

Igor Breda Ferraço

## Controle Ótimo por Modos Deslizantes via Função Penalidade

Dissertação de Mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências, Programa de Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos  
Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

São Carlos  
2011

---

<sup>1</sup>Trata-se da versão corrigida da dissertação. A versão original se encontra disponível na EESC/USP que aloja o Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

F368c Ferração, Igor Breda.  
Controle ótimo por modos deslizantes via função  
penalidade / Igor Breda Ferração ; orientador Marco  
Henrique Terra. São Carlos, 2011.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas  
Dinâmicos) -- Escola de Engenharia de São Carlos da  
Universidade de São Paulo, 2011.

1. Sistemas lineares. 2. Sistemas discretos. 3.  
Controle ótimo. 4. Mínimos quadrados. 5. Equações de  
Riccati. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Licenciado **IGOR BRÊDA FERRAÇO**

Título da tese: **Controle ótimo por modos deslizantes via função penalidade.**

Data da defesa: 01/07/2011:

### Comissão Julgadora:

### Resultado:

Prof. Associado **Marco Henrique Terra (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

aprovado

Prof. Associado **Eduardo Fontoura Costa**  
(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/ICMC/USP)

aprovado

Prof. Dr. **João Yoshiyuki Ishihara**  
(Universidade de Brasília/UNB)

aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:  
Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:  
Prof. Associado **Paulo Cesar Lima Segantine**



## *Dedicatória*

---

*Dedico este trabalho a minha avó  
Filomena Nossa Breda (in memoriam ).*



## Agradecimentos

---

*Primeiramente agradeço a Deus por permitir que eu esteja aqui hoje e por me dar toda a força necessária para que este trabalho fosse realizado.*

*Ao Prof Dr. Marco Henrique Terra pela confiança, orientação, paciência e pelo tempo dedicado a mim na realização deste trabalho.*

*Aos meus pais João Batista e Maria Lúcia pelo apoio, exemplo e incentivo que sempre deram. Agradeço também a minha irmã por sempre estar do meu lado quando necessário.*

*A todos meus familiares que acreditaram em mim e no meu sucesso.*

*A todos os meus colegas e amigos que estiveram comigo durante esta caminhada. Meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que de alguma forma doaram um pouco de si para que a conclusão deste trabalho se tornasse possível.*

*A CAPES (Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa de mestrado concedida para o desenvolvimento deste trabalho.*





*“O único homem que está isento de erros  
é aquele que não arrisca acertar.”*

---

*Albert Einstein*



# Resumo

*FERRAÇO. I. B. Controle Ótimo por Modos Deslizantes via Função Penalidade. São Carlos, 2011, Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.*

*Este trabalho aborda o problema de controle ótimo por modos deslizantes via função penalidade para sistemas de tempo discreto. Para resolver este problema será desenvolvido uma estrutura matricial alternativa baseada no problema de mínimos quadrados ponderados e funções penalidade. A partir desta nova formulação é possível obter a lei de controle ótimo por modos deslizantes, as equações de Riccati e a matriz do ganho de realimentação através desta estrutura matricial alternativa. A motivação para propormos essa nova abordagem é mostrar que é possível obter uma solução alternativa para o problema clássico de controle ótimo por modos deslizantes.*

**Palavras-Chave:** *Sistemas lineares, sistemas discretos, controle por modos deslizantes, controle ótimo, problema de mínimos quadrados, função penalidade, equação de Riccati.*



# Abstract

*FERRAÇO I. B. Optimal Sliding Mode Control Approach Penalty Function. São Carlos, 2011, Dissertation (Master) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.*

*This work introduces a penalty function approach to deal with the optimal sliding mode control problem for discrete-time systems. To solve this problem an alternative array structure based on the problem of weighted least squares penalty function will be developed. Using this alternative matrix structure, the optimal sliding mode control law of, the matrix Riccati equations and feedback gain were obtained. The motivation of this new approach is to show that it is possible to obtain an alternative solution to the classic problem of optimal sliding mode control.*

**Keywords:** *Linear systems, discrete-time systems, Sliding-mode control, optimal control, least-squares problem, penalty functions, Riccati equation.*



# Lista de Figuras

3.1	Trajétórias do controle com estrutura variável de tempo discreto. . . . .	42
3.2	Estados do sistema e convergência. . . . .	64
3.3	Lei de controle e superfície deslizante. . . . .	65
4.1	Estados do sistema multivariável. . . . .	78
4.2	Superfície deslizante e lei de controle do sistema multivariável. . . . .	79





# Lista de Abreviaturas e Siglas

CEV - Controle com **E**strutura **V**ariável

COMD - Controle **Ó**timo por **M**odos **D**eslizantes

RLQ - **R**egulador **L**inear **Q**uadrático

MQP - **M**ínimos **Q**uadrados **P**onderados

MA - **M**odo de **A**lcance

MD - **M**odo **D**eslizante

ME - **M**odo **E**stacionário



# Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{R}^n$	conjunto dos vetores reais $n$ -dimensionais
$\mathbb{R}^{n \times m}$	conjunto das matrizes reais $n \times m$
$I_n$	matriz identidade de dimensão $n$
$\text{posto}(A)$	posto da matriz $A$
$A^{-1}$	inversa da matriz $A$
$A^T$	transposta da matriz $A$
$A^{\frac{1}{2}}$	raiz quadrada da matriz semidefinida positiva $A$
$M/A$	complemento de Schur da submatriz $A$ na matriz particionada $M$
$\rho(A)$	raio espectral da matriz $A$
$A \succeq 0$	$A$ é uma matriz semidefinida positiva
$A \succ 0$	$A$ é uma matriz definida positiva
$A \succeq B$	$A - B$ é uma matriz semidefinida positiva
$A \succ B$	$A - B$ é uma matriz definida positiva
$a > 0$	número real positivo
$\ x\ $	norma Euclidiana de $x$ definida por $(x^T x)^{\frac{1}{2}}$
$\ x\ _P$	norma ponderada de $x$ definida por $(x^T P x)^{\frac{1}{2}}$ com $P \succ 0$
$x^T W(\bullet)$	expressão simplificada para $x^T W x$



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>13</b>
<b>Lista de Abreviaturas e Siglas</b>	<b>15</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>17</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>21</b>
1.1 Motivação . . . . .	21
1.2 Organização do Texto . . . . .	22
1.3 Artigos . . . . .	23
<b>2 Resultados Preliminares</b>	<b>25</b>
2.1 Mínimos Quadrados Ponderados . . . . .	25
2.2 Função Penalidade . . . . .	28
2.3 Mínimos Quadrados Ponderados Restritos . . . . .	32
<b>3 Controle Ótimo por Modos Deslizantes para Sistemas de Tempo Discreto</b>	<b>41</b>
3.1 Controle por Modos Deslizantes . . . . .	41
3.2 Controle Ótimo por Modos Deslizantes . . . . .	44
3.2.1 Lei de Controle por Modos Deslizantes . . . . .	44
3.2.2 Controle Ótimo por Modos Deslizantes . . . . .	45
3.3 Controle Ótimo por Modos Deslizante - Abordagem Alternativa . . . . .	48
3.3.1 COMD via Função Penalidade . . . . .	48
3.3.2 Equivalência das Abordagens . . . . .	60
3.4 Exemplo Numérico . . . . .	63
<b>4 Controle Ótimo por Modos Deslizantes para Sistemas Multivariáveis</b>	<b>67</b>
4.1 Controle Ótimo por Modos Deslizantes . . . . .	67
4.1.1 Lei de Controle . . . . .	68
4.1.2 Estabilidade do Sistema . . . . .	70

4.1.3	Controle Ótimo por Modos Deslizantes . . . . .	71
4.2	Controle Ótimo por Modos Deslizantes - Abordagem Alternativa . . . . .	73
4.2.1	COMD via Função Penalidade . . . . .	73
4.3	Exemplo Numérico . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>81</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>83</b>
<b>A</b>	<b>Análise Matricial - Alguns Resultados</b>	<b>87</b>
A.1	Inversão de Matrizes . . . . .	87
A.2	Matrizes Particionadas e Complemento de Schur . . . . .	87
A.3	Matrizes Semidefinidas e Definidas Positivas . . . . .	89
A.4	Normas . . . . .	91
A.5	Derivadas Fundamentais . . . . .	92

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

Neste trabalho será tratado o problema de controle ótimo por modos deslizantes (COMD) para sistemas lineares de tempo discreto. A existência de um modo deslizante requer a estabilidade da trajetória de estado para a superfície de deslizamento. Uma lei de controle chaveada deve então ser desenvolvida de tal forma que a trajetória de estados alcance a superfície de deslizamento e nela permaneça durante todo o tempo de operação do sistema, veja [1], [2] e [3]. O COMD é caracterizado por sua capacidade robusta de estabilizar sistemas lineares em tempo discreto. Este tipo de controle possui bom desempenho em virtude da minimização de funcionais quadráticos, por exemplo [4], [5] e [6].

Assim, propõe-se neste trabalho um procedimento alternativo para encontrar uma lei de controle ótima recursiva por modo deslizante para sistemas lineares de tempo discreto. Neste sentido, uma abordagem alternativa será desenvolvida, primeiro para sistemas com uma única entrada de controle, e depois para sistemas multivariáveis, utilizando como base os trabalhos de [7], [8] e [9]. O que motiva o estudo de COMD para sistemas multivariáveis é que segundo [10] o fato do sistema ter múltiplas entradas de controle, facilita na regularização de sistemas com incertezas nas matrizes de parâmetros.

A lei de controle utilizada neste trabalho será baseada nas leis de controle feita em [5], [6] e [8]. A nova abordagem será desenvolvida com base em uma combinação do problema de mínimos quadrados ponderados (MQP) [11] e função penalidade [12], [13] e [14]. A maneira com que as restrições lineares são incorporadas, via função penalidade no funcional a ser minimizado, será

ênfatizada na nova formulação proposta.

A combinação das técnicas de MQP com função penalidade é feita para resolver problemas de otimização com restrição. Com essa combinação tornou-se possível encontrar soluções recursivas para problemas de controle e filtragem de sistemas lineares incertos, por exemplo [15], [16] e [17]. Essas soluções têm a vantagem de depender da equação de Riccati em tempo discreto, que pode ser resolvida de forma recursiva.

Assim, as motivações para desenvolver este trabalho é mostrar que a nova abordagem proposta é equivalente a solução clássica de controle ótimo por modos deslizantes encontrada na literatura. Essa nova abordagem pode tornar possível, posteriormente, a solução do problema de controle ótimo por modos deslizantes para sistemas lineares discretos sujeitos a incertezas nas matrizes de parâmetros. Preliminarmente, para atingir esse objetivo, pretende-se neste trabalho verificar a eficácia desta técnica para resolver o problema de controle por modo deslizante para sistemas lineares nominais de tempo discreto.

## 1.2 Organização do Texto

Este texto está organizado da seguinte forma:

- **Capítulo 2:** será apresentada uma estrutura alternativa para a solução do problema de mínimos quadrados ponderados. Será feito um estudo introdutório sobre a aplicação do método de funções penalidade na solução de problemas de minimização restrita. O problema de MPQ sujeito a restrição de igualdade será resolvido combinando as técnicas de funções penalidade e o problema de MQP irrestrito.
- **Capítulo 3:** serão apresentados aspectos relevantes de sistemas com controle de estrutura variável e modos deslizantes. Além disso, será apresentada uma lei de controle ótimo por modos deslizantes que minimiza um funcional de custo quadrático sujeito a uma restrição de igualdade, proposta em [5]. Será proposta uma formulação alternativa do problema de COMD e sua respectiva solução recursiva sob uma estrutura matricial diferenciada. A equivalência com a estrutura da solução proposta em [5] também será demonstrada.
- **Capítulo 4:** neste capítulo trata-se o problema de controle ótimo por modos deslizantes para sistemas multivariáveis de tempo discreto, baseado em [7], [8] e [9]. Propõe-se uma formulação alternativa do problema de COMD com múltiplas entradas e sua respectiva



solução recursiva sob uma estrutura matricial diferenciada, essa estrutura matricial é similar à apresentada no capítulo 3. A equivalência da estrutura alternativa desenvolvida com a problema clássico já existente na literatura será demonstrada.

- **Apêndice A:** serão apresentadas algumas definições, notações e resultados de análise matricial que foram utilizados neste trabalho.

### 1.3 Artigos

- (a) - Ferrazo, I. B., Terra, M. H., e Cerri, J. P. Optimal Sliding Mode Control via Penalty Approach for Discrete-Time Linear Systems. IFAC World Congress, 2011, Milano, Italy.
- (b) - Ferrazo, I. B., Terra, M. H., e Cerri, J. P. Controle Ótimo por Modos Deslizantes para Sistemas Multivariáveis de Tempo Discreto. CMAC-Sudeste, 2011, Uberlândia, Brasil.



## Capítulo 2

# Resultados Preliminares

Neste capítulo será apresentado o problema de mínimos quadrados ponderados sujeito a uma restrição de igualdade. Define-se o método de funções penalidade e a formulação do problema de MQP irrestrito é apresentada a partir da combinação das técnicas de MQP com função penalidade. Assim, passaremos a ter um funcional quadrático estritamente convexo que será minimizado de forma iterativa sob uma restrição de igualdade linear.

### 2.1 Mínimos Quadrados Ponderados

Considere o problema de MQP definido por:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \{J(x)\}, \quad (2.1)$$

sendo a função quadrática  $J(x)$  é dada por:

$$J(x) = \|Ax - b\|_W^2 = (Ax - b)^T W (Ax - b), \quad (2.2)$$

sendo  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (matriz de ponderação) simétrica definida positiva,  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $b \in \mathbb{R}^n$  assumidos conhecidos e  $x \in \mathbb{R}^m$  o vetor incógnita.

**Definição 2.1.1.** [11] *Uma solução mínima quadrática ponderada,  $\hat{x}_W$ , é uma solução com a seguinte propriedade:*

$$\|A\hat{x} - b\|_W^2 \leq \|Ax - b\|_W^2, \quad (2.3)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^m$ .

**Lema 2.1.1.** [11] Um vetor  $\hat{x}_W$  é uma solução mínima quadrática ponderada da função quadrática (2.2) se e somente se ele satisfaz a chamada equação normal:

$$A^T W A x = A^T W b. \quad (2.4)$$

O valor mínimo assumido pela função  $J(x)$  é dado por:

$$J(\hat{x}) = \|A\hat{x} - b\|_W^2 = b^T W b - b^T W A \hat{x}. \quad (2.5)$$

No caso em que  $A$  é uma matriz posto coluna pleno, a única solução mínima quadrática ponderada  $\hat{x}$  é dada por:

$$\hat{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W b, \quad (2.6)$$

e o valor mínimo da função  $J(x)$  pode ser escrito como:

$$J(\hat{x}) = \|A\hat{x} - b\|_W^2 = b^T (W - W A (A^T W A)^{-1} A^T W) b, \quad (2.7)$$

**Lema 2.1.2.** [10] Considere o problema de MQP estabelecido em (2.1) - (2.2). Então, as expressões (2.6) - (2.7) podem ser reescritas como:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

$$J(\hat{x}) = \begin{bmatrix} b^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = - \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} & A & b \\ A^T & 0 & 0 \\ b^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (2.9)$$

respectivamente.

O lema a seguir tem como objetivo mostrar que o problema de minimização estabelecido em (2.1) - (2.2) pode admitir uma representação mais confortável com respeito a estrutura de sua solução ótima. Esta representação alternativa que será mostrada no próximo lema será a estrutura da solução recursiva proposta neste trabalho para o problema do regulador nominal.

**Lema 2.1.3.** [10] Suponha que  $W = W^T \succ 0$ . Então as seguintes sentenças são equivalentes:

(i)  $\hat{x} \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} \{(Ax - b)^T W (Ax - b)\};$

(ii)  $x = \hat{x}$  é uma solução de  $A^T W A x = A^T W b;$

(iii)  $(\lambda, x) = (\hat{\lambda}, \hat{x})$  é uma solução de

$$\begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Se  $A$  é posto coluna pleno, então  $\hat{x}$  dado por:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

é a solução mínima para a equação (ii).

Para fins didáticos apresenta-se na sequência a prova deste Lema desenvolvido em [10].

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Defina  $J : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  como sendo o funcional quadrático:

$$J(x) = (Ax - b)^T W (Ax - b).$$

Considere  $J(x)$  reescrito na forma expandida:

$$J(x) = x^T (A^T W A)x - x^T A^T W b - b^T W A x + b^T W b.$$

Derivando  $J(x)$  com relação a  $x$ , tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} J(x) = (A^T W A)x + (A^T W A)x - A^T W b - (b^T W A)^T = 2 [(A^T W A)x - A^T W b].$$

De acordo com (i), ou seja, se  $\hat{x}$  é um ponto de mínimo de  $J(x)$  então  $\hat{x}$  deve satisfazer:

$$\frac{\partial}{\partial x} J(\hat{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (A^T W A)\hat{x} - A^T W b = 0 \quad \Rightarrow \quad (A^T W A)\hat{x} = A^T W b.$$

Então,

$$(A^T W A)\hat{x} = A^T W b.$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Observe que  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} J(x) = (A^T W A)$ . Por hipótese  $W \succ 0$ , assim  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} J(x) \succeq 0, \forall x$ .

Dessa maneira, se  $\hat{x}$  satisfaz (ii) e  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} J(x) \succeq 0$ , então  $\hat{x}$  é um ponto de mínimo. Logo:

$$\hat{x} \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} \{(Ax - b)^T W (Ax - b)\}.$$

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) Defina a variável auxiliar  $\lambda := -W(Ax - b)$ . Dessa forma,

$$(A^T W A)x = A^T W b \quad \Rightarrow \quad A^T \underbrace{W(Ax - b)}_{-\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad A^T \lambda = 0.$$

Como  $\lambda = -W(Ax - b) \Rightarrow W^{-1}\lambda + Ax = b$ , tem-se então o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} W^{-1}\lambda + Ax = b \\ A^T \lambda = 0 \end{cases},$$

reescrevendo o sistema acima na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dado que  $W \succ 0$  e a matriz  $A$  é posto coluna pleno, então segue dos itens (ii) e (iii) que:

$$\hat{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W b = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A invertibilidade do bloco matricial  $\begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$  fica garantida pelo Lema A.3.6.

□

## 2.2 Função Penalidade

Considere o seguinte problema de minimização restrita:

$$\min_{x \in \Omega} \{f(x)\}, \quad (2.12)$$

sendo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto de restrições. A idéia fundamental do método de funções penalidade é substituir o problema (2.12) por um problema irrestrito da

forma:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + \mu P(x)\}, \quad (2.13)$$

sendo  $\mu$  uma constante real positiva e  $P(x)$  satisfazendo:

- (i)  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua;
- (ii)  $P(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ ;
- (iii)  $P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \Omega$ .

O termo  $\mu P(x)$  em (2.13) é definido como função penalidade.

O procedimento para resolução do problema (2.12) pelo método da função penalidade é definido como segue:

- seja  $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$  uma seqüência de números reais satisfazendo:

$$\mu_k > 0; \quad \mu_{k+1} > \mu_k \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k = +\infty; \quad (2.14)$$

- defina para cada  $\mu_k$  a função  $q(\mu_k, x) = f(x) + \mu_k P(x)$ ;
- para cada  $k$  resolva o problema  $\min_x \{q(\mu_k, x)\}$ , obtendo uma solução  $x_k$ .

Os lemas a seguir apresentam um conjunto de desigualdades que seguem diretamente da definição de  $x_k$  e da inequação  $\mu_{k+1} > \mu_k$ .

**Lema 2.2.1.** [14] *Sejam  $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$  uma seqüência de números reais definida como em (2.14) e  $q(\mu_k, x)$  a função dada por  $q(\mu_k, x) = f(x) + \mu_k P(x)$ . Então são verdadeiras as seguintes propriedades:*

- (i)  $q(\mu_k, x_k) \leq q(\mu_{k+1}, x_{k+1})$ ;
- (ii)  $P(x_k) \geq P(x_{k+1})$ ;
- (iii)  $f(x_k) \geq f(x_{k+1})$ .

*Demonstração.* (i) - Veja que

$$q(\mu_{k+1}, x_{k+1}) = f(x_{k+1}) + \mu_{k+1} P(x_{k+1}) \geq f(x_{k+1}) + \mu_k P(x_{k+1}),$$

pois  $P(x_{k+1})$  e por (2.14) tem-se que  $\mu_{k+1} > \mu_k$ . Como  $x_k$  é solução de  $\min_x \{q(\mu_k, x)\}$ , então:

$$f(x_{k+1}) + \mu_k P(x_{k+1}) \geq f(x_k) + \mu_k P(x_k) = q(\mu_k, x_k).$$

Portanto,

$$q(\mu_k, x_k) \leq q(\mu_{k+1}, x_{k+1}).$$

(ii) - Pela definição de  $x_k$ , são válidas as seguintes desigualdades:

$$f(x_k) + \mu_k P(x_k) \leq f(x_{k+1}) + \mu_k P(x_{k+1});$$

$$f(x_{k+1}) + \mu_{k+1} P(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \mu_{k+1} P(x_k).$$

Somando membro a membro as desigualdades acima tem-se:

$$(\mu_{k+1} - \mu_k)P(x_{k+1}) \leq (\mu_{k+1} - \mu_k)P(x_k).$$

Como  $\mu_{k+1} > \mu_k$ , então:

$$P(x_k) \geq P(x_{k+1}).$$

(iii) - Do item (i) tem-se que:

$$f(x_{k+1}) + \mu_k P(x_{k+1}) \geq f(x_k) + \mu_k P(x_k) \Rightarrow f(x_{k+1}) - f(x_k) \geq \mu_k (P(x_k) - P(x_{k+1})).$$

Agora do item (ii) temos que  $P(x_k) \geq P(x_{k+1})$ . Logo,  $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$  pois  $\mu_k > 0$ .

Então:

$$f(x_k) \leq f(x_{k+1}).$$

□

**Lema 2.2.2.** [14] *Seja  $x^*$  uma solução para o problema (2.12). Então para cada  $k$*

$$f(x^*) \geq q(\mu_k, x_k) \geq f(x_k).$$

*Demonstração.* Se  $x^*$  é a solução para o problema (2.12), então  $x^* \in \Omega$ . Sendo assim,  $P(x^*) = 0$



e para cada  $k$  tem-se:

$$f(x^*) = f(x^*) + \mu_k P(x^*) \geq f(x_k) + \mu_k P(x_k) \geq f(x_k).$$

□

**Teorema 2.2.1.** [14] *Seja  $\{x_k\}$  uma seqüência gerada pelo método de funções penalidade. Então, qualquer ponto limite da seqüência é uma solução de (2.12).*

*Demonstração.* Considere a seqüência de soluções  $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$  gerada pelo método de funções penalidade descrito anteriormente. Suponha que  $\{x_k\}_{k \in K}$  seja uma subseqüência convergente com limite  $\hat{x}$  da seqüência  $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ , ou seja,  $\hat{x} = \lim_{k \in K} x_k$ . Por hipótese a função objetivo  $f$  é contínua, então:

$$\lim_{k \in K} f(x_k) = f(\hat{x}).$$

Suponha  $x^*$  como sendo a solução ótima para o problema (2.12). Ou seja,

$$f(x^*) \leq f(x); \quad \forall x \in \Omega.$$

De acordo com os lemas 2.2.1 e 2.2.2 a seqüência  $\{q(\mu_k, x_k)\}_{k=1}^{+\infty}$  é crescente e limitada superiormente por  $f^* = f(x^*)$ , logo:

$$\lim_{k \in K} q(\mu_k, x_k) = q^* \leq f^*.$$

Por definição,  $q(\mu_k, x_k) = f(x_k) + \mu_k P(x_k)$ . Então:

$$\lim_{k \in K} (q(\mu_k, x_k) - f(x_k)) = q^* - f(x^*)$$

é finito. Veja que,  $\lim_{k \in K} \mu_k P(x_k)$  existe e é finito, pois:

$$\lim_{k \in K} (q(\mu_k, x_k) - f(x_k)) = \lim_{k \in K} \mu_k P(x_k).$$

Por hipótese  $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$  é uma seqüência de números reais tal que para cada  $k$  tem-se:

$$\mu_k > 0; \quad \mu_{k+1} > \mu_k \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k = +\infty.$$

Além disso, pela definição de função penalidade,  $p(x_k) \geq 0$ . Como  $\mu_k \rightarrow +\infty$  e  $p(x_k) \geq 0$ , a existência do limite finito tem como consequência  $\lim_{k \in K} \mu_k P(x_k) = +\infty$ , o que contradiz a justificativa da existência do limite finito.

Pela definição de função penalidade  $P$  é contínua, portanto:

$$\lim_{k \in K} \mu_k P(x_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(\hat{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{x} \in \Omega.$$

Pode-se concluir então que  $\hat{x}$  é uma ponto factível para o problema (2.12).

Basta mostrar somente que  $\hat{x}$  trata-se de uma solução ótima. Do Lema 2.2.2 temos que  $f(x_k) \leq f(x^*)$ . Assim,  $f(\hat{x}) = \lim_{k \in K} f(x_k) \leq f(x^*)$ . Sabemos ainda que  $f(x^*) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in \Omega$ . Em particular, vale para  $\hat{x} \in \Omega$ . Logo,  $f(\hat{x}) \leq f(x^*) \leq f(\hat{x})$ , ou seja,

$$f(\hat{x}) = f(x^*).$$

De acordo com o Lema 2.2.2, que  $f(x^*) \geq q(\mu_k, x_k) \geq f(x_k)$ . Então:

$$\lim_{k \in K} f(x^*) \geq \lim_{k \in K} q(\mu_k, x_k) \geq \lim_{k \in K} f(x_k)$$

$$f(x^*) \geq q^* \geq f(x^*) \quad \Rightarrow \quad q^* = f(x^*).$$

Sendo assim,  $\lim_{k \in K} \mu_k P(x_k) = \lim_{k \in K} (q(\mu_k, x_k) - f(x_k)) = q^* - f(\hat{x}) = 0$ . Então:

$$\lim_{k \in K} \mu_k P(x_k) = 0.$$

Isto quer dizer que  $\mu_k P(x_k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow +\infty$ .

□

## 2.3 Mínimos Quadrados Ponderados Restritos

Na proposição a seguir mostra-se a junção das técnicas de função penalidade com o problema de mínimos quadrados ponderados. Com a união destas técnicas torna-se possível resolver um problema minimização sujeito a uma restrição de igualdade de forma alternativa, onde a restrição é incorporada ao funcional a ser minimizado, como poderá ser visto a seguir.

**Proposição 2.3.1.** [10] *Sejam  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida positiva,  $G \in \mathbb{R}^{k \times n}$  posto linha pleno e  $H \in \mathbb{R}^{k \times n}$  posto linha pleno. Considere o problema de minimização com restrição:*

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^m} \{ (Hx - z)^T V (Hx - z) \} \\ \text{s. a} \quad Gx = u, \end{aligned} \quad (2.15)$$

sendo  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$  e  $u \in \mathbb{R}^k$ . Associado a (2.15) tem-se para cada  $\mu > 0$  o seguinte problema de minimização sem restrição:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \{ (\mathcal{G}x - \mathcal{B})^T \mathcal{V}(\mathcal{G}x - \mathcal{B}) \}, \quad (2.16)$$

sendo  $\mathcal{G} = \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{V}(\mu) = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix}$  e  $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix}$ . Então:

(i) para cada  $\mu > 0$ , a solução ótima  $\hat{x}(\mu)$  do problema de minimização sem restrição (2.16) é dada por:

$$\hat{x}(\mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{V}^{-1}(\mu) & \mathcal{G} \\ \mathcal{G}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{B} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

(ii)  $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \hat{x}(\mu) = x^o$ , sendo  $x^o$  a solução ótima do problema de minimização (2.15) dada por:

$$x^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 & H \\ 0 & 0 & G \\ H^T & G^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ u \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Além disso,

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mathcal{G}x - \mathcal{B})^T \mathcal{V}(\mathcal{G}x - \mathcal{B}) = (Hx^o - z)^T V (Hx^o - z). \quad (2.19)$$

*Demonstração.* Considere o problema de minimização restrita:

$$\min_{x \in \Omega} \{ f(x) \}, \quad (2.20)$$

sendo  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua definida por  $f(x) = (Hx - z)^T V (Hx - z)$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  o conjunto de restrições definido por  $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^m \mid Gx - u = 0\}$ .

Seja  $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$  uma seqüência de números reais satisfazendo para todo  $k \in \mathbb{N}^*$  as seguintes condições:  $\mu_k > 0$ ;  $\mu_{k+1} > \mu_k$  e  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k = +\infty$ . Considere também  $P : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  a

função definida por:

$$P(x) = (Gx - u)^T(Gx - u),$$

e observe que todas as condições da definição de função penalidade são satisfeitas para a escolha de  $P(x)$ , ou seja,  $P : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua;  $P(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^m$  e  $P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \Omega$ .

Define-se para cada  $k \in \mathbb{N}^*$  a função auxiliar:

$$q(\mu_k, x) = f(x) + \mu_k P(x) = (Hx - z)^T V(Hx - z) + \mu_k (Gx - u)^T(Gx - u)$$

e considere o seguinte problema de minimização irrestrita

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \{q(\mu_k, x)\}.$$

Note que o problema de minimização irrestrita acima pode ser reescrito na forma de MQP:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} = \left\{ \left( \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} \right) \right\} \quad (2.21)$$

Além disso, para cada  $k \in \mathbb{N}^*$ , este problema admite uma única solução  $\hat{x}(\mu_k)$ , pois  $q(\mu_k, x)$  é a função quadrática estritamente convexa em  $x$ . De acordo com o Lema 2.1.3, o problema de MQP (2.21) admite uma única solução  $\hat{x}_k \equiv \hat{x}(\mu_k)$  dada por:

$$\hat{x}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 & H \\ 0 & \mu_k^{-1} I & G \\ H^T & G^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ u \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Consideremos a seqüência de soluções  $\{\hat{x}_k\}_{k=1}^{+\infty}$ . De acordo com o Teorema 2.2.1, qualquer ponto limite da seqüência  $\{\hat{x}_k\}_{k=1}^{+\infty}$  é uma solução para o problema de minimização sob restrição de igualdade linear (2.15). Então, a solução ótima do problema (2.15) é dada por:

$$x^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 & H \\ 0 & 0 & G \\ H^T & G^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ u \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que a invertibilidade do bloco matricial na expressão acima permanece garantida pelo Lema A.3.7 à medida que  $\mu_k^{-1} \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow +\infty$ . E ainda, pelo Teorema 2.2.1 segue que  $\mu_k P(x_k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow +\infty$ . Logo:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} \hat{x} - \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} \hat{x} - \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} \right) = (Hx^o - z)^T V (Hx^o - z).$$

□

**Observação 1.** Observe que o bloco matricial

$$\Gamma = \begin{bmatrix} X & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

é invertível e sua inversa é dada por:

$$\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & -X \end{bmatrix}.$$

**Corolário 2.3.1.** Sejam  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica semi-definida positiva,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  simétricas definidas positivas conhecidas,  $S \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$  matrizes conhecidas. Assuma  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^m$  vetores incógnitas e  $z \in \mathbb{R}^n$  um vetor dado. Defina a função objetivo  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  a partir da seguinte expressão:

$$V(x, y) = x^T P x + z^T Q z + 2z^T S y + y^T R y,$$

e considere o problema de minimização com restrição:

$$\begin{aligned} & \min_{x, y} V(x, y) \\ & \text{s.a. } x = Fz + Gy. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Então a solução ótima  $(x^o, y^o)$  do problema (2.22) é dada por:

$$\begin{bmatrix} x^o \\ y^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} z, \tag{2.23}$$

com

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -R & -S^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & -S & -Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -G^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Além disso, o valor mínimo de  $V(x, y)$  sujeito à restrição  $x = Fz + Gy$  é dado por:

$$V(x^o, y^o) = z^T U z$$

sendo,

$$U := K_x^T P K_x + K_y^T R K_y + S K_y + K_y^T S^T + Q \succ 0.$$

*Demonstração.* Considere o problema de minimização com restrição:

$$\min_{x,y} \{x^T P x + z^T Q z + 2z^T S y + y^T R y\}$$

$$s.a \quad x = Fx + Gy.$$

Note que o problema pode ser reescrito na forma do problema de MQP sujeito a uma restrição de igualdade linear:

$$\min_{\mathcal{X}} (\mathcal{H}\mathcal{X} - \mathcal{Z})^T \mathcal{V}(\mathcal{H}\mathcal{X} - \mathcal{Z})$$

$$s.a \quad \mathcal{G}\mathcal{X} = \mathcal{U}. \quad (2.25)$$

Quando são feitas as seguintes identificações:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z; \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} P & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & S^T & I & 0 \\ 0 & 0 & S & Q & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} I & -G \end{bmatrix}; \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \mathcal{U} = Fz;$$

De fato é simples ver que:

- a função objetivo  $V(x, y) = x^T P x + z^T Q z + 2z^T S y + y^T R y$  pode ser reescrita da seguinte forma:

$$V(x, y) = \left( \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z \right)^T \begin{bmatrix} P & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & S^T & I & 0 \\ 0 & 0 & S & Q & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z \right)$$

- e a restrição  $x = Fx + Gy$  pode ser reescrita como  $\begin{bmatrix} I & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Fz$ .

De acordo com a Proposição 2.3.1, relacionado ao problema de minimização com restrições (2.25) temos para cada  $\mu > 0$  o problema de otimização sem restrição dado por:

$$\min_{\mathcal{X}} = \left\{ \left( \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{G} \end{bmatrix} \mathcal{X} - \begin{bmatrix} \mathcal{Z} \\ \mathcal{U} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{G} \end{bmatrix} \mathcal{X} - \begin{bmatrix} \mathcal{Z} \\ \mathcal{U} \end{bmatrix} \right) \right\}.$$

Como  $\begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{G} \end{bmatrix}$  tem posto coluna pleno, então para cada  $\mu > 0$  a solução ótima  $\hat{\mathcal{X}}(\mu)$  é dada por:

$$\hat{\mathcal{X}}(\mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{V}^{-1} & 0 & \mathcal{H} \\ 0 & \mu^{-1}I & \mathcal{G} \\ \mathcal{H}^T & \mathcal{G}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{Z} \\ \mathcal{U} \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, para cada  $\mu > 0$  tem - se:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(\mu) \\ \hat{y}(\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -R & -S^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & -S & -Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{-1}I & I & -G \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -G^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z.$$

Já a solução ótima do problema (2.22) é obtida quando  $\mu \rightarrow +\infty$ . Portanto:

$$\begin{bmatrix} x^o \\ y^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} z$$

com

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -R & -S^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & -S & -Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -G^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Perceba que a invertibilidade do bloco matricial na expressão acima fica garantida pelo Lema A.3.7.

Já o valor mínimo de  $V(x, y)$  sujeito a restrição  $x = Fx + Gy$  é obtido através da substituição da solução ótima  $(x^o, y^o)$  na expressão:

$$V(x, y) = x^T P x + z^T Q z + 2z^T S y + y^T R y,$$

ou, equivalentemente, na expressão:

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} P & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & S^T & I & 0 \\ 0 & 0 & S & Q & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z \end{pmatrix}.$$

Substituindo a solução ótima  $\begin{bmatrix} x^o \\ y^o \end{bmatrix}$  na expressão acima, resulta:

$$V(x^o, y^o) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^o \\ y^o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} P & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & S^T & I & 0 \\ 0 & 0 & S & Q & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^o \\ y^o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z \end{pmatrix} =$$

$$= z^T \begin{bmatrix} K_x^T & K_y^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & S^T & I & 0 \\ 0 & 0 & S & Q & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ I \end{bmatrix} z =$$

$$= z^T (K_x^T P K_x + K_y^T R K_y + H K_y + K_y^T H^T + Q) z.$$

Define-se  $U := K_x^T P K_x + K_y^T R K_y + H K_y + K_y^T H^T + Q$ , então o valor mínimo é dado por:

$$V^o(x, y) = V(x^o, y^o) = z^T U z.$$

Observe que  $U$  é uma matriz simétrica. Sendo  $Q \succ 0$ , então para qualquer  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $w \neq 0$  temos que  $w^T U w > 0$  e  $w^T U w = 0$  quando  $w = 0$ . Desta forma,  $U \succ 0$ . □

## Capítulo 3

# Controle Ótimo por Modos Deslizantes para Sistemas de Tempo Discreto

Neste capítulo será apresentada a formulação do problema de controle por modos deslizantes para sistemas de tempo discreto, proposta em [4], [5] e [6]. Serão apresentadas as etapas necessárias para se obter um modo deslizante, cujas condições de alcance serão descritas. A partir dessas condições de alcance serão mostradas as possíveis trajetórias dos estados do sistema. Será definido modo deslizante de tal forma que a análise e o desenvolvimento de um CEV discreto seja possível. Além disso, será apresentada uma lei COMD que minimiza um funcional custo quadrático, baseada em [5] e [6]. Será proposta uma solução alternativa para o problema clássico de COMD de sistemas lineares discretos no tempo. Essa nova formulação baseia-se na minimização de um índice de desempenho quadrático nas variáveis de estado  $x_k$  e de controle  $u_k$  ao mesmo tempo, considerando uma estrutura matricial alternativa. Essa nova abordagem é baseada no método de funções penalidade e problema de MQP apresentados no Capítulo 2.

### 3.1 Controle por Modos Deslizantes

Considere o sistema linear de tempo discreto:

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k, \quad (3.1)$$

sendo  $x_k \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estado,  $u_k \in \mathbb{R}$  a entrada de controle e as matrizes  $F$  e  $G$  assumidas conhecidas e de dimensões apropriadas.

Para desenvolver uma lei controle para um sistema com estrutura variável, as seguintes etapas devem ser satisfeitas:

- (i) - Determinar uma função chaveada  $s_k$  de tal forma que o modo deslizante no plano chaveado  $s_k = 0$  seja estável.
- (ii) - Determinar uma lei de controle

$$u(x) = \begin{cases} u_k^+ & \text{se } s_k > 0 \\ u_k^- & \text{se } s_k < 0 \end{cases}$$

tal que a condição de alcançabilidade é satisfeita, ou seja, para um dado estado inicial, a trajetória de estados irá se deslocar em direção ao plano chaveado e alcançá-lo em tempo finito.

A resposta dos estados deste sistema em geral é constituída em três modos: modo de alcance (MA), modo deslizante (MD) e modo estacionário (ME), como mostrara a Figura (3.1)(para um sistema de segunda ordem), a seguir:

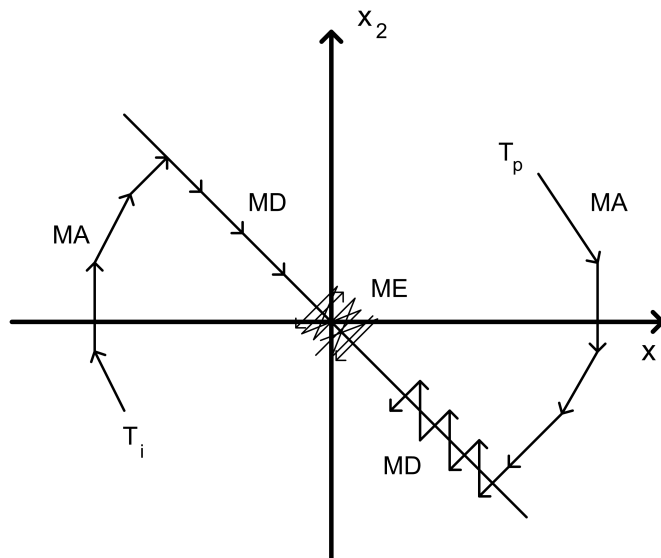


Figura 3.1: Trajetórias do controle com estrutura variável de tempo discreto.

Temos dois tipos de trajetórias de estados aceitáveis para um modo deslizante de tempo discreto, que são as trajetórias  $T_i$  e  $T_p$ , como se pode notar na Figura (3.1). A trajetória do tipo

$T_i$  é considerada ideal, e para que essa trajetória aconteça é necessário que as seguintes condições sejam satisfeitas:

**A1** O estado deve alcançar o plano chaveado exatamente no tempo de chaveamento.

**A2** A dinâmica do sistema deve corresponder ao plano chaveado, para que o estado deslize e permaneça sobre o plano deslizante.

Na prática, as condições **A1** e **A2** dificilmente são satisfeitas, pois este tipo de trajetória raramente existe. Quando condições deste tipo de trajetória são válidas, dizemos que o modo deslizante é ideal.

A trajetória  $T_p$  representa o movimento do estado para um sistema CEV discreto de maneira mais realista. A trajetória  $T_p$  se comporta de tal forma que o estado não permanece sobre o plano de chaveamento. Após encontrar o plano, ele permanece oscilando em torno deste plano, como pode ser visto na Figura (3.1). Sendo a trajetória  $T_i$  praticamente impossível de ser encontrada, a caracterização do modo deslizante para um sistema CEV discreto é normalmente feita a partir da trajetória  $T_p$ . As trajetórias de estado do tipo  $T_p$  devem possuir as seguintes condições:

**B1** A partir de qualquer condição inicial, a trajetória deverá caminhar diretamente para o plano chaveado e cruzá-lo em tempo finito.

**B2** Desde de que a trajetória cruzou o plano pela primeira vez, ela irá continuar o movimento de entrar e sair do plano durante todo o tempo.

**B3** O tamanho de cada passo de entrada e saída da trajetória do plano é não crescente e essa trajetória permanece numa determinada faixa em torno do plano chaveado.

Temos um modo deslizante quando as trajetórias de um sistema de tempo discreto satisfazem as condições **B2** e **B3**. A faixa limite em que o modo deslizante permanece é dita faixa limite do modo deslizante e é definida por:

$$\{x_k \in \mathbb{R}^n \mid -\Delta < s(x_k) < +\Delta\}, \quad (3.2)$$

sendo  $2\Delta$  a largura da faixa limite. Dizemos que o modo deslizante é ideal quando  $\Delta \equiv 0$ . Quando as condições **B1**, **B2** e **B3** são satisfeitas, dizemos que o sistema de tempo discreto satisfaz as condições de alcançabilidade.

Vamos dizer que o modo deslizante pertence a uma  $\epsilon$  - vizinhança do plano chaveado  $s(x_k) = 0$  quando as trajetórias do sistema (3.1) permanecem em torno deste plano chaveado, ou seja,

$$|s(x_k)| \leq \epsilon,$$

sendo  $\epsilon$  uma constante positiva.

## 3.2 Controle Ótimo por Modos Deslizantes

Nesta seção será apresentada uma lei de controle por modos deslizantes de tal forma que seja possível minimizar um funcional custo quadrático. Para isso, utiliza-se a abordagem clássica já existente na literatura para resolver este problema. Esta seção é baseada principalmente em [5] e [6].

### 3.2.1 Lei de Controle por Modos Deslizantes

Considerando o sistema linear de tempo discreto 3.1, defini-se uma superfícies de modos deslizantes da seguinte forma:

$$s_k = Cx_k + \phi_k = 0, \tag{3.3}$$

sendo  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  um vetor linha constante,  $CG$  é diferente de zero e  $\phi_k$  será definido posteriormente. Pode-se escolher  $\phi_0 = -Cx_0$  tal que  $s_0 = 0$ . O modo deslizante ideal deve satisfazer:

$$s_{k+1} = s_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Para obter o controle equivalente de um sistema linear de tempo discreto (3.1), basta fazer  $s_{k+1} = 0$ , então:

$$s_{k+1} = Cx_{k+1} + \phi_{k+1} = CFx_k + CGu_k + \phi_{k+1} = 0. \tag{3.4}$$

Isolando  $u_k$ , tem-se:

$$u_k^e = -(CG)^{-1}[CFx_k + \phi_{k+1}]. \tag{3.5}$$

O controle por modos deslizantes  $u_k$  é constituído da soma do controle equivalente  $u_k^e$  com o controle chaveado  $u_k^c$ , que é dada por:

$$u_k^c = (CG)^{-1}[rs_k - \epsilon T \text{sign}(s_k)], \quad 0 < r < 1 \quad \text{e} \quad \epsilon > |CG|.$$

A lei de controle de chaveamento é desenvolvida de tal forma que as condições **B1**, **B2** e **B3** sejam satisfeitas, e conseqüentemente, essa lei de controle também satisfaz as condições necessárias de alcançabilidade.

Assim, a lei de controle é dada por:

$$u_k = u_k^e + u_k^c, \quad (3.6)$$

logo,

$$u_k = -(CG)^{-1}[CFx_k + \phi_{k+1} - rs_k + \epsilon T \text{sign}(s_k)]. \quad (3.7)$$

Após desenvolver a lei de controle  $u_k$  de forma adequada, o próximo passo é realimentar o sistema (3.1) com a lei de controle  $u_k$ . Quando feita essa realimentação no sistema (3.1), obter-se-à um novo sistema, com novas variáveis, como será visto na próxima seção.

### 3.2.2 Controle Ótimo por Modos Deslizantes

Agora será utilizado a teoria de controle ótimo para desenvolver uma lei de controle ótimo por modos deslizantes baseada em uma função custo quadrático. Considerando o sistema linear de tempo discreto (3.1) e baseado nos resultados de [5], tem-se o seguinte funcional custo quadrático:

$$J = x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} x_k^T Q x_k + u_k^T u_k, \quad (3.8)$$

sendo  $P_{k+1} \succeq 0$  e a matriz  $Q \succeq 0$  assumida conhecida. Fazendo  $s_k = 0$ , ( $k \geq 0$ ), temos a seguinte entrada de controle:

$$u_k = -(CG)^{-1}[CFx_k + \phi_{k+1} - rs_k], \quad (3.9)$$

substituindo essa nova entrada de controle em (3.1), tem-se:

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= Fx_k + Gu_k \\
&= Fx_k - G(CG)^{-1}[CFx_k + \phi_{k+1} - rs_k] \\
&= Fx_k - G(CG)^{-1}CFx_k - G(CG)^{-1}\phi_{k+1} + G(CG)^{-1}rCx_k + G(CG)^{-1}r\phi_k \\
&= [F - G(CG)^{-1}(CF - rC)]x_k - G(CG)^{-1}(\phi_{k+1} - r\phi_k).
\end{aligned}$$

Fazendo  $v_k = \phi_{k+1} - \phi_k$  e  $y_k = [x_k^T, \phi_k]^T$ , tem-se:

$$y_{k+1} = \mathcal{F}y_k + \mathcal{G}v_k, \quad (3.10)$$

sendo

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F - G(CG)^{-1}(CF - rC) & G(CG)^{-1}(r - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} -G(CG)^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que ao substituir a lei de controle (3.9) no sistema (3.1), obtém-se um novo sistema nas variáveis  $y_k$  e  $v_k$ , e nota-se ainda que as matrizes  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  têm suas entradas compostas por matrizes do sistema (3.1) e da lei de controle (3.9). O mesmo será feito com o funcional custo quadrático (3.8), ou seja, será obtido um novo funcional custo quadrático nas novas variáveis  $y_k$  e  $v_k$ , como feito a seguir:

$$\begin{aligned}
J &= x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} x_k^T Q x_k + u_k^T u_k \\
&= x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} x_k^T Q x_k + (CG)^{-2} [CFx_k + \phi_{k+1} - rs_k]^T [CFx_k + \phi_{k+1} - rs_k] \\
&= x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} x_k^T Q x_k + \\
&\quad + (CG)^{-2} [CFx_k + v_k + \phi_k - r(Cx_k + \phi_k)]^T [CFx_k + v_k + \phi_k - r(Cx_k + \phi_k)] \\
&= y_{k+1}^T \mathcal{P}_{k+1} y_{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k^T \mathcal{Q} y_k + y_k^T \mathcal{S} v_k + v_k^T \mathcal{S}^T y_k + v_k^T \mathcal{R} v_k \\
&= y_{k+1}^T \mathcal{P}_{k+1} y_{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k^T \mathcal{Q} y_k + 2y_k^T \mathcal{S} v_k + v_k^T \mathcal{R} v_k, \quad (3.11)
\end{aligned}$$

sendo



$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q + (CG)^{-2}(CF - rC)^T(CF - rC) & (CG)^{-2}(CF - rC)^T(1 - r) \\ (CG)^{-2}(1 - r)(CF - rC) & (CG)^{-2}(1 - r)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{P}_{k+1} = \begin{bmatrix} P_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} (CG)^{-2}(CF - rC)^T \\ (CG)^{-2}(1 - r) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{R} = (CG)^{-2}.$$

Se forem escolhidos  $C$  e  $r$  tal que o par  $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  é estabilizável, então a lei de controle ótimo  $v_k^*$  é dada por:

$$v_k^* = -\mathcal{K}_k y_k, \quad (3.12)$$

sendo

$$\mathcal{K}_k = (\mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G} + \mathcal{R})^{-1} (\mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{F} + \mathcal{S}^T), \quad (3.13)$$

e  $\mathcal{P}_{k+1}$  é a solução da Riccati, dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{k+1} = & (\mathcal{F} + \mathcal{G}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{S}^T)^T [\mathcal{P}_{k+1} - \mathcal{P}_{k+1}\mathcal{G}(\mathcal{G}^T\mathcal{P}_{k+1}\mathcal{G} + \mathcal{R})\mathcal{G}^T\mathcal{P}_{k+1}] (\mathcal{F} + \mathcal{G}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{S}^T) + \\ & + (\mathcal{Q} + \mathcal{S}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{S}^T). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Então, a função de deslizamento ótima é dada por:

$$s_k^* = Cx_k^* + \phi_k^* = 0, \quad (3.15)$$

$$\phi_{k+1}^* = \phi_k^* - \mathcal{K}_k y_k^*, \quad \phi_0 = -Cx_0. \quad (3.16)$$

Fazendo a combinação das equações (3.16) com (3.7), obtém-se a lei de controle ótima dada por:

$$u_k^* = -(CG)^{-1} [CFx_k + \phi_{k+1}^* - rs_k + \epsilon T \text{sign}(s_k)]. \quad (3.17)$$

Conseqüentemente, encontra-se o resultado desejado quando o sistema (3.1) é realimentado com a entrada de controle ótima  $u_k^*$ .

Será desenvolvida na próxima seção uma abordagem alternativa para solucionar este problema. A principal característica desta nova abordagem é que as matrizes de parâmetro do sistema realimentado, o ganho do controlador e a solução da equação de Riccati serão incorporadas

em uma única matriz. Apresentaremos a demonstração da equivalência das duas abordagens e posteriormente um exemplo numérico.

### 3.3 Controle Ótimo por Modos Deslizante - Abordagem Alternativa

Nesta seção, propõe-se uma solução alternativa para o problema clássico COMD de sistemas lineares discretos no tempo. Esta nova formulação se baseia na minimização de uma função custo quadrático, considerando uma estrutura matricial alternativa à que foi apresentada na seção anterior. Esta nova abordagem é baseada no método de funções penalidade e problema de MQP. E por último mostra-se a equivalência das duas abordagens feitas para o problema de controle por modos deslizante.

#### 3.3.1 COMD via Função Penalidade

Considere o sistema linear (3.10):

$$y_{k+1} = \mathcal{F}y_k + \mathcal{G}v_k.$$

Define-se, neste momento, uma expressão auxiliar da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_j(y_j, v_j) = y_j^T \mathcal{Q}y_j + 2y_j^T \mathcal{S}v_j + v_j^T \mathcal{R}v_j; \quad j = 0, \dots, N, \quad (3.18)$$

e considere o funcional custo quadrático (3.11) reescrito como:

$$J = y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1} + \sum_{j=0}^N \mathcal{L}_j(y_j, v_j), \quad (3.19)$$

com as matrizes de ponderação  $\mathcal{P}_{N+1} \succeq 0$ ,  $\mathcal{Q} \succeq 0$ ,  $\mathcal{S} \succeq 0$  e  $\mathcal{R} \succeq 0$  assumidas conhecidas.

Considere o seguinte problema de minimização sujeito a uma restrição de igualdade:

$$\min_{y_{i+1}, v_i} \left\{ y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1} + \sum_{j=0}^N \mathcal{L}_j(y_j, v_j) \right\} \quad (3.20)$$

$$\text{s. a } y_{k+1} = \mathcal{F}y_k + \mathcal{G}v_k, \quad k = 0, \dots, N.$$

O objetivo é determinar uma lei de controle ótima  $\{(y_{k+1}^*, v_k^*)\}_{k=0}^N$  que minimize o funcional (3.19). Observa-se que a minimização não é feita apenas em função da entrada de controle  $v_k$ , mas também em função de  $y_{k+1}$ .

A abordagem para a solução do problema de minimização restrita (3.20) torna-se bastante simplificada se for considerado que toda solução ótima deve satisfazer o princípio da otimalidade de Bellman.

- **Princípio de Otimalidade**([18], [19]): “Uma política ótima tem a prioridade de que qualquer que seja o estado inicial, as decisões restantes devem constituir uma política ótima com respeito ao estado resultante da primeira decisão.”

Por meio deste princípio, o problema (3.20) pode ser resolvido recursivamente através da minimização da forma enunciada no Lema a seguir. O próximo Lema é baseado nos resultados de [10].

**Lema 3.3.1.** *O problema*

$$\min_{y_{k+1}, u_k} \left\{ y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1} + \sum_{j=0}^N \mathcal{L}_j(y_j, u_j) \right\}$$

*s. a*  $y_{k+1} = \mathcal{F}y_k + \mathcal{G}v_k, \quad k = 0, \dots, N.$

*pode ser resolvido recursivamente por meio da minimização de*

$$\begin{aligned} \min_{y_1, v_0} \left\{ \mathcal{L}_0(y_0, u_0) + \min_{y_2, v_1} \left\{ \mathcal{L}_1(y_1, u_1) + \dots + \min_{y_i, v_{i-1}} \left\{ \mathcal{L}_{i-1}(y_{i-1}, u_{i-1}) + \dots + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \min_{y_{N+1}, v_N} \left\{ \mathcal{L}_N(y_N, u_N) + y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1} \right\} \right\} \dots \right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

*sujeito a*  $y_{k+1} = \mathcal{F}y_k + \mathcal{G}v_k, \quad k = 0, \dots, N.$

*Demonstração.* Vamos utilizar o Princípio de Otimalidade para mostrar que a sequência ótima  $\{(y_{k+1}^*, v_k^*)\}_{k=0}^N$  minimiza (3.19). Considere para cada  $k = 0, \dots, N$  o funcional custo quadrático no intervalo de interesse  $[k, N + 1]$  dado por:

$$J_k = y_{k+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{k+1} + \sum_{j=0}^N \mathcal{L}_j(y_j, u_j). \quad (3.22)$$

Procede-se por passos:

- ( $k = N + 1$ ) assumamos que  $J_{N+1}^*(y_{N+2}, v_{N+1}) = y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1}$ . Nota-se que é natural considerar  $J_{N+1}^*$  como feito anteriormente, pois de acordo com a expressão (3.22) temos:

$$J_{N+1}^*(y_{N+2}, v_{N+1}) = y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1}$$

e, dessa maneira,

$$J_{N+1}^*(y_{N+2}, v_{N+1}) = \min_{y_{N+2}, v_{N+1}} y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1} = y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1},$$

pois não há dependência das variáveis  $y_{N+2}$  e  $v_{N+1}$ .

- ( $k = N$ ) segue de (3.22) que:

$$J_N = y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1} + y_N^T \mathcal{Q} y_N + 2y_N^T \mathcal{S} v_N + v_N^T \mathcal{R} v_N.$$

É preciso encontrar então  $(y_{N+1}^*, v_N^*)$  por meio da minimização de  $J_N$ . Assim,

$$(y_{N+1}^*, v_N^*) \in \arg \min_{y_{N+1}, v_N} \{J_{N+1}^* + \mathcal{L}_N(y_N, v_N)\}$$

$$\text{s. a } y_{N+1} = \mathcal{F} y_N + \mathcal{G} v_N$$

sendo o custo ótimo no instante  $N$  dado por:

$$J_N^* = \min_{y_{N+1}, v_N} \{y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1} + y_N^T \mathcal{Q} y_N + 2y_N^T \mathcal{S} v_N + v_N^T \mathcal{R} v_N\}$$

$$\text{s. a } y_{N+1} = \mathcal{F} y_N + \mathcal{G} v_N.$$

- ( $k = N - 1$ ) por (3.22) temos que:

$$J_{N-1} = J_N + y_{N-1}^T \mathcal{Q} y_{N-1} + 2y_{N-1}^T \mathcal{S} v_{N-1} + v_{N-1}^T \mathcal{R} v_{N-1}.$$

O objetivo é encontrar uma sequência ótima  $\{(y_{k+1}^*, v_k^*)\}_{k=N-1}^N$  que minimize  $J_{N-1}$ . De acordo com o Princípio da Otimalidade, dado que no passo anterior ( $k = N$ ) já foi encontrada a sequência ótima para o intervalo  $[N, N + 1]$ , então a sequência ótima para o passo ( $i = N - 1$ ) será formada pelo termo  $(y_{N+1}^*, v_N^*)$  obtido no passo anterior juntamente com

o termo  $(y_N^*, v_{N-1}^*)$  que será obtido neste passo por meio da minimização de

$$J_{N-1} = J_N^* + y_{N-1}^T \mathcal{Q} y_{N-1} + 2y_{N-1}^T \mathcal{S} v_{N-1} + v_{N-1}^T \mathcal{R} v_{N-1}.$$

Assim,

$$(y_N^*, v_{N-1}^*) \in \arg \min_{y_N, v_{N-1}} \{J_N^* + \mathcal{L}_{N-1}(y_{N-1}, v_{N-1})\}$$

$$\text{s. a } y_N = \mathcal{F} y_{N-1} + \mathcal{G} v_{N-1},$$

sendo o custo ótimo no instante  $N - 1$  dado por:

$$J_{N-1}^* = \min_{y_N, v_{N-1}} \{J_N^* + y_{N-1}^T \mathcal{Q} y_{N-1} + 2y_{N-1}^T \mathcal{S} v_{N-1} + v_{N-1}^T \mathcal{R} v_{N-1}\}$$

$$\text{s. a } y_N = \mathcal{F} y_{N-1} + \mathcal{G} v_{N-1}.$$

- ( $k = i - 1$ ) assumamos que o custo ótimo calculado a partir de um instante de tempo  $i$  qualquer até o instante de tempo terminal  $N + 1$ , considerando todas as possibilidades para  $(y_{k+1}^*, v_k^*)$ , seja dado por  $J_i^*$ . Ou seja, de acordo com os passos anteriores, então:

$$J_i^* = \min_{y_{i+1}, v_i} \{J_{i+1}^* + \mathcal{L}_i(y_i, v_i)\}$$

$$\text{s. a } y_{i+1} = \mathcal{F} y_i + \mathcal{G} v_i. \quad (3.23)$$

Admita então que foi encontrada a sequência ótima que vai do instante  $i$  até o instante  $N + 1$  para todo  $(y_{k+1}, v_k)$ . Seja essa sequência ótima dada por:

$$(y_{i+1}^*, v_i^*), (y_{i+2}^*, v_{i+1}^*), \dots, (y_{N+1}^*, v_N^*). \quad (3.24)$$

Suponha agora que se aplicou um par arbitrário  $(y_i, v_{i-1})$  no instante  $(i - 1)$ , e a partir do instante  $i$ , considera-se a sequência ótima obtida anteriormente. Tem-se então que o custo resultante para ir do instante  $(i - 1)$  até o instante terminal  $N + 1$  é dado por:

$$J_{i-1} = J_i^* + \mathcal{L}_{i-1}(y_{i-1}, v_{i-1}).$$

De acordo com o Princípio de Otimalidade o custo ótimo no instante  $i - 1$  será ótimo então:

$$J_{i-1}^* = \min_{y_i, v_{i-1}} \{J_i^* + \mathcal{L}_{i-1}(y_{i-1}, v_{i-1})\}$$

$$\text{s. a } y_i = \mathcal{F}y_{i-1} + \mathcal{G}v_{i-1},$$

e o par ótimo  $(y_i^*, v_{i-1}^*)$  no instante  $(i - 1)$  é o par sujeito à restrição  $y_i = \mathcal{F}y_{i-1} + \mathcal{G}v_{i-1}$  que minimiza o funcional  $J_{i-1} = J_i^* + \mathcal{L}_{i-1}(y_{i-1}, v_{i-1})$ .

Procedendo analogamente para os passos restantes  $k = i - 2, i - 3, \dots, 1, 0$ , concluí-se que o problema (3.20) pode ser resolvido recursivamente por meio da minimização da forma (3.21).

□

Com base nos resultados vistos anteriormente e com auxílio da técnica clássica de programação dinâmica obtém-se a solução recursiva ótima do COMD enunciado no teorema a seguir.

**Teorema 3.3.1.** *Considere o seguinte funcional custo quadrático:*

$$J = y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1} + \sum_{j=0}^N \mathcal{L}_j(y_j, v_j),$$

e o seguinte modelo linear no espaço de estado:

$$y_{k+1} = \mathcal{F}y_k + \mathcal{G}v_k, \quad k = 0, \dots, N \quad \text{com } y_0 = \text{cte.}$$

Defina o seguinte problema de minimização com restrição de igualdade:

$$\min_{y_{k+1}, v_k} \left\{ y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1} + \sum_{j=0}^N \mathcal{L}_j(y_j, v_j) \right\}$$

$$\text{s. a } y_{k+1} = \mathcal{F}y_k + \mathcal{G}v_k, \quad k = 0, \dots, N.$$

Então a solução recursiva ótima para tal problema é dada por:

$$\begin{bmatrix} y_{k+1}^* \\ v_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_k \\ \mathcal{K}_k \end{bmatrix} y_k; \quad k = 0, \dots, N. \quad (3.25)$$

Sendo  $L_k$  e  $K_k$  obtidos de acordo com a seguinte recursão:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_k \\ \mathcal{K}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\mathcal{P}_{k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -\mathcal{R} & -\mathcal{S}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{S} & -\mathcal{Q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{G} \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{L}_k^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{L}_k + \mathcal{K}_k^T \mathcal{R} \mathcal{K}_k + \mathcal{S} \mathcal{K}_k + \mathcal{K}_k^T \mathcal{S}^T + \mathcal{Q}; \quad k = N, \dots, 0 \quad (3.27)$$

*Demonstração.* De acordo com o Lema 3.3.1 este problema pode ser resolvido recursivamente por meio de:

$$\begin{aligned} \min_{y_1, v_0} & \left\{ y_0^T \tilde{Q} y_0 + 2y_0^T \mathcal{S} v_0 + v_0^T \mathcal{R} v_0 + \min_{y_2, v_1} \left\{ y_1^T \mathcal{Q} y_1 + 2y_1^T \mathcal{S} v_1 + v_1^T \mathcal{R} v_1 + \dots + \right. \right. \\ & \left. \left. + \min_{y_N, v_{N-1}} \left\{ y_{N-1}^T \mathcal{Q} y_{N-1} + 2y_{N-1}^T \mathcal{S} v_{N-1} + v_{N-1}^T \mathcal{R} v_{N-1} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \min_{y_{N+1}, v_N} \left\{ y_N^T \mathcal{Q} y_N + 2y_N^T \mathcal{S} v_N + v_N^T \mathcal{R} v_N + y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1} \right\} \right\} \dots \right\} \\ \text{s. a } & y_{k+1} = \mathcal{F} y_k + \mathcal{G} v_k, \quad k = 0, \dots, N \end{aligned}$$

procedendo por passos, tem-se:

- Passo N

$$\begin{aligned} \min_{y_{N+1}, v_N} & \left\{ y_N^T \mathcal{Q} y_N + 2y_N^T \mathcal{S} v_N + v_N^T \mathcal{R} v_N + y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1} \right\} \\ \text{s. a } & y_{N+1} = \mathcal{F} y_N + \mathcal{G} v_N. \end{aligned}$$

Por hipótese  $\mathcal{Q} \succeq 0$ ,  $\mathcal{S} \succeq 0$ ,  $\mathcal{R} \succeq 0$ ,  $\mathcal{P}_{N+1} \succeq 0$ . Considere agora as seguintes identificações:

$$x \leftarrow y_{N+1}; \quad z \leftarrow y_N; \quad y \leftarrow v_N; \quad P \leftarrow \mathcal{P}_{N+1}; \quad Q \leftarrow \mathcal{Q};$$

$$H \leftarrow \mathcal{S}; \quad R \leftarrow \mathcal{R}; \quad F \leftarrow \mathcal{F}; \quad G \leftarrow \mathcal{G};$$

Após feitas as identificações o problema passa a ter a seguinte forma:

$$\min_{x,y} \{x^T P x + z^T Q z + 2z^T H y + y^T R y\}$$

$$s.a \quad x = Fz + Gy.$$

E de acordo com o Corolário 2.3.1, admite a solução ótima:

$$\begin{bmatrix} y_{N+1}^* \\ v_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_N \\ \mathcal{K}_N \end{bmatrix} y_N$$

com

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_N \\ \mathcal{K}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\mathcal{P}_{N+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -\mathcal{R} & -\mathcal{S}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{S} & -\mathcal{Q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{G} \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

E também,

$$\min_{y_{N+1}, v_N} \{y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1} + y_N^T \mathcal{Q} y_N + 2y_N^T \mathcal{S} v_N + v_N^T \mathcal{R} v_N\}$$

$$s. a \quad y_{N+1} = \mathcal{F} y_N + \mathcal{G} v_N$$

é igual a  $y_N^T U_N y_N$ , sendo:

$$U_N = \mathcal{L}_N^T \mathcal{P}_{N+1} \mathcal{L}_N + \mathcal{K}_N^T \mathcal{R} \mathcal{K}_N + \mathcal{S} \mathcal{K}_N + \mathcal{K}_N^T \mathcal{S}^T + \mathcal{Q} \succ 0.$$

Considere neste passo  $\tilde{P}_N = U_N$ .



- Passo (N - 1)

De acordo com o Lema 3.3.1, o problema neste passo deve considerar:

$$\min_{y_N, v_{N-1}} \{ \mathcal{L}_{N-1}(y_{N-1}, v_{N-1}) + y_N^T U_N y_N \}$$

$$\text{s. a } y_N = \mathcal{F}y_{N-1} + \mathcal{G}v_{N-1},$$

sendo o termo  $y_N^T U_N y_N$  proveniente da minimização efetuada no passo anterior. Ou seja,

$$\min_{y_N, v_{N-1}} \{ y_{N-1}^T \mathcal{Q} y_{N-1} + 2y_{N-1}^T \mathcal{S} v_{N-1} + v_{N-1}^T \mathcal{R} v_{N-1} + y_N^T \mathcal{P}_N y_N \}$$

$$\text{s. a } y_N = \mathcal{F}y_{N-1} + \mathcal{G}v_{N-1}.$$

Observe que o problema de minimização nesta etapa é idêntico ao da etapa anterior e, portanto, deve-se proceder de maneira análoga aplicando o Corolário 2.3.1. Logo,

$$\begin{bmatrix} y_N^* \\ v_{N-1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{N-1} \\ \mathcal{K}_{N-1} \end{bmatrix} y_{N-1}$$

com

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{N-1} \\ \mathcal{K}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\mathcal{P}_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & -\mathcal{R} & -\mathcal{S}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{S} & -\mathcal{Q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{G} \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

E também,

$$\min_{y_N, v_{N-1}} \{ y_N^T \mathcal{P}_N y_N + y_{N-1}^T \mathcal{Q} y_{N-1} + 2y_{N-1}^T \mathcal{S} v_{N-1} + v_{N-1}^T \mathcal{R} v_{N-1} \}$$

$$\text{s. a } y_N = \mathcal{F}y_{N-1} + \mathcal{G}v_{N-1}$$

é igual a  $y_{N-1}^T U_{N-1} y_{N-1}$ , sendo:

$$U_{N-1} = \mathcal{L}_{N-1}^T \mathcal{P}_N \mathcal{L}_{N-1} + \mathcal{K}_{N-1}^T \mathcal{R} \mathcal{K}_{N-1} + \mathcal{S} \mathcal{K}_{N-1} + \mathcal{K}_{N-1}^T \mathcal{S}^T + \mathcal{Q} \succ 0.$$

Considere neste passo  $\tilde{P}_{N-1} = U_{N-1}$ .

- Passo (N - 2)

$$\min_{y_{N-1}, v_{N-2}} \{y_{N-2}^T \mathcal{Q} y_{N-2} + 2y_{N-2}^T \mathcal{S} v_{N-2} + v_{N-2}^T \mathcal{R} v_{N-2} + y_{N-1}^T \mathcal{P}_{N-1} y_{N-1}\}$$

$$\text{s. a } y_{N-1} = \mathcal{F} y_{N-2} + \mathcal{G} v_{N-2}.$$

Aplicando o Corolário 2.3.1, tem-se:

$$\begin{bmatrix} y_{N-1}^* \\ v_{N-2}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{N-2} \\ \mathcal{K}_{N-2} \end{bmatrix} y_{N-2}$$

com

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{N-2} \\ \mathcal{K}_{N-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\mathcal{P}_{N-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & -\mathcal{R} & -\mathcal{S}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{S} & -\mathcal{Q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{G} \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

E também,

$$\min_{y_{N-1}, v_{N-2}} \{y_{N-1}^T \mathcal{P}_{N-1} y_{N-1} + y_{N-2}^T \mathcal{Q} y_{N-2} + 2y_{N-2}^T \mathcal{S} v_{N-2} + v_{N-2}^T \mathcal{R} v_{N-2}\}$$

$$\text{s. a } y_{N-1} = \mathcal{F} y_{N-2} + \mathcal{G} v_{N-2}$$

é igual a  $y_{N-2}^T U_{N-2} y_{N-2}$ , sendo:

$$U_{N-2} = \mathcal{L}_{N-2}^T \mathcal{P}_{N-1} \mathcal{L}_{N-2} + \mathcal{K}_{N-2}^T \mathcal{R} \mathcal{K}_{N-2} + \mathcal{S} \mathcal{K}_{N-2} + \mathcal{K}_{N-2}^T \mathcal{S}^T + \mathcal{Q} \succ 0.$$

Considere neste passo  $\tilde{P}_{N-2} = U_{N-2}$ .

- Passo  $i$

Continuando o processo com o decaimento de  $j$ , sempre aplicando o mesmo princípio, então o resultado obtido para cada  $i = (N - 3), \dots, 1, 0$ , será:

$$\begin{bmatrix} y_{i+1}^* \\ v_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_i \\ \mathcal{K}_i \end{bmatrix} y_i$$

com

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_i \\ \mathcal{K}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\mathcal{P}_{i+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -\mathcal{R} & -\mathcal{S}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{S} & -\mathcal{Q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{G} \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{L}_i^T \mathcal{P}_{i+1} \mathcal{L}_i + \mathcal{K}_i^T \mathcal{R} \mathcal{K}_i + \tilde{S} \mathcal{K}_i + \mathcal{K}_i^T \mathcal{S}^T + \mathcal{Q}.$$

E assim segue o resultado. □

**Observação 2.** Considerando a demonstração do Teorema 3.3.1, note que o problema de controle pode ser estabelecido por meio do seguinte problema de minimização restrita de um funcional quadrático de um passo no intervalo de interesse  $[k, N + 1]$

$$\min_{y_{k+1}, v_k} \{ y_{k+1}^T \mathcal{P}_{k+1} y_{k+1} + y_k^T \mathcal{Q} y_k + 2y_k^T \mathcal{S} v_k + v_k^T \mathcal{R} v_k \}$$

$$s. \ a \quad y_{k+1} = \mathcal{F} y_k + \mathcal{G} v_k,$$

sendo que  $y_{k+1}^T \mathcal{P}_{k+1} y_{k+1}$  corresponde ao custo acumulado no intervalo  $[k + 1, N + 1]$ . Ou, de forma análoga, estabelecido por meio do problema de minimização irrestrita do funcional quadrático

$$J_k^\mu(y_{k+1}, v_k) = \left( \begin{array}{c} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & -\mathcal{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \end{bmatrix} y_k \end{array} \right)^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k+1} & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R} & \mathcal{S}^T & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{S} & \mathcal{Q} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

nas variáveis  $(y_{k+1}, v_k)$  para cada valor fixado de  $\mu$ . Onde a solução ótima é alcançada à medida que  $\mu \rightarrow +\infty$ , de acordo com a Proposição 2.3.1.

Prosseguindo o raciocínio da Observação 2, foi visto que a solução ótima do funcional (3.28), para cada  $\mu > 0$ , é dada por

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1}(\mu) \\ \hat{v}_k(\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\mathcal{P}_{k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -\mathcal{R} & -\mathcal{S}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{S} & -\mathcal{Q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{-1}I & I & -\mathcal{G} \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_k. \quad (3.29)$$

Enquanto o custo ótimo para cada  $\mu > 0$ , segundo o Lema 2.1.2, é dado por:

$$\hat{J}_k = J_k(\hat{x}_{k+1}(\mu), \hat{v}_k(\mu)) =$$

$$= y_k^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\mathcal{P}_{k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & -\mathcal{R} & -\mathcal{S}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{S} & -\mathcal{Q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{-1}I & I \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_k. \quad (3.30)$$

Fazendo  $\mu \rightarrow +\infty$ , segue que  $(\hat{x}_{k+1}(\mu), \hat{v}_k(\mu)) \rightarrow (x_{k+1}^*, v_k^*)$  e, assim,  $J_k(\hat{x}_{k+1}(\mu), \hat{v}_k(\mu)) \rightarrow J_k(x_{k+1}^*, v_k^*) = J_k^*$ . Então:

$$J_k^* = J_k(x_{k+1}^*, v_k^*) = y_k^T \mathcal{P}_k y_k =$$

$$= y_k^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\mathcal{P}_{k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & -\mathcal{R} & -\mathcal{S}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{S} & -\mathcal{Q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_k. \quad (3.31)$$

Combinando as expressões (3.26) e (3.31), encontra-se:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_k \\ \mathcal{K}_k \\ \mathcal{P}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{F} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\mathcal{P}_{k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -\mathcal{R} & -\mathcal{S}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{S} & -\mathcal{Q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{G} \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_k. \quad (3.32)$$

Observa-se que as matrizes  $\mathcal{L}_k$ ,  $\mathcal{K}_k$  e  $\mathcal{P}_k$  podem ser calculadas a partir da mesma inversa de um bloco matricial principal. E que, tal estrutura reúne de forma simétrica todas as matrizes de parâmetros e de ponderação do sistema para o cálculo da matriz  $\mathcal{P}_k$ .

### 3.3.2 Equivalência das Abordagens

**Lema 3.3.2.** *A solução recursiva (3.25) - (3.27) proposta no Teorema 3.3.1 pode ser reescrita da seguinte forma:*

$$y_{k+1}^* = \underbrace{[\mathcal{F} - \mathcal{G}(\mathcal{R} + \mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G})^{-1}(\mathcal{S}^T + \mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{F})]}_{L_k} y_k^* \quad (3.33)$$

$$v_k^* = \underbrace{-\mathcal{G}(\mathcal{R} + \mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G})^{-1}(\mathcal{S}^T + \mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{F})}_{K_k} y_k^*, \quad (3.34)$$

para todo  $k = 0, \dots, N$ , sendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k &= (\mathcal{F} - \mathcal{G}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{S}^T)^T [\mathcal{P}_{k+1} - \mathcal{P}_{k+1}\mathcal{G}(\mathcal{R} + \mathcal{G}^T\mathcal{P}_{k+1}\mathcal{G})^{-1}\mathcal{G}^T\mathcal{P}_{k+1}] (\mathcal{F} - \mathcal{G}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{S}^T) + \\ &+ (\mathcal{Q} - \mathcal{S}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{S}^T), \end{aligned} \quad (3.35)$$

para todo  $k = N, \dots, 0$ .

*Demonstração.* Sabe-se que a solução recursiva ótima para cada  $k = 0, \dots, N$  é dada por:

$$\begin{bmatrix} y_{k+1}^* \\ v_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\mathcal{P}_{k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -\mathcal{R} & -\mathcal{S}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{S} & -\mathcal{Q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{G} \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_k^*$$

Equivalentemente, a solução ótima  $\begin{bmatrix} y_{k+1}^* \\ v_k^* \end{bmatrix}$  para cada instante  $k = 0, \dots, N$  deve-se compor o vetor solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\mathcal{P}_{k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -\mathcal{R} & -\mathcal{S}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{S} & -\mathcal{Q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{G} \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ y_{k+1}^* \\ v_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_k^*$$

Tem-se então o seguinte sistema de equações:

$$I\lambda_2 + Iy_{k+1}^* = 0 \quad (3.36)$$

$$I\lambda_1 - \mathcal{P}_{k+1}^{-1}\lambda_2 = 0 \quad (3.37)$$

$$I\lambda_5 + Iv_k^* = 0 \quad (3.38)$$

$$I\lambda_6 = -Iy_k^* \quad (3.39)$$

$$I\lambda_3 - \mathcal{R}\lambda_5 - \mathcal{S}^T\lambda_6 = 0 \quad (3.40)$$

$$I\lambda_4 - \mathcal{S}\lambda_5 - \mathcal{Q}^T\lambda_6 = 0 \quad (3.41)$$

$$Iy_{k+1}^* - \mathcal{G}v_k^* = \mathcal{F}y_k^* \quad (3.42)$$

$$I\lambda_1 + I\lambda_7 = 0 \quad (3.43)$$

$$I\lambda_3 - \mathcal{G}\lambda_7 = 0. \quad (3.44)$$

(i) - Demonstração da equivalência das expressões de controle:

Combinando as equações (3.37), (3.43) e (3.44), tem-se:

$$\lambda_3 = -\mathcal{G}^T\mathcal{P}_{k+1}\lambda_2. \quad (3.45)$$

Agora, das equações (3.38), (3.39), (3.40) e (3.45) obtém-se a seguinte equação:

$$v_k^* = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{G}^T\mathcal{P}_{k+1}\lambda_2 - \mathcal{R}^{-1}\mathcal{S}^T y_k^* \quad (3.46)$$

fazendo a combinação das equações (3.36), (3.42) e (3.46), pode-se calcular  $\lambda_2$  da seguinte forma:

$$\lambda_2 = (I + \mathcal{G}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{G}^T\mathcal{P}_{k+1})^{-1}(\mathcal{G}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{S}^T - \mathcal{F})y_k^* \quad (3.47)$$

substituindo (3.47) em (3.46) tem-se:

$$\begin{aligned} v_k^* = & - \left[ -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{G}^T\mathcal{P}_{k+1}(I + \mathcal{G}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{G}^T\mathcal{P}_{k+1})^{-1}\mathcal{G}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{G}^T y_k^* + \mathcal{R}^{-1}\mathcal{S}^T y_k^* \right] - \\ & - \mathcal{R}^{-1}\mathcal{G}^T\mathcal{P}_{k+1}(I + \mathcal{G}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{G}^T\mathcal{P}_{k+1})^{-1}\mathcal{F}y_k^*, \end{aligned} \quad (3.48)$$

basta aplicar os Lemas A.1.1 e A.1.2 para encontrar:

$$v_k^* = - \underbrace{(\mathcal{R} + \mathcal{G}^T\mathcal{P}_{k+1}\mathcal{G})^{-1}(\mathcal{H}^T + \mathcal{G}^T\mathcal{P}_{k+1}\mathcal{F})}_{\mathcal{K}_k} y_k^* \quad (3.49)$$



(ii) - Demonstração da equivalência do estado realimentado:

De (3.42) e (3.49) obtém-se:

$$y_{k+1}^* = \underbrace{[\mathcal{F} - \mathcal{G}(\mathcal{R} + \mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G})^{-1} (\mathcal{S}^T + \mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{F})]}_{\mathcal{L}_k} y_k^*. \quad (3.50)$$

(iii) - Equivalência com a equação recursiva de Riccati:

Sabe-se que:

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{L}_k^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{L}_k + \mathcal{K}_k^T \mathcal{R} \mathcal{K}_k + \tilde{\mathcal{S}} \mathcal{K}_k + \mathcal{K}_k^T \mathcal{S}^T + \mathcal{Q}, \quad (3.51)$$

substituindo (3.49) e (3.50) na equação (3.51), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k = (\mathcal{F} - \mathcal{G} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{S}^T)^T & [\mathcal{P}_{k+1} - \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G} (\mathcal{R} + \mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G})^{-1} \mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1}] (\mathcal{F} - \mathcal{G} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{S}^T) + \\ & + (\mathcal{Q} - \mathcal{S} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{S}^T). \end{aligned}$$

□

### 3.4 Exemplo Numérico

**Exemplo 3.4.1.** Considere o sistema linear (3.1) com as seguintes matrizes de parâmetros:

$$F = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.1 \\ -0.5 & 2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e as seguintes matrizes de ponderação:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{N+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1.$$

As simulações realizadas neste exemplo são baseadas no Teorema 3.3.1. defini-se  $\epsilon = 0.4$ ,  $T = 0.5$  e  $r = 0.25$ , o estado inicial  $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ . Foi utilizado um horizonte  $N = 50$  para a simulação.

Quando o horizonte  $N \rightarrow +\infty$ , nota-se que  $\mathcal{P}_k$  converge para:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 180.1939 & 20.4717 & 0 \\ 20.4717 & 6.8016 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e a respectiva matriz de ganho  $K$  é dada por:

$$K = \begin{bmatrix} 1.3129 & 0.0560 & -0.7500 \end{bmatrix}.$$

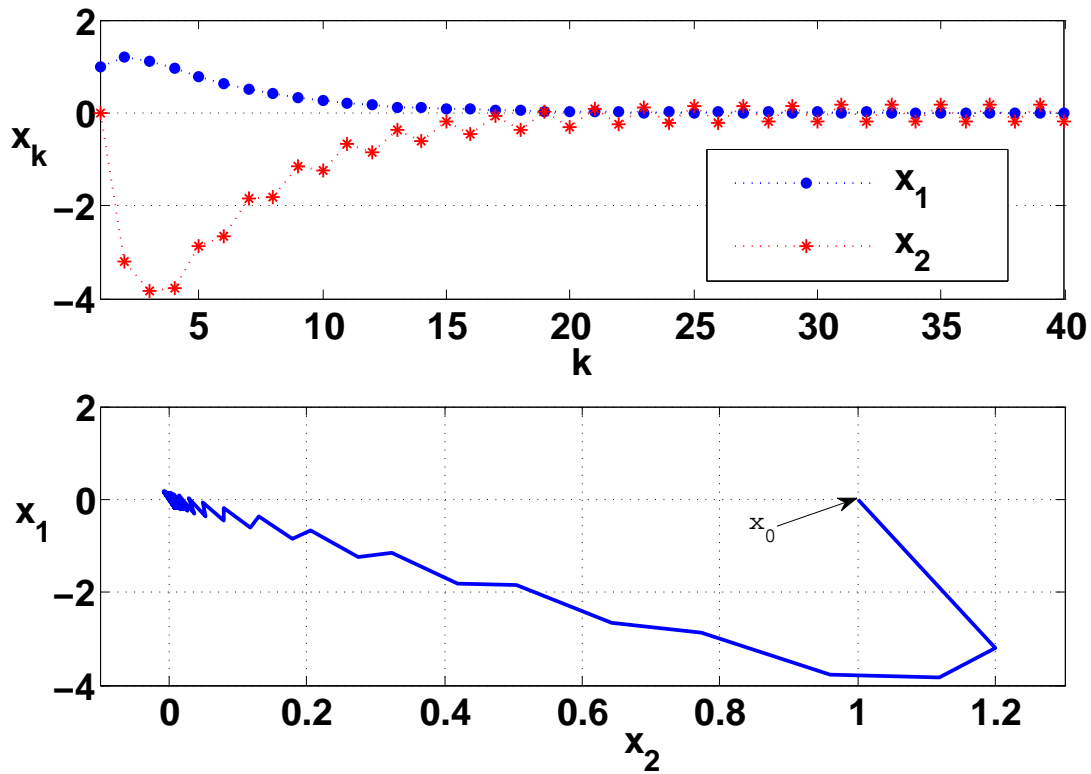


Figura 3.2: Estados do sistema e convergência.

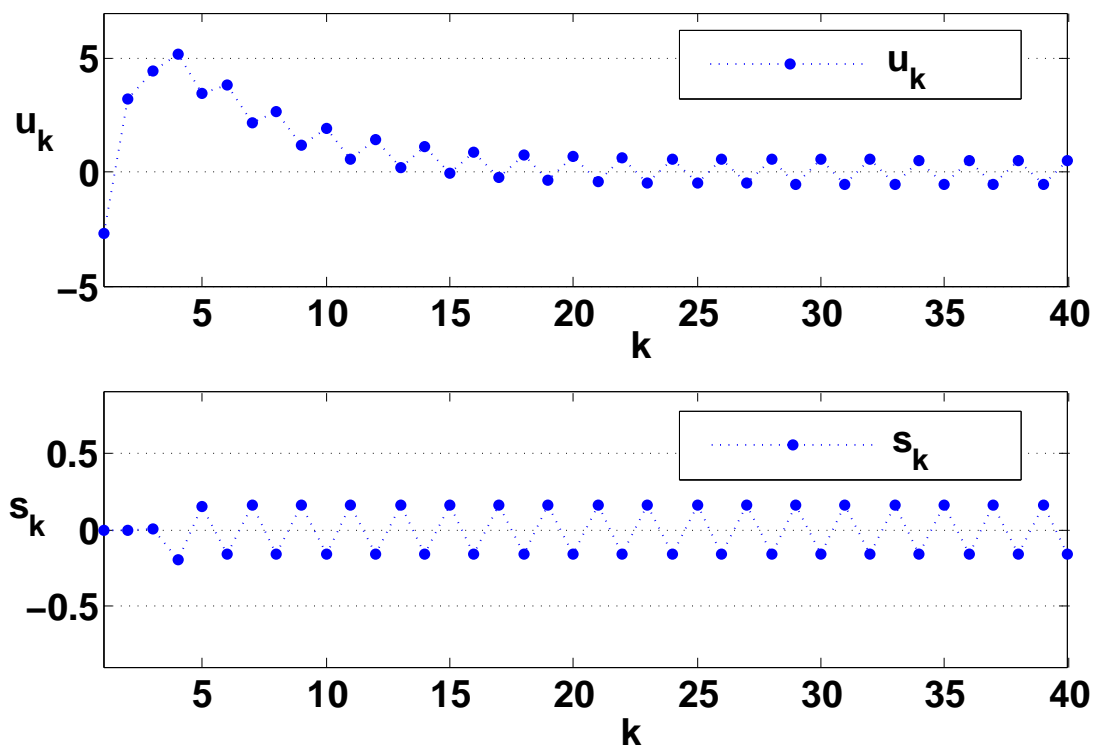


Figura 3.3: Lei de controle e superfície deslizando.

*O mesmo resultado é obtido quando se considera a estrutura apresentada no Lema 3.3.2.*



## Capítulo 4

# Controle Ótimo por Modos Deslizantes para Sistemas Multivariáveis

Neste capítulo trata-se o problema de controle por modos deslizantes para sistemas multivariáveis de tempo discreto, baseado em [7], [8] e [9]. Será apresentada uma lei COMD que minimiza um funcional custo quadrático, baseada em [8] e [5]. Será proposta uma solução alternativa para o problema clássico COMD de sistemas multivariáveis de tempo discreto. Essa nova formulação baseia-se no mesmo princípio utilizado para resolver o problema de COMD para sistemas de tempo discreto com apenas uma entrada de controle, em que foi feita a minimização de um funcional custo quadrático nas variáveis de estado  $x_k$  e de controle  $u_k$  ao mesmo tempo, considerando uma estrutura matricial alternativa.

### 4.1 Controle Ótimo por Modos Deslizantes

Nesta seção será proposta uma lei de controle por modos deslizantes apropriada de tal forma que as leis de alcançabilidade sejam satisfeitas e ainda que garanta a estabilidade do sistema. Será mostrado que o sistema é estável quando realimentado por essa lei de controle por modos deslizantes.

### 4.1.1 Lei de Controle

Considere o sistema linear de tempo discreto:

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k, \quad (4.1)$$

sendo  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$  matrizes conhecidas,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estado e  $u_k \in \mathbb{R}^m$  a entrada de controle. Considere que o par  $(F, G)$  é controlável. As múltiplas superfícies deslizantes serão definidas da seguinte forma:

$$s_k = Cx_k + \phi_k = 0, \quad (4.2)$$

sendo  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $CG$  uma matriz não-singular e  $\phi_k \in \mathbb{R}^m$  será definido posteriormente. Pode-se escolher  $\phi_0 = -Cx_0$  tal que  $s_0 = 0$ . Veja que  $s_k = [s_{1,k} \ s_{2,k} \ \dots \ s_{m,k}]^T$ , então para cada superfície que compõe  $s_k$  teremos uma lei de controle associada, pois  $u_k = [u_{1,k} \ u_{2,k} \ \dots \ u_{m,k}]^T$ . A superfície deslizante  $s_k = 0$  será formada pela interseção das superfícies deslizantes que a compõe.

Para obtermos um modo deslizante ideal, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$s_{k+1} = s_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A partir desta condição é possível encontrar uma lei de controle equivalente do sistema (4.1), que é dado por:

$$u_k^e = -(CG)^{-1}[CFx_k + \phi_{k+1}]. \quad (4.3)$$

Nota-se que ao substituir a lei de controle (4.3) no sistema (4.1), vamos obter:

$$x_{k+1} = (I - G(CG)^{-1}C)Fx_k - G(CG)^{-1}\phi_{k+1}, \quad (4.4)$$

e define-se  $F_e = (I - G(CG)^{-1}C)F$ .

Para finalizar a lei de controle por modos deslizante, será desenvolvida uma lei de controle chaveado. Esta lei de controle se baseia em uma lei de alcançabilidade apropriada que garanta a existência e a estabilidade do modo deslizante. Uma lei de alcançabilidade apropriada foi definida em [20], da seguinte forma:

$$|s_{i,k+1}| < |s_{i,k}|, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq m,$$

é equivalente escrever que:

$$-|s_{i,k}| < s_{i,k+1} < |s_{i,k}|, \text{ para todo } 1 \leq i \leq m. \quad (4.5)$$

Utilizando a lei de controle equivalente (4.3) pode-se reescrever a desigualdade (4.5) da seguinte forma:

$$-1 < \frac{C_i G(-u_k^e + u_k)}{|s_{i,k}|} < 1,$$

pois:

$$s_{i,k+1} = C_i x_{k+1} + \phi_{i,k+1}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq m.$$

Defina que:

$$W_{i,k} = \frac{C_i G(-u_k^e + u_k)}{|s_{i,k}|}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq m, \quad (4.6)$$

então,  $|W_{i,k}| < 1$ . A matriz  $W_k$  é uma matriz diagonal, dada da seguinte forma:

$$W_k = \begin{bmatrix} W_{1,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_{2,k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & W_{m,k} \end{bmatrix}$$

Observa-se que cada  $i$ -ésima entrada de controle  $u_{i,k}$  com  $1 \leq i \leq m$ , corresponderá com a  $i$ -ésima entrada da matriz diagonal  $W_k$ , ou seja, para cada entrada de controle, tem-se uma matriz  $W_{i,k}$  com  $1 \leq i \leq m$ , correspondente.

A partir de (4.6) temos que a lei de controle é dada por:

$$u_k = -(CG)^{-1}[CFx_k + \phi_{k+1} - W_k s_k]. \quad (4.7)$$

### 4.1.2 Estabilidade do Sistema

Neste item será mostrado que o sistema (4.1) realimentado com a lei de controle (4.7) é estável. Será usado como base o resultado de [8]. Assumindo que os autovalores da matriz  $F_e$  não pertencem ao círculo unitário, sendo assim, existe um número real  $r$  tal que  $\rho(F_e) < r \leq 1$  sendo  $\rho(F_e)$  o raio espectral da matriz  $F_e$ . A equação de Lyapunov para tempo discreto é dada por:

$$F_e^T P F_e - r^2 P = -Q, \quad (4.8)$$

sendo  $Q$  uma matriz semidefinida positiva e tem-se como solução da equação (4.8) uma matriz semidefinida positiva  $P$ . Será mostrado, a seguir, que o sistema (4.1) realimentado com a lei de controle (4.7) é estável, se:

$$\|W_k\| < \min \left\{ 1, \frac{\mu - \|F_e\|}{\|G(CG)^{-1}\| \|C\|} \right\}, \quad (4.9)$$

sendo

$$\mu = \sqrt{\|F_e\|^2 + \frac{\lambda_{\min}(Q) + (1 - r^2)\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}} \text{ tal que } \mu > \|F_e\|.$$

Uma candidata a função de Lyapunov adequada é:

$$V_k = x_k^T P x_k,$$

sendo  $P$  a solução da equação (4.8). Então, temos de mostrar que:

$$\Delta V_k = V_{k+1} - V_k < 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= V_{k+1} - V_k \\ &= x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k \\ &= x_k^T F_e^T P F_e x_k + x_k^T F_e^T P (CG)^{-1} W_k C x_k + [(CG)^{-1} W_k C x_k]^T P F_e x_k + \\ &\quad + [(CG)^{-1} W_k C x_k]^T P (CG)^{-1} W_k C x_k - x_k^T P x_k + x_k^T r^2 P x_k - x_k^T r^2 P x_k. \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema (A.4.1), desigualdade triangular e a desigualdade de cauchy-schwartz,



tem-se:

$$\begin{aligned}
\Delta V_k &\leq -\|x_k\|^2 (\lambda_{\min}(Q) + (1 - r^2)\lambda_{\min}(P)) + 2\|x_k\|^2 \|F_e\| \lambda_{\max}(P) \|G(CG)^{-1}\| \|C\| \|W_k\| + \\
&\quad + \|W_k\|^2 \|x_k\|^2 \|G(CG)^{-1}\|^2 \|C\|^2 \lambda_{\max}(P) \\
&\leq \|x_k\|^2 [-\lambda_{\min}(Q) - (1 - r^2)\lambda_{\min}(P) + 2\lambda_{\max}(P) \|F_e\| \|G(CG)^{-1}\| \|C\| \|W_k\| + \\
&\quad + \|W_k\|^2 \|G(CG)^{-1}\|^2 \|C\|^2 \lambda_{\max}(P)]. \\
&< 0.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Assim, tem-se  $\Delta V_k < 0$ , e garante-se a estabilidade do sistema (4.1) realimentado com a lei de controle (4.7).

### 4.1.3 Controle Ótimo por Modos Deslizantes

Considerando o sistema linear de tempo discreto (4.1), ao realimentar este sistema com a lei de controle (4.7), obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= Fx_k + Gu_k \\
&= Fx_k - G(CG)^{-1}[CFx_k + \phi_{k+1} - W_k s_k] \\
&= Fx_k - G(CG)^{-1}CFx_k - G(CG)^{-1}\phi_{k+1} + G(CG)^{-1}W_k Cx_k + G(CG)^{-1}W_k \phi_k \\
&= [F - G(CG)^{-1}(CF - W_k C)]x_k - G(CG)^{-1}(\phi_{k+1} - W_k \phi_k).
\end{aligned}$$

Fazendo  $v_k = \phi_{k+1} - \phi_k$  e  $y_k = [x_k^T, \phi_k]^T$ , tem-se:

$$y_{k+1} = \mathcal{F}y_k + \mathcal{G}v_k, \tag{4.11}$$

sendo:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F - G(CG)^{-1}(CF - W_k C) & G(CG)^{-1}(W_k - I) \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} -G(CG)^{-1} \\ I \end{bmatrix}.$$

Observa-se que o resultado encontrado é análogo ao resultado obtido no Capítulo 3. A diferença é que este novo problema contém a matriz  $W_k$ , que possibilita o sistema a ter mais de uma entrada de controle. O mesmo será feito com o funcional custo quadrático (3.8), ou seja,

obter-se-à um novo funcional custo quadrático nas novas variáveis  $y_k$  e  $v_k$ , então:

$$\begin{aligned}
J &= x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} x_k^T Q x_k + u_k^T u_k \\
&= x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} x_k^T Q x_k + [(CG)^{-1}]^T (CG)^{-1} [CF x_k + \phi_{k+1} - W_k s_k]^T [CF x_k + \phi_{k+1} - W_k s_k] \\
&= x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} x_k^T Q x_k + \\
&\quad + [(CG)^{-1}]^T (CG)^{-1} [CF x_k + v_k + \phi_k - W_k (Cx_k + \phi_k)]^T [CF x_k + v_k + \phi_k - W_k (Cx_k + \phi_k)] \\
&= y_{k+1}^T \mathcal{P}_{k+1} y_{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k^T \mathcal{Q} y_k + y_k^T \mathcal{S} v_k + v_k^T \mathcal{S}^T y_k + v_k^T \mathcal{R} v_k \\
&= y_{k+1}^T \mathcal{P}_{k+1} y_{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k^T \mathcal{Q} y_k + 2y_k^T \mathcal{S} v_k + v_k^T \mathcal{R} v_k, \tag{4.12}
\end{aligned}$$

sendo:

$$\mathcal{P}_{k+1} = \begin{bmatrix} P_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{R} = [(CG)^{-1}]^T (CG)^{-1}; \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} (CF - rC)^T \mathcal{R} \\ (I - W_k)^T \mathcal{R} \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q + (CF - W_k C)^T \mathcal{R} (CF - W_k C) & (CF - W_k C)^T \mathcal{R} (I - W_k) \\ (I - W_k)^T \mathcal{R} (CF - W_k C) & (I - W_k)^T \mathcal{R} (I - W_k) \end{bmatrix}.$$

Se minimizarmos o funcional custo quadrático (4.12) sujeito a ao sistema (4.11), então a lei de controle ótimo  $v_k^*$  é dada por:

$$v_k^* = -\mathcal{K}_k y_k, \tag{4.13}$$

sendo:

$$\mathcal{K}_k = (\mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G} + \mathcal{R})^{-1} (\mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{F} + \mathcal{S}^T), \tag{4.14}$$

e  $\mathcal{P}_{k+1}$  é a solução da Riccati, dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{k+1} &= (\mathcal{F} + \mathcal{G} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{S}^T)^T [\mathcal{P}_{k+1} - \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G} (\mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G} + \mathcal{R}) \mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1}] (\mathcal{F} + \mathcal{G} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{S}^T) + \\
&\quad + (\mathcal{Q} + \mathcal{S} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{S}^T). \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Portanto, a função de deslizamento ótima é dada por:

$$s_k^* = Cx_k^* + \phi_k^* = 0, \quad (4.16)$$

$$\phi_{k+1}^* = \phi_k^* - \mathcal{K}_k y_k^*, \quad \phi_0 = -Cx_0. \quad (4.17)$$

Fazendo a combinação das equações (4.17) com (4.7) obtém-se a lei de controle ótima dada por:

$$u_k^* = -(CG)^{-1}[CFx_k + \phi_{k+1}^* - W_k s_k]. \quad (4.18)$$

Conseqüentemente, encontra-se o resultado desejado quando o sistema (3.1) é realimentado com a entrada de controle ótima  $u_k^*$ .

## 4.2 Controle Ótimo por Modos Deslizantes - Abordagem Alternativa

Nesta seção, propõe-se uma solução alternativa para o problema clássico COMD de sistemas multivariáveis de tempo discreto. Esta nova formulação se baseia na minimização de um índice de desempenho quadrático de forma análoga a abordagem do capítulo anterior. Essa nova abordagem é fundamentada no método de funções penalidade e problema de MQP. A equivalência das duas abordagens será mostrada, e poderá ser visto que mesmo possuindo mais de uma entrada de controle o problema segue com a mesma linha lógica que foi utilizada no problema com apenas uma entrada de controle.

### 4.2.1 COMD via Função Penalidade

Considere o sistema multivariável (4.11):

$$y_{k+1} = \mathcal{F}y_k + \mathcal{G}v_k.$$

E considere o funcional custo quadrático (3.19) definido no capítulo anterior:

$$J = y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1} + \sum_{j=0}^N \mathcal{L}_j(y_j, v_j),$$

com as matrizes de ponderação  $\mathcal{P}_{N+1} \succeq 0$ ,  $\mathcal{Q} \succeq 0$ ,  $\mathcal{S} \succeq 0$  e  $\mathcal{R} \succeq 0$  assumidas conhecidas. Considere agora o seguinte problema de minimização sujeito a uma restrição de igualdade:

$$\min_{y_{k+1}, v_k} \left\{ y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1} + \sum_{j=0}^N \mathcal{L}_j(y_j, v_j) \right\} \quad (4.19)$$

s. a  $y_{k+1} = \mathcal{F}y_k + \mathcal{G}v_k, \quad k = 0, \dots, N.$

O objetivo é determinar uma lei de controle ótima  $\{(y_{k+1}^*, v_k^*)\}_{k=0}^N$  que minimize o funcional (3.19). Note que a minimização não é feita apenas em função da entrada de controle  $v_k$ , mas também em função de  $y_{k+1}$ .

Observe que o problema de minimização para sistemas multivariáveis é praticamente o mesmo problema para o caso de sistema com apenas uma entrada de controle, sendo que agora o número de propriedades a serem satisfeitas é maior, o que torna a garantia de alcançabilidade e estabilidade do sistema um pouco mais complexa, como foi provado na seção anterior.

Sabe-se que este problema de minimização sujeito a uma restrição de igualdade pode ser resolvido de forma recursiva utilizando programação dinâmica como foi mostrado no Lema (3.3.1). Utilizando esse resultado pode-se obter uma solução recursiva ótima para este problema como será enunciado no próximo teorema.

**Teorema 4.2.1.** *Considere o seguinte funcional custo quadrático:*

$$J = y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1} + \sum_{j=0}^N \mathcal{L}_j(y_j, v_j),$$

e o seguinte modelo linear no espaço de estado:

$$y_{k+1} = \mathcal{F}y_k + \mathcal{G}v_k, \quad k = 0, \dots, N \quad \text{com } y_0 = \text{cte.}$$

Defina o seguinte problema de minimização com restrição de igualdade:

$$\min_{y_{k+1}, v_k} \left\{ y_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} y_{N+1} + \sum_{j=0}^N \mathcal{L}_j(y_j, v_j) \right\}$$

s. a  $y_{k+1} = \mathcal{F}y_k + \mathcal{G}v_k, \quad k = 0, \dots, N.$

Então a solução recursiva ótima para tal problema é dada por:

$$\begin{bmatrix} y_{k+1}^* \\ v_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_k \\ \mathcal{K}_k \end{bmatrix} y_k; \quad k = 0, \dots, N. \quad (4.20)$$

Sendo  $L_k$  e  $K_k$  obtidos de acordo com a seguinte recursão:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_k \\ \mathcal{K}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\mathcal{P}_{k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -\mathcal{R} & -\mathcal{S}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{S} & -\mathcal{Q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{G} \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{L}_k^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{L}_k + \mathcal{K}_k^T \mathcal{R} \mathcal{K}_k + \mathcal{S} \mathcal{K}_k + \mathcal{K}_k^T \mathcal{S}^T + \mathcal{Q}; \quad k = N, \dots, 0 \quad (4.22)$$

*Demonstração.* Análoga a prova do Teorema (3.3.1).  $\square$

A estrutura do Teorema (4.2.1) é exatamente igual a do Teorema (3.3.1), o que torna o resultado acima diferenciado é o fato de que sua estrutura matricial admite mais de uma entrada de controle. Acredita-se que utilizando essa abordagem alternativa seja possível resolver o problema de controle por modos deslizantes para sistema com incertezas em suas matrizes de parâmetros, o que torna esta nova formulação útil para trabalhos futuros.

Note que o problema de controle ótimo por modos deslizantes para sistemas multivariáveis pode ser estabelecido por meio do seguinte problema de minimização restrita de um funcional quadrático de um passo no intervalo de interesse  $[k, N + 1]$

$$\min_{y_{k+1}, v_k} \{ y_{k+1}^T \mathcal{P}_{k+1} y_{k+1} + y_k^T \mathcal{Q} y_k + 2y_k^T \mathcal{S} v_k + v_k^T \mathcal{R} v_k \}$$

$$\text{s. a } y_{k+1} = \mathcal{F} y_k + \mathcal{G} v_k,$$

sendo que  $y_{k+1}^T \mathcal{P}_{k+1} y_{k+1}$  corresponde ao custo acumulado no intervalo  $[k + 1, N + 1]$ . Ou,

de forma análoga, estabelecido por meio do problema de minimização irrestrita do funcional quadrático:

$$J_k^\mu(y_{k+1}, v_k) = \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & -\mathcal{G} \end{array} \right] \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \end{bmatrix} y_k \end{array} \right)^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k+1} & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R} & \mathcal{S}^T & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{S} & \mathcal{Q} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

nas variáveis  $(y_{k+1}, v_k)$  para cada valor fixado de  $\mu$ . Onde a solução ótima é alcançada à medida que  $\mu \rightarrow +\infty$ , de acordo com a Proposição 2.3.1.

Utilizando como suporte o resultado do Teorema (4.2.1) é possível obter a solução ótima do funcional (4.23), para cada  $\mu > 0$ , por meio da expressão (3.29). Enquanto o custo ótimo para cada  $\mu > 0$ , segundo o Lema 2.1.2, é dado pelo funcional (3.30). Ao fazer o parâmetro  $\mu \rightarrow +\infty$ , tem-se  $(\hat{x}_{k+1}(\mu), \hat{v}_k(\mu)) \rightarrow (x_{k+1}^*, v_k^*)$  e, assim,  $J_k(\hat{x}_{k+1}(\mu), \hat{v}_k(\mu)) \rightarrow J_k(x_{k+1}^*, v_k^*) = J_k^*$ . Então tem-se que o custo ótimo é obtido pela expressão (3.31). Combinando as expressões (4.21) e (3.31), encontra-se (3.32).

Observa-se que as matrizes  $\mathcal{L}_k$ ,  $\mathcal{K}_k$  e  $\mathcal{P}_k$  podem ser calculadas a partir da mesma inversa de um bloco matricial principal, como pode-se ver na expressão (3.32). E que, tal estrutura reúne de forma simétrica todas as matrizes de parâmetros e de ponderação do sistema para o cálculo da matriz  $\mathcal{P}_k$ .

Todos esses resultados já foram apresentados no Capítulo 3, por isso não foi preciso refazer todo o procedimento, lembrando que mesmo que os resultados sejam análogos neste capítulo estamos tratando o problema de controle por modos deslizantes para múltiplas entradas de controle. A seguir será enunciado o lema que garante a equivalência da abordagem clássica do problema de controle ótimo por modos deslizantes e a abordagem alternativa que está sendo tratada neste trabalho.

**Lema 4.2.1.** *A solução recursiva (3.25) - (4.22) proposta no Teorema 4.2.1 pode ser reescrita*

da seguinte forma:

$$y_{k+1}^* = \underbrace{[\mathcal{F} - \mathcal{G}(\mathcal{R} + \mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G})^{-1}(\mathcal{S}^T + \mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{F})]}_{\mathcal{L}_k} y_k^* \quad (4.24)$$

$$v_k^* = \underbrace{-\mathcal{G}(\mathcal{R} + \mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G})^{-1}(\mathcal{S}^T + \mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{F})}_{\mathcal{K}_k} y_k^*, \quad (4.25)$$

para todo  $k = 0, \dots, N$ , sendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k = (\mathcal{F} - \mathcal{G}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{S}^T)^T [\mathcal{P}_{k+1} - \mathcal{P}_{k+1}\mathcal{G}(\mathcal{R} + \mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G})^{-1}\mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1}] (\mathcal{F} - \mathcal{G}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{S}^T) + \\ + (\mathcal{Q} - \mathcal{S}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{S}^T), \end{aligned} \quad (4.26)$$

para todo  $k = N, \dots, 0$ .

*Demonstração.* A prova segue análoga a do Lema (3.3.2). □

### 4.3 Exemplo Numérico

**Exemplo 4.3.1.** Considere o sistema multivariável (4.1) com as seguintes matrizes de parâmetros:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 9 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2.2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e as seguintes matrizes de ponderação:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{N+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1.$$

As simulações realizadas neste exemplo são baseadas no Teorema 3.3.1. definimos o estado

inicial  $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 0.3 & 3 & 0.35 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 3 & 0.3 \\ 1 & 2 & 0.05 & 1 \end{bmatrix}$ . Foi utilizado um horizonte  $N = 40$  para a simulação.

Quando o horizonte  $N \rightarrow +\infty$ , observe que  $\mathcal{P}_k$  converge para

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 23.4013 & -24.6657 & -4.5357 & -4.6109 & 0 & 0 & 0 \\ -24.6657 & 28.3458 & 4.9925 & 5.0733 & 0 & 0 & 0 \\ -4.5357 & 4.9925 & 101.0405 & 98.7307 & 0 & 0 & 0 \\ -4.6109 & 5.0733 & 98.7307 & 113.8395 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e a respectiva matriz de ganho  $K$  é dada por

$$K = \begin{bmatrix} 3.0004 & -3.6007 & -0.6034 & -0.7552 & -1.0050 & 0 & 0 \\ 0.2525 & -0.3065 & -0.3186 & 1.2745 & 0 & -1.0050 & 0 \\ 2.6857 & -3.2369 & -0.6234 & 0.1951 & 0 & 0 & -1.0050 \end{bmatrix}.$$

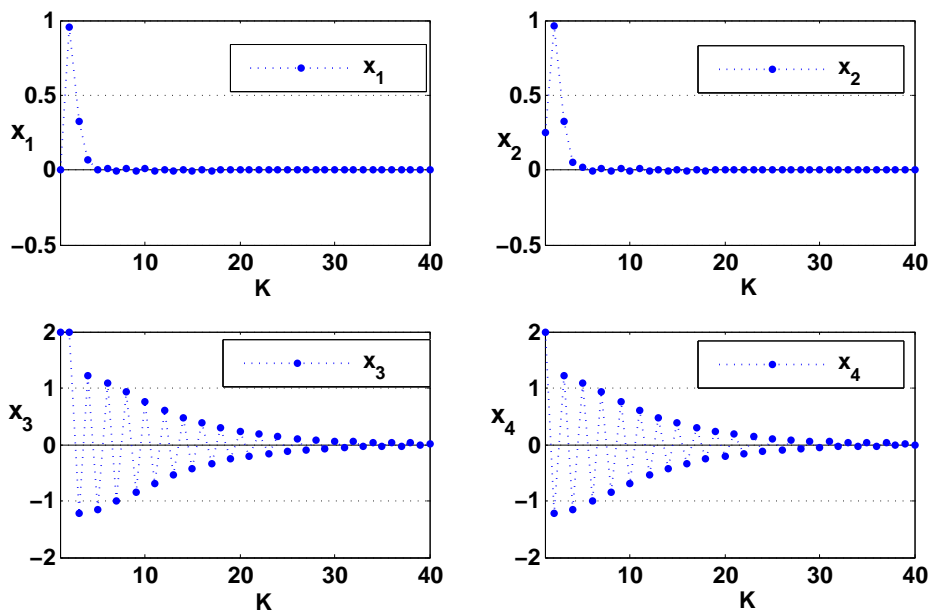


Figura 4.1: Estados do sistema multivariável.



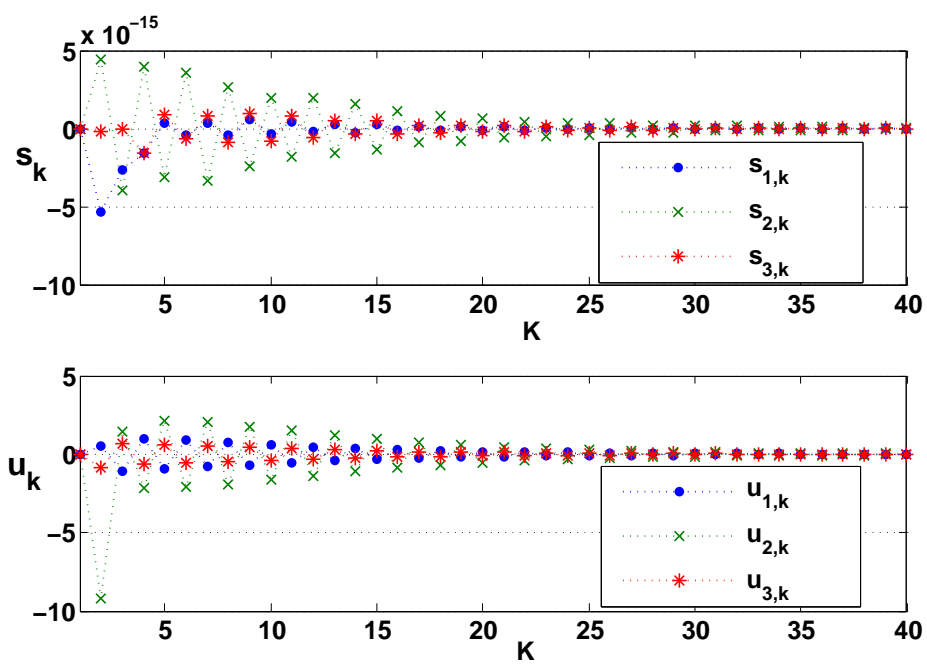


Figura 4.2: Superfície deslizante e lei de controle do sistema multivariável.

O mesmo resultado é obtido quando consideramos a estrutura apresentada no Lema 4.2.1.



## Capítulo 5

# Conclusões

Neste trabalho resolvemos o problema de controle ótimo por modos deslizantes para sistemas lineares de tempo discreto. Para resolver este problema foi desenvolvida uma estrutura matricial alternativa baseada no problema de mínimos quadrados ponderados e funções penalidade. A principal característica desta nova abordagem é o fato de que a matriz de parâmetro do sistema realimentado, o ganho do controlador e a solução da equação de Riccati serem apresentadas em uma única matriz. A equivalência com a solução padrão fornecida em [5] e [8] foi mostrada, e a recursividade do algoritmo permanece válida.



## Referências Bibliográficas

- [1] V. Utkin, “Variable structure systems with sliding modes,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, no. 2, pp. 212 – 222, apr. 1977.
- [2] D. A. Raymond, Z. S. H., and G. P. Matthews, “Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, pp. 212–232, 1988.
- [3] V. I. Utkin, *Sliding modes in control and optimization*. Springer-Verlag, 1992.
- [4] L. Mu, C. Gao, and W. Chen, “Research for discrete variable structure control systems,” in *IEEE International Conference on Control and Automation*, Guangzhou, China, 2007.
- [5] R. Xu, “Optimal sliding mode control and stabilization of underactuated systems,” Ph.D. dissertation, Ohio State University, 2007.
- [6] W. Gao, Y. Wang, and A. Homaifa, “Discrete-time variable structure control systems,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 42, no. 2, pp. 117 –122, apr. 1995.
- [7] A. J. Koshkouei and A. S. I. Zinober, “Sliding lattice design for discrete-time linear multivariable systems,” in *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control, Kobe, Japan*, 1996, pp. 1497–1502.
- [8] ———, “Sliding mode control of discrete-time systems,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 122, pp. 793–802, 2000.
- [9] K. T. Yasiimasa Fujisaki and K. Hirai, “Sliding mode control for multi-input discrete time systems,” in *Proceedings of the 3rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL*, 1994, pp. 1933–1935.
- [10] J. P. Cerri, “Regulador robusto recursivo para sistemas lineares de tempo discreto no espaço de estado,” Master’s thesis, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 2009.

- [11] T. Kailath, A. H. Sayed, and B. Hassibi, *Linear Estimation*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 2000.
- [12] A. Albert, *Regression and the Moore-Penrose pseudoinverse*. New York and London: Academic Press, 1972.
- [13] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 2nd ed. New York: Wiley-Interscience, 1993.
- [14] D. G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*, 2nd ed. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [15] A. F. Bianco, J. Y. Ishihara, and M. H. Terra, “Optimal robust prediction for general discrete time singular systems,” in *Proceedings of the 10th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision - ICARCV 2008, Hanoi, Vietnam*, 2008.
- [16] J. P. Cerri, M. H. Terra, and J. Y. Ishihara, “Recursive robust regulator for discrete-time state-space systems,” in *Proceedings of the American Control Conference - ACC, St. Louis, Missouri, USA*, 2009, pp. 3077 – 3082.
- [17] —, “Recursive robust regulator for discrete-time markovian jump linear systems via penalty game approach,” in *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, Atlanta, GA, USA*, 2010.
- [18] R. E. Bellman and S. E. Dreyfus, *Applied Dynamic Programming*. New Jersey: Princeton University Press, 1962.
- [19] R. E. Bellman and R. Kalaba, *Dynamic Programming and Modern Control Theory*. New York: Academic Press, 1965.
- [20] I. Y. Sarpturk, S. Z. and O. Kaynak, “On the stability of discrete-time sliding mode control systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 32,, pp. 930–932, 1987.
- [21] K. Ogata, *Discrete-Time Control Systems*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc, 1987.
- [22] J. C. T. Campos, “Filtragem robusta para sistemas singulares discretos no tempo,” Ph.D. dissertation, USP - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- [23] F. Zhang, *The Schur Complement and Its Applications*. USA: Springer, 2005, vol. 4.

- [24] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [25] C. T. Chen, *Linear System - Theory and Design*, 3rd ed. New York: Oxford University Press, 1999.
- [26] R. Nikoukhah, A. L. Willsky, and B. C. Levy, "Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 9, pp. 1325–1342, 1992.





# Apêndice A

## Análise Matricial - Alguns Resultados

### A.1 Inversão de Matrizes

**Lema A.1.1.** [21] Sejam  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Suponha que  $A$ ,  $C$ ,  $(A + BCD)$  e  $(C^{-1} + DA^{-1}B)$  sejam não-singulares. Então

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}. \quad (\text{A.1})$$

**Lema A.1.2.** [22] Suponha  $A$ ,  $C$ ,  $(A + BC^{-1}D)$  e  $(C + DA^{-1}B)$  invertíveis. Então é válida a seguinte relação

$$(A + BC^{-1}D)^{-1}BC^{-1} = A^{-1}B(C + DA^{-1}B)^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

### A.2 Matrizes Particionadas e Complemento de Schur

**Definição A.2.1.** [23] Sejam  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz não-singular,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $M \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  a matriz particionada definida por

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

A Matriz  $D + CA^{-1}B$  denotada por  $(M/A)$  é chamada de complemento de Schur de  $A$  em  $M$ . Similarmente, se  $D$  é não-singular, o complemento de Schur de  $D$  em  $M$  é definido por

$$(M/D) = A + CD^{-1}B.$$

**Lema A.2.1.** [23](Fórmula da diagonalização de Aitken) Seja  $M$  uma matriz particionada dada por

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

e suponha  $A$  não-singular. Então,

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & (M/A) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

**Lema A.2.2.** [23](Fórmula da aditividade do posto de Guttman) Seja  $M$  uma matriz particionada dada por

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Então,  $\text{posto}(M) = \text{posto}(A) + \text{posto}(M/A)$ .

**Lema A.2.3.** [23] Seja  $M$  uma matriz particionada dada por

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

(i) - Suponha que  $A$  e  $M$  sejam não-singulares. Então  $(M/A)$  é não-singular e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (M/A)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

(ii) - Suponha que  $D$  e  $M$  sejam não-singulares. Então  $(M/D)$  é não-singular e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I & \\ -D^{-1}B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (M/D)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

**Lema A.2.4.** [23](Fórmula da inversão de Banachiewicz) Seja  $M$  uma matriz particionada dada por

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

(i) - Suponha que  $A$  e  $M$  sejam não-singulares. Então  $(M/A)$  é não-singular e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

(ii) - Suponha que  $D$  e  $M$  sejam não-singulares. Então  $(M/D)$  é não singular e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (M/D)^{-1} & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

**Lema A.2.5.** [22] Sejam  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz não-singular e  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz posto coluna pleno. Então,

(i) - A matriz  $(A^T R^{-1} A)$  é invertível.

(ii) - A matriz  $\begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$  é invertível.

Além disso, são válidas as seguintes identidades:

$$(A^T R^{-1} A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$(A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$R^{-1} A (A^T R^{-1} A)^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

### A.3 Matrizes Semidefinidas e Definidas Positivas

**Definição A.3.1.** [24] Uma matriz simétrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é dita definida positiva ( $A \succ 0$ ) se  $x^T A x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Se  $x^T A x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , então  $A$  é dita semidefinida positiva ( $A \succeq 0$ ). Similarmente, os termos definida negativa e semidefinida negativa podem ser estabelecidos a partir da recursão das desigualdades nas definições de definida positiva e semidefinida positiva. Caso a matriz simétrica  $A$  não se encaixe em nenhuma das definições acima, então ela é dita indefinida.

**Lema A.3.1.** [24] *Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida positiva. Se  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , então  $C^T A C$  é semidefinida positiva. E mais,  $\text{posto}(C^T A C) = \text{posto}(C)$ , de modo que  $C^T A C$  é definida positiva se e somente se  $\text{posto}(C) = n$ .*

**Lema A.3.2.** [24] *Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica não-singular. A matriz  $A$  é definida positiva se e somente se  $A^{-1}$  é definida positiva.*

**Teorema A.3.1.** [25] *Uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica e definida positiva (semidefinida positiva) se e somente se qualquer uma das seguintes condições valem:*

- (i) - *todo autovalor de  $A$  é positivo (positivo ou zero).*
- (ii) - *existe uma matriz  $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  não-singular (uma matriz  $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  singular ou uma matriz  $N \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com  $m < n$ ) tal que  $M = N^T N$ .*

**Lema A.3.3.** [23] *Sejam  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz não-singular,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $M \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  a matriz particionada simétrica dada por*

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

*Então:*

- (i) -  *$M \succ 0$  se e somente se  $A \succ 0$  e  $(M/A) \succ 0$ .*
- (ii) -  *$M \succeq 0$  se e somente se  $A \succeq 0$  e  $(M/A) \succeq 0$ .*

Analogamente, podemos enunciar também

**Lema A.3.4.** [23] *Sejam  $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$  uma matriz não-singular,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $M \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  a matriz particionada simétrica dada por*

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

*Então:*

- (i) -  *$M \succ 0$  se e somente se  $D \succ 0$  e  $(M/D) \succ 0$ .*
- (ii) -  *$M \succeq 0$  se e somente se  $D \succeq 0$  e  $(M/D) \succeq 0$ .*

**Lema A.3.5.** [23] Sejam  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $M \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  a matriz particionada simétrica dada por

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}.$$

Considere  $\mathcal{C}(A)$  e  $\mathcal{C}(B)$  os espaços gerados pelas colunas das matrizes  $A$  e  $B$ , respectivamente. Dessa forma,  $M \succeq 0$  se e somente se  $A \succeq 0$ ,  $\mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$  e  $(M/A) \succeq 0$ .

**Lema A.3.6.** [14] Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida positiva e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  uma matriz posto coluna pleno. Então, a matriz

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

é invertível.

**Lema A.3.7.** [26] Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  semidefinida positiva e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  uma matriz posto coluna pleno. Então, se  $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$  é posto linha pleno, a matriz

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \tag{A.15}$$

é invertível.

**Definição A.3.2.** [24] Uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma raiz quadrada de  $B$  se  $A^2 = B$ .

**Teorema A.3.2.** [24] Sejam  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  semidefinida positiva e  $k \geq 1$  um número inteiro dado. Então existe uma única matriz simétrica semidefinida positiva  $B$  tal que  $B^k = A$ .

**Observação 3.** [24] A maior utilidade do Teorema A.3.2 é para  $k = 2$ . A única raiz quadrada (semi)definida positiva da matriz (semi)definida positiva  $A$  é geralmente denotada por  $A^{\frac{1}{2}}$ .

## A.4 Normas

**Definição A.4.1.** [24] Uma função  $\|\bullet\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida como a norma matricial se para todas as matrizes  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ela satisfaz os seguintes axiomas:

(i) -  $\|A\| \geq 0$ ;

(ii) -  $\|A\| \geq 0 \Leftrightarrow A = 0$ ;

(iii) -  $\|cA\| = |c| \|A\|$ , para todo  $c \in \mathbb{C}$ ;

(iv) -  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ;

(v) -  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

**Definição A.4.2.** [24] Seja  $\|\bullet\|$  a norma de um vetor em  $\mathbb{R}^n$ . A norma de uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é definida por:

$$\|A\| \equiv \max_{\|x\|=1} |Ax|.$$

**Definição A.4.3.** [24] Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . A norma euclidiana de  $A \in \mathbb{R}^n$  é definida por:

$$\|x\|_2 \equiv (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

**Definição A.4.4.** [24] Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Defina

$$\rho(A) := \max \{|\lambda| : \lambda \text{ é um autovalor de } A\}.$$

Denominamos  $\rho(A)$  como raio espectral da matriz  $A$ .

**Teorema A.4.1.** [24] Seja  $\|\bullet\|$  qualquer norma matricial. Se  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  então  $\rho(A) \leq \|A\|$ .

**Teorema A.4.2.** [24] Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz hermitiana, e seja os autovalores de  $A$  ordenados da seguinte forma:  $\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n = \lambda_{\max}$ , então:

$$\lambda_1 x^* x \leq x^* Ax \leq \lambda_n x^* x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Sendo:

$$\lambda_{\max} = \lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{x^* Ax}{x^* x} = \max_{x^* x = 1} x^* Ax;$$

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{x^* Ax}{x^* x} = \min_{x^* x = 1} x^* Ax;$$

## A.5 Derivadas Fundamentais

**Lema A.5.1.** [21] Sejam  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  qualquer e  $x, y \in \mathbb{R}^n$  quaisquer. Então:

(i) -  $\frac{\partial}{\partial x}(y^T x) = y$ ;

(ii) -  $\frac{\partial}{\partial x}(x^T Ax) = Ax + A^T x$ .

Se  $A$  é simétrica então  $\frac{\partial}{\partial x}(x^T Ax) = 2Ax$ .

**Lema A.5.2.** [21] Sejam  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^m$  quaisquer. Então:

(i) -  $\frac{\partial}{\partial x}(x^T Ay) = Ay$ ;

(ii) -  $\frac{\partial}{\partial y}(x^T Ay) = A^T x$ .