ |
| Dinâmico        | Equações (4.1) e (4.2)  |

Tabela 4.2 Resumo das características dos modelos de escoamento

|                 | distribuído | efeito<br>de<br>jusante | termos<br>de<br>pressão | termos<br>de<br>inércia | Dados<br>Físicos |
|-----------------|-------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------|
| Armazenamento   | não         | não                     | não                     | não                     | Não              |
| Onda Cinemática | sim         | não                     | não                     | não                     | opcional         |
| Difusão         | sim         | sim                     | sim                     | não                     | opcional         |
| Hidrodinâmico   | sim         | sim                     | sim                     | sim                     | sim              |

## 4.2 DEFINIÇÃO DOS MODELOS DE SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO EM CANAIS

### 4.2.1 MODELOS ARMAZENAMENTO

Os modelos de armazenamento utilizam somente a equação da continuidade para simular o escoamento no canal e têm sido muito utilizados em hidrologia devido, principalmente, à simplicidade de formulação e ao pequeno volume de dados usados. A equação da continuidade (Equação [4.1]) é transformada, desprezando-se a variação longitudinal da vazão e da área ao longo do trecho. Neste caso, as variáveis ficam sendo o armazenamento  $S$ , a vazão de entrada  $I$  e a vazão de saída do trecho  $Q$ . A equação discretizada para o trecho  $\Delta x$ , sem contribuição lateral torna-se:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x} + \frac{\Delta A}{\Delta t} = 0 \quad e \quad \frac{\Delta x \Delta A}{\Delta t} = -\Delta Q \quad (4.4)$$

sendo:

$$S = \Delta X \Delta A \quad e$$

$$\Delta Q = Q - I \quad (4.5)$$

onde:

I = vazão de entrada do trecho;

Q = vazão de saída.

$$\frac{dS}{dt} = I - Q \quad (4.6)$$

Os modelos do tipo armazenamento diferenciam-se pela expressão usada na segunda equação, que relaciona o armazenamento com as vazões de entrada e saída.

$$S = f(I, Q) \quad (4.7)$$

Alguns destes modelos são os seguintes:

$$S = KQ \quad \text{Reservatório linear simples}$$

$$S = K[xI + (1-x)Q] \quad \text{Muskingun}$$

$$S = \alpha / Q^\beta \quad \text{SSARR}$$



Para a utilização deste tipo de modelo, são necessários, na fase de ajuste e análise dos resultados, somente os hidrogramas de montante e jusante. Esta é a vantagem principal já que na prática a disponibilidade de dados é muito pequena. Este tipo de modelo pode ser usado quando o efeito preponderante é o amortecimento devido ao armazenamento, e caso não existam efeitos de jusante sobre o escoamento, como o causado pela maré na foz de certos rios.

#### 4.2.2 ONDA CINEMÁTICA

As equações básicas do modelo são:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad S_f = S_0 \quad (4.8)$$

O modelo de onda cinemática assume que os termos de inércia e pressão são desprezíveis quando comparados com os termos de fricção e gravidade, ou seja, a segunda equação de Saint Venant se reduz a  $S_f = S_0$ .

Ao considerar a declividade do fundo igual à declividade da linha d'água, na equação de quantidade de movimento, o escoamento tem as seguintes simplificações:

- a força de atrito e a de gravidade são preponderantes sobre os demais termos da equação dinâmica;

- a relação entre a vazão e o nível, numa seção, é biunívoca. Sendo  $S_0 = S_f$ , a equação dinâmica fica  $Q = CA\sqrt{RS_0}$ . A área pode relacionar-se com o nível por uma função do tipo  $A = ah^b$ , o que resulta  $Q = Cah^b\sqrt{RS_0}$ ;

-a onda cinemática é mais importante que as pequenas perturbações, que se comportam como uma onda dinâmica. Segundo Lightill e Whitman (1955), citados por Tucci (1980), as ondas cinemática e dinâmica estão presentes nas ondas de cheia. A maior parte da onda de cheia propaga-se mais lentamente que a velocidade das pequenas perturbações (ondas dinâmicas), já que existe predomínio das ondas cinemáticas sobre as dinâmicas no escoamento subcrítico;

- o modelo simula somente os efeitos de montante e não pode ser utilizado para simular escoamento com influência de jusante, que ocorre em rios e canais próximos a lagos, oceanos, estuários e nos pequenos afluentes de rios maiores;

- o amortecimento da onda simulado neste modelo é causado pelo armazenamento (não ocorre amortecimento devido a efeitos dinâmicos).

Alguns critérios utilizados para avaliar a aplicabilidade deste tipo de modelo são os seguintes:

a) comparação das celeridades: a celeridade da onda dinâmica deve ser maior que a da onda cinemática. Neste caso, resulta a condição de que  $F_r < 1,5$ , em que  $F_r$  é o número de Froude. Esta é uma condição necessária mas não suficiente.

b) índice  $K$ : Liggett e Woolhiser (1967), citados por Tucci (1980), utilizaram uma equação linear da onda cinemática e apresentaram o seguinte fator  $K$ :

$$K = \frac{S_o L_o}{F_r^2 h_o} \quad (4.9)$$

onde  $S_o$ =declividade do fundo;  $L_o$ =comprimento longitudinal do escoamento;  $h_o$  = profundidade;  $F_r$  = número de Froude. O índice  $o$  indica que os valores foram

linearizados com base num valor médio. Os autores concluíram que, quando  $K > 20$ , o modelo onda cinemática é uma boa aproximação;

c) Ponce et al. (1978), citado por Tucci (1980), analisaram as equações de Saint Vénant, baseando-se numa solução de linearidade, e concluíram que, para 95% de precisão, o modelo de onda cinemática é aplicável quando a desigualdade seguinte é verificada

$$\frac{TS_o V_o}{h_o} \geq 171 \quad (4.10)$$

onde  $T$  = período da onda.

A aplicabilidade e análise de previsão dos modelos devem basear-se nas características físicas do canal e da onda a ser propagada.

As limitações do modelo da Onda Cinemática não são somente quanto às características do canal, mas quanto aos efeitos, ou ondas que se propagam de jusante para montante. Nesse caso, este modelo não pode ser usado já que os termos utilizados na equação dinâmica (atrito e gravidade) não levam em conta esses efeitos. Tal situação ocorre em rios e canais próximos a lagos, oceanos, estuários e nos pequenos afluentes de rios de um certo porte.

A vantagem principal do modelo de Onda Cinemática é o processo de cálculo simples, útil no caso de escoamento superficial em bacias.

### 4.2.3 MODELO DE DIFUSÃO

O modelo de Difusão é mais abrangente do que o modelo de Onda Cinemática, pois considera o termo de pressão, o que permite levar-se em conta os efeitos de jusante e atenuação física da onda. Este tipo de modelo pode ser usado em rios ou canais que sofrem efeitos de jusante e cuja velocidade não tem gradientes significativos.

Ele utiliza a equação da continuidade (4.1) e a equação de quantidade de movimento (4.2), sem os termos de inércia.

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad (4.11)$$

e

$$\frac{dh}{dx} = S_0 - S_f \quad (4.12)$$

Então, considerando-se o termo de pressão na equação de quantidade de movimento, desaparece a relação biunívoca entre armazenamento (ou área para uma seção) e vazão.

Este modelo pode ser resolvido por um dos esquemas numéricos comumente usados para a solução das equações completas de Saint Venant. A vantagem em desprezar os outros termos é a de diminuir o volume de cálculo; no entanto, com a disponibilidade de computadores, esse não parece um trunfo tão grande, já que o

custo maior envolvido é o de homem/hora. Portanto, é melhor ter um modelo que abranja todas as situações do que um simplificado que utilize o mesmo volume de dados e tempo do usuário.

Ponce et al. (1978 ) apresentaram as condições de aplicabilidade dos modelos difusivos, baseando-se na análise de uma versão linear das equações de Saint Venant. Para tanto, a desigualdade seguinte deve-se verificar:

$$TS_o \sqrt{\frac{g}{h_o}} \geq 30 \quad (4.13)$$

A vantagem em desprezar os outros termos é a de diminuir o volume de cálculo em relação ao modelo dinâmico (que utiliza as equações completas de Saint Venant), mas, hoje em dia, com o avanço computacional, esta consideração perdeu importância.

#### **4.2.4 MODELO HIDRODINÂMICO**

Os modelos hidrodinâmicos utilizam as Equações (4.1) e (4.2) de escoamento e não desprezam nenhum termo da equação de quantidade de movimento. Esse tipo de modelo requer soluções numéricas das equações diferenciais que necessitam de maior quantidade de dados que os modelos anteriores. As vantagens são a maior precisão e representação física do escoamento, permitindo simular modificações do sistema estudado. As Equações (4.1) e (4.2) não têm soluções analíticas; nos problemas práticos, são solucionadas com o emprego de métodos numéricos.

## **5. INTRODUÇÃO À ANÁLISE DIFERENCIAL DAS EQUAÇÕES DE SAINT VENANT**

### **5.1 INTRODUÇÃO**

A modelação do escoamento não permanente em canais iniciou-se com o desenvolvimento de duas equações diferenciais parciais. Abbot (1979) apresentaram a dedução das Equações de Saint Venant, utilizando-se dos conceitos de conservação de massa e da quantidade de movimento.

A aplicação das leis de conservação de massa e da quantidade de movimento será utilizada para modelar o escoamento não permanente em um canal retangular. Para tal, admitem-se algumas hipóteses na dedução das equações de Saint Venant:

a - escoamento unidimensional, isto é, a velocidade do escoamento na seção transversal é uniforme;

b - Distribuição hidrostática de pressão. Esta é uma hipótese válida se as linhas de correntes não apresentarem curvaturas;

c - Fluido incompressível e homogêneo;

d - A declividade do fundo do canal é pequena .

e - O canal é prismático, isto é, a declividade da seção transversal e o fundo do canal não variam com a distância.

f - As perdas de cargas no escoamento não permanente podem ser simuladas usando-se as equações do escoamento permanente, ou seja a equação de Manning ou Chezy, isto é, as perdas de cargas para uma dada velocidade do escoamento não permanente são as mesmas do escoamento permanente.

## 5.2 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

O primeiro princípio físico ao qual se aplica a relação entre as formulações para sistema e volume de controle é a conservação da massa. É intuitivo que a massa nem pode ser criada nem destruída; se a vazão em massa para dentro de um volume de controle exceder aquela que sai, a massa acumular-se-á dentro do volume de controle (VC). A lei da conservação da massa afirma que a massa de um sistema permanece constante com o tempo (não se levando em conta efeitos de relatividade). Em forma de equação,

$$\left. \frac{dM}{dt} \right)_{\text{sistema}} = 0 \quad (5.1)$$

$$\left. \frac{dM}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (5.2)$$

finalmente chegamos à formulação para volume de controle da conservação da massa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (5.3)$$

Logo, a equação da continuidade para volume de controle afirma que a taxa de variação da massa (variação temporal da massa) no volume de controle é igual ao saldo dos fluxos de massa através da superfície de controle.

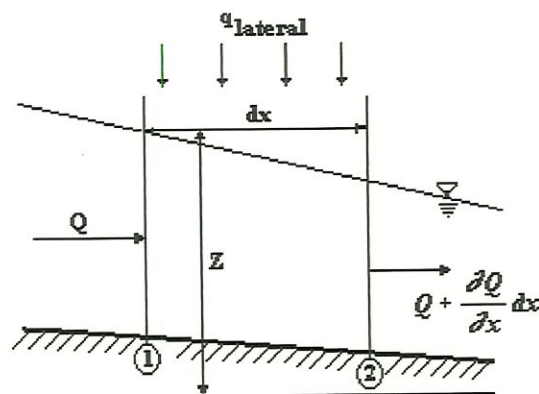


Figura 5.1 Seção longitudinal



Para o volume de controle (Figura [5.1]), a massa que entra na seção de montante, no intervalo de tempo  $dt$ , é igual a  $\rho Q dt$ . A massa que entra por contribuição lateral no mesmo período é  $\rho q dx dt$ . Assim sendo, o fluxo de massa que entram no volume de controle é  $\rho [Q + q dx] dt$ . Fluxo de massa saindo do volume de controle é  $\rho \left( Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dt$ . A variação temporal da massa contida no volume de controle vale  $\rho \frac{\partial A}{\partial t} dx dt$ .

Então, o balanço de massa (Figura [5.1]) é

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (5.4)$$

onde:

$Q$  é a vazão;

$A$  é a área da seção transversal;

$x$  é a distância na direção longitudinal;

$t$  é o tempo;

$q$  é a contribuição lateral gradual por unidade de comprimento (entrada ou saída de vazão por unidade de largura), entre as seções 1 e 2 (Figura [5.1]).

A vazão lateral que entra no canal é considerada positiva, enquanto que a vazão que sai é considerada negativa. Esta vazão lateral de entrada e saída pode ser ocasionada pela infiltração, evaporação, etc.

Tabela 5.1 Análise da equação da continuidade

| Analisando os Termos da equação 3.4, pode-se dizer que |   |
|--|---|
| $\partial A/\partial t > 0$                            | quando há aumento da área molhada com o tempo, ou seja, aumento da profundidade do escoamento                     |
| $\partial A/\partial t < 0$                            | quando há diminuição da área molhada com o tempo, ou seja, diminuição da profundidade do escoamento               |
| $\partial Q/\partial x > 0$                            | quando ocorre um aumento de vazão no sentido de jusante, ou seja, um efluxo positivo (sai mais do que entra)      |
| $\partial Q/\partial x < 0$                            | quando ocorre uma diminuição de vazão no sentido de jusante, ou seja, um efluxo negativo (sai menos do que entra) |
| $q > 0$  | quando há afluxo de massa no trecho, ou seja, existe contribuição lateral de massa de fora para dentro            |
| $q < 0$  | quando há efluxo de massa no trecho, ou seja, existe contribuição lateral de massa de dentro para fora            |

Sendo nula a contribuição lateral, pode-se chegar as seguintes conclusões. No caso de um efluxo positivo ( $\partial Q/\partial x > 0$ ), ou seja, a vazão que sai é maior do que a que entra no volume de controle, ter-se-á, de acordo com a equação da continuidade (5.4), uma diminuição na profundidade do escoamento; conseqüentemente, a área molhada,  $\partial A/\partial t < 0$ . Caso contrário ( $\partial Q/\partial x < 0$ ), ocorre um acúmulo de massa no volume de controle e a área molhada, assim como a profundidade de escoamento, deve aumentar ( $\partial A/\partial t > 0$ ).

### 5.3 EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A equação da quantidade de movimento para o escoamento não permanente é apresentada da seguinte forma :

$$\bar{F} = \sum \bar{F} = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F}_S + \bar{F}_B = \int_{sc} \bar{V} \rho \bar{V} d\bar{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV \quad (5.5)$$

Em outras palavras, a força resultante que age num volume de controle é igual à taxa de variação com o tempo da quantidade de movimento do volume de controle, mais o saldo dos fluxos da quantidade de movimento através da superfície de controle. Portanto, a Q. M. que entra, menos a Q.M. que sai, mais a Q.M. devida à contribuição lateral e das forças que atuam no corpo da água são iguais à variação da Q.M. no intervalo de tempo (Figura [5.2]).

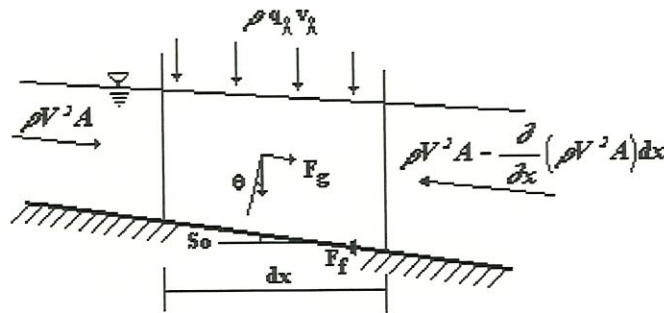


Fig. 5.2 Quantidade de movimento

O fluxo da quantidade de movimento entrando na superfície de controle é:

$$\left[ \frac{Q^2}{A} + qv_l dx \right]$$

onde  $v_l$  é a componente longitudinal da velocidade do escoamento lateral.

O fluxo da quantidade de movimento que sai da superfície de controle é:

$$-\left[ \frac{Q^2}{A} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) dx \right]$$

A variação temporal da quantidade de movimento, associada à massa no interior do volume de controle, é

$$\frac{\partial}{\partial t} [Qdx]$$

As forças que agem no volume de controle são: gravidade, pressão e atrito. A força devida à gravidade é a componente do peso da água ao longo do canal

$$F_g = \rho g A dx \cdot \text{sen } \theta \quad (5.6)$$

$$\text{ou se } \text{sen } \theta \cong -\frac{\partial Z_0}{\partial x} = S_0, \text{ resulta}$$

$$F_g = \rho g A dx S_0. \quad (5.7)$$

A força de pressão que age na face de montante do volume de controle é a seguinte:

$$F_p = \int_0^h \rho g (h - z) B dz \quad (5.8)$$

em que

B = largura

h = profundidade

A força na direção de jusante é:

$$-\left( F_p + \frac{\partial F_p}{\partial x} \Delta x \right) = -\left\{ F_p + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho g (h - z) B dz \right\} dx \right\} \quad (5.9)$$

A variação da força de pressão é :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^h \rho g (h - z) B dz \right\} dx = -gA \frac{\partial h}{\partial x} dx - dx \int_0^h \rho g (h - z) \frac{\partial B}{\partial x} dh \quad (5.10)$$

Assumindo-se  $\frac{\partial B}{\partial x} = 0$ , isto é, o canal prismático, a força de pressão resultante

é :

$$F_p = gA \frac{\partial h}{\partial x} dx \quad (5.11)$$

A força causada pelo atrito do fluido com as paredes da seção é dada por

$$F_f = -\tau p dx \quad (5.12)$$

onde  $\tau$  é a tensão cortante;  $p$  o perímetro molhado. Considerando-se que  $\tau = \rho g R_h S_f$  onde  $R_h$  é o raio hidráulico;  $S_f$  a inclinação da linha de energia, resulta:

$$F_f = -\rho g A S_f dx \quad (5.13)$$

Considerando-se a contribuição lateral zero, após algumas substituições, a equação da quantidade de movimento torna-se:

$$V \left[ B \frac{\partial h}{\partial t} + A \frac{\partial V}{\partial x} + BV \frac{\partial h}{\partial x} \right] + A \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g S_f - g S_o \right) = 0 \quad (5.14)$$

Simplificando-se, resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2g} + h \right) = g(S_o - S_f) \quad (5.15)$$

que é a equação dinâmica, ou a equação da quantidade de movimento. A equação da quantidade de movimento (5.15) permite interpretar os vários tipos de escoamentos em função da importância relativa dos termos da equação:

1ª) Condição  $S_f = S_o$  - Escoamento Permanente Uniforme

$$S_f = S_o$$

A linha de energia ou superfície líquida é paralela ao fundo do canal, mantendo-se, por isso, uma profundidade constante ao longo do canal  $\partial h/\partial x=0$ . Neste caso, a profundidade é chamada de normal e o escoamento é permanente e uniforme.

2ª) Condição  $S_f \neq S_0$  - Escoamento Permanente Não Uniforme

$$S_f = S_0 - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2g} + h \right)$$

A profundidade e/ou a velocidade média da seção transversal variam ao longo do canal ( $\partial h/\partial x$  e/ou  $\partial V/\partial x \neq 0$ ) e o escoamento é permanente, não uniforme.

3ª) Condição - Escoamento não permanente

$$S_f = S_0 - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2g} + h \right) - \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t}$$

Portanto, quando todos os termos da Equação (5.15) são não nulos, o escoamento é não permanente, não uniforme. O termo da aceleração local é necessário para tornar válido o escoamento não permanente.

Para escoamento num canal horizontal, a declividade do leito é zero ( $S_0 = 0$ ) e a profundidade normal é infinita ( $h_n \rightarrow \infty$ ). Para o perfil H2,  $h > h_c$ , o escoamento é subcrítico e a declividade é negativa. A equação da quantidade de movimento transforma-se em:

$$\frac{\partial}{\partial t} (hV) + \frac{\partial}{\partial x} \left( hV^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = -ghS_f \quad (5.16)$$

As equações da continuidade e da quantidade de movimento são as equações de Saint Venant, que representam as duas equações a serem resolvidas para obter o perfil do escoamento não permanente em canais.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Vh) = 0 \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hV) + \frac{\partial}{\partial x}\left(hV^2 + \frac{gh^2}{2}\right) = -ghS_f \quad (5.18)$$

O atrito é manifestado por meio do coeficiente de rugosidade das paredes do canal. Uma das equações empíricas para canais, Manning ou Chezy, é usada para expressar a rugosidade. Muito embora estas equações tenham sido estabelecidas para escoamento uniforme e permanente, vêm sendo utilizadas para escoamentos não permanentes, com resultados satisfatórios. Optou-se pela equação de Manning para calcular a declividade da linha de energia  $S_f$ , representada no Sistema Internacional de unidades (SI) por:

$$S_f = \frac{n^2 V |V|}{R_h^{4/3}} \quad (5.19)$$

onde:

$n$  é o coeficiente de rugosidade de Manning

$R_h$  é o raio hidráulico da seção do canal.



## 5.4 ANÁLISE DIMENSIONAL

Reescrevendo-se as equações da continuidade e da quantidade de movimento, tem-se:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Vh) = 0 \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hV) + \frac{\partial}{\partial x}\left(hV^2 + \frac{gh^2}{2}\right) = -ghS_f \quad (5.21)$$

As equações adimensionais proporcionam uma análise mais ampla dos fenômenos físicos.

As variáveis adimensionais são definidas como:

$$V^* = \frac{V}{V_n} \quad ; \quad H^* = \frac{h}{H_n} \quad ; \quad x^* = \frac{x}{L_n} \quad ; \quad t^* = \frac{V_n}{L_n} t; \quad (5.22)$$

em que  $V_n$  = velocidade inicial,  $H_n$  = profundidade inicial, e  $L_n$  = comprimento do canal.  $V_n$  e  $H_n$  não podem ser consideradas independentes, mas são relacionadas por meio da equação de Manning

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_o^{1/2} \quad (5.23)$$

onde  $R_h$  = é o raio hidráulico. A Equação (5.24) implica que  $V_n$  e  $H_n$  seja respectivamente a velocidade nominal e profundidade nominal, para uma vazão  $Q=V_n H_n$ .

Usando-se as Equações (5.22) as derivadas ficam:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{H_n V_n}{L_n} \frac{\partial H^*}{\partial t^*}; \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{H_n}{L_n} \frac{\partial H^*}{\partial x^*}; \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V_n^2}{L_n} \frac{\partial V^*}{\partial t^*} e \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_n}{L_n} \frac{\partial V^*}{\partial x^*}. \quad (5.24)$$

Empregando-se estes valores, as Equações (5.20) e (5.21) transformam-se em:

$$\frac{\partial H^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} (V^* H^*) = 0 \quad (5.25)$$

e

$$\frac{\partial (H^* V^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left( H^* V^{*2} + \frac{H^{*2}}{2} \right) = - \frac{g S_x L_n}{V_n^2} \frac{V^{*2}}{H^{*1/3}} \frac{(2h^* + B^*)^{4/3}}{B^{*4/3}} \quad (5.26)$$

Na Equação (5.26)  $S_x$  tem sido considerado como sendo:  $S_x = \frac{n^2 V_n^2}{H_n^{4/3}}$

Da equação (5.26) surgem dois adimensionais. O valor

$$F_r = \frac{V_n}{\sqrt{g H_n}} \quad (5.27)$$

que é o número de Froude, e o parâmetro

$$k = \frac{gS_x L_n}{V_n^2} = \frac{S_x L_n}{F_r^2 H_n} \quad (5.28)$$

Substituindo-se as Equações (5.27) e (5.28) na Equação (5.26), tem-se:

$$\frac{\partial(H^*V^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left( H^*V^{*2} + \frac{H^{*2}}{2} \right) = -\frac{S_x L_n}{F_r^2 H_n} \frac{V^{*2}}{H^{*1/3}} \frac{(2h^* + B^*)^{4/3}}{B^{*4/3}} \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial(H^*V^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left( H^*V^{*2} + \frac{H^{*2}}{2} \right) = -k \frac{V^{*2}}{H^{*1/3}} \frac{(2h^* + B^*)^{4/3}}{B^{*4/3}} \quad (5.30)$$

## **6. HIPÓTESES E APROXIMAÇÕES**

As hipóteses e simplificações para o desenvolvimento das equações de Saint Venant são:

### **6.1 PRESSÃO HIDROSTÁTICA**

#### **6.1.1 A EQUAÇÃO BÁSICA**

Primeiramente, é feita uma abordagem de como a equação de Bernoulli

$$H_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \quad (6.1)$$

é aplicada em escoamento de canais,

onde:

$H_e$  = energia total

$z$  = elevação das linhas de corrente acima do plano de referência

$p$  = pressão

$\gamma$  = peso específico do fluido

$p/\gamma$  = carga de pressão

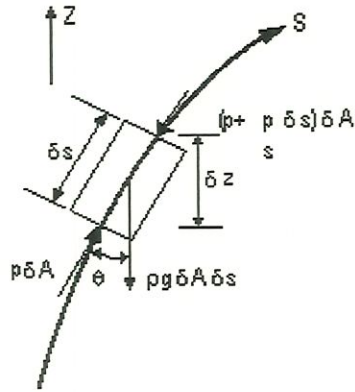
$V$  = velocidade

$V^2/2g$  = carga de velocidade

$g$  = aceleração da gravidade

A soma  $z+(p/\gamma)$  define a elevação da linha piezométrica acima do plano de referência. Em geral, o valor desta soma varia de ponto a ponto ao longo da linha de corrente. Para demonstrar a variação desta soma sob várias circunstâncias, considere-se uma partícula de área de seção transversal  $\delta a$   $\delta s$  movendo-se ao longo de uma linha de corrente arbitrária na direção  $+S$  (Figura [6.1]). Se for assumido que o fluido é sem atrito, então não há forças de cisalhamento, e somente as forças gravitacional e de superfície que atuam nas extremidades da partícula devem ser consideradas. A força gravitacional é  $\rho g \delta A \delta s$ , a força de pressão na face de montante é  $p \delta A$ , e a força de pressão na face de jusante é  $[p+(\partial p/\partial s)\partial s] \delta a$ . Aplicando-se a segunda lei de Newton do movimento na direção do escoamento,

$$F_s = a_s \delta m \quad (6.2)$$



**Figura 6.1** Forças agindo em uma partícula que se move ao longo de uma linha de corrente

ou

$$\rho a_s \delta A \delta s = p \delta A - \left( p + \frac{\partial p}{\partial s} \delta s \right) \delta A - \rho g \delta A \delta s \cos \theta \quad (6.3)$$

onde  $a_s$  = aceleração da partícula fluida ao longo da linha de corrente. Simplificando-se esta equação

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g \frac{\partial z}{\partial s} + \rho a_s = 0 \quad (6.4)$$

e notando-se que

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \cos \theta \quad (6.5)$$

tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial s}(p + \gamma z) + \rho a_s = 0 \quad (6.6)$$

A Equação (6.6) é conhecida como a equação de Euler para movimento ao longo da linha de corrente. Se  $a_s = 0$ , a Equação (6.6) pode ser integrada para obter a lei hidrostática, isto é, a pressão varia linearmente com a profundidade.

As implicações da Equação (6.6) no escoamento de canais são significativas. Primeiro, se as pequenas flutuações devidas à turbulência são desprezadas e as linhas de corrente não têm componentes da aceleração no plano da seção transversal, isto é, as linhas de corrente não apresentam curvatura nem divergência, então o escoamento é denominado paralelo e prevalece a distribuição de pressão hidrostática. Na prática, muito escoamentos uniformes e gradualmente variados pode ser considerados paralelos com distribuição de pressão hidrostática, desde que a divergência e a curvatura das linhas de corrente nestes casos sejam desprezíveis. No escoamento paralelo, a soma  $z+p/\gamma$  é constante e igual à profundidade do escoamento  $h$ , quando o plano de referência é considerado como o fundo do canal. Então, por definição, a energia específica  $E$  do escoamento em canal, relativa ao fundo do canal é

$$E = h + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (6.7)$$

## 6.1.2 DISTRIBUIÇÃO DA PRESSÃO EM UMA SEÇÃO DO CANAL

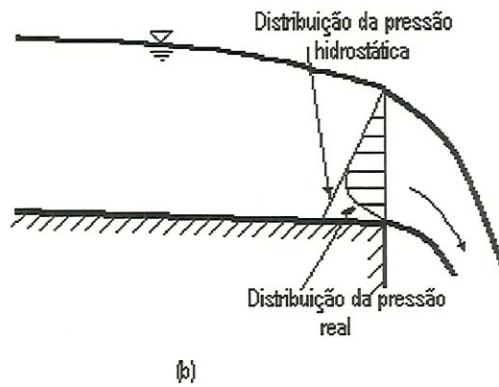
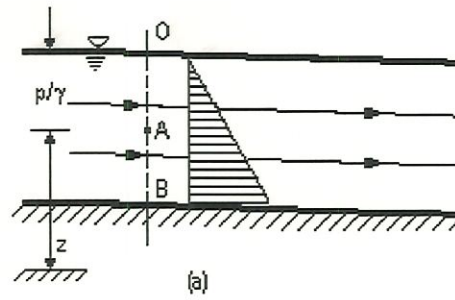
A pressão em algum ponto na seção transversal do escoamento em um canal de declividade pequena pode ser medida através da altura da coluna de água de um piezômetro instalado em um ponto no canal (Figura [6.2a] ). Ignorando-se pequenas perturbações, como as devidas à turbulência, a pressão em algum ponto na seção é diretamente proporcional à profundidade do ponto abaixo da superfície livre e igual à pressão hidrostática correspondente a esta profundidade. Em outras palavras, a distribuição da pressão através da seção transversal do canal é a mesma da distribuição da pressão hidrostática; isto é, a distribuição é linear e pode ser representada por uma linha reta  $AB$  (Figura [6.2a] ). Isso é conhecido como a *lei hidrostática da distribuição de pressão*.

### 6.1.2.1 ESCOAMENTO PARALELO

A aplicação da lei hidrostática para a distribuição de pressão na seção transversal de um canal em escoamento é válida somente quando as acelerações verticais forem pequenas, ou seja, desprezíveis. Isso acontece quando a variação da profundidade, ao longo do canal, for gradual. Esse tipo de escoamento é teoricamente conhecido como escoamento paralelo.

Claramente essa condição será encontrada em situações onde o escoamento é substancialmente horizontal com apenas pequenas componentes de escoamento vertical como na Figura (6.2a). Por outro lado, onde a aceleração vertical é notável, como em uma queda livre (Figura [6.2b] ), a distribuição da pressão é não hidrostática. Em tal caso, há pronunciada curvatura das linhas de corrente no plano vertical.





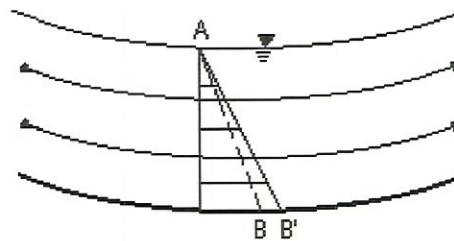
**Figura 6.2** Casos típicos de escoamento em canal.

a) escoamento paralelo com  $\theta \approx 1$ .

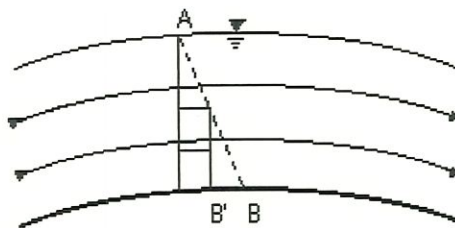
b) escoamento em queda livre

### 6.1.2.2 ESCOAMENTO CURVILÍNEO

Se  $a_s \neq 0$ , as linhas de curvatura são substanciais, ou seja, o escoamento é teoricamente conhecido como escoamento curvilíneo. O efeito da curvatura produz apreciáveis componentes da aceleração. Então, a distribuição da pressão sobre a seção desvia da hidrostática, se ocorre o escoamento curvilíneo no plano vertical. Tal escoamento curvilíneo pode ser convexo ou côncavo (Figura [6.3]), podendo ocorrer no caso de comporta de gaveta e em queda livre.



a)



b)

**Figura 6.3** escoamento curvilíneo.

a) Distribuição da pressão no escoamento côncavo.

b) Distribuição da pressão no escoamento convexo.

Em casos de escoamento côncavo ou convexo, a distribuição da pressão é não hidrostática, e é representada por  $AB'$  em vez da distribuição direta  $AB$  que ocorreria se o escoamento fosse paralelo. Por isso, o fator de correção da pressão deve ser estimado. Em situações de escoamento côncavo, as forças centrífugas apontam para baixo para reforçar a ação da gravidade; então a pressão resultante é maior do que a pressão hidrostática do escoamento paralelo. No escoamento convexo, as forças centrífugas atuam para cima contrariamente à ação da gravidade; consequentemente, a pressão resultante é menor do que a pressão hidrostática do escoamento paralelo. Se um canal tem um perfil longitudinal curvo, então o desvio da distribuição da pressão da condição hidrostática pode ser estimado pela aplicação da segunda lei de Newton:

$$c' = \frac{h V^2}{g r} \quad (6.8)$$

onde  $c'$  é a pressão devido a ação centrífuga,  $r$  é o raio de curvatura do fundo,  $h$  é a profundidade do escoamento, e  $V$  é igual à velocidade média do escoamento. Então, a verdadeira distribuição da pressão em uma seção é

$$p = h \pm \frac{h V^2}{g r} \quad (6.9)$$

onde os sinais positivo e negativo são usados em escoamentos côncavo e convexo, respectivamente.

No escoamento paralelo, a pressão é hidrostática, e a carga da pressão pode ser representada pela profundidade do escoamento  $h$ . Para simplificar, a carga da pressão de um escoamento curvilíneo pode ser representada por  $\alpha'h$ , onde  $\alpha'$  é um

coeficiente de correção para o efeito de curvatura. O coeficiente de correção é denominado coeficiente de distribuição da pressão. Desde que este coeficiente seja aplicado à carga da pressão, o mesmo pode ser denominado de coeficiente de pressão, pode ser demonstrado:

$$\alpha' = 1 + \frac{1}{Qh} \int_0^A c' V dA \quad (6.10)$$

onde  $Q$  = a vazão,  $V$  = a velocidade, e  $dA$  = um incremento de área. Então  $\alpha' > 1$  para escoamento côncavo,  $\alpha' = 1$  para escoamento paralelo, e  $\alpha' < 1$  para escoamento convexo.

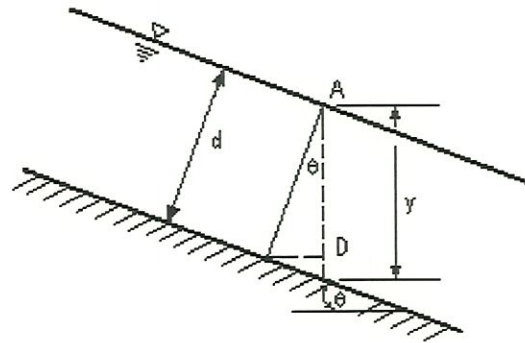
### 6.1.2.3 EFEITO DA DECLIVIDADE NA DISTRIBUIÇÃO DA PRESSÃO

A distribuição da pressão também difere da hidrostática quando a declividade do fundo é muito íngreme (Figura [6.4] ). A pressão em  $B$  neste caso é

$$\frac{p_B}{\gamma} = AB \cos \theta$$

$$\frac{p_B}{\gamma} = y \cos^2 \theta$$

$$\frac{P_B}{\gamma} = AD \quad (6.11)$$



**Figura 6.4** Distribuição da pressão para escoamento em canais com declividade.

Rios e canais com *seno*  $\theta = 0,01$ , isto é,  $\cos^2 \theta = 0,9999$  são considerados muito íngremes. Na grande maioria dos casos, a declividade (Figura [6.4] ) pode ser assumida pequena para que o  $\cos^2 \theta$  se aproxime da unidade; além disso, a distância vertical  $y$  pode ser considerada igual à profundidade da água  $d$ . Em geral, se  $\theta < 10^\circ$  ou  $S < 0,018$  onde  $S$  é a declividade do canal, a Equação (6.7) é válida (French [1987] ).

A distribuição das pressões difere tanto mais da hidrostática quanto maior for o valor da aceleração a que estão sujeitas as partículas líquidas, ou seja, quanto mais se afastar o movimento das condições do regime uniforme. Ora, no escoamento gradualmente variado, pela própria definição, as acelerações das partículas são muito pequenas, podendo-se, nesse caso, estender a ele as conclusões tiradas para o regime uniforme, isto é, da distribuição hidrostática das pressões numa seção transversal. O estudo do movimento gradualmente variado se baseia nessa hipótese fundamental.

A distribuição da pressão em cada seção transversal é hidrostática. Essa hipótese é verificada quando as acelerações verticais forem pequenas, isto é, se a variação da profundidade, ao longo do canal, for gradual.

#### 6.1.2.4 ANÁLISE DIMENSIONAL DA PRESSÃO HIDROSTÁTICA

A hipótese básica da teoria das ondas de águas rasas é que a distribuição da pressão é hidrostática, ou

$$p = \rho g(h - z), \quad z \leq h \quad (6.12)$$

A Equação (6.12) é a hipótese básica da teoria das ondas de águas rasas, e é muito aplicada na engenharia. Essa condição pode ser derivada das equações da hidrodinâmica. Considerando-se a equação tridimensional da continuidade em um ponto no campo do escoamento,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6.13)$$

e a equação de Euler do movimento para fluido sem atrito na direção  $z$ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (6.14)$$

onde a direção  $z$  é tomada na vertical e  $w$  é a componente da velocidade ao longo de  $z$ . Adimensionalizando-se as variáveis das Equações (6.13) e (6.14), tem-se:

$$V^* = \frac{v}{V_0}; H^* = \frac{h}{H}; x^* = \frac{x}{L}; t^* = \frac{V_0}{L} t;$$

$$v^* = \frac{v}{V_0}; w^* = \frac{w}{W}; z^* = \frac{z}{H}; p^* = \frac{p}{\rho V_0^2}; \quad (6.15)$$

onde  $W$ =velocidade vertical. As Equações (6.13) e (6.14), em forma adimensional, tornam-se:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{LW}{HV_0} \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (6.16)$$

e

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + \frac{LW}{HV_0} w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} =$$

$$-\frac{LV_0}{HW} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \frac{gL}{V_0 W}. \quad (6.17)$$

É conveniente estabelecer que  $LW/HV_0$  é igual à unidade. Como também a teoria das ondas de águas rasas

$$\varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1 \quad (6.18)$$

é usada. Então,

$$\varepsilon = \frac{W}{V_0} \ll 1. \quad (6.19)$$

O fator de escala vertical (a profundidade) é considerado pequeno quando comparado com o fator de escala horizontal (o comprimento da onda). Como consequência, a velocidade vertical é pequena quando comparada com a velocidade horizontal.

Considerando o último termo da Equação (6.17), e admitindo que

$$\frac{V_0 W}{gL} = \frac{H^2}{L^2} = \varepsilon^2, \quad (6.20)$$

Fazendo-se com que as velocidades sejam

$$V_0 = \sqrt{gH} \text{ e } W = V_0 \frac{H}{L}. \quad (6.21)$$

O valor  $V_0$  pode ser considerado como a velocidade de uma onda de gravidade de profundidade  $H$ . Com estas considerações, a Equação (6.17) torna-se:

$$\varepsilon^2 \left( \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} - 1. \quad (6.22)$$



Desprezando-se os termos da ordem  $\varepsilon^2$ , obtém-se a condição hidrostática

$$\frac{\partial p^*}{\partial z^*} = -1 \quad (6.23)$$

que é a Equação (6.12) na forma adimensional.

O problema que ainda permanece é saber quando aplicar a teoria da ondas de águas rasas. Isto é, quando saber que  $H/L$  é suficientemente pequeno (Mahmmood [1975]). A resposta pode ser obtida por meio da teoria da onda de oscilação.

Considerando-se a onda de oscilação, os textos da hidrodinâmica mostram que a velocidade  $c$  das ondas de comprimento  $L$  na água de profundidade  $h$  é dada pela equação

$$c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L}} \quad (6.24)$$

Se  $L$  é grande comparado com  $h$ ,  $2\pi h/L$  é pequeno, de modo que

$$\tanh = \frac{2\pi h}{L} \approx \frac{2\pi h}{L} \quad (6.25)$$

de onde

$$c^2 = \frac{gL}{2\pi} \frac{2\pi h}{L} \quad (6.26)$$

$$c^2 = gh \quad (6.27)$$

em que  $L$  = o comprimento da onda. A Equação (6.27) é uma aproximação da Equação (6.24), e se limita à aplicação de ondas longas e de baixa amplitude. Se ao usar a Equação (6.27) em vez da Equação (6.24) a precisão  $\sigma$  é:

$$\sigma^2 = \frac{\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L}}{gh} = \frac{\tanh 2\pi \frac{h}{L}}{2\pi \frac{h}{L}} \quad (6.28)$$

Quando  $h/L=0,055$ , e utilizando as equações de celeridade, o erro é de 2% nessa variável, em consequência da aproximação da pressão hidrostática. Essa é uma simplificação aceitável para escoamento gradualmente variado

Pode-se definir, entretanto, que a velocidade da onda  $c = \sqrt{gh}$  é a velocidade com que a perturbação em escoamento de canais tende a mover sobre a superfície da água, e esta velocidade é medida em relação à água.

## 6.2 APROXIMAÇÃO DA DECLIVIDADE.

Na dedução das Equações de Saint Venant, o  $\text{sen } \theta_x$  da equação da força gravitacional, foi aproximado para  $\text{sen } \theta_x \cong -\frac{\partial Z_0}{\partial x} = S_x$ , onde, na realidade,

$$-\frac{\partial Z_0}{\partial x} = \text{tg } \theta_x. \text{ Considerando-se o } \cos \theta \cong 1, \text{ tem-se } \text{sen } \theta_x = \text{tg } \theta_x. \text{ Sendo } x$$

considerado na direção inclinada em vez da horizontal, a força de gravidade no elemento deveria ser:

$$F_g = \rho g h (S_x \cos \theta_x) \sin \theta_x \quad (6.29)$$

e a precisão ser:

$$\sigma = \frac{\cos \theta_x \sin \theta_x}{\operatorname{tg} \theta_x} = \cos^2 \theta_x \quad (6.30)$$

Para um ângulo  $\theta_x = 16^\circ$ , ou uma declividade  $S_x = 0,29 \text{ m/m}$ , ocorre um erro aproximado de 2%. Se  $x$  é considerado horizontal, em vez de inclinado, então o erro aproximado de 2% ocorre para  $\theta_x = 11^\circ$  ou  $S_x = 0,20 \text{ m/m}$  (Mahmood [1975]).

### 6.3 COEFICIENTES DE DISTRIBUIÇÃO DA VELOCIDADE

Na dedução das equações de Saint Venant, foi assumido que a velocidade em toda a seção do escoamento é constante. Isso, na prática, não é verdade porque as forças viscosas tornam a velocidade próxima às paredes muito menor do que a uma determinada distância delas. Como resultado da distribuição não uniforme da velocidade sobre a seção do canal, a velocidade é geralmente maior do que o valor calculado pela expressão  $V^2/2g$ , onde  $V$  é a velocidade média. A energia cinética por unidade de peso,  $V^2/2g$ , não é, entretanto, a média de  $V^2/2g$  na seção transversal. É necessário computar-se um fator de correção  $\alpha$  para  $V^2/2g$ , de tal forma que  $\alpha V^2/2g$  seja a energia cinética média por unidade de peso do fluido que passa na seção.

Se a velocidade varia através da seção, a velocidade média na seção  $(V^2/2g)_m$  não será necessariamente igual a  $V_m^2/2g$  (o subscrito  $m$  indica o valor médio).

Portanto, a carga da velocidade média, ou energia cinética por unidade de peso do fluido, é igual a

$$\left(\frac{V^2}{2g}\right)_m = \frac{\int \frac{V^3}{2g} dA}{V_m A} = \alpha \left(\frac{V_m^2}{2g}\right) \quad (6.31)$$

onde  $\alpha$  é um coeficiente de correção a ser aplicado para a carga de velocidade quando calculado pela velocidade média. É também conhecido como o coeficiente de energia ou coeficiente de Coriolis. Finalmente

$$\alpha = \frac{\int V^3 dA}{V_m^3 A} \quad (6.32)$$

As mesmas considerações são aplicadas ao cálculo do termo da quantidade de movimento  $(Q\rho V)_m$ . A taxa de transferência da quantidade de movimento através de um elemento de área  $dA$  é igual a  $\rho V^2 dA$ ; então, por um argumento similar ao precedente, pode-se deduzir que o coeficiente de correção da quantidade de movimento é igual a:

$$\beta = \frac{(Q\rho V)_m}{Q\rho V_m} = \frac{\int V^2 dA}{V_m^2 A} \quad (6.33)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  não possuem dimensão e representam fatores de correção para a carga cinética  $V^2/2g$  e para o fluxo da quantidade de movimento  $Q\rho V$ , respectivamente.

Para uma distribuição uniforme de velocidades estes fatores não aparecem, de modo que  $\alpha=\beta=1$ ; para um perfil não uniforme de velocidades,  $\alpha>\beta>1$ . Dados experimentais indicam que o valor de  $\alpha$  varia em torno de *1,03 a 1,36* para canais prismáticos com pequena declividade (aproximadamente horizontais) (Chow [1986]). O valor é geralmente maior para canais pequenos e menor para cursos d' água de profundidade considerável. O valor de  $\alpha$  apropriado ao escoamento laminar é de pouco interesse, pois este escoamento raramente ocorre nos problemas práticos de canais (Henderson [1966]). Para o escoamento turbulento em canais regulares,  $\alpha$  raramente excede *1.15* (Henderson [1966]). Enquanto que o valor de  $\beta$  para canais com pequena declividade (aproximadamente horizontais) varia em torno de *1.01 a 1.12* (Chow [1986]). A forma das Equações (6.32) e (6.33) torna claro que  $\alpha$  é mais sensível à variação da velocidade do que  $\beta$ , de modo que para uma dada seção do canal,  $\alpha > \beta$ .

Em termos práticos,  $\beta$  e  $\alpha$  são geralmente usados somente quando o canal consiste de uma seção principal com subseções e/ou bermas, ou quando o canal é extremamente largo em comparação com a profundidade. Nestes casos, a grande variação de velocidade de seção para seção realmente deturpa toda a variação gradual de velocidade e é recomendável considerar um perfil de velocidade para cada subseção.

Os valores de  $\alpha$  para escoamento turbulento em condutos forçados variam entre *1,05 e 1,10*. Considerando-se que, para esses condutos, raramente a velocidade média  $V$  ultrapassa *2m/s* e quase nunca ultrapassa *4m/s*, pode-se mostrar que o refinamento dos cálculos, com a introdução do valor exato de  $\alpha$  pouco altera os resultados finais.

O mesmo nem sempre ocorre ao se tratar do escoamento num canal. De um lado, porque nos canais o coeficiente  $\alpha$  poderá atingir valores bem maiores que nos condutos forçados e, por outro lado, naqueles, as velocidades poderão atingir valores

extremamente altos, tornando, às vezes, preponderante a altura cinética no cálculo da carga total. Admitindo-se, por exemplo,  $\alpha=1,5$ , o que é possível num canal, e a velocidade média  $V=10m/s$ , o que também é possível no canal, a simplificação decorrente de fazer  $\alpha=1$  levaria a um erro de  $2,5m$ , o que seria inadmissível no cálculo da carga total da corrente no exemplo citado.

## 6.4 RESISTÊNCIA AO ESCOAMENTO

A perda de carga unitária por atrito é obtida através do uso das equações do movimento uniforme como as de Chézy e Manning. Antoine Chézy propôs sua famosa equação em 1769 e a fórmula de Manning foi proposta primeiro por Gauckler em 1868 (Mahmood [1975] ). Essas equações empíricas foram estabelecidas para escoamento uniforme e permanente; no entanto, têm sido largamente utilizadas para escoamento não uniforme e não permanente com resultados satisfatórios.

Para escoamento permanente de fluidos incompressíveis num canal prismático de profundidade constante, a equação de Manning é usada

$$S_f = \frac{Qn}{C_m R_h A} \quad (6.34)$$

O valor de  $C_m$  é  $1,49$  e  $1,0$  para as unidades inglesas e para as unidades do *SI*, respectivamente;  $Q$  é a vazão na seção transversal;  $R_h$  é o raio hidráulico e  $S_f$  é a declividade da linha de energia;  $n$  é o coeficiente de rugosidade, conhecido como  $n$  de Manning. Embora  $n$ , geralmente, seja uma característica da rugosidade do canal, é conveniente considerá-lo um fator adimensional. Os valores de  $n$  para algumas

superfícies típicas estão na Tabela (6.1) (Vennard [1978] ). A Equação (6.34) deve ter unidades consistentes no sistemas inglês ou no SI.

**Tabela 6.1** Valores médios do coeficiente de rugosidade de Manning para vários materiais de superfície

| Material da superfície  | Manning     |
|---|-------------|
| Canais artificiais (alinhados)                                  |             |
| Aço   | 0,012       |
| Madeira   | 0,012       |
| Concreto (alisado)  | 0,013       |
| Concreto (não alisado)  | 0,019-0,022 |
| Tijolos   | 0,015       |
| Cascalho de argila  | 0,025       |
| Asfalto   | 0,013-0,016 |
| Terra (limpa)   | 0,022       |
| Terra (com vegetação)   | 0,027-0,035 |
| Canais naturais   |             |
| Limpo e reto  | 0,030       |
| Sinuoso com valas e bancos                                      | 0,040       |
| Com valas profundas e com muita vegetação                       | 0,100       |
| Correntes das montanhas   | 0,040-0,050 |
| Correntes maiores (larguras maiores do que<br>30 m na enchente) | 0,025-0,100 |

Esses valores de  $n$ , tomados como adimensionais (o que eles não são: pela Equação (6.34), verifica-se que  $n$  tem as dimensões  $TL^{-1/3}$ ), baseiam-se em medições feitas no Sistema *SI*.

A dificuldade na previsão da resistência ao escoamento ainda existe por estimar-se o coeficiente de Manning para uma situação natural. Infelizmente, um erro relativo do coeficiente de Manning leva a um erro relativo na velocidade ou vazão na mesma magnitude. Sobreestimar  $n$  leva a subestimar a vazão e vice-versa.



## **7. TÉCNICAS NUMÉRICAS USADAS PARA RESOLVER AS EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO NÃO PERMANENTE EM CANAIS**

Muitos fenômenos de grande importância na engenharia hidráulica ocorrem em escoamento não permanente; isto é, a profundidade do escoamento e ou a velocidade do escoamento variam com o tempo. Embora um número limitado de problemas do escoamento não permanente, gradualmente variado possa ser resolvido analiticamente, muitos outros requerem uma solução numérica. Neste capítulo, somente os fenômenos do escoamento gradualmente variado não permanente serão discutidos. Esta terminologia refere-se aos escoamentos em que a curvatura do perfil da onda é suave, ou seja, a mudança da profundidade, com o tempo, é gradual. Exemplos de escoamentos gradualmente variados não permanentes incluem ondas de cheia e ondas geradas pela manobra de estruturas de controle.



Os modelos matemáticos disponíveis para tratar os problemas do escoamento gradualmente variado não permanente podem geralmente ser divididos em duas categorias: (1) modelos hidráulicos que geralmente usam as equações de Saint Venant para resolver os problemas de escoamento gradualmente variado não permanente e (2) modelos hidrológicos que usam as equações de Saint Venant, porém com simplificações.

Entretanto, neste trabalho serão usados métodos numéricos que resolvam as equações que descrevem o modelo dinâmico completo do escoamento gradualmente variado não permanente (Equações de Saint Venant).

Para um canal retangular, a equação da continuidade é

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (7.1)$$

onde

$h$  = profundidade do escoamento

$t$  = tempo

$V$  = velocidade média do escoamento

$x$  = distância longitudinal

e a equação da quantidade de movimento

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -gS_f \quad (7.2)$$

As Equações (7.1) e (7.2) são um conjunto de equações simultâneas que podem ser resolvidas para as duas variáveis desconhecidas  $V$  e  $h$ , dadas as condições iniciais e de contorno.

Assim sendo, as equações de Saint Venant consistem da equação da continuidade

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (7.3)$$

e da equação da quantidade de movimento

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = -S_f \quad (7.4)$$

As equações de Saint Venant formam um sistema de equações diferenciais não lineares em derivadas parciais que não podem ser resolvidas por métodos analíticos, ou, se isto ocorre, somente após simplificações com grandes limitações (Mahmood e Yevjevich [1975] ). As técnicas numéricas mais usadas para solucionar este tipo de equações são: o método MacCormack, o método Lax-Wendroff, o método das Linhas Características, o esquema de Preissman e o método de Elementos Finitos; sendo os três primeiros as técnicas mais utilizadas na modelação matemática do escoamento unidimensional em superfície livre.

Há um grande número e variedade de técnicas numéricas. Algumas podem ser descartadas por serem imprecisas, instáveis ou também por consumir tempo; outras parecem reproduzir soluções relativamente bem. Entretanto, não há ainda uma única resposta para qual método é melhor.

Os métodos têm a finalidade de substituir o domínio real contínuo em um domínio equivalente discretizado, constituído de elementos nos quais as equações são aplicadas. Dessa forma, procura-se obter uma solução numérica aproximada que possibilite a determinação dos valores da profundidade do escoamento  $h$  e da

velocidade média  $V$  e/ou da vazão  $Q$  em pontos discretos do plano  $(x,t)$ , sendo  $x$  a ordenada ao longo do canal e  $t$  o instante da simulação.

Os escoamentos não permanentes em canais ou rios são geralmente modelados como escoamentos unidimensionais mediante o uso das equações de Saint Venant.

## 7.1 MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

Uma técnica numérica muito usada para resolver os problemas do escoamento não permanente consiste na solução das equações diferenciais pelo uso das características, Figura 7.1.

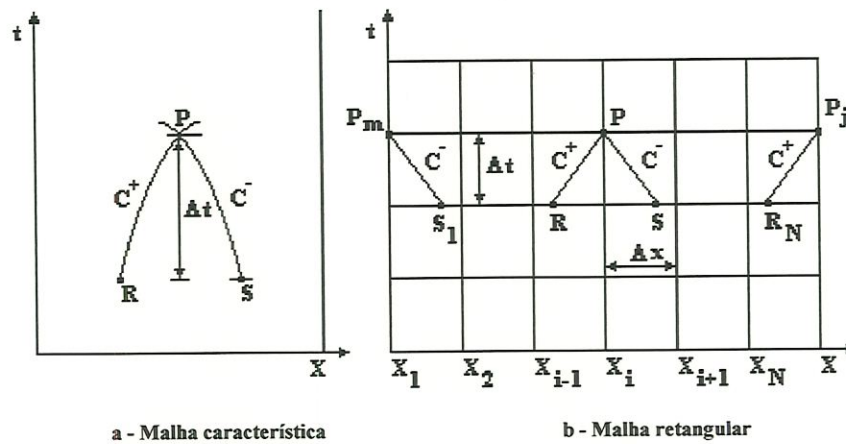


Figura 7.1 Discretização do método das características

Assumindo-se um canal retangular e rearrumando-se as equações da continuidade e da quantidade de movimento, tem-se:

$$L_1 = \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (7.5)$$

$$L_2 = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + gS_f = 0 \quad (7.6)$$

considerando-se uma combinação linear das Equações (7.5) e (7.6), através de um multiplicador  $\lambda$  a ser determinado, tem-se:

$$L = \lambda L_1 + L_2 \quad (7.7)$$

substituindo-se os valores das Equações (7.5) e (7.6) na Equação (7.7), tem-se:

$$L = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + gS_f + \lambda \left( \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

ou

$$L = \left[ \frac{\partial V}{\partial x} (V + \lambda h) + \frac{\partial V}{\partial t} \right] + \lambda \left[ \frac{\partial h}{\partial x} \left( V + \frac{g}{\lambda} \right) + \frac{\partial h}{\partial t} \right] + gS_f \quad (7.8)$$

Na Equação (7.8), o primeiro e o segundo termo são as derivadas totais da velocidade e da profundidade do escoamento ou

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \text{ se } \frac{dx}{dt} = V + \lambda h \quad (7.9)$$

e

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t} \text{ se } \frac{dx}{dt} = V + \frac{g}{\lambda} \quad (7.10)$$

A Equação (7.8) pode ser reescrita como:

$$L = \frac{dV}{dt} + \lambda \frac{dh}{dt} + gS_f \quad (7.11)$$

igualando-se as equações para  $dx/dt$  nas Equações (7.9) e (7.10), obtém-se:

$$V + \lambda h = V + \frac{g}{\lambda} \quad (7.12)$$

e resolvendo-se,

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (7.13)$$

Essas duas raízes são usadas para transformar as Equações (7.5) e (7.6) em um par de equações diferenciais ordinárias sujeitas a restrições, especificadas nas Equações (7.9) e (7.10):

$$\frac{dV}{dt} + \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} = -gS_f \quad (7.14)$$

se

$$\frac{dx}{dt} = V + C \quad (7.15)$$

onde a linha da característica positiva é representada por:

$$C^+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dt} + \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} = -gS_f \\ \frac{dx}{dt} = V + C \end{array} \right.$$

e

$$\frac{dV}{dt} - \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} = -gS_f \quad (7.16)$$

se

$$\frac{dx}{dt} = V - C \quad (7.17)$$

a linha da característica negativa é representada por:

$$C^- \begin{cases} \frac{dV}{dt} - \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} = -gS_f \\ \frac{dx}{dt} = V - C \end{cases}$$

Nas transformações acima, não se fez qualquer aproximação, e as Equações (7.14) e (7.16) são tão válidas como as Equações (7.3) e (7.4). A única diferença é que as Equações (7.3) e (7.4) são válidas no plano  $x-t$ , enquanto que as Equações (7.14) e (7.16) são válidas apenas ao longo das linhas definidas pelas equações (7.15) e (7.17). Essas linhas são denominadas linhas características. Matematicamente, elas dividem o plano  $x-t$  em regiões tais que cada uma pode ter soluções diferentes das da região adjacente, isto é, a solução pode ser descontínua ao longo dessas linhas. Fisicamente, elas marcam o curso de uma perturbação no plano  $x-t$ . As Equações (7.14) a (7.17) podem ser resolvidas usando-se aproximações por diferenças finitas de primeira ordem ou de ordem superior.

O método das características resolve as equações acompanhando as linhas características, ou seja, transforma as equações diferenciais parciais, Equações (7.3) e (7.4), em quatro equações diferenciais ordinárias, Equações (7.14), (7.15), (7.16) e (7.17), que representam com precisão a propagação das perturbações do escoamento ao longo do canal.

Os dois pares de equações diferenciais ordinárias representam as linhas características. A característica positiva propaga as perturbações de montante para jusante e a característica negativa as perturbações de jusante para montante.



Quando o escoamento é subcrítico,  $|u| < c$ , a característica positiva tem uma declividade positiva  $dx/dt$  no plano  $(x,t)$ , enquanto que a característica negativa tem uma declividade negativa  $dx/dt$  no plano  $(x,t)$ , como esquematiza a Figura (7.2a). Quando, entretanto, o escoamento é supercrítico da esquerda para direita,  $u > c$ , ambas as características têm uma declividade positiva no plano  $(x,t)$  (Figura [7.2b] ), embora, quando o escoamento é supercrítico da direita para esquerda,  $-u > c$ , ambas as características tenham uma declividade negativa no plano  $(x,t)$  (Figura [7.2c] ).

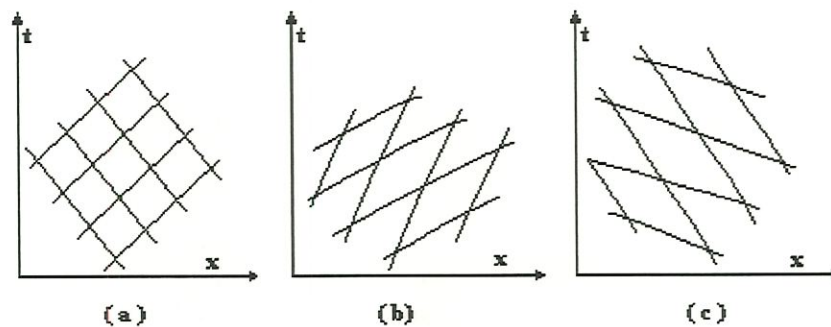


Figura 7.2 Linhas características para escoamentos subcrítico e supercrítico.

O método das linhas características pode ter malha característica ou malha de intervalos especificados. O método de intervalos especificados são mais adequados às aplicações práticas, por terem os pontos de interseção das curvas características coincidindo com os pontos de interesse.

## 7.1.1 CONCLUSÃO DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

1 - Como visto, as Equações (7.14), (7.15), (7.16), e (7.17) podem ser usadas para obter uma solução numérica para as Equações (7.3) e (7.4). Com esse propósito, pode-se empregar o método das características ou de intervalos especificados. No uso do método das características, a posição dos pontos discretos não é fixa no plano  $x-t$ ; em vez disso, a posição desses pontos é determinada à medida que a solução progride. No método dos intervalos especificados, a posição dos pontos da rede é especificada de acordo com a necessidade do projeto.

2 - As equações desenvolvidas são válidas para os pontos internos da malha de cálculo. Nos pontos externos, as equações devem ser utilizadas juntamente com as equações de contorno.

3 - Como desvantagem, o método das características não é propício para sistemas em que a geometria do canal seja muito irregular e ou para escoamento bruscamente variado, por causa da convergência das curvas características. Para canais naturais (com trechos irregulares), são necessárias várias seções de cálculo, evitando-se com isto erros numéricos oriundos das interpolações das curvas características.

4 - Liggett e Cunge (1975), citado por Wylie (1970), sugerem o uso do método das características para verificar a precisão de outros métodos, e também para a solução de problemas em laboratório.

As conclusões mais importantes dos métodos das características, segundo Wylie (1970), são as seguintes:

1 – A condição de Courant de estabilidade é sempre satisfeita para a malha característica, enquanto que para os esquemas de intervalos especificados o usuário terá sempre que verificar.

2 - A discretização da malha característica gasta menor tempo computacional nos cálculos do que a malha dos intervalos especificados.

3 - Quanto maior a interpolação utilizada pela malha de intervalos especificados, maior o erro envolvido na solução.

4 - No método das características, cada seção do canal é analisada separadamente em cada instante. Portanto, esse método é geralmente utilizado na obtenção das condições de contorno de alguns esquemas de diferenças finitas.

## 7.2 OUTROS MÉTODOS NUMÉRICOS

a - Métodos das diferenças finitas de esquemas explícitos

- Esquema MacCromack

- Esquema Lax-Wendroff

b - Métodos das diferenças finitas de esquema implícito

- Preissman

c- Métodos dos elementos finitos

## 7.2.1 DIFERENÇAS FINITAS

Os esquemas numéricos de diferenças finitas, são em geral, classificados segundo a discretização no tempo em explícitos e implícitos. Os esquemas explícitos usam informações do tempo  $t$  para calcular as variáveis no tempo  $t+1$ , e assim é possível explicitar a incógnita. Os esquemas implícitos usam as informações do tempo  $t$  e  $t+1$  para calcular as variáveis no tempo  $t+1$  pela solução de um sistema de equações.

A discretização dos termos contínuos da equação diferencial por pontos na região de solução pode ser a mais variada possível; no entanto, para a equação em estudo e o esquema escolhido, devem-se verificar as propriedades numéricas do esquema, ou seja, estabilidade, consistência e convergência.

No esquema explícito, a condição de Courant é essencial para a estabilidade. Essa condição é um fator limitante do tempo, o qual, a depender do fenômeno, pode exigir um processo exaustivo de cálculo. Numa manobra rápida onde são necessários intervalos de tempo bem pequenos para que haja melhor representatividade do fenômeno, e onde as variáveis mudam rapidamente com o tempo, a limitação de intervalo pequeno do tempo não ocasiona exaustivos cálculos. Os esquemas implícitos são incondicionalmente estáveis e, podem usar intervalos de tempo maiores. No esquema implícito, o fator limite é a precisão dos resultados, pois os intervalos de tempo devem ser escolhidos de modo que representem bem o fenômeno e que não provoquem erro numérico na solução. Além disso, deve-se levar em conta o número de seções por comprimento de onda para que os referidos erros numéricos não deturpem os resultados obtidos.

## 7.2.2 ESQUEMAS EXPLÍCITOS

A grande limitação do uso de esquemas explícitos é a condição de estabilidade, chamada condição de Courant

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{V \pm c} \quad (7.18)$$

Essa condição limita o uso do esquema numérico a pequenos intervalos de tempo, exigindo-se um processo exaustivo de cálculo.

Não é possível aumentar em demasia o espaçamento  $\Delta x$ , para permitir um  $\Delta t$  maior, já que a precisão da solução depende do número de seções por comprimento de onda. Quanto menor esta relação, maior serão os erros numéricos de amortecimento e dispersão.

Dentre os métodos explícitos, citam-se; 1) Esquema MacCormack, 2) Esquema Lax-Wendroff.

Para proceder à solução numérica das Equações (7.3) e (7.4), será demonstrada a discretização do esquema explícito de MacCormack.

## 7.2.3 MÉTODO DE MacCormack

Vários métodos numéricos, tais como: PREISSMAN e ABBOT, têm apresentado bons resultados na modelação de escoamentos fluviais. Ambos os

métodos são implícitos no tempo e ponderados espacialmente. Os métodos implícitos tornaram-se muito populares, porque eles são estáveis incondicionalmente; isto é, o tempo computacional pode ser selecionado independentemente do tamanho do espaço da malha.

Recentes trabalhos mostram que o intervalo de tempo nos métodos implícitos apresentam precisão igual à dos métodos explícitos, especialmente se uma onda de choque é formada. Então, no caso dos escoamentos torrenciais, ou onde as descontinuidades geométricas provocam a mudança localizada do regime, os esquemas implícitos não têm bom comportamento devido às instabilidades numéricas geradas pela linearização dos termos convectivos das equações básicas.

A simulação do escoamento hidrodinâmico torrencial nos canais naturais através do uso das equações de Saint Venant pode ser efetuada com o emprego da técnica de discretização em diferenças finitas explícitas de MacCormack, que se constitui num esquema numérico de alta acuracidade e permite o tratamento de canais com altas declividades e grandes variações geométricas, com ocorrência de ressaltos hidráulicos e pontos críticos.

Lax e Wendroff (1960) desenvolveram um método que deu origem ao método MacCormack, de segunda ordem, o qual pode ser usado na simulação de escoamentos bruscamente variado. Chaudhry et al. (1987, 1989, 1990, 1991) e Navarro (1992) desenvolveram pesquisas sobre a aplicação do método numérico MacCormack na simulação de escoamentos em canais regulares onde ocorrem fenômenos como: ressaltos hidráulicos e variações de fundo. Esse esquema fundamenta-se na aplicação de diferenças finitas de segunda ordem de acuracidade, como forma de representar as ondas de choque do fenômeno.

### 7.2.3.1 DISCRETIZAÇÃO NUMÉRICA

A discretização numérica do esquema de MacCormack considera a malha espaço-tempo conforme indica a Figura (7.3). O canal é discretizado através das seções transversais distanciadas de  $\Delta x$ . O domínio do tempo é dividido em intervalos  $\Delta t$ .

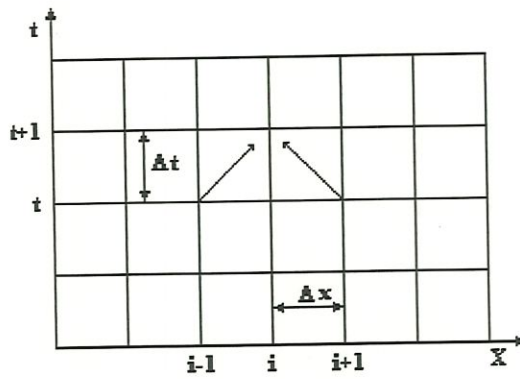


Figura 7.3 Esquema de diferenças finitas

A seguir é apresentado o esquema numérico:

$$G_t + F_x + S = 0 \quad (7.19)$$

em que

$$G = \begin{bmatrix} h \\ hV \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} Vh \\ hV^2 + \frac{gh^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghS_f \end{bmatrix}$$

onde se tem o passo **preditor**

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{G_i^p - G_i^k}{\Delta t} \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_i^k - F_{i-1}^k}{\Delta x} \quad (7.21)$$

Substituindo-se estas diferenças dentro da Equação (7.4), obtém-se:

$$G_i^p = G_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_i^k - F_{i-1}^k) - \Delta t S_i^k \quad (7.22)$$

sendo,  $2 \leq i \leq N$



e o passo corretor

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{G_i^c - G_i^k}{\Delta t} \quad (7.23)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i+1}^p - F_i^p}{\Delta x} \quad (7.24)$$

$$G_i^c = G_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^p - F_i^p) - \Delta t S_i^p \quad (7.25)$$

sendo,  $1 \leq i \leq (N-1)$

O valor de  $G_i$  em um tempo desconhecido  $k+1$  é dado por

$$G_i^{k+1} = \frac{1}{2} (G_i^p + G_i^c) \quad (7.26)$$

### 7.2.3.2 VISCOSIDADE ARTIFICIAL

Como os métodos de ordem elevada podem gerar erros numéricos derivados do método de discretização, o que ocasiona oscilações na solução (nas variáveis  $h$  e  $Q$ ), recomenda-se minimizá-los pelo emprego da viscosidade artificial ou refinamento da malha  $x-t$ . Para este propósito, foi adotado o procedimento apresentado por Warning e Hyet (1974), Jameson et al. (1981), e Gharangik e Chaudhry (1991). Esta correção é dada por:

$$\varepsilon_j = \frac{|h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}|}{|h_{i+1}| + |2h_i| + |h_{i-1}|} \quad (7.27)$$

$$\varepsilon_{i+1/2} = k \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_i) \quad (7.28)$$

$$\varepsilon_{i-1/2} = k \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) \quad (7.29)$$

onde  $k$  é o coeficiente de dissipação ( $k$  o coeficiente de amortecimento varia entre 0.5 e 3), e deve ser escolhido o menor valor possível (Chaudhry et al. [1991] ), mas que aplaine as oscilações de alta frequência.

As variáveis calculadas são, então, modificadas. Levando-se em conta esta teoria, o vetor  $G$  corrigido fica assim:

$$\alpha_i = \varepsilon_{i+1/2}(G_{i+1} - G_i) - \varepsilon_{i-1/2}(G_i - G_{i-1}) \quad (7.30)$$

$$G_i = G_i + \alpha_i \quad (7.31)$$

### 7.2.3.3 CONCLUSÕES DO ESQUEMA MacCormack

1) - A aplicação do método de discretização numérica de MacCormack conduz a bons resultados na simulação dos escoamentos variáveis no tempo em canais, notadamente naqueles onde há manobra de controle e ocorrência de ressaltos hidráulicos. Esse comportamento é superior ao observado nos esquemas tradicionais de diferenças finitas, frequentemente instáveis quando a condição de escoamento predominante é torrencial.

2) - Quando é atendida a condição de Courant, a estabilidade e convergência do método são garantidas.

3) - Embora o tempo computacional gasto para o processamento dos dados seja relativamente maior do que o tempo utilizado nos modelos numéricos implícitos, os resultados apresentados têm boa precisão.

### 7.2.4 MÉTODO LAX-WENDROFF

Para a demonstração do método, serão introduzidas novas variáveis para os grupos de parâmetros que aparecem nas equações da continuidade e da quantidade de movimento:

$$hV = A' \quad (7.32)$$

$$hV^2 + \frac{gh^2}{2} = B' \quad (7.33)$$

e

$$-ghS_f = C' \quad (7.34)$$

Em termos de novas variáveis, as equações simplificam-se em

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial A'}{\partial x} = 0 \quad (7.35)$$

$$\frac{\partial A'}{\partial t} + \frac{\partial B'}{\partial x} = -C' \quad (7.36)$$

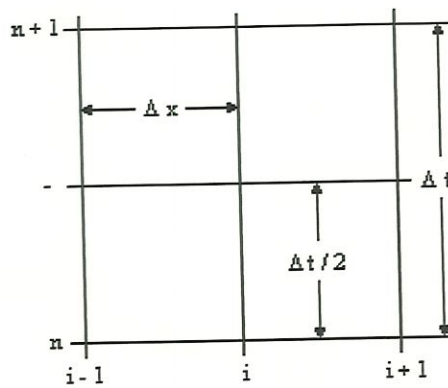


Figura 7.4 Sistema de malha de dois passos para o esquema Lax-Wendroff

Em seguida, formular-se-á o método numérico de Lax-Wendroff para a resolução destas equações. Esse esquema introduz um passo de tempo intermediário, que será designado por  $(-)$ . Como o passo intermediário se localiza na metade do tempo entre  $n$  e  $n+1$ , representar-se-á o primeiro passo de  $n$  até  $(-)$  para a equação da continuidade, na forma de diferença finita:

$$\frac{h_i^- - h_{i,n}}{\Delta t/2} + \frac{A'_{i+1,n} - A'_{i-1,n}}{2\Delta x} = 0 \quad (7.37)$$

No método de Lax-Wendroff,  $h_{i,n}$  é substituído por

$$h_{i,n} = \frac{1}{2}(h_{i+1,n} + h_{i-1,n}) \quad (7.38)$$

então o valor para  $h_i^-$  é dado por

$$h_i^- = \frac{1}{2}(h_{i+1,n} + h_{i-1,n}) - \frac{\Delta t}{4\Delta x}(A'_{i+1,n} - A'_{i-1,n}) \quad (7.39)$$

Correspondentemente, o passo intermediário para  $A_i^-$  da equação do movimento (Equação [7.36]), é

$$A_i^- = \frac{1}{2}(A'_{i+1,n} + A'_{i-1,n}) - \frac{\Delta t}{4\Delta x}(B'_{i+1,n} - B'_{i-1,n}) - \frac{\Delta t}{2}C'_{i,n} \quad (7.40)$$

Complementando-se este passo de tempo, calcula-se

$$V_i^- = \frac{A_i^-}{h_i^-} \quad (7.41)$$

Com os valores de  $h_i^-$  e  $V_i^-$  obtidos no passo intermediário obtêm-se os valores correspondentes de  $B_i^-$ , e  $C_i^-$  calculados pelas Equações (7.33) e (7.34).

No segundo passo, procede-se de  $n$  até  $n+1$ , utilizando-se as variáveis do passo intermediário para as derivadas espaciais. O segundo passo para a equação da continuidade é representado por

$$\frac{h_{i,n+1} - h_{i,n}}{\Delta t} + \frac{A_{i+1}^- - A_{i-1}^-}{2\Delta x} = 0 \quad (7.42)$$

Reescrevendo-se esta equação para  $h_{i,n+1}$

$$h_{i,n+1} = h_{i,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (A_{i+1}^- - A_{i-1}^-) \quad (7.43)$$

Similarmente, obtêm-se o valor de  $A'_{i,n+1}$  através da equação da quantidade de movimento

$$A'_{i,n+1} = A'_{i,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (B_{i+1}^- - B_{i-1}^-) - C_i^- \Delta t \quad (7.44)$$

No cálculo de  $V_{i,n+1}$ , serão usados  $A'_{i,n+1}$  e  $h_{i,n+1}$ , encontrando-se desta forma a velocidade no novo nível de tempo. A integração continua sucessivamente da mesma maneira de  $n+1$  a  $n+2$ . O procedimento tem continuidade até o limite de tempo definido pelo fenômeno físico.

Uma consideração especial é necessária no contorno de montante e jusante, pois a diferença central de  $A'$  e  $B'$  não é possível. No contorno de montante onde  $i=1$ , é usado o esquema progressivo para obter  $h_i^-$  no passo intermediário:

$$h_i^- = h_{i,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (A'_{2,n} - A'_{1,n}) \quad (7.45)$$

Para o segundo passo em  $n+1$ , o valor de  $h$  a montante é:

$$h_{1,n+1} = h_{1,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A'^-_{2,n} - A'^-_{1,n}) \quad (7.46)$$

O valor de  $h$  no contorno de jusante é estabelecido pelo nível do canal, que é a informação de entrada para a análise da pesquisa.

Em cada intervalo de tempo  $\Delta t$ , para que seja atendida a condição de estabilidade do método, é verificada a condição de Courant.

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|V| + \sqrt{gh}} \quad (7.47)$$

## 7.2.5 CONCLUSÃO DOS MÉTODOS EXPLÍCITOS

A grande limitação dos esquemas explícitos é a condição de estabilidade de Courant.

A vantagem do método explícito é a facilidade de formulação e programação para uso em computador. Assim sendo, quando for necessário simular transientes com intervalos de tempo pequeno, um esquema explícito pode ser usado.

Liggett e Cunge (1975), citados por Tucci (1980), não recomendam o uso de esquemas explícitos para problemas de propagação em redes de esgoto.

## 7.2.6 ESQUEMAS IMPLÍCITOS

O procedimento implícito oferece vantagem particular quando se trata de transientes lentos em canais naturais. Por isso, tem sido usado extensivamente para a análise de cheias ao longo de um rio.

Os esquemas implícitos têm formulação linear e não linear. São também classificados segundo a malha numérica. Stoker (1957) apresentou um esquema implícito com quatro pontos, aplicando-se em problemas de cheia, [citado por Tucci (1980)]. Preissmann (1961) usou uma formulação linear de esquema implícito, que tem sido largamente usado, [citado por Tucci (1980)]. Abbott e Ionescu (1967) e Vreugdenhill (1973), [citados por Tucci (1980)], usaram um esquema implícito centrado no espaço, com vazões e níveis calculados em seções diferentes. Baltzer e Lai (1968), Amein e Fang (1970) e Fread (1976) usaram formulações implícitas não lineares, [citados por Tucci (1980)].



Os esquemas implícitos têm sido largamente aplicados, tanto em problemas de propagação de onda de cheia, como nos devidos à oscilação de maré. As limitações desses esquemas são menores, permitindo intervalos de tempo maiores, solução de problemas mais complexos e generalização de sua formulação. A maioria dos programas de computador de uso privado ou divulgados, geralmente, usa esquemas implícitos.

A diferença entre os métodos diferencia segundo a malha e a ponderação das variáveis no cálculo dos termos das equações. E, também, variam quanto à linearidade e não linearidade das equações resultantes. A escolha de um determinado esquema está relacionada com a eficiência da solução e acuracidade dos resultados a serem obtidos.

A seguir, será descrita a solução das equações de escoamento por um dos esquemas implícitos utilizados.

### **7.2.7 ESQUEMA DE PREISSMANN**

As Equações (7.3) e (7.4) não podem ser resolvidas analiticamente, mas podem ser resolvidas por um método de aproximação numérica. O esquema Preissmann é o método implícito mais largamente usado. Foi introduzido por Preissmann (1961), [citado por Tucci (1980)], e tem sido adaptado por vários pesquisadores.

Os métodos implícitos de diferenças finitas foram desenvolvidos por causa das limitações impostas no espaço do tempo  $\Delta t$ , quando se usam esquemas explícitos. Para proceder à solução numérica das Equações (7.3) e (7.4), pode ser escolhido o método com diferenças finitas, utilizando-se o esquema implícito de Preissmann.

Considerando-se que a função  $f(x,t)$  representa qualquer variável referente ao escoamento, o esquema de Preissmann calcula o valor desta função e de suas derivadas parciais no ponto médio da malha de discretização, a qual está limitada pelos pontos  $(j, j+1)$ , (considerando  $\psi = 0,50$ ). Desta forma, a função  $f(x,t)$  e suas derivadas no tempo e no espaço ficam:

Os esquemas do tipo quatro pontos utilizam quatro valores para discretizar os termos das equações. De forma geral, podem ser formulados da seguinte forma:

$$f(x,t) = \frac{\theta}{2}(f_{i+1}^{j+1} + f_i^{j+1}) + \frac{1-\theta}{2}(f_{i+1}^j + f_i^j) \quad (7.48)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \theta \frac{f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta x} \quad (7.49)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta t [f_{i+1}^{j+1} - f_{i+1}^j + f_i^{j+1} - f_i^j] \quad (7.50)$$

onde  $\theta$  = coeficiente de ponderação no tempo ( $0 \leq \theta \leq 1$ );  $\psi$  = coeficiente de ponderação no espaço;  $\Delta x$  = incremento no espaço;  $\Delta t$  = incremento no tempo;  $t$  = índice que representa a discretização temporal;  $j$  = índice que representa a discretização espacial,  $x$  = espaço e  $t$  = tempo. O esquema de diferença é numericamente estável quando  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ . Para  $\theta < \frac{1}{2}$  é sempre instável.

Usando-se o método de diferenças finitas, as Equações (7.3) e (7.4) podem ser reescritas como um conjunto de equações algébricas lineares para cada duas grades de pontos adjacentes no plano  $x-t$ . Segundo Liggett e Cunge (1975), introduzindo-se o esquema implícito de Preissmann, tem-se:

$$A_1 q_j + B_1 q_{j+1} + C_1 z_j + D_1 z_{j+1} + E_1 = 0 \quad (7.51)$$

$$A_2 q_j + B_2 q_{j+2} + C_2 z_j + D_2 z_{j+1} + E_2 = 0 \quad (7.52)$$

onde  $q_j$  e  $y_j$  correspondem a vazão e a profundidade no tempo  $i$  a  $(i+1)$  na grade de ponto  $j$ ; enquanto que  $q_{j+1}$  e  $y_{j+1}$  correspondem a grade de ponto  $j+1$ ; e  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , e  $E$  são coeficientes calculados com valores conhecidos no tempo de passo  $i$ . Cada grade de ponto tem dois valores desconhecidos,  $q$  e  $y$ . As expressões que representam estes coeficientes podem ser encontradas em Mahmood e Yevjevich (1975).

Nesse caso, as equações resultantes são lineares, resultando em um sistema de equações cujos coeficientes podem ser colocados na forma de uma matriz pentadiagonal. Para a solução dessa matriz utiliza-se o método Double Sweep.

## 7.2.8 CONCLUSÃO DOS MÉTODOS IMPLÍCITOS

Os esquemas implícitos apresentam vantagens sobre os outros esquemas, pois permitem um intervalo de tempo de cálculo ( $\Delta t$ ) maior, melhorando a eficiência computacional. Os esquemas explícitos são limitados pela condição de estabilidade, que é função da celeridade das ondas gravitacionais. Quanto maior esta celeridade, menor deve ser a proporção  $\Delta t/\Delta x$ . Os métodos implícitos estão limitados pela precisão da solução numérica.

A escolha de um determinado esquema é função de suas características numéricas. Entre os esquemas implícitos geralmente estáveis, o critério baseia-se na precisão da solução. A estabilidade de um esquema não garante um bom resultado.

Pode ocorrer o contrário: ao forçar a estabilidade do esquema, pode-se provocar erros na solução numérica.

### 7.2.9 ELEMENTOS FINITOS

Como visto, no método das diferenças finitas, a região de interesse é representada por uma série de pontos ou nós, e a relação entre os valores nestes pontos é geralmente obtida através de expansão truncada em série de Taylor. Por outro lado, no método dos elementos finitos, a relação entre valores nodais é obtida por meio de polinômios de interpolação, válidos para cada sub-região ou elemento.

De uma maneira geral, pode-se afirmar que a teoria básica do método das diferenças finitas é mais simples, consistindo apenas na substituição das derivadas parciais da equação contínua por meio de fórmulas discretas de diferenças, e na aplicação da equação resultante em um número finito de pontos da região. Isso dá origem a um sistema de equações algébricas cuja solução fornece os valores desejados. A discretização é, usualmente, feita com auxílio de uma malha com espaçamento constante, o que pode introduzir aproximações de geometria. Embora malhas irregulares possam ser empregadas, e contornos curvos possam ser mapeados para facilitar a discretização, tais procedimentos envolvem complicações adicionais que ofuscam a simplicidade matemática e computacional do método.

No método dos elementos finitos, a discretização do contínuo é feita com o auxílio de elementos que podem ter formas geométricas diversas, o que permite uma melhor representação do problema. Os polinômios que interpolam a variação da função incógnita, dentro de cada elemento, podem ser lineares ou de ordem mais alta (na prática, elementos quadráticos e cúbicos também são usuais). Isso dá uma maior flexibilidade ao método; a contrapartida, porém, é uma formulação matemática mais

complexa, na qual o erro cometido pela aproximação em cada elemento é minimizado por um método variacional ou de resíduos ponderados.

## **8. COMPARAÇÃO DA ESTABILIDADE, CONVERGÊNCIA E CONSISTÊNCIA**

### **8.1 INTRODUÇÃO**

Deveria haver um conjunto formal de critério disponível para decidir qual método é melhor. Infelizmente, isso é impossível. No entanto, podem-se usar alguns indicadores ou pelo menos mostrar quais elementos, provavelmente, influenciam a escolha.

Para se ter confiança em um certo esquema numérico de aproximação, no sentido da garantia de que a solução obtida com o esquema numérico representa uma aproximação razoável da solução exata do problema matemático, é necessário que o esquema utilizado apresente propriedades de consistência, convergência e estabilidade.

Essas propriedades estão interrelacionadas na solução numérica e são funções dos erros envolvidos.

## 8.2 ESTABILIDADE

Estabilidade é uma propriedade relacionada, basicamente, com o esquema de integração no tempo. Quando um método numérico é instável, uma pequena perturbação, tal como um erro de arredondamento ou um erro de truncamento, aumentará com o tempo à medida que o processo de cálculo avança. Frequentemente, essa amplificação é de ordem exponencial e os erros crescem além de alguns limites razoáveis após um pequeno número de passos do processo computacional.

Ao desenvolver o sistema de equações, obter-se-ia a solução numérica exata  $Y(x,t)$ , se fosse possível fazer os processamentos até um número infinito de casas decimais. No entanto, na prática, cada cálculo é feito com um número finito de casas decimais ou de algoritmos significativos, um processo que acaba introduzindo um *erro de arredondamento* toda vez que o cálculo é efetuado, significando que a solução numérica obtida não seja  $Y(x,t)$ , mas  $Y'(x,t)$ . O valor de  $Y'(x,t)$  é chamado de solução numérica e a diferença  $R_{x,t} = Y - Y'$  é chamada de *erro de arredondamento*.

Sendo  $Y(x,t)$  a solução exata do modelo numérico representado pela equação  $F_{x,t}$ , tem-se que  $F_{x,t}(Y) = 0$ . Se  $Y(x,t)$  for substituído pela solução exata do modelo matemático  $Y_o(x,t)$  nos pontos da malha de cálculo das equações de diferenças, então o valor de  $F_{x,t}(Y_o) = \delta_{x,t}$  é chamado de *erro de truncamento* no ponto  $(x,t)$  relativo à equação  $F_{x,t}$ .

Na prática, o *erro de arredondamento* gerado pelos atuais microcomputadores é extremamente pequeno, e estudos neste sentido indicam que ele é menor que o *erro de discretização*.

É bastante óbvio que um esquema instável não pode ser usado. Os esquemas estáveis podem ser divididos em duas categorias:

(1) Condicionalmente estável, usualmente com um tempo  $\Delta t$  limitado pela condição Courant,  $\Delta t < \Delta x / (|V| \pm C)$ ,  $C = \sqrt{gA/B}$ .

Para os esquemas explícitos, de forma geral, a condição ideal é que a condição de Courant ocorra em cada passo de cálculo, ou seja,

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{|V| \pm C} \quad (8.1)$$

para que não ocorra dispersão ou dissipação.

Em caso de canais onde o termo de atrito (termo não linear) e as contribuições laterais não são tão pequenos, essa condição passa a ser necessária, mas nem sempre suficiente. Assim, Wylie (1970) propôs o seguinte critério na seleção do intervalo de tempo  $\Delta t$ :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \sqrt{1 - \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{gS_f}{V} + \frac{q}{A} \right]} \quad (8.2)$$

Outro parâmetro limitante é o número de seções por comprimento de onda simulada  $L/\Delta x$ . Esse número deve ser pelo menos maior que 10 para que se obtenha uma precisão razoável. À medida que este número cresce, melhora a precisão da solução numérica.



(2) Incondicionalmente estável (esquemas implícitos) por permitir um espaço de tempo  $\Delta t$  arbitrário.

A estabilidade dos esquemas implícitos está relacionada com o erro de arredondamento. Não existe uma teoria geral para determinar as condições de estabilidade para a equação diferencial parcial não linear.

Uma versão linear das equações de Saint Venant tem sido utilizada para a análise de estabilidade por meio do método de Von Neumann ((Abbott e Ionescu [1967]); (Liggett e Cunge [1975]); Fread (1974); Vreugdenhill [1973], citados por Tucci (1980)).

A análise pelo método de Von Neuman é feita por expansão em série de Fourier do erro que cresce com o tempo. Esta análise baseia-se numa formulação linear das equações de escoamento gradual, portanto tem limitações. Os resultados são indicadores, que servem de guia no uso do esquema numérico.

Um dos efeitos dos erros numéricos na solução do movimento da onda em canais é avaliado pela diferença de amplitude da onda obtida numericamente e a solução verdadeira, que é chamada de amortecimento numérico e real. A amplitude da onda na solução numérica pode ser maior ou menor que a real. A diferença entre a velocidade de propagação da solução numérica e verdadeira é frequentemente avaliada no sentido de avaliar os erros numéricos. Este efeito devido a velocidade é chamado de dispersão

Fread ( 1974) obteve as proporções

$$R_1 = \frac{\textit{amortecimento analitico}}{\textit{amortecimento numerico}}$$

e

$$R_2 = \frac{\textit{velocidade analitica}}{\textit{velocidade numerica}}$$

os valores obtidos são uma estimativa, que permite ter uma ordem de grandeza para a discretização. O valor  $\theta$  (usado no cálculo de  $R_1$  e  $R_2$ ) próximo de  $0,5$  permite uma solução numérica mais precisa, mas sujeita a oscilações, enquanto que próximo a  $1,0$  a solução apresenta mais erros numéricos mas é mais estável.

A solução analítica é obtida pela série de Fourier, e a numérica, pelo uso do esquema numérico e a substituição de formas discretas da série de Fourier.

### 8.3 CONSISTÊNCIA

A consistência está relacionada com a aproximação do sistema contínuo de equações por um sistema discreto. Um esquema de diferenças finitas é dito consistente quando, ao refinarem-se as aproximações se tornam matematicamente equivalentes às equações diferenciais originais. Isso significa que, quando os incrementos espacial e temporal tendem a zero, o *erro de truncamento* obtido na expansão da solução aproximada por série de Taylor tende a zero. Portanto, o esquema de diferenças finitas é dito consistente com o sistema de equações diferenciais parciais, se o *erro de truncamento* em um ponto qualquer  $(x,t)$  tender a zero, e quando as dimensões da malha de cálculo tenderem a zero, ou seja,  $\Delta t \Rightarrow 0 \Delta x \Rightarrow 0$ .

### 8.4 CONVERGÊNCIA

Convergência é a condição em relação à qual a solução do esquema aproximado tende para a solução exata da equação diferencial, à medida que se

diminuem os incrementos espacial e temporal. Portanto, chamando-se de  $Y_o(x,t)$  a solução exata no ponto  $(x,t)$  e  $Y(x,t)$  a solução numérica no mesmo ponto, o esquema é convergente quando o erro de discretização  $W(x,t) = Y_o(x,t) - Y(x,t)$  tende para zero, em qualquer ponto  $(x,t)$ , onde os incrementos espacial e temporal se aproximarem de zero.

Seja  $Y_o(x,t)$  a solução exata do modelo matemático representado por equações diferenciais parciais e seja  $Y(x,t)$  a solução exata do modelo numérico utilizado. A diferença  $Y_o(x,t) - Y(x,t)$  é chamada de *erro de discretização*, e sua magnitude depende das dimensões da malha de cálculo  $(\Delta x, \Delta t)$  e do número de termos na série de diferenças usada para aproximar as derivadas. O esquema de diferenças finitas é convergente se, para qualquer ponto da malha de cálculo  $(x,t)$ ,  $Y(x,t)$  tender a  $Y_o(x,t)$  e quando  $\Delta x$  e  $\Delta t$  tenderem a zero.

## 8.5 CONCLUSÃO

Princípios que devem ser considerados no roteiro de programação:

- 1 - Usar o método das linhas características para problemas de laboratório ou para verificar a precisão de outros métodos.
- 2 - Usar o método explícito quando é necessário desenvolver rapidamente um novo programa para simular um fenômeno que ocorra em curto espaço de tempo.
- 3 - Em termos práticos, as condições de estabilidade, consistência e convergência ficam limitadas inicialmente pelo próprio fenômeno físico: o incremento de tempo  $\Delta t$  da malha de cálculo deve ser sempre limitado à evolução do fenômeno transiente. Se o tempo de manobra, que altera as condições iniciais de escoamento,

provocando o transiente, é igual a  $\Delta t_m$ , o incremento de tempo da malha de cálculo fica limitado à condição  $\Delta t \leq \Delta t_m$ , para que a manobra possa ser adequadamente considerada.

4 - Não usar o método explícito para sistemas de esgoto.

5 - Usar o método implícito para problemas de propagação de cheia, porém verificar a possibilidade de ocorrência de descontinuidade que, provavelmente, aparece. No caso de descontinuidade, sugere-se o método explícito de MacCromack.

6 - Quando analisar um programa, tomar como um critério a aplicabilidade dele para vários fenômenos (problemas) que possam ocorrer. Não tomar como base uma decisão fundamentada num fator, tal como o menor tempo computacional (o cálculo pode mudar) ou “maior precisão” (algumas vezes isto não melhora em nada).

7 - Não aceitar algum pacote sem conhecer o seu processo de avaliação.

## **9. TESTES PRELIMINARES DOS MÉTODOS NUMÉRICOS EM UM CANAL RETANGULAR CUJA CONDIÇÃO DE CONTORNO A JUSANTE É UMA SENÓIDE**

### **9.1 APRESENTAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO**

Com a finalidade de verificar a eficiência dos algoritmos desenvolvidos para os métodos das Características, MacCormack, e Lax-Wendroff, os quais serão usados na simulação da superfície da água em queda livre em um canal retangular, testaram-se esses esquemas numéricos em um modelo que tem como condição de contorno a jusante, a profundidade variando segundo uma senóide com o tempo, cujos resultados estão representados em gráfico e tabela [Roberson e Crowe (1997)].

O esquema numérico desenvolvido para o escoamento não permanente com superfície livre, em canal retangular, tendo, como condição de contorno a jusante, uma senóide, é demonstrado através da equação da continuidade

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Vh) = 0 \quad (9.1)$$

e da equação da quantidade de movimento

$$\frac{\partial}{\partial t}(hV) + \frac{\partial}{\partial x}\left(hV^2 + \frac{gh^2}{2}\right) = \frac{C_f V|V| P}{2 B} \quad (9.2)$$

onde:

$h$ =profundidade;

$V$ =velocidade média do escoamento em determinada seção, e em determinado instante;

$P$ =perímetro;

$C_f$ =coeficiente de Chezy;

$B$ =largura do canal;

$x$ =comprimento da seção do canal;

$t$ =tempo;

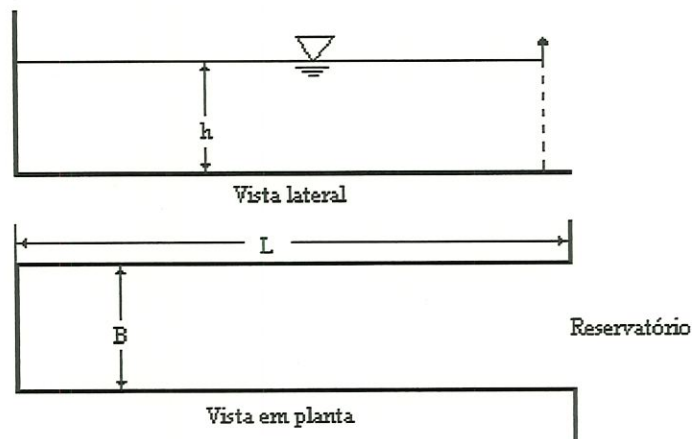


Figura 9.1 Canal retangular, cuja condição de contorno no reservatório, é uma senóide.

Dados para análises preliminares dos métodos das Características, Lax-Wendroff, e MacCormack, aplicados em um escoamento não permanente, em um canal de seção retangular.

Dados do escoamento:

$h$  (profundidade inicial)=5m;  
 $L$  (comprimento do canal)=50m;  
amplitude=0.5;  
frequência=0.1;  
 $C_f$ (Coeficiente de Chezy)=0.005;  
 $V$  (velocidade inicial)=0;  
 $t$ (tempo limite)=100s.

Condições iniciais:

$h(x,0)=5m$ ;  
 $V(x,0)=0$ .

Condições de contorno:

$h(50,t)=5+amp*\text{sen}(freq*tempo)$ ;  
 $V(0,t)=0$ .

Para facilitar a discretização dos métodos numéricos, relacionaram-se grupos de parâmetros a novas variáveis; portanto:

$$hV = A_{Lax}$$

$$hV^2 + \frac{gh^2}{2} = B_{Lax}$$

e

$$\frac{C_f V |V|}{2} \left( \frac{P}{W} \right) = C_{Lax}$$

Em termos das novas variáveis, as equações (9.1) e (9.2) simplificam-se em:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial A_{Lax}}{\partial x} = 0 \quad (9.3)$$

e

$$\frac{\partial A_{Lax}}{\partial t} + \frac{\partial B_{Lax}}{\partial x} = -C_{Lax} \quad (9.4)$$

Utilizando-se o método de Lax-Wendroff para a discretização das Equações (9.3) e (9.4), seguir-se-ão estas duas etapas:

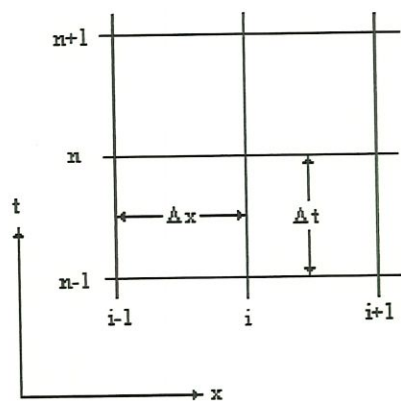


Figura 9.2 Definição do sistema da malha para as equações de diferença finita.



1) 1º Passo: Procede-se do intervalo de tempo  $n$  a  $n+1/2$  [Figura (9.2)].

Para inicializar o processo iterativo, usam-se os valores das condições iniciais para o cálculo de  $A_{Lax}$ ,  $B_{Lax}$  e  $C_{Lax}$ . Nas iterações seguintes, até atingir o tempo limite de  $100s$  adotado para a análise do escoamento não permanente, utilizam-se os valores de  $A_{Lax}^{2º\ passo}$ ,  $B_{Lax}^{2º\ passo}$ , e  $C_{Lax}^{2º\ passo}$  obtidos no 2º passo, ou seja, os valores do tempo anterior.

a) Da equação da continuidade, calcula-se:

$$h_i^{1º\ passo} = \frac{1}{2} \left( h_{i+1,n}^{2º\ passo} + h_{i-1,n}^{2º\ passo} \right) - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left( A_{Lax_{i+1,n}}^{2º\ passo} - A_{Lax_{i-1,n}}^{2º\ passo} \right) \quad (9.5)$$

Através da equação da continuidade, obtêm-se os valores das profundidades  $h$ , em todas as seções estabelecidas, para o intervalo de tempo intermediário ( $n$  a  $n+1/2$ ), os quais serão utilizados no intervalo de tempo ( $n$  a  $n+1$ ).

b) Da equação da quantidade de movimento, calcula-se:

$$A_{Lax_i}^{1º\ passo} = \frac{1}{2} \left( A_{Lax_{i+1,n}}^{2º\ passo} + A_{Lax_{i-1,n}}^{2º\ passo} \right) - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left( B_{Lax_{i+1,n}}^{2º\ passo} - B_{Lax_{i-1,n}}^{2º\ passo} \right) - \frac{\Delta t}{2} C_{Lax_i}^{2º\ passo} \quad (9.6)$$

Com os valores de  $h$  e  $A$  obtidos neste intervalo de tempo intermediário, calculam-se os valores dos seguintes parâmetros, em todas as seções preestabelecidas.

$$V_i^{1º\ passo} = \frac{A_i^{1º\ passo}}{h_i^{1º\ passo}} ; B_i^{1º\ passo} ; e C_i^{1º\ passo} \quad (9.72)$$

2º Passo: Procede-se do intervalo de tempo de  $n$  a  $n+1$  [Figura (9.2)].

$$h_{i,n+1}^{2^o\ passo} = h_{i,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( A_{Lax_{i+1}}^{1^o\ passo} - A_{Lax_{i-1}}^{1^o\ passo} \right) \quad (9.8)$$

$$A_{Lax_{i,n+1}}^{2^o\ passo} = A_{Lax_{i,n}} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( B_{Lax_{i+1}}^{1^o\ passo} - B_{Lax_{i-1}}^{1^o\ passo} \right) - \frac{\Delta t}{2} C_{Lax_i}^{1^o\ passo} \quad (9.9)$$

Os parâmetros  $h_{i,n}$  e  $A_{Lax_{i,n}}$  correspondem aos valores já obtidos no tempo anterior, ou seja, no tempo  $n$ , em todas as seções do canal.

Com os valores de  $h$  e  $A$  obtidos no intervalo de tempo  $n$  a  $n+1$ , calculam-se os valores dos seguintes parâmetros, em todas as seções preestabelecidas.

$$V_{i,n+1}^{2^o\ passo} = \frac{A_{i,n+1}^{2^o\ passo}}{h_{i,n+1}^{2^o\ passo}}; B_{i,n+1}^{2^o\ passo}; e C_{i,n+1}^{2^o\ passo} \quad (9.10)$$

O processo numérico da condição de contorno a montante do canal corresponde a:

$$h_1^{1^o\ passo} = h_{1,n}^{2^o\ passo} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( A_{Lax_{2,n}}^{2^o\ passo} - A_{Lax_{1,n}}^{2^o\ passo} \right) \quad (9.11)$$

$$h_{1,n+1}^{2^o\ passo} = h_{1,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( A_{Lax_2}^{1^o\ passo} - A_{Lax_1}^{1^o\ passo} \right) \quad (9.12)$$

Hidrogramas a montante e jusante de um canal;  $L_n=50\text{m}$ ;  $t_n=7.14\text{s}$ ;  $h_n=5\text{m}$

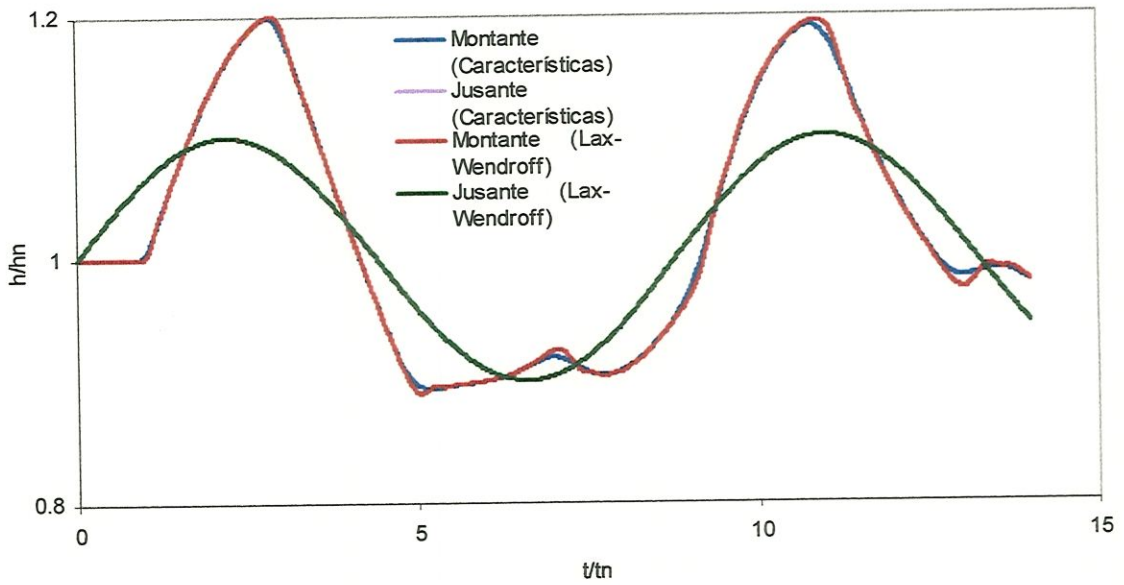


Figura 9.3 Apresentação dos métodos Lax-Wendroff e Características, com a profundidade de jusante variando segundo uma senóide.

Hidrogramas a montante e jusante de um canal ;  $L_n=50\text{m}$ ;  $h_n=5\text{m}$ ;  $t_n=7.14\text{s}$

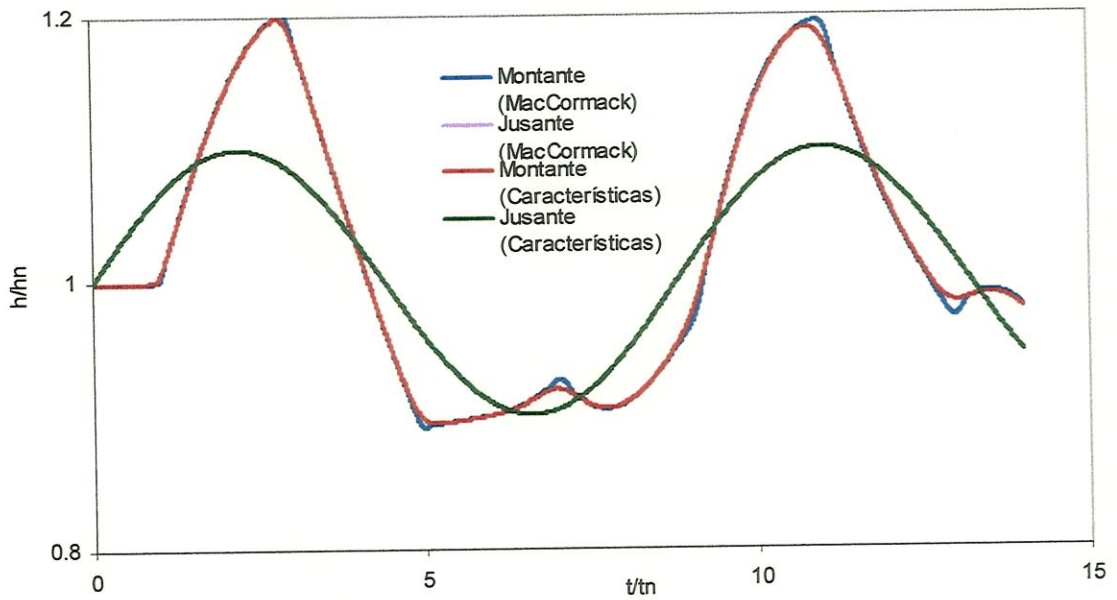


Figura 9.4 Apresentação dos métodos MacCormack e Características, com a profundidade de jusante variando segundo uma senóide.

Hidrogramas a montante e jusante de um canal ;  $L_n=50m$ ;  $h_n=5m$ ;  $t_n=7.14s$

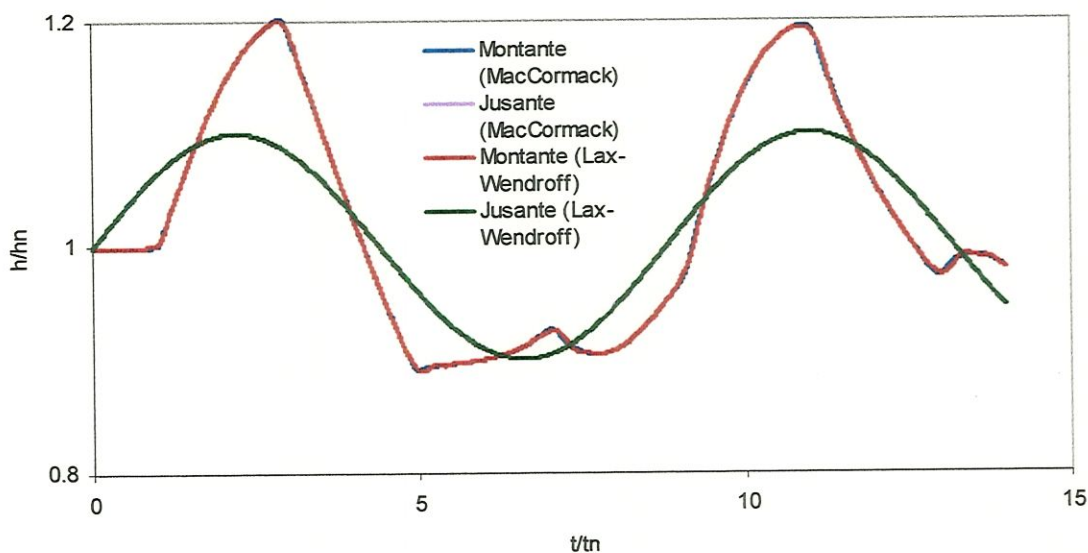


Figura 9.5 Apresentação dos métodos MacCormack e Lax-Wendroff, com a profundidade a jusante variando segundo uma senóide.

Os esquemas numéricos MacCormack, Lax-Wendroff e Características foram aplicados para obter hidrogramas a montante e jusante de um canal retangular [Figuras (9.3), (9.4), e (9.5)], cujos resultados do Lax-Wendroff [Tabela (9.1)], apresentam ótima precisão, quando comparados com os resultados do modelo calculado por Roberson e Crowe (1997).

**Tabela 9.1** Resultados do esquema Lax-Wendroff aplicado em um canal onde se considera que a profundidade de jusante varie segundo uma senóide com o tempo.

| Comprimento do canal |                       | L=0  | L=10m | L=20m | L=30m | L=40m | L=50m |
|----------------------|-----------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Tempo=10s            | h (m/s)               | 5,32 | 5,31  | 5,29  | 5,34  | 5,38  | 5,42  |
|                      | V (m/s <sup>2</sup> ) | 0,00 | -0,19 | -0,39 | -0,47 | -0,53 | -0,58 |
| Tempo=20s            | h (m/s)               | 6,00 | 5,97  | 5,86  | 5,74  | 5,60  | 5,45  |
|                      | V (m/s <sup>2</sup> ) | 0,00 | -0,01 | 0,07  | 0,13  | 0,18  | 0,23  |
| Tempo=30,1s          | h (m/s)               | 4,95 | 4,95  | 4,95  | 4,94  | 4,99  | 5,07  |
|                      | V (m/s <sup>2</sup> ) | 0,00 | 0,22  | 0,44  | 0,64  | 0,77  | 0,85  |
| Tempo=40,1s          | h (m/s)               | 4,48 | 4,48  | 4,49  | 4,48  | 4,54  | 4,62  |
|                      | V (m/s <sup>2</sup> ) | 0,00 | -0,01 | -0,02 | -0,05 | 0,01  | 0,08  |
| Tempo=50,1s          | h (m/s)               | 4,62 | 4,59  | 4,54  | 4,52  | 4,52  | 4,52  |
|                      | V (m/s <sup>2</sup> ) | 0,00 | 0,00  | 0,02  | 0,01  | -0,01 | -0,04 |
| Tempo=60,1s          | h (m/s)               | 4,63 | 4,64  | 4,65  | 4,68  | 4,76  | 4,87  |
|                      | V (m/s <sup>2</sup> ) | 0,00 | -0,09 | -0,17 | -0,24 | -0,34 | -0,46 |
| Tempo=70,1s          | h (m/s)               | 5,58 | 5,56  | 5,52  | 5,43  | 5,36  | 5,33  |
|                      | V (m/s <sup>2</sup> ) | 0,00 | -0,19 | -0,37 | -0,59 | -0,74 | -0,82 |
| Tempo=80,1s          | h (m/s)               | 5,82 | 5,79  | 5,74  | 5,66  | 5,58  | 5,49  |
|                      | V (m/s <sup>2</sup> ) | 0,00 | 0,20  | 0,30  | 0,38  | 0,43  | 0,47  |
| Tempo=90,2s          | h (m/s)               | 4,98 | 4,98  | 5,01  | 5,08  | 5,15  | 5,20  |
|                      | V (m/s <sup>2</sup> ) | 0,00 | 0,11  | 0,20  | 0,22  | 0,27  | 0,35  |

**Tabela 9.2** Resultados do esquema Lax-Wendroff  
Roberson e Crowe (1997)

|             | Comprimento do canal | L=0  | L=10m | L=20m | L=30m | L=40m | L=50m |
|-------------|----------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Tempo=10,0s | h(m/s)               | 5,32 | 5,31  | 5,29  | 5,34  | 5,38  | 5,42  |
| Tempo=20,0s | h(m/s)               | 6,00 | 5,97  | 5,86  | 5,74  | 5,60  | 5,45  |
| Tempo=30,1s | h(m/s)               | 4,95 | 4,95  | 4,95  | 4,94  | 4,99  | 5,07  |
| Tempo=40,1s | h(m/s)               | 4,48 | 4,48  | 4,49  | 4,48  | 4,54  | 4,62  |
| Tempo=50,1s | h(m/s)               | 4,63 | 4,59  | 4,55  | 4,52  | 4,52  | 4,52  |
| Tempo=60,1s | h(m/s)               | 4,63 | 4,64  | 4,65  | 4,68  | 4,76  | 4,87  |
| Tempo=70,2s | h(m/s)               | 5,58 | 5,56  | 5,52  | 5,43  | 5,37  | 5,33  |
| Tempo=80,2s | h(m/s)               | 5,81 | 5,79  | 5,74  | 5,66  | 5,58  | 5,49  |
| Tempo=90,2s | h(m/s)               | 4,98 | 4,98  | 5,01  | 5,08  | 5,15  | 5,20  |

## 10. MODELAÇÃO MATEMÁTICA DA SUPERFÍCIE LIVRE DE UM CANAL DE SEÇÃO CIRCULAR, CONSIDERANDO-SE O COEFICIENTE DE CORREÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO $C_{st}$

As equações de Saint Venant em conjunto com o coeficiente de distribuição de pressão, para escoamento não permanente com superfície livre, em seção circular, com queda livre na condição de jusante [Figuras (10.1a) e (10.1b)] constituem-se em:

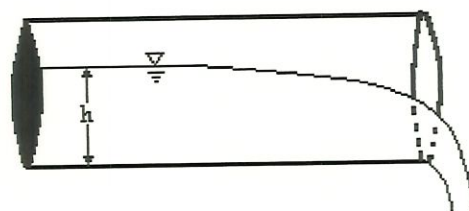


Figura 10.1a Perfil de um escoamento em uma seção circular.

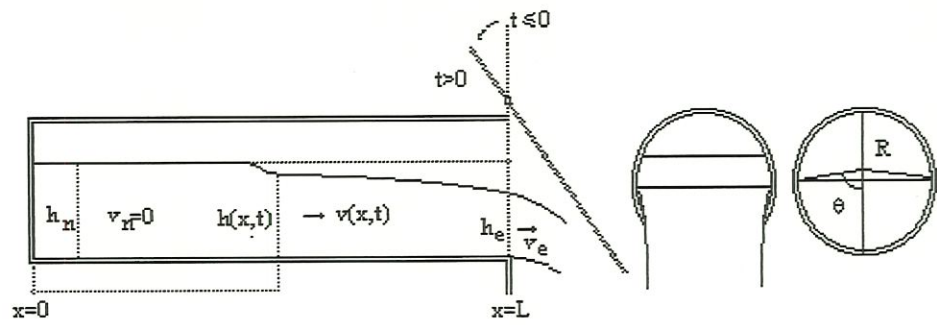


Figura 10.1b Esquema do canal circular

Na geometria circular as equações principais se mudam em

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{(Equação da continuidade)}$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} + g \bar{h} A \right) = gA(S_0 - S_f) \quad \text{(Equação da quantidade de movimento)}$$

onde as grandezas geométricas são expressas como funções do ângulo central  $\theta$  e são expressas por

Para uma seção circular, tem-se que:

$$A = R^2(\theta - 0.5 \operatorname{sen}(2\theta)) \quad (10.1)$$

$$\bar{h}A = R^3 \left[ \frac{2}{3} \operatorname{sen}^3 \theta - \cos \theta (\theta - 0.5 \operatorname{sen}(2\theta)) \right] \quad (10.2)$$

$$S_f = f \frac{V^2}{2g} \frac{1}{4R_h} \quad (10.3)$$

$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{R^2 [\theta - 0.5 \operatorname{sen}(2\theta)]}{2\theta R} = \frac{R [\theta - 0.5 \operatorname{sen}(2\theta)]}{2\theta} \quad (10.4)$$

### FORMA ADIMENSIONAL

Em forma adimensional (e com  $S_0=0$ ) o sistema pode ser descrito por

$$\frac{\partial A^*}{\partial t^*} + \frac{\partial Q^*}{\partial x^*} = 0 \quad (10.5)$$

e

$$\frac{\partial Q^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{Q^{*2}}{A^*} + g \bar{h}^* A^* \right) = -\frac{f}{8} \frac{L_n H_n}{A_n} V^* |V^*| P^* \quad (10.6)$$

onde  $A^* = \frac{A}{A_n}$ ,  $Q^* = \frac{Q}{Q_n}$ ,  $P^* = \frac{P}{H_n}$ ,  $\bar{h}^* = \frac{\bar{h}}{H_n}$ ,  $Q_n = V_n A_n$  onde

$$V_n = \sqrt{g H_n} \text{ e } t_n = \frac{L_n}{V_n}.$$

Nesse caso a solução também é obtida através de métodos numéricos com a obtenção das curvas  $h^*(x^*, t^*)$  e  $V^*(x^*, t^*)$  que tem como parâmetro um único

coeficiente  $f \frac{L_n h_n}{A_n}$ .



## 10.1 DEMONSTRAÇÃO DOS PARÂMETROS DE UMA SEÇÃO CIRCULAR

Para o procedimento da descritização numérica do método de Lax-Wendroff, por exemplo, empregado em um modelo físico de superfície livre, cuja seção transversal seja circular [Figura (10.2)], é necessário conhecer o parâmetro ( $\bar{h}A$ ).

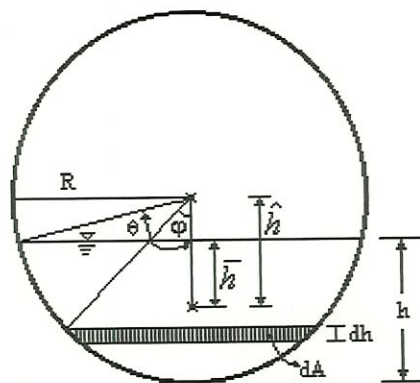


Figura 10.2 Conduto circular operando parcialmente cheio.

Para um canal circular operando com escoamento parcialmente cheio, a distância da superfície da água ao centro de gravidade da área molhada ( $\bar{h}$ ) deve ser obtida partindo de princípios básicos.

$$h = R - R \cos \theta = R(1 - \cos \theta) \quad (10.7)$$

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right) \quad (10.8)$$

$$A = [R^2(\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta)] \quad (10.9)$$

$$P = 2\theta R \quad (10.10)$$

Com referência à Figura (10.2), a área de escoamento é dada por

$$dA = 2R \operatorname{sen} \varphi dh \quad (10.11)$$

$$dh = R \operatorname{sen} \varphi d\varphi \quad (10.12)$$

$$dA = 2R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi \quad (10.13)$$

$$A = \int_0^{\theta} 2R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi \quad (10.14)$$

A distância  $(\hat{h})$ , do centro de gravidade da seção circular ao centro de gravidade da área molhada, corresponde a:

$$\hat{h}A = \int_0^{\theta} 2R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi R \cos \varphi \quad (10.15)$$

$$\hat{h}A = \int_0^{\theta} 2R^3 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \quad (10.16)$$

sabendo-se que:

$$\operatorname{sen}^3 \varphi = 3 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi \quad (10.17)$$

$$\hat{h}A = \int_0^\theta \frac{2}{3} R^3 \operatorname{sen}^3 \varphi d\varphi \quad (10.18)$$

$$\hat{h}R^2(\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta) = \int_0^\theta \frac{2}{3} R^3 \operatorname{sen}^3 \varphi d\varphi \quad (10.19)$$

$$\hat{h}R^2(\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta) = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{sen}^3 \theta \quad (10.20)$$

$$\hat{h} = \frac{2}{3} R \frac{\operatorname{sen}^3 \theta}{\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \quad (10.21)$$

A distância da superfície da água até o centro de gravidade da área de escoamento é dada por

$$\bar{h} = \hat{h} - R \cos \theta \quad (10.22)$$

$$\bar{h} = \frac{2}{3} R \frac{\operatorname{sen}^3 \theta}{\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta} - R \cos \theta \quad (10.23)$$

e, finalmente, obtém-se o valor de  $\bar{h}A$  usado na equação da quantidade de movimento



$$\bar{h}A = \left( \frac{2}{3} R \frac{\text{sen}^3 \theta}{\theta - \text{sen} \theta \cos \theta} - R \cos \theta \right) R^2 (\theta - \text{sen} \theta \cos \theta) \quad (10.24)$$

$$\bar{h}A = R^3 \left[ \frac{2}{3} \text{sen}^3 \theta - \cos \theta (\theta - \text{sen} \theta \cos \theta) \right] \quad (10.25)$$

onde:

$h$  = profundidade do escoamento no canal;

$\hat{h}$  = distância do centro de gravidade da seção circular ao centro de gravidade da área molhada;

$\bar{h}$  = profundidade da superfície da água até o centro de gravidade da área molhada;

$\theta$  = ângulo;

$\varphi$  = ângulo;

$P$  = perímetro;

$A$  = área da tubulação;

$R$  = raio da tubulação

## 10.2 MÉTODO REGULA-FALSI

É interessante observar que o coeficiente  $f \frac{L_n h_n}{A_n} = f \frac{L_n}{R} F(\theta_0)$  pode assumir um

mesmo valor para duas condições iniciais diferentes. De fato, se a condição inicial for caracterizada pelo ângulo central  $\theta_0$  tem-se que

$$f \frac{L_n h_n}{A_n} = f \frac{L_n}{R} \frac{1 - \cos \theta_0}{\theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0} = f \frac{L_n}{R} F(\theta_0) \quad (10.26)$$

As Figuras (3a e 3b) mostram o comportamento de  $F(\theta_0)$  nos intervalos  $0,1 < \theta_0 < \pi/2$  e  $\pi/2 < \theta_0 < \pi$ . Nota-se que com a secção plena ( $\theta_0 = \pi$ ) ou com a secção metade ( $\theta_0 = \pi/2$ ) a função assume o mesmo valor  $F(\theta_0) = 2/\pi$  indicando que  $F(\theta_0)$  passa por um mínimo no ponto  $\theta_0 = 2,1392$  onde  $F(\theta_0) = 0,5933$ .

Conclui-se então que um mesmo coeficiente adimensional poderá ser obtido com duas condições iniciais diferentes, desde que ambas estejam no intervalo  $\pi/2 < \theta_0 < \pi$ .

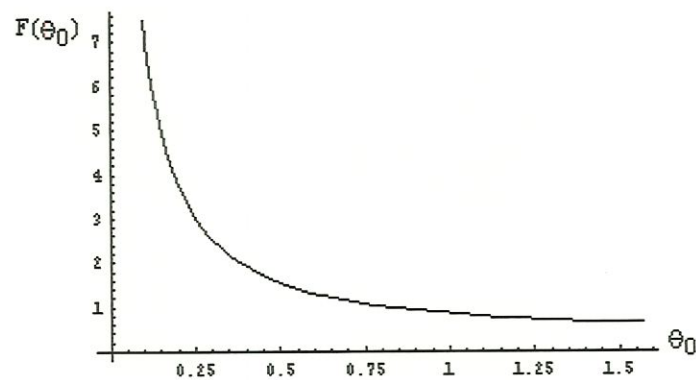


Figura 10.3a A função  $F(\theta_0)$  no intervalo  $0,1 < \theta_0 < \pi/2$ .

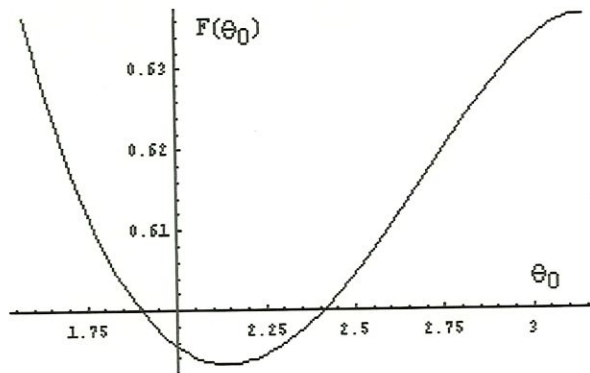


Figura 10.3b A função  $F(\theta_0)$  no intervalo  $\pi/2 < \theta_0 < \pi$

Para obter os ângulos ( $\theta$ ) correspondentes às respectivas áreas ( $A$ ) determinadas por intermédio do método de Lax-Wendroff, é necessário utilizar métodos iterativos que proporcionem obter a raiz da Equação (10.27), para cada seção do canal. A literatura apresenta vários métodos como, por exemplo: o método de Newton-Raphson, o método Regula-Falsi e outros, [Chapra(1984)].

$$f(\theta) = R^2(\theta - \text{sen } \theta \cos \theta) - A(\text{Lax} - \text{Wendroff}) \quad (10.27)$$

No início, optou-se pelo método de Newton-Raphson, mas, por problema de convergência, decidiu-se usar o método Regula-Falsi, cuja fórmula é a seguinte:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_i - x_u)}{f(x_i) - f(x_u)} \quad (10.28)$$

Para facilitar a demonstração do processo numérico do método iterativo, lançou-se mão do exemplo apresentado por Chapra (1984), cujo gráfico é o seguinte:

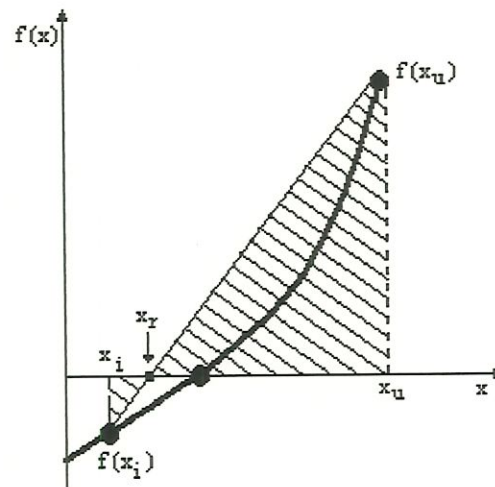


Figura 10.4 Demonstração do método Regula-Falsi.

O valor de  $x_r$  calculado na Equação (10.28) substitui qualquer um dos dois valores admitidos inicialmente,  $x_i$  ou  $x_u$ , e produz uma função  $f(x_r)$  com o mesmo sinal. Desta maneira, os valores de  $x_i$  e  $x_u$  sempre agrupam a raiz verdadeira. O processo é repetido até que a raiz seja estimada adequadamente.

Para se obter a raiz da Equação (10.27) por meio do método de Regula-Falsi, é necessário conhecer o fenômeno físico, com o propósito de definir o intervalo das raízes, e assim dar condições de inicializar o processo iterativo e de favorecer ao método condições matemáticas lógicas capazes de proporcionar a solução real da Equação (10.27).

Neste trabalho, o método de Regula-Falsi foi aplicado em cada uma das seções, distribuídas longitudinalmente em um canal de seção circular, com a finalidade de obter o ângulo ( $\theta$ ), cuja área  $[A(\theta)]$  corresponda à área ( $A$ ) calculada pelo método de Lax-Wendroff, em cada intervalo de tempo [Figura (10.5)].

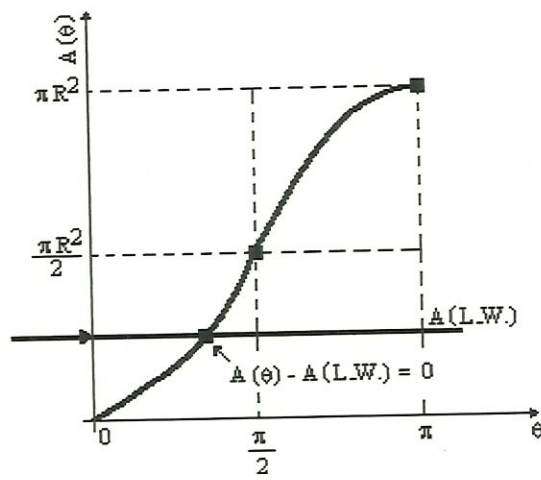


Figura 10.5 Análise do intervalo das raízes.



## 11. ENSAIOS PRELIMINARES

Dois ensaios preliminares foram utilizados para testar os algoritmos computacionais e os programas já desenvolvidos .

Realmente, uma das formas mais simples para testar os programas computacionais é confrontar os resultados calculados com alguns valores experimentais, rapidamente obtidos em laboratório, ensaiando-se modelos simplificados, ou seja, modelos de baixo custo e que não requeiram uma instrumentação de medida muito sofisticada.

Decidiu-se-se então determinar a curva do volume total em função do tempo  $Vol_{total}(t)$  que correlaciona o volume total escoado no intervalo de tempo  $t$ , de um trecho curto de uma canalização cilíndrica horizontal, após a abertura instantânea de uma das extremidades seguida de um rápido fechamento. A Figura 11.1 mostra esquematicamente a metodologia empregada.

Um tubo de acrílico ( $L=1,5m$   $D=90mm$ ) foi fechado numa das suas extremidades tendo na outra uma tampa móvel, que, retirada ou colocada manualmente, permitiu simular na extremidade do cano uma abertura rápida, seguida por uma manobra de fechamento brusco.

O intervalo de tempo entre a abertura e o fechamento foi variado e se situou entre *1 e 10 segundos*.

Um sensor eletrônico foi instalado na tampa de maneira a disparar um cronômetro no instante da abertura e pará-lo no seu fechamento. A Figura 11.1 esquematiza as fases principais da metodologia empregada.

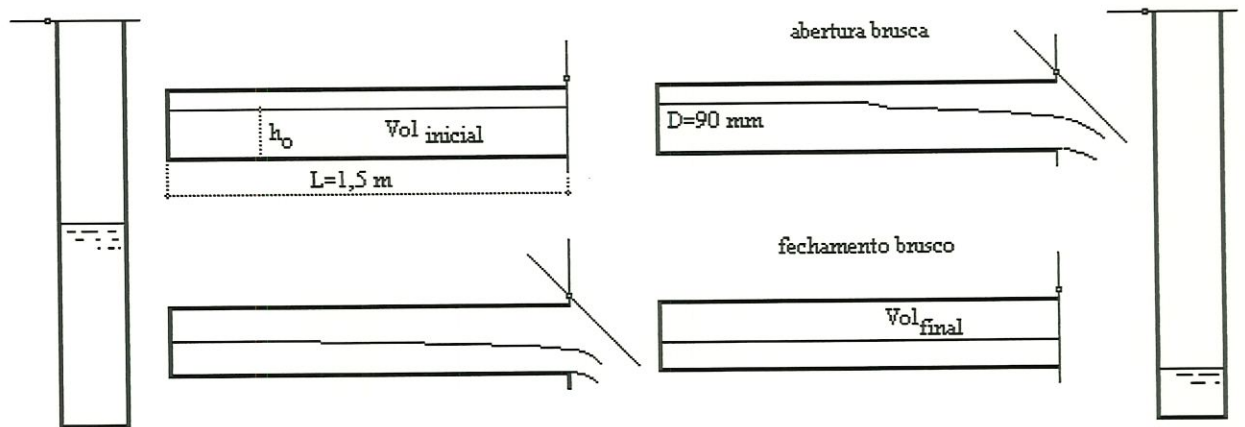


Figura 11.1 O ensaio preliminar de volume total escoado

$$V_{\text{total}} = V_{\text{inicial}} - V_{\text{final}} \quad (\text{geometria circular})$$

Condições iniciais : 1º ensaio -  $h_n = 45 \text{ mm}$

2º ensaio -  $h_n = 67,14 \text{ mm}$

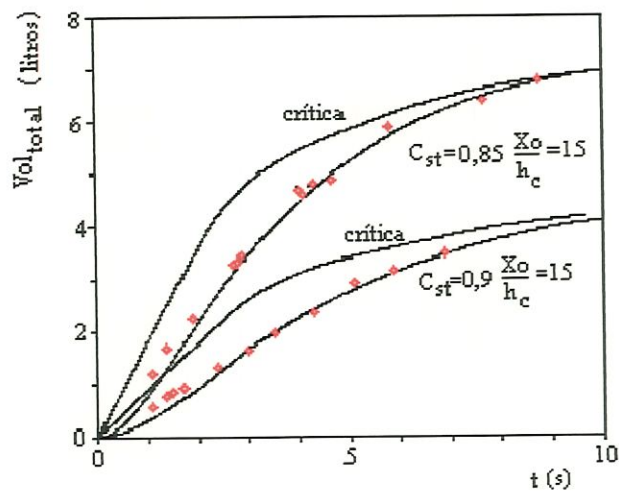


Figura 11.2 As curvas  $Vol_{\text{total}}(t)$  para

$h_n = 45 \text{ mm}$  e  $h_n = 67,14 \text{ mm}$

A leitura do volume inicial ( $Vol_{inicial} = cte = A_n L$ ) e do volume final  $Vol_{final}$  de água, após uma série de ciclos, possibilitou o levantamento dos pontos experimentais indicados na Figura 11.2.

Nota-se que a condição de contorno crítica não permite que se ajuste a curva calculada com o algoritmo, aos pontos experimentais obtidos e que o volume teórico escoado foi sempre superior ao volume real. Todavia, após 10 segundos as diferenças quase desaparecem.

Entretanto, a segunda condição de contorno (a parábola  $C_{st}(x)$ ) possibilitou um ajuste muito bom em quase todo o intervalo de tempo, o que a princípio indica que a adoção de parâmetros constantes, independentes portanto das demais grandezas físicas envolvidas, é uma hipótese bastante aceitável.

Os ensaios preliminares mostraram então a confiabilidade dos algoritmos e dos programas computacionais até então desenvolvidos.

## **11.1 A CALIBRAÇÃO DOS TRANSDUTORES DE PRESSÃO USADOS NOS ENSAIOS DO CANAL RETANGULAR.**

Com a finalidade de certificar a precisão dos transdutores de pressão, foram realizados vários ensaios que consistiram na calibração dos transdutores de pressão.

Para um canal retangular de comprimento ( $L = 3m$ ), optaram-se-se por quatro tomadas de pressão, distanciadas uma da outra a cada  $0,5m$ . Transversalmente ao comprimento do canal, ou seja às tomadas de pressão, usaram-se também dois sensores, que distanciavam do fundo do canal de  $0,10m$  e  $0,15m$ , que tinham como objetivo servir de parâmetro para verificar a calibração dos transdutores de pressão. Os sinais de voltagem dos transdutores e sensores eram enviados e armazenados em um computador e depois processados, ou seja, após serem transformados em

profundidades, eram feitos os gráficos e também as análises do modelo unidimensional proposto. Para certificar-se da precisão dos transdutores de pressão, os sinais enviados pelos sensores a determinadas profundidades estabelecidas inicialmente tinham que coincidir com os sinais obtidos pelos transdutores.

Os ensaios foram procedidos para três (3) diferentes profundidades iniciais  $h_n=0,10m$ ,  $h_n=0,15m$ , e  $h_n=0,20m$ , com a finalidade de verificar a sua influência no modelo proposto, ou seja, qual seria a influência observada no modelo através da variação da geometria do canal, admitindo como variável o parâmetro profundidade ( $h$ ).

## 12. DISCUSSÕES SOBRE O MODELO NUMÉRICO RETANGULAR E CIRCULAR

### 12.1 AS CURVAS PREVISTAS PELO MODELO COMPUTACIONAL NOS CANAIS RETANGULARES

A utilização de duas condições de contorno diferentes para simular a abertura brusca da comporta resulta, é claro, em curvas finais diferentes.

Isso pode ser visto nas Figuras (12.1a e 12.1b) que apresentam as curvas  $h_e^*(t^*)$  e  $V_e^*(t^*)$  na saída de um canal retangular (onde as diferenças são acentuadas).

A condição crítica (azul) nos mostra a existência de um degrau no instante  $t^*=0$ , que apresenta uma queda brusca  $1 \rightarrow 0,42$ . A partir desse ponto o nível na secção de saída se estabiliza para decair na região  $t^* > 1,8$ .

Com a condição de contorno que utiliza o coeficiente de pressão  $C_{st}(x)$  (vermelha) obteve-se-se uma curva contínua, passível de ser ajustada através dos

parâmetros  $C_{st}$  e  $Xo/h_e$  e que se estabiliza no ponto  $t^*=3$ . Essa curva também inicia o decaimento nos instantes superiores  $t^*=1,8$ .

O comportamento das curvas  $V^*(t^*)$  é parecido. Nesse caso é a velocidade  $V^*$  que sofre um degrau ascendente  $0 \rightarrow 0,64$  e ambas apresentam um patamar correspondente e se tornam decrescentes após  $t^*=1,8$ .

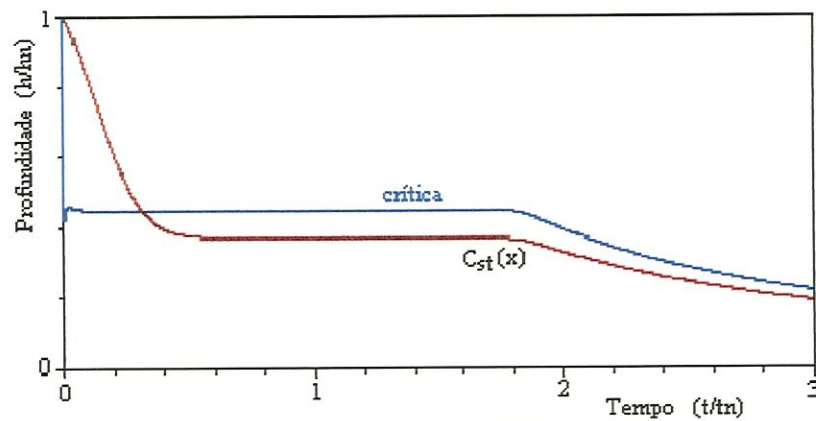


Figura 12.1a As curvas  $h^*(t^*)$  na seção de saída com as duas condições de contorno ( $h_n=200\text{mm}$ ,  $L_n=3\text{m}$ )

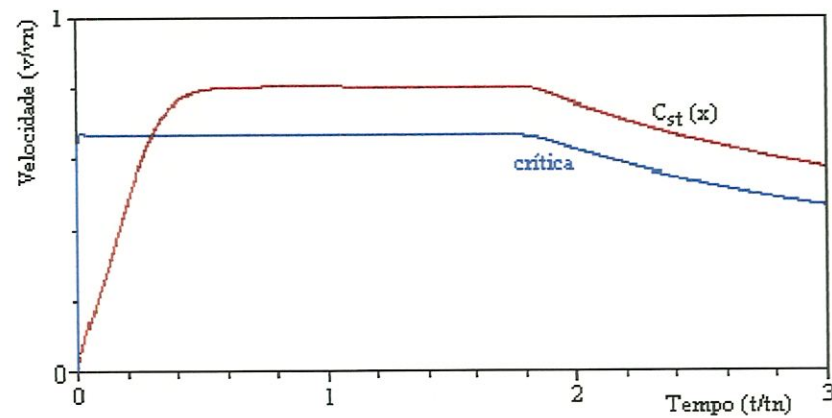


Fig.ura 12.1b As curvas  $V^*(t^*)$  na seção de saída com as duas condições de contorno ( $h_n=200\text{mm}$ ,  $L_n=3\text{m}$ )

A descontinuidade provocada pelo degrau das curvas  $h^*(t^*)$  e  $V^*(t^*)$  gera perturbações nos algoritmos computacionais, causando instabilidade numérica que obriga o projetista a recorrer ao uso de filtros adequados (viscosidade virtual). Essa metodologia, entretanto, pode mascarar os resultados finais.

As Figuras (12.2a e 12.2b) mostram as curvas adimensionais  $h^*(t^*)$  e  $V^*(t^*)$  previstas para canais correspondentes ao modelo físico e calculados com as duas condições de contorno, admitindo que  $h_n=200\text{mm}$ ,  $L_n=3000\text{mm}$ ,  $t_n=2,142$ ,  $n_{\text{Manning}}=0,012$ ,  $n=400$  pontos interiores,  $C_s=0,8$  e  $X_0=0,5h_c$ .

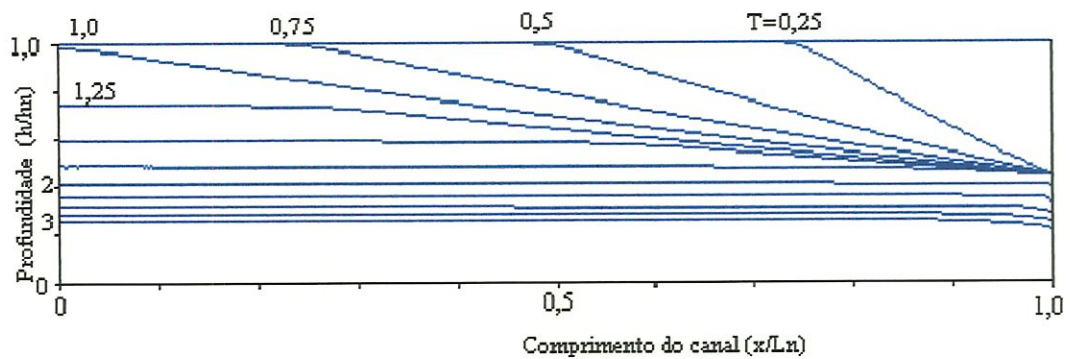


Figura 12.2a Curvas  $h^*(t^*)$  para canais retangulares muito largos ( $H_n/B=0$ ,  $H_n/L_n=0,0667$ ) - condição crítica

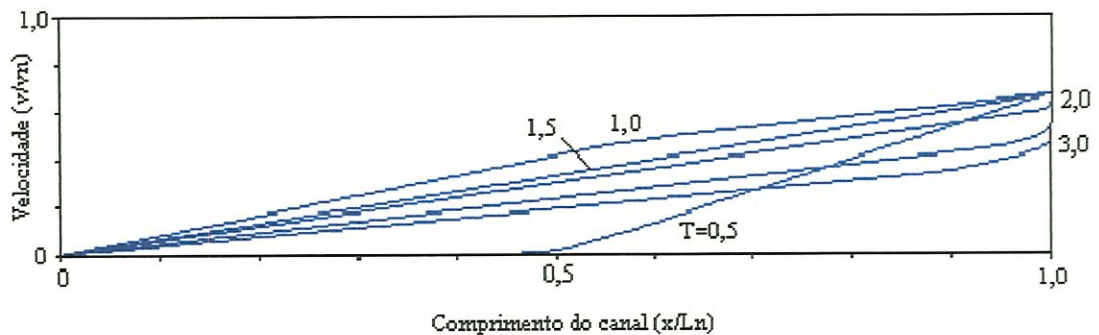


Figura 12.3a Curvas  $V^*(t^*)$  para canais retangulares muito largos ( $H_n/B=0$ ,  $H_n/L_n=0,0667$ ) - condição crítica

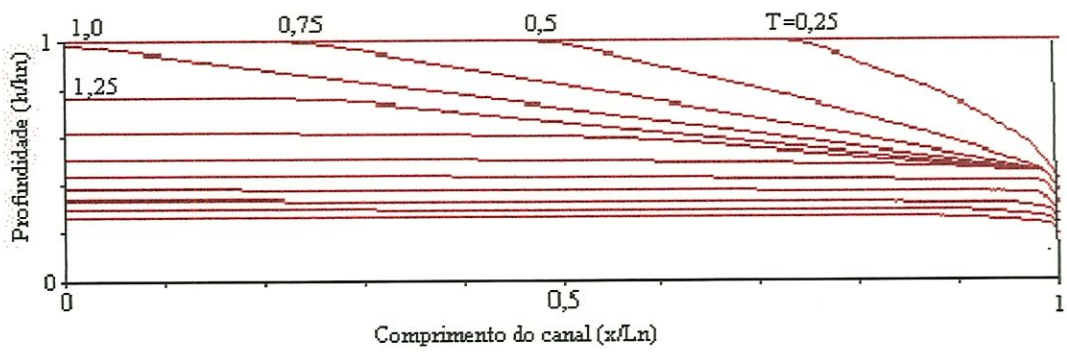


Figura 12.2b Curvas  $h^*(t^*)$  para canais retangulares muito largos ( $H_n/B=0$ ,  $h_n/L_n=0,0667$ )  
coeficiente de pressão variável  $C_s=0,85$   $X_0/h_c=0,5$

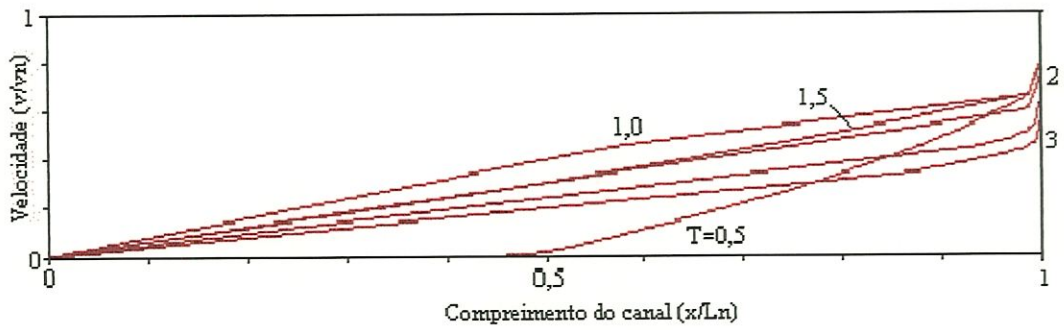


Figura 12.3b Curvas  $V^*(t^*)$  para canais retangulares muito largos ( $H_n/B=0$ ,  $H_n/L_n=0,0667$ )  
coeficiente de pressão variável  $C_s=0,85$   $X_0/h_c=0,5$

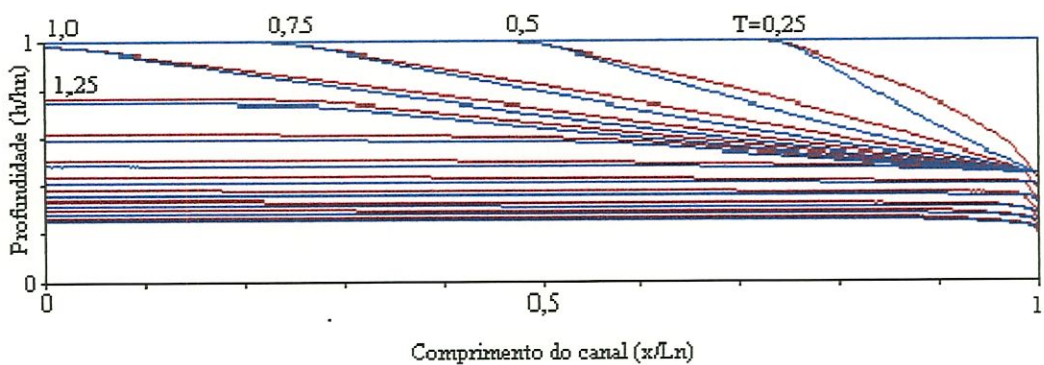


Figura 12.4 Superposição das curvas 12.2a e 12.3a



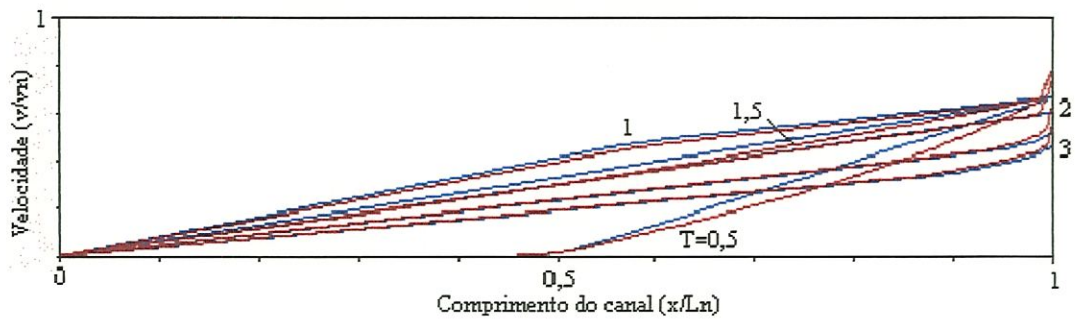


Figura 12.5 Superposição das curvas 12.2b e 12.3b

Nota-se, de uma maneira geral, que os desvios provocados pela utilização das duas condições de contorno são acentuados nos instantes nos quais  $t^* < 0,25$  e decrescem no intervalo  $0,25 < t^* < 1,0$ . Quando  $t^* > 1$  os desvios são praticamente desprezíveis.

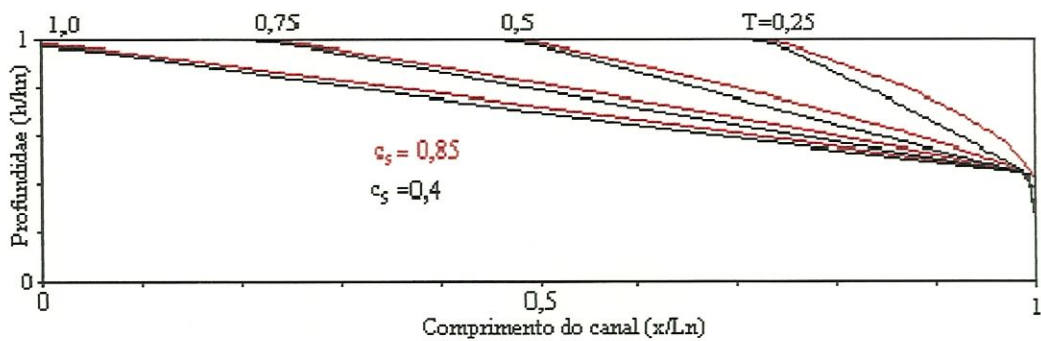


Figura 12.6 A Influência do coeficiente de saída  $C_s$  para um valor constante de  $X_0/h_e$  ( $X_0/h_e = 0,5$ )

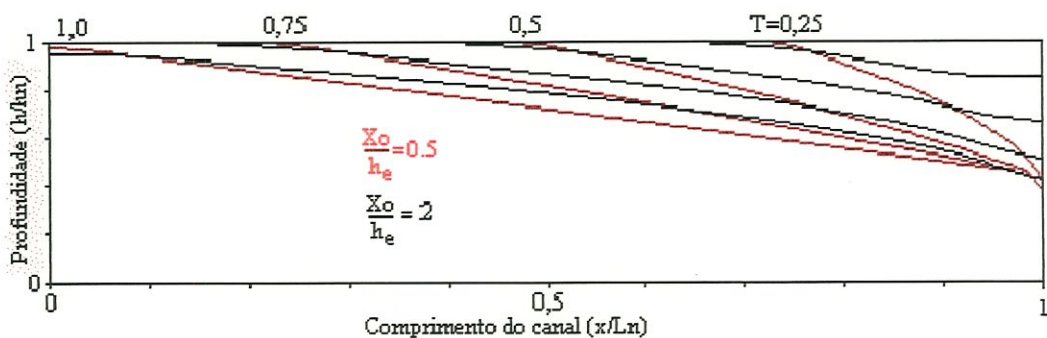


Figura 12.7 A Influência do coeficiente  $X_0/h_e$  de saída para um valor constante de  $C_s$  ( $C_s = 0,85$ )

Nas Figuras (12.6 e 12.7) pode-se observar a influência dos parâmetros de ajuste  $C_s$  e  $Xo/h_e$ .

Realmente, nota-se que a diminuição de  $C_s$  acarreta a redução da altura da superfície livre, e de forma mais significativa nos instantes iniciais.

A variação de  $Xo/h_e$ , por sua vez, traz nos primeiros instantes o aparecimento de pontos de inflexão e atua sobre as curvas ativamente gerando desvios positivos e negativos, ou seja, cria pontos de cruzamento.

## 12.2 AS CURVAS PREVISTAS PELO MODELO COMPUTACIONAL NA GEOMETRIA CIRCULAR

As Figuras (12.8 e 12.9) (curvas azuis) e as Figuras (12.10 e 12.11) (curvas vermelhas) mostram as curvas adimensionais  $h^*(t^*)$  calculadas para as condições utilizadas nos ensaios preliminares.

É interessante observar que no intervalo  $1 < t^* < 2$  as curvas azuis, que não se ajustaram bem aos valores experimentais, apresentam na região de montante profundidades menores do que as de juzante (superfície livre ascendente), o que provavelmente esta associado à grande perturbação introduzida pela abertura da comporta, quando se usa a condição de contorno crítica.

Por outro lado, as curvas que melhor se ajustaram (curvas vermelhas) mostram uma variação bem mais gradativa, devido a continuidade introduzida pela parábola  $C_{st}(x)$ .

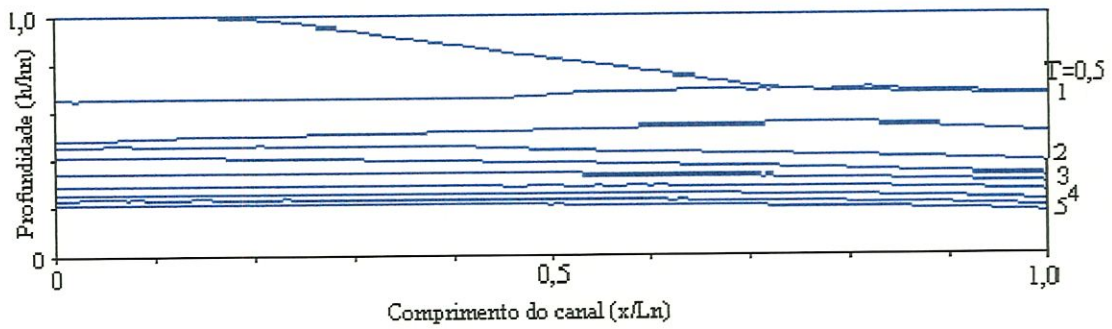


Figura 12.8 Curvas  $h^*(t^*)$  para canais circulares ( $H_0/D=0,5$ ) - condição crítica

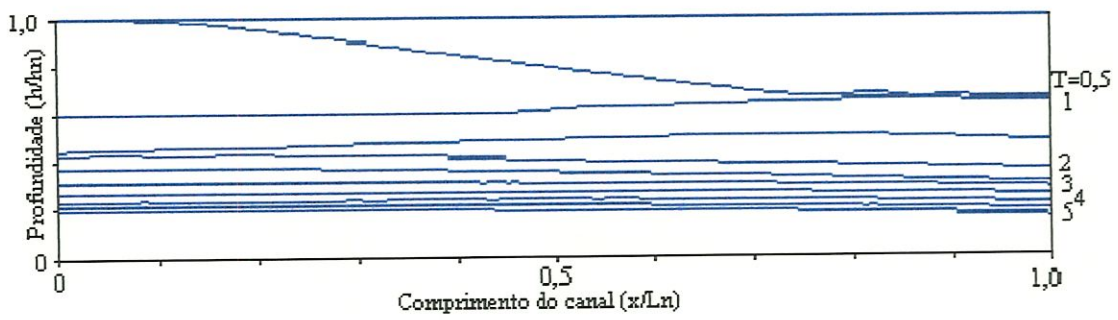


Figura 12.9 Curvas  $h^*(t^*)$  para canais circulares ( $H_0/D=0,746$ ) - condição crítica

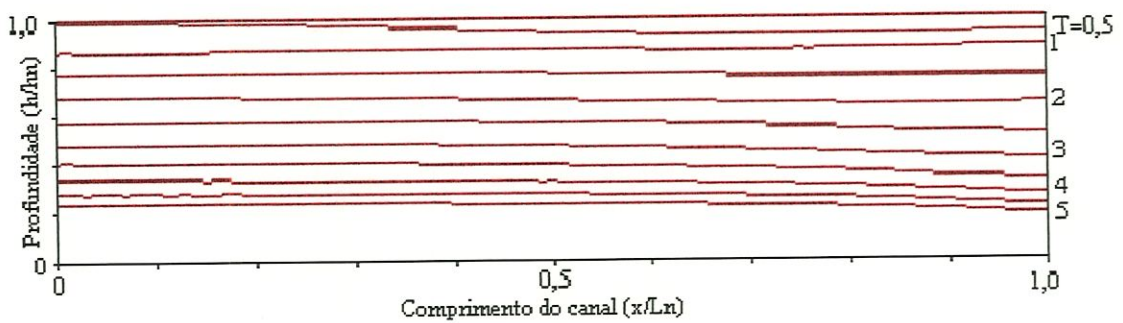


Figura 12.10 Curvas  $h^*(t^*)$  para canais circulares ( $H_0/D=0,5$ ) - coeficiente de pressão variável  $c_s=0,85$   $X_0/h_c=15$

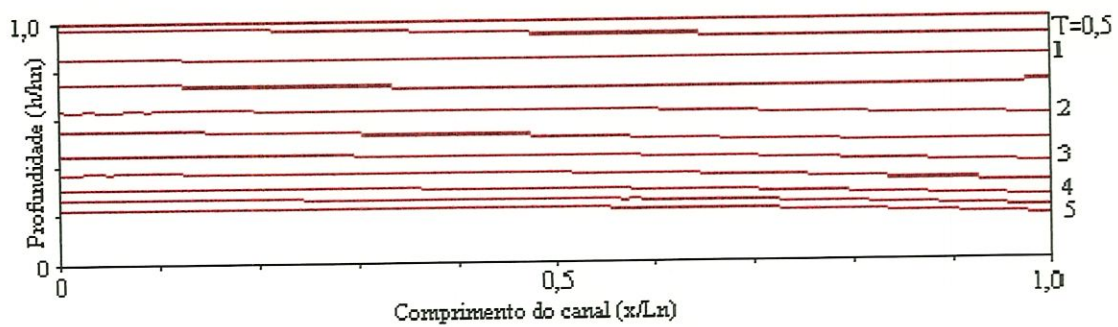


Figura 12.11 Curvas  $h^*(t)$  para canais circulares ( $H_n/D=0,746$ ) - coeficiente de pressão variável  $c_s=0,85$   $X_0/h_n=15$

### 12.3 AS CURVAS EXPERIMENTAIS (GEOMETRIA RETANGULAR) E A CALIBRAÇÃO DO MODELO.

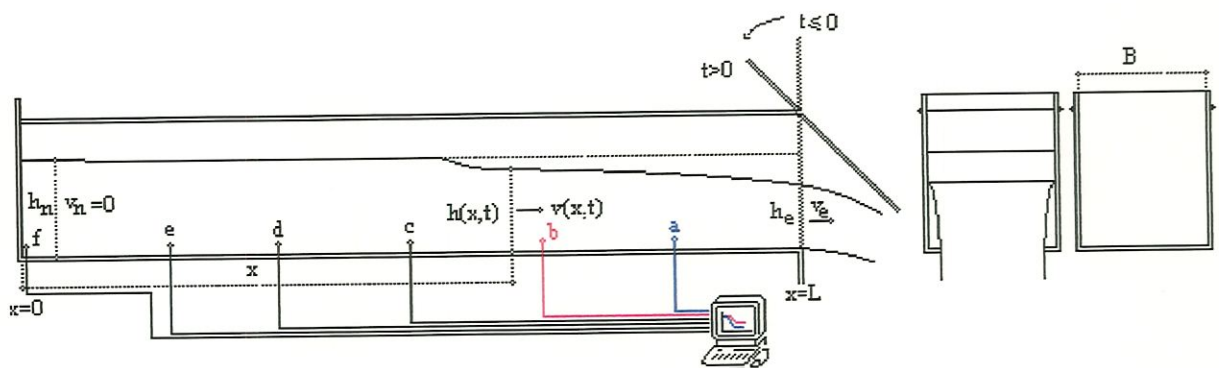


Figura 12.12 As seções a e b do banco de ensaios ( $x_a=2L_n/3$   $x_b=5L_n/6$ )

O esquema da Figura (12.12) mostra a canaleta retangular com as seções *a* e *b* assinaladas.

A Figura (12.13) mostra-se a superposição de 9 curvas experimentais correspondentes a essas seções, nas quais pode-se verificar que, apesar da manobra ser manual, as curvas se repetem sem que ocorram grandes variações.

Em pesquisas futuras, deverá se recorrer a um sistema eletro-mecânico para a correta operação da comporta.

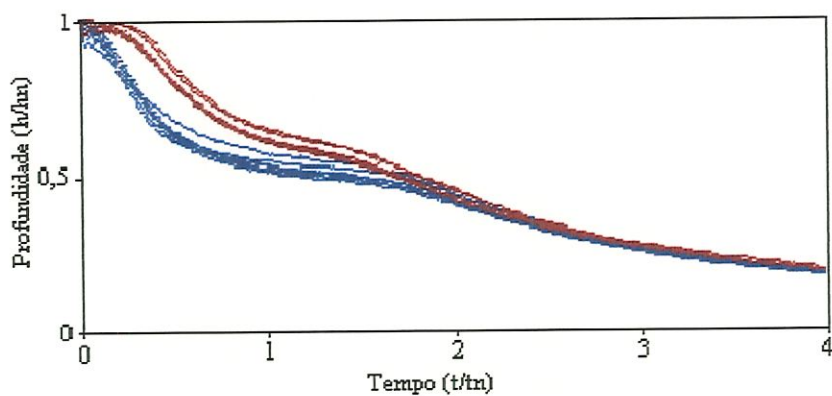


Figura 12.13 A superposição das curvas experimentais das secções a e b (9 curvas).

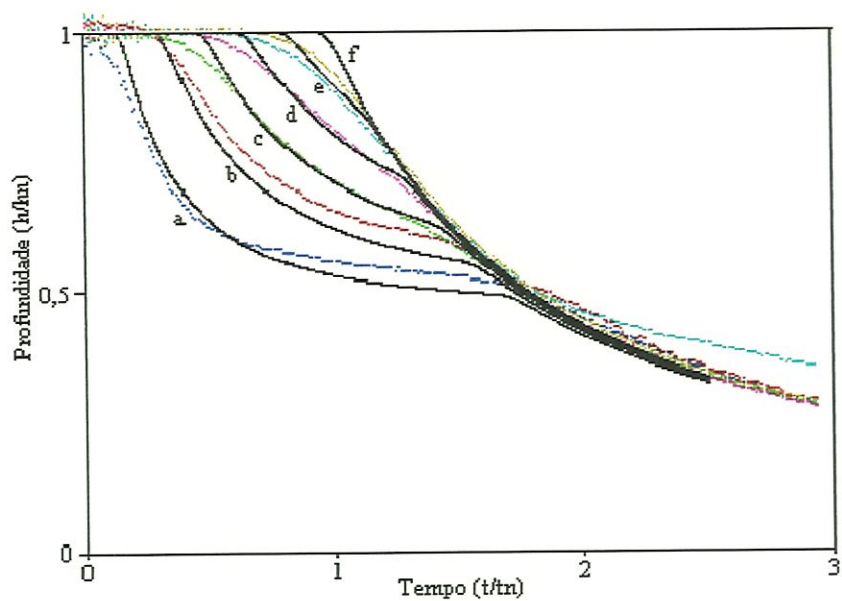


Figura 12.14 O ajuste das curvas  $h^*(t)$  teóricas nas secções a,b,c,d e f. ( $H_n=200\text{mm}$ ,  $H_n/B=0,667$ ,  $H_n/L_n=0,0667$ )

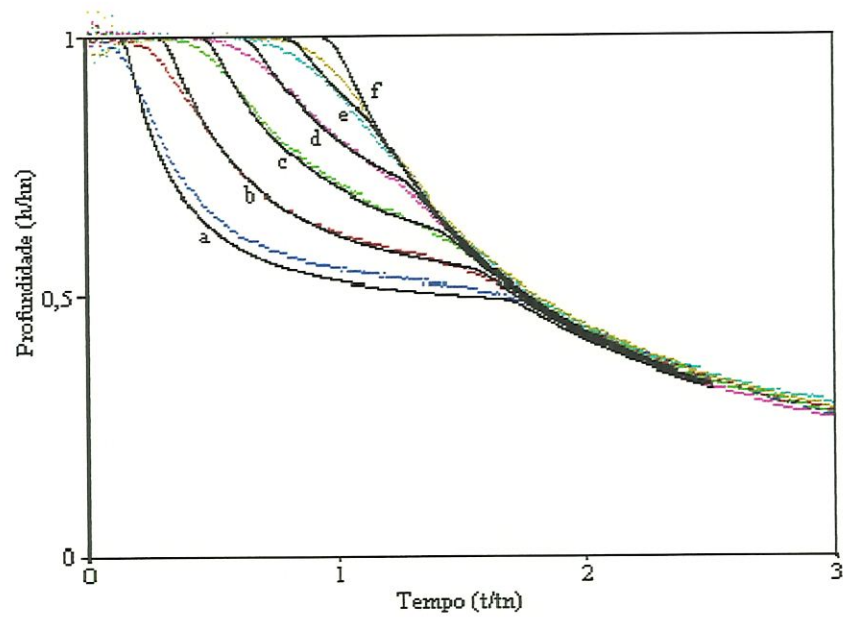


Figura 12.15 O ajuste das curvas  $h^*(t^*)$  nas secções a,b,c,d e ( $H_n=150\text{mm}$ ,  $H_n/B=0,5$ ,  $H_n/L_n=0,05$ )

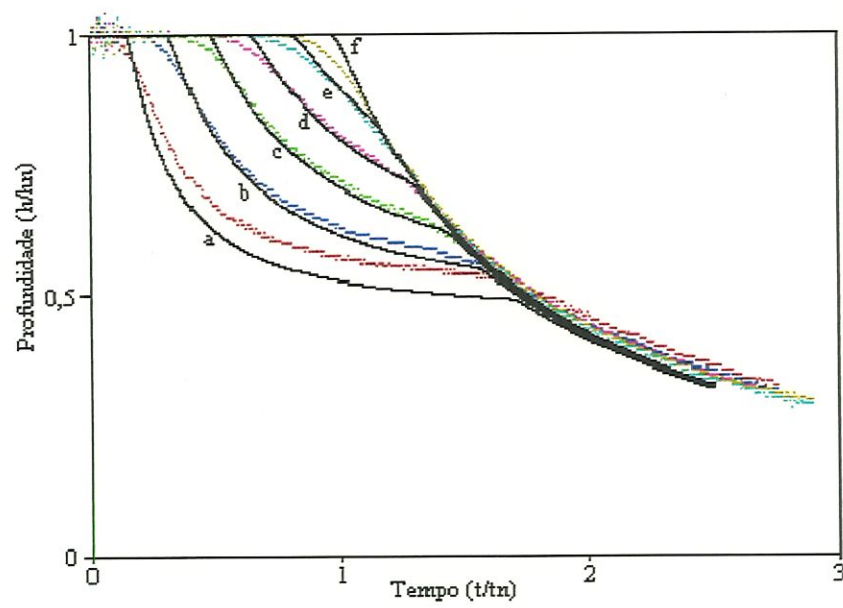


Figura 12.16 O ajuste das curvas  $h^*(t^*)$  nas secções a,b,c,d e e. ( $H_n=100\text{mm}$ ,  $H_n/B=0,334$ ,  $H_n/L_n=0,0334$ )

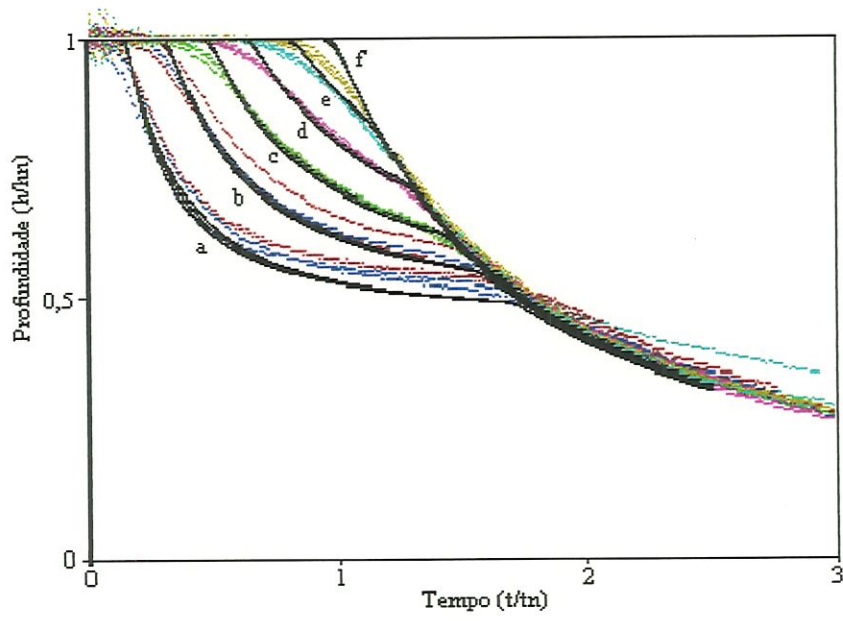


Figura 12.17 A superposição das curvas das Figuras 12.14, 12.15 e 12.16.

### 13. CONCLUSÕES

Observou-se que:

-Apesar das manobras manuais (portanto não repetitivas), não foi constatada uma grande dispersão nos desvios entre as curva teóricas e experimentais. De uma maneira geral os desvios foram pequenos.

-Os desvios que ocorreram nas curvas levantadas nos ensaios preliminares também foram pequenos mostrando que o modelo unidimensional pode ser aplicado de maneira bastante satisfatória na geometria retangular, provavelmente até nos canais circulares ou mesmo em outras geometrias.

-**Apenas nos instantes iniciais e na secção de saída**, ocorreram as maiores discrepâncias, quando as duas condições de contorno são comparadas entre si. Entretanto, com a utilização da condição que se baseia na variação do coeficiente de pressão no trecho final do canal, pode-se reduzir sensivelmente essas diferenças e ajustar as curvas  $V^*(t^*)$  e  $h^*(t^*)$  aos pontos experimentais.

**Concluiu-se então que:**

1. Usando-se o modelo de S. Venant, tanto com a condição de contorno proposta quanto com a crítica, os resultados se aproximam bem dos experimentais, em canais longos (rios). Porém para canais curtos (ruptura de barragem) a condição de contorno proposta por este trabalho, é mais representativa.



Observou-se que:

-A utilização da condição crítica introduz no instante inicial do processo numérico, uma grande variação da velocidade segundo uma função degrau que , na maioria das vezes gera fortes perturbações (ruído) nas grandezas físicas principais, no caso as velocidades  $V$  e as profundidades  $h$  ao longo do canal. Nesses casos é conveniente utilizar-se filtros digitais (alguns autores chamam-os de viscosidade artificial) para “atenuar e dissipar” as perturbações indesejáveis. Normalmente usa-se os filtros ao longo de todo o canal e durante todo o tempo e não de forma restrita na região perturbada e apenas durante um intervalo de tempo limitado. Surge então uma dificuldade adicional que se traduz na escolha correta do filtro, região e intervalo de tempo para sua aplicação, e das suas constantes de operação.

- A introdução da outra condição (perfil não hidrostático) nos algoritmos computacionais não apresenta grandes dificuldades. Apenas deve-se tomar um certo cuidado na escolha do número de pontos interiores que garanta um número mínimo de pontos no comprimento  $X_o$  de saída do canal onde é definida a função  $C_{st}(x)$ .

- É possível também utilizar-se inicialmente uma condição de contorno (a função  $C_{st}(x)$ ), passando-se para a outra condição (a condição crítica) interligando dessa forma os programas computacionais para diminuir o tempo de processamento.

#### **Concluiu-se então que:**

1. Ambas as condições também não trazem problemas na sua introdução nos modelos numéricos de Lax-Wendroff e MacCormack.

Observou-se que:

- A introdução do coeficiente  $C_{st}(x)$  que atua na região de juzante do canal onde  $L_n - X_o < x < L_n$  e não apenas no ponto  $x = L_n$  da secção de saída , acarreta mudanças significativas na metodologia empregada na dedução e na linearização da

equação da quantidade de movimento, na sua forma usual que é empregada no método das características. Como esse método, em aplicações anteriores, já tinha se mostrado menos preciso que os demais, ele não foi utilizado nesse trabalho.

**Concluiu-se então que:**

2. No método das características, a segunda condição não apresenta dificuldades para ser introduzida no modelo numérico; entretanto a primeira acarreta dificuldades de ordem analítica, o que não deve ser considerado relevante, pois o método das características apresenta resultados menos precisos do que os obtidos com o Lax-Wendroff e o MacCormack.

Observou-se que:

- A condição crítica, na sua forma convencional, não permite o ajuste da curvas teóricas aos pontos levantados experimentalmente, não possuindo portanto a flexibilidade necessária para reproduzir as curvas  $V^*(t^*)$  e  $h^*(t^*)$  nos instantes iniciais do escoamento. A variação dos coeficientes que representam a influência das paredes e do fundo do canal, como o coeficiente de perda  $f$  (utilizou-se  $f=0,02$ ) ou o coeficiente de Manning (utilizou-se  $n=0,012$ ) também não provocaram mudanças significativas no comportamento das curvas  $V^*(t^*)$  e  $h^*(t^*)$  e não podem ser utilizados como parâmetros de ajuste.

- Uma das formas possíveis de ajuste é definir um coeficiente de correção  $C_v(t^*)$  que corrige, em cada instante, a velocidade na secção de saída, se esta for colocada sob a forma  $V_e = C_v(t^*) \sqrt{gh_e}$  e, com os dados experimentais colhidos, determinar a função  $C_v(t^*)$  (essa metodologia não foi abordada na presente pesquisa).

- A utilização do coeficiente de pressão  $C_{sr}(x)$  possibilita, de fato, um bom ajuste. Porém, como provavelmente se trata das primeiras pesquisas sobre o assunto é um risco afirmar que o projetista deva adotar os valores constantes calculados ( $C_s=0,8$  e  $Xo/h_e=0,5$ ) para a geometria retangular. Também estes variam com o decorrer do tempo e precisam ser corrigidos.

**Concluiu-se então que:**

3. A possibilidade de ajuste das curvas experimentais com as teóricas é melhor quando se recorre à condição de contorno proposta devido ao uso dos seguintes parâmetros: a função representativa do coeficiente de pressão, o coeficiente  $C_s$  na saída do canal e o comprimento  $L_n$  em que a função se manifesta.

Observou-se ainda que:

- As curvas experimentais caracterizam de fato o esvaziamento de “canais curtos” e “não muito largos” pois foram determinadas com o parâmetro  $H_n/L_n$  variando entre  $\frac{1}{30} \leq \frac{H_n}{L_n} \leq \frac{1}{15}$ , ou seja, canais cujo comprimento é de apenas 15 a 30 vezes a sua profundidade. O outro parâmetro, que caracteriza a largura do canal  $H_n/B$  foi variado no intervalo  $\frac{1}{3} \leq \frac{H_n}{B} \leq \frac{2}{3}$ .

Como o tempo do esvaziamento total é curto (estimado em  $t=10s$  para escoar 90% do volume total) e os desvios entre as duas condições de contorno são significativos nos instantes.

**Concluiu-se então que:**

4. A rigor, pode-se verificar, pelo confronto entre os resultados teóricos e experimentais, que para canais curtos é conveniente utilizar a condição proposta.

## 14. BIBLIOGRAFIA

- ABBOT, M. B. Computational Hydraulics: elements of the theory of free surface flows. London: Pitman Publishing Limited, 1979, 324p.
- AMEIN, M.; CHU, H.L. Implicit numerical modeling of unsteady flows. Journal of the Hydraulic Division. v. 1011, n.HY6, p.717-731, 1975.
- BELLOS, C. V., SAKKAS, J. G., SOULIS, J. V. Experimental investigation of two-dimensional dam-break induced flows. Journal of Hydraulic Research, v. 30, n. 1, p. 47-63, August 1992.
- BURT, C. M., GARTRELL, G. Irrigation-canal-simulation model usage. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, v. 119, n. 4, p.631-636, July/August 1993.
- BRUSA, L. C. Transientes hidráulicos em redes de canais de irrigação. Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Impr. Univ., 1994, 110p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), UFRGS.

- CLEMMENS, A. J., BURT, C. M., CONTRACTOR, D. N., DEVRIES, J. J., FALVEY, H. T., GARTRELL, G., GOOCH, R. S., HOLLY, F., KEITH, J. D., MERKLEY, G. P., ROGERS, D. C., SCHUURMANS, W., STRELKOFF, T., WALKER, W. R. Unsteady-flow modeling of irrigation canals. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, v.119, n. 4, p. 615-630, July/August, 1993.
- CONTRACTOR, D. N., FELLOW., SCHUURMANS, W. Informed use and potential pitfalls of canal models. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, v. 119, n. 4, p.663-672, July/August, 1993.
- ERVINE, D. A., FALVEY, H. T., WITHERS W. Pressure fluctuations on plunge pool floors. Journal of Hydraulic Research, v. 35, n. 2, p. 257-279, October, 1997.
- FENNEMA, R. J., CHAUDHRY, M. H. Simulation of one-dimensional dam break flows. Journal of Hidraulic Research, v. 25, n.1, p. 41-51, August, 1987.
- FENNEMA, R. J. and CHAUDHRY, M. H. Explicit methods for 2-D transient free surface flow, ASCE, v.116, n.8, p.1013-1034, ago.1990.
- FERRO, V. Theoretical end-depth-discharge relationship for free overfall. Journal of Irrigation and Drainage Engineering v.125, n.1, p.40-43, January/February, 1999.
- FERRO, V. Flow measurement with rectangular free overfall. Journal of Irrigation and Drainage Engineering v.118, n.6, p.956-964, November/December, 1992.

- FOX, R. W., McDONALD, A. T. Introdução à mecânica dos fluidos. 4. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan S. A., 1992, 662p.
- FRENCH, R.H. Open-channel hydraulics. 2. ed. Singapore: McGraw-Hill Books Co, 1987, 705p.
- GARBRECHT, J. Analytical representation of cross-section hydraulic properties. Journal of Hidrology, v.119, p. 43-56, 1990.
- GARCIA, L. A. V. Regime permanente, transiente e oscilatório em rede de canais: aplicações em engenharia. São Paulo, SP, Impr. Univ., 1990, 148p. Dissertação (Mestrado), Escola Politécnica da USP.
- GARG, S. P. Distribution of head at a rectangular conduit outlet. Journal of the Hydraulics Division. v. 92, n. 4, p.11-31, July, 1966.
- GRAF, H. Free overfall as flow measuring device. Journal of Irrigation and Drainage Engineering v. 97, n. 1, p. 73-83, March, 1971.
- HEGGEN, R. J. Critical depth, velocity profile, and channel shape. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. v. 117, n.3, p. 442-448, May/June, 1991.
- HENDERSON, F. M. Open channel flow. New York: The Macmillian Company, 1966, 522p.

- HICKS, F. E., STEFFLER, P. M., YASMIN, N. One-dimensional dam-break solutions for variable width channels. Journal of Hydraulic Engineering, v. 123, n. 5, p. 464-468, May., 1997.
- HOLLY, M. F., MERKLEY, P.G. Unique problems in modeling irrigation canals. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, v.119, n.4, p.656-662, July/August, 1993.
- INTERCÂMBIO INTERNACIONAL SOBRE TRANSIENTES HIDRÁULICOS E CAVITAÇÃO – São Paulo, 1982. Anais, São Paulo, NSF/CNPq/CTH/DAEE/EPUSP. 2v.
- JHA, A. K., AKIYAMA, J., URA, M. First and second order flux difference splitting schemes for dam-break problem. Journal of Hydraulic Engineering, v. 1, n.12, p. 877-884, December, 1995.
- JHA, A. K., AKIYAMA, J., URA, M. A fully conservative Beam and Warming scheme for transient open channel flows. Journal of Hydraulic Research, v. 34, n.5, p. 605-619, April, 1997.
- LEMMIN, U., ROLLAND, T. Acoustic velocity profiler for Laboratory and Field Studies. Journal of Hydraulic Engineering, v. 123, n. 12, p. 1089-1098, December, 1997.
- LIU, F., FEYEN, J., BERLAMONT, J. Computation method for regulating unsteady flow in open channels. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, v. 118, n. 5, p.674-689, September/October, 1992.

- MAHMOOD, K., YEVJEVICH, V. Unsteady Flow in open channels. Michigan: Water Resources Publications, 1975, 484p, v.1.
- MISRA, R., SRIDHARAN, K., KUMAR, M. S. M. Transients in canal network. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, v. 118, n.5, p. 690-707, Sep./Oct., 1992.
- MONTES, J.S., Transition to a free-surface flow at end of a horizontal conduit. Journal of Hydraulic Research, v. 35, n. 2, p. 225-241, August, 1997.
- NAVARRO, P. G., ALCRUDO, F., SAVIRÓN, J. M. 1-D open-channel flow simulation using TVD-MacCormack scheme. Journal of Hydraulic Engineering, v.118, n.10, p.1359-1372, October, 1992.
- NAVARRO, P. G., SAVIRÓN, J. M. MacCormack method for numerical simulation of onedimensional discontinuous unsteady open channel flow. Journal of Hydraulic Research, v.30, n.1, p.95-105, 1992.
- NEZU, I., KADOTA, A., NAKAGAWA, H. Turbulent structure in unsteady depth-varying open-channel flows. Journal of Hydraulic Engineering, v. 123, n. 9, p.752-763, September 1997.
- QUEIROZ, O. M. Propagação de cheias: Aplicação do modelo Onda Cinemática ao Ribeirão da onça. São Carlos, S. P., Impr. Univ., 1991, 85p. Dissertação (Mestrado na Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo).



- RAHMAN, M., CHAUDHRY, M. H. Computation of flow in open-channel transitions. Journal of Hydraulic Research, v. 35, n. 2, p. 243-256, October, 1997.
- RAJARAMAM, N., MURALIDHAR. End depth for circular channels.. Journal of Irrigation and Drainage Engineering v.90, n.2, p.90-119, 1964a.
- ROBERSON, J. A., CASSIDY, J. J., CHAUDHRY, M. H. Hydraulic Engineering. Boston: Houghton Mifflin Company, 1988, 662p.
- ROBERSON, J. A., CROWE, C. T. Engineering Fluid Mechanics. 6. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1997, 689p.
- ROGERS, D. C., KACEREK, T. F., GOOCH, R. S. Field data for verifying canal unsteady flow models. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. v. 119, n. 4, p.679-692, July/August, 1993.
- ROLLAND, T., LEMMIN, U. A two-component acoustic velocity profiler for use in turbulent open-channel flow. Journal of Hydraulic Research, v. 35, n. 4, p. 545-561, Feb., 1998.
- SMITH, C.D. Brink depth for a circular channel. Journal of Hydraulic Engineering, v.89, n.6, p.125-134, 1962.
- SONG, T., GRAF, W. H. Velocity and turbulence distribution in unsteady open-channel flows. Journal of Hydraulic Engineering, v. 122, n. 3, p. 141-154, march., 1996.

- SOUZA, P. A., MARTINS, J. R. S., FADIGA JUNIOR, F. M. Métodos computacionais aplicados à engenharia hidráulica. São Paulo: Seção Técnica de Gráfica do Departamento de Águas e Energia Elétrica, 1991, 170p.
- STEFFLER, M. KHAN. Modeling verfalls sing vertically averaged and moment equations. Journal of Hydraulic Engineering, v. 122, n. 7, p. 397-401, July, 1996.
- STREETER, V. L., WYLIE, E. B. Mecânica dos fluidos. 7. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1982, 585p.
- STRELKOFF, S.T., FALVEY H.T. Numerical methods used to model unsteady canal flow. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, v. 119, n. 4, p. 637-655, July/August, 1993.
- STRELKOFF, T. S., CLEMMENS, A.J. Nondimensional expression of unsteady canal flow. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, v. 124, n. 1, p. 59-62, January/February, 1998.
- STRELKOFF, T. S., DELTOUR, J. L., BURT, C. M., CLEMMENS, A.J. BAUME, J. P. Influence of canal geometry and dynamics on controllability. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, v. 124, n. 1, p. 16-22, January/February, 1998.
- SIVALOGANATHON, K. Free surface flow computations by characteristics. Journal of the Hydraulics Division. v.104, n. 4, p. 543-556, 1978.
- TUCCI, C. E. M. Hidrologia. Porto Alegre: UFRGS/ABRH/EDUSP, 1993, 943p.

TUCCI, C. E. M. Hirodinâmica de rios e canais: curso realizado no CTH em janeiro de 1980. São Paulo, DAEE/EPUSP, 1980. (Comunicação técnica, n. 9).

WROBEL, L. C., EIGER, S., ROSMAN, P. C., TUCCI, C. E., CIRILLO, J. A., CABRAL, J. P. Métodos numéricos em recursos hídricos. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Recursos Hídricos – ABRH, 1989, 380p.

WYLIE, E. B. Unsteady Free-Surface Flow Computations, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, November, 1970

WYLIE, E. B., STREETER, V. L. Fluid transients. New York: McGraw-Hill, 1978, 384p

#### **14.1 BIBLIOGRAFIA CONSULTADA**

CAPART, H., SILLEN, X., ZECH, Y. Numerical and experimental water transients in sewer pipes. Journal of Hydraulic Research, v. 35, n. 5, p. 659-672, April, 1998.

CHAUDHRY, M. H. Open-channel flow. New Jersey: Prentice Hall, 1993, 483p.

CHOW, V. T. Open-channel hydraulics. Singapore: McGraw-Hill Book Co, 1986, 680p.

VENNARD, J. K., STREET, R. L. Elementos de mecânica dos fluidos. 5.ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978, 687p.

## APÉNDICE I

## **1. CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO**

Na análise do escoamento não permanente em canais, os cálculos têm início em um tempo específico. As condições do escoamento (profundidade e velocidade) neste início de tempo são conhecidas como as condições iniciais. Desde que os contornos de todo o sistema físico são localizados em distâncias finitas, serão especificadas nos cálculos algumas condições particulares nos limites ou contornos do sistema físico. Estas condições são chamadas de condições de contorno.

### **1.1 CONDIÇÕES INICIAIS**

Na resolução do sistema geral de equações, é necessário especificar o valor dos níveis e vazões em todas as seções no tempo inicial.

As condições iniciais podem ser obtidas por medição das variáveis, interpolando valores conhecidos em outras seções, calculados a partir de simulações anteriores, ou supondo um escoamento inicial permanente.

Como os dados são desconhecidos, existem algumas possibilidades de estimá-los:

a) Quando a condição inicial é a de escoamento permanente no canal ou rio, a determinação da superfície da linha de água é obtida mediante o cálculo da curva de remanso.

b) Quando as condições nos limites são conhecidas, podem-se estimar os valores intermediários por interpolação e exame do trecho em estudo.

Simulando-se o modelo em regime não permanente, sendo mantidos fixos e constantes os valores das condições de contorno externas, o modelo deve convergir a regime permanente.

## **1.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO**

As equações de Saint-Venant permitem representar o escoamento não permanente em canais. Mas, quando são modelados sistemas de configuração complexa ao longo da sua extensão, com freqüência tem-se trechos onde estas equações não podem ser aplicadas, porque nelas ocorrem fenômenos hidráulicos (como, por exemplo, queda livre, seção de profundidade crítica, etc), que são incompatíveis com as hipóteses assumidas na dedução das equações de Saint Venant.

## 1.2.1 CONDIÇÕES EXTERNAS

A consideração das condições nos limites é feita em função do regime a ser simulado. Quando o regime é subcrítico, deve-se especificar uma condição a montante e outra a jusante, já que os efeitos se propagam segundo as características. No caso em que o regime é supercrítico, devem-se especificar as condições a montante

Na extremidade de montante, pode-se especificar:

$$a - h(0,t) = h_1 (t)$$

$$b - Q(0,t) = Q_1 (t)$$

Essas funções podem ser obtidas dos registros de variações naturais do curso de água ou podem ser devidas à operação de obras hidráulicas.

Na extremidade a jusante, pode-se especificar:

$$a - h(n\Delta x,t) = h_2 (t)$$

$$b - Q(n\Delta x,t) = Q_2 (t)$$

$$c - Q(n\Delta x,t) = f \{h(n\Delta x,t)\}$$

A última condição ( *c* ) corresponde à curva-chave. Deve-se ter cuidado no uso desta condição. Ela é aplicável a modelos cinemáticos (Abbott [1966] ). Quando esta relação é usada num modelo dinâmico, a solução no limite está em conflito com a solução próxima a este limite, o que pode levar a resultados errôneos. Além disso, este

tipo de condição pode ser usada somente quando os efeitos a jusante são pequenos e a relação entre  $Q$  e  $h$  pode ser aproximada por uma linha reta ou curva.

Outras condições podem ser consideradas nos extremos (montante e jusante) do trecho em estudo. Relacionam-se a seguir algumas dessas condições.

### 1.2.1.1 VERTEDORES

Denominam-se vertedores as aberturas ou entalhes na parte superior de uma parede, através das quais o líquido escoar; por extensão, dá-se o nome de vertedor a toda a parede, bem como aos descarregadores de superfície dos reservatórios. Sua principal utilização é na medição da vazão das canalizações abertas e no controle do escoamento em galerias e canais. Do ponto de vista hidráulico, podem ser considerados como orifícios aos quais falta a parte superior. No vertedor, a carga é a altura de água sobre a soleira, medida na seção, suficientemente a montante para não ser influenciada pelo abaixamento da superfície.

A veia líquida que escoar pelo vertedor é chamada lâmina (nappe); se ela toca a crista do vertedor, segundo uma linha, o vertedor é chamado soleira fina ou delgada. A lâmina é chamada livre quando existe aeração na sua face inferior, e a água do vertedor escoar livremente no canal de jusante.

Os vertedores podem ter diversas formas e disposições, sendo diferente o comportamento da lâmina em cada caso. Podem eles ser classificados:

- a) Quanto à forma: simples (retangulares, triangulares, trapezoidais, etc.) e compostos;
- b) Quanto à altura da soleira: livres ou completos (nível de jusante inferior à crista) e incompletos ou afogados (nível de jusante acima da crista);



- c) Quanto à espessura da parede: vertedores em parede delgada e vertedores de soleira espessa;
- d) Quanto à largura: vertedores contraídos ou com contração lateral (comprimento da soleira menor que a largura do canal de aproximação), e vertedores sem contração lateral.

A dedução de uma fórmula para vertedores necessita de simplificações para o problema; entretanto, a forma da relação entre a carga e a vazão poderá ser determinada, e um coeficiente experimental poderá ser definido. A fim de deduzir uma equação para um vertedor, supor-se-á que (1) a distribuição de velocidades a montante do vertedor seja uniforme, (2) todas as partículas fluidas se movam horizontalmente à medida que elas passem sobre a crista do vertedor, (3) a pressão na cauda seja nula, e (4) o efeito da viscosidade, da turbulência, dos escoamentos secundários e os efeitos de tensão superficial possam ser todos desprezados.

O escoamento pode ser através de vertedor livre ou afogado. O critério para distinguir estes tipos de vertedores é o seguinte (Figura [1.1] ). Em caso do vertedor ser afogado,

$$(h_2 - h_b) < \frac{2}{3}(h_1 - h_b) \quad (1.1)$$

e, em caso de vertedor ser livre,

$$(h_2 - h_b) \geq \frac{2}{3}(h_1 - h_b) \quad (1.2)$$

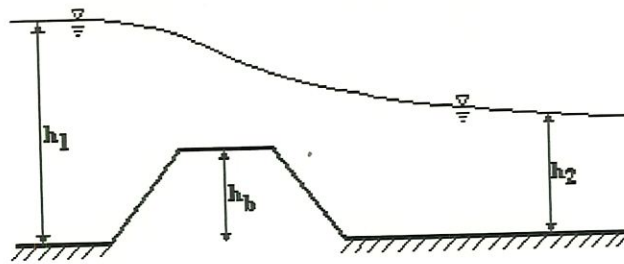


Figura 1.1 Vertedor

Quando o vertedor é livre, o escoamento é representado de forma geral pela equação

$$Q = CLH^{3/2} \quad (1.3)$$

onde  $C$  é um coeficiente que depende do tipo do vertedor, é determinado experimentalmente, e inclui o efeito de muitos fenômenos desprezados inicialmente. O coeficiente do vertedor é, antes de mais nada, um coeficiente de contração que exprime a extensão da contração da cauda verdadeira abaixo daquela suposta pela análise simplificada.  $L$  é a largura do vertedor;  $H$  é a altura de carga acima da crista do vertedor.

$$H = h_1 - h_b + \frac{V_1^2}{2g} \quad (1.4)$$

Após substituições, tem-se

$$Q = CL \left( h_1 - h_b + \frac{V_1^2}{2g} \right)^{3/2} \quad (1.5)$$

Esta é uma equação que relaciona  $Q$  e  $h_1$ , e pode ser tratada como a equação da curva-chave.

Quando o vertedor é afogado, a equação usada é a seguinte:

$$Q = mL\sqrt{2g(h_1 - h_b)}(h_2 - h_b) \quad (1.6)$$

onde  $m$  é o coeficiente experimental que depende do tipo do vertedor;  $L$ , a largura;  $h_1$ , o nível da água na seção a jusante próxima ao vertedor;  $h_b$ , o nível do vertedor.

Essas equações podem ser introduzidas no sistema de equações não permanente utilizando-se a expansão em série de Taylor.

### 1.2.1.2 MEDIDORES DE PROFUNDIDADE CRÍTICA

A medição de vazão em condutos livres e, particularmente, nos canais, constitui, sem dúvida, uma das mais importantes questões da Hidráulica Aplicada.

A análise de problemas de escoamentos em canais começa normalmente pela procura do ponto do canal na qual, ou próximo do qual, a profundidade crítica deverá ocorrer. Tais pontos quando determinam a mudança de escoamento subcrítico para escoamento supercrítico são chamados pontos de controle, porque governam ou controlam as profundidades do líquido no trecho do canal a montante deste ponto. A

relação fixada entre profundidade e vazão que representa o escoamento crítico torna este tipo de escoamento uma base conveniente para medir a vazão. Esta previsão é um instrumento poderoso para a visualização em bloco da variedade de fenômenos que deverão ocorrer, e que deve ser feita antes de se realizarem cálculos minuciosos.

Antes de considerar algum medidor em particular, consideraram-se primeiro certos princípios gerais, segundo os quais o escoamento crítico ocorrerá na mudança de declividade, e a distribuição de pressão é admitida hidrostática.

O exemplo mais óbvio para a previsão de uma profundidade crítica pode ser obtido, por meio de um longo canal de inclinação suave ( $S_o < S_c$ ) ligado a um longo canal com inclinação abrupta ( $S_o > S_c$ ). Muito longe, a montante do último canal, ocorrerá escoamento uniforme subcrítico a uma profundidade normal,  $h_{01}$ , e em pontos muito afastados, a jusante da interseção, ocorrerá um escoamento uniforme supercrítico a uma profundidade menor,  $h_{02}$ . Esses dois escoamentos uniformes serão ligados por um trecho de escoamento variável, que, num dado ponto, deve possuir uma profundidade crítica. A experiência mostra que esse ponto deve ser próximo do ponto de interseção entre as duas retas que dão as inclinações dos canais (na realidade esse ponto está situado um pouco mais a montante da interseção), e, para muitas aplicações, pode-se considerar que ele coincide com o de interseção. Deve-se notar, contudo, que, nas vizinhanças da interseção, as linhas de corrente são curvas e convergentes, e não se pode usar uma aproximação unidimensional com uma distribuição hidrostática de pressões. O fato de a profundidade crítica não se situar exatamente no ponto de interseção mencionado impede que ele seja usado na prática para se obter a vazão exata através da medida da profundidade e da aplicação das Equações (1.7) e (1.8). Contudo, a possibilidade de se aplicar este método para a medida aproximada da vazão não deve ser menosprezada.

$$q = \sqrt{gh_c^3} \quad \text{ou} \quad h_c = \sqrt[3]{\frac{q^3}{g}} \quad (1.7)$$

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A^3}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{Q^2 b}{gA^3} = 1 \quad (1.8)$$

Quando um longo canal de inclinação abrupta se descarrega em outro de inclinação suave, as profundidades normais ocorrem a montante e a jusante do ponto de interseção entre as duas inclinações, porém usualmente a profundidade crítica não se encontra neste ponto. Nestas circunstâncias, forma-se um ressalto hidráulico cuja localização será determinada (por meio de cálculos de escoamentos variáveis) pelos detalhes de inclinação, rugosidade, forma do canal, e assim por diante, porém a profundidade crítica se encontrará dentro do ressalto hidráulico.

Estes fatos constituem a base para o projeto e uso dos medidores de profundidade crítica, como os vertedores de crista larga e o medidor Parshall.

Inúmeros são os dispositivos e métodos que vêm sendo empregados para esse fim. Cada processo aplica-se especificamente a certos casos, limitando-se, portanto, a determinadas condições, que tornam vantajosa a sua aplicação.

Os medidores de regime crítico podem consistir num simples estrangulamento adequado de seção, no rebaixo ou no alteamento de fundo, ou, ainda, numa combinação conveniente dessas singularidades, capaz de ocasionar o regime livre de escoamento.

### 1.2.1.2.1 VERTEDORES DE CRISTA LARGA

A ocorrência da profundidade crítica em estruturas de transbordamento pode ser demonstrada examinando-se o escoamento sobre o topo de um vertedor de crista larga (Figura [1.2] ) equipado com uma comporta na extremidade a jusante do escoamento, e produzindo-se uma descarga de um grande reservatório com a superfície livre situada a uma altitude constante. Como a linha de energia possui posição fixa na superfície do reservatório, conclui-se que o escoamento que ocorre sem comporta é máximo e que a profundidade sobre a crista é, portanto, a profundidade crítica. Para o escoamento sobre vertedores, uma relação entre carga e vazão deve ser encontrada. Isso pode ser conseguido pela seguinte consideração (para um vertedor muito elevado)  $y_c = 2H/3$

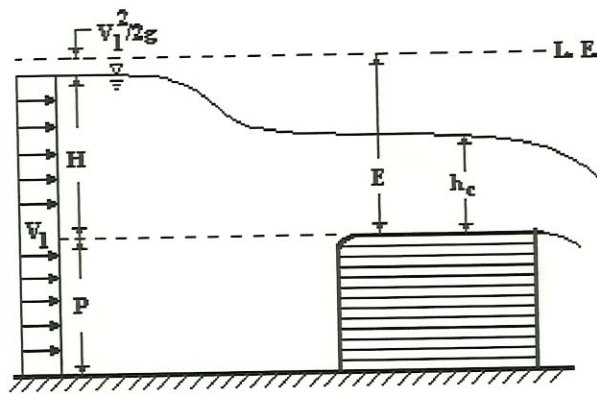


Figura 1.2 Vertedor de crista larga.

$$q = \sqrt{gh_c^3} \quad (1.9)$$

$$q = \sqrt{gh_c^3} = \sqrt{g\left(\frac{2H}{3}\right)^3} = 0,557 \times \frac{2}{3} \sqrt{2g} H^{3/2} \quad (1.10)$$

Usando-se a equação de Bernoulli para a dedução de uma fórmula básica para vertedores retangulares, tem-se:

$$q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} H^{3/2} \quad (1.11)$$

Nesta equação, deve-se introduzir um coeficiente determinado experimentalmente,  $C_w$ , o qual inclui o efeito de muitos fenômenos desprezados inicialmente. Para um escoamento real sobre um vertedor, a relação entre a vazão e a perda de carga torna-se

$$q = C_w \frac{2}{3} \sqrt{2g} H^{3/2} \quad (1.12)$$

O coeficiente do vertedor para um vertedor de crista larga ideal pode ser calculado igualando-se as Equações (1.10) e (1.12) para se obter

$$C_w = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{E}{H} \right)^{3/2} \quad (1.13)$$

Para um vertedor muito elevado  $P/H \rightarrow \infty$ ,  $E \rightarrow H$ ,  $E/H \rightarrow 1$ , e  $C_w \rightarrow 1/\sqrt{3} = 0,577$ , conforme indica a Equação (1.10); para um vertedor mais baixo,  $P/H < \infty$ ,  $E > H$ ,  $E/H > 1$ , e  $C_w > 0,577$ . Portanto, o coeficiente do vertedor cresce com a diminuição de  $P/H$  e mostra a mesma tendência dada pela fórmula de Rehbock. Medidas experimentais também mostram esta tendência, porém os valores de  $C_w$  obtidos experimentalmente são alguns por cento menores do que aqueles relativos ao escoamento ideal, por causa da perda de carga acompanhada pela queda da linha de energia. Então, como se desprezou o atrito, na dedução da Equação (1.10), o coeficiente  $0,577$  é mais elevado do que o obtido experimentalmente. Testes realizados com vertedores elevados e de crista larga fornecem coeficientes entre  $0,50$  e  $0,57$  (dependendo dos detalhes da forma do vertedor).

O raciocínio do vertedor de crista larga pode ser estendido a uma queda livre (Figura [1.3] ) de um longo canal com inclinação suave, para se concluir que a profundidade passará pelo valor crítico nas vizinhanças da quina da queda. Rouse verificou que, para tais canais retangulares, a profundidade crítica ocorre a uma distância curta a montante da quina (de  $3$  a  $4 h_c$ ) e que a profundidade sobre a quina ( $h_e$ ) é de  $71,5\%$  da profundidade crítica. Usando-se este resultado na Equação (1.9), Rouse propôs a queda livre como um dispositivo simples para medir a vazão, o que necessita apenas da medida da profundidade da quina, no início da queda livre.



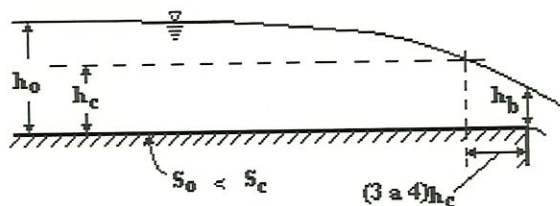


Figura 1.3 Queda livre

### 1.2.1.2.2 MEDIDOR PARSHALL

Embora os vertedores sejam um método efetivo de criar artificialmente uma seção crítica em que a vazão pode ser determinada, a instalação de um deles tem pelo menos duas desvantagens. Primeiro, o seu uso resulta em perdas de carga relativamente altas. Segundo, muitos criam uma região de água parada a montante da instalação, que pode servir como uma bacia para sedimentos e outros detritos presentes no escoamento. Essas desvantagens são superadas com o uso do medidor Parshall.

O medidor Parshall se inclui entre os de regime crítico, tendo sido idealizado por R. L. Parshall, engenheiro do Serviço de Irrigação do Departamento de Agricultura dos Estados Unidos. Consiste em uma seção de largura convergente, uma seção estrangulada, ou garganta, e uma seção divergente, dispostas em planta, como mostra a Figura (1.4).

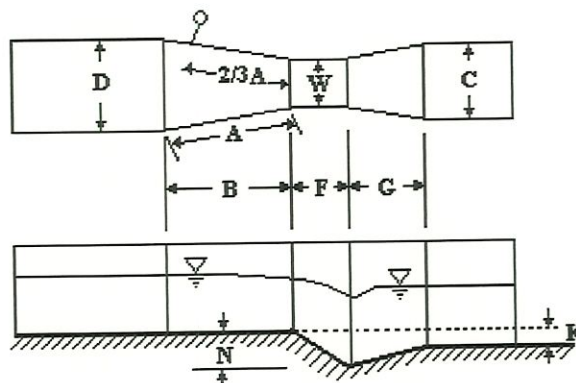


Figura 1.4 Medidor Parshall

A seção de largura convergente é criada para fazer que o escoamento passe através de uma profundidade crítica.

O medidor Parshall foi idealizado tendo, como objetivo principal, a irrigação; os menores tamanhos, para regular a descarga de água distribuída às propriedades agrícolas, e os maiores, para serem aplicados aos grandes canais de rega.

Dadas as vantagens do medidor, inúmeras são as aplicações atuais, tendo o seu emprego se generalizado além das expectativas.

Os medidores Parshall vêm sendo aplicados para o controle da velocidade, nas caixas de areia das estações de tratamento de esgotos. Em São Paulo, o primeiro “Parshall” de que se tem notícia foi aplicado em uma estação de tratamento, em 1939.

Em 1947, Morgan e Ryan projetaram para Greeley, Colorado, um Parshall modificado, que associa as funções de um medidor às de um dispositivo de mistura rápida: dispersão de coagulantes em tratamento de água.

A medição de vazão, tão necessária em serviços de abastecimento de água, pode ser realizada, com relativa facilidade, utilizando-se, convenientemente e sempre que possível, medidores Parshall. O seu emprego tem sido recomendado para canais adutores, estações de tratamento, em entradas em reservatórios, etc.

## CONDIÇÕES DE DESCARGA

O escoamento através de um medidor Parshall pode se verificar em duas condições diferentes, que correspondem a dois regimes distintos:

- 1) - escoamento ou descarga livre;
- 2) - afogamento ou submersão.

No primeiro caso, a descarga se faz livremente como nos vertedores, em que a veia vertente independe das condições de jusante.

O segundo caso ocorre, quando o nível de água a jusante é suficientemente elevado para influenciar e retardar o escoamento através do medidor: é o regime comumente apontado como “descarga submersa”, de características diversas daquelas que se verificam para os vertedores.

No caso de escoamento livre, é suficiente medir-se a carga  $H_a$  para se determinar a vazão.

Se o medidor for afogado, será necessário medir-se, também, uma segunda carga  $H_b$ , em ponto próximo da seção final da garganta, ou seja, a profundidade do escoamento na seção  $B$ .

A relação  $H_b/H_a$  constitui a razão de submersão ou a “submergência”. Se o valor de  $H_b/H_a$  for igual ou inferior a 0,60 (60%) para os Parshall de 3, 6 ou 9

polegadas, ou então, igual ou inferior a **0,70** (70%) para os medidores de **1 a 8** pés, o escoamento será livre.

A condição de submersão do escoamento, ocorre quando a razão entre  $H_b$  e  $H_a$  excede os limites:

$$\frac{H_b}{H_a} \geq 0,6 \quad \text{for} \quad W=0,25;0,50;0,75 \text{ ft} (0,076;0,15;0,23\text{m}) \quad (1.14)$$

$$\frac{H_b}{H_a} \geq 0,7 \quad \text{for} \quad 1 \leq W \leq 8 \text{ ft} (0,30 \leq W \leq 2,4\text{m}) \quad (1.15)$$

$$\text{e } \frac{H_b}{H_a} \geq 0,8 \quad \text{for} \quad 10 \leq W \leq 50 \text{ ft} (0,24 \leq W \leq 15\text{m}) \quad (1.16)$$

Então, se esses limites forem ultrapassados, haverá o afogamento e a vazão do medidor Parshall será reduzida. Como já foi dito, será, então, necessário medir-se as duas alturas para se calcular a vazão. A vazão real será inferior à obtida pela equação sumarizada na Tabela (1.1), sendo portanto indispensável aplicar fatores de correção aos valores obtidos das equações (Chow [1959] ).

Na prática, sempre que possível, procura-se ter o escoamento livre, pelo fato de se precisar de uma única medição de carga. Às vezes, contudo, essa condição não pode ser conseguida ou estabelecida, devido a circunstâncias locais ou limitações impostas.

De qualquer maneira, entretanto, a submergência nunca deverá ultrapassar o limite prático de **95%**, pois que, acima deste valor, não se pode contar com a precisão desejável (Chow [1959]).

## SELEÇÃO DE TAMANHO

A seleção do medidor Parshall de tamanho mais conveniente para qualquer vazão envolve considerações como as seguintes: largura do canal existente, profundidade da água nesse canal, perda de carga admissível, possibilidade de vazões futuras diferentes, etc.

Para a fixação das dimensões definitivas, pode-se partir de um tamanho escolhido inicialmente, fazendo-se para o mesmo e para outros tamanhos próximos os cálculos e verificações.

Como primeira indicação, convém mencionar que a largura da garganta ( $W$ ), frequentemente, está compreendida entre um terço e a metade da largura dos canais existentes. Isso não se aplica, entretanto, aos canais rasos e muito largos ou, então, muito profundos e estreitos.

O medidor Parshall é projetado para operar usualmente em condições de escoamento livre tendo a profundidade crítica em uma seção contraída onde ocorre o escoamento crítico seguido por um comprimento pequeno onde o escoamento supercrítico desenvolve.

A relação empírica vazão-profundidade do medidor Parshall é determinada pela largura da garganta, conforme dados da Tabela (1.1). Nessas equações,  $Q$  = a vazão em  $\text{ft}^3/\text{s}$ ,  $W$  = largura da garganta em  $\text{ft}$ , e  $H_a$  = profundidade a montante do escoamento na seção A, (Figura [1.4]), em  $\text{ft}$ .

Tabela 1.1 Relação empírica vazão-profundidade.

| Largura da garganta, ft | Equação da vazão, ft <sup>3</sup> /s |
|-------------------------|--------------------------------------|
| 0,25                    | $Q = 0,992H_a^{1.547}$               |
| 0,50                    | $Q = 2,06H_a^{1.58}$                 |
| 0,67                    | $Q = 3,07H_a^{1.53}$                 |
| $1 \leq W \leq 8$       | $Q = 4WH_a^{1.522}w^{0.026}$         |
| $10 \leq W \leq 50$     | $Q = (3,6875W + 2,5)H_a^{1.6}$       |

Nas Tabelas (1.2) e (1.3), são especificadas as dimensões e capacidades do medidor Parshall para diferentes larguras de garganta. Para maiores esclarecimentos, ver Chow (1986).

Tabela 1.2 Dimensões Padronizadas de Medidores Parshall  
(centímetros) (Ver Figura 1.4).

|        | W     | A     | B     | C     | D     | E     | F    | G     | K    | N    |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|------|------|
| 1"     | 2,5   | 36,3  | 35,6  | 9,3   | 16,8  | 22,9  | 7,6  | 20,3  | 1,9  | 2,9  |
| 3"     | 7,6   | 46,6  | 45,7  | 17,8  | 25,9  | 45,7  | 15,2 | 30,5  | 2,5  | 5,7  |
| 6"     | 15,2  | 61,   | 61,0  | 39,4  | 40,3  | 61,0  | 30,5 | 61,0  | 7,6  | 11,4 |
| 9"     | 22,9  | 88,0  | 86,4  | 38,0  | 57,5  | 76,3  | 30,5 | 45,7  | 7,6  | 11,4 |
| 1'     | 30,5  | 137,2 | 134,4 | 61,0  | 84,5  | 91,5  | 61,0 | 91,5  | 7,6  | 22,9 |
| 1 1/2' | 45,7  | 144,9 | 142,0 | 76,2  | 102,6 | 91,5  | 61,0 | 91,5  | 7,6  | 22,9 |
| 2'     | 61,0  | 152,5 | 149,6 | 91,5  | 120,7 | 91,5  | 61,0 | 91,5  | 7,6  | 22,9 |
| 3'     | 91,5  | 167,7 | 164,5 | 122,0 | 157,2 | 91,5  | 61,0 | 91,5  | 7,6  | 22,9 |
| 4'     | 122,0 | 183,0 | 179,5 | 152,5 | 193,8 | 91,5  | 61,0 | 91,5  | 7,6  | 22,9 |
| 5'     | 152,5 | 198,3 | 194,1 | 183,0 | 230,3 | 91,5  | 61,0 | 91,5  | 7,6  | 22,9 |
| 6'     | 183,0 | 213,5 | 209,0 | 213,5 | 266,7 | 91,5  | 61,0 | 91,5  | 7,6  | 22,9 |
| 7'     | 213,5 | 228,8 | 224,0 | 244,0 | 303,0 | 91,5  | 61,0 | 91,5  | 7,6  | 22,9 |
| 8'     | 244,0 | 244,0 | 239,2 | 274,5 | 340,0 | 91,5  | 61,0 | 91,5  | 7,6  | 22,9 |
| 10'    | 305,0 | 274,5 | 427,0 | 366,0 | 475,9 | 122,0 | 91,5 | 183,0 | 15,3 | 34,3 |

**Tabela 1.3** Limites de aplicação: Medidores Parshall  
com escoamento livre

| W    |       | Capacidade : l/s |        |
|------|-------|------------------|--------|
|      |       | Mín.             | Máx.   |
| 3"   | 7,6   | 0,85             | 53,8   |
| 6"   | 15,2  | 1,52             | 10,4   |
| 9"   | 22,9  | 2,55             | 251,9  |
| 1'   | 30,5  | 3,11             | 455,6  |
| 1 ½' | 45,7  | 4,25             | 696,2  |
| 2'   | 61,0  | 11,89            | 936,7  |
| 3'   | 91,5  | 17,26            | 1426,3 |
| 4'   | 122,0 | 36,79            | 1921,5 |
| 5'   | 152,5 | 62,80            | 2422   |
| 6'   | 183,0 | 74,40            | 2929   |
| 7'   | 213,5 | 115,40           | 3440   |
| 8'   | 244,0 | 130,70           | 3950   |
| 10'  | 305,0 | 200,00           | 5660   |

Em escoamento livre, a única medida de carga  $H_a$ , necessária e suficiente para se conhecer a vazão, é feita na seção convergente, em um ponto localizado a  $2/3$  da dimensão  $B$  (ou  $2/3$  de  $A$ ).

Nessa posição, pode-se medir a altura do nível de água com uma régua, ou instala-se, junto à parede, uma escala para as leituras. Pode-se também assentar um cano de 1 ou 2 polegadas, comunicando o nível d'água a um poço lateral de medição. Nesse poço, poder-se-á ter uma bóia acionando uma haste metálica, para a indicação mecânica da vazão ou, ainda, para a transmissão elétrica do valor medido, à distância.

Os poços laterais de medição geralmente são de seção circular, com diâmetro igual a  $W+0,15 m$ .

Se as condições de escoamento forem de submersão, além da medida na posição acima especificada, será necessário medir-se a altura do nível de água  $H_b$ , em ponto próximo da seção final da garganta. Para os medidores de 6 polegadas até 8 pés, a posição para essa segunda medida deverá ficar a 2 polegadas a montante da parte final da seção estrangulada.

As duas cargas,  $H_a$  e  $H_b$ , são medidas a partir da mesma referência: cota de fundo da seção convergente.

## VANTAGENS DOS MEDIDORES PARSHALL

As vantagens dos medidores Parshall, que decorrem de fatores já apontados, podem ser resumidas como se segue:

- a) Grande facilidade de realização;
- b) Baixo custo de execução;
- c) Não há sobrelevação de fundo;
- d) Não há perigo de formação de depósitos devidos a matérias em suspensão, sendo por isso de grande utilidade no caso de esgotos ou de águas que carregam sólidos em suspensão;
- e) Podem funcionar como um dispositivo em que uma só medição de  $H$  é suficiente;



f) Medidores Parshall, de tamanhos os mais variados, já foram ensaiados hidraulicamente, o que permite o seu emprego em condições semelhantes, sem necessidade de novos ensaios ou aferições;

g) Na sua execução, podem ser empregados materiais diversos, devendo-se selecionar o mais conveniente para as condições locais. Já foram empregados: concreto, alvenarias, madeira, metal, cimento-amianto, etc.

## LOCAÇÃO DOS MEDIDORES PARSHALL

Os medidores Parshall devem ser colocados onde não haja grandes turbulências na sua seção inicial. Não devem, por exemplo, ser instalados logo após uma comporta, ou uma curva, pois os turbilhonamentos provocados na água poderiam causar ondas ou sobrelevações capazes de comprometer a precisão dos resultados.

### 1.2.1.3 COMPORTAS

Uma comporta é frequentemente empregada para regular a vazão. O escoamento por baixo de uma comporta típica é mostrado na

No caso de uma comporta no extremo de jusante, a relação entre a vazão e o nível é obtida por

$$Q = C_d L d_{co} \sqrt{2g(E_u - d_{co})} \quad (1.17)$$

onde  $C_d$  é o coeficiente de descarga;  $d_{co} = C_c d_s$ , onde  $C_c$  é o coeficiente de contração das comportas e  $d_s$ , a altura da abertura abaixo da comporta;  $E_u$  é a energia específica e  $L$ , a largura.

## 1.2.2 CONDIÇÕES INTERNAS

Um sistema fluvial dificilmente possui características físicas uniformes. Quando as variações morfológicas não são muito grandes, as equações básicas de escoamento gradual podem representar o escoamento sem muito erro.

Quando existem variações bruscas na morfologia do rio ou modificações feitas pelo homem, é necessário preparar equações especiais para retratar o escoamento .

As condições internas freqüentemente encontradas na prática são:

- confluências;
- escoamento sobre vertedouro;
- escoamento por comportas;
- bacias de armazenamento;
- limite sem saída.

## APÊNDICE II

# **1. CÁLCULO DO PERFIL DO ESCOAMENTO GRADUALMENTE VARIADO EM REGIME PERMANENTE**

## **1.1 DEFINIÇÃO DO PERFIL DO ESCOAMENTO**

Quando o escoamento em canais abertos encontra uma variação na declividade do leito ou está se aproximando da profundidade normal, a profundidade do escoamento muda gradualmente. O escoamento com a profundidade variando gradualmente deve ser analisado pela aplicação da equação da energia a um volume de controle diferencial; o resultado é uma equação diferencial que relaciona as mudanças na profundidade com a distância ao longo do escoamento. A equação resultante pode ser resolvida numericamente se admitirmos que a perda de carga em cada seção é a mesma que aquela para o escoamento de profundidade normal, com a velocidade e o

raio hidráulico da seção. A profundidade da água e a altura do leito do canal são consideradas como variando lentamente. Como no caso do escoamento de profundidade normal, admite-se que a velocidade é uniforme e que a distribuição de pressão é hidrostática em cada seção.

São movimentos permanentes, vale dizer, as grandezas que interferem no escoamento, em cada seção, não se modificam com o tempo, e a distribuição das pressões obedece à Lei Hidrostática. As linhas de fluxo são consideradas praticamente paralelas. Desse modo, as fórmulas estabelecidas para o movimento uniforme aplicam-se ao escoamentos gradualmente variado com aproximações satisfatórias.

O movimento gradualmente variado pode ocorrer de forma acelerada, como nos trechos iniciais dos condutos de seções constantes, nos quais o movimento uniforme subsequente se realiza em regime supercrítico.

O movimento pode ser gradualmente retardado em trechos de canais, a montante de obstáculos que se opõem ao escoamento.

Nos canais de seção variável, nas transições lentas da seção transversal e nas mudanças de declividade, pode verificar-se um ou outro tipo de movimento gradualmente variado.

Nos casos desse tipo de movimento, o gradiente hidráulico é variável, sendo necessária, então, a sua determinação ao longo do escoamento. Convém observar que, em certas circunstâncias, a lâmina de água pode atingir a profundidade crítica, significando que houve mudança no regime de escoamento de supercrítico para subcrítico ou vice-versa.

De modo geral, pode-se dizer que a forma do perfil de linha de água depende da comparação, em cada seção, da profundidade crítica com a profundidade normal e desta com a profundidade em que efetivamente se realiza o escoamento.

Quando o movimento é uniforme, a linha de água coincide com uma das retas,  $N_n$  (nível normal) ou  $N_c$  (nível crítico), conforme a profundidade seja normal ou crítica, respectivamente.

O objetivo principal do estudo dos canais que funcionam em regime permanente gradualmente variado consiste em determinar a forma do perfil da superfície líquida.

## 1.2 CLASSIFICAÇÃO DOS PERFIS LONGITUDINAIS

Para o projeto de canais bem como para a análise de seus desempenhos, o engenheiro deve estar apto a fazer a previsão das formas e dos perfis de velocidades nos escoamentos variáveis (não uniformes) a fim de facilitar seus cálculos. O primeiro objetivo pode ser alcançado pelo desenvolvimento e estudo da equação diferencial do escoamento variável (Equação [1.1] ), e o segundo deve ser conseguido por integração ou por estimativas graduais.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - F_r^2} \quad (1.1)$$

O comportamento geral dos perfis das superfícies pode ser estudado com maior facilidade em canais largos e retangulares; para eles,  $B \gg y$  e  $R_h \approx y$ . Para este caso, o perfil da superfície é governado por

$$\frac{dy}{dx} = S_o \frac{[1 - (y_n / y)^{10/3}]}{[1 - (y_c / y)^3]} \quad (1.2)$$

O exame dos sinais do numerador e do denominador da Equação (1.2) permite determinar a natureza e a forma do perfil longitudinal da superfície da água. Se

$dy/dx > 0$ , a profundidade cresce e a velocidade decresce para jusante;

$dy/dx < 0$ , a profundidade diminui e a velocidade aumenta para jusante;

$dy/dx = 0$ , a profundidade se mantém constante ao longo do canal.

O reconhecimento da forma da curva pode ser feito com facilidade comparando-se os valores das profundidades normal e crítica que não dependem das condições do movimento variado, e sim da vazão e da declividade com a profundidade da água numa seção, denominada seção de controle, cujas características devem ser conhecidas, como, por exemplo, a profundidade da água junto a uma barragem ou abaixo de uma comporta. A curva que representa o perfil da água estará numa das regiões 1, 2 ou 3, dependendo da altura de água na seção de controle, conforme mostram os esquemas da Figura (1.1).

A Equação (1.2) mostra que o sinal de  $dy/dx$  depende somente da relação entre as profundidades  $y$ ,  $y_n$  e  $y_c$ . Na discussão sobre o escoamento crítico, observa-se que

se  $y_n > y_c$ , então  $S_0 < S_c$ ; a declividade é suave ( $M$ )

se  $y_n = y_c$ , então  $S_0 = S_c$ ; a declividade é crítica ( $C$ )

se  $y_n < y_c$ , então  $S_0 > S_c$ ; a declividade é forte ( $S$ )

Além disso, o leito do canal pode ser horizontal ( $H$ ), caso em que  $S_0 = 0$ , ou pode ser adverso ( $A$ ), com  $S_0 < 0$ .

Então, para uma dada declividade do leito (designada pelas letras  $M$ ,  $C$ ,  $S$ ,  $H$ , ou  $A$ ), a forma do perfil da superfície depende da profundidade real,  $y$ , relativa a  $y_n$  e  $y_c$ . Os números usados para designar as três possibilidades são:

Curva 1:  $y > y_n$  e  $y > y_c$

Curva 2:  $y_n > y > y_c$  ou  $y_c > y > y_n$

Curva 3:  $y < y_n$  e  $y < y_c$

As características gerais desses perfis são dados na Tabela (1.1), e as formas são mostradas na Figura (1.1).

Tabela 1.1 Tipos de perfis de escoamento em canais prismáticos

| Declividade do canal       | Classificação do perfil |                |                | Relação entre $y$ , $y_n$ e $y_c$ | Tipos de curvas | Tipos De escoamento |
|----------------------------|-------------------------|----------------|----------------|-----------------------------------|-----------------|---------------------|
|                            | Coluna 1                | Coluna 2       | Coluna 3       |                                   |                 |                     |
| Fraca<br>$0 < S_0 < S_c$   | M <sub>1</sub>          |                |                | $y > y_n > y_c$                   | Remanso         | Subcrítico          |
|                            |                         | M <sub>2</sub> |                | $y_n > y > y_c$                   | Rebaixamento    | Subcrítico          |
|                            |                         |                | M <sub>3</sub> | $y_n > y_c > y$                   | Remanso         | Subcrítico          |
| Crítico<br>$S_0 = S_c > 0$ | C <sub>1</sub>          |                |                | $y > y_c = y_n$                   | Remanso         | Subcrítico          |
|                            |                         | C <sub>2</sub> |                | $y_c = y = y_n$                   |                 |                     |
|                            |                         |                | C <sub>3</sub> | $y_c = y_n > y$                   | Remanso         | Supercrítico        |
| Forte<br>$S_0 > S_c > 0$   | S <sub>1</sub>          |                |                | $y > y_c > y_n$                   | Remanso         | Subcrítico          |
|                            |                         | S <sub>2</sub> |                | $y_c > y > y_n$                   | Rebaixamento    | Supercrítico        |
|                            |                         |                | S <sub>3</sub> | $y_c > y_n > y$                   | Remanso         | Supercrítico        |
| Horizontal<br>$S_0 = 0$    |                         |                |                |                                   |                 |                     |
|                            |                         | H <sub>2</sub> |                | $y_n > y > y_c$                   | Rebaixamento    | Subcrítico          |
|                            |                         |                | H <sub>3</sub> | $y_n > y_c > y$                   | Remanso         | Supercrítico        |
| Aclive<br>$S_0 < 0$        |                         |                |                |                                   |                 |                     |
|                            |                         | A <sub>2</sub> |                | $y^*_n > y > y_c$                 | Rebaixamento    | Subcrítico          |
|                            |                         |                | A <sub>3</sub> | $y^*_n > y_c > y$                 | Remanso         | Supercrítico        |

$y^*_n$  Assumido valor positivo



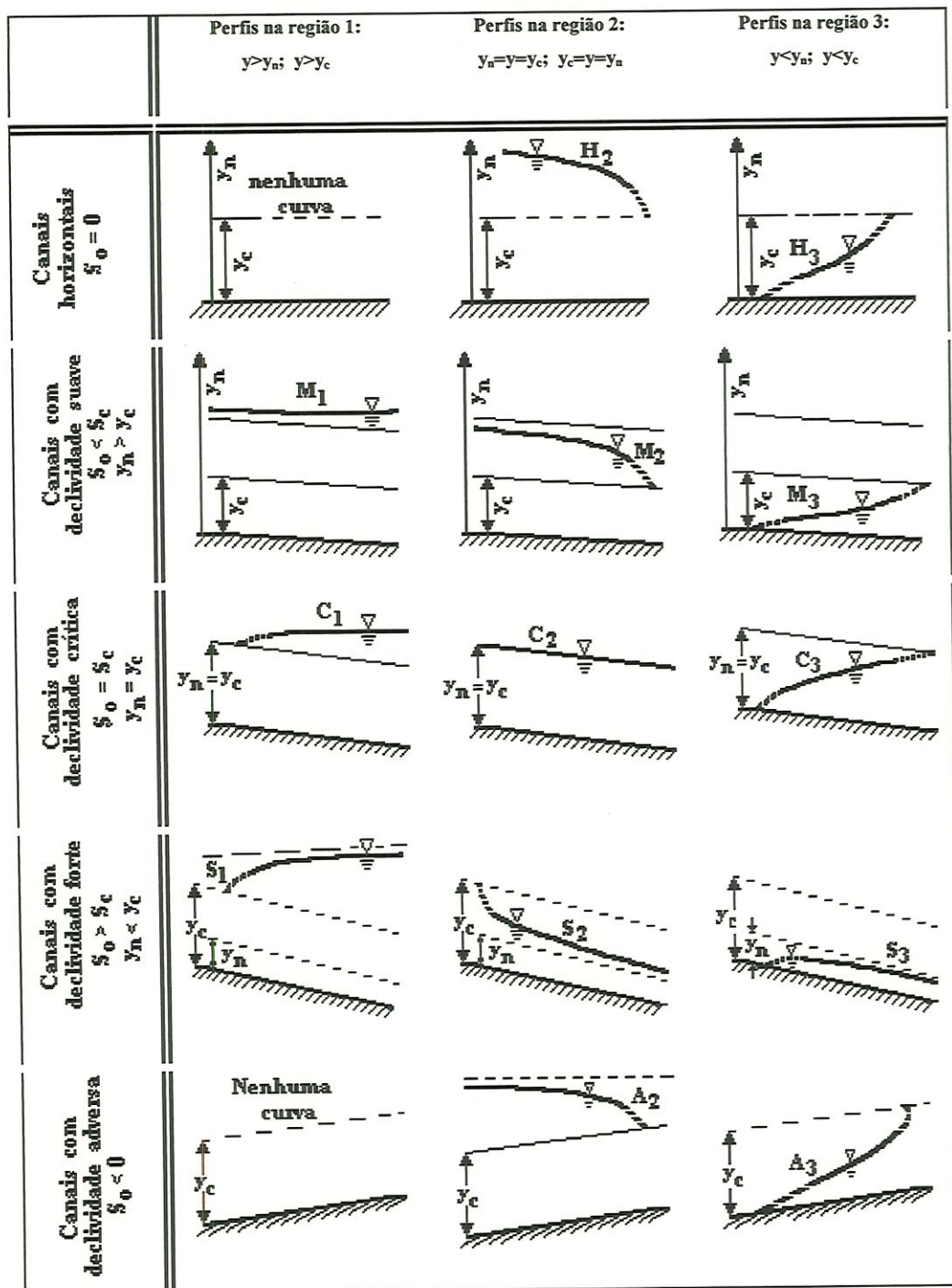


Figura 1.1 Classificação do perfil do escoamento gradualmente variado

O estudo da Equação (1.2) revela muitos tipos de curvas de remanso, cada uma delas com suas características definidas. Os vários perfis são mostrados na Figura (1.1) e seu traçado é discutido para as várias classificações nos parágrafos seguintes. Nas equações simplificadas que se seguem, admitiu-se um canal muito largo, com  $R_h=y$ .

a) Perfis da Superfície em Canais com Declividade Suave ( $S_0 < S_c$ )

Considera-se de declividade fraca o canal cujo escoamento uniforme ocorre em regime fluvial, isto é, cuja profundidade normal,  $y_n$ , é superior à profundidade crítica,  $y_c$ . Três curvas podem ocorrer,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , para profundidades acima da normal, abaixo da normal mas acima da crítica, e abaixo da crítica, respectivamente.

Para o perfil  $M_1$ ,  $y > y_n$  e, portanto, tanto o numerador quanto o denominador da Equação (1.2) são positivos; assim,  $dy/dx > 0$ . Quando  $y$  aumenta,  $dy/dx$  aproxima-se de  $S_0$  e a superfície livre aproxima-se da horizontal. A curva  $M_1$  de remanso é tipicamente encontrada a montante de uma represa ou estrutura de controle, ou em certas mudanças bruscas de declividade. Como  $y > y_n$ , a velocidade de escoamento é menor do que a do movimento uniforme com a mesma vazão. Trata-se de movimento gradualmente variado retardado. A profundidade cresce no sentido do escoamento e, por isso, a curva recebe o nome de remanso de elevação. É, provavelmente, a curva mais importante.

Para o perfil  $M_2$ ,  $y_n > y > y_c$  e o escoamento é subcrítico. O numerador da Equação (1.2) é negativo e o denominador é positivo; assim,  $dy/dx < 0$  e a profundidade decresce no sentido do escoamento. Quando  $y$  aproxima-se de  $y_c$ , a Equação (1.2) indica que  $dy/dx \rightarrow \infty$ , o que não é possível. Com forte curvatura da superfície, as hipóteses de linhas de corrente retíneas e de variação hidrostática de pressão (inerentes à Equação [1.2]) perdem a validade. Consequentemente, o perfil é

mostrado em linha tracejada quando a profundidade do escoamento aproxima-se da profundidade crítica. A curva  $M_2$  rebaixada pode ocorrer a montante de uma seção onde a declividade do canal muda de suave para crítica ou supercrítica. E também pode ser encontrada a montante de um alargamento de seção.

Para o perfil  $M_3$ ,  $y_n > y_c > y$  e o escoamento é supercrítico. Tanto o numerador quanto o denominador da Equação (1.2) são negativos, de modo que  $dy/dx$  é positivo e a profundidade aumenta no sentido do escoamento. O perfil  $M_3$ , também uma curva de remanso, ocorre no escoamento supercrítico, como a jusante de um vertedor ou de uma comporta. À medida que a profundidade do escoamento aproxima-se da crítica, ocorre uma transição súbita de supercrítico para subcrítico. Esta transição brusca é um ressalto hidráulico.

#### b) Perfis da Superfície em Canais com Declividade Forte ( $S_0 > S_c$ )

Quando num canal o escoamento uniforme se dá em regime torrencial (profundidade normal inferior à profundidade crítica), o mesmo é dito de declividade forte e os perfis resultantes estão rotulados como  $S_1$ ,  $S_2$ , e  $S_3$ . O perfil  $S_1$  situa-se acima da profundidade crítica, o  $S_2$  situa-se entre a profundidade crítica e a profundidade normal, e o  $S_3$  situa-se abaixo da profundidade normal

Para o perfil  $S_1$ ,  $y > y_c$  e, por conseguinte, tanto o numerador quanto o denominador da Equação (1.2) são positivos; dessa forma,  $dy/dx > 0$ . Além disso, quando  $y$  se torna muito maior do que  $y_c$ , então  $dy/dx \rightarrow S_0$ . Consequentemente, a curva  $S_1$  aproxima-se da horizontal.

O perfil  $S_2$  com  $y_c > y > y_n$  é uma curva rebaixada com  $dy/dx < 0$ ; nesse caso o escoamento é supercrítico. Quando  $y$  se aproxima de  $y_n$ , a declividade da curva aproxima-se de zero; a profundidade aproxima-se da profundidade normal. O perfil  $S_2$  pode ocorrer a jusante de uma transição na declividade do canal de suave para forte.

Para o perfil  $S_3$ ,  $y < y_n < y_c$ ; o escoamento é supercrítico e a declividade do perfil da superfície é positiva. A profundidade aumenta no sentido do escoamento. À medida que  $y$  se aproxima de  $y_n$ , a declividade da superfície aproxima-se de zero. Esta curva de remanso pode resultar a jusante de uma comporta se a profundidade do escoamento for inferior à profundidade normal com declividade forte

O tipo  $S_1$  é encontrado a montante de barragens vertedoras. A  $S_2$  se apresenta quando a declividade do canal se torna maior do que a crítica. A curva  $S_3$  é observada a jusante de uma comporta de fundo, quando a profundidade da veia contraída é inferior à normal. É também encontrada quando a declividade diminui bruscamente, permanecendo, porém, superior à crítica.

### c) Perfis de Superfície em Canais com Declividade Crítica ( $S_0 = S_c$ )

Para o caso em que a profundidade normal iguala a profundidade crítica, os perfis resultantes estão rotulados  $C_1$  e  $C_3$  para as profundidades acima e abaixo da profundidade crítica, respectivamente. A declividade do perfil da superfície é positiva para ambas as curvas,  $C_1$  e  $C_3$ . Para a curva  $C_1$ ,  $y > y_c$ ; o escoamento é subcrítico, e a declividade aproxima-se de  $S_0$  para grandes valores de  $y$ . Consequentemente, a curva  $C_1$  aproxima-se da horizontal. Quando  $y < y_c$ , o escoamento é supercrítico. Quando  $y$  se aproxima de  $y_c$ , pode ser verificado que a declividade da curva aproxima-se de  $10/9$ .

A curva  $C_1$  ocorre, por exemplo, na mudança de declividade quando esta passa do seu valor crítico a outro menor. A curva  $C_3$  se apresenta quando há variação da declividade nas proximidades da declividade crítica

Não há curva  $C_2$  para escoamento que varia gradualmente. Quando  $y = y_n = y_c$ , tem-se escoamento crítico a profundidade normal.

#### d) Perfis de Superfície em canais Horizontais ( $S_0=0$ )

Quando o canal é horizontal, o nível normal não existe, pois esse canal não pode funcionar em regime uniforme. De fato, no regime uniforme a energia potencial que a massa líquida perde ao passar de uma cota maior para uma cota menor tem que ser igual à energia perdida por atrito durante o movimento, para que não haja aceleração. No canal horizontal, de vez que não há alteração de cotas ao longo do canal, a energia cinética provém exclusivamente de uma transformação de energia piezométrica, dando origem ao movimento variado. O nível crítico porém independente, que resulta da declividade, pode ser traçado ao longo do canal.

Para o escoamento num canal horizontal,  $S_0=0$  e a profundidade normal é infinita. Conseqüentemente, um perfil  $H_1$  não pode existir. Os perfis  $H_2$  e  $H_3$  correspondem às curvas  $M_2$  e  $M_3$  para  $S_0=0$ . A Equação (1.2) torna-se indeterminada para  $S_0=0$  e  $y_n \rightarrow \infty$ . Para o perfil  $H_2$ ,  $y > y_c$ , o escoamento é subcrítico e a declividade é negativa. Para o perfil  $H_3$ ,  $y < y_c$ , o escoamento é supercrítico e a declividade é positiva. Para ambos os perfis, a Equação (1.2) prevê declividade infinita quando  $y \rightarrow y_c$  ( $F_r \rightarrow 1$ ). O movimento uniforme é impossível porque a inexistência da declividade não permite que a força da gravidade compense as perdas de energia.

Uma vez que o escoamento não pode continuar indefinidamente num leito horizontal, esses perfis podem ser apenas encontrados em trechos horizontais de canais mais complexos. O perfil rebaixado,  $H_2$ , pode ser encontrado no topo de um vertedouro de soleira larga, e o perfil  $H_3$  pode ser encontrado no fundo plano de uma bacia de amortecimento a jusante de um vertedouro ou abaixo de uma comporta.

### e) Perfis de Superfície em Canais com Declividade Adversa ( $S_0 < 0$ )

Nos canais de declividade negativa também não existe o nível normal n.n. O movimento se estabelece à custa da transformação de energia piezométrica em energia cinética.

Quando o fundo do canal é ascendente no sentido do escoamento, os remansos resultantes são ditos em contrad declividade. Não há valor real de  $y_n$  (profundidade normal), mas o escoamento pode dar-se tanto abaixo como acima da profundidade crítica. Abaixo da profundidade crítica, a profundidade do escoamento aumenta para jusante e a curva é rotulada como  $A_3$ . Para profundidades maiores que a crítica, a profundidade do escoamento decresce para jusante e a curva é rotulada como  $A_2$ .

Como no caso de um canal horizontal, a permanência do escoamento não é possível por longo trecho de declividade adversa. Um ressalto hidráulico poderá ocorrer quando o perfil  $A_3$  se desenvolve.

Das conclusões precedentes pode-se afirmar: (1) que para grandes profundidades (acompanhadas de pequenas velocidades) as superfícies dos líquidos se aproximam da horizontal, um fato bastante conhecido; (2) todos os perfis de superfícies tendem ao escoamento uniforme assintomaticamente; (3) a superfície livre é vertical quando passa pela profundidade crítica. Embora esta última afirmativa não seja válida porque o desenvolvimento feito inicialmente exigia a existência de linhas de corrente essencialmente retas e paralelas, é, no entanto, útil usar esta afirmativa como um guia para a determinação final dos perfis das superfícies, as quais, para satisfazer as condições acima, devem obedecer às indicações da Tabela (1.1).

### **1.3 MÉTODOS DE CÁLCULO DO PERFIL DO ESCOAMENTO EM REGIME PERMANENTE**

O cálculo do perfil do escoamento gradualmente variado envolve basicamente a solução da equação dinâmica do escoamento gradualmente variado. O principal objetivo do cálculo é determinar o perfil da superfície líquida. As finalidades em traçar o perfil longitudinal do escoamento podem ser várias. Uma delas é a determinação da vazão, e uma outra é analisar para qual distância a montante de uma barragem haja uma profundidade consideravelmente diferente da uniforme.

Nesta seção, serão descritos os métodos considerados estáveis para problemas práticos da Engenharia. Com esta finalidade, foram estabelecidos diversos métodos, que são agrupados em dois títulos - aqueles estáveis para aplicação em canais uniformes, e aqueles estáveis para canais irregulares, tais como em rios naturais. Entretanto, toda solução numérica das equações do escoamento tem em comum que o cálculo deve iniciar em um controle, e proceder na direção em que o controle está sendo exercitado.

#### **1.3.1 MÉTODOS PARA APLICAÇÃO EM CANAIS UNIFORME**

##### **1.3.1.1 O MÉTODO DA INTEGRAÇÃO GRÁFICA**

Este método integra a equação dinâmica do escoamento gradualmente variado por um procedimento gráfico. Considerem-se duas seções do canal (Figura [1.2]) e as

distâncias  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente, com as correspondentes profundidades  $y_1$  e  $y_2$ . A distância ao longo do canal é

$$x = x_2 - x_1 = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dx}{dy} dy \quad (1.3)$$

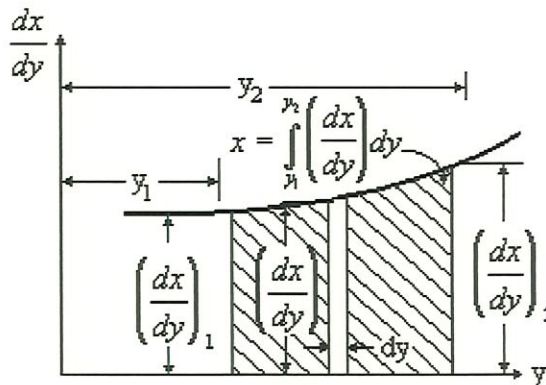


Figura 1.2 Princípio do método de integração gráfica

Assumam-se vários valores de  $y$ , e calculem-se os valores correspondentes de  $dx/dy$ , o qual é o recíproco do membro do lado direito da equação do escoamento gradualmente variado, a Equação (1.3). A curva de  $y$  verso  $dx/dy$  é, então, construída (Figura [1.2]). De acordo com a Equação (1.3), é claro que o valor de  $x$  é igual à área desenhada formada pela curva, o eixo  $y$ , e a ordenada de  $dx/dy$  corresponde a  $y_1$  e  $y_2$ . Esta área pode ser medida e o valor de  $x$  determinado.



Este método tem ampla aplicação. Aplica-se tanto em escoamento em canais prismáticos quanto em canais irregulares de qualquer forma e declividade. O procedimento é direto e fácil de seguir. Ele pode, entretanto, tornar muito laborioso quando aplicado a problemas reais.

### 1.3.1.2 MÉTODO DA INTEGRAÇÃO DIRETA

A equação diferencial do escoamento gradualmente variado não pode ser expressa explicitamente em termos de  $y$  para todo tipo de seção transversal do canal; entretanto, uma integração direta e exata da equação é praticamente impossível. Muitas tentativas têm sido feitas para introduzir hipóteses que tornam a equação acessível para a integração matemática.

A integração da Equação (1.1) não é possível senão em casos particulares, por meio de hipóteses que, em maior ou menor grau, restringem a generalidade do método, e os processos clássicos aplicam-se às formas geométricas que mais se aproximam das seções encontradas na prática. Assim, por exemplo, DUPUIT (1848) e RUHLMANN (1880) efetuaram a integração para o caso das seções retangulares de grande largura, nas quais o raio hidráulico pode ser considerado igual à profundidade ( $R_h \approx h$ ), desprezando-se o efeito da variação da velocidade entre as duas seções; BRESSE (1860) considerou o caso das seções retangulares de grande largura, levando em conta a variação da velocidade, e TOLKMITT (1898), o das seções parabólicas de grande largura. Posteriormente, diversos autores propuseram outros processos mais gerais, dentre os quais cita-se o de BAKHMETEFF, que é um dos mais conhecidos.

### 1.3.1.3 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

Aplicando-se a equação da energia entre duas seções separadas por uma distância finita,  $\Delta x$  (Figura [1.3]) considerada a perda de carga, tem-se:

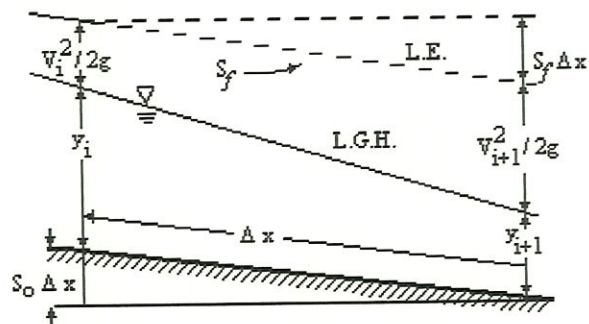


Figura 1.3 Escoamento gradualmente variado.

$$y_i + S_0 \Delta x + \frac{V_i^2}{2g} = y_{i+1} + \frac{V_{i+1}^2}{2g} + S_f \Delta x \quad (1.4)$$

Portanto, substituindo-se  $E$  por  $y + V^2 / 2g$  e calculando-se para  $\Delta x$ , vem:

$$z_1 - z_2 = \Delta z = E_2 - E_1 + \Delta h \quad (1.5)$$

$$\Delta x = \frac{\Delta E}{S_o - S_f} \quad (1.6)$$

O procedimento para se usar esta equação começa pelo conhecimento da forma do canal,  $Q$ ,  $S_o$ ,  $n$ , e de uma das profundidades (geralmente uma seção de controle). Escolhendo-se um valor para a outra profundidade, pode-se calcular  $\Delta x$ , a distância horizontal entre as duas seções retas de profundidades  $y_i$  e  $y_{i+1}$ . Admitindo-se a hipótese de que as perdas de carga entre as seções  $i$  e  $i+1$ , para escoamento variável, são dadas pelas perdas de carga em escoamentos uniformes com dada velocidade média ( $V_m$ ) e raio hidráulico ( $R_{hm}$ ),  $S_f$  pode ser calculado pela equação de Manning, encontrando-se:

$$V_m = \left(\frac{1}{n}\right) R_{h_m}^{2/3} S_f^{1/2} \quad (1.7)$$

onde

$$V_m = (V_i + V_{i+1}) / 2 \quad (1.8)$$

$$R_{h_m} = (R_{h_i} + R_{h_{i+1}}) / 2 \quad (1.9)$$

## **1.3.2 MÉTODOS ESTÁVEIS PARA APLICAÇÃO EM CANAIS IRREGULARES**

### **1.3.2.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES**

Em se tratando de canais não uniformes, como os cursos de água naturais, procura-se fazer sua decomposição em trechos nos quais as características variem pouco, o que permite considerá-los isoladamente, como canais uniformes. Para cada trecho, qualquer dos métodos de integração expostos pode ser aplicado, dependendo do grau de uniformidade do trecho e da precisão desejada.

Entre os numerosos problemas que apresentam os cursos de água naturais, um de grande importância é o cálculo do remanso provocado por uma obra projetada no seu leito. A importância do traçado exato da curva de remanso, provocada pela introdução de singularidades no leito do curso de água, reside na determinação exata das áreas inundáveis por ocasião das cheias desse curso de água, ou então, se existir um canal navegável, de se saber se a singularidade não provocará profundidades incompatíveis com o calado mínimo necessário à navegação.

A bem da segurança e da economia, a curva de remanso deve ser calculada com a melhor precisão possível, tendo em vista tanto o primeiro caso, defesa contra inundações, como o segundo, garantia de um serviço permanente de navegação.

Alguns cursos de água naturais, embora não satisfaçam rigorosamente as condições de um canal uniforme, podem ser considerados como tais: é o caso de rios de leitos regulares, em trechos suficientemente longos. Outros cursos de água que podem ser decompostos em trechos, cada um dos quais podendo ser considerado como uniforme situando entre dois consecutivos trechos não uniformes. Por fim,

inúmeros rios são de tal maneira irregulares que, em nenhum de seus trechos, se pode admitir a hipótese de uniformidade do leito.

Toda vez que forem satisfeitas as condições de uniformidade, tanto em longos trechos como em trechos curtos, o método das diferenças finitas, citado anteriormente, é perfeitamente aplicável. As singularidades existentes entre dois trechos consecutivos serão estudadas separadamente. Ao contrário, se o canal for francamente não uniforme, os métodos indicados são os de aproximações sucessivas, que exigem cálculos mais demorados, mas que fornecem resultados mais satisfatórios. Completando-se o estudo geral das curvas de remanso, serão apresentados três métodos de cálculo por aproximações sucessivas, aplicáveis aos canais não uniformes.

Os métodos de cálculo das curvas de remanso dos cursos de água naturais podem ser classificados em duas categorias distintas, considerando ou não a variação da energia cinética ao longo do trecho admitido.

### **1.3.2.2 ANÁLISE DOS VALORES MÉDIOS DOS PARÂMETROS**

Num curso de água natural, por mais regular que seja seu leito, nunca são satisfeitas rigorosamente as condições de uniformidade. Os diversos parâmetros hidráulicos variam ao longo do leito natural. Segundo o grau de variação desses parâmetros e da precisão que se pretende obter dos cálculos, é que se decide se deve ou não considerá-lo como uniforme.

Num caso ou noutro, uma vez que esses parâmetros são variáveis ao longo do leito, é necessário adotar seus valores médios. Os parâmetros mais frequentemente utilizados nos diversos métodos de cálculo são a seção transversal do canal, sua declividade e rugosidade. A etapa mais difícil na solução de um problema dessa natureza é o da escolha dos parâmetros, já que dessa escolha dependerão os resultados

a que se chegará. Um levantamento topográfico e batimétrico do curso de água facilitará a escolha dos parâmetros.

A seção transversal média é admitida frequentemente a partir do traçado de uma série de seções igualmente repetidas ao longo do trecho em estudo. Desta maneira, obtém-se a seção média que melhor traduz as propriedades do trecho. Dependendo entretanto da precisão desejada, adota-se muitas vezes, como seção média, uma seção retangular equivalente (Bresse e Ruhlmann), ou ainda se substitui a seção transversal do canal por uma seção parabólica que mais se adapte à real, a fim de se empregar o método de Tolkmitt.

A declividade média é adotada para cada trecho a partir do levantamento batimétrico do rio. Uma vez conhecida, será empregada na determinação da rugosidade média.

O coeficiente médio da rugosidade é o mais difícil de se obter corretamente. Conhecida a declividade média do trecho em uma extensão grande, e conhecidas as linhas de água correspondentes a alguns valores da vazão, o valor médio da rugosidade pode ser obtido pela aplicação das fórmulas do regime uniforme, desde que as linhas de água não difiram muito do nível normal correspondente. Inicialmente, calculam-se os valores do coeficiente de Chézy para os diversos regimes:

$$C = \frac{Q^2}{A\sqrt{R_h S_f}} \quad (1.10)$$

em seguida, obtém-se o coeficiente de rugosidade, usando-se a fórmula prática da preferência do engenheiro.

Na falta dos elementos acima para a dedução do valor da rugosidade média, ela pode ainda ser adotada a partir da natureza das paredes do rio. Qualquer dos valores médios deve ser admitido no sentido da segurança do cálculo, toda vez que se duvidar da precisão dos dados do problema; em se tratando do problema de inundação, adotam-se valores que forneçam remanso maior e, para problemas de navegação, menor.

### 1.3.2.3 MÉTODOS GRÁFICOS

Os métodos descritos determinam apenas um único perfil de escoamento. Frequentemente, vários perfis de escoamento tornam-se necessários para analisar diferentes condições de profundidade e vazão. Quando isto se faz necessário, os métodos gráficos apresentam vantagens.

Os métodos gráficos podem serem usados para estimar o perfil do escoamento gradualmente variado, qualquer que seja a forma da seção transversal do canal, e baseiam-se na admissão de que, entre as seções consideradas, de profundidades  $h_1$  e  $h_2$ , a perda de carga unitária é constante e igual à média das perdas unitárias correspondentes a  $h_1$  e  $h_2$ , ou igual à perda unitária correspondente à seção média do trecho considerado.

Podem ser citados dois métodos gráficos para o traçado das curvas de remanso nos cursos de água naturais, que são o método de Escoffier (1946) [citado por Chow (1986)] e o método de Ezra (1954) [citado por Chow (1986)].

### 1.3.2.3.1 MÉTODO DE ESCOFFIER

Casos em que o número de Froude do escoamento é pequeno justificam as hipóteses adotadas no método de Grimm, em que, desprezando-se a carga da velocidade, a declividade da linha de energia é igual à declividade da superfície da água. Entretanto, ocorre que, na maioria das vezes, a determinação dos perfis de água é para rios cuja superfície de água é muito maior do que os valores que constam nos registros de cheias observadas, de modo que o método de Grimm é impróprio. Porém uma técnica desenvolvida por Escoffier é indicada (Henderson [1966]).

O processo de Escoffier consiste em construir os gráficos da expressão  $1/K^2 = S_f/Q^2$  para as diversas seções do canal natural, a partir dos quais se obtém com facilidade e rapidez a curva de remanso (Figura [1.4]), onde  $K$  é o coeficiente de descarga, conforme se observa na equação de Chezy :

$$Q = CA\sqrt{R_h S_f} \quad (1.11)$$

$$K = CA\sqrt{R_h} \quad (1.12)$$

$$Q = K\sqrt{S_f} \quad (1.13)$$

$$S_f / Q^2 = 1 / K^2 \quad (1.14)$$

O parâmetro  $1/K^2$  depende exclusivamente da forma da seção média adotada para o trecho e da rugosidade do canal, de onde resulta uma grande vantagem do método como será visto ainda neste item.



As curvas que representam as sucessivas seções do rio são traçadas alternadamente para a esquerda e para a direita do eixo vertical, como mostra a Figura (1.4).

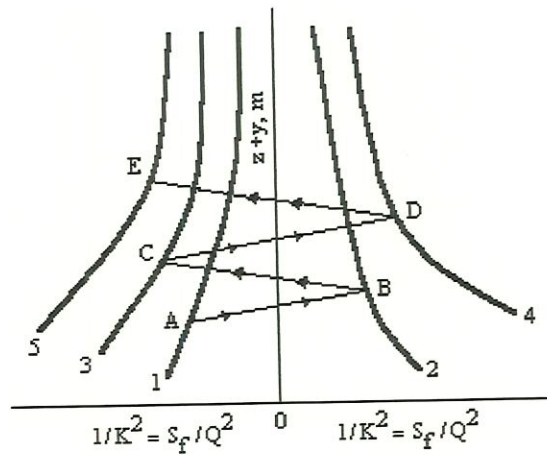


Figura 1.4 O método de Escoffier para a determinação do perfil longitudinal

Conhecendo-se o valor da profundidade na seção *1*, representado pelo ponto *A*, determina-se a profundidade na seção *2* (ponto *B*) pela linha *AB*, cuja declividade é igual a  $\Delta x Q^2 / 2$ , onde  $\Delta x$  é o comprimento do trecho entre as seções *1* e *2*. A variação de cota do nível d'água no trecho *AB*, considerando-se a carga cinética pequena, é igual a

$$\Delta h = \frac{S_{f_1} + S_{f_2}}{2} \Delta x \quad (1.15)$$

que satisfaz a condição de que a declividade da superfície da água é igual à declividade da linha de energia (Figura [1.5] ). O ponto *C* (Figura [1.4] ), representando a profundidade na seção 3, é obtido traçando-se a linha *BC* com declividade igual a  $-\Delta x Q^2 / 2$ . E os demais pontos seguintes, *D*, *E*,..., são obtidos traçando-se as linhas *CD*, *DE*,..., paralelas às linhas já existentes de declividades, alternadamente positivas e negativas.

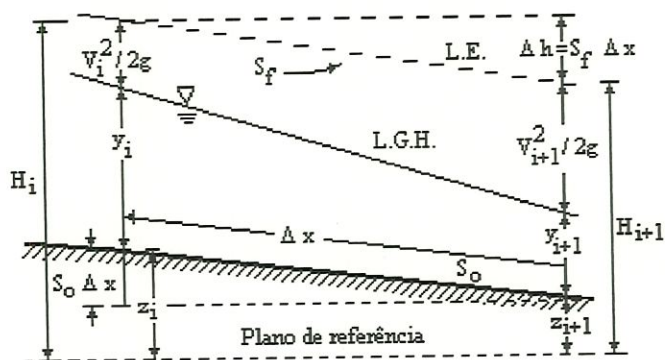


Figura 1.5 Definição do trecho de um canal

As expressões  $1/K^2$  usadas na elaboração do gráfico dependem exclusivamente do canal. Elas são independentes do valor da vazão  $Q$ . Daí decorre uma vantagem do método, que seja a de traçar, com rapidez, as linhas de água no canal natural, para qualquer vazão, utilizando-se o mesmo gráfico da Figura (1.4). De

fato, para cada valor de  $Q$ , corresponde uma declividade para a reta  $AB$ ,  $BC$ ,..., etc, permanecendo inalterado o restante do cálculo.

Esse problema ocorre toda vez que se pretende traçar as curvas de remanso para diversos regimes de curso de água natural.

### 1.3.2.3.2 MÉTODO DE EZRA

No tratamento de canais irregulares, é possível substituir o processo de tentativa por um método gráfico. Quando for necessário determinar o perfil do escoamento para diferentes vazões e diferentes profundidades iniciais, o método desenvolvido por Ezra é propício.

O método de Ezra é baseado na seguinte disposição. As profundidades da superfície da água [( $Z_1$ ) e ( $Z_2$ )] nas duas seções de extremidades do trecho Figura (1.6), consideradas a partir de uma referência, são representadas da seguinte forma:

$$Z_1 = S_0 \Delta x + y_1 + z_2 \quad (1.16)$$

$$Z_2 = y_2 + z_2 \quad (1.17)$$

a perda por atrito é

$$h_f = S_f \Delta x = \frac{1}{2} (S_{f_1} + S_{f_2}) \Delta x \quad (1.18)$$

Rearrmando-se as expressões, tem-se:

$$Z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \frac{1}{2} \Delta x (S_{f_1} + S_{f_2}) \quad (1.19)$$

onde:

$$Z_1 + F(Z_1) = Z_2 + F(Z_2) \quad (1.20)$$

$$F(Z_1) = \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} - \frac{1}{2} S_f \Delta x_u \quad (1.21)$$

$$F(Z_2) = \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \frac{1}{2} S_f \Delta x_d \quad (1.22)$$

O método de Ezra é baseado na representação gráfica de  $Z_1 + F(Z_1)$  e  $Z_2 + F(Z_2)$  como uma função do nível de água em relação a uma referência ( $Z$ ), (Figura [1.6]). Conforme verificado nas equações, as funções  $F(Z_1)$  e  $F(Z_2)$  são diretamente proporcionais ao quadrado da velocidade ou da vazão  $Q$ . Para alguma outra vazão  $Q_x$ ,

os valores correspondentes destas funções podem ser obtidos pela multiplicação das funções por um fator  $(Q_1/Q_2)^2$ .

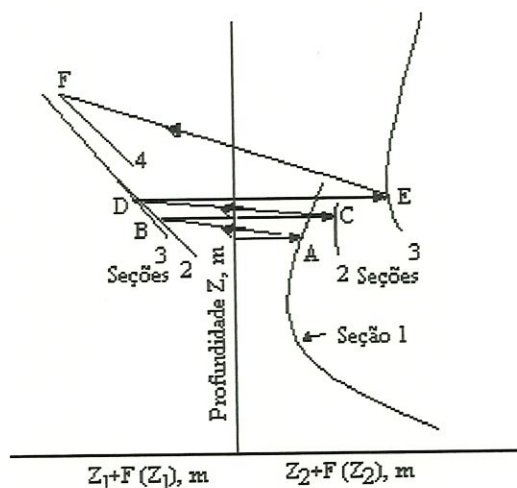


Figura 1.6 O método de Ezra para a determinação do perfil longitudinal

O valor de  $\Delta x$  usado para calcular  $F(Z_1)$  é o comprimento do trecho do canal localizado a montante da seção, enquanto que o valor associado com  $F(Z_2)$  é o comprimento do trecho do canal localizado a jusante da seção.

Uma vantagem importante do método de Ezra é o fato de que, com pequenas alterações, determina-se o perfil do escoamento gradualmente variado para uma faixa de vazões em um canal de geometria definida (Henderson [1966]).

A perda de carga causada pela turbulência é admitida como sendo zero, para canais prismáticos e regulares. Para canais não prismáticos, seu valor, às vezes, é representativo. A perda por turbulência, como depende principalmente da variação da carga da velocidade, é expressa como  $k\alpha V^2/2g$ , onde  $k$  é um coeficiente cujo valor

para expansões e contrações abruptas é de aproximadamente  $0,5$ . Para simplificar, os cálculos das perdas de cargas devidas à turbulência podem ser incorporados dentro das perdas de atrito e por isto a parcela referente a esta perda é considerada zero.

#### **1.3.2.4 MÉTODO DE GRIMM**

O método de Grimm está na categoria dos métodos simplificados, isto é, dos métodos que não levam em conta a influência da variação da carga cinética ao longo do canal. Por essa razão, ele é aconselhável somente para os casos de regime fluvial uniformemente retardado, em leitos suficientemente regulares onde a turbulência não seja acrescida das singularidades das paredes do canal. O método de Grimm é usado para o traçado das curvas de remanso com diversos valores de vazão no mesmo canal, assim como também para o trecho das curvas de remanso correspondentes à mesma vazão, porém em cotas diferentes.

A maioria dos métodos aplicados em rios naturais requer o levantamento topográfico das seções, que deve ser feito em pequenos intervalos ao longo do rio. Os métodos requerem a relação entre a altura e a vazão em cada seção do rio. Sua aplicação exige o conhecimento de diversas linhas de água do canal, antes de ser provocado o remanso, para valores de vazão superiores à vazão com a qual se pretende resolver o problema. Esse método tem a vantagem de não exigir a determinação da seção transversal média, nem a rugosidade do leito; tem por outro lado a desvantagem de exigir o conhecimento dos níveis normais, para diversas vazões, o que nem sempre é dado de fácil obtenção. Esses dados devem, obviamente, ser obtidos por registros de rios, ou seja de arquivos de dados já observados anteriormente, e não por cálculos, nos quais é necessário o custo do levantamento

topográfico para determinar a geometria de cada seção do rio. O método tem a vantagem do baixo custo, porém tem a desvantagem de ser limitado pela precisão e aplicabilidade.

Ele é particularmente usado para obter o perfil de água após ser instalada uma nova estrutura no rio, tal como uma barragem. Entretanto, se houver alterações no próprio canal do rio, ele falha.

O método não é limitado apenas por ser aproximado, mas também por ter aplicação restrita. Sua aplicação será considerada satisfatória se os dados do arquivo tiverem valores próximos do novo perfil. Isso será verdadeiro se a característica inserida dentro do canal diminuir ou aumentar pouco a superfície da água, ou seja, para valores de vazão e altura maiores do que os dados registrados de cheias, o método de Grimm é instável.

O princípio do método é o seguinte: seja  $M$  um ponto da curva de remanso para uma vazão  $Q$ . Uma paralela ao fundo do canal passando pelo ponto  $M$  é o nível normal correspondente à vazão  $Q_0 > Q$ , considerando-se a curva do tipo  $M_1$  ou  $S_1$ . Para regime uniforme com vazão  $Q_0$  pode-se escrever:

$$Q_0 = CA\sqrt{R_h S_0} \quad (1.23)$$

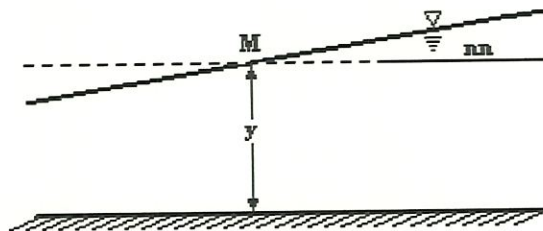


Figura 1.7 Perfil longitudinal de uma curva de remanso

e para o regime gradualmente variado, supondo-se a perda de carga calculável pela mesma fórmula de Chezy, tem-se:

$$Q = CA\sqrt{R_h S_f} \quad (1.24)$$

Da comparação das duas expressões anteriores resulta:

$$S_f = S_o \left( \frac{Q}{Q_o} \right)^2 \quad (1.25)$$

No ponto  $M$ , tem-se a interseção do nível normal da vazão  $Q_o$  com o nível de água em regime gradualmente variado para a vazão  $Q$ . A profundidade  $y$  e a rugosidade têm os mesmos valores nos dois casos, de onde decorrem os mesmos valores para parâmetros  $C$ ,  $A$  e  $R_h$ , que se simplificam, chegando na seguinte Equação (1.25).

Multiplicando-se os dois membros da Equação (1.25) pelo comprimento  $\Delta x$  do trecho, tem-se finalmente:

$$\Delta z = \Delta h \left( \frac{Q}{Q_o} \right)^2 \quad (1.26)$$

Neste método simplificado, a perda de carga unitária é igual à declividade da linha de água, já que não se leva em conta a variação da carga cinética. No caso,  $S_f$  é a



declividade média da linha de água, e seu produto por  $\Delta x$  é a variação da cota  $\Delta z$ , da mesma no trecho de canal.

Na aplicação de um método a um caso real, parte-se de um ponto conhecido  $M_0$  da curva de remanso e calcula-se a posição de  $M_1$

$$\Delta z = \Delta h \left( \frac{Q}{Q_0} \right)^2 = S_0 \cdot \Delta x \left( \frac{Q}{Q_0} \right)^2 \quad (1.27)$$

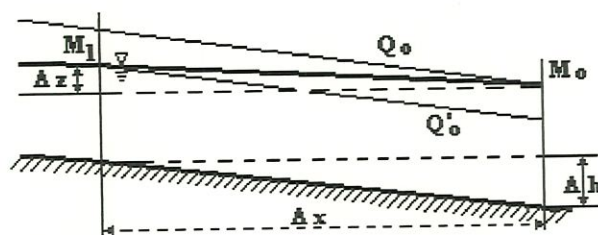


Figura 1.8 Método de Grimm para a determinação do perfil longitudinal

$Q_0$  é o valor da vazão ao qual corresponde um nível normal passando por  $M_0$ .

$$z_1 = z_0 + \Delta z \quad (1.28)$$

Partindo-se do valor de  $z_1$ , calcula-se analogamente o valor  $z_2$ , e assim por diante.

A fim de se obter resultado mais preciso, é aconselhável refazer o cálculo no sentido inverso, isto é, de  $M_I$  para  $M_0$ , aplicando-se a mesma relação (Equação [1.26]).

$$\Delta z = S_o \Delta x \left( \frac{Q}{Q_0} \right)^2 \quad (1.29)$$

em que  $Q_0$  é a vazão à qual corresponde o nível normal que passa por  $M_I$ . Em se fazendo esta reiteração, o valor de  $z$  deve ser tomado igual à média das duas determinações.

### APÊNDICE III

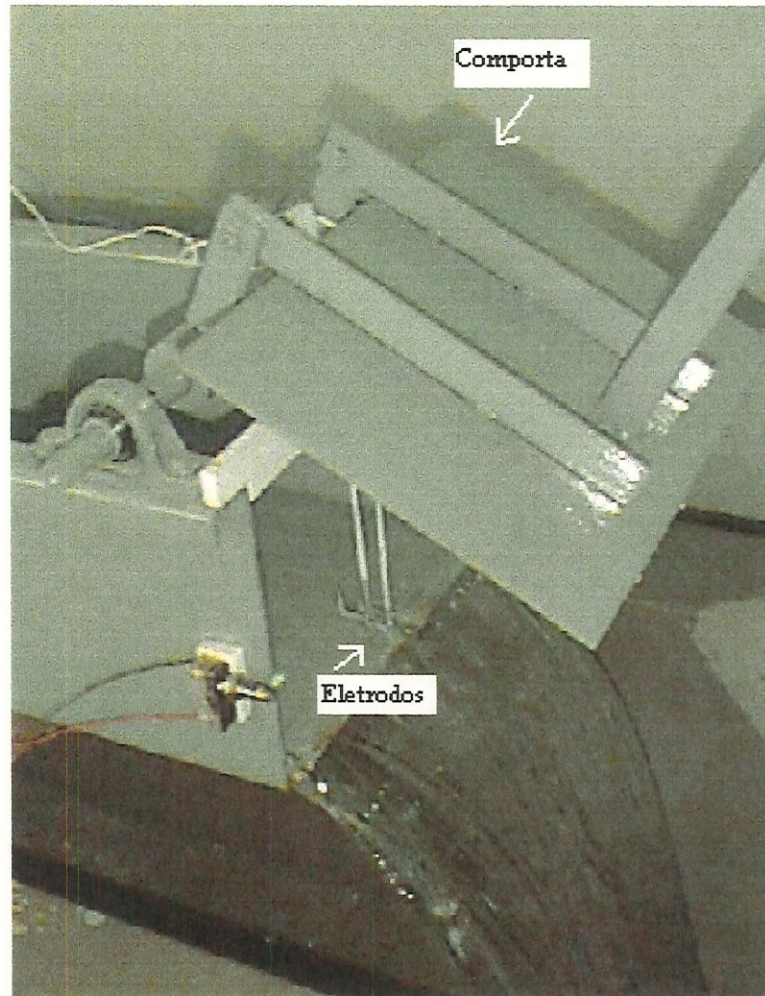


Figura 1.1 – Manobra da Comporta em um Canal Retangular



Figura 1.2 – Manobra da Comporta em um Canal Circular

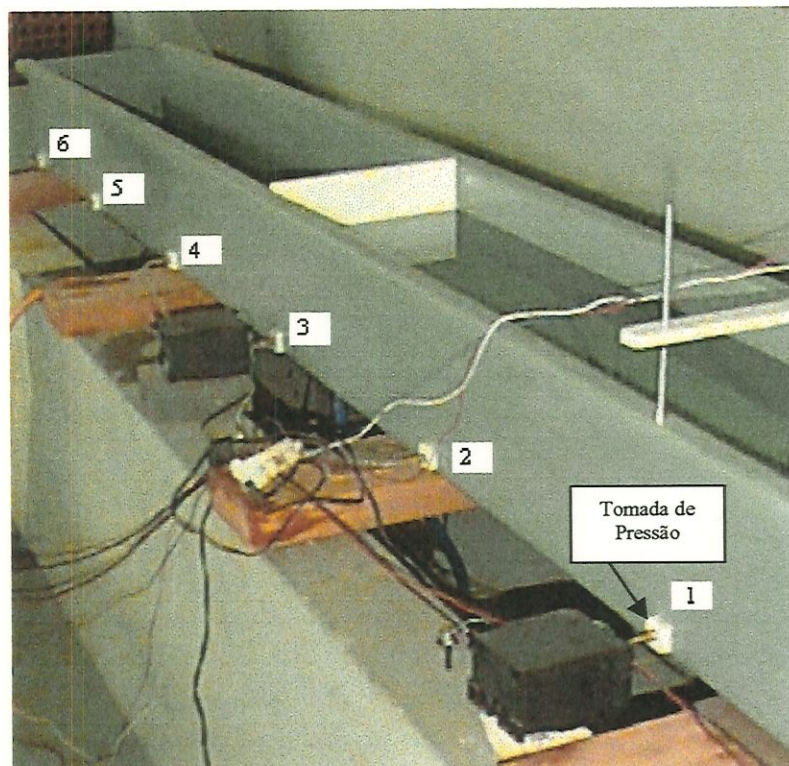


Figura 1.3 – Apresentação das seis tomadas de pressão

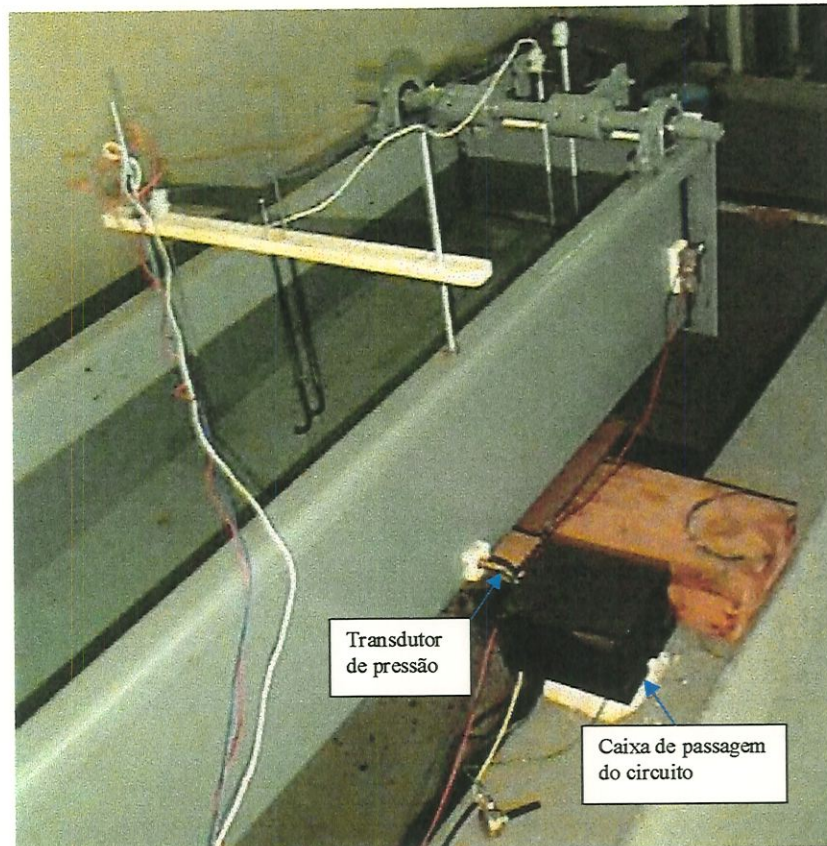


Figura 1.4 – Apresentação do Circuito do Transdutor de Pressão em um Canal Retangular



Figura 1.5 – Apresentação do Circuito Eletrônico