

PAULO CARLOS KAMINSKI

CONSIDERAÇÕES SOBRE A ANÁLISE  
DINÂMICA DE MECANISMOS ELÁSTICOS  
E O ESTUDO DE UM MODELO  
BASEADO NO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS

Dissertação apresentada  
à Escola Politécnica da U.S.P.  
para a obtenção do título de  
Mestre em Engenharia

São Paulo, 1989

117 P

FD. 1016

PAULO CARLOS KAMINSKI  
ENGENHEIRO NAVAL, ESCOLA POLITÉCNICA DA USP, 1986

CONSIDERAÇÕES SOBRE A ANÁLISE DINÂMICA DE MECANISMOS  
ELÁSTICOS E O ESTUDO DE UM MODELO BASEADO NO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS FINITOS.

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da USP para a obtenção  
do Título de Mestre em Engenharia

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo de Breyne Salvagni  
Prof. Associado do Departamento de  
Engenharia Mecânica da EPUSP.

São Paulo, 1989

Aos meus pais

A Cris

## A G R A D E C I M E N T O S

A Marinha do Brasil e à FINEP, cujo apoio financeiro possibilitou este trabalho.

Ao Prof. Gerson Machado, pelo apoio e incentivo desde a graduação.

Ao Prof. Ronaldo de Breyne Salvagni, pela sua orientação e incentivo.

R E S U M O

Dada a importância crescente da análise dinâmica de mecanismos elásticos devido principalmente a uma necessidade de velocidades de operação maiores e uma precisão de posicionamento também mais acurada, este trabalho apresenta a evolução das técnicas para análise dinâmica destes mecanismos, bem como um estudo de um modelo baseado no método dos elementos finitos para este tipo de análise.

É feita ainda uma análise comparativa, para um mecanismo particular, entre os resultados experimentais, os resultados obtidos através do processo baseado no método dos elementos finitos e o método tradicional de análise (método quase estático).

A B S T R A C T

Given the increasing importance of dynamics analysis of elastic mechanism, due essentially to the necessity of higher operating speeds and a greater positioning accuracy, this work shows the evolution of the technics of dynamics analysis of these mechanisms, as well as a study of a model based in the finite elemente method for this kind of analysis.

Is done yet a comparative analysis, for a particular mechanism, between the experimental results, the results obtained from the process based in the finite element method and the traditional way of analysis (quasi estatic method).

ÍNDICE GERAL

ÍTEM	PÁG
1 - INTRODUÇÃO .....	I.1
1.1 Descrição do Problema .....	I.1
1.2 Linhas de Estudo .....	I.2
1.3 Objetivos .....	I.3
2 - FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO .....	II.1
2.1 Equilíbrio Direto .....	II.1
2.2 Princípio dos Trabalhos Virtuais .....	II.2
2.3 Princípio de Hamilton .....	II.3
3 - EVOLUÇÃO HISTÓRICA DAS PESQUISAS .....	III.1
4 - FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO ...	IV.1
4.1 Introdução .....	IV.1
4.2 Método dos Elementos Finitos .....	IV.1
4.3 Descrição das Equações Diferenciais do Movimento	IV.5
5 - FORMULAÇÃO DE UM MÉTODO DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO .....	V.1
5.1 Modificação e Desacoplamento das Equações do Movimento .....	V.2
5.2 Método para a Obtenção da Resposta Permanente do sistema .....	V.3
6 - ANÁLISE DE UM MECANISMO PLANO DE QUATRO BARRAS .....	VI.1
6.1 Análise Cinemática .....	VI.1
6.2 Determinação dos Esforços nas Articulações A e B	VI.9

6.3 Determinação das Deformações nos Pontos Médios dos Componentes.....	VI.11
7 - ANÁLISE COMPARATIVA DOS RESULTADOS .....	VII.1
7.1 Descrição do Mecanismo Utilizado .....	VII.1
7.2 Modelo para Análise com o Método dos Elementos Finitos .....	VII.2
7.3 Resultados .....	VII.5
7.4 Análise Comparativa .....	VII.9
8 - CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS .....	VIII.1
9 - REFERÊNCIAS .....	IX.1
APÊNDICE A - EXEMPLO PARA DOIS GRAUS DE LIBERDADE .....	A.1
A.1 Método Direto .....	A.1
A.2 Método do Trabalho Virtual .....	A.3
A.3 Método da Energia .....	A.4
APÊNDICE B - NOTAÇÃO INDICIAL .....	B.1
APÊNDICE C - ANÁLISE ESTÁTICA LINEAR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	C.1
APÊNDICE D - DIFERENCIAÇÃO DA EQUAÇÃO 4.21 .....	D.1
APÊNDICE E - MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL .....	E.1
APÊNDICE F - EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE .....	F.1
APÊNDICE G - RESULTADOS DO PROGRAMA MECQBAR .....	G.1



### NOTAÇÃO

A fim de facilitar o entendimento do texto, os nomes das variáveis apresentadas no decorrer do mesmo vão sendo definidas na medida de sua utilização.

Quanto aos símbolos, para o desenvolvimento matricial são adotados colchetes " $[]$ " para indicar matrizes e chaves " $\{\}$ " para indicar vetores. Versores e as expressões da álgebra vetorial têm seus elementos identificados por uma seta " $\rightarrow$ " sobre a letra correspondente a seu nome.

Os demais símbolos matemáticos utilizados têm o significado usual encontrado na bibliografia.

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA	PAG
Figura 4.1 - Elemento finito do tipo viga .....	IV.3
Figura 4.2 - Parte de um elemento finito e o sistema de coordenadas associado .....	IV.5
Figura 4.3 - Transformação do grau de liberdade comum a dois componentes .....	IV.13
Figura 5.1 - Discretização dos parâmetros $m(t)$ , $k(t)$ e $w(t)$ .....	V.5
Figura 6.1 - Esquema de um mecanismo de quatro barras plano .....	VI.2
Figura 6.2 - Modelo do mecanismo e o sistema de coordenadas utilizado .....	VI.3
Figura 6.3 - Configuração auxiliar .....	VI.6
Figura 6.4 - Diagrama de esforços (AB) .....	VI.9
Figura 6.5 - Diagrama de esforços (BC) .....	VI.11
Figura 6.6 - Diagrama de esforços transformados (OA) ...	VI.12
Figura 6.7 - Diagrama de esforços transformados (AB) ...	VI.14
Figura 6.8 - Diagrama de esforços transformados (BC) ...	VI.16
Figura 7.1 - Modelo de elementos finitos para o mecanismo de quatro barras .....	VII.4
Figura 7.2 - Deformação do componente OA (corporig) ....	VII.6
Figura 7.3 - Deformação do componente AB (corporig) ....	VII.7
Figura 7.4 - Deformação do componente BC (corporig) ....	VII.8
Figura 7.5 - Deformação do componente AB (MEF).....	VII.10
Figura 7.6 - Deformação do componente BC (MEF).....	VII.11
Figura 7.7 - Deformação do componente AB (EXP).....	VII.12
Figura 7.8 - Deformação do componente BC (EXP).....	VII.13
Figura 7.9 - Deformação do componente AB (CONJ).....	VII.15

Figura 7.10 - Deformação do componente BC (CONJ).....	VII.16
Figura A.1 - Exemplo de dois graus de liberdade .....	A.1
Figura A.2 - Diagrama de forças atuantes .....	A.1

ÍNDICE DE TABELAS

TABELA

PAG

Tabela 7.1 - Parâmetros do mecanismo de quatro barras .. VII.2

## 1 - INTRODUÇÃO

### 1.1 Descrição do Problema

A partir do final da década de 60 houve um grande avanço no campo de estudo da cinemática [21,27 e 32]. A síntese cinemática começou a se tornar uma poderosa ferramenta de projeto para os engenheiros, ultrapassando as técnicas antigas agora denominadas "cinemática clássica". Entretanto, a hipótese de corpo rígido ainda prevalecia quando do estudo cinemático dos mecanismos.

Quanto à análise dinâmica, tradicionalmente utilizavam-se métodos de análise de corpo rígido para o projeto dos mecanismos, onde todos os componentes eram tratados como corpos não deformáveis. Após a análise dinâmica eram calculadas as deformações e tensões a que os componentes estavam sujeitos. Este enfoque produz resultados satisfatórios apenas na medida que a velocidade de operação permaneça bem menor que a frequência natural do sistema em estudo.

Os mecanismos, compostos de articulações, engrenagens, barras, etc., não são realmente rígidos e sim elásticos e se deformam quando sujeitos a esforços estáticos ou dinâmicos. Portanto apenas nos movimentos "lentos" e onde os esforços são "pequenos" é que o projetista pode desconsiderar o efeito elástico.

Atualmente, os mecanismos devem operar a velocidades cada vez maiores e com uma precisão de posicionamento também crescente. Devido às altas velocidades de operação, para reduzir as forças de inércia e conseqüentemente o torque necessário da máquina, as articulações e os membros dos mecanismos devem ser feitos tão leves quanto possível. Entretanto, com a diminuição da rigidez dos componentes, maiores serão as deformações elásticas, bem como as vibrações devido às forças externas e de inércia, dependentes do

tempo. Estas deformações elásticas podem aumentar a imprecisão de posicionamento bem como o nível de tensão nos membros. Com isto, pode ficar inviável a operação, devido a imprecisão de posicionamento, ou ocorrer uma falha por fadiga, devido ao incremento de tensão a que os componentes estão sujeitos, acoplados a sua natureza cíclica.

Analisando estas possibilidades nota-se a necessidade do desenvolvimento de um procedimento eficiente e versátil que leve em conta os efeitos citados, e que permita ao projetista desenvolver mecanismos mais leves, satisfazendo aos requisitos de posicionamento e nível de tensões.

### 1.2 Linhas de Estudo

Os artigos apresentados por Lowen e Jandrasits [25], e por Erdman e Sandor [14] apresentam de forma clara e concisa os progressos [21,27 e 32] na área de análise dinâmica de estruturas até o início da década de 70.

De uma maneira geral os desenvolvimentos neste campo, a partir da década de 70, podem ser divididos em duas categorias. Na primeira os componentes são tratados como contínuos. Os trabalhos que seguem esta linha consideram que apenas um dos componentes tem um comportamento elástico, sendo que os restantes são considerados como corpo rígido. As equações do movimento para estes sistemas contínuos são obtidas com o auxílio de algumas hipóteses simplificadoras.

Na segunda categoria, os componentes elásticos do mecanismo são modelados como sistemas com parâmetros discretizados. Utilizando esta aproximação, um sistema contínuo é reduzido a um sistema discreto com um número finito de graus de liberdade. Esta aproximação é bastante simplificada com a utilização do método dos

elementos finitos. A vantagem em se usar este método está em que ele fornece um procedimento relativamente simples e principalmente sistemático de modelar mecanismos complexos.

### 1.3 Objetivos

A proposta deste trabalho, dada a importância crescente da análise dinâmica de mecanismos elásticos, e os poucos estudos que tem sido feitos em nosso país sobre o tema, é apresentar a evolução das técnicas para análise destes mecanismos, bem como, estudar um modelo para análise dos mesmos, baseado na teoria dos elementos finitos.

Espera-se ainda que o trabalho sirva como um texto introdutório a pessoas interessadas pelo assunto e também que o mesmo possa ser utilizado como ponto de partida para pesquisas futuras, inclusive do próprio autor.

## 2 - FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO [10,52]

As equações do movimento de uma estrutura são as expressões matemáticas que definem os deslocamentos em função do tempo.

A formulação das equações do movimento de um sistema dinâmico é possivelmente a fase mais importante, e muitas vezes a mais trabalhosa, do procedimento inteiro de análise. Serão mostrados a seguir os métodos para se obter as equações do movimento, utilizados com maior frequência nas publicações sobre o assunto.

O apêndice A mostra a obtenção das equações do movimento segundo os três diferentes métodos para um mesmo exemplo de dois graus de liberdade. Convém ressaltar ainda que estes métodos são apenas variações de técnicas para se obter as equações do movimento.

### 2.1 - Equilíbrio Direto (usando o princípio de d'Alembert)

As equações do movimento, sob o enfoque da dinâmica do ponto, representam as expressões da segunda lei de Newton, "a variação da quantidade de movimento de uma massa  $m$  é igual à força aplicada na mesma" [10]. Esta relação pode ser expressa segundo a equação diferencial:

$$\vec{F}(t) = d(m \cdot d\vec{r}/dt)/dt \quad (2.1)$$

onde  $\vec{F}(t)$  é a força aplicada e  $\vec{r}(t)$  o vetor posição da massa  $m$ .

Para a maioria dos problemas na dinâmica das estruturas pode ser pressuposto que a massa não varia com o tempo, e portanto, neste caso a equação (2.1) pode ser escrita como:

$$\vec{F}(t) = m \cdot d^2\vec{r}/dt^2 = m \cdot \ddot{\vec{r}}(t) \quad (2.1.a)$$



onde os pontos representam a derivada em relação ao tempo, ou ainda:

$$\vec{F}(t) - m \cdot \ddot{\vec{r}}(t) = 0 \quad (2.1.b)$$

onde o segundo termo,  $- m \cdot \ddot{\vec{r}}(t)$ , é denominado força de inércia.

O conceito de que uma massa "desenvolve" uma força de inércia proporcional à aceleração e oposta à mesma é conhecido como princípio de d'Alembert. É um método bastante útil para a análise estrutural dinâmica, porque permite expressar as equações de equilíbrio dinâmico. A força  $\vec{F}(t)$  pode incluir vários tipos de forças atuantes na massa  $m$ ; vínculos elásticos que se opõe ao deslocamento, forças viscosas que resistem à velocidade, e independentemente qualquer força externa.

Portanto, se uma força de inércia que resiste à aceleração é introduzida, as equações do movimento são simplesmente as expressões do equilíbrio de todas as forças que atuam na massa. Em muitos problemas simples, este método se mostra mais eficaz para formular as equações do movimento.

## 2.2 - Princípio dos Trabalhos Virtuais

Se o sistema estrutural é complexo, entretanto, e envolve alguns componentes interconectados, a obtenção da expressão do equilíbrio direto de todas as forças atuantes no sistema estrutural pode ser trabalhosa. Muitas vezes, as várias forças envolvidas podem ser expressas em termos de seus componentes nos graus de liberdade de deslocamento, e neste caso, o princípio dos trabalhos virtuais pode ser usado para formular as equações do movimento com maior facilidade.

Este princípio diz que se um sistema que está em equilíbrio sob a ação de um determinado conjunto de forças é submetido a um deslocamento virtual, isto é, qualquer deslocamento compatível com os graus de liberdade do sistema, o trabalho total realizado pelas forças será nulo. Portanto as equações do movimento podem ser estabelecidas a partir da identificação de todas as forças atuantes no sistema, incluindo as forças de inércia definidas de acordo com o princípio de d'Alembert. Então as equações do movimento são obtidas pela introdução de deslocamentos virtuais correspondentes a cada grau de liberdade e igualando o trabalho total a zero. A maior vantagem deste enfoque é que o trabalho virtual é uma grandeza escalar e pode ser adicionada algebricamente, enquanto as forças atuantes na estrutura são grandezas vetoriais e podem ser apenas superpostas vetorialmente.

### 2.3 - Princípio de Hamilton

Uma outra maneira de abordar o problema de estabelecer as equações vetoriais de equilíbrio é correlacionando os tipos de energia do sistema de uma forma variacional. O princípio de Hamilton pode ser expresso por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(EC-EP)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (2.2)$$

onde:

EC = energia cinética total do sistema

EP = energia potencial do sistema, incluindo tanto a energia de deformação, quanto a energia potencial de qualquer força conservativa externa

$W_{nc}$  = trabalho realizado pelas forças não conservativas atuantes no sistema

$\delta$  indica variação durante o intervalo de tempo

O princípio de Hamilton diz que a variação da energia cinética e potencial adicionada ao trabalho realizado pelas forças não conservativas durante o intervalo de tempo considerado, deve ser nula. A aplicação deste princípio leva direto às equações do movimento de qualquer sistema. O processo difere do método do trabalho virtual na medida que as forças elásticas e de inércia não são explicitamente envolvidas, utilizando-se em seu lugar as variações da energia potencial e cinética, respectivamente. Esta formulação tem a vantagem de tratar somente com grandezas escalares (energia), enquanto forças e deslocamentos usados para determinar o trabalho virtual são grandezas vetoriais, apesar do trabalho em si ser uma grandeza escalar.

### 3 - EVOLUÇÃO HISTÓRICA DAS PESQUISAS

Os trabalhos, aqui classificados de primeiro tipo [22,23,42,43,44 e 45], onde os componentes são tratados como contínuos, se utilizam basicamente de princípios variacionais (principalmente o princípio de Hamilton) para obter as equações do movimento.

Thompson [43,44 e 45], foi um dos pesquisadores que mais se utilizou deste enfoque para a análise dinâmica de mecanismos. Na referência [45] ele analisou um mecanismo plano, cujos membros estavam ligados por articulações. Na referência [44], com o auxílio de algumas hipóteses simplificadoras, apresenta um estudo analítico e experimental de um mecanismo fabricado de material composto (fibra de vidro) e, portanto, não homogêneo.

Ainda utilizando o princípio variacional, Jandrasits e Lowen [22 e 23], estudaram o comportamento elastodinâmico de um mecanismo de quatro barras com contrapeso. As equações linearizadas do movimento foram obtidas a partir do princípio de Hamilton, com a introdução de hipóteses simplificadoras adequadas para o problema em questão. A estabilidade do sistema também foi estudada. A solução obtida foi aplicada em um mecanismo de quatro barras, encontrando-se uma correlação entre os valores calculados e os valores obtidos experimentalmente.

Sutherland, na referência [42], investigou o movimento de um mecanismo elástico de quatro barras. As equações do movimento foram resolvidas utilizando o princípio de substituição dos termos das equações por séries harmônicas. Sutherland comparou ainda as deformações obtidas analiticamente, descritas por séries harmônicas, com as obtidas experimentalmente.

A fim de tornar possível a resolução de mecanismos mais complexos (geometricamente), com vários componentes elásticos, de

um modo sistemático, uma grande parte das pesquisas realizadas em análise dinâmica de estruturas voltou-se para a utilização de técnicas de resolução com os parâmetros envolvidos concentrados em alguns pontos (problemas do segundo tipo).

Dentro deste enfoque, Winfrey [55] foi um dos primeiros pesquisadores a aplicar uma técnica de discretização para a solução de um mecanismo com componentes elásticos. Ele utilizou o método dos elementos finitos, elementos do tipo viga, para formar a matriz de massa  $[M]$  e a matriz de rigidez  $[K]$ , dependentes do tempo. A seguir formulou as equações linearizadas do movimento, segundo a equação:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{Q\} \quad (3.1)$$

onde  $\{u\}$  e  $\{\ddot{u}\}$  são respectivamente os vetores deslocamento e aceleração, dos graus de liberdade do modelo, e  $\{Q\}$  é o vetor que contém as respectivas forças de inércia bem como as forças externas atuantes no sistema. Através da análise modal (ver apêndice E) a equação 3.1 é desacoplada e as equações resultantes são integradas numericamente. Este método permite, com um acréscimo na complexidade da solução, a obtenção das deformações elásticas dos componentes, lembrando ainda que várias hipóteses simplificadoras foram utilizadas. A principal hipótese é a de um modelo linear, a fim de permitir a superposição dos efeitos. Com o intuito de simplificar as equações, Winfrey fez algumas suposições na escolha do sistema de coordenadas, o que restringiu o problema quanto ao aspecto geométrico. Este sistema escolhido permite fornecer as informações de deformações, porém houve dificuldades para obter a distribuição de esforços nos componentes. O mecanismo analisado por Winfrey, para demonstrar a técnica proposta, foi um mecanismo elástico plano de quatro barras.

Erdman, Sandor e Oakberg [15] propuseram um método de análise de um mecanismo plano, onde alguns componentes são considerados elásticos, baseado no método da flexibilidade.

Sadler e Sandor [37] desenvolveram um método de análise elasto-dinâmica, com parâmetros concentrados. Este método consiste, basicamente, em modelar um componente que tem massa distribuída, como um componente em que sua massa está concentrada em alguns pontos ao longo do mesmo. Estes autores aplicaram a teoria de vigas de Euler para obter as equações diferenciais não lineares do movimento. A fim de obter a resposta do sistema, estas equações diferenciais foram integradas numericamente. Foram analisados, para exemplificar o procedimento proposto, componentes com secção transversal tanto constante quanto variável. Apresentaram ainda um procedimento para otimizar a secção dos componentes, usando como condição principal, a não variação da massa total dos mesmos.

Preocupados em obter um método mais geral, no sentido de ampliar o campo de validade do modelo, Imam, Sandor e Kramer [20] desenvolveram um método para análise de mecanismos planos, baseado no método da rigidez, tomando como hipótese que os componentes do mecanismo se comportam como vigas. Foi proposto também um método de otimização das dimensões geométricas dos componentes.

Sandor e Zhuang [39], continuando o trabalho desenvolvido na referência [37], linearizaram e desacoplaram as equações não lineares do movimento, obtidas na análise elasto-dinâmica do mecanismo com massas concentradas. O modelo proposto foi aplicado a um mecanismo de quatro barras, comparando-se os resultados calculados com os valores obtidos experimentalmente.

Kohli e Sandor [24] investigaram o problema de vibrações lineares em mecanismos, quando as forças de inércia, devido às altas velocidades de operação, provocam deformações elásticas nos componentes do mecanismo. É pressuposto, neste trabalho, que as

deformações elásticas não afetam o movimento de corpo rígido do mecanismo. O procedimento utilizado consiste basicamente em: a) discretização da massa dos componentes ao longo de alguns pontos do mesmo; b) obtenção das equações do movimento (equações diferenciais não lineares); c) utilização de técnicas numéricas para a resolução destas.

Golebiewski e Sadler [18] analisaram o problema das tensões devidas aos momentos fletores em um mecanismo, onde apenas um dos componentes era considerado elástico. As equações do movimento foram obtidas a partir do princípio de d'Alembert, utilizando parâmetros concentrados. Foi incluído ainda na análise, o efeito de amortecimento viscoso. As equações diferenciais obtidas foram integradas numericamente.

Sunada e Dubowsky [41] desenvolveram um programa denominado SALEM (Spatial Analysis of Linkages with Elastic Members) que determina o comportamento dinâmico de um mecanismo inteiro a partir dos dados de saída de uma análise feita em cada componente do mecanismo individualmente, com um programa de uso geral baseado no método dos elementos finitos (NASTRAN). O método foi exemplificado com dois problemas, sendo um no plano e outro no espaço.

Dubowsky e Young [13] estudaram analítica e experimentalmente os esforços nas junções de componentes de mecanismos que operam a altas velocidades. Foi investigado principalmente o efeito da folga existente nas articulações dos mecanismos e a conseqüente ampliação dos esforços nos componentes dos mesmos.

Allen e Harrel [4] também se preocuparam com os esforços nas conexões de um mecanismo e propuseram um método de estudá-los, utilizando um sistema de forças equivalentes. Com a utilização deste método, estudaram os esforços nas articulações de um mecanismo de quatro barras.

Nath e Ghosh [30], utilizando o método dos elementos finitos, desenvolveram uma técnica de solução para obter a resposta de um mecanismo elástico plano. As equações diferenciais do movimento do sistema foram obtidas utilizando elementos do tipo viga. As equações incluem termos que relacionam o movimento de corpo rígido com o movimento elástico do mecanismo. É proposto ainda um método para resolver o problema da matriz rigidez do sistema se tornar singular devido à existência dos graus de liberdade do movimento de corpo rígido do mecanismo. Num trabalho subsequente [31] as equações do movimento são resolvidas, obtendo-se a resposta permanente do sistema. A técnica utilizada consiste em expressar cada termo das equações diferenciais do movimento por uma série harmônica. Convém ressaltar que Bahgat e Willmert [6], desenvolveram anteriormente um método bastante semelhante ao descrito acima.

Wehage e Haug [53] apresentaram um método para a análise dinâmica de sistemas com forças impulsivas, ou seja, quando o tempo de atuação da força é muito menor que o inverso da frequência mais baixa do sistema.

Shabana [40] estudou mecanismos flexíveis, cujas matrizes de inércia são variáveis no tempo. Isto o levou a duas representações diferentes das não linearidades da inércia: uma baseada numa formulação de massa consistente, e a outra utilizando a técnica de massas aglutinadas.

Usoro, Nadira e Mahil [50] apresentaram uma técnica, baseada no método dos elementos finitos, para modelar manipuladores flexíveis. Cada componente do manipulador é tratado como um conjunto de elementos, para os quais são obtidas individualmente as expressões da energia cinética e da energia potencial. A partir destas expressões é obtido o modelo dinâmico do sistema.



Alexander e Lawrence [3] investigaram experimentalmente a resposta dinâmica de um mecanismo elástico. Os resultados obtidos foram muito utilizados por outros pesquisadores, para a verificação da validade de seus modelos de análise analíticos e numéricos. Pelo número de citações da referência [3], encontrados na bibliografia estudada, pode-se dizer que este foi o trabalho mais importante de investigação experimental de um mecanismo elástico.

Ainda dentro do enfoque do 2º tipo de soluções, notou-se uma preocupação acentuada com a escolha do sistema de coordenadas mais adequado [1,2,16,33 e 34]. Convém ressaltar que este item aumenta sua importância relativa na análise dinâmica de um mecanismo na medida em que aumentam os graus de liberdade do sistema.

## 4 - FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO

### 4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar a formulação das equações diferenciais do movimento de um mecanismo elástico. As equações do movimento serão obtidas através do método dos elementos finitos. Trata-se de uma abordagem aproximada, que reduz o sistema contínuo, e portanto, com infinitos graus de liberdade, a um sistema discretizado com um número finito de graus de liberdade. Este método para solução das equações diferenciais do movimento foi inicialmente proposto por Midha [28 e 29].

### 4.2 Método dos elementos finitos [11,56 e 57]

Segundo a abordagem da teoria dos elementos finitos o contínuo é subdividido, por meio de linhas ou superfícies, em elementos finitos. Estes elementos, por sua vez, estão interligados por um número finito de pontos nodais (nós), situados em suas fronteiras.

O método dos elementos finitos parte do pressuposto que o vetor de deslocamentos  $\{d\}$  de um ponto interno ao elemento pode ser aproximado por uma função dos deslocamentos nodais  $\{u^e\}$ , como mostrado abaixo:

$$\{d\} = [N]\{u^e\} \quad (4.1)$$

onde

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

$dx$ ,  $dy$  e  $dz$  são os componentes do deslocamento do ponto nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente,

$$\{u^*\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ | \\ u_j \\ | \\ u_k \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

e  $u_i$ ,  $u_j$ ,  $u_k$  são os deslocamentos generalizados nos graus de liberdade  $i$ ,  $j$  e  $k$  respectivamente.

A ordem do vetor  $\{u^*\}$  é igual ao número total de graus de liberdade nodais do elemento. Convém lembrar que os deslocamentos generalizados, representados pelo vetor  $\{u^*\}$ , não se limitam a deslocamentos de translação, podendo conter também deslocamentos rotacionais [56]. A matriz  $[N]$  contém as funções de interpolação que relacionam os deslocamentos  $\{u^*\}$  com os deslocamentos internos ao elemento.

A figura 4.1 ilustra o elemento finito do tipo viga nos estados deformado e não deformado. Para um elemento do tipo viga, em movimento plano, a equação 4.1 torna-se:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} dx \\ | \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u_1 \\ | \\ u_2 \\ | \\ u_3 \\ | \\ u_4 \\ | \\ u_5 \\ | \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

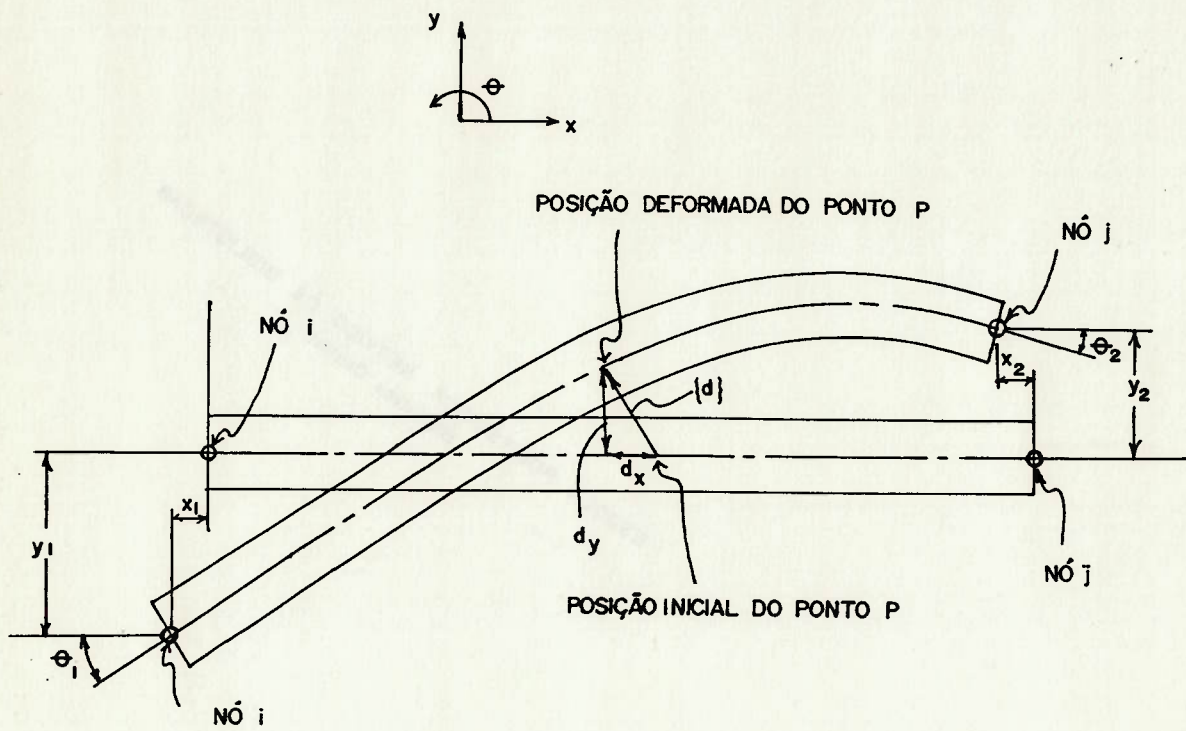


Figura 4.1 Elemento finito do tipo viga

$$= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

onde [11]:

$$N_1 = 1 - x/L \quad (4.5)$$

$$N_2 = 3[(L - x)/L]^2 - 2[(L - x)/L]^3 \quad (4.6)$$

$$N_3 = x[(L - x)/L]^2 \quad (4.7)$$

$$N_4 = x/L \quad (4.8)$$

$$N_5 = 3(x/L)^2 - 2(x/L)^3 \quad (4.9)$$

$$N_6 = - (L - x)(x/L)^2 \quad (4.10)$$

e:

L é o comprimento do elemento

x é medido do nó i para o nó j.

Deve ser observado que as funções de interpolação podem ser escolhidas baseadas em diferentes teorias ou aproximações, conforme o problema que se está analisando. Entretanto, para assegurar a convergência do processo, as funções de interpolação devem satisfazer aos seguintes critérios [56]:

1 - Quando os graus de liberdade nodais do elemento apresentarem deslocamentos compatíveis com um estado de deformação constante no elemento, as funções de interpolação devem produzir este estado de deformação constante. Uma consequência desta condição é a garantia de deformação nula para um elemento que está se deslocando como corpo rígido.

2 - As funções de interpolação devem assegurar que os deslocamentos nas interfaces entre elementos sejam finitas, ainda que indeterminadas.

Uma vez estabelecidas as funções de interpolação, as deformações e as tensões internas ao elemento podem ser determinadas como funções dos deslocamentos nodais  $\{u^*\}$ . O apêndice C apresenta, de modo resumido, a abordagem aproximada do método dos elementos finitos para uma análise estática linear de um corpo contínuo.

#### 4.3 Descrição das Equações Diferenciais do Movimento

A equação diferencial matricial do movimento para um elemento finito do mecanismo será desenvolvida usando as equações de Lagrange, obtidas a partir do princípio de Hamilton, na forma:

$$d/dt (\partial EC / \partial \{\dot{u}^*\}) - \partial (EC) / \partial \{u^*\} + \partial (EP) / \partial \{u^*\} = \{Q\} \quad (4.11)$$

onde  $\{u^*\}$  representa os deslocamentos nodais generalizados, (EP) a energia potencial, (EC) a energia cinética do elemento, e  $\{Q\}$  as forças externas generalizadas atuantes no elemento.

Uma vez determinado as equações do movimento para cada elemento, elas serão combinadas para formar as equações do movimento para cada componente do mecanismo e, finalmente, de maneira análoga, para o mecanismo inteiro.

A energia cinética (EC) para um único elemento será desenvolvida a seguir. A figura 4.2 mostra uma parte de um elemento típico, que faz parte de um componente do mecanismo, e o sistema de coordenadas que será utilizado no desenvolvimento das equações do movimento.

A origem do sistema de coordenadas  $(x, y, z)$ , chamado de local, está localizada num ponto qualquer do componente não deformado que contém o elemento, e esse sistema de coordenadas acompanha o

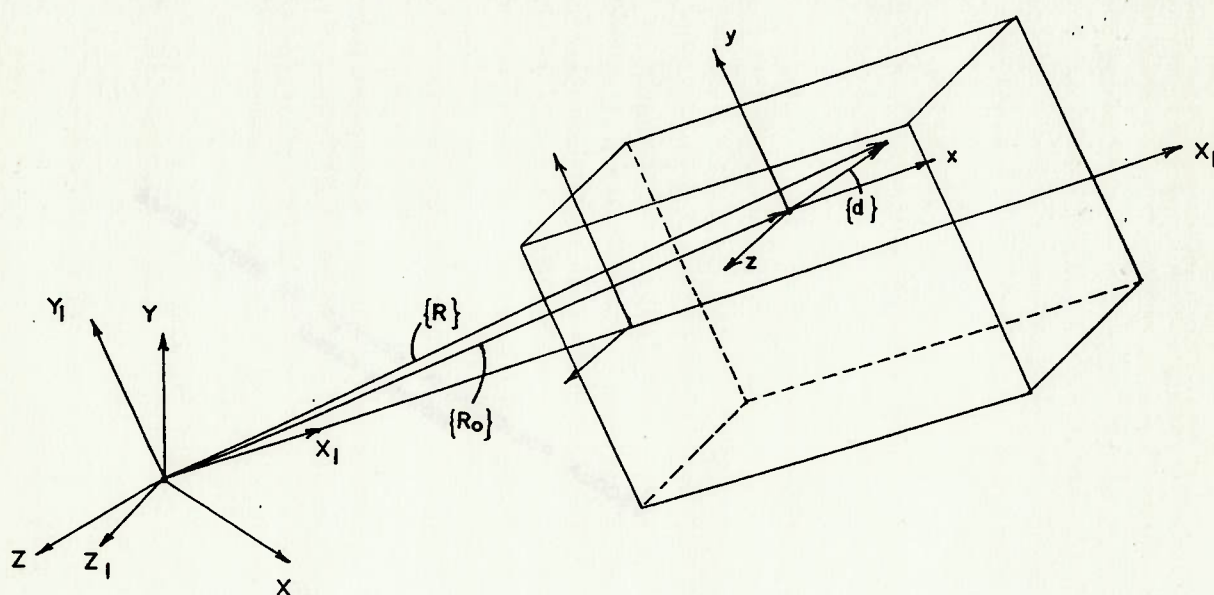


Figura 4.2 Parte de um elemento finito e o sistema de coordenadas associado

movimento de corpo rígido deste componente. Entende-se por movimento de corpo rígido o movimento que o mecanismo teria se todos os seus componentes se comportassem como corpos rígidos, ou seja, que, para todos os pontos do componente, a distância entre dois deles quaisquer permanecesse constante. O vetor  $\{d\}$  que representa o deslocamento deste ponto arbitrário do componente, devido as deformações elásticas do mesmo, é expresso no sistema de coordenadas locais  $(x,y,z)$ .

O sistema de coordenadas  $(X,Y,Z)$  está fixo. O sistema  $(X_1,Y_1,Z_1)$  tem a mesma origem do sistema  $(X,Y,Z)$ , porém está orientado de modo a permanecer sempre paralelo ao sistema  $(x,y,z)$ . O vetor  $\{R_0\}$  é o vetor posição da origem do sistema de coordenadas locais  $(x,y,z)$ . O vetor  $\{R\}$  da figura 4.2, expresso no sistema de coordenadas  $(X,Y,Z)$ , é dado por:

$$\{R\} = \{R_0\} + [T] \{d\} \quad (4.12)$$

onde  $[T]$  é a matriz de transformação de rotação entre o sistema de coordenadas locais  $(x,y,z)$  e o sistema de coordenadas  $(X,Y,Z)$ .

Derivando a equação 4.12 em relação ao tempo, obtemos:

$$\{\dot{R}\} = \{\dot{R}_0\} + [\dot{T}]\{d\} + [T]\{\dot{d}\} \quad (4.13)$$

Da equação 4.1,  $\{d\}$  e  $\{\dot{d}\}$  podem ser expressos por:

$$\{d\} = [N]\{u^e\} \quad (4.14)$$

$$\{\dot{d}\} = [N]\{\dot{u}^e\} \quad (4.15)$$

onde a matriz  $[N]$  contém as funções de interpolação descritas na seção 4.2, que são independentes do tempo, e  $\{u^e\}$  contém os deslocamentos nodais generalizados do elemento. Lembrando que as



funções de interpolação devem permitir o deslocamento de corpo rígido do elemento,  $\{\dot{R}_0\}$  e  $\{\ddot{R}_0\}$  podem ser expressos de maneira análoga, como:

$$\{\dot{R}_0\} = [T][N]\{\dot{U}_0\} \quad (4.16)$$

$$\{\ddot{R}_0\} = [T][N]\{\ddot{U}_0\} \quad (4.17)$$

onde os vetores  $\{\dot{U}_0\}$  e  $\{\ddot{U}_0\}$  representam respectivamente as velocidades e acelerações generalizadas de corpo rígido dos graus de liberdade nodais do elemento expressos no sistema  $(X1, Y1, Z1)$ .

A equação 4.13 pode ser expressa, então como:

$$\{\dot{R}\} = \{\dot{R}_0\} + [\dot{T}][N]\{u^*\} + [T][N]\{\dot{u}^*\} \quad (4.18)$$

A energia cinética (EC) do elemento [11] será:

$$EC = (1/2) \int \rho \{\dot{R}\}^T \{\dot{R}\} dV \quad (4.19)$$

onde  $dV$  é o elemento diferencial de volume e  $\rho$  a densidade, pressuposta constante, dentro do elemento. O superescrito  $\tau$  indica o transposto do vetor ou da matriz.

Substituindo a expressão 4.18 em 4.19, temos:

$$EC = (1/2) \int \rho (\{\dot{R}_0\}^T + \{u^*\}^T [N]^T [\dot{T}]^T + \{\dot{u}^*\}^T [N]^T [T]^T) * \\ + (\{\dot{R}_0\} + [\dot{T}][N]\{u^*\} + [T][N]\{\dot{u}^*\}) dV \quad (4.20)$$

Desenvolvendo a expressão, obtemos:

$$EC = (1/2) \int \rho (\{\dot{R}_0\}^T \{\dot{R}_0\} + 2\{\dot{R}_0\}^T [\dot{T}][N]\{u^*\} + 2\{\dot{R}_0\}^T [T][N]\{\dot{u}^*\} \\ + \{u^*\}^T [N]^T [\dot{T}]^T [\dot{T}][N]\{u^*\} + 2\{u^*\}^T [N]^T [\dot{T}]^T [T][N]\{\dot{u}^*\} \\ + \{\dot{u}^*\}^T [N]^T [T]^T [T][N]\{\dot{u}^*\}) dV \quad (4.21)$$

Usando 4.21, o primeiro termo da equação 4.11 torna-se (ver apêndice D):

$$\begin{aligned} \partial(EC)/\partial(\dot{u}^*) = \int \rho ([N]^T [T]^T \{\dot{R}_0\} + [N]^T [T]^T [\dot{T}] [N] \{u^*\} + \\ + [N]^T [T]^T [T] [N] \{\dot{u}^*\}) dV \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} d(\partial(EC)/\partial(\dot{u}^*))/dt = \int \rho ([N]^T [\dot{T}]^T \{\dot{R}_0\} + [N]^T [T]^T \{\dot{R}_0\} \\ + [N]^T [\dot{T}]^T [\dot{T}] [N] \{u^*\} + [N]^T [T]^T [\dot{T}] [N] \{u^*\} \\ + 2[N]^T [T]^T [\dot{T}] [N] \{\dot{u}^*\} + [N]^T [\dot{T}]^T [T] [N] \{\dot{u}^*\} \\ + [N]^T [T]^T [T] [N] \{\ddot{u}^*\}) dV \end{aligned} \quad (4.23)$$

De modo análogo à obtenção da equação 4.22, o segundo termo da equação 4.11, torna-se:

$$\begin{aligned} \partial(EC)/\partial(u^*) = \int \rho ([N]^T [\dot{T}]^T \{\dot{R}_0\} + [N]^T [\dot{T}]^T [\dot{T}] [N] \{u^*\} \\ + [N]^T [\dot{T}]^T [T] [N] \{\dot{u}^*\}) dV \end{aligned} \quad (4.24)$$

As forças externas atuantes no elemento podem ser divididas em três conjuntos: as forças externas nodais devido à ação dos elementos adjacentes ( $\{Q_{el}\}$ ), as forças externas devido à ação de outros componentes do mecanismo ( $\{Q_c\}$ ), e finalmente, as forças externas equivalentes às distribuídas no elemento ( $\{Q_{ex}\}$ ). Logo:

$$\{Q\} = \{Q_{el}\} + \{Q_c\} + \{Q_{ex}\} \quad (4.25)$$

A energia potencial do sistema será a própria energia de deformação do sistema devido à deformação elástica. O terceiro termo da equação 4.11, de acordo com as referências [11, 56 e 57], torna-se:

$$\partial(EP)/\partial\{u^e\} = [k^e]\{u^e\} \quad (4.26)$$

onde  $[k^e]$  é a matriz de rigidez do elemento, sendo calculada a partir das funções de interpolação  $[N]$  do elemento e das propriedades do material.

Combinando as equações 4.11, 4.16, 4.17, 4.23, 4.24, 4.25 e 4.26, a equação do movimento para um único elemento finito, será:

$$\begin{aligned} & \int \rho ([N]^T [T]^T [T] [N] \{\ddot{U}_0^e\} + [N]^T [T]^T [T] [N] \{\ddot{u}^e\} \\ & + 2[N]^T [T]^T [\dot{T}] [N] \{\dot{u}^e\} + [N]^T [T]^T [\ddot{T}] [N] \{u^e\}) dV + [k^e]\{u^e\} = \\ & \{Q_{el}^e\} + \{Q_c^e\} + \{Q_{ex}^e\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Lembrando que  $[T]^T [T] = [I]$ , pois  $[T]$  é uma matriz ortogonal temos:

$$\begin{aligned} & \int \rho ([N]^T [N] \{\ddot{U}_0^e\} + [N]^T [N] \{\ddot{u}^e\} + 2[N]^T [T]^T [\dot{T}] [N] \{\dot{u}^e\} \\ & + [N]^T [T]^T [\ddot{T}] [N] \{u^e\}) dV + [k^e]\{u^e\} = \{Q_{el}^e\} + \{Q_c^e\} + \{Q_{ex}^e\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Definindo  $\int \rho [N]^T [N] dV$  como a matriz de massa do elemento  $[m^e]$ , bem como as matrizes de "velocidade" e "aceleração" de corpo rígido, como:

$$[m_v^e] = \int \rho [N]^T [T]^T [\dot{T}] [N] dV \quad (4.29)$$

$$[m_a^e] = \int \rho [N]^T [T]^T [\ddot{T}] [N] dV \quad (4.30)$$

e fazendo estas substituições na equação 4.28, obtemos:

$$\begin{aligned} [m^e]\{\ddot{u}^e\} + [k^e]\{u^e\} &= \{Q_{el}^e\} + \{Q_c^e\} + \{Q_{ex}^e\} - [m^e]\{\ddot{U}_0^e\} \\ &\quad - 2[m_v^e]\{\dot{u}^e\} - [m_a^e]\{u^e\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Convém notar que o termo  $2[m_{\dot{v}}^e](\dot{u}^e)$  corresponde às forças devido à aceleração de Coriolis, e o termo  $[m_{\ddot{u}}^e](u^e)$  corresponde às forças devido às acelerações normal e tangencial [12].

As equações do movimento para um componente inteiro do mecanismo são obtidas através da montagem da matriz do componente a partir das matrizes de seus elementos [57], como se segue:

$$(m^e)_{ij} = \sum_{e=1}^n (m^e)_{ij} \quad (4.32)$$

onde o superescrito  $e$  denota a matriz de um componente do mecanismo,  $i$  e  $j$  são o número das linhas e colunas da matriz, respectivamente, e denotam os graus de liberdade do sistema. Portanto,  $(m^e)_{ij}$  é o termo da linha  $i$  e coluna  $j$  da matriz  $[m^e]$  (matriz de massa do componente) e  $(m^e)_{ij}$  é o termo da linha  $i$  e coluna  $j$  da matriz  $[m^e]$  (matriz de massa do elemento). O número de elementos varia de 1 até  $n$ , onde  $n$  é o número total de elementos do componente.

De modo análogo:

$$(k^e)_{ij} = \sum_{e=1}^n (k^e)_{ij} \quad (4.33)$$

$$(m_{\dot{v}}^e)_{ij} = \sum_{e=1}^n (m_{\dot{v}}^e)_{ij} \quad (4.34)$$

$$(m_{\ddot{u}}^e)_{ij} = \sum_{e=1}^n (m_{\ddot{u}}^e)_{ij} \quad (4.35)$$

$$(Q_c^e)_{ij} = \sum_{e=1}^n (Q_c^e)_{ij} \quad (4.36)$$

$$(Q_{ex}^e)_{ij} = \sum_{e=1}^n (Q_{ex}^e)_{ij} \quad (4.37)$$

$$(Q_{el}^e)_{ij} = \sum_{e=1}^n (Q_{el}^e)_{ij} = 0 \quad (4.38)$$

As forças generalizadas oriundas dos elementos adjacentes  $(Q_{el}^e)$  são agora forças internas ao componente, que de acordo com o princípio da ação e reação, são de mesma direção e módulo, com sentidos contrários, portanto se cancelam.

As equações do movimento, para um componente do mecanismo, podem ser escritas como:

$$[m^c]\{\ddot{u}^c\} + [k^c]\{u^c\} = \{Q_c^c\} + \{Q_{ex}^c\} - [m^c]\{\ddot{U}_0^c\} - 2[m_{\dot{v}}^c]\{\dot{u}^c\} - [m_{\dot{u}}^c]\{u^c\} \quad (4.39)$$

onde o vetor  $\{u^c\}$  contém os deslocamentos dos graus de liberdade de todo o componente do mecanismo e  $\{\ddot{U}_0^c\}$  contém as acelerações absolutas de corpo rígido do componente.

O próximo passo será a obtenção das equações do movimento para o mecanismo inteiro. Inicialmente é necessário transformar os termos do vetor  $\{u^c\}$ , que são comuns para diferentes componentes do mecanismo, para um mesmo sistema de coordenadas. Isto é necessário para assegurar a compatibilidade dos deslocamentos, velocidades e acelerações dos nós que são comuns a dois ou mais componentes do mecanismo. Percebe-se a necessidade desta condição quando dois ou mais componentes do mecanismo estão ligados através de uma articulação ou algum outro tipo de vínculo. A figura 4.3 ilustra esta situação:  $(u_1^1, u_2^1)$  são os deslocamentos nas direções x e y, respectivamente, do nó i no sistema de coordenadas do componente 1;  $(u_3^2, u_4^2)$  são os deslocamentos nas direções x e y, respectivamente, do nó i no sistema de coordenadas do componente 2, e  $(u'_1, u'_2)$  são os deslocamentos "transformados" no sistema de coordenadas comum.

Seja  $[Tr]^T$ , a matriz de transformação dos graus de liberdade comuns de componentes diferentes para um mesmo sistema de coordenadas. Os graus de liberdade que são internos aos componentes não são afetados por esta matriz de transformação. Exemplificando para a figura 4.3, somente os graus de liberdade associados com o nó i são afetados por  $[Tr]$ , todos os outros permanecem inalterados. Este método de transformar apenas os graus de liberdade necessários, é muito mais eficiente que a transformação

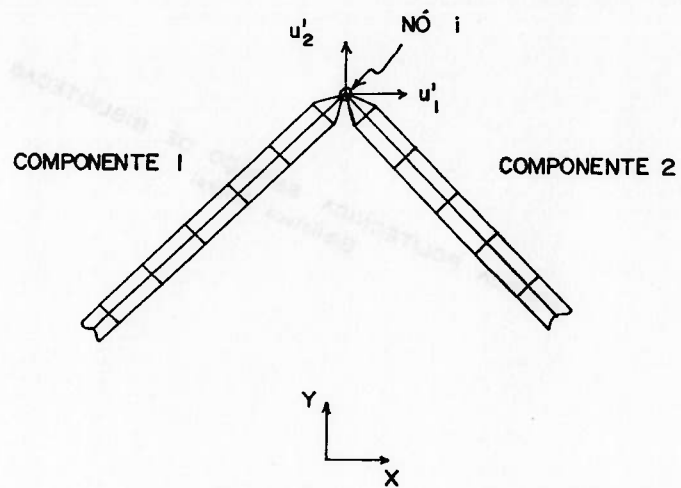
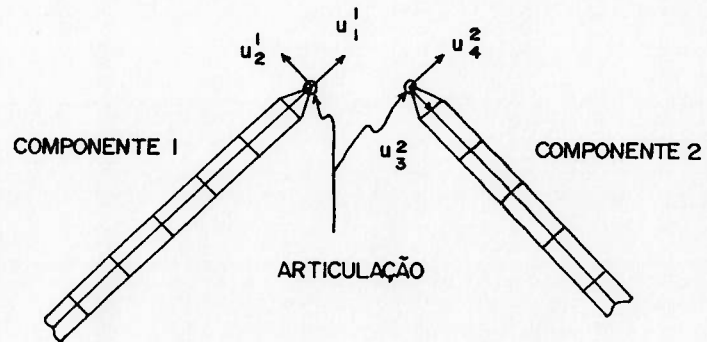


Figura 4.3 Transformação do grau de liberdade comum a dois componentes

desnecessária de todos os graus de liberdade do sistema para um sistema de coordenadas comum.

Logo:

$$\{u^e\} = [Tr]^T \{u^e\} \quad (4.40)$$

e como  $[Tr]$  é ortogonal, e portanto,  $[Tr]^T = [Tr]^{-1}$ ,

$$\{u^e\} = [Tr]\{u^e\} \quad (4.41)$$

$$\{\dot{u}^e\} = [\dot{Tr}]\{u^e\} + [Tr]\{\dot{u}^e\} \quad (4.42)$$

$$\{\ddot{u}^e\} = [\ddot{Tr}]\{u^e\} + 2[\dot{Tr}]\{\dot{u}^e\} + [Tr]\{\ddot{u}^e\} \quad (4.43)$$

$$\{\ddot{U}_0^e\} = [Tr]\{\ddot{U}_0^e\} \quad (4.44)$$

Substituindo as equações 4.41 a 4.44 em 4.39, obtemos:

$$\begin{aligned} [m^e] (\{\ddot{Tr}\}\{u^e\} + 2[\dot{Tr}]\{\dot{u}^e\} + [Tr]\{\ddot{u}^e\}) + [k^e][Tr]\{u^e\} = \\ \{Q_c^e\} + \{Q_{ex}^e\} - [m^e][Tr]\{\ddot{U}_0^e\} \\ - 2[m_{\dot{u}}^e](\{\dot{Tr}\}\{u^e\} + [Tr]\{\dot{u}^e\}) - [m_m^e][Tr]\{u^e\} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Multiplicando por  $[Tr]^T$  e rearranjando, temos:

$$\begin{aligned} [Tr]^T [m^e] [Tr] \{\ddot{u}^e\} + [Tr]^T [k^e] [Tr] \{u^e\} = \\ [Tr]^T \{Q_c^e\} + [Tr]^T \{Q_{ex}^e\} - [Tr]^T [m^e] [Tr] \{\ddot{U}_0^e\} \\ - 2([Tr]^T [m^e] [\dot{Tr}] + [Tr]^T [m_{\dot{u}}^e] [Tr]) \{\dot{u}^e\} \\ - ([Tr]^T [m^e] [\ddot{Tr}] + 2 [Tr]^T [m_{\dot{u}}^e] [\dot{Tr}] + [Tr]^T [m_m^e] [Tr]) \{u^e\} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Fazendo:

$$[m^{c'}] = [Tr]^T [m^c] [Tr] \quad (4.47)$$

$$[k^{c'}] = [Tr]^T [k^c] [Tr] \quad (4.48)$$

$$[mdd^{c'}] = [Tr]^T [m^c] [\ddot{Tr}] \quad (4.49)$$

$$[md_{\dot{v}}^{c'}] = [Tr]^T [m_{\dot{v}}^c] [\dot{Tr}] \quad (4.50)$$

$$[m_{\mu}^{c'}] = [Tr]^T [m_{\mu}^c] [Tr] \quad (4.51)$$

$$[md^{c'}] = [Tr]^T [m^c] [\dot{Tr}] \quad (4.52)$$

$$[m_{\dot{v}}^{c'}] = [Tr]^T [m_{\dot{v}}^c] [Tr] \quad (4.53)$$

$$\{Qc^{c'}\} = [Tr]^T \{Qc^c\} \quad (4.54)$$

$$\{Qex^{c'}\} = [Tr]^T \{Qex^c\} \quad (4.55)$$

e substituindo estes termos na equação 4.46, obtemos:

$$\begin{aligned} [m^{c'}]\{\ddot{u}^{c'}\} + [k^{c'}]\{u^{c'}\} &= \{Qc^{c'}\} + \{Qex^{c'}\} - [m^{c'}]\{\ddot{U}o^{c'}\} \\ &- 2([md^{c'}] + [m_{\dot{v}}^{c'}])\{\dot{u}^{c'}\} - ([mdd^{c'}] + 2[md_{\dot{v}}^{c'}] + [m_{\mu}^{c'}])\{u^{c'}\} \end{aligned} \quad (4.56)$$

A transformação anterior permite facilmente impor as condições de compatibilidade de deslocamentos, velocidades e acelerações de todos os graus de liberdade do mecanismo. Feito isto, as matrizes do mecanismo inteiro podem ser obtidas a partir das matrizes de cada componente [57], de modo similar ao realizado para se obter as matrizes de cada componente, a partir das matrizes dos elementos.

Portanto, a matriz de massa é:

$$(M)_{ij} = \sum_{c=1}^p (m^{c'})_{ij} \quad (4.57)$$

onde  $i$  e  $j$  são os números das linhas e colunas da matriz, respectivamente. O número do componente  $c$  varia de 1 até  $p$ , onde  $p$  é o número total de componentes do sistema.

De maneira análoga:



$$(K)_{ij} = \sum_{c=1}^p (k^{c'})_{ij} \quad (4.58)$$

$$(Md)_{ij} = \sum_{c=1}^p (md^{c'})_{ij} \quad (4.59)$$

$$(Mv)_{ij} = \sum_{c=1}^p (mv^{c'})_{ij} \quad (4.60)$$

$$(Mdd)_{ij} = \sum_{c=1}^p (mdd^{c'})_{ij} \quad (4.61)$$

$$(Mdv)_{ij} = \sum_{c=1}^p (mdv^{c'})_{ij} \quad (4.62)$$

$$(Ma)_{ij} = \sum_{c=1}^p (m_a^{c'})_{ij} \quad (4.63)$$

$$(Qex)_i = \sum_{c=1}^p (Qex^{c'})_i \quad (4.64)$$

$$(Qc)_i = \sum_{c=1}^p (Qc^{c'})_i = 0 \quad (4.65)$$

Os carregamentos generalizados provenientes dos componentes adjacentes são agora forças internas ao mecanismo, e portanto, de acordo com o princípio da ação e reação, são de mesmo módulo e direção, e sentidos contrários, logo o somatório é nulo.

As equações do movimento, para o mecanismo inteiro, podem ser escritas como:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{Qex\} - [M]\{\ddot{U}_0\} - 2([Md] + [Mv])\{\dot{u}\} - ([Mdd] + 2[Mdv] + [Ma])\{u\} \quad (4.66)$$

onde os vetores  $\{u\}$ ,  $\{\dot{u}\}$ ,  $\{\ddot{u}\}$  e  $\{\ddot{U}_0\}$  contém os deslocamentos, velocidades, acelerações, e acelerações de corpo rígido, respectivamente, dos graus de liberdade de todo o mecanismo.

A razão de separar os vetores  $\{u\}$  e  $\{\dot{u}\}$  na equação acima é que as matrizes  $[M]$  e  $[K]$  possuem algumas propriedades muito úteis, como a simetria, das quais podemos tirar proveito durante a solução das equações do movimento. As matrizes  $[Md]$ ,  $[Mv]$ ,  $[Mdd]$  e  $[Mdv]$ , entretanto, não são simétricas e portanto devem estar separadas de  $[M]$  e  $[K]$  de modo a preservar a simetria destas últimas.

No capítulo seguinte será apresentado um método para resolução das equações do movimento.

## 5 - FORMULAÇÃO DE UM MÉTODO DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

### DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO [29]

A equação matricial (4.66) do capítulo anterior representa as equações do movimento para um mecanismo elástico. As matrizes  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $[M_d]$ , etc. não são constantes, e sim funções dependentes da posição de cada componente do mecanismo. Nota-se esta dependência através da matriz de transformação  $[Tr]$  (equação 4.40), que é necessária para assegurar a compatibilidade de deslocamentos, velocidades e acelerações dos graus de liberdade que são comuns a dois ou mais componentes.

Um método possível de solução da equação (4.66) é a integração numérica. Este método tem o inconveniente, de mesmo para se obter a solução para o regime permanente, é necessário a integração do sistema de equações por vários ciclos, a fim de eliminar os efeitos do transiente inicial. Este procedimento tende a consumir muito tempo de processamento, mesmo para sistemas de poucos graus de liberdade.

O método apresentado a seguir é semelhante ao proposto por Midha [29], que é capaz de obter a solução em regime permanente de um sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes periódicos em função do tempo.

O procedimento se baseia na divisão do período fundamental num número discreto de subintervalos de tempo. Durante cada um destes subintervalos de tempo é pressuposto que os coeficientes das equações diferenciais, que são função do tempo, sejam constantes. Para garantir a continuidade, os deslocamentos e as velocidades finais de um subintervalo devem ser iguais aos deslocamentos e às velocidades iniciais do subintervalo seguinte. O sistema de

equações é então resolvido para se obter a resposta do sistema em cada um dos subintervalos.

### 5.1 - Modificação e Desacoplamento das Equações do Movimento

A equação (4.66) representa um conjunto de equações diferenciais acopladas. Para aplicar o método proposto e obter a resposta em regime permanente é necessário que as equações sejam desacopladas. Este desacoplamento consiste em obter um conjunto de equações, onde cada uma das mesmas envolve apenas uma variável do sistema e suas derivadas [38].

Este procedimento de desacoplamento pode não ser possível na presença das matrizes não simétricas  $[M_d]$ ,  $[M_v]$ ,  $[M_{dd}]$ ,  $[M_{dv}]$  e  $[M_a]$ . Estas matrizes representam os efeitos de acoplamento entre as velocidades e acelerações de corpo rígido do mecanismo, e os deslocamentos elásticos  $\{u\}$  e velocidades  $\{\dot{u}\}$ . Para pequenos deslocamentos esses termos são pequenos quando comparados com os outros termos da equação (4.66). Convém ressaltar ainda que a maioria dos pesquisadores desprezou esses efeitos em suas pesquisas. A partir deste ponto também será feita esta aproximação neste trabalho, e portanto, serão desprezados os efeitos de acoplamento entre o movimento de corpo rígido e o movimento elástico.

Feita essa simplificação, a equação (4.66) torna-se:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{Q_{ex}\} - [M]\{\ddot{u}_o\} \quad (5.1)$$

A equação (5.1) pode agora ser facilmente desacoplada aplicando a técnica da superposição modal (ver apêndice E).

Fazendo o desacoplamento da equação (5.1), obtemos para um grau de liberdade genérico  $i$ :

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \{\phi_i\}^T \{Q_{ex}\} - \{\phi_i\}^T [M] \{\ddot{U}_0\} \quad (5.2)$$

onde

$y_i$  - "deslocamento generalizado"

$\omega_i^2$  - quadrado da frequência natural do sistema

$\{\phi_i\}$  - modo de vibrar ortonormalizado com relação a [M]

Obtidas as funções  $y_i(t)$ , a resposta nas coordenadas originais pode ser obtida da equação (E.5), ou seja:

$$\{u\} = [\xi] \{y\} \quad (5.3)$$

onde  $[\xi]$  é a matriz dos modos de vibrar ortonormalizados com relação [M] e  $\{y\}$  o vetor dos "deslocamentos generalizados".

### 5.2 - Método para a Obtenção da Resposta Permanente do Sistema

A equação (5.4) representa um sistema de um grau de liberdade, com coeficientes constantes.

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = P^*(t) \quad (5.4)$$

onde  $P^*(t)$  é uma função do tempo. O deslocamento  $y(t)$  e a velocidade  $\dot{y}(t)$ , são dadas por [10]:

$$y(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{cos} \omega t + (1/m\omega) \int_0^t P^*(\tau) \operatorname{sen} \omega(t-\tau) d\tau \quad (5.5)$$

$$\dot{y}(t) = A\omega \operatorname{cos} \omega t - B\omega \operatorname{sen} \omega t + (1/m) \int_0^t P^*(\tau) \operatorname{cos} \omega(t-\tau) d\tau \quad (5.6)$$

Os primeiros dois termos da equação (5.5) representam a solução homogênea da equação (5.4). O terceiro termo representa a resposta do sistema à excitação  $P^*(t)$ . A soma desses termos fornece a resposta total do sistema em função do tempo.

A equação (5.7) representa um sistema de um grau de liberdade, com coeficientes periódicos com o tempo.

$$m(t)\ddot{y}(t) + k(t)y(t) = P^*(t) \quad (5.7)$$

onde

$$m(t) = m(t+T) \quad (5.8)$$

$$k(t) = k(t+T) \quad (5.9)$$

$$w(t) = (k(t)/m(t))^{1/2} = w(t+T) \quad (5.10)$$

$T$  - período do sistema

O método para obter a resposta do sistema para o regime permanente é baseado na discretização dos parâmetros contínuos do sistema. Isto será feito pela divisão do período  $T$  em  $n$  subintervalos iguais, tais que:

$$T = T/n \quad (5.11)$$

Os parâmetros  $m(t)$ ,  $k(t)$  e  $w(t)$  são então pressupostos constantes durante cada subintervalo, como mostrado na figura 5.1. O problema é então reduzido à resolução de equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes.

A forma geral das equações (5.5) e (5.6) para um subintervalo  $i$ , são:

$$y(t) = A_i \text{sen} w_i (t - t_{i-1}) + B_i \text{cos} w_i (t - t_{i-1}) + (1/mw_i) \int_{t_{i-1}}^t P^*(\tau) \text{sen} w_i (t - \tau) d\tau \quad (5.12)$$

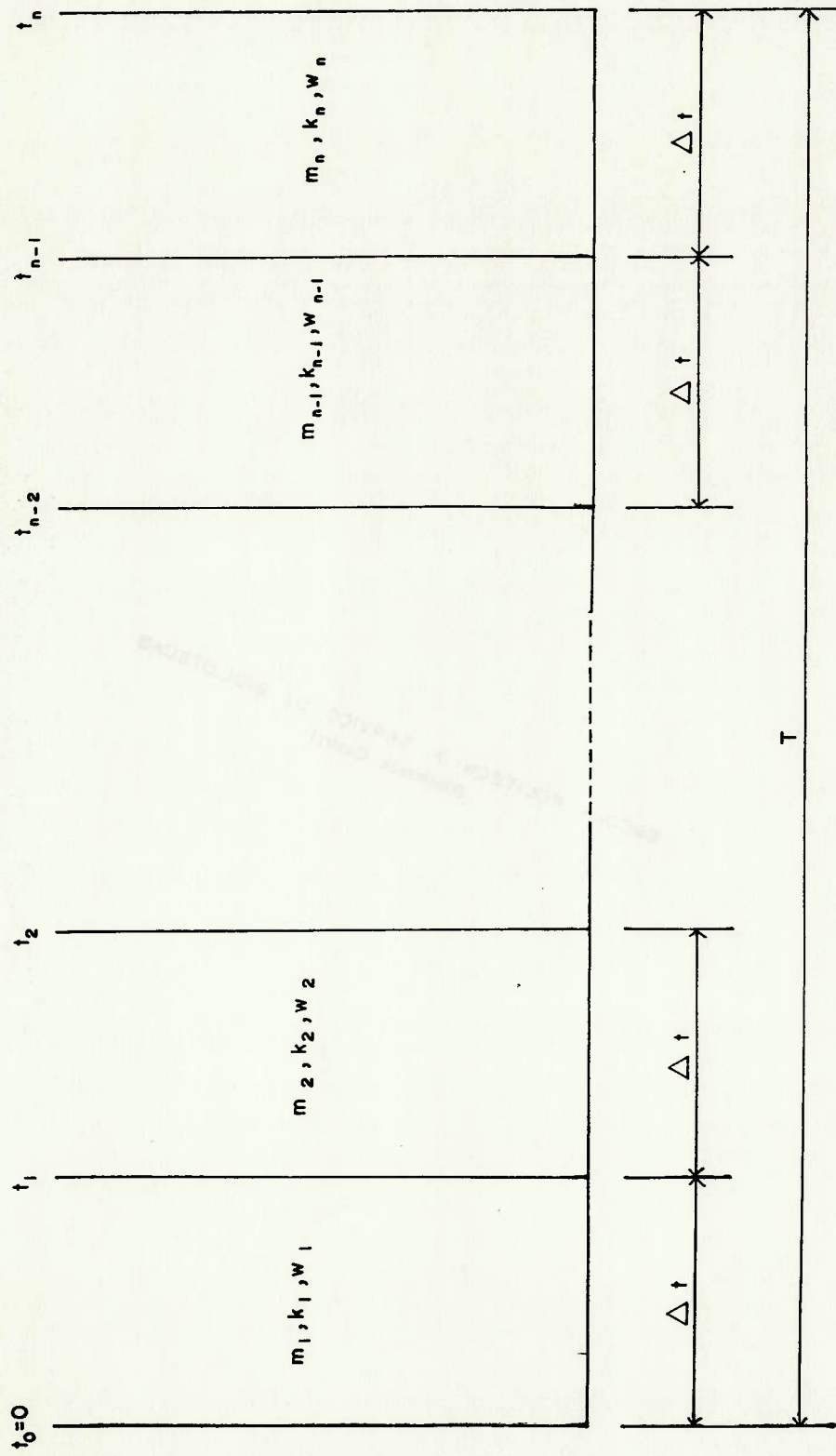


Figura 5.1 Discretização dos parâmetros  $m(t)$ ,  $k(t)$  e  $w(t)$

$$\dot{y}(t) = A_i w_i \cos w_i (t - t_{i-1}) - B_i w_i \sin w_i (t - t_{i-1}) + (1/m) \int_{t_{i-1}}^t P^*(\tau) \cos w_i (t - \tau) d\tau \quad (5.13)$$

para  $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ , e  $i = 1, 2, \dots, n$

A fim de manter a continuidade da solução em todos os instantes intermediários, isto é, em  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ , devem ser impostas as condições de compatibilidade de deslocamentos e velocidades entre os subintervalos, ou seja, que os deslocamentos e as velocidades finais de um subintervalo sejam iguais aos deslocamentos e às velocidades iniciais do subintervalo seguinte. Estas equações de compatibilidade estão descritas no apêndice F (o número das equações segue a convenção adotada no referido apêndice).

$$\begin{aligned} (F.2a) - (F.1c) &= 0 \\ (F.2b) - (F.1d) &= 0 \\ (F.3a) - (F.2c) &= 0 \\ (F.3b) - (F.2d) &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ (F.na) - (F.(n-1)c) &= 0 \\ (F.nb) - (F.(n-1)d) &= 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Como, por hipótese, o mecanismo está operando de forma periódica, obtêm-se duas equações adicionais, igualando os parâmetros (deslocamento e velocidade) no final do ciclo (período) com os iniciais como se segue (o número das equações segue a convenção adotada no apêndice F):

$$\begin{aligned} (F.1a) - (F.nc) &= 0 \\ (F.1b) - (F.nd) &= 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

As equações (5.14) e (5.15) podem ser expressas de uma forma matricial, segundo a equação (5.16), onde:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_1 & a_1 \\
 0 & \omega_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & e_1 & d_1 \\
 b_2 & a_2 & 1 & 0 & & & 0 & 0 \\
 e_2 & d_2 & 0 & \omega_3 & & & & \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & 0 & 0 & & & \\
 & & & 0 & 0 & & & \\
 0 & 0 & \dots & b_n & a_n & 1 & 0 & \\
 0 & 0 & \dots & e_n & d_n & 0 & \omega_1 & 
 \end{bmatrix}
 \times
 \begin{bmatrix}
 R_2 \\
 A_2 \\
 R_3 \\
 A_3 \\
 \vdots \\
 B_n \\
 A_n \\
 B_1 \\
 A_1
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 C_1 \\
 F_1 \\
 C_2 \\
 F_2 \\
 \vdots \\
 C_{n-1} \\
 F_{n-1} \\
 C_n \\
 f_n
 \end{bmatrix}
 \quad (5.16)$$

$$a_i = - \text{sen} w_i (t_i - t_{i-1}) \quad (5.17)$$

$$b_i = - \text{cos} w_i (t_i - t_{i-1}) \quad (5.18)$$

$$c_i = (1/mw_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} P^*(\tau) \text{sen} w_i (t_i - \tau) d\tau \quad (5.19)$$

$$d_i = - w_i \text{cos} w_i (t_i - t_{i-1}) \quad (5.20)$$

$$e_i = + w_i \text{sen} w_i (t_i - t_{i-1}) \quad (5.21)$$

$$f_i = (1/m) \int_{t_{i-1}}^{t_i} P^*(\tau) \text{cos} w_i (t_i - \tau) d\tau \quad (5.22)$$



As condições de compatibilidade de deslocamentos e velocidades resultam em  $2(n-1)$  equações contendo  $2n$  variáveis. As condições obtidas da equação (5.15) fornecem as duas equações necessárias para tornar o sistema de equações determinado, já que, as  $2n$  equações obtidas acima são linearmente independentes (obtidas em  $n$  instantes distintos) [29].

A equação (5.16) representa, portanto, um sistema de equações lineares nas variáveis  $A_i$  e  $B_i$ , cuja solução pode ser obtida a partir de qualquer método de resolução de um sistema de equações lineares. A fim de se escolher o método mais adequado para o problema em questão, deve-se considerar a ordem da matriz envolvida (duas vezes o número de subintervalos adotados), bem como que a maioria dos seus termos tem o valor nulo. Assim sendo, apesar da ordem da matriz ser elevada, ela é esparsa.

Assim uma vez conhecidos os termos  $A_i$  e  $B_i$ , obtém-se a resposta em cada um dos subintervalos  $t_i$ , e portanto, em todo o período  $T$ .

## 6 - ANÁLISE DE UM MECANISMO PLANO DE QUATRO BARRAS [26]

Este capítulo tem por finalidade mostrar, para um caso particular, o método tradicionalmente empregado para se obter as tensões e deformações nos componentes de um mecanismo. Com este intuito será desenvolvido o procedimento para se obter as deformações nos pontos médios de um mecanismo plano cujos componentes têm uma seção transversal constante. A escolha deste tipo particular de mecanismo e tipo de resposta (deformação nos pontos médios dos componentes) reside no fato de se ter resultados experimentais disponíveis [3] bem como os resultados obtidos por Turcic [48 e 49] utilizando o procedimento baseado no método dos elementos finitos estudado nos capítulos 4 e 5. Assim sendo poderá ser feito no capítulo seguinte uma análise comparativa dos resultados para um mesmo mecanismo.

A figura 6.1 mostra um desenho esquemático de um mecanismo de quatro barras plano.

### 6.1 Análise Cinemática

Será feito inicialmente uma análise cinemática de corpo rígido. Adotar-se-á por hipótese, a fim de se fazer uma análise com as mesmas condições geométricas e de carregamento que as apresentadas nas referências [3, 48 e 49], que a manivela terá uma rotação constante e conhecida. A partir desta velocidade angular, bem como das condições geométricas do mecanismo, será determinado o movimento de cada componente do mecanismo.

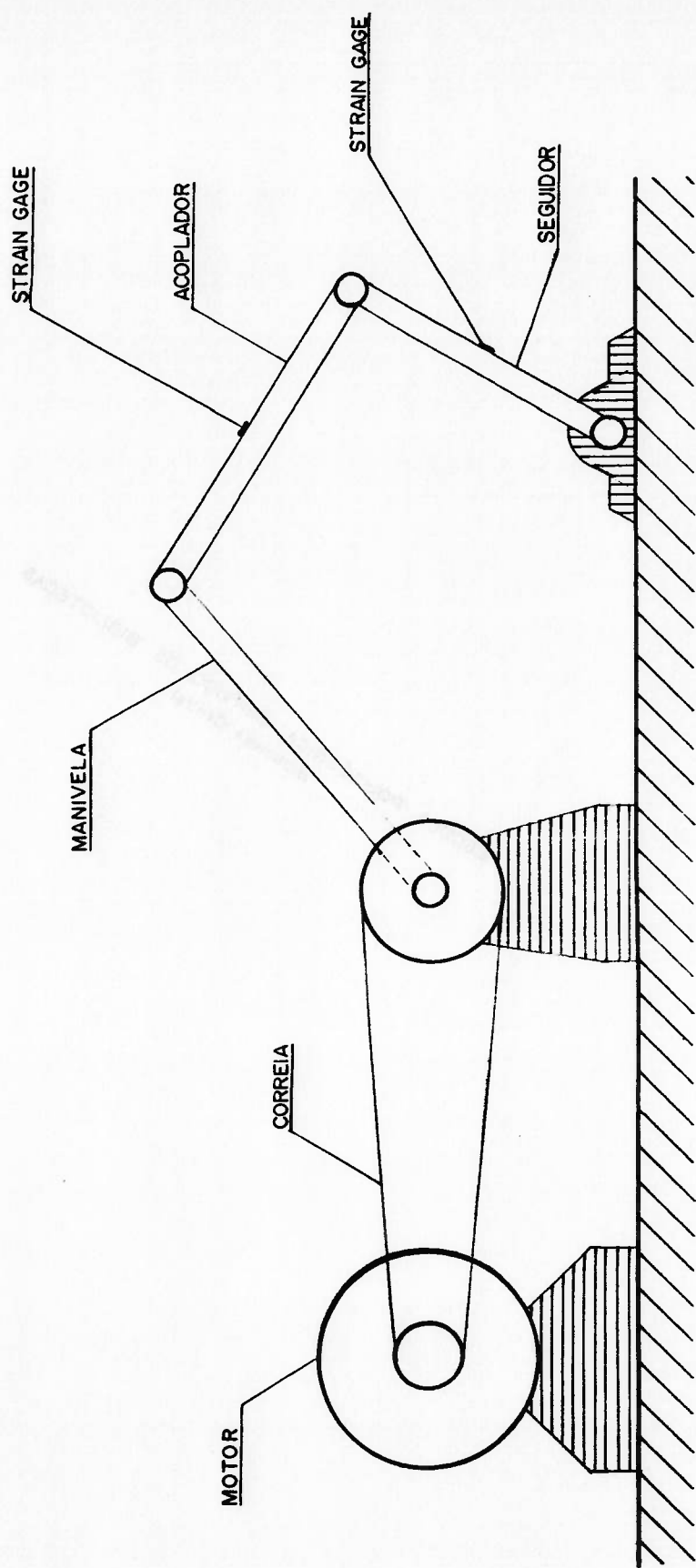


Figura 6.1 Esquema de um mecanismo de quatro barras plano

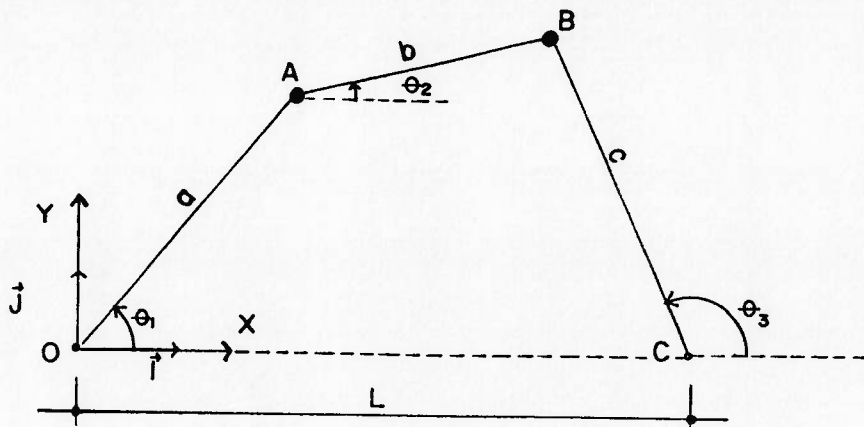


Figura 6.2 Modelo do mecanismo e o sistema de coordenadas utilizado

A figura 6.2 mostra o esquema do mecanismo de quatro barras, bem como o sistema de coordenadas OXYZ utilizado. Os componentes OA, AB e BC têm respectivamente os comprimentos  $a$ ,  $b$  e  $c$ ; as massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ ; as seções transversais  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  e os momentos de inércia  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ . São consideradas ainda as massas concentradas  $m_b$  e  $m_s$  em A e B respectivamente. O sistema OXYZ está fixo em O e orientado de modo que os pontos fixos O e C do mecanismo pertençam ao eixo das abscissas OX.

Temos por hipótese então, que a velocidade angular  $\dot{\theta}_1$  do componente OA é constante e que o mecanismo é composto por componentes rígidos.

O vetor posição  $\vec{r}_B$  para o ponto B do mecanismo é o resultante de duas equações vetoriais independentes:  $\vec{r}_B = (B-A) + (A-O)$  e  $\vec{r}_B = (B-C) + (C-O)$ . Estas equações podem ser combinadas, como mostrado a seguir, e suas derivadas determinarão a velocidade  $\vec{v}_B$  e a aceleração  $\vec{a}_B$  do ponto B.

$$\begin{aligned}\vec{r}_B &= a\cos\theta_1\vec{I} + a\sin\theta_1\vec{J} + b\cos\theta_2\vec{I} + b\sin\theta_2\vec{J} = \\ &= L\vec{I} + c\cos\theta_3\vec{I} + c\sin\theta_3\vec{J}\end{aligned}\quad (6.1)$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= -aw_1\sin\theta_1\vec{I} + aw_1\cos\theta_1\vec{J} - bw_2\sin\theta_2\vec{I} + bw_2\cos\theta_2\vec{J} = \\ &= -cw_3\sin\theta_3\vec{I} + cw_3\cos\theta_3\vec{J}\end{aligned}\quad (6.2)$$

$$\begin{aligned}\vec{A}_B &= -aw_1^2\cos\theta_1\vec{I} - aw_1^2\sin\theta_1\vec{J} - bw_2^2\cos\theta_2\vec{I} - bw_2^2\sin\theta_2\vec{J} - \\ &- b\dot{w}_2\sin\theta_2\vec{I} + b\dot{w}_2\cos\theta_2\vec{J} = -cw_3^2\cos\theta_3\vec{I} - cw_3^2\sin\theta_3\vec{J} - \\ &- c\dot{w}_3\sin\theta_3\vec{I} + c\dot{w}_3\cos\theta_3\vec{J}\end{aligned}\quad (6.3)$$

onde  $w_i$  e  $\dot{w}_i$  são respectivamente a velocidade e aceleração angular do componente  $i$  do mecanismo.

Nas equações precedentes, conhecem-se os comprimentos constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $L$ . Sendo o componente OA a peça motora, então  $\theta_1$ ,  $w_1$  e  $\dot{w}_1$  também são conhecidos, lembrando que para o caso particular em estudo  $w_1 = \text{cte}$ , logo  $\dot{w}_1 = 0$ . Nota-se então que as incógnitas a serem determinadas através das três equações são:  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $w_2$ ,  $w_3$ ,  $\dot{w}_2$  e  $\dot{w}_3$ .

Pode-se determinar as velocidades angulares  $w_2$  e  $w_3$ , igualando-se as partes em  $\vec{I}$  e  $\vec{J}$ , através de equação (6.2), como se segue:

$$aw_1\sin\theta_1 + bw_2\sin\theta_2 = cw_3\sin\theta_3 \quad (6.4)$$

$$aw_1\cos\theta_1 + bw_2\cos\theta_2 = cw_3\cos\theta_3 \quad (6.5)$$

Multiplicando-se a equação (6.4) por  $\cos\theta_3$  e a equação (6.5) por  $\sin\theta_3$ , temos:

$$aw_1\sin\theta_1\cos\theta_3 + bw_2\sin\theta_2\cos\theta_3 = cw_3\sin\theta_3\cos\theta_3 \quad (6.6)$$

$$aw_1\cos\theta_1\sin\theta_3 + bw_2\cos\theta_2\sin\theta_3 = cw_3\cos\theta_3\sin\theta_3 \quad (6.7)$$

Subtraindo-se a equação (6.6) da equação (6.7) e isolando  $w_2$ :

$$w_2 = -[aw_1 \text{sen}(\theta_3 - \theta_1)]/[b \text{sen}(\theta_3 - \theta_2)] \quad (6.8)$$

De modo semelhante:

$$w_3 = [aw_1 \text{sen}(\theta_2 - \theta_1)]/[c \text{sen}(\theta_2 - \theta_3)] \quad (6.9)$$

Pode-se determinar as acelerações angulares  $\dot{w}_2$  e  $\dot{w}_3$ , igualando-se as partes em  $\vec{I}$  e  $\vec{J}$ , através da equação (6.3), como se segue:

$$aw_1^2 \cos\theta_1 + bw_2^2 \cos\theta_2 + b\dot{w}_2 \text{sen}\theta_2 = cw_3^2 \cos\theta_3 + c\dot{w}_3 \text{sen}\theta_3 \quad (6.10)$$

$$aw_1^2 \text{sen}\theta_1 + bw_2^2 \text{sen}\theta_2 - b\dot{w}_2 \cos\theta_2 = cw_3^2 \text{sen}\theta_3 - c\dot{w}_3 \cos\theta_3 \quad (6.11)$$

Multiplicando-se a equação (6.10) por  $\cos\theta_3$ , a equação (6.11) por  $\text{sen}\theta_3$  e somando as duas, obtemos:

$$aw_1^2 (\cos\theta_1 \cos\theta_3 + \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_3) + bw_2^2 (\cos\theta_2 \cos\theta_3 + \text{sen}\theta_2 \text{sen}\theta_3) + b\dot{w}_2 (\text{sen}\theta_2 \cos\theta_3 - \text{sen}\theta_3 \cos\theta_2) = cw_3^2 (\cos^2\theta_3 + \text{sen}^2\theta_3) \quad (6.12)$$

isolando  $\dot{w}_2$ :

$$\dot{w}_2 = [aw_1^2 \cos(\theta_3 - \theta_1) + bw_2^2 \cos(\theta_3 - \theta_2) - cw_3^2]/[b \text{sen}(\theta_3 - \theta_2)] \quad (6.13)$$

De modo semelhante:

$$\dot{w}_3 = [aw_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - cw_3^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) + bw_2^2]/[c \text{sen}(\theta_3 - \theta_2)] \quad (6.14)$$

Antes de se efetuar os cálculos numéricos dos valores de  $w_2$ ,  $w_3$ ,  $\dot{w}_2$  e  $\dot{w}_3$  pelas equações (6.8), (6.9), (6.13) e (6.14) é necessário que sejam determinados os ângulos  $\theta_2$  e  $\theta_3$  como funções de  $\theta_1$ . Embora pareça que os dois ângulos incógnitos possam ser determinados pela equação (6.1), e na verdade podem, a dificuldade encontrada está nas relações trigonométricas, que são complicadas algebricamente. Uma alternativa para solução destes ângulos é a de incluir o vetor posição C-A de comprimento  $m$  como mostrado na figura 6.3. O comprimento variável  $m$  e o ângulo  $\theta_m$  podem ser determinados de modo mais fácil em função de  $\theta_1$ .

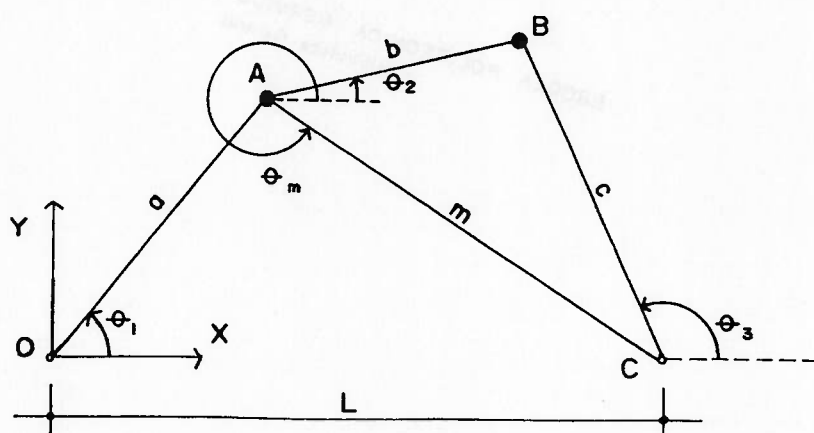


Figura 6.3 Configuração auxiliar

Temos que:

$$C-A = (C-O) + (O-A) \quad (6.15)$$

Desenvolvendo:

$$m \cos \theta_m \vec{I} + m \sin \theta_m \vec{J} = L \vec{I} - a \cos \theta_1 \vec{I} - a \sin \theta_1 \vec{J} \quad (6.16)$$

Igualando-se os termos em  $\vec{I}$  e  $\vec{J}$  respectivamente:

$$m \cos \theta_m = L - a \cos \theta_1 \quad (6.17)$$

$$m \sin \theta_m = -a \sin \theta_1 \quad (6.18)$$

Elevando ao quadrado as equações (6.17) e (6.18) e somando membro a membro, obtém-se o comprimento m:

$$m^2 = a^2 + L^2 - 2aL \cos \theta_1 \quad (6.19)$$

O ângulo  $\theta_m$  pode ser determinado através da equação (6.18):

$$\sin \theta_m = -(a/m) \sin \theta_1 \quad (6.20)$$

A fim de obter a relação entre  $\theta_2$  e  $\theta_3$  com m e  $\theta_m$  será utilizado a seguinte relação vetorial:

$$B-A = (B-C) + (C-A) \quad (6.21)$$

Desenvolvendo e igualando os termos em  $\vec{I}$  e  $\vec{J}$  respectivamente:

$$b \cos \theta_2 = m \cos \theta_m + c \cos \theta_3 \quad (6.22)$$

$$b \sin \theta_2 = m \sin \theta_m + c \sin \theta_3 \quad (6.23)$$

Elevando ao quadrado as equações (6.22) e (6.23) e somando membro a membro, obtemos:



$$b^2 = m^2 + c^2 + 2mc(\cos\theta_m \cos\theta_3 - \text{sen}\theta_m \text{sen}\theta_3) \quad (6.24)$$

Rearranjando:

$$\cos(\theta_m - \theta_3) = (b^2 - m^2 - c^2) / 2mc \quad (6.25)$$

De modo semelhante:

$$\cos(\theta_m - \theta_2) = (b^2 + m^2 - c^2) / 2mb \quad (6.26)$$

Como  $\theta_m$  e  $m$  são conhecidos, as equações (6.25) e (6.26) determinam os ângulos  $\theta_2$  e  $\theta_3$ .

As equações que determinam as posições angulares são críticas. Pode-se ver que a equação (6.20) determina dois valores de  $\theta_m$  e que as equações (6.24) e (6.25) determinam dois valores de  $(\theta_m - \theta_2)$  e  $(\theta_m - \theta_3)$ . Portanto deve-se tomar o cuidado em selecionar os valores reais desses ângulos para o mecanismo em estudo; pode-se obter outros valores para uma configuração geométrica diferente.

A aceleração do ponto A pode ser facilmente determinada, como se segue:

$$\vec{r}_A = a \cos\theta_1 \vec{I} + a \text{sen}\theta_1 \vec{J} \quad (6.27)$$

Derivando duas vezes em relação ao tempo, obtemos:

$$\vec{A}_A = -a\omega_1^2 \cos\theta_1 \vec{I} - a\omega_1^2 \text{sen}\theta_1 \vec{J} \quad (6.28)$$

Com o intuito de determinar os esforços em A e B, será necessário ainda, a determinação da aceleração do centro de gravidade G2, conforme a figura 5.4, do componente AB do mecanismo.

A aceleração do ponto  $G_2$  é dada por [12]:

$$\vec{A}_{G_2} = \vec{A}_A + \dot{\vec{w}}_2 \wedge (G_2 - A) + \vec{w}_2 \wedge (\vec{w}_2 \wedge (G_2 - A)) \quad (6.29)$$

Desenvolvendo, obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{A}_{G_2} = & (-aw_1^2 \cos \theta_1 - \dot{w}_2 b \sin \theta_2 / 2 - w_2^2 b \cos \theta_2 / 2) \vec{I} \\ & + (-aw_1^2 \sin \theta_1 + \dot{w}_2 b \cos \theta_2 / 2 - w_2^2 b \sin \theta_2 / 2) \vec{J} \end{aligned} \quad (6.30)$$

### 6.2 Determinação dos Esforços nas Articulações A e B

A fim de determinar os esforços nas articulações A e B, será isolado inicialmente o componente AB, incluindo portanto as incógnitas  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $X_B$  e  $Y_B$  conforme mostra a figura 6.4.

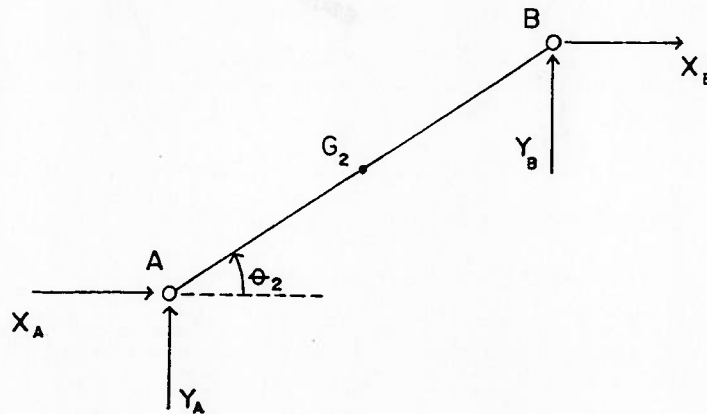


Figura 6.4 Diagrama de esforços (AB)

Aplicando o teorema do movimento do baricentro [12] para este componente, temos:

$$X_A + X_B = m_2 A_{G2x} \quad (6.31)$$

$$Y_A + Y_B = m_2 A_{G2y}$$

Aplicando o teorema do momento angular [12], lembrando que se trata de movimento plano e adotando como polo o centro de gravidade G2, obtemos:

$$X_A b \operatorname{sen} \theta_2 + Y_B b \operatorname{cos} \theta_2 - Y_A b \operatorname{cos} \theta_2 - X_B b \operatorname{sen} \theta_2 = 2J_2 \dot{\omega}_2 \quad (6.32)$$

Rearranjando:

$$(X_A - X_B) \operatorname{sen} \theta_2 + (Y_B - Y_A) \operatorname{cos} \theta_2 = 2J_2 \dot{\omega}_2 / b \quad (6.33)$$

Substituindo a equação (6.31) em (6.33), obtemos:

$$- 2X_B \operatorname{sen} \theta_2 + 2Y_B \operatorname{cos} \theta_2 = 2J_2 \dot{\omega}_2 / b - m_2 A_{G2x} \operatorname{sen} \theta_2 + m_2 A_{G2y} \operatorname{cos} \theta_2 \quad (6.34)$$

Para se obter a última equação, necessária para a determinação das incógnitas  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $X_B$  e  $Y_B$ , o componente BC será isolado do mecanismo conforme a figura 6.5, tomando-se o cuidado de respeitar a convenção já adotada para as incógnitas  $X_B$  e  $Y_B$ .

Aplicando o teorema do momento angular [12], analogamente ao realizado para o componente AB, e adotando como polo o ponto C (fixo), obtemos:

$$X_B c \operatorname{sen} \theta_3 - Y_B c \operatorname{cos} \theta_3 = J_3 \dot{\omega}_3 \quad (6.35)$$

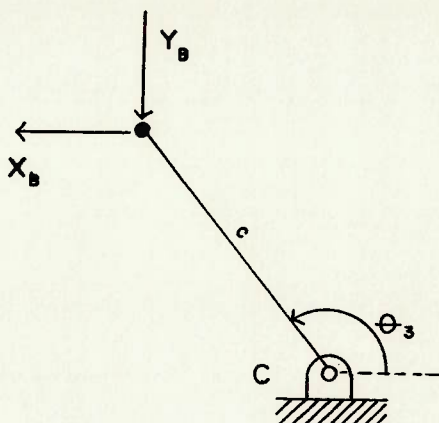


Figura 6.5 Diagrama de esforços (BC)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (6.34) e (6.35):

$$X_B = [m_2 \cos \theta_3 (b \dot{w}_2 / 12 - A_{G2X} \sin \theta_2 / 2 + A_{G2Y} \cos \theta_2 / 2) + (m_3 + m_3 / 3) c \dot{w}_3 \cos \theta_2] / \sin(\theta_3 - \theta_2) \quad (6.36)$$

$$Y_B = [m_2 \sin \theta_3 (b \dot{w}_2 / 12 - A_{G2X} \sin \theta_2 / 2 + A_{G2Y} \cos \theta_2 / 2) + (m_3 + m_3 / 3) c \dot{w}_3 \sin \theta_2] / \sin(\theta_3 - \theta_2) \quad (6.37)$$

Substituindo os valores de (6.36) e (6.37) em (6.31) obtemos os valores de  $X_A$  e  $Y_A$ , e por conseguinte, os esforços nas articulações A e B.

### 6.3 Determinação das deformações nos pontos médios dos componentes

Será determinado inicialmente a deformação no ponto médio do componente OA. A fim de facilitar o equacionamento, será feita uma transformação de coordenadas de modo que os esforços sejam divididos em duas componentes, uma na direção OA (axial) e a outra na direção perpendicular, conforme a figura 6.6.

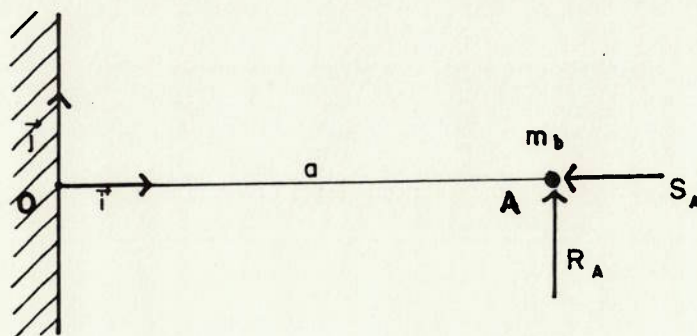


Figura 6.6 Diagrama de esforços transformados (OA)

Respeitando a convenção adotada para a determinação dos esforços, temos que:

$$R_A = X_A \operatorname{sen} \theta_1 - Y_A \operatorname{cos} \theta_1 \quad (6.36)$$

$$S_A = X_A \operatorname{cos} \theta_1 + Y_A \operatorname{sen} \theta_1 \quad (6.37)$$

A deformação no ponto médio será dada pela equação:

$$\epsilon_1 = \epsilon_{A1} + \epsilon_{F1} \quad (6.38)$$

onde

$\epsilon_1$  > deformação no ponto médio do componente 1 (OA)

$\epsilon_{A1}$  > deformação no ponto médio do componente 1 devido aos esforços axiais

$\epsilon_{F1}$  > deformação no ponto médio do componente 1 devido à flexão

A deformação  $\epsilon_{A1}$  é dada por:

$$\epsilon_{A1} = \epsilon_{i,n} + \epsilon_{a,t} \quad (6.39)$$

onde

$\epsilon_{i,n}$  = deformação devido à força de inércia

$\epsilon_{a,t}$  = deformação devido ao esforço ativo.

De acordo com a referência [46]:

$$\epsilon_{i,n} = (mb + 3m_1/8)aw_1^2/A_1E \quad (6.40)$$

$$\epsilon_{a,t} = - S_A/A_1E \quad (6.41)$$

onde E é o modulo de elasticidade do material dos componentes.

Substituindo as equações (6.40) e (6.41) em (6.39):

$$\epsilon_{A1} = (mb + 3m_1/8)aw_1^2/A_1E - S_A/A_1E \quad (6.42)$$

A deformação  $\epsilon_{F1}$  é dada, segundo a referência [46], por:

$$\epsilon_{F1} = - R_A n_1 a / 2I_1 E \quad (6.43)$$

onde  $n_1$  é a distância da linha neutra até a extremidade superior da seção transversal OA.

Substituindo as equações (6.42) e (6.43) em (6.38), obtemos:

$$\epsilon_{A_1} = (mb + 3m_1/8)aw_1^2/A_1E - S_A/A_1E - R_A n_1 a/2I_1E \quad (6.44)$$

A deformação no ponto médio do componente AB será obtido de forma análoga, como se segue (figura 6.7):

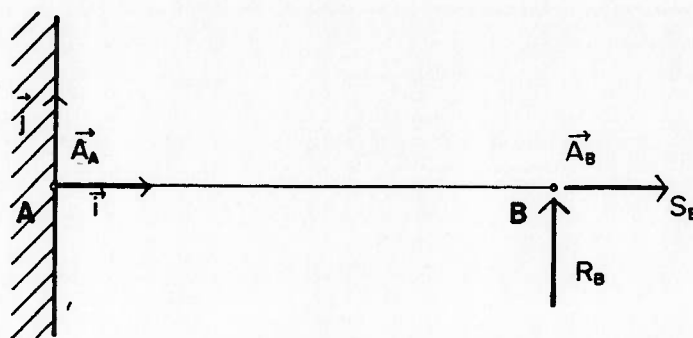


Figura 6.7 Diagrama de esforços transformados (AB)

Fazendo uma transformação de coordenadas mantendo a convenção adotada para os esforços, obtemos:

$$S_B = X_B \cos\theta_2 + Y_B \operatorname{sen}\theta_2 \quad (6.45)$$

$$R_B = -X_B \operatorname{sen}\theta_2 + Y_B \cos\theta_2 \quad (6.46)$$

e aplicando a mesma transformação de coordenadas para as acelerações:

$$\begin{aligned}
\vec{A}_A &= -aw_1^2 \cos\theta_1 \vec{I} - aw_1^2 \sin\theta_1 \vec{J} = \\
&= (-aw_1^2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - aw_1^2 \sin\theta_1 \sin\theta_2) \hat{i} + \\
&+ (-aw_1^2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 - aw_1^2 \sin\theta_1 \cos\theta_2) \hat{j} \quad (6.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A}_B &= (-aw_1^2 \cos\theta_1 - bw_2^2 \cos\theta_2 - b\dot{w}_2 \sin\theta_2) \vec{I} + \\
&+ (-aw_1^2 \sin\theta_1 - bw_2^2 \sin\theta_2 + b\dot{w}_2 \cos\theta_2) \vec{J} = \\
&= (-aw_1^2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - aw_1^2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 - bw_2^2) \hat{i} + \\
&+ (+aw_1^2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 - aw_1^2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 + bw_2^2) \hat{j} \quad (6.48)
\end{aligned}$$

A deformação no ponto médio será dada, de forma análoga ao realizado para o componente 1, por:

$$\epsilon_2 = \epsilon_{A2} + \epsilon_{F2} \quad (6.49)$$

onde de acordo com a referência [46]:

$$\epsilon_{A2} = [S_B + 3m_2 w_2^2 b / 8 + m_2 a w_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) / 2] / A_2 E \quad (6.50)$$

$$\epsilon_{F2} = [-R_B b + m_2 b a w_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) / 4 + 5m_2 b^2 \dot{w}_2 / 24] n_2 / 2I_2 E \quad (6.51)$$

onde  $n_2$  é a distância da linha neutra até a extremidade superior da secção transversal do componente 2 (AB).

A deformação no ponto médio do componente 3 (BC), também será obtido de forma análoga ao realizado para o componente 1, obedecendo a convenção adotada para as direções e sentidos dos esforços, como se segue (figura 6.8):



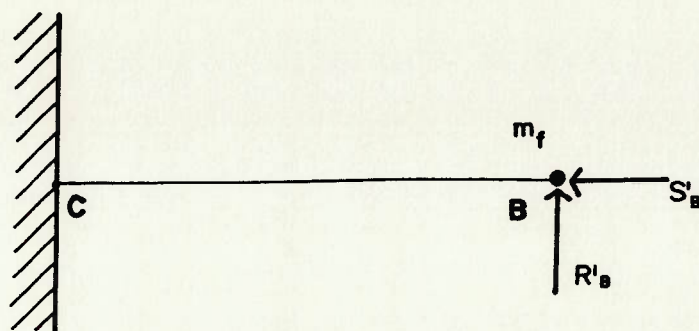


Figura 6.8 Diagrama de esforços transformados (BC)

$$R'_B = X_B \operatorname{sen} \theta_3 - Y_B \operatorname{cos} \theta_3 \quad (6.52)$$

$$S'_B = X_B \operatorname{cos} \theta_3 + Y_B \operatorname{sen} \theta_3 \quad (6.53)$$

$$\vec{A}_B = c w_3^2 \vec{i} + c \dot{w}_3 \vec{j} \quad (6.54)$$

A deformação no ponto médio do componente 3 (BC), de acordo com a referência [46], será dada pela equação:

$$\epsilon_3 = \epsilon_{A3} + \epsilon_{F3} \quad (6.55)$$

onde

$$\epsilon_{A3} = [-S'_B + (m_3 + 3m_3/8)w_3^2 c/8]/A_3 E \quad (6.56)$$

$$\epsilon_{F3} = [-R'_B c + (m_3 + 5m_3/24)c^2 \dot{w}_3]n_3/2I_3 E \quad (6.57)$$

onde  $n_3$  é a distância da linha neutra até a extremidade superior da seção transversal do componente 3 (AB).

A partir das equações apresentadas neste capítulo foi feito um programa (MECQBAR), utilizando o aplicativo LOTUS 123, para obter

as deformações nos pontos médios de um mecanismo de quatro barras, obedecendo às hipóteses mencionadas no desenvolvimento das equações anteriores.

Utilizando este programa foram obtidos os resultados para todas as variáveis utilizadas nas equações em função da posição do mecanismo ( $\theta_1$ ). A descrição do mecanismo utilizado, os resultados obtidos com o programa MECQBAR, bem como uma análise comparativa com os resultados experimentais e os obtidos com um modelo de análise baseado no método dos elementos finitos serão apresentados no capítulo seguinte.

## 7 - ANÁLISE COMPARATIVA DOS RESULTADOS

A fim de fazer uma análise comparativa entre os resultados obtidos com o programa MECQBAR, os resultados obtidos por Turcic nas referências [48 e 49] utilizando o método dos elementos finitos discutido nos capítulos 4 e 5, e os resultados experimentais da referência [49], analisou-se as deformações nos pontos médios dos componentes de um mecanismo plano de quatro barras quando é imposta uma rotação constante à manivela.

### 7.1 - Descrição do Mecanismo Utilizado

O mecanismo analisado, mostrado na figura 6.1, é feito de fitas de alumínio de 1,6 mm de espessura e 25,4 mm de largura (para a manivela, componente OA, foi usado uma fita com 2,5 vezes a espessura de 1,6mm). O acoplador (componente AB) é conectado à manivela e ao seguidor através de rolamentos esféricos montados em luvas. A massa total dos rolamentos e das luvas em cada extremo do acoplador é de  $m_b = 0,0452$  kg no ponto A e  $m_s = 0,0375$  kg no ponto B, respectivamente. Convém ressaltar que estas massas para fins de análise tanto através do programa MECQBAR como pelo método dos elementos finitos são consideradas concentradas nos pontos A e B respectivamente.

As deformações nos pontos médios dos componentes do mecanismo foram obtidas para uma velocidade angular constante da manivela de  $\omega_1 = 32,3$  rad/s.

As dimensões dos componentes, bem como os outros parâmetros necessários para a definição completa do mecanismo de quatro barras utilizado estão na tabela 7.1.

Tabela 7.1 Parâmetros do mecanismo de quatro barras

Parâmetro	Manivela	Acoplador	Seguidor
Área	1,07 cm <sup>2</sup>	0,406 cm <sup>2</sup>	0,406 cm <sup>2</sup>
Comprimento	10,80 cm	27,94 cm	27,05 cm
Momento de Inércia	1,62x10 <sup>-2</sup> cm <sup>4</sup>	8,67x10 <sup>-4</sup> cm <sup>4</sup>	8,67x10 <sup>-4</sup> cm <sup>4</sup>
Distância entre os apoios (OC)	= 25,4 cm		
Módulo de elasticidade (E)	= 7,1x10 <sup>7</sup> kPa		
Densidade em massa (ρ)	= 2,71x10 <sup>-3</sup> kg/cm <sup>3</sup>		

### 7.2 - Modelo para Análise com o Método dos Elementos Finitos

Para as dimensões apresentadas no item 7.1, com o comprimento prevalecendo sobre as dimensões largura e espessura, cada um dos componentes pode ser modelado por elementos finitos do tipo viga.

A matriz de inércia e a matriz de rigidez para um elemento do tipo viga de Euler são dadas de acordo com as referências [7, 56 e 57] por:

$$[m^*] = \rho AL \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 13/35 & 11L/210 & 0 & 9/70 & -13L/420 \\ 0 & 11L/210 & L^2/105 & 0 & 13L/420 & -L^2/140 \\ 1/6 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 9/70 & 13L/420 & 0 & 13/35 & -11L/210 \\ 0 & -13L/420 & -L^2/140 & 0 & -11L/210 & L^2/105 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

$$[k^*] = E/L \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 12I/L^2 & 6I/L & 0 & -12I/L^2 & 6I/L \\ 0 & 6I/L & 4I & 0 & -6I/L & -2I \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -12I/L^2 & -6I/L & 0 & 12I/L^2 & -6I/L \\ 0 & 6I/L & -2I & 0 & -6I/L & 4I \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

onde:

$\rho$  = densidade em massa

$A$  = área da seção transversal

$L$  = comprimento do elemento

$E$  = módulo de elasticidade

$I$  = momento de inércia em relação à linha neutra

A matriz de transformação de coordenadas  $[T]$  é definida por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

e suas derivadas como:

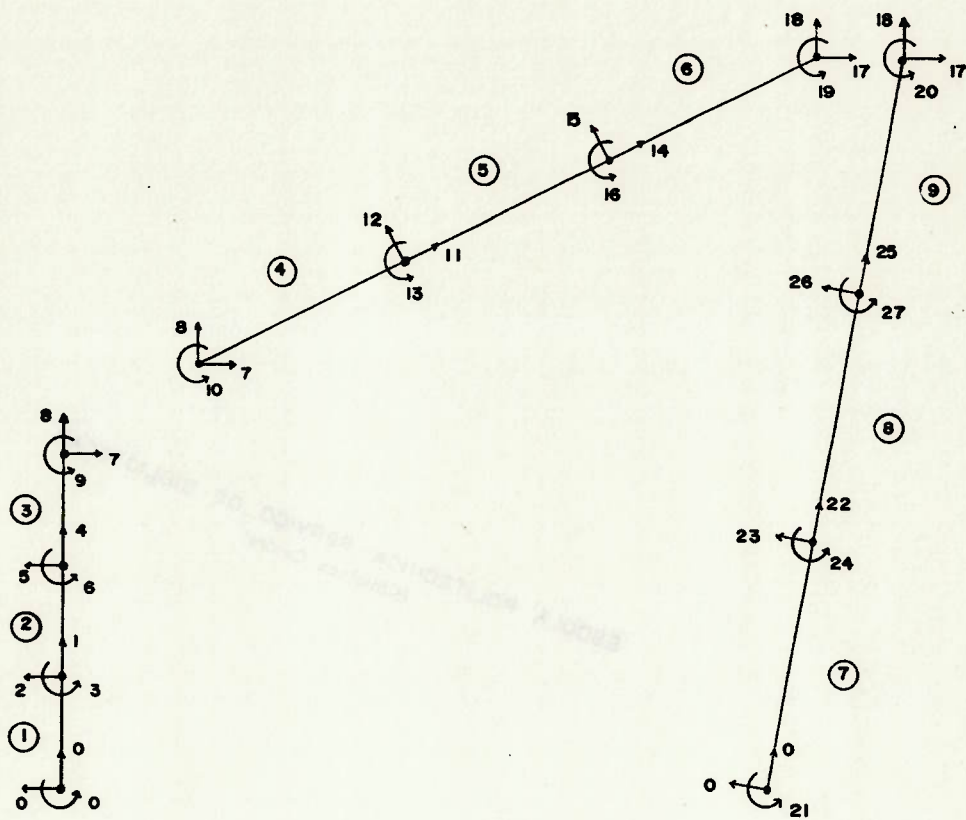


Figura 7.1 Modelo de elementos finitos para o mecanismo de quatro barras

$$[\dot{T}] = \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\text{sen}\theta & -\text{cos}\theta \\ \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$[\ddot{T}] = \ddot{\theta} \begin{bmatrix} -\text{sen}\theta & -\text{cos}\theta \\ \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta \end{bmatrix} - \dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \text{cos}\theta \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

onde  $\theta$  é a posição angular do componente.

A partir das equações anteriores é possível obter todas as matrizes que aparecem na equação diferencial do movimento para um elemento. As matrizes de cada um dos componentes e do mecanismo inteiro são então obtidas a partir da união das matrizes dos elementos, como mostrado no capítulo 4.

A figura 7.1 ilustra o modelo de elementos finitos utilizado para o mecanismo elástico de quatro barras. O modelo é composto de nove elementos do tipo viga e vinte e sete graus de liberdade.

### 7.3 - Resultados

Os resultados da análise do mecanismo de quatro barras, descrito no ítem 7.1, através do programa MECQBAR (baseado no desenvolvimento apresentado no capítulo anterior), estão apresentados no apêndice G. Estes resultados mostram os valores de todas as variáveis utilizadas, no desenvolvimento apresentado no capítulo 6, em função do ângulo da manivela  $\theta_1$ .

A partir destes resultados foram montados gráficos que mostram a relação entre a deformação no ponto médio do componente com a posição da manivela ( $\theta_1$ ). Assim as figuras 7.2, 7.3 e 7.4 mostram

# DEFORMACAO DO COMPONENTE OA (CORPORIG)

Figura 7.2

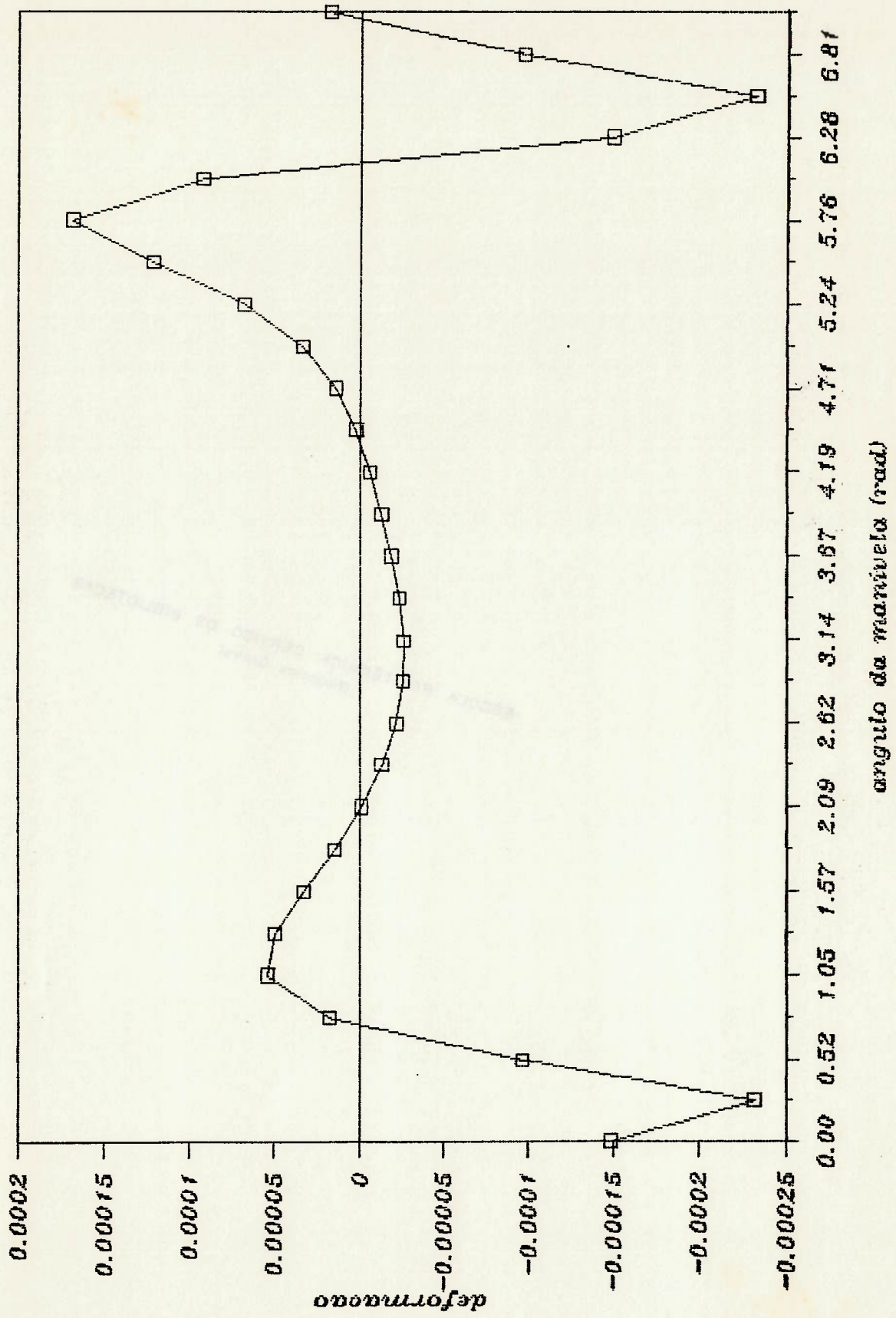




Figura 7.3

## DEFORMAÇÃO DO COMPONENTE AB (CORPORIG)

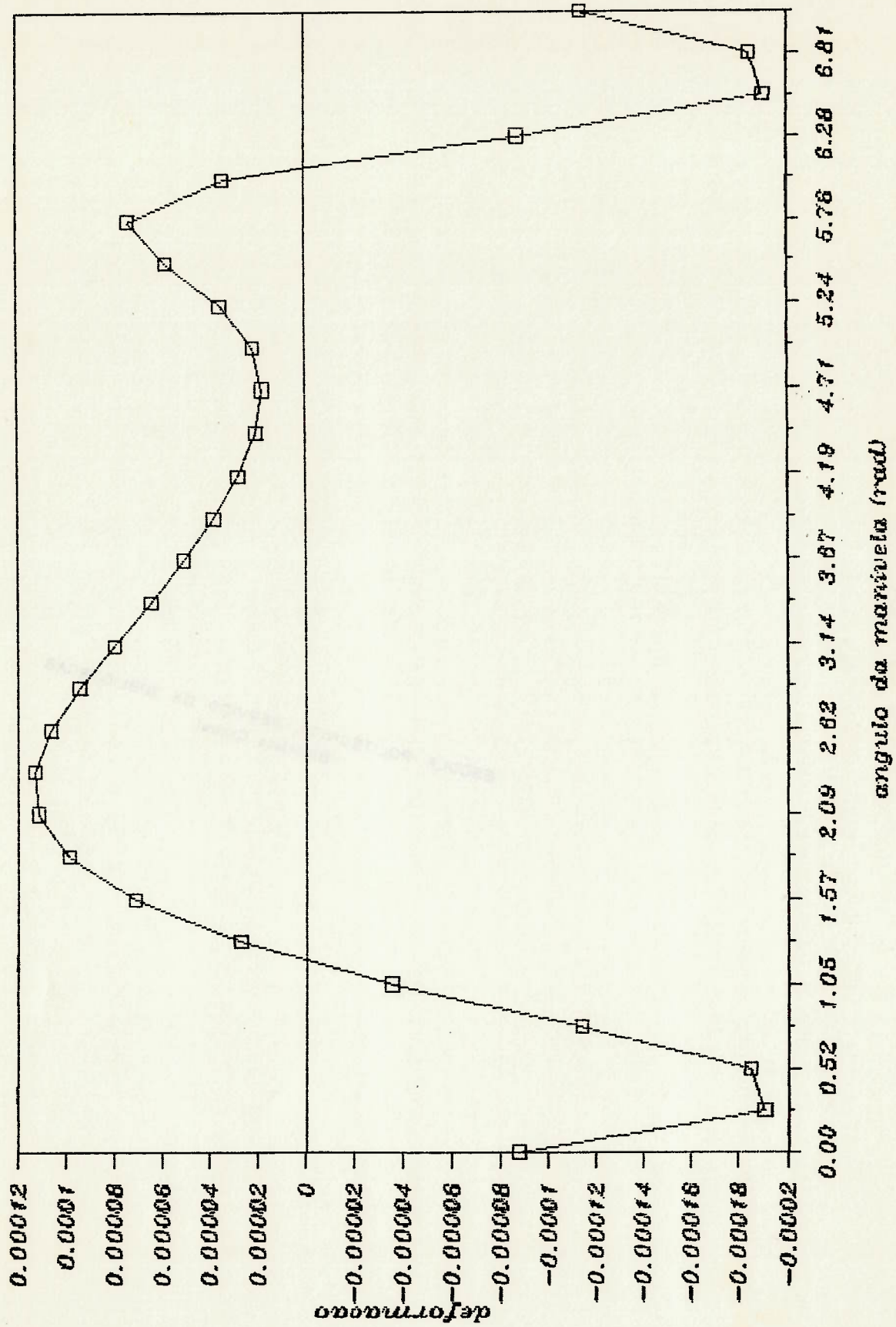
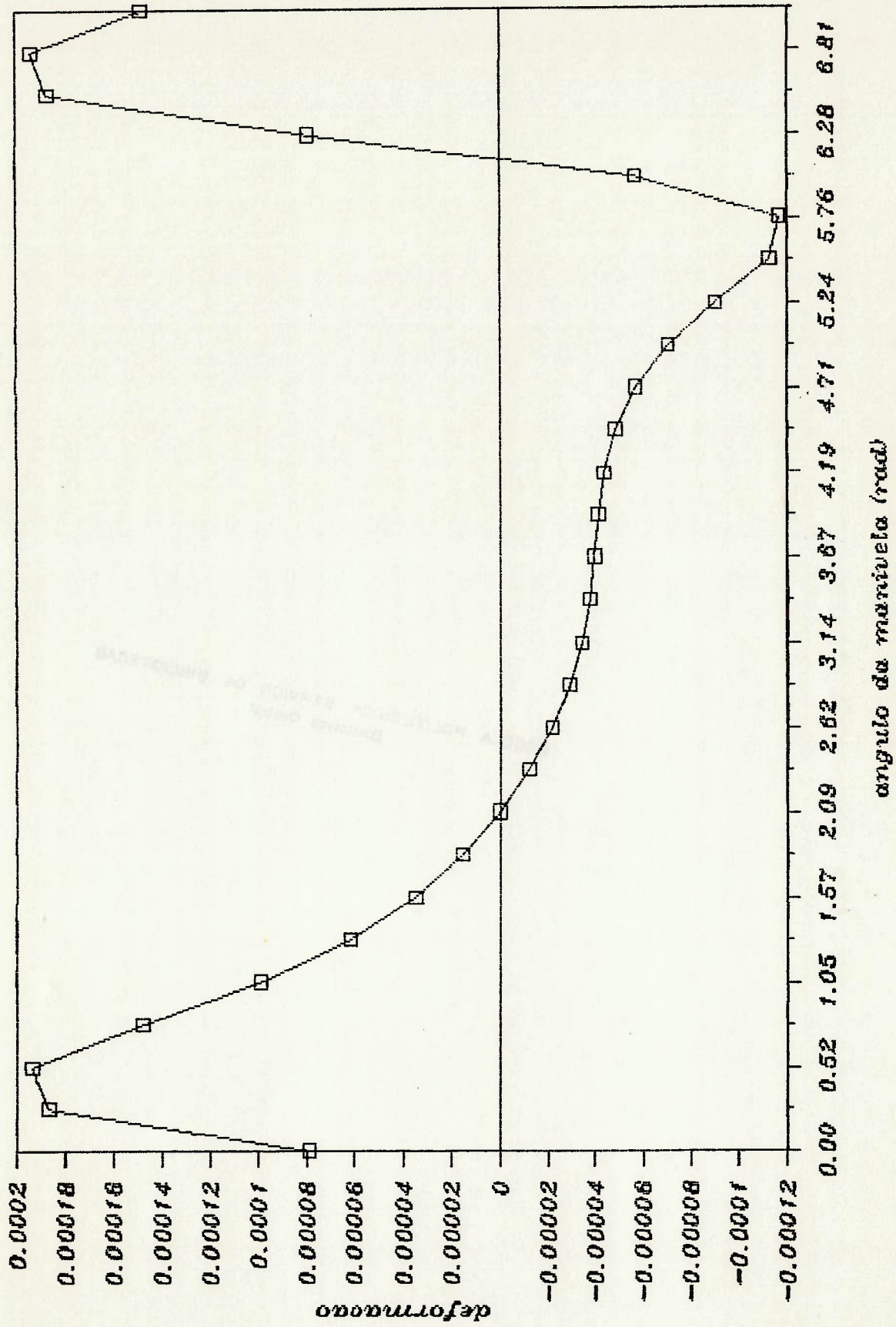


Figura 7.4

## DEFORMAÇÃO DO COMPONENTE BC (CORPORIG)



os gráficos da deformação no ponto médio em função de  $\theta_1$ , para os componentes DA, AB e BC respectivamente.

A partir dos resultados obtidos por Turcic nas referências [48 e 49], para um processo baseado no método dos elementos finitos, e utilizando o mesmo mecanismo descrito no item 7.1, foram montadas as figuras 7.5 e 7.6 que mostram os gráficos da deformação no ponto médio em função de  $\theta_1$ , para os componentes AB e BC respectivamente.

Ainda a partir da referência [49], ressaltando que Turcic se utilizou do mesmo processo desenvolvido por Alexander e Lawrence [3] para obter seus resultados experimentais, foram montadas as figuras 7.7 e 7.8 que mostram as deformações, obtidas experimentalmente, no ponto médio em função de  $\theta_1$ , para os componentes AB e BC respectivamente.

#### 7.4 - Análise Comparativa

As principais hipóteses, quanto às características dinâmicas do movimento, adotadas pelos dois modelos analíticos estudados são:

- articulações sem atrito e sem folga
- o movimento do mecanismo é plano
- velocidade da manivela constante

Ainda para o modelo baseado no método dos elementos finitos os deslocamentos elásticos a partir da posição de equilíbrio de corpo rígido, como definido no capítulo 4, são considerados pequenos, permitindo-se então utilizar o princípio da superposição dos efeitos. Já para o modelo apresentado no capítulo 6, apesar de se calcularem as deformações nos pontos médios dos componentes, estes são considerados rígidos para fins de análise (determinação de características cinemáticas e dinâmicas do mecanismo).

Figura 7.5

## DEFORMAÇÃO DO COMPONENTE AB (MEF)

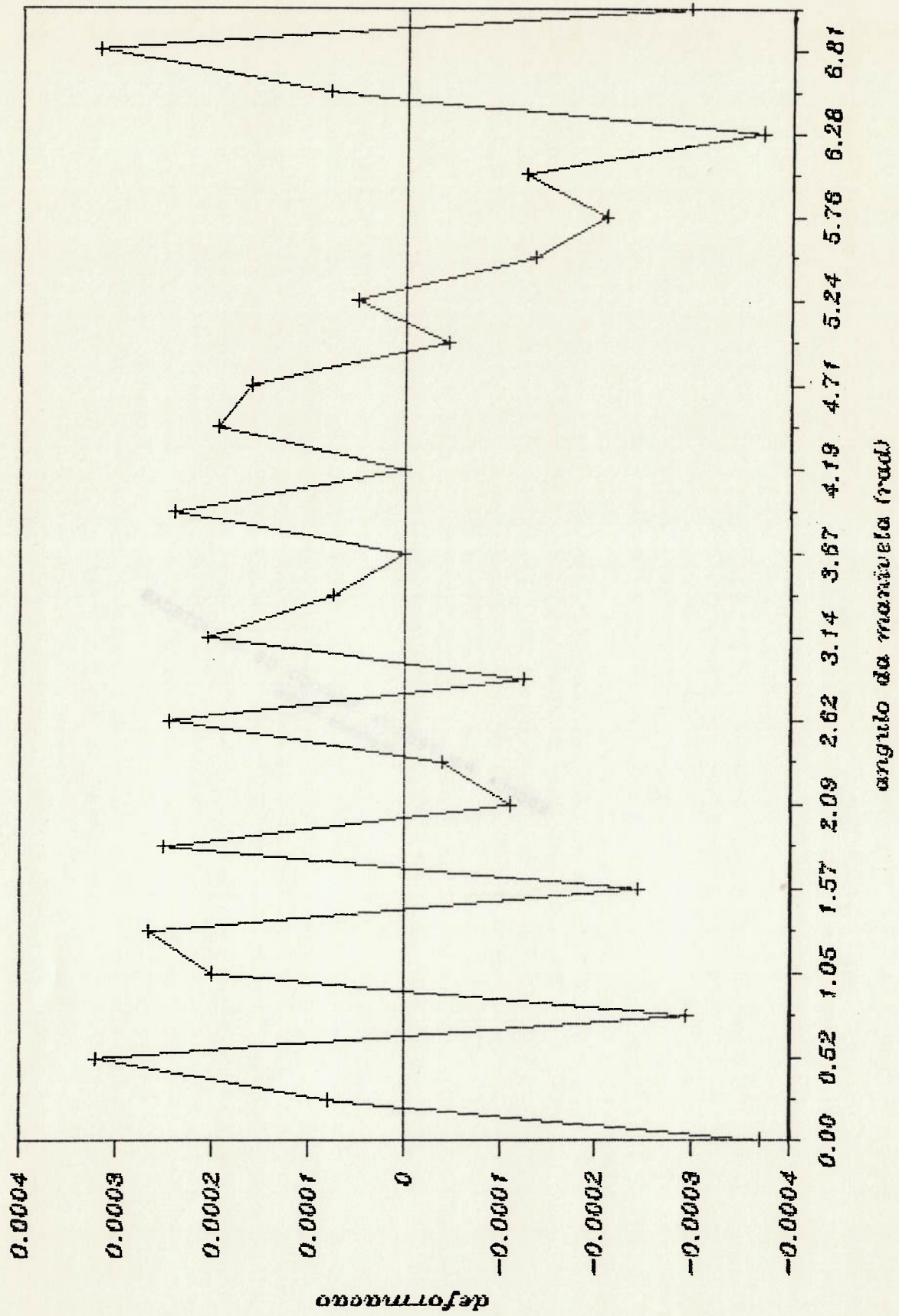


Figura 7.6

## DEFORMAÇÃO DO COMPONENTE BC (MEF)

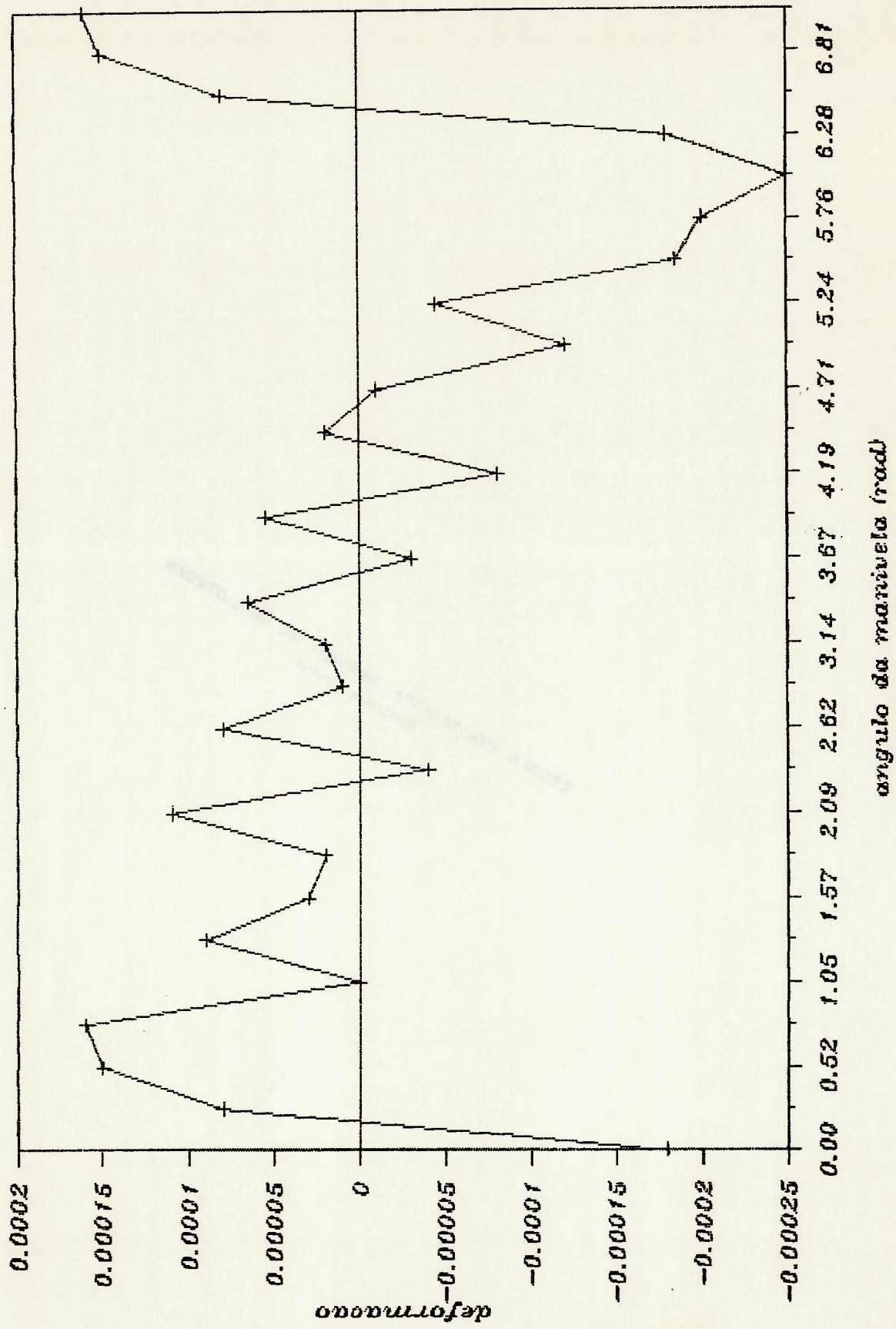
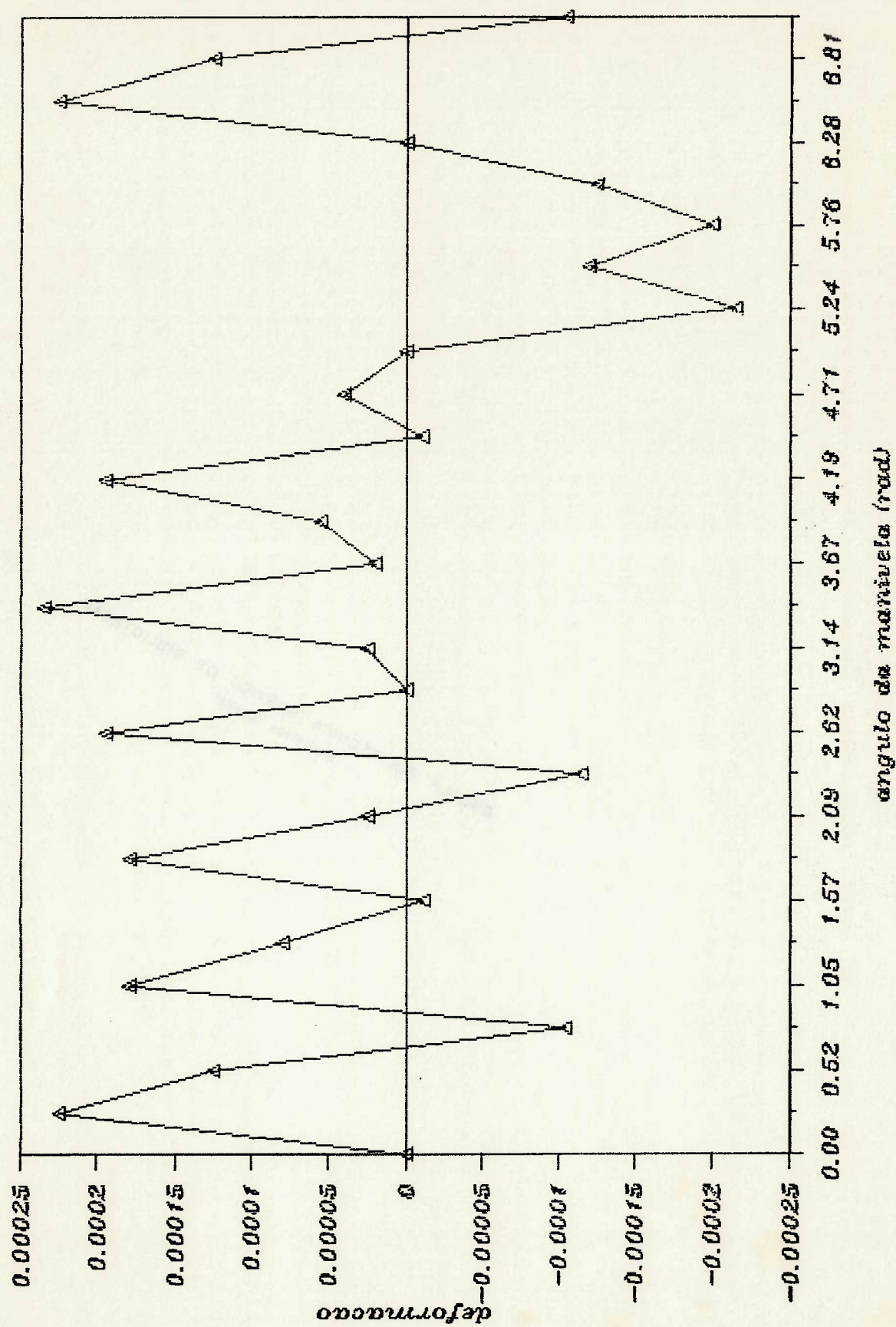


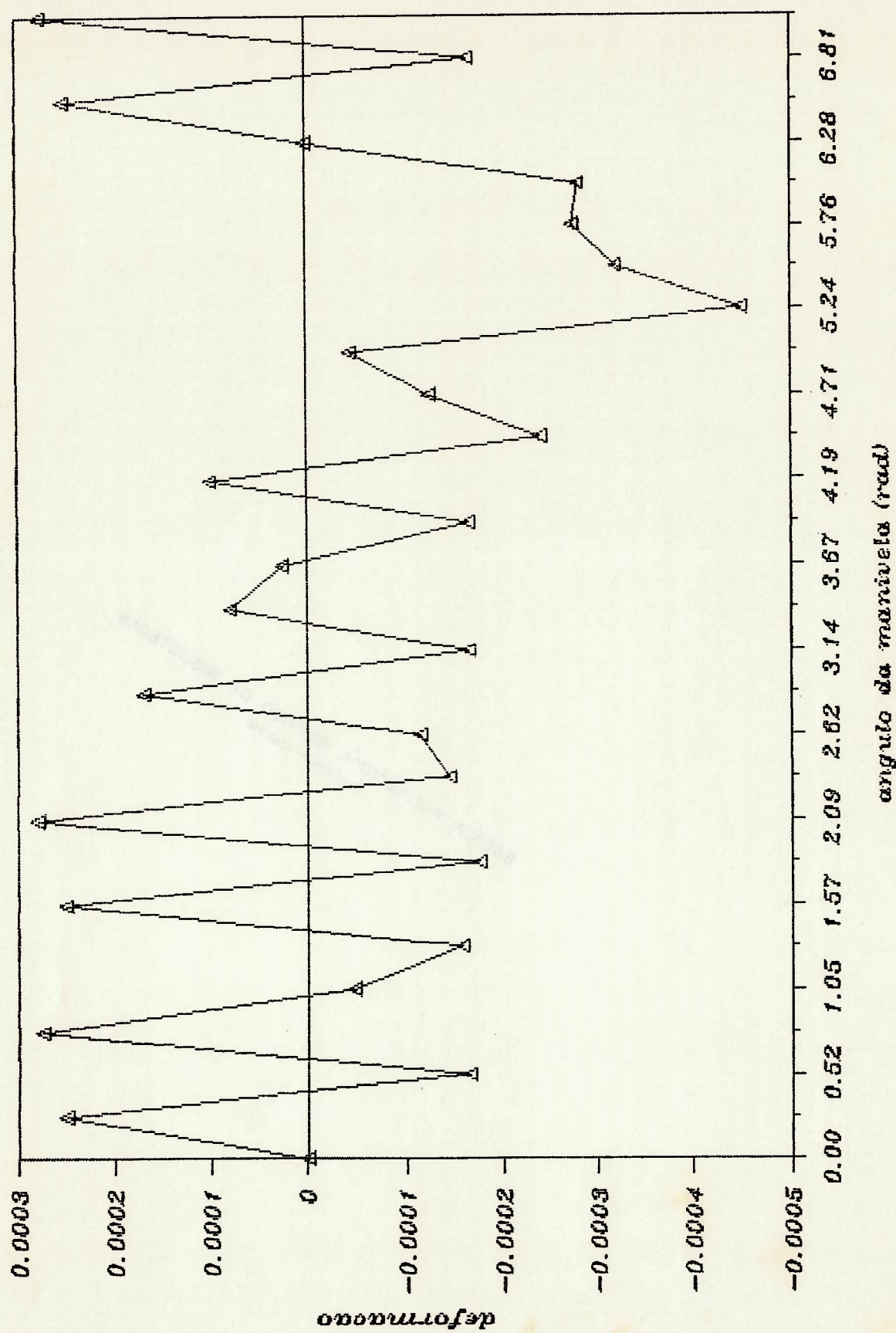
Figura 7.7

## DEFORMACAO DO COMPONENTE AB (EXP)



# DEFORMACAO DO COMPONENTE BC (EXP)

Figura 7.8



É importante notar que ao tomar como hipótese "pequenos deslocamentos" para o modelo baseado no método dos elementos finitos, para elementos do tipo viga, implica pressupor que os deslocamentos transversais são independentes dos deslocamentos e esforços axiais (observar a matriz de rigidez, equação (7.2)). Entretanto, uma força axial compressiva tende a provocar um aumento no deslocamento transversal. Uma força axial de tração implica um comportamento inverso. Assim sendo, ao analisar os resultados deve ser lembrada a hipótese adotada (pequenos deslocamentos) para o modelo utilizado (método dos elementos finitos).

A partir dos resultados obtidos, próprios e da bibliografia pesquisada, foram montadas as figuras 7.9 e 7.10. Elas apresentam, num mesmo gráfico, para o acoplador (AB) e para o seguidor (BC) respectivamente, a deformação no ponto médio do componente segundo os resultados obtidos com o programa MECQBAR, os resultados com o modelo baseado no método dos elementos finitos e os resultados experimentais.

Analisando as curvas das figuras 7.9 e 7.10, observa-se que mesmo desprezando os termos de acoplamento entre a deformação e o movimento de "corpo rígido", o modelo baseado no método dos elementos finitos forneceu um resultado melhor que o obtido com o programa MECQBAR, quando comparado com os resultados experimentais.

Os resultados obtidos com o programa MECQBAR não oscilam como os experimentais nem apresentam os picos de deformações. Observando este efeito decidiu-se calcular a frequência natural do acoplador (AB) e do seguidor (BC) e comparar com a frequência medida experimentalmente.

A frequência natural de vibração do acoplador (AB) e do seguidor (BC) segundo a referência [19], considerando cada componente como uma viga biapoiada, é dada por:



Figura 7.9

DEFORMACAO DO COMPONENTE AB (CONJ)

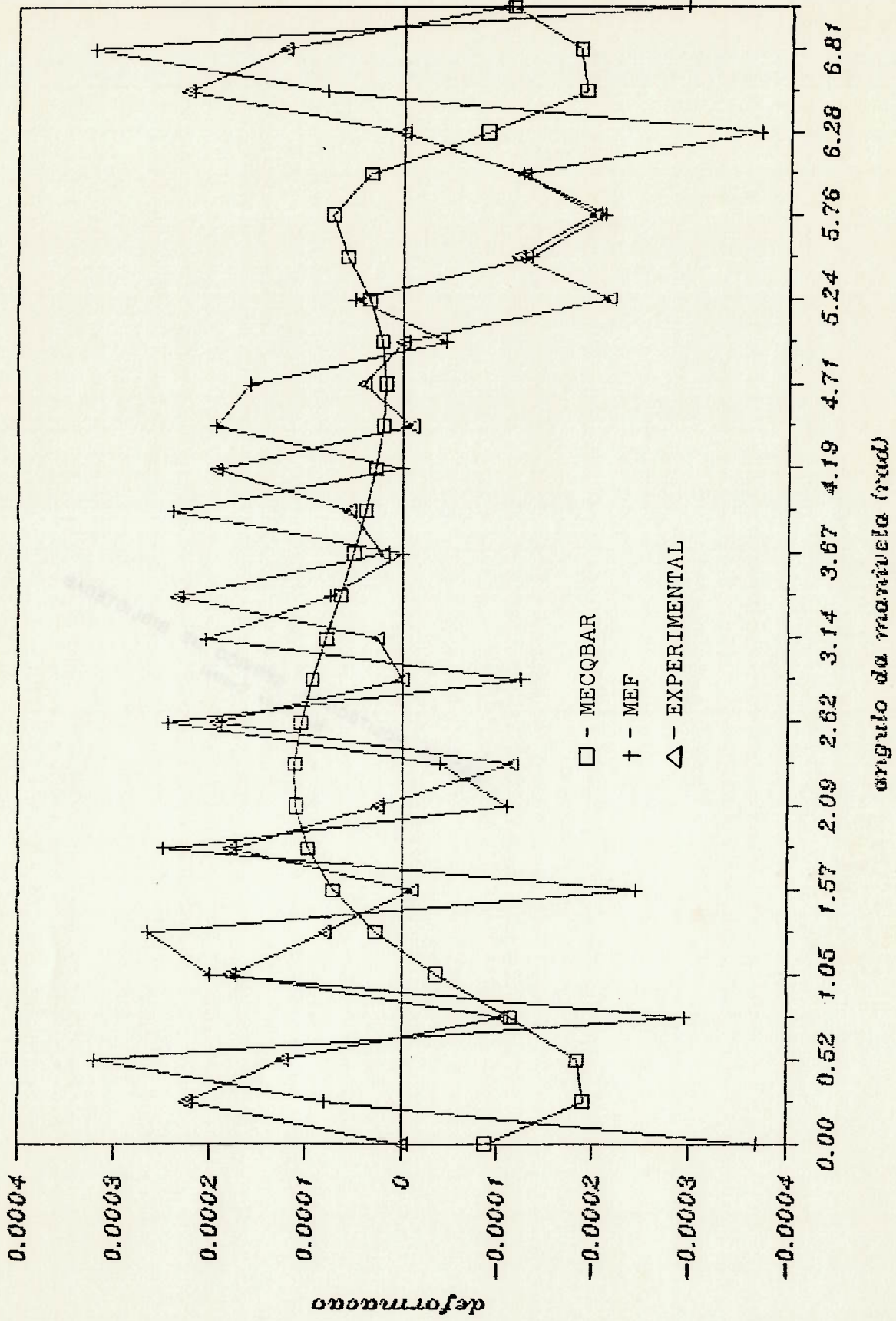
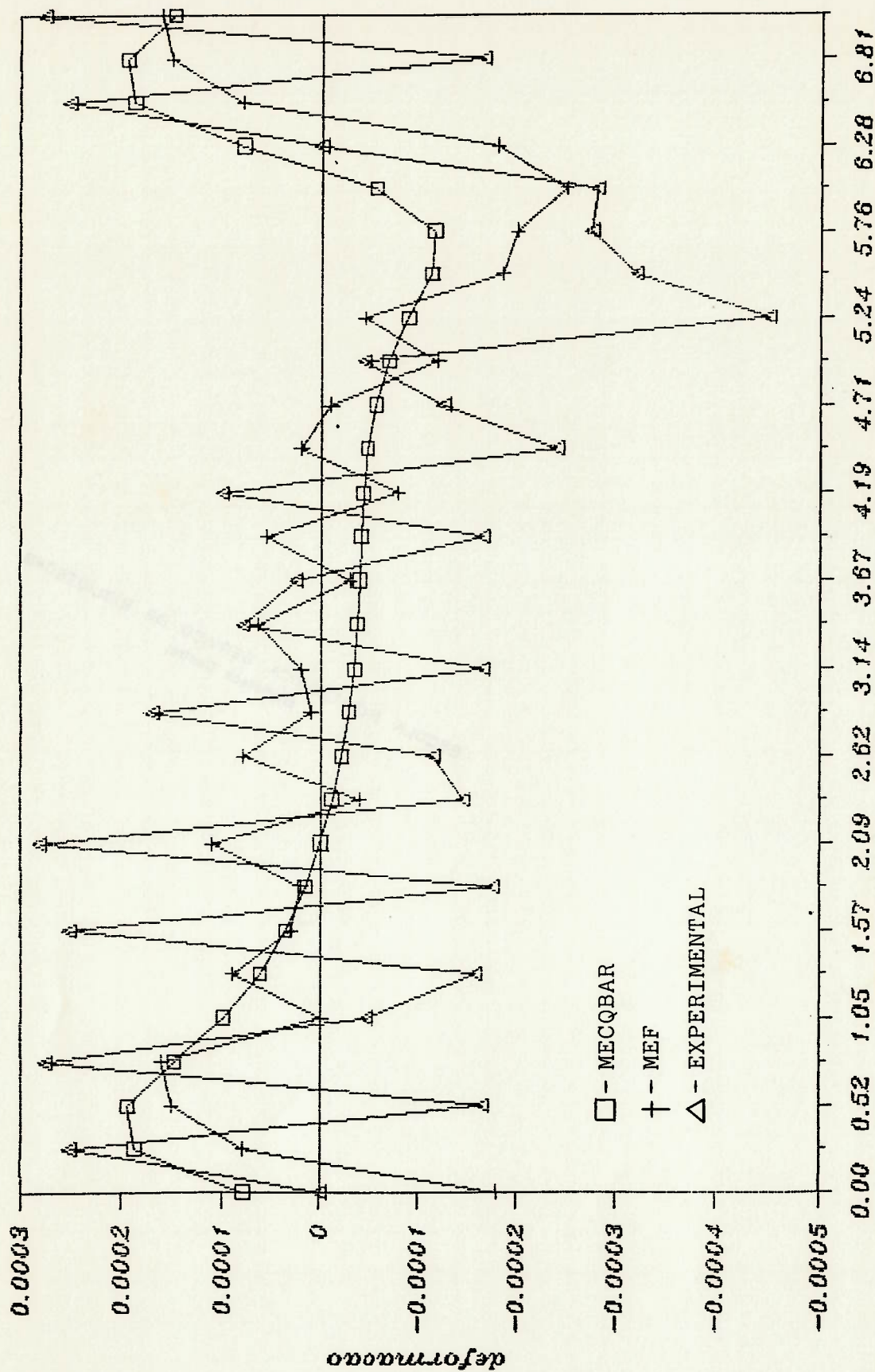


Figura 7.10

DEFORMAÇÃO DO COMPONENTE BC (CONJ)



ângulo da manivela (rad)

$$w_n = n^2 \pi^2 \sqrt{EI/mL^3}$$

(7.6)

onde:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Calculando a frequência natural de ordem mais baixa para o acoplador e para o seguidor segundo a equação (7.6), obtemos:

$$w_n(AB) = 298,2 \text{ rad/s} = 47,5 \text{ Hz}$$

$$w_n(BC) = 318,1 \text{ rad/s} = 50,6 \text{ Hz}$$

Analisando as figuras 7.7 e 7.8, obtemos as frequências de vibração medidas experimentalmente para o acoplador e para o seguidor respectivamente.

$$w_{ex}(AB) = 274,7 \text{ rad/s} = 43,7 \text{ Hz}$$

$$w_{ex}(BC) = 307,0 \text{ rad/s} = 48,9 \text{ Hz}$$

Comparando então os valores das frequências naturais com os valores obtidos experimentalmente, nota-se que os componentes estão vibrando (basicamente no primeiro modo), o que não é considerado no programa MECQBAR, pois os componentes são considerados rígidos. Assim sendo, na medida em que o mecanismo opera em velocidades que ocasionam a vibração de seus componentes, uma análise do tipo da apresentada no capítulo 6 (MECQBAR), se mostra insuficiente, inclusive fornecendo resultados de deformações abaixo dos reais (experimentais). Portanto, pelo menos para este exemplo particular, nota-se a importância de se ter um método mais acurado, como o modelo baseado no método dos elementos finitos, para a determinação das deformações e tensões nos componentes de um mecanismo.

Analisando as frequências dos componentes segundo o modelo dos elementos finitos para o mecanismo, observa-se que elas são um pouco maiores que as obtidas experimentalmente. Isto é notado nas figuras 7.9 e 7.10 onde se comparam todas as curvas obtidas. Nota-se ainda que a curva baseada no modelo dos elementos finitos, e a obtida experimentalmente estão fora de fase. Este efeito não é muito relevante sob o ponto de vista de projeto, desde que as amplitudes estão em razoável correspondência. A discordância obtida para os valores das frequências pode ser devida ao fato de que a discretização pelo método dos elementos finitos leva a modelos mais rígidos.

## 8 - CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O objetivo deste trabalho foi apresentar a evolução técnica dos procedimentos utilizados para análise dinâmica de mecanismos elásticos, bem como, estudar um modelo de análise baseado no método dos elementos finitos.

Para tanto foi realizada uma pesquisa bibliográfica, a partir da qual, foi apresentado uma evolução histórica das pesquisas, ressaltando as duas principais linhas de estudo adotadas pelos pesquisadores da área.

Dentro dos procedimentos onde os parâmetros são discretizados, estudou-se um modelo baseado na teoria dos elementos finitos, inicialmente desenvolvido por Midha [28], e a seguir aprimorado por Turcic [47].

Foi desenvolvido ainda um programa (MECQBAR) com o intuito de poder comparar os resultados obtidos por Turcic [49] e Alexander e Lawrence [3] para um mecanismo de quatro barras particular com o método tradicional de análise dinâmica de mecanismos, descrito no capítulo 6.

O mecanismo de quatro barras estudado, bem como a discretização utilizada para o modelo baseado na teoria dos elementos finitos, estão apresentados no capítulo 7. Foram ainda construídos gráficos mostrando a deformação no ponto médio dos componentes para este mecanismo particular a partir dos resultados experimentais, dos resultados obtidos por Turcic com o modelo baseado no método dos elementos finitos e dos resultados obtidos com o programa MECQBAR.

A partir da análise destes resultados observou-se que, pelo menos para algumas velocidades do mecanismo, onde os componentes começam a vibrar, aproximando-se da ressonância, os resultados obtidos com o método tradicional podem diferir bastante da realidade, sendo, portanto, necessário um modelo que possa

representar estes efeitos de forma mais acurada, como o modelo baseado na teoria dos elementos finitos estudado.

Em termos de trabalhos futuros, com o intuito principal de dar continuidade a este trabalho introdutório, podem-se destacar os seguintes itens:

- (1) - elaboração de um programa de computador a partir do modelo baseado no método dos elementos finitos estudado.
- (2) - estudar a viabilidade de incluir no modelo os termos da equação (4.66) que foram desprezados.
- (3) - inclusão do efeito de amortecimento no referido modelo.
- (4) - generalização do método de análise, de modo a poder incluir os efeitos de folgas e atrito nas articulações do mecanismo.

Espera-se ter desenvolvido um texto introdutório sobre a análise dinâmica de mecanismos elásticos. Também se espera, a partir dos estudos efetuados, continuar a realizar pesquisas sobre o tema, de modo a contribuir, embora que modestamente, para o avanço dos estudos nesta área em nosso país.

9 - REFERÊNCIAS

- 1) ALBALA, H. Displacement analysis of the general n-bar, single-loop, spatial linkage: part I. Transactions of the ASME. Journal of Mechanical Design, New York, 104(2):520-5, apr.1982.
- 2) \_\_\_\_\_. Displacement analysis of the general n-bar, single-loop, spatial linkage: part II. Transactions of the ASME. Journal of Mechanical Design, New York, 104(2):520-5, apr. 1982.
- 3) ALEXANDER, R.M.; LAWRENCE, K.L. An experimental investigation of the dynamic response of an elastic mechanism. Transactions of the ASME. Series B: Journal of Engineering for Industry, New York, 95(1):268-74, feb.1974.
- 4) ALLEN, R.L.; HARREL J.P. Connection force analysis of mechanisms described by explicit equations of motion in generalized coordinates. Transactions of the ASME. Journal of Mechanical Design, New York, 104(1):168-74, jan.1982.
- 5) ALMEIDA, M.T. Vibrações mecânicas para engenheiros. São Paulo, Edgard Blücher, 1987. 400p.
- 6) BAGHAT, B.M. Finite element vibrational analysis of planar mechanisms. Mechanism and Machine Theory, Oxford, 11(1):47-71, 1976.
- 7) BATHE, K.J.; WILSON E.L. Numerical methods in finite element analysis. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1976. 528p.
- 8) \_\_\_\_\_. et alii. SAP IV: a structural analysis program for static and dynamic response of linear systems. Berkeley, University of California, College of Engineering, 1974. 1v. (Earthquake Engineering Research Center. Report EERC 73-11).
- 9) BERMAN, M.S.; GOMIDE, F.M. Cálculo tensorial e relatividade geral. 2.ed. São Paulo, McGraw Hill, 1987. 100p.

- 10) CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. Dynamics of structures. Tokyo, McGraw Hill, 1975. 634p.
- 11) COOK, R.D. Concepts and applications of finite element analysis. New York, John Wiley & Sons, 1974. 402p.
- 12) DESLOGUE, E.A. Classical mechanics. New York, John Wiley & Sons, 1982. v.1.
- 13) DUBOWSKY, S.; YOUNG, S.C. An experimental and analytical study of connection forces in high-speed mechanisms. Transactions of the ASME. Series B: Journal of Engineering for Industry, New York, 97(4):1166-74, nov.1975.
- 14) ERDMAN, A.G.; SANDOR, G.N. Kineto-elastodynamics - a review of the state of the art and trends. Mechanism and Machine Theory, Oxford, 7(1):19-33, 1972.
- 15) \_\_\_\_\_. et alli. A general method for kineto-elastodynamic analysis and synthesis of mechanisms. Transactions of the ASME. Series B: Journal of Engineering for Industry, New York, 94(4):1193-1205, nov.1972.
- 16) FREEMAN, R.A.; TESAR, D. The generalized coordinate selection for the dynamics of complex planar mechanical systems. Transactions of the ASME. Journal of Mechanical Design, New York, 104(1):206-17, jan.1982.
- 17) GALLAGHER, R.H. Finite element analysis: fundamentals. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1975. 420p.
- 18) GOLEBIEWSKI, E.P.; SADLER, J.P. Analytical and experimental investigation of elastic slider-crank mechanisms. Transactions of the ASME. Series B: Journal of Engineering for Industry, New York, 98(4):1266-9, nov.1976.
- 19) HARRIS, C.M.; CREDE, C.E. Shock and vibration handbook. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1976.



- 20) IMAM, I.; SANDOR, G.N.; KRAMER, S.N. Deflection and stress analysis in high-speed planar mechanisms with elastic links. Transactions of the ASME. Series B: Journal of Engineering for Industry, New York, 95(2):541-8 may.1973.
- 21) JASINSKI, P.W.; LEE, H.C.; SANDOR, G.N. Vibrations of elastic connecting rod of a high-speed slider-crank mechanism. Transactions of the ASME. Series B: Journal of Engineering for Industry, New York, 93(2):636-44, may.1971.
- 22) JANDRASITS, W.G.; LOWEN, G.G. The elastic-dynamic behavior of a counterweighted rocker link with an overhanging endmass in a four-bar linkage - part I - theory. Transactions of the ASME. Journal of Mechanical Design, New York, 101(1):77-88, jan.1979.
- 23) \_\_\_\_\_. The elastic-dynamic behavior of a counterweighted rocker link with an overhanging endmass in a four-bar linkage - part II - application and experiment. Transactions of the ASME. Journal of Mechanical Design, New York, 101(1):89-98, jan.1979.
- 24) KOHLI, D.; SANDOR, G.N. Lumped parameter approach for kineto-elastodynamic analysis of elastic spatial mechanisms. s.n.t.
- 25) LOWEN, G.G.; JANDRASITS, W.G. Survey of investigations into the dynamic behavior of mechanisms containing links with distributed mass and elasticity. Mechanism and Machine Theory, Oxford, 7(1):3-17, 1972.
- 26) MABIE, H.H.; OCVIRK, F.W. Dinâmica das máquinas. 2.ed. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, c1980. 579p.
- 27) MEYER ZUR CAPELLEN, W. Biegungsschwingungen in der Koppel einer Kurbelschwinge. Osterreichisches Ingenieur-Archiv, Wien, 16(4):341-8, mai 1962.

- 28) MIDHA, A.; FROHRIB, D.A. Finite element approach to mathematical modeling of high-speed elastic linkages. Mechanism and Machine Theory, Oxford, 13(6):603-18, 1978.
- 29) \_\_\_\_\_. A closed-form numerical algorithm for the periodic response of high-speed elastic linkages. Transactions of the ASME. Journal of Mechanical Design, New York, 101(1):154-62, jan.1979.
- 30) NATH, P.K.; GHOSH, A. Kineto-elastodynamic analysis by finite element method. Mechanism and Machine Theory, Oxford, 15(3):179-97 1980.
- 31) \_\_\_\_\_; \_\_\_\_\_. Steady state response of mechanisms with elastic links by finite element method. Mechanism and Machine Theory, Oxford, 15(3):199-211, 1980.
- 32) NEUBAUER, A.H.; COHEN, R.; HALL, A.S. An analytical study of the dynamics of an elastic linkage. Transactions of the ASME. Series B: Journal of Engineering for Industry, New York, 88(3):311-7, aug.1966.
- 33) NIKRAVESH, P.E. et alii. Euler parameters in computational kinematics and dynamics - part I. Transactions of the ASME. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, New York, 107(3):358-65, sept.1985.
- 34) \_\_\_\_\_. Euler parameters in computational kinematics and dynamics - part II. Transactions of the ASME. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, New York, 107(3):366-9, sept.1985.
- 35) PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of matrix structural analysis. New York, McGraw-Hill, c1968. 468p.
- 36) ROARK, R.J.; YOUNG, W.C. Formulas for stress and strain. 5.ed. New York, McGraw-Hill, c1982. 624p.

- 37) SADLER, J.P.; SANDOR, G.N. A lumped parameter approach to vibration and stress analysis of elastic linkages. Transactions of the ASME. Series B: Journal of Engineering for Industry, New York, 95(2):549-57, may 1973.
- 38) SALVAGNI, R.B. Análise de vibrações pelo método dos elementos finitos: notas de aula do curso PMC-787. s.n.t. 1988.
- 39) SANDOR, G.N.; ZHUANG, X. A linearized lumped parameter approach to vibration and stress analysis of elastic linkages. Mechanism and Machine Theory, Oxford, 20(5):427-37, 1985.
- 40) SHABANA, A.A. Substructure synthesis methods for dynamic analysis of multi-body systems. Computers & Structures, New York, 20(4):737-44, 1985.
- 41) SUNADA, W.; DUBOWSKY, S. The application of finite element methods to the dynamic analysis of flexible spatial and coplanar linkage systems. Transactions of the ASME. Journal of Mechanical Design, New York, 103(3):643-51, jul.1981.
- 42) SUTHERLAND, G.H. Analytical and experimental investigation of a high-speed elastic-membered linkage. Transactions of the ASME. Series B: Journal of Engineering for Industry, New York, 98(3):788-94, aug.1976.
- 43) THOMPSON, B.S. Variational formulation for the finite element analysis of noise radiation from high-speed machinery. Transactions of the ASME. Series B: Journal of Engineering for Industry, New York, 103(4):385-91, nov.1981.
- 44) \_\_\_\_\_. et alii. An experimental and analytical study of a four bar mechanism with links fabricated from a fiber-reinforced composite material. Mechanism and Machine Theory, Oxford, 18(2):165-71, 1983.

- 45) THOMPSON, B.S.; BARR, A.D.S. A variational principle for the elastodynamic motion of planar linkages. Transactions of the ASME. Series B: Journal of Engineering for Industry, New York, 98(4):1306-12, nov.1976.
- 46) TIMOSHENKO S.P.; GOODIER, J.N. Theory of elasticity. 3.ed. Tokyo, McGraw-Hill, 1970. 567p.
- 47) TURCIC, D.A.; MIDHA A. Generalized equations of motion for the dynamic analysis of elastic mechanism systems. Transactions of the ASME. Series G: Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, New York, 106(4):249-54, dec.1984.
- 48) \_\_\_\_\_; \_\_\_\_\_. Dynamic analysis of elastic mechanism systems, part I. Transactions of the ASME. Series G: Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, New York, 106(4):249-54, dec.1984.
- 49) \_\_\_\_\_; \_\_\_\_\_ Dynamic analysis of elastic mechanism systems, part II. Transactions of the ASME. Series G: Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, New York, 106(4):255-60, dec.1984.
- 50) USORO, P.B.; NADIRA, R.; MAHIL, S.S. A finite element/lagrange approach to modeling lightweight flexible manipulators. Transactions of the ASME. Series G: Journal of Dynamic System, Measurement and Control, New York, 108(3):198-205, sept.1986.
- 51) VEIGA, J.P.C. Hidrodinâmica básica. São Paulo, ETCN/EPUSP, 1979. 1v.
- 52) VIERCK, R.K. Vibration analysis. 2.ed. New York, Harper & Row, 1979. 511p.
- 53) WEHAGE, R.A.; HAUG, E.J. Dynamic analysis of mechanical systems with intermittent motion. Transactions of the ASME. Journal of Mechanical Design, New York, 104(4):778-84, oct.1982.

- 54) WYLIE, C.R.; Advanced engineering mathematics. 3.ed. New York, McGraw-Hill, 1966. 813p.
- 55) WINFREY, R.C. Elastic link mechanism dynamics. Transactions of the ASME. Series B: Journal of Engineering for Industry, New York, 93(1):268-72, febr.1971.
- 56) ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method. 3.ed. London, McGraw-Hill, 1977. 787p.
- 57) ----- The finite element method in engineering science. London, McGraw-Hill, 1971. 521p.

APÊNDICE A - EXEMPLO PARA DOIS GRAUS DE LIBERDADE [10 e 38]

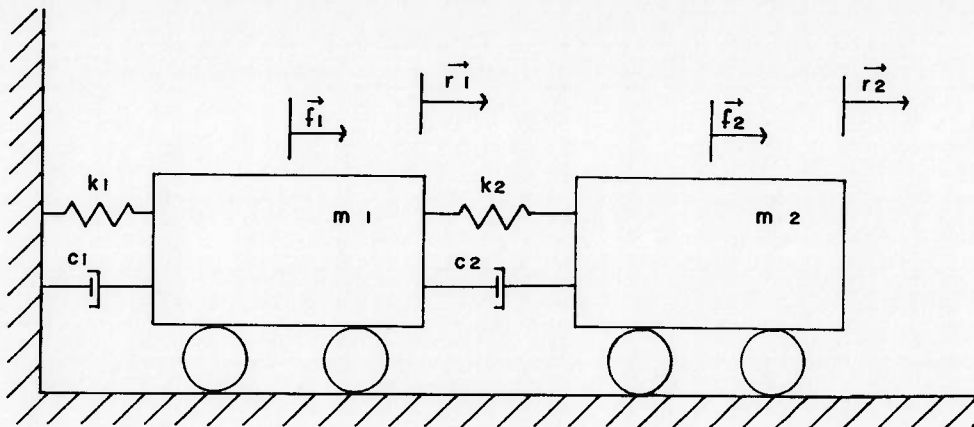


Figura A.1 Exemplo de dois graus de liberdade

As equações do movimento para o sistema mostrado na figura A.1 podem ser obtidas por qualquer um dos procedimentos comentados no capítulo 2.

A.1 Método Direto

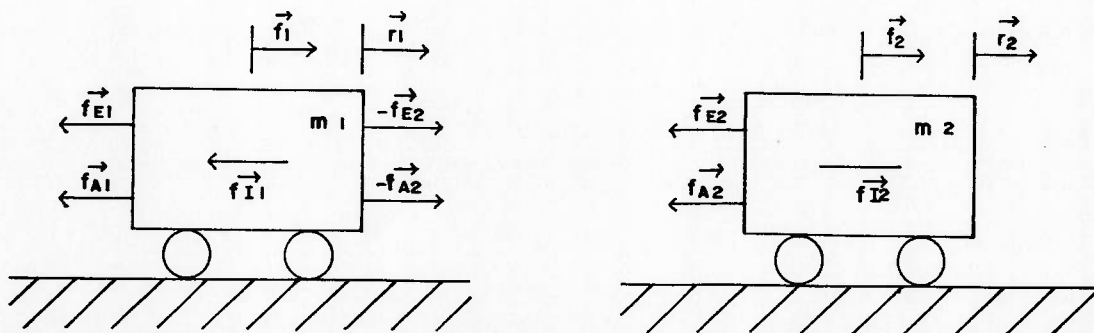


Figura A.2 Diagrama de forças atuantes

As equações do movimento que são as expressões de equilíbrio das forças atuantes em cada grau de liberdade, são dadas por:

$$\vec{f}_I + \vec{f}_A + \vec{f}_E + \vec{f}(t) = 0 \quad (\text{A.1})$$

As forças representadas pelos três primeiros termos desta equação são função do deslocamento  $\vec{r}(t)$  ou de suas derivadas.

A força de inércia, segundo o princípio de d'Alembert, é resultante do produto da massa pela aceleração:

$$\vec{f}_I = -m\ddot{\vec{r}}(t) \quad (\text{A.2a})$$

A força de amortecimento, se amortecimento viscoso linear, é o produto da constante de amortecimento pela velocidade:

$$\vec{f}_A = -c\dot{\vec{r}}(t) \quad (\text{A.2b})$$

Finalmente a força elástica é dada pelo produto da constante elástica de mola pelo deslocamento:

$$\vec{f}_E = -k\vec{r}(t) \quad (\text{A.2c})$$

Introduzindo as equações (A.2) na equação (A.1), obtemos as equações do movimento para os dois graus de liberdade:

$$m_1 \ddot{r}_1 + c_1 \dot{r}_1 + k_1 r_1 = f_1 + k_2 (r_2 - r_1) + c_2 (\dot{r}_2 - \dot{r}_1) \quad (\text{A.3})$$

$$m_2 \ddot{r}_2 + c_2 (\dot{r}_2 - \dot{r}_1) + k_2 (r_2 - r_1) = f_2$$

Rearranjando:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + (c_1 + c_2) \dot{\vec{r}}_1 - c_2 \dot{\vec{r}}_2 + (k_1 + k_2) \vec{r}_1 - k_2 \vec{r}_2 = \vec{f}_1 \quad (\text{A.4})$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 - c_2 \dot{\vec{r}}_1 + c_2 \dot{\vec{r}}_2 - k_2 \vec{r}_1 + k_2 \vec{r}_2 = \vec{f}_2$$

## A.2 Método do Trabalho Virtual

As forças atuantes nas massas estão identificadas na figura A.1b. Se fornecermos às massas  $m_1$  e  $m_2$  os deslocamentos virtuais  $\delta \vec{r}_1$  e  $\delta \vec{r}_2$  respectivamente, cada uma das forças realizará trabalho. O trabalho total realizado pelo sistema de forças pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \vec{f}_{I1} \delta \vec{r}_1 + \vec{f}_{A1} \delta \vec{r}_1 + \vec{f}_{E1} \delta \vec{r}_1 + \vec{f}_1 \delta \vec{r}_1 - \vec{f}_{E2} \delta \vec{r}_1 - \vec{f}_{A2} \delta \vec{r}_1 \\ & + \vec{f}_{E2} \delta \vec{r}_2 + \vec{f}_{A2} \delta \vec{r}_2 + \vec{f}_{I2} \delta \vec{r}_2 + \vec{f}_2 \delta \vec{r}_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Colocando  $\delta \vec{r}_1$  e  $\delta \vec{r}_2$  em evidência, obtemos:

$$\begin{aligned} & \delta \vec{r}_1 (\vec{f}_{E1} + \vec{f}_{A1} + \vec{f}_{I1} + \vec{f}_1 - \vec{f}_{E2} - \vec{f}_{A2}) + \\ & + \delta \vec{r}_2 (\vec{f}_{E2} + \vec{f}_{A2} + \vec{f}_{I2} + \vec{f}_2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Como  $\delta \vec{r}_1$  e  $\delta \vec{r}_2$  são  $\neq \vec{0}$  e arbitrários, então:

$$\vec{f}_{E1} + \vec{f}_{A1} + \vec{f}_{I1} + \vec{f}_1 - \vec{f}_{E2} - \vec{f}_{A2} = \vec{0} \quad (\text{A.7})$$

$$\vec{f}_{E2} + \vec{f}_{A2} + \vec{f}_{I2} + \vec{f}_2 = \vec{0}$$

Rearranjando e substituindo as equações (A.2) em (A.7), obtemos:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + (c_1 + c_2) \dot{\vec{r}}_1 - c_2 \dot{\vec{r}}_2 + (k_1 + k_2) \vec{r}_1 - k_2 \vec{r}_2 = \vec{f}_1 \quad (\text{A.8})$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 - c_2 \dot{\vec{r}}_1 + c_2 \dot{\vec{r}}_2 - k_2 \vec{r}_1 + k_2 \vec{r}_2 = \vec{f}_2$$



### A.3 Método da Energia

A energia cinética do sistema pode ser definida, por:

$$EC = m_1 \dot{r}_1^2 / 2 + m_2 \dot{r}_2^2 / 2 \quad (\text{A.9a})$$

A energia potencial, representada pela energia acumulada na mola:

$$EP = k_1 r_1^2 / 2 + k_2 (r_2 - r_1)^2 / 2 \quad (\text{A.9b})$$

As forças não conservativas deste sistema são as forças de amortecimento  $\vec{f}_{A1}$  e  $\vec{f}_{A2}$  e as cargas aplicadas  $\vec{f}_1$  e  $\vec{f}_2$ . A variação do trabalho realizado por estas forças pode ser expresso por:

$$\delta W_{nc} = \vec{f}_1 \delta \vec{r}_1 + \vec{f}_2 \delta \vec{r}_2 - c_1 \dot{\vec{r}}_1 \delta \vec{r}_1 - c_2 (\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1) \delta (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (\text{A.9c})$$

Aplicando o princípio de Hamilton, obtemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} [m_1 \dot{\vec{r}}_1 \delta \dot{\vec{r}}_1 + (-c_1 \dot{\vec{r}}_1 - c_2 \dot{\vec{r}}_1 + c_2 \dot{\vec{r}}_2 - k_1 \vec{r}_1 - k_2 \vec{r}_1 + k_2 \vec{r}_2 + \vec{f}_1) \delta \vec{r}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 \delta \dot{\vec{r}}_2 + (-c_2 \dot{\vec{r}}_2 + c_2 \dot{\vec{r}}_1 - k_2 \vec{r}_2 + k_2 \vec{r}_1 + \vec{f}_2) \delta \vec{r}_2] dt = 0 \quad (\text{A.10})$$

Os termos da equação (A.10) referentes às massas podem ser integrados por partes de acordo com:

$$\int_{t_1}^{t_2} m \dot{\vec{r}} \delta \dot{\vec{r}} dt = m \dot{\vec{r}} \delta \vec{r} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{\vec{r}} \delta \vec{r} dt \quad (\text{A.11})$$

Lembrando que  $\delta \dot{\vec{r}} = d(\delta \vec{r})/dt$  e que de acordo com o princípio de Hamilton a variação de  $\delta \vec{r}$  entre os limites de integração  $t_1$  e  $t_2$  é

nula, resulta que o primeiro termo do lado direito da equação (A.11) é nulo, e portanto, a equação (A.10) torna-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} [(-m_1 \ddot{\vec{r}}_1 - c_1 \dot{\vec{r}}_1 - c_2 \dot{\vec{r}}_1 + c_2 \dot{\vec{r}}_2 - k_1 \vec{r}_1 - k_2 \vec{r}_1 + k_2 \vec{r}_2 + \vec{f}_1) \delta \vec{r}_1 + (-m_2 \ddot{\vec{r}}_2 - c_2 \dot{\vec{r}}_2 + c_2 \dot{\vec{r}}_1 - k_2 \vec{r}_2 + k_2 \vec{r}_1 + \vec{f}_2) \delta \vec{r}_2] dt = 0 \quad (\text{A.12})$$

Lembrando ainda que  $\delta \vec{r}_1$  e  $\delta \vec{r}_2$  são arbitrários, então a equação A.12 só será satisfeita quando os termos entre parêntesis forem nulos, logo:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + (c_1 + c_2) \dot{\vec{r}}_1 - c_2 \dot{\vec{r}}_2 + (k_1 + k_2) \vec{r}_1 - k_2 \vec{r}_2 = \vec{f}_1 \quad (\text{A.13})$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 - c_2 \dot{\vec{r}}_1 + c_2 \dot{\vec{r}}_2 - k_2 \vec{r}_1 + k_2 \vec{r}_2 = \vec{f}_2$$

APENDICE B - NOTAÇÃO INDICIAL (9 e 51)

Pela notação indicial, substitui-se a denominação de eixos x, y e z por índices numéricos.

Por exemplo:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (v_1, v_2, v_3) = (v_i) , i = 1, 2, 3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Para uma maior facilidade de representação, utiliza-se ainda dois outros símbolos:

- delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{se } i = j$$

-  $\epsilon_{ijk}$

$$\epsilon_{ijk} = 0 \quad \text{se dois subscritos são iguais}$$

$$\epsilon_{ijk} = 1 \quad \text{se } i, j, k \text{ formam uma permutação par de } 1, 2 \text{ e } 3$$

$$\epsilon_{ijk} = -1 \quad \text{se } i, j, k \text{ formam uma permutação ímpar de } 1, 2 \text{ e } 3$$

Segundo a convenção de soma de Einstein, se um índice aparece repetido em uma parcela, um somatório deve ser feito para os valores possíveis deste índice.

Teremos então:

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

APÊNDICE C - ANÁLISE ESTÁTICA LINEAR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS [7, 8, 38 e 57]

A abordagem proposta, segundo o método dos elementos finitos consiste nos seguintes passos:

\* O contínuo é subdividido, por meio de linhas ou superfícies imaginárias, em elementos finitos;

\* Estes elementos devem estar interligados por um número finito de pontos nodais (nós), situados em suas fronteiras. Os deslocamentos destes nós serão as incógnitas básicas do problema;

\* Um conjunto de funções é selecionado para definir univocamente, dentro de cada elemento finito, a distribuição de deslocamentos em termos dos seus deslocamentos nodais;

\* Essas "funções de deslocamento" definem univocamente a distribuição de deformações dentro de um elemento em termos dos seus deslocamentos nodais. Essas deformações, em conjunto com as deformações iniciais e propriedades do material, definirão a distribuição de tensões no elemento e em suas fronteiras;

\* Determina-se um sistema de forças concentradas nos nós, equivalente às tensões, nas fronteiras e à qualquer carregamento distribuído;

\* Determinação das propriedades dos elementos a partir das características geométricas e do material. Cada elemento tem seu próprio número e conexões nodais (incidência) especificados. Se as propriedades referem-se a um mesmo sistema de coordenadas, chamado global, obtemos as posições de cada elemento na matriz de rigidez global;

\* Montagem das equações finais (adição dos elementos correspondentes);

\* Inclusão das condições de contorno. Eliminação das linhas e colunas correspondentes a deslocamentos pré-determinados;

\* Resolução das equações e obtenção das tensões e esforços internos.

APÊNDICE D - DIFERENCIAÇÃO DA EQUAÇÃO 4.21 [47]

O objetivo deste apêndice é mostrar o desenvolvimento algébrico necessário para se obter a equação 4.22 a partir da equação 4.21.

Apesar da referência [47] apresentar a diferenciação da equação 4.21, convém ressaltar que embora a conclusão esteja correta algumas justificativas apresentadas são incorretas.

Retomando a equação 4.21:

$$\begin{aligned}
 EC = & (1/2) \int_V \rho \{ (\dot{R}_0)^T (\dot{R}_0) + 2(\dot{R}_0)^T [\dot{T}] [N] (u^*) + 2(\dot{R}_0)^T [T] [N] (\dot{u}^*) \\
 & + (u^*)^T [N]^T [\dot{T}]^T [\dot{T}] [N] (u^*) + 2(u^*)^T [N]^T [\dot{T}]^T [T] [N] (\dot{u}^*) \\
 & + (\dot{u}^*)^T [N]^T [T]^T [T] [N] (\dot{u}^*) \} dV
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

Lembrando que a matriz  $[T]$  é ortogonal, e portanto,  $[T]^T [T] = [I]$ , podemos definir as seguintes matrizes ( $p \times p$ ):

$$[A] = [N]^T [T]^T [T] [N] \tag{D.2}$$

$$[B] = [N]^T [T]^T [\dot{T}] [N] \tag{D.3}$$

$$[C] = [N]^T [\dot{T}]^T [\dot{T}] [N] \tag{D.4}$$

$$[D] = [N]^T [\dot{T}]^T [T] [N] \tag{D.5}$$

onde a ordem da matriz ( $p$ ), é igual a dois para problemas bidimensionais e igual a três para problemas tridimensionais.

Pode-se mostrar que a matriz  $[A]$  é simétrica, como visto abaixo.

Da álgebra matricial [35 e 54], temos que  $[E]^T [F] [E]$  sempre será simétrica se a matriz  $[F]$  for simétrica, independentemente da matriz  $[E]$ . Na equação D.2, o produto interno  $([T]^T [T])$  é simétrico porque a matriz  $[T]$  é ortogonal. Assim sendo a matriz  $[A]$  é

simétrica, e utilizando as equações 4.16 e D.2 a D.5 podemos reescrever a equação D.1, como:

$$\begin{aligned}
 EC = & (1/2) \int \rho \left( (\dot{U}_0^*)^T [A] (\dot{U}_0^*) + 2 (\dot{U}_0^*)^T [B] (u^*) \right. \\
 & + 2 (\dot{U}_0^*)^T [A] (\dot{u}^*) + (u^*)^T [C] (u^*) + 2 (u^*)^T [D] (\dot{u}^*) \\
 & \left. + (\dot{u}^*)^T [A] (\dot{u}^*) \right) dV
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

Derivando a equação acima em relação a  $(\dot{u}^*)$ , temos:

$$\begin{aligned}
 \partial EC / \partial (\dot{u}^*) = & (1/2) \int \rho \left( \partial (2 (\dot{U}_0^*)^T [A] (\dot{u}^*)) / \partial (\dot{u}^*) \right. \\
 & \left. + \partial (2 (u^*)^T [D] (\dot{u}^*)) / \partial (\dot{u}^*) + \partial ((\dot{u}^*)^T [A] (\dot{u}^*)) / \partial (\dot{u}^*) \right) dV
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

Cada um dos três termos da equação anterior serão derivados separadamente.

O primeiro termo é:

$$\partial (2 (\dot{U}_0^*)^T [A] (\dot{u}^*)) / \partial (\dot{u}^*) \tag{D.8}$$

Adotando uma notação tensorial [35] para a expressão acima, temos:

$$\partial (2 (\dot{U}_0^*)^T_i (A)_{ij} (\dot{u}^*)_j) / \partial (\dot{u}^*)_k = \tag{D.9}$$

$$= (2 (\dot{U}_0^*)^T_i (A)_{ij}) \delta_{jk} \tag{D.10}$$

$$\text{mas } \partial (\dot{u}^*)_j / \partial (\dot{u}^*)_k = \delta_{jk} \tag{D.11}$$

onde  $\delta_{jk}$  é o delta de Kroenecker (ver apêndice B).

Assim D.10 é igual a zero para  $j \neq k$ . Fazendo  $j = k$  para examinar os termos não nulos da expressão D.10, temos:

$$2(\dot{U}_0)_r i(A)_{ik} = 2(A)^r k_i (\dot{U}_0)_i \quad (D.12)$$

Transformando a expressão (D.12) para a forma matricial novamente, temos:

$$2[A]^r (\dot{U}_0)_r \quad (D.13)$$

e portanto:

$$\partial(2(\dot{U}_0)_r [A](\dot{u}_r)) / \partial(\dot{u}_r) = 2[A]^r (\dot{U}_0)_r \quad (D.14)$$

De um modo análogo, temos para o segundo termo da equação D.7:

$$\partial(2(u_r)^r [D](\dot{u}_r)) / \partial(\dot{u}_r) = 2[D]^r (u_r) \quad (D.15)$$

O terceiro termo da equação D.7 é:

$$\partial((\dot{u}_r)^r [A](\dot{u}_r)) / \partial(\dot{u}_r) \quad (D.16)$$

Este termo pode ser expresso tensorialmente, como:

$$\partial((\dot{u}_r)^r i(A)_{ij} (\dot{u}_r)_j) / \partial(\dot{u}_r)_k = \quad (D.17)$$

$$= (\partial(\dot{u}_r)^r i / \partial(\dot{u}_r)_k) * (A)_{ij} (\dot{u}_r)_j + (\dot{u}_r)^r i(A)_{ij} * (\partial(\dot{u}_r)_j / \partial(\dot{u}_r)_k) \quad (D.18)$$

Eliminando os termos nulos, analogamente ao realizado para o primeiro termo da equação D.7, temos:

$$(A)_{kj} (\dot{u}_r)_j + (\dot{u}_r)_i (A)_{ik} \quad (D.19)$$



Lembrando que a matriz  $[A]$  é simétrica, e o aparecimento de duas vezes o mesmo índice indica somatória (ver apêndice B), temos:

$$2(A)_{km}(\dot{u})_m \quad (D.20)$$

E portanto na forma matricial:

$$\partial((\dot{u})^T [A] (\dot{u})) / \partial(\dot{u}) = 2[A] (\dot{u}) \quad (D.21)$$

Substituindo as equações D.14, D.15 e D.21 em D.7:

$$\partial(EC) / \partial(\dot{u}) = \int_P ([A]^T \{\dot{U}_0\} + [D]^T \{u\} + [A] (\dot{u})) dV \quad (D.22)$$

ou

$$\begin{aligned} \partial(EC) / \partial(\dot{u}) = \int_P ([N]^T [T]^T (\dot{R}_0) + [N]^T [\dot{T}]^T [T] [N] \{u\} + \\ + [N]^T [T]^T [T] [N] (\dot{u})) dV \end{aligned} \quad (D.23)$$

APENDICE E - MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL [7, e 38]

A essência do método de análise dinâmica por superposição modal é a mudança de base para coordenadas generalizadas, que consiste na mudança de um conjunto de "n" equações do movimento acopladas de um sistema de múltiplos graus de liberdade, para um conjunto de "n" equações desacopladas.

A equação do movimento pode ser definida, como já visto, pela seguinte equação diferencial matricial para os "n" graus de liberdade:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\} \quad (E.1)$$

onde:

- [M] = matriz de massa
- [C] = matriz de amortecimento
- [K] = matriz de rigidez
- { $\ddot{u}$ } = vetor aceleração
- { $\dot{u}$ } = vetor velocidade
- {u} = vetor deslocamento
- {P(t)} = vetor carregamento

Para um sistema não amortecido, em vibração livre, a equação (E.1) pode ser reduzida ao seguinte problema de autovalores e autovetores:

$$([K] - \omega^2[M])\{\bar{x}\} = \{0\} \quad (E.2)$$

onde:

- $\omega^2$  - autovalores (quadrado das frequências naturais do sistema)

$\{\emptyset\}$  - autovetores (modos de vibrar correspondentes)

Podendo assim determinar a matriz modal  $[\bar{\Phi}]$  e a matriz espectral  $[\Omega]$ , onde:

$$[\bar{\Phi}] = [ \{\emptyset_1\} \{\emptyset_2\} \dots \{\emptyset_n\} ] \quad (E.3)$$

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & 0 \\ | & \omega_2^2 & & | \\ | & & & | \\ 0 & & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (E.4)$$

Fazendo a seguinte mudança de coordenadas, utilizando-se da matriz modal  $[\bar{\Phi}]$ , obtemos:

$$\{u\} = [\bar{\Phi}]\{y\} \quad (E.5)$$

Como a matriz modal é formada por vetores ortogonais entre si [57], ela é não singular, havendo portanto uma relação biunívoca entre  $\{u\}$  e  $\{y\}$ . Os componentes de  $\{y\}$  são chamados de deslocamentos generalizados.

Substituindo (E.5) em (E.1) e pré-multiplicando por  $[\bar{\Phi}]^T$ , temos:

$$[M^*]\{\ddot{y}\} + [C^*]\{\dot{y}\} + [K^*]\{y\} = \{P^*\} \quad (E.6)$$

onde:

$$[M^*] = [\bar{\Phi}]^T [M] [\bar{\Phi}]$$

$$[C^*] = [\bar{\Phi}]^T [C] [\bar{\Phi}]$$

$$[K^*] = [\bar{\Phi}]^T [K] [\bar{\Phi}]$$

$$\{P^*\} = [\bar{\Phi}]^T \{P\}$$

Como  $[\bar{x}]$  é ortonormalizado em relação a  $[M]$ , temos:

$$[\bar{x}]^T [M] [\bar{x}] = [I] \quad (E.7)$$

$$[\bar{x}]^T [K] [\bar{x}] = [\Omega^2] \quad (E.8)$$

onde  $[I]$  é a matriz identidade.

Substituindo (E.7) e (E.8) em (E.6), resulta:

$$\{\ddot{y}\} + [C^*] \{\dot{y}\} + [\Omega^2] \{y\} = \{P^*\} \quad (E.9)$$

com as seguintes condições iniciais:

$$\{y_0\} = [\bar{x}]^T [M] \{u_0\} \quad (E.10)$$

$$\{\dot{y}_0\} = [\bar{x}]^T [M] \{\dot{u}_0\} \quad (E.11)$$

Na equação (E.9) nada se pode afirmar com relação ao desacoplamento dos termos referentes ao amortecimento ( $\{\dot{y}\}$ ).

No entanto, fazendo a hipótese de que o amortecimento total é a soma dos amortecimentos individuais em cada modo, pode-se supor a relação [38]:

$$\{\theta_i\}^T [C] \{\theta_j\} = 2w_i f_i \delta_{ij} \quad (E.12)$$

onde:

$f_i$  - fator de amortecimento

$\delta_{ij}$  - delta de Kronecker (ver apêndice B)

Ou seja, a ortogonalidade dos modos também existe com relação a  $[C]$ , possibilitando a utilização do método da superposição modal.

$$\ddot{y}_i + 2w_i f_i \dot{y}_i + w_i^2 y_i = p_i^* \quad (\text{E.13})$$

Cada uma das  $n$  equações (E.13) corresponde a um sistema de um grau de liberdade, que pode ser resolvido imediatamente para qualquer excitação, usando algum método de integração direta ou a Fórmula de Duhamel.

Obtidas as funções  $y_i(t)$ , a resposta nas coordenadas originais pode ser obtida da equação (E.5), ou seja:

$$\{u\} = \sum_{i=1}^n y_i \{ \phi_i \} \quad (\text{E.14})$$

APÊNDICE F - EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE [29]

A equação do deslocamento e da velocidade de cada grau de liberdade, para um intervalo genérico  $i$ , como visto no capítulo 5 (equações (5.12) e (5.13)), são dadas por:

$$y(t) = A_i \operatorname{sen} w_i (t - t_{i-1}) + B_i \operatorname{cos} w_i (t - t_{i-1}) + (1/mw_i) \int_{t_{i-1}}^t P^*(\tau) \operatorname{sen} w_i (t - \tau) d\tau \quad (\text{F.A})$$

$$\dot{y}(t) = A_i w_i \operatorname{cos} w_i (t - t_{i-1}) - B_i w_i \operatorname{sen} w_i (t - t_{i-1}) + (1/m) \int_{t_{i-1}}^t P^*(\tau) \operatorname{cos} w_i (t - \tau) d\tau \quad (\text{F.B})$$

para  $t_{i-1} \leq t \leq t_i$  e  $i = 1, 2, \dots, n$

$A_i$  e  $B_i$  descrevem as  $2n$  incógnitas do sistema, e são determinadas pelas condições iniciais no instante  $t = t_{i-1}$ .

Para o primeiro intervalo,  $0 \leq t \leq t_1$ , de acordo com as equações (F.A) e (F.B), obtemos:

$$y(t) = A_1 \operatorname{sen} w_1 (t) + B_1 \operatorname{cos} w_1 (t) + (1/mw_1) \int_0^t P^*(\tau) \operatorname{sen} w_1 (t - \tau) d\tau \quad (\text{F.1})$$

e

$$\dot{y}(t) = A_1 w_1 \operatorname{cos} w_1 (t) - B_1 w_1 \operatorname{sen} w_1 (t) + (1/m) \int_0^t P^*(\tau) \operatorname{cos} w_1 (t - \tau) d\tau$$

Analogamente para  $t_1 \leq t \leq t_2$ ,

$$y(t) = A_2 \operatorname{sen} w_2 (t - t_1) + B_2 \operatorname{cos} w_2 (t - t_1) + (1/mw_2) \int_{t_1}^t P^*(\tau) \operatorname{sen} w_2 (t - \tau) d\tau \quad (\text{F.2})$$

e

$$\dot{y}(t) = A_2 w_2 \cos w_2 (t-t_1) - B_2 w_2 \sin w_2 (t-t_1) + (1/m) \int_{t_1}^t P^*(\tau) \cos w_2 (t-\tau) d\tau$$

e assim por diante para  $t_2 \leq t \leq t_3$ , etc..

para  $t_{n-2} \leq t \leq t_{n-1}$ , temos:

$$y(t) = A_{n-1} \sin w_{n-1} (t-t_{n-2}) + B_{n-1} \cos w_{n-1} (t-t_{n-2}) + (1/m w_{n-1}) \int_{t_{n-2}}^t P^*(\tau) \sin w_{n-1} (t-\tau) d\tau \quad (\text{F.n-1})$$

e

$$\dot{y}(t) = A_{n-1} w_{n-1} \cos w_{n-1} (t-t_{n-2}) - B_{n-1} w_{n-1} \sin w_{n-1} (t-t_{n-2}) + (1/m) \int_{t_{n-2}}^t P^*(\tau) \cos w_{n-1} (t-\tau) d\tau$$

Finalmente, para  $t_{n-1} \leq t \leq t_n$ , temos:

$$y(t) = A_n \sin w_n (t-t_{n-1}) + B_n \cos w_n (t-t_{n-1}) + (1/m w_n) \int_{t_{n-1}}^t P^*(\tau) \sin w_n (t-\tau) d\tau \quad (\text{F.n})$$

e

$$\dot{y}(t) = A_n w_n \cos w_n (t-t_{n-1}) - B_n w_n \sin w_n (t-t_{n-1}) + (1/m) \int_{t_{n-1}}^t P^*(\tau) \cos w_n (t-\tau) d\tau$$

Utilizando as equações (F.1), para  $t = 0$ :

$$y(0) = B_1 \quad (\text{F.1a})$$

$$\dot{y}(0) = A_1 w_1 \quad (\text{F.1b})$$

para  $t = t_1$ :

$$y(t_1) = A_1 \sin w_1 t_1 + B_1 \cos w_1 t_1 + (1/m w_1) \int_0^{t_1} P^*(\tau) \sin w_1 (t_1 - \tau) d\tau \quad (\text{F.1c})$$

e

$$\dot{y}(t_1) = A_1 w_1 \cos w_1 t_1 - B_1 w_1 \sin w_1 t_1 + (1/m) \int_0^{t_1} P^*(\tau) \cos w_1 (t_1 - \tau) d\tau \quad (\text{F.1d})$$

Utilizando as equações (F.2), em  $t = t_1$ :

$$y(t_1) = B_2 \quad (\text{F.2a})$$

e

$$\dot{y}(t_1) = A_2 w_2 \quad (\text{F.2b})$$

e para  $t = t_2$ :

$$y(t_2) = A_2 \sin w_2 (t_2 - t_1) + B_2 \cos w_2 (t_2 - t_1) + (1/mw_2) \int_{t_1}^{t_2} P^*(\tau) \sin w_2 (t_2 - \tau) d\tau \quad (\text{F.2c})$$

e

$$\dot{y}(t_2) = A_2 w_2 \cos w_2 (t_2 - t_1) - B_2 w_2 \sin w_2 (t_2 - t_1) + (1/m) \int_{t_1}^{t_2} P^*(\tau) \cos w_2 (t_2 - \tau) d\tau \quad (\text{F.2d})$$

Finalmente, usando as equações (F.n) em  $t = t_{n-1}$ :

$$y(t_{n-1}) = B_n \quad (\text{F.na})$$

e

$$\dot{y}(t_{n-1}) = A_n w_n \quad (\text{F.nb})$$

e para  $t = t_n$ :

$$y(t_n) = A_n \sin w_n (t_n - t_{n-1}) + B_n \cos w_n (t_n - t_{n-1}) + (1/mw_n) \int_{t_{n-1}}^{t_n} P^*(\tau) \sin w_n (t_n - \tau) d\tau \quad (\text{F.nc})$$

e

$$\dot{y}(t_n) = A_n w_n \cos w_n (t_n - t_{n-1}) - B_n w_n \sin w_n (t_n - t_{n-1}) + (1/m) \int_{t_{n-1}}^{t_n} P^*(\tau) \cos w_n (t_n - \tau) d\tau \quad (\text{F.nd})$$



APENDICE G - RESULTADOS DO PROGRAMA MECQBAR

	CONSTANTES	TETA 1	M	TETA M	TETA 2	TETA 3
a=	1.080E-01	0	0.14605	0	1.243731	1.780411
b=	2.794E-01	0.261799	0.152312	-0.18447	1.050003	1.610390
c=	2.705E-01	0.523598	0.169344	-0.32438	0.883802	1.509068
w1=	3.230E+01	0.785398	0.193371	-0.40578	0.762974	1.480926
L=	2.540E-01	1.047197	0.220793	-0.43721	0.683829	1.509561
RO=	2.714E+03	1.308996	0.248949	-0.43217	0.637226	1.576315
M1=	3.135E-02	1.570796	0.275987	-0.40187	0.615514	1.666600
M2=	3.079E-02	1.832595	0.300603	-0.35423	0.613642	1.769937
M3=	2.981E-02	2.094395	0.321851	-0.29471	0.628634	1.878724
A1=	1.070E-04	2.356194	0.339036	-0.22709	0.658893	1.987218
A2=	4.060E-05	2.617993	0.351654	-0.15409	0.703598	2.090918
A3=	4.060E-05	2.879793	0.359359	-0.07782	0.762209	2.186272
I1=	1.620E-10	3.141592	0.36195	9.6E-17	0.834027	2.270575
I2=	8.670E-12	3.403392	0.359359	0.077826	0.917862	2.341925
I3=	8.670E-12	3.665191	0.351654	0.154097	1.011794	2.399114
E=	7.100E+10	3.926990	0.339036	0.227091	1.113075	2.441401
N1=	2.120E-03	4.188790	0.321851	0.294715	1.218065	2.468155
N2=	8.000E-04	4.450589	0.300603	0.354236	1.322115	2.478410
N3=	8.000E-04	4.712388	0.275987	0.401870	1.419255	2.470341
Mc=	4.520E-02	4.974188	0.248949	0.432174	1.501575	2.440664
Mf=	3.755E-02	5.235987	0.220793	0.437211	1.558253	2.383984
		5.497787	0.193371	0.405789	1.574552	2.292505
		5.759586	0.169344	0.324388	1.532578	2.157844
		6.021385	0.152312	0.184479	1.418962	1.979349
		6.283185	0.14605	1.5E-15	1.243731	1.780411
		6.544984	0.152312	-0.18447	1.050003	1.610390
		6.806784	0.169344	-0.32438	0.883802	1.509068
		7.068583	0.193371	-0.40578	0.762974	1.480926

TETA 1	W 2	W 3	WP 2	WP 3	ABx	ABy
0	-23.8739	-23.8739	-285.303	454.9632	-88.2957	-176.415
0.261799	-22.9019	-17.1959	464.3676	1100.310	-294.245	-91.7094
0.523598	-17.7718	-7.76192	718.3320	1139.539	-308.675	2.749380
0.785398	-12.1560	0.439331	639.3071	864.5095	-232.919	20.93651
1.047197	-7.57327	6.232687	492.5451	574.1868	-155.675	-0.98334
1.308996	-4.08468	9.940491	375.4006	352.8492	-95.3002	-27.2564
1.570796	-1.37536	12.12507	299.3683	195.0824	-48.7254	-44.6353
1.832595	0.853730	13.21950	254.9902	80.68713	-12.0434	-50.6566
2.094395	2.814133	13.50733	231.4032	-5.99017	16.50266	-46.5414
2.356194	4.636503	13.17198	219.5640	-74.1515	37.32885	-34.8093
2.617993	6.384470	12.34343	211.8632	-128.101	50.55347	-18.5427
2.879793	8.064191	11.12994	201.7171	-169.234	56.72563	-0.92986
3.141592	9.633333	9.633333	183.8360	-198.088	57.15948	15.30735
3.403392	11.01388	7.948133	154.7794	-216.171	53.84504	28.50019
3.665191	12.10785	6.148894	112.9744	-226.990	49.05136	38.32643
3.926990	12.80896	4.273486	57.70412	-236.011	44.91632	45.63896
4.188790	13.00268	2.309484	-12.6862	-250.079	43.31894	51.98023
4.450589	12.55050	0.184730	-102.784	-277.087	46.15152	59.06152
4.712388	11.25858	-2.24185	-221.925	-326.211	55.94901	68.25296
4.974188	8.834176	-5.19100	-385.169	-407.720	76.70145	79.58938
5.235987	4.848209	-8.95774	-609.564	-527.922	113.9048	88.83154
5.497787	-1.20739	-13.8027	-890.224	-665.022	169.0919	80.16367
5.759586	-9.46832	-19.4782	-1120.43	-699.226	214.3291	19.32077
6.021385	-18.3983	-24.1043	-990.060	-354.118	150.3500	-106.179
6.283185	-23.8739	-23.8739	-285.303	454.9632	-88.2957	-176.415
6.544984	-22.9019	-17.1959	464.3676	1100.310	-294.245	-91.7094
6.806784	-17.7718	-7.76192	718.3320	1139.539	-308.675	2.749380
7.068583	-12.1560	0.439331	639.3071	864.5095	-232.919	20.93651

TETA 1	AAx	AAy	AG2x	AG2y	AUX	XB
0	-112.623	0	-100.459	-88.2076	26.75518	3.336934
0.261799	-108.785	-29.1490	-201.515	-60.4292	83.17796	13.04049
0.523598	-97.5345	-56.3115	-203.104	-26.7810	86.74851	16.14224
0.785398	-79.6365	-79.6365	-156.278	-29.3500	58.27819	12.44594
1.047197	-56.3115	-97.5345	-105.993	-49.2589	25.85788	7.844436
1.308996	-29.1490	-108.785	-62.2246	-68.0210	-0.08448	4.514117
1.570796	-6.9E-15	-112.623	-24.3627	-78.6292	-18.0959	2.418655
1.832595	29.14901	-108.785	8.552807	-79.7211	-29.1137	1.119476
2.094395	56.31157	-97.5345	36.40711	-72.0379	-34.4498	0.273141
2.356194	79.63659	-79.6365	58.48272	-57.2229	-35.4128	-0.32152
2.617993	97.53451	-56.3115	74.04399	-37.4271	-33.2885	-0.75812
2.879793	108.7856	-29.1490	82.75562	-15.0394	-29.3147	-1.06275
3.141592	112.6231	3.6E-14	84.89131	7.653677	-24.5855	-1.23326
3.403392	108.7856	29.14901	81.31532	28.82460	-19.9350	-1.27290
3.665191	97.53451	56.31157	73.29293	47.31900	-15.8903	-1.20614
3.926990	79.63659	79.63659	62.27646	62.63778	-12.7494	-1.07086
4.188790	56.31157	97.53451	49.81526	74.75737	-10.7566	-0.89660
4.450589	29.14901	108.7856	37.65027	83.92357	-10.3113	-0.68377
4.712388	2.1E-14	112.6231	27.97450	90.43805	-12.1677	-0.39084
4.974188	-29.1490	108.7856	23.77621	94.18750	-17.5704	0.063399
5.235987	-56.3115	97.53451	28.79665	93.18303	-28.0055	0.736437
5.497787	-79.6365	79.63659	44.72769	79.90013	-43.2411	1.385748
5.759586	-97.5345	56.31157	58.39731	37.81617	-54.5423	1.002753
6.021385	-108.785	29.14901	20.78223	-38.5152	-36.2362	-0.46057
6.283185	-112.623	2.3E-13	-100.459	-88.2076	26.75518	3.336934
6.544984	-108.785	-29.1490	-201.515	-60.4292	83.17796	13.04049
6.806784	-97.5345	-56.3115	-203.104	-26.7810	86.74851	16.14224
7.068583	-79.6365	-79.6365	-156.278	-29.3500	58.27819	12.44594

TETA 1	YB	XA	YA	RA	SA	E1A
0	12.40018	-6.42974	-15.1158	15.11580	-6.42974	0.000001
0.261799	27.88042	-19.2444	-29.7408	23.74660	-26.2862	0.000004
0.523598	23.88960	-22.3951	-24.7141	10.20546	-31.7518	0.000005
0.785398	14.38226	-17.2572	-15.2858	-1.39397	-23.0114	0.000003
1.047197	7.420323	-11.1076	-8.93684	-5.15105	-13.2933	0.000002
1.308996	3.338301	-6.42980	-5.43243	-4.80469	-6.91148	0.000001
1.570796	1.028035	-3.16870	-3.44876	-3.16870	-3.44876	0.000001
1.832595	-0.30782	-0.85616	-2.14651	-1.38255	-1.85178	0.000001
2.094395	-1.11268	0.847711	-1.10511	0.181580	-1.38091	0.000001
2.356194	-1.62785	2.122013	-0.13384	1.405844	-1.59513	0.000001
2.617993	-1.98725	3.037689	0.835003	2.241978	-2.21321	0.000001
2.879793	-2.26230	3.610521	1.799293	2.672455	-3.02180	0.000001
3.141592	-2.48596	3.846781	2.721596	2.721596	-3.84678	0.000001
3.403392	-2.67449	3.776328	3.561904	2.463149	-4.56954	0.000001
3.665191	-2.85055	3.462590	4.307348	1.998978	-5.15236	0.000001
3.926990	-3.06207	2.988146	4.990478	1.415862	-5.64174	0.000001
4.188790	-3.39418	2.430245	5.695709	0.743200	-6.14775	0.000001
4.450589	-3.98246	1.842896	6.566192	-0.08064	-6.81943	0.000001
4.712388	-5.04084	1.252089	7.825131	-1.25208	-7.82513	0.000001
4.974188	-6.90643	0.668590	9.806156	-3.18382	-9.29897	0.000002
5.235987	-10.0311	0.150114	12.89990	-6.57995	-11.0965	0.000002
5.497787	-14.5045	-0.00873	16.96440	-11.9894	-12.0018	0.000002
5.759586	-17.7226	0.795103	18.88688	-16.7540	-8.75486	0.000001
6.021385	-10.3858	1.100390	9.200076	-9.17139	-1.31825	0.000001
6.283185	12.40018	-6.42974	-15.1158	15.11580	-6.42974	0.000001
6.544984	27.88042	-19.2444	-29.7408	23.74660	-26.2862	0.000004
6.806784	23.88960	-22.3951	-24.7141	10.20546	-31.7518	0.000005
7.068583	14.38226	-17.2572	-15.2858	-1.39397	-23.0114	0.000003

TETA 1	E1F	E1	SB	RB	E2A	E2F
0	-0.00015	-0.00014	12.81488	0.823702	0.000005	-0.00009
0.261799	-0.00023	-0.00023	30.67270	2.560769	0.000011	-0.00020
0.523598	-0.00010	-0.00009	28.70805	2.670695	0.000010	-0.00019
0.785398	0.000013	0.000017	18.93493	1.794189	0.000007	-0.00012
1.047197	0.000051	0.000053	10.76859	0.796077	0.000004	-0.00004
1.308996	0.000047	0.000049	5.614401	-0.00260	0.000002	0.000024
1.570796	0.000031	0.000032	2.568341	-0.55711	0.000001	0.000070
1.832595	0.000013	0.000014	0.737971	-0.89631	0.000000	0.000097
2.094395	-0.00000	-0.00000	-0.43338	-1.06059	-0.00000	0.000111
2.356194	-0.00001	-0.00001	-1.25086	-1.09024	-0.00000	0.000113
2.617993	-0.00002	-0.00002	-1.86377	-1.02484	-0.00000	0.000106
2.879793	-0.00002	-0.00002	-2.33087	-0.90250	-0.00000	0.000095
3.141592	-0.00002	-0.00002	-2.66984	-0.75690	-0.00000	0.000080
3.403392	-0.00002	-0.00002	-2.89767	-0.61373	-0.00000	0.000065
3.665191	-0.00001	-0.00001	-3.05632	-0.48920	-0.00000	0.000051
3.926990	-0.00001	-0.00001	-3.22008	-0.39251	-0.00000	0.000039
4.188790	-0.00000	-0.00000	-3.49495	-0.33115	-0.00000	0.000029
4.450589	0.000000	0.000002	-4.02825	-0.31745	-0.00000	0.000022
4.712388	0.000012	0.000014	-5.04208	-0.37460	-0.00000	0.000019
4.974188	0.000031	0.000033	-6.88551	-0.54093	-0.00000	0.000024
5.235987	0.000065	0.000067	-10.0210	-0.86219	-0.00000	0.000038
5.497787	0.000119	0.000121	-14.5096	-1.33125	-0.00000	0.000062
5.759586	0.000166	0.000168	-17.6714	-1.67917	-0.00000	0.000079
6.021385	0.000091	0.000092	-10.3360	-1.11559	-0.00000	0.000036
6.283185	-0.00015	-0.00014	12.81488	0.823702	0.000005	-0.00009
6.544984	-0.00023	-0.00023	30.67270	2.560769	0.000011	-0.00020
6.806784	-0.00010	-0.00009	28.70805	2.670695	0.000010	-0.00019
7.068583	0.000013	0.000017	18.93493	1.794189	0.000007	-0.00012

TETA 1	E2	R'B	S'B	E3A	E3F	E3
0	-0.00008	5.844164	11.43440	-0.00000	0.000080	0.000079
0.261799	-0.00019	14.13387	27.34238	-0.00000	0.000194	0.000186
0.523598	-0.00018	14.63778	24.83989	-0.00000	0.000201	0.000193
0.785398	-0.00011	11.10493	15.44122	-0.00000	0.000153	0.000147
1.047197	-0.00003	7.375633	7.886470	-0.00000	0.000101	0.000099
1.308996	0.000027	4.532473	3.313336	-0.00000	0.000062	0.000061
1.570796	0.000071	2.505903	0.791957	0.000000	0.000034	0.000034
1.832595	0.000098	1.036454	-0.52320	0.000000	0.000014	0.000015
2.094395	0.000111	-0.07694	-1.14313	0.000001	-0.00000	0.000000
2.356194	0.000112	-0.95250	-1.35868	0.000001	-0.00001	-0.00001
2.617993	0.000106	-1.64550	-1.34768	0.000001	-0.00002	-0.00002
2.879793	0.000094	-2.17387	-1.23359	0.000000	-0.00002	-0.00002
3.141592	0.000079	-2.54451	-1.10744	0.000000	-0.00003	-0.00003
3.403392	0.000064	-2.77680	-1.03079	0.000000	-0.00003	-0.00003
3.665191	0.000050	-2.91577	-1.03862	0.000000	-0.00004	-0.00003
3.926990	0.000037	-3.03164	-1.15417	0.000000	-0.00004	-0.00004
4.188790	0.000027	-3.21236	-1.41601	0.000000	-0.00004	-0.00004
4.450589	0.000020	-3.55928	-1.91287	0.000000	-0.00004	-0.00004
4.712388	0.000017	-4.19030	-2.82918	0.000001	-0.00005	-0.00005
4.974188	0.000021	-5.23731	-4.50260	0.000001	-0.00007	-0.00007
5.235987	0.000034	-6.78135	-7.42824	0.000002	-0.00009	-0.00009
5.497787	0.000057	-8.54244	-11.8037	0.000004	-0.00011	-0.00011
5.759586	0.000073	-8.98181	-15.3109	0.000007	-0.00012	-0.00011
6.021385	0.000033	-4.54877	-9.34806	0.000005	-0.00006	-0.00005
6.283185	-0.00008	5.844164	11.43440	-0.00000	0.000080	0.000079
6.544984	-0.00019	14.13387	27.34238	-0.00000	0.000194	0.000186
6.806784	-0.00018	14.63778	24.83989	-0.00000	0.000201	0.000193
7.068583	-0.00011	11.10493	15.44122	-0.00000	0.000153	0.000147