

15.9.89

MANUEL DE REZENDE SIMÕES CORRÊA NETO

ANÁLISE DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA DETERMINAÇÃO
DE FREQUENCIAS E MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DE
ESTRUTURAS DISCRETIZADAS POR ELEMENTOS FINITOS

Dissertação apresentada a
Escola Politécnica da USP
para obtenção do título
de Mestre em Engenharia
Mecânica.

São Paulo, 1989

FD. 9042.

MANUEL DE REZENDE SIMOES CORREA NETO
Eng. Mecânico, Faculdade de Engenharia
de Guaratinguetá da UNESP, 1983

ANÁLISE DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA DETERMINAÇÃO
DE FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DE
ESTRUTURAS DISCRETIZADAS POR ELEMENTOS FINITOS

Dissertação apresentada a
Escola Politécnica da USP
para obtenção do título
de Mestre em Engenharia
Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. RONALDO DE BREYNE SALVAGNI,
Departamento de Engenharia Mecânica da EPUSP

São Paulo, 1989

RESUMO

Este trabalho apresenta uma análise de vários métodos numéricos utilizados atualmente para determinação de frequências e modos naturais de vibração de estruturas discretizadas pelo método dos elementos finitos.

Após uma introdução sobre a obtenção das matrizes de rigidez e massa da estrutura e ao problema matemático de valores próprios, são apresentados diversas técnicas para determinação de frequências e modos naturais de vibração.

Devido as características especiais das matrizes de rigidez e massa da estrutura (reais, simétricas, de banda, etc.) são analisados os métodos de solução que levam em consideração estas características para otimização da eficiência.

São estudadas as características numéricas de cada método, através da análise do número de operações e a quantidade de memória necessários ao processo de solução.

ABSTRACT

This work presents a survey of several numerical methods currently in use for calculation of natural mode shapes and frequencies, of structures discretized using the finite element method.

After an introduction to construction of the stiffness and mass structural matrices and to the eigenvalue problem, several methods for computation of frequencies and mode shapes are presented.

Due the special properties of the matrices involved (real , symmetric, band form, etc.) are analysed here only methods that take advantages of these properties for efficiency optimization. The numerical characteristics of each method are studied through the operations number and storage requirements for the solution process.

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Ronaldo de Breyne Salvagni pela orientação e estímulo durante o desenvolvimento deste trabalho.
- Ao colega Linilson Padovese pela colaboração durante todo o programa de mestrado.
- À minha esposa, Raquel, por sua enorme compreensão e apoio.

INDICE

- I. Introdução, 1

- II. Formulação das Equações do Movimento / Método dos elementos finitos, 5
 - II.1 - Equações do Movimento, 5
 - II.2 - Avaliação das Propriedades Estruturais/ Método dos Elementos finitos, 8
 - II.2.1 - A Matriz de Rigidez, 9
 - II.2.2 - A Matriz de Massa, 13
 - II.2.3 - A Matriz de Amortecimento, 14

- III. Vibrações Livres não Amortecidas, 17
 - III.1 - Propriedades dos Autovalores e Autovetores, 19

- IV. As Formas Generalizada e Clássica do Problema de Valores Próprios, 22

- V. Métodos Básicos, 25
 - V.1 - O método de Jacobi, 25
 - V.2 - O método de Jacobi Generalizado, 31
 - V.3 - Métodos de Iteração Vetorial, 34
 - V.3.1 - O Método da Iteração Direta (Potência), 35
 - V.3.2 - O Método da Iteração Inversa, 38
 - V.3.3 - Aceleração de Convergência, 42
 - V.4 - Métodos de Iteração Polinomial, 44
 - V.4.1 - Iteração Polinomial Explícita, 45
 - V.4.2 - Iteração Polinomial Implícita, 45

V.5 - Métodos Baseados na Propriedade da Sequência de Sturm
(Método da Biseção), 48

VI. Métodos Avançados, 51

VI.1 - O Método da Busca do Determinante, 52

VI.2 - O Método da Iteração por Subespaços, 54

VI.2.1 - A Análise de Rayleigh-Ritz, 55

VI.3 - O Método de Lanczos, 61

VI.3.1 - O Método de Lanczos para o Prob. Generalizado, 66

VII. Análise e Discussão dos Métodos, 68

VII.1 - Armazenagem das matrizes K e M, 68

VII.2 - Métodos Básicos, 70

VII.2.1 - Jacobi, 70

VII.2.2 - Iteração Vetorial, 72

VII.2.3 - Iteração Polinomial e Métodos baseados na propriedade da sequência de Sturm, 73

VII.3 - Métodos Avançados, 74

VII.3.1 - O Método da Busca do Determinante, 74

VII.3.2 - O Método da Iteração por Subespaços, 76

VII.3.3 - O Método de Lanczos, 77

VII.4 - Comparação de Eficiência, 79

VII.5 - Utilização de Memória Auxiliar - Minis e Microcomputadores, 79

VII.6 - Implementação em computação paralela/vetorial, 81

VII.7 - Observações sobre o desenvolvimento de programas, 83

VIII. Conclusões e sugestões para trabalhos futuros, 85

IX. Bibliografia

I - INTRODUCAO

Os requisitos de segurança, desempenho e confiabilidade de certas estruturas têm levado a necessidade de uma ampla análise para se determinar seu comportamento frente a carregamentos dinâmicos.

Podemos destacar como exemplos típicos de análise: a resposta dinâmica de edifícios, barragens e usinas nucleares em caso de terremotos; estruturas aeronáuticas submetidas a turbulência durante o vôo; plataformas marítimas de perfuração; vibrações em navios; instabilidade dinâmica em pontes; ressonância em turbinas, etc.

Na análise dinâmica de estruturas geralmente estamos interessados em :

a) obter a resposta dinâmica da estrutura, expressa em termos de deslocamentos e tensões internas em função do tempo, a um determinado carregamento dinâmico;

b) verificar se uma dada frequência de excitação está próxima de alguma frequência natural do sistema (análise de ressonância);

c) minimizar, através de algum tipo de correção, a amplitude de vibração de sistemas reais.

O primeiro passo no estudo do comportamento estático ou dinâmico de uma estrutura é representá-la através de um modelo analítico. [1,2]

Dentre os diversos métodos de representação, o "Método dos Elementos Finitos" fornece, na maioria dos casos, o mais eficiente procedimento para expressar os deslocamentos de configurações estruturais quaisquer por meio de um conjunto discreto de coordenadas.

Durante vários anos a principal ênfase do Método dos Elementos Finitos foi dada a problemas estáticos. Apesar disto, as vantagens

do método para análise de resposta dinâmica são no mínimo tão grandes quanto no caso estático.

Em 1960, R.W. Clough introduziu o termo "elementos finitos" em seu trabalho "The finite element method in plane stress analysis". Neste trabalho o método foi apresentado como uma extensão das técnicas de análise estrutural para a solução de problemas do contínuo. A partir daí houve uma grande difusão do método e seu sucesso residiu principalmente no fato de que o grande número de operações a ele inerentes podiam ser executas pelo recentemente desenvolvido computador digital. [3]

Uma vez estabelecidas as propriedades da estrutura, através do M.E.F., o passo seguinte é a formulação das equações do movimento, cuja solução fornecerá a resposta dinâmica do sistema.

Para a determinação da resposta dinâmica de estruturas lineares o procedimento analítico de maior importância e mais utilizado na prática é o Método da Superposição Modal (também denominado de decomposição modal ou dos modos normais). [1-6]

O método da superposição modal consiste em se utilizar os modos naturais de vibração para representar os deslocamentos dos pontos nodais da estrutura.

Esta transformação de coordenadas serve para mudar um conjunto de n equações de movimento acopladas, de um sistema de n graus de liberdade, para um conjunto de n equações desacopladas. Ou seja, se pode tratar com n equações diferenciais independentes em vez de um sistema de equações simultâneas, reduzindo o esforço requerido para a solução.

Em geral não é necessário incluir na análise por superposição modal a resposta de todos os modos de vibrar. Para muitos tipos de carregamento dinâmico apenas uma fração do total de modos necessitam ser considerados para obter-se uma boa aproximação da resposta

real do sistema.

Mais frequentemente, apenas os primeiros p modos do sistema necessitam ser considerados, $p \ll n$.

Na análise dinâmica por superposição modal o principal esforço numérico é gasto na determinação das frequências e modos naturais de vibração. Realmente, muita atenção tem sido direcionada na elaboração de métodos eficientes de solução devido ao grande esforço computacional envolvido, ou seja, devido á necessidade de grande capacidade de memória para armazenagem de dados e ao tempo de computação elevado.

O objetivo deste trabalho foi o estudo e a análise dos métodos para determinação das frequências e modos naturais de vibração, de estruturas discretizadas por elementos finitos, onde geralmente estão presentes matrizes de ordem superior a alguns milhares.

Foi realizada uma extensa pesquisa bibliográfica sobre o tema e pretende-se, como contribuição deste trabalho, apresentar uma compilação atualizada dos principais métodos utilizados na prática, onde iremos analisar seus fundamentos teóricos, limitações e aplicabilidade.

Como o problema de valores próprios aparece em diversas aplicações científicas (estabilidade elástica, estabilidade de circuitos elétricos, transmissão de calor, etc.), existe uma infinidade de métodos para sua solução. Na realidade, grande parte dos métodos existentes foram desenvolvidos para tratar com matrizes gerais.

Entretanto, na análise de vibrações mecânicas por elementos finitos as matrizes possuem características bastante especiais (reais, simétricas, etc.).

Os métodos aqui apresentados são considerados mais eficientes por levarem em conta as características especiais das matrizes que resultam da representação da estrutura utilizando-se o Método dos

Elementos Finitos.

Até muito recentemente a análise dinâmica de estruturas era realizada utilizando-se exclusivamente computadores de grande porte.

O desenvolvimento de microcomputadores de maiores velocidade de processamento e capacidade de memória têm, no entanto, tornado possível a análise de sistemas estruturais com centenas ou mesmo milhares de graus de liberdade. [8]

ESCOLA POLITÉCNICA - USP
SERVIÇO DE BIBLIOTECAS

II. FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Para o estudo do comportamento, estático ou dinâmico, de uma estrutura é feita, geralmente, uma idealização desta através de um modelo analítico de parâmetros discretos.

No método dos elementos finitos os parâmetros são os deslocamentos de certos pontos da estrutura e, o número de parâmetros que deve ser considerado para representar os efeitos de todos os esforços significantes são chamados de "graus de liberdade" do sistema.

II.1 - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Consideremos que o movimento da estrutura seja definido através do conjunto de deslocamentos de um número finito de pontos em função do tempo [1] :

$$(2.1) \quad \mathbf{v} = [v_1(t) , v_2(t) , \dots , v_n(t)]$$

As equações de movimento do sistema podem ser deduzidas a partir do equilíbrio das forças efetivas associadas a cada grau de liberdade do sistema. Em geral, quatro tipos de forças estão envolvidas em cada ponto i da estrutura: a força externa $p_i(t)$ e as forças que resultam do movimento, isto é, de inércia f_{i1} , de amortecimento f_{i2} e resistente elástica f_{i3} .

Então, para cada grau de liberdade o equilíbrio dinâmico pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad & f_{11} + f_{A1} + f_{R1} = p_1(t) \\
 & f_{12} + f_{A2} + f_{R2} = p_2(t) \\
 & f_{13} + f_{A3} + f_{R3} = p_3(t) \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Representando em forma matricial, para os n graus de liberdade temos:

$$(2.3) \quad f_i + f_A + f_R = p(t)$$

Considerando de que o comportamento da estrutura é linear, de forma que o princípio de superposição possa ser aplicado, que o amortecimento é do tipo viscoso e utilizando-se o princípio de D'Alembert, a equação (2.3) toma a forma:

$$(2.4) \quad M \ddot{v} + C \dot{v} + K v = p(t)$$

onde,

$$M = [m_{ij}] \quad ; \quad i=1,n \quad ; \quad j=1,n$$

é a matriz dos coeficientes de influência de massa, m_{ij} , definidos como:

m_{ij} : força de inércia associada ao grau de liberdade i, decorrente de uma aceleração unitária do grau de liberdade j. O conjunto M dos coeficientes de influência de massa, m_{ij} , é denominado matriz de massa da estrutura.

$$C = [c_{ij}] \quad ; \quad i=1,n \quad ; \quad j=1,n$$

é a matriz dos coeficientes de influência de amortecimento, c_{ij} , definidos como:

c_{ij} : força de amortecimento associada ao grau de liberdade i decorrente de uma velocidade unitária do grau de liberdade j . O conjunto C dos coeficientes de influência de amortecimento, c_{ij} , é denominado matriz de amortecimento da estrutura.

$$K = [k_{ij}] \quad ; \quad i=1,n \quad ; \quad j=1,n$$

é a matriz dos coeficientes de influência de rigidez, k_{ij} , definidos como:

k_{ij} : força resistente associada ao grau de liberdade i decorrente de um deslocamento unitário do grau de liberdade j . O conjunto K dos coeficientes de influência de rigidez, k_{ij} , é denominado matriz de rigidez da estrutura.

$$v = \{v_i\} \quad ; \quad i=1,n$$

é o vetor dos deslocamentos dos pontos nodais da estrutura.

$$\dot{v} = \{\dot{v}_i\} \quad ; \quad i=1,n$$

é o vetor das velocidades dos pontos nodais da estrutura.

$$\ddot{v} = \{\ddot{v}_i\} \quad ; \quad i=1,n$$

é o vetor das acelerações dos pontos nodais da estrutura.

II.2 - AVALIAÇÃO DAS MATRIZES DAS PROPRIEDADES ESTRUTURAIS

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A discretização por elementos finitos é um procedimento aproximado de cálculo no qual o "contínuo" é subdividido por meio de linhas e superfícies imaginárias em "elementos finitos" interligados entre si através de pontos nodais situados nas fronteiras de cada elemento.

A distribuição de deslocamentos dentro de cada "elemento finito" é definida em função dos deslocamentos dos pontos nodais. Essas "funções de deslocamento" definem univocamente a distribuição de deformações dentro de um elemento em termos de seus deslocamentos nodais. Essas deformações, juntamente com as deformações iniciais e propriedades dos materiais da estrutura definirão a distribuição de tensões no elemento e em suas fronteiras.

Na análise de estruturas o método pode ser entendida como uma extensão das técnicas que representavam a estrutura como uma montagem de vigas ou treliças. Utiliza-se o mesmo procedimento de análise matricial porém, em vez de vigas e treliças, são empregados "elementos finitos".

Não é do escopo do presente trabalho a apresentação detalhada das características do método dos elementos finitos. Desta forma, serão apresentadas apenas alguns aspectos pertinentes visto que sua formulação pode ser encontrada na bibliografia indicada.

No método dos elementos finitos as propriedades da estrutura completa são determinadas a partir das propriedades de cada um dos elementos finitos e somadas de uma maneira apropriada.

Conseqüentemente, o problema da definição das propriedades de uma estrutura qualquer é reduzido basicamente á avaliação das propriedades de um elemento típico.

II.2.1 - A MATRIZ DE RIGIDEZ

A matriz de rigidez K^e de um elemento é dada por [9]:

$$(2.5) \quad K^e = \int_V B^T D B \, dV$$

onde a integração é estendida ao volume V do elemento, e:

D : matriz obtida das propriedades elásticas do material que relaciona tensões e deformações, definida por:

$$\sigma = D \epsilon$$

sendo σ : vetor das tensões

ϵ : vetor das deformações

B : matriz derivada das funções de interpolação, relacionando as deformações em qualquer ponto de um elemento com os deslocamentos dos pontos nodais deste, definida por:

$$\epsilon = B v^e$$

sendo v^e : vetor dos deslocamentos nodais do elemento.

A matriz de rigidez da estrutura é então obtida através da composição adequada das matrizes de rigidez de todos os elementos finitos, utilizando-se o método direto da rigidez.

Para realizar esta composição cada matriz elementar, K^e , é escrita como uma matriz K_i de ordem igual a matriz de rigidez da estrutura, onde todos os elementos são nulos com exceção daqueles que correspondem aos graus de liberdade do elemento.

A matriz de rigidez da estrutura assim determinada é real, quadrada, de ordem $(n \times n)$ e é simétrica, ou seja $k_{i,j} = k_{j,i}$.

Outra característica da matriz de rigidez é que os elementos não nulos concentram-se junto a diagonal principal. Matrizes com esta característica são denominadas matrizes de banda ou matrizes de faixa ("band matrix"). Isto é,

$$k_{i,j} = 0 \quad \text{para } j > i + m_k$$

onde $2m_k + 1$ é a largura de banda da matriz K.

Exemplo : A matriz abaixo possui $m_k = 2$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & k_{33} & 0 & k_{35} & 0 \\ & & & k_{44} & k_{45} & 0 \\ & \text{simétrica} & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix}$$

A energia de deformação armazenada em uma estrutura qualquer pode ser expressa em termos da matriz de rigidez, sendo igual ao trabalho realizado pelas forças externas [1,9] :

$$(2.6) \quad e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i v_i = \frac{1}{2} p^T v$$

Considerando que a estrutura está sob equilíbrio estático, a equação (2.4) é simplificada para:

$$(2.7) \quad K v = p$$

Substituindo a eq. (2.7) em (2.6) e levando-se em conta a simetria da matriz de rigidez, obtém-se:

$$(2.8) \quad e = \frac{1}{2} (\mathbf{K} \mathbf{v})^T \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v}$$

Como a energia de deformação de uma estrutura estável durante qualquer estado de deformação deve ser sempre positiva [1], resulta que :

$$(2.9) \quad \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} > 0$$

Matrizes \mathbf{K} que satisfazem a condição acima, onde \mathbf{v} é um vetor arbitrário não nulo, são ditas ser definidas positivas.

Por outro lado, se a estrutura possuir algum movimento de corpo rígido, isto é, movimento sem deformação de nenhum dos elementos, a matriz é semidefinida positiva :

$$(2.10) \quad \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} \geq 0$$

onde $\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} = 0$ quando \mathbf{v} corresponde a um movimento de corpo rígido.

Os autovalores correspondentes aos modos de movimento de corpo rígido são iguais a zero.

Estruturas não-vinculadas ou apenas parcialmente vinculadas externamente contra movimentos de corpo rígido possuem matriz de rigidez singular ($\det \mathbf{K} = 0$).

Como certos métodos utilizados na determinação de autovalores e autovetores não operam com matrizes singulares é necessário proceder uma modificação para tornar não-singular a matriz \mathbf{K} de forma a adequá-la a aplicação de tais métodos.

O procedimento utilizado é denominado "deslocamento espectral" ou simplesmente "deslocamento" (shifting). [1,3,9,12]

$$K' = K + \delta M$$

onde δ é o deslocamento utilizado.

E evidente que a matriz K' obtida acima em geral será não singular mesmo que K seja singular.

Partindo da equação característica (vide cap. III):

$$(2.11) \quad (K - \mu M) \phi = 0$$

utilizando o artifício,

$$(K + \delta M - \mu M - \delta M) \phi = 0$$

Obtém-se,

$$(2.12) \quad (K' - \tau M) \phi = 0$$

onde,

$$(2.13) \quad \tau = \mu + \delta$$

Pode-se demonstrar que a eq. (2.11) é equivalente a eq. (2.12) de forma que os modos de vibração não são afetados pelo deslocamento da matriz de rigidez. [1,3]

Os autovalores do novo problema são iguais aos autovalores do problema original, μ , acrescidos do deslocamento δ , segundo a relação (2.13).

Além do propósito descrito acima, o "deslocamento" pode ser utilizado para acelerar cálculos e convergência numérica em certos

métodos de determinação dos valores próprios.

II.2.2 - A MATRIZ DE MASSA

Existem dois procedimentos comumente utilizados para se determinar as propriedades de massa da estrutura. O mais simples resulta na chamada da "matriz de massa discreta" e o outro na "matriz de massa consistente". [1,2,3,9]

O procedimento mais simples para definir as propriedades de massa de uma estrutura qualquer é supor que as massas estão concentradas nos pontos em que os deslocamentos são definidos.

A matriz obtida seguindo-se este procedimento é denominada "matriz de massa discreta" ("lumped mass matrix").

A matriz de massa discreta é uma matriz diagonal com alguns termos da diagonal eventualmente nulos

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & m_3 & \dots & 0 \\ & \text{simétrica} & & \cdot & \\ & & & & m_n \end{bmatrix}$$

Um outro procedimento também utilizado na prática resulta na chamada "matriz de massa consistente", no qual é levado em consideração a distribuição de massa ao longo do elemento.

São utilizadas as mesmas funções de interpolação consideradas na determinação da matriz de rigidez. [9]

$$(2.14) \quad M^* = \int_V N^T \rho N \, dV$$

onde,

N : vetor das funções de interpolação (funções de forma)

ρ : massa por unidade de volume

A matriz de massa consistente possui em geral a mesma configuração, isto é, a mesma disposição de termos nulos e não nulos, que a matriz de rigidez.

A matriz de massa consistente é sempre simétrica, definida positiva e de banda enquanto que a matriz de massa discreta é definida positiva caso os elementos da diagonal sejam todos positivos.

Uma vantagem significativa da matriz de massa discreta é a de facilitar as operações numéricas para a solução das equações do movimento. Para muitos processos computacionais a matriz de massa discreta é, na maioria das vezes, mais conveniente, mesmo sacrificando um pouco a precisão dos cálculos.

II.2.3 - A MATRIZ DE AMORTECIMENTO

Para uma boa aproximação das condições reais de vibração do sistema, muitas vezes as forças de amortecimento presentes na estrutura têm que ser levadas em consideração.

As forças de amortecimento são originadas de diferentes fontes, tais como: atrito interno do material ou entre elementos da estrutura, atrito devido ao movimento de corpos em superfícies secas, atrito devido ao movimento em superfícies lubrificadas, etc.

Dentre todas estas fontes de dissipação de energia, o caso onde a força de amortecimento é proporcional a velocidade, chamado amortecimento viscoso, é a mais simples de ser tratada analiticamente.

Por esta razão as forças de amortecimento de natureza complica-

da são normalmente substituídas, para fins de análise, por um amortecimento viscoso equivalente, cujo propósito é aproximar a dissipação total de energia durante a resposta do sistema. [5,7,10]

Se as várias forças de amortecimento atuantes em uma estrutura pudessem ser determinadas quantitativamente, o conceito usual de elementos finitos poderia ser utilizado para definir os coeficientes de amortecimento do sistema. [1,9]

$$(2.14) \quad C = \int_V N^T c N \, dV$$

onde c representa uma propriedade de amortecimento, do tipo viscoso.

Depois que os coeficientes de influência de amortecimento de cada elemento fossem determinados, a matriz de amortecimento da estrutura completa poderia ser obtida pelo processo de superposição, equivalente ao método direto da rigidez.

Na realidade, entretanto, a avaliação da propriedade c (ou qualquer outra propriedade de amortecimento) é impraticável.

Por esta razão, o amortecimento é geralmente expresso em termos de "porcentagens de amortecimento" estabelecidas a partir de ensaios em modelos ou em estruturas semelhantes. [1,3,4,9]

Um procedimento utilizado na prática é o denominado "amorteci-Rayleigh", no qual a matriz C é suposta ser da forma:

$$(2.15) \quad C = a M + b K$$

onde as constantes a e b são determinadas de duas diferentes porcentagens de amortecimento correspondentes a duas diferentes frequências de vibração da estrutura. Este procedimento é particular-

mente vantajoso quando se utiliza o método da superposição modal, pois a matriz de amortecimento irá satisfazer as condições de ortogonalidade, desacoplando as equações do movimento com amortecimento. [1,3,9]

ESCOLA TÉCNICA - UFRJ
BIBLIOTECA DE FÍSICA

III - VIBRAÇÕES LIVRES NÃO-AMORTECIDAS

As equações do movimento para um sistema em vibração livre (ausência de forças externas) e sem amortecimento torna-se:

$$(3.1) \quad M \ddot{v} + K v = 0$$

onde 0 é um vetor nulo.

Considerando que o movimento de vibração é harmônico simples, a solução da eq. (3.1) é do tipo:

$$(3.2) \quad v = \phi \text{ sen } w(t-t_0)$$

onde, ϕ é um vetor de ordem n que representa o modo de vibração do sistema; t é a variável tempo; t_0 é uma constante; w é uma constante que representa a frequência de vibração (rad/s) do sistema.

É importante observar que a forma de vibração ϕ do sistema não varia com o tempo; apenas a amplitude varia.

Substituindo a solução (3.2) no conjunto de equações do movimento (3.1) obtém-se:

$$(3.3) \quad (K - w^2 M) \phi = 0$$

A equação acima também pode ser escrita na forma

$$(3.4) \quad K \phi = \mu M \phi$$

onde $\mu = w^2$.

A equação (3.4) é denominada "Problema Generalizado de Valores

Próprios".

Para existir uma solução não trivial é necessário que:

$$(3.5) \quad \det (K - \mu M) = 0$$

O determinante da equação acima pode ser expandido para fornecer um polinômio de grau n:

$$(3.6) \quad p(\mu) = a_0 + a_1 \mu + a_2 \mu^2 + \dots + a_{n-1} \mu^{n-1} + \mu^n = 0$$

O polinômio de (3.6) é denominado "polinômio característico" e possui n raízes, μ_i , denominados autovetores ou vetores próprios. A cada raiz μ_i corresponde um vetor ϕ_i denominado autovetor ou vetor próprio:

$$(3.7) \quad \phi_i = \begin{bmatrix} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \\ \vdots \\ \phi_{in} \end{bmatrix} ; i=1, \dots, n$$

Ou seja, as n raízes ($\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$) do polinômio característico representam os quadrados das frequências dos n modos de vibração ($\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$) do sistema, respectivamente.

A solução completa de (3.4) é o conjunto de n autopares (μ_i, ϕ_i), com:

$$(3.8) \quad \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$$

ou seja, μ_1 é o autovalor de menor magnitude do sistema.

Podemos definir a matriz Φ cujas colunas são os autovetores

ϕ_i , e uma matriz diagonal U que contém os autovalores μ_i em sua diagonal principal:

$$(3.9) \quad \Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(3.10) \quad U = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{bmatrix}$$

e escrever as n soluções de (3.4) na forma:

$$(3.11) \quad K \Phi = M \Phi U$$

III.1 - PROPRIEDADES DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES

Os autopares possuem certas propriedades importantes que são diretamente utilizadas na concepção de métodos de solução do problema de autovalores. [3]

a) Se ϕ_i é um autovetor, $\alpha \phi_i$ também o é, onde α é um número real qualquer.

Ou seja, um autovetor é definido apenas por sua direção no espaço. Esta propriedade permite que sejam introduzidos fatores de escala que facilitam o processo de cálculo para determinação dos valores próprios do problema.

b) Os autovetores do problema $K \phi = \mu M \phi$ que correspondem a autovalores distintos são únicos e ortogonais com relação as matrizes de massa e rigidez:

$$(3.12) \quad \phi_i^t M \phi_j = 0, \quad i \neq j$$

$$(3.13) \quad \phi_i^t K \phi_j = 0, \quad i \neq j$$

Como decorrência da propriedade (a), pode ser feita uma "normalização" dos autovetores com relação a matriz de massa M :

$$(3.14) \quad \phi_i^t M \phi_i = 1$$

Podemos dizer então que os autovetores são "ortonormais" com relação a matriz de massa, satisfazendo:

$$(3.15) \quad \phi_i^t M \phi_j = \delta_{i,j}$$

$$(3.16) \quad \phi_i^t K \phi_j = \mu_i \delta_{i,j}$$

onde $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker,

$$\delta_{i,j} = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

$$\delta_{i,j} = 1 \quad \text{para } i = j$$

c) Se o autovalor μ_i possui multiplicidade m ($\mu_i = \mu_{i+1} = \dots = \mu_{i+m-1}$), existem m autovetores $\phi_i, \phi_{i+1}, \dots, \phi_{i+m-1}$ associados a μ_i .

Embora os autovetores não sejam únicos, eles podem ser escolhidos de tal modo a formar uma base do subespaço vetorial de dimensão m , satisfazendo as relações (3.15) e (3.16).

ESCOLA POLITÉCNICA - USP
SERVIÇO DE BIBLIOTECAS

IV - AS FORMAS GENERALIZADA E CLÁSSICA DO PROBLEMA DE VALORES PRÓPRIOS

O problema de valores próprios mais simples está na chamada forma clássica:

$$(4.1) \quad K \phi = \mu \phi$$

na qual aparece apenas uma matriz quadrada.

O problema de valores próprios em sua forma clássica é o mais comumente encontrado em análise científica e muitos outros problemas de valores próprios podem ser reduzidos a ela.

Por esta razão o estudo do problema clássico tem atraído a maioria das atenções em análise numérica e um grande número de métodos eficientes de solução são disponíveis.

O problema generalizado

$$(4.2) \quad K \phi = \mu M \phi$$

pode ser transformado ou "reduzido" a forma clássica.

Mediante isto, é possível utilizarmos os diversos métodos de solução disponíveis para o problema clássico, além do fato de que as propriedades dos autovalores, dos autovetores e dos polinômios característicos do problema generalizado podem ser deduzidas das propriedades de seus correspondentes no problema clássico.

Um modo bastante simples para reduzir (4.2) para a forma clássica seria pré-multiplicar os 2 lados da equação por M^{-1} :

$$(4.3) \quad M^{-1} K \phi = \mu \phi$$

onde os autovalores e autovetores de $M^{-1}K$ são iguais ao do problema (4.1).

Esta técnica, entretanto, destrói a simetria do problema e por esta razão não é utilizada.

Geralmente a redução para a forma clássica é obtida decompondo-se a matriz M , através da fatorização de Cholesky, na forma [3, 11,12] :

$$(4.4) \quad M = S S^t$$

onde S é uma matriz triangular inferior.

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & & & & \\ S_{21} & S_{22} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & & \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdot & \cdot & S_{nn} \end{bmatrix}$$

Substituindo (4.4) em (4.2), premultiplicando por S^{-1} obtém-se:

$$(4.5) \quad A \phi' = \mu \phi'$$

onde,

$$(4.6) \quad \phi' = S^t \phi$$

$$(4.7) \quad A = S^{-1} K S^t$$

Os autovalores μ_i do problema (4.5) são os mesmos do problema original, e os autovetores do problema original são calculados por (4.6).

Quando a matriz de massa M é diagonal, A tem a mesma largura de

banda de K . Entretanto, se M for matriz de banda A é em geral uma matriz densa.

Quando a matriz M é mal-condicionada, com relação a inversão, a redução do problema para a forma clássica irá interferir na precisão dos autovalores de ordem mais baixa. Neste caso deve-se utilizar o método da decomposição espectral de M que, apesar do maior número de operações envolvidas, é um processo mais estável numericamente [3],

$$(4.8) \quad M = R D^2 R^*$$

onde D^2 é a matriz dos autovalores de M , e R é a matriz dos autovetores de M .

Neste caso, a matriz S pode ser escrita como

$$(4.9) \quad S = R D$$

V - MÉTODOS BÁSICOS

V.1 - O MÉTODO DE JACOBI

O método de Jacobi foi originalmente proposto, em 1846, para a solução do problema clássico. [3,11-18]

Foi utilizado, em um computador digital, pela primeira vez em 1953. [14]

No método de Jacobi a matriz original, real e simétrica, é transformada em uma forma diagonal D através de uma sequência de rotações planas (transformações de similaridade).

Os elementos da diagonal de D são os autovalores da matriz original (Teorema dos Eixos Principais).

Na prática, a diagonalização é terminada quando os elementos não diagonais tornam-se suficientemente pequenos.

Considerando o problema de valores próprios em sua forma clássica,

$$(5.1) \quad K \phi = \mu \phi$$

a k-ésima iteração é:

$$(5.2) \quad K_{k+1} = P_k^t K_k P_k$$

onde P é uma matriz ortogonal ($P \cdot P^t = I$) montada de forma a anular um elemento fora da diagonal principal de K_k .

Para anular o elemento (i,j), tem-se:

$[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$. (Equação 3.9)

Para a implementação do método é necessário decidir qual o elemento que irá ser reduzido a zero. Na proposição original de Jacobi, escolhia-se o maior elemento fora da diagonal principal. No entanto esta pesquisa consome tempo e é preferível aplicar o método sequencialmente (por linha ou por coluna). A desvantagem deste último procedimento é que qualquer que seja o valor do elemento este é sempre zerado; isto é, o elemento pode ser quase nulo que ainda assim uma rotação é aplicada.

Um outro procedimento utilizado é aquele em que os elementos fora da diagonal são testados sequencialmente e uma rotação só é aplicada se o elemento é maior que um dado valor mínimo para aquele passo. Deve ser lembrado, entretanto, que um elemento uma vez anulado pode se tornar diferente de zero em rotações subsequentes.

Para verificação da convergência (tolerâncias), adota-se [3]:

$$(5.8) \quad \left| \frac{k_{i,i}^{(z+1)} - k_{i,i}^{(z)}}{k_{i,i}^{(z+1)}} \right| \leq 10^{-s} ; \quad i = 1, \dots, n$$

$$(5.9) \quad \left| \frac{k_{i,j}^{(z+1)}}{k_{i,i}^{(z+1)} k_{j,j}^{(z+1)}} \right| \leq 10^{-s} ; \quad \text{todo } i, j ; \quad i < j$$

A relação (5.8) deve ser satisfeita porque o elemento $k_{i,i}^{(z+1)}$ é uma aproximação corrente de um autovalor e esta relação estabelece que as aproximações corrente e última não devem diferir nos primeiros s dígitos.

A relação (5.9) assegura que os termos situados fora da diagonal principal são de pequena magnitude quando comparados com os

termos diagonais.

Como pode ser notado das equações (5.6) e (5.7), o método de Jacobi fornece a solução completa do problema, isto é, todos os autovalores e autovetores.

Exemplo: Calcular os autovalores e autovetores da matriz K

$$K = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

- para o elemento (1,2) $\cos\theta = 0.7497$ $\text{sen}\theta = 0.6618$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.7497 & -0.6618 & 0 & 0 \\ 0.6618 & 0.7497 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = P_1 K P_1 = \begin{bmatrix} 1.469 & 0 & -1.898 & 0.6618 \\ 0 & 9.531 & -3.661 & 0.7497 \\ -1.898 & -3.661 & 6 & -4 \\ 0.6618 & 0.7497 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

- para o elemento (1,3) $\cos\theta = 0.9398$ $\text{sen}\theta = 0.3416$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.9398 & 0 & -0.3416 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3416 & 0 & 0.9398 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = P_2 K_2 P_2 = \begin{bmatrix} 0.7792 & -1.250 & 0 & 0.7444 \\ -1.250 & 9.531 & -3.440 & 0.7497 \\ 0 & -3.440 & 6.690 & -3.986 \\ -0.7444 & 0.7497 & -3.986 & 5 \end{bmatrix}$$

- para o elemento (1,4) $\cos\theta = 0.9857$ $\text{sen}\theta = 0.1687$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.9857 & 0 & 0 & -0.1687 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.1687 & 0 & 0 & 0.9857 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = P_3 K_3 P_3 = \begin{bmatrix} 0.6518 & -1.106 & -0.6725 & 0 \\ -1.106 & 9.531 & -3.440 & 0.9499 \\ -0.6725 & -3.440 & 6.690 & -3.928 \\ 0 & 0.9499 & -3.928 & 5.127 \end{bmatrix}$$

- para o elemento (2,3) $\cos\theta = 0.8312$ $\text{sen}\theta = -0.5560$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8312 & 0.5560 & 0 \\ 0 & -0.5560 & 0.8312 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = P_1 K_0 P_1 = \begin{bmatrix} 0.6518 & -0.5453 & -1.174 & 0 \\ -0.5453 & 11.83 & 0 & 2.974 \\ -1.174 & 0 & 4.388 & -2.737 \\ 0 & 2.974 & -2.737 & 5.127 \end{bmatrix}$$

- para o elemento (2,4) $\cos\theta = 0.9349$ $\text{sen}\theta = 0.3549$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9349 & 0 & -0.3549 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3549 & 0 & 0.9349 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = P_2 K_1 P_2 = \begin{bmatrix} 0.6518 & -0.5098 & -1.174 & 0.1935 \\ -0.5098 & 12.96 & 0.9713 & 0 \\ -1.174 & -0.9713 & 4.388 & -2.559 \\ 0.1935 & 0 & -2.559 & 3.999 \end{bmatrix}$$

- para completar a passada, anularemos o elemento (3,4)

utilizando $\cos\theta = 0.7335$ $\text{sen}\theta = -0.6797$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7335 & 0.6797 \\ 0 & 0 & -0.6797 & 0.7335 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = P_3 K_2 P_3 = \begin{bmatrix} 0.6518 & -0.5098 & -0.9926 & -0.6560 \\ -0.5098 & 12.96 & -0.7124 & -0.6602 \\ -0.9926 & -0.7124 & 6.7596 & 0 \\ -0.6560 & -0.6602 & 0 & 1.6272 \end{bmatrix}$$

- Apos a terceira passada é atingida a precisao estabelecida,

$$U = \begin{bmatrix} 0.1459 & & & \\ & 13.09 & & \\ & & 6.854 & \\ & & & 1.910 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.3717 & -0.3717 & -0.6015 & -0.6015 \\ 0.6015 & 0.6015 & 0.3717 & -0.3717 \\ 0.6015 & -0.6015 & 0.3717 & 0.3717 \\ 0.3717 & 0.3717 & -0.6015 & 0.6015 \end{bmatrix}$$

ordenando, temos:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 0.1459 ; & \phi_1 &= [0.3717 \quad 0.6015 \quad 0.6015 \quad 0.3717]^t \\ \mu_2 &= 1.910 ; & \phi_2 &= [-0.6015 \quad -0.3717 \quad 0.3717 \quad 0.6015]^t \\ \mu_3 &= 6.854 ; & \phi_3 &= [-0.6015 \quad 0.3717 \quad 0.3717 \quad -0.6015]^t \\ \mu_4 &= 13.09 ; & \phi_4 &= [-0.3717 \quad 0.6015 \quad -0.6015 \quad 0.3717]^t\end{aligned}$$

Resolvendo para α e β obtém-se

$$(5.14) \quad \alpha = \frac{k_{jj}^*}{x} \quad \text{e} \quad \beta = - \frac{k_{ii}^*}{x}$$

onde,

$$(5.15) \quad k_{ii}^* = k_{ii} m_{jj} - m_{ii} k_{jj}$$

$$(5.16) \quad k_{jj}^* = k_{jj} m_{ii} - m_{jj} k_{ii}$$

$$(5.17) \quad x = \frac{k^*}{2} + (\text{sinal } k^*) \sqrt{\frac{(k^*)^2}{4} + k_{ii}^* k_{jj}^*}$$

$$(5.18) \quad k^* = k_{ii} m_{jj} - m_{ii} k_{jj}$$

O processo de solução é análogo ao método de Jacobi para a solução do problema clássico. A diferença é que agora o fator de acoplamento $\{(m_{jj})^2/m_{ii} m_{jj}\}^{1/2}$ deve ser calculado para cada passo k , a menos que M seja diagonal, e a transformação é aplicada a K_k e M_k .

A convergência é determinada pela comparação entre sucessivas aproximações dos autovalores e verificando se os elementos fora da diagonal principal são suficientemente pequenos; isto é, sendo z a última iteração, a convergência foi obtida se:

$$(5.19) \quad \left| \frac{\mu_i^{(z+1)} - \mu_i^{(z)}}{\mu_i^{(z+1)}} \right| \leq 10^{-6} \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

onde

$$\mu_i^{(z)} = \frac{k_{ii}^{(z)}}{m_{ii}^{(z)}}$$

e

V.3 - MÉTODOS DE ITERAÇÃO VETORIAL

Neste capítulo iremos apresentar os métodos de iteração vetorial. A denominação "iteração vetorial" é de certa forma redundante, pois todos os métodos para solução do problema de valores próprios ($n > 3$) são essencialmente iterativos.

Os métodos de iteração vetorial possuem a característica de determinar inicialmente um autovetor (ou um grupo deles) e a partir daí determinar o(s) seu(s) autovalor(es) correspondente(s).

Os métodos de iteração vetorial operam diretamente sobre a equação matricial

$$(5.26) \quad K \phi = \mu M \phi$$

não sendo necessária a transformação para a forma clássica.

Inicialmente arbitra-se um valor para μ ($\mu = 1$, em geral) e um valor inicial x_0 para o autovetor ϕ .

Os métodos de iteração consistem em substituir continuamente o vetor "tentativa" por um vetor melhorado, até que um autovetor seja obtido.

Calculando o lado direito da equação (5.26) tem-se

$$(5.27) \quad D_0 = 1 M x_0$$

Podemos escrever

$$(5.28) \quad K x_1 = D_0, \quad x_0 \neq x_1$$

O vetor x_1 é uma melhor aproximação de um autovetor, do que x_0 . Repetindo o processo, teremos uma aproximação cada vez melhor de

um autovetor do problema.

O procedimento acima é a base do método da iteração inversa e outros métodos iterativos operam de maneira similar.

Historicamente, iteração foi aplicada a um problema de autovalor em 1898 por Vianello no estudo de problemas de flambagem. Em 1904 Stodola aplicou o processo ao problema de velocidades críticas de rotação. A aplicação do deslocamento de origem dos autovalores para acelerar a convergência do método da iteração inversa foi aplicada por Wielandt em 1944.

Em muitos textos os métodos de iteração vetorial são referidos como método de Stodola ou Mises.

V.3.1 - O MÉTODO DA ITERAÇÃO DIRETA OU MÉTODO DA POTÊNCIA

O método da iteração direta é utilizado para calcular ϕ_n e simultaneamente, o autovalor correspondente μ_n é calculado [1,3, 11-16]. Embora o método da potência possa ser aplicado diretamente ao problema generalizado iremos, inicialmente, considerar o problema de autovalores na forma clássica a título de simplicidade

$$(5.29) \quad K \phi = \mu \phi$$

Seja $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ o conjunto de autovalores da matriz K , satisfazendo

$$(5.30) \quad 0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots < \mu_n$$

ou seja, o maior autovalor μ_n é simples.

Iniciando com um vetor arbitrário x_0 , e adotando-se $\mu = 1$, pode-se realizar infinitas iterações do tipo

$$(5.31) \quad x_{k+1} = K x_k \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

que é uma sequência de iterações do vetor x_0 com a matriz K

$$K x_0, K^2 x_0, K^3 x_0$$

daí o nome método da potência.

Como o conjunto de autovetores é uma base do espaço vetorial de dimensão n , qualquer vetor x_0 pode ser expresso na forma

$$(5.32) \quad x_0 = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \dots + \alpha_n \phi_n$$

Desenvolvendo a sequência (5.31) de iterações e rearranjando os termos vem

$$(5.33) \quad x_k = \mu_n^k \left\{ \alpha_1 \left(\frac{\mu_1}{\mu_n} \right)^k \phi_1 + \alpha_2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_n} \right)^k \phi_2 + \dots + \dots + \alpha_{n-1} \left(\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} \right)^k \phi_{n-1} + \alpha_n \phi_n \right\}$$

Desde que $\mu_i/\mu_n < 1$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$

$$(5.34) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_i^k}{\mu_n^k} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Para $\alpha_n \neq 0$, ou seja, se o vetor inicial x_0 não for perpendicular a ϕ_n tem-se

$$(5.35) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha_n \mu_n^k \phi_n$$

Ou seja, o vetor x_k aproxima-se do autovetor ϕ_n (não-normali-

zado) com crescente exatidão.

Se α_n é igual a zero no vetor inicial x_0 , aparentemente não teremos convergência do método. Entretanto, na prática, os erros de arredondamento fazem com que em vez de se produzir um vetor x_{k+1} a partir do vetor x_k , é produzido $x_{k+1} + z$, onde z é um vetor formado pelos erros de arredondamento. Se este vetor contém um múltiplo não-nulo de λ , este efeito irá crescer durante as iterações e irá tornar-se a parte dominante do vetor. [12,16]

A convergência do método é linear, visto que os componentes do vetor x_k diminuem com os quocientes $\mu_i/\mu_n < 1$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. A taxa de convergência é determinada pelo maior dos quocientes, ou seja,

$$\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}$$

Quanto menor a razão μ_{n-1}/μ_n , maior será a taxa de convergência.

Como foi comentado anteriormente, o método de iteração direta pode ser aplicado ao problema generalizado sem a necessidade de transformação.

Iniciando com um vetor arbitrário x_0 , realizam-se as iterações

$$(5.36) \quad M \bar{x}_{k+1} = K x_k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Para a implementação computacional é introduzido um fator de escala para evitar o crescimento do módulo dos vetores. Normalmente utiliza-se a condição de ortonormalidade dos vetores com relação a matriz M ,

$$(5.37) \quad \mathbf{x}_{k+1}^t M \mathbf{x}_{k+1} = 1$$

Adotando o fator de escala acima,

$$(5.38) \quad \mathbf{x}_{k+1} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}}{(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^t M \bar{\mathbf{x}}_{k+1})^{1/2}}$$

Desde que \mathbf{x}_0 não seja M-ortogonal a ϕ_n ($\mathbf{x}_0^t M \phi_n \neq 0$) tem-se,

$$\mathbf{x}_{k+1} \rightarrow \phi_n \quad \text{quando} \quad k \rightarrow \infty$$

O método consiste na solução das equações (5.36) onde se calcula um vetor \mathbf{x}_{k+1} que possui direção mais próxima a um autovetor do que o vetor \mathbf{x}_k .

Uma vez determinado o autovetor ϕ_n , o autovalor correspondente pode ser calculado através do quociente de Rayleigh

$$(5.39) \quad R(\phi_n) = \frac{\phi_n^t K \phi_n}{\phi_n^t M \phi_n} = \mu_n$$

V.3.2 - O MÉTODO DA ITERAÇÃO INVERSA

O método da iteração inversa é complementar ao método da potência, fornecendo o menor autovetor μ_1 e o autovetor, ϕ_1 , correspondente. [1,3,11-16]

Aqui a matriz K é suposta positiva definida, enquanto M pode ser semidefinida positiva.

Após arbitrar-se um vetor inicial \mathbf{x}_0 , calcula-se

$$(5.40) \quad K \bar{x}_{k+1} = M x_k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$(5.41) \quad x_{k+1} = \frac{\bar{x}_{k+1}}{(\bar{x}_{k+1}^t M \bar{x}_{k+1})^{1/2}}$$

Supondo $x_0^t M \phi_1 = 0$, para $k \rightarrow \infty$ tem-se:

$$x_{k+1} \rightarrow \phi_1$$

Na prática, a implementação computacional é feita da seguinte forma: utilizando $y_1 = M x_1$, tem-se para $k = 1, 2, \dots$

$$(5.42) \quad K \bar{x}_{k+1} = y_k$$

$$(5.43) \quad \bar{y}_{k+1} = M \bar{x}_{k+1}$$

$$(5.44) \quad R(\bar{x}_{k+1}) = \frac{\bar{x}_{k+1}^t y_k}{\bar{x}_{k+1}^t \bar{y}_{k+1}}$$

$$(5.45) \quad y_{k+1} = \frac{\bar{y}_{k+1}}{(\bar{x}_{k+1}^t \bar{y}_{k+1})^{1/2}}$$

Contanto que $y_1^t \phi_1 \neq 0$, tem-se para $k \rightarrow \infty$

$$y_{k+1} \rightarrow M \phi_1$$

$$e \quad R(\bar{x}_{k+1}) \rightarrow \mu_1$$

Em (5.44) é obtida uma aproximação do menor autovalor através do

quociente de Rayleigh $R(\bar{x}_{k+1})$. E esta aproximação de μ_1 é utilizada para determinar a convergência do método.

Considerando a corrente aproximação de μ_1 como $\mu_1^{(k+1)}$, isto é, $\mu_1^{(k+1)} = R(\bar{x}_{k+1})$, teremos convergência quando

$$\left| \frac{\mu_1^{(k+1)} - \mu_1^{(k)}}{\mu_1^{(k+1)}} \right| \leq \text{tol}$$

A análise de convergência da iteração vetorial para ϕ_1 pode ser feita segundo a abordagem utilizada anteriormente. Para o método da iteração inversa, a taxa de convergência é dada por μ_1/μ_2 .

Se houver multiplicidade de autovalores, $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m$, a taxa de convergência é dada por μ_1/μ_{m+1} .

Como o problema generalizado $K \phi = \mu M \phi$ pode ser escrito na forma

$$(5.46) \quad M \phi = \mu^{-1} K \phi$$

a utilização da iteração inversa para a resolução de (5.46) é equivalente a resolução do problema generalizado pelo método da iteração direta.

Exemplo: Utilizar o método da iteração inversa para determinar uma aproximação do primeiro autovetor (μ_1, ϕ_1) do problema generalizado, onde K e M são dadas abaixo. Utilizar $\text{tol} = 10^{-6}$ para medir a convergência.

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Iniciando a iteração com $x_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^t$ e procedendo como de (5.42) a (5.45),

$$y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}; \quad \bar{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$R(\bar{x}_2) = \frac{\bar{x}_2^t y_1}{x_2^t y_2} = 0.1470588 \quad e \quad y_2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.02899 \\ 0.0 \\ 0.68599 \end{bmatrix}$$

As próximas iterações são realizadas da mesma forma e os resultados estão sumarizados na tabela abaixo. Após 5 iterações foi obtida a convergência, com a precisão desejada.

k	\bar{x}_{k+1}	\bar{y}_{k+1}	$R(\bar{x}_{k+1})$	$\frac{\mu_1^{(k+1)} - \mu_1^{(k)}}{\mu_1^{(k+1)}}$	y_k
1	3 6 7 8	0 12 0 8	0.1470588	-	0 1.02899 0 0.68599
2	1.71499 3.42997 4.11597 4.80196	0 6.85994 0 4.80196	0.1464646	0.004056795132	0 1.00504 0 0.70353
3	1.70856 3.41713 4.12066 4.82418	0 6.83426 0 4.82418	0.1464471	0.000119538581	0 1.00087 0 0.70649
4	1.70736 3.41472 4.12121 4.82771	0 6.82944 0 4.82771	0.1464466	0.000003518989	0 1.00015 0 0.70700
5	1.70715 3.41430 4.12130 4.82830	0 6.82860 0 4.82830	0.1464466	0.000000103589	0 1.00003 0 0.70709

portanto,

$$\mu_1 = 0.146447; \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} 0.25001 \\ 0.50001 \\ 0.60355 \\ 0.70709 \end{bmatrix}$$

V.3.3 - ACELERAÇÃO DE CONVERGÊNCIA

Um inconveniente dos métodos de iteração vetorial é que em alguns casos podem convergir muito lentamente, dependendo da razão μ_{n-1}/μ_n (método da potência) ou da razão μ_1/μ_2 (iteração inversa).

Para aumentar a taxa de convergência dos métodos de iteração vetorial podemos utilizar do artifício do "deslocamento da origem dos autovalores", que também é utilizado para remoção de singularidade de matrizes semidefinidas positivas. [1,3,9,11,12]

Novamente iremos considerar o problema clássico para a análise de convergência quando se utiliza o "deslocamento".

V.3.3.1 - DESLOCAMENTO DE ORIGEM - METODO DA ITERAÇÃO INVERSA

Considerando o método da iteração inversa para o problema clássico, tem-se para o vetor inicial x_0 arbitrário e $\mu = 1$,

$$(5.47) \quad K x_{k+1} = x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Utilizando (5.32) e (5.47) vem

$$(5.48) \quad x_k = \alpha_1 (1/\mu_1)^k \phi_1 + \alpha_2 (1/\mu_2)^k \phi_2 + \dots + \alpha_n (1/\mu_n)^k \phi_n$$

ou

$$(5.49) \quad x_k = \mu_1^{-k} \{ \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 (\mu_1/\mu_2)^k \phi_2 + \dots + \alpha_n (\mu_1/\mu_n)^k \phi_n \}$$

que irá convergir para o autovetor ϕ_1 (não - normalizado) desde que $\mu_1 < \mu_j$, $j = 2, \dots, n$.

Se, no entanto, iterarmos com a matriz deslocada $K - \delta I$,

$$(5.50) \quad (K - \delta I) x_{k+1} = x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

temos para a k-ésima iteração

$$(5.51) \quad x_k = \alpha_1 (1/\mu_1 - \delta)^k \phi_1 + \alpha_2 (1/\mu_2 - \delta)^k \phi_2 + \dots + \\ + \dots + \alpha_n (1/\mu_n - \delta)^k \phi_n$$

onde o termo dominante do lado direito da igualdade corresponde ao menor valor $(\mu_i - \delta)$.

De fato, dado qualquer escalar δ , se existir um autovalor particular μ_j tal que $|\mu_j - \delta|$ é menor do que qualquer $|\mu_i - \delta|$ para $i \neq j$, o vetor x_k irá convergir para o autovetor associado a μ_j .

Ou seja, no método da iteração inversa, a utilização de um deslocamento δ faz o método convergir para o autovetor ϕ_j associado ao autovalor μ_j mais próximo de δ .

A taxa de convergência é a taxa com que

$$\{(\mu_j - \delta)/(\mu_p - \delta)\}^k \rightarrow 0$$

onde $|\mu_p - \delta| = \min |\mu_i - \delta|$, $p \neq j$

Como μ_j é o autovalor mais próximo a δ , a taxa de convergência para o autovetor ϕ_j em (5.50) será dada pela maior razão entre

$$\left| \frac{\mu_j - \delta}{\mu_{j-1} - \delta} \right| \text{ e } \left| \frac{\mu_j - \delta}{\mu_{j+1} - \delta} \right|$$

V.4 - MÉTODOS DE ITERAÇÃO POLINOMIAL

Os métodos polinomiais baseiam-se na propriedade de que os autovalores do problema $K \phi = \mu M \phi$ são as raízes do polinômio característico

$$(5.52) \quad p(\mu) = \det (K - \mu M)$$

Teoricamente, o problema da determinação dos autovalores é resolvido quando o polinômio característico é determinado e suas raízes são computadas por algum método tradicional.

Uma vez que iremos computar as raízes de um polinômio de grau n , todos os métodos são de caráter essencialmente iterativo.

Existem 2 estratégias básicas: computar as raízes do polinômio característico determinado explicitamente ou computar as raízes sem que seja necessário determinar o polinômio característico, chamada aqui de iteração implícita.

Nos métodos de iteração polinomial a solução pode ser obtida utilizando-se as matrizes K e M transformadas (tridiagonais, por exemplo) ou em sua forma original. Se são requeridos poucos autovalores a solução utilizando-se as matrizes originais é quase sempre mais efetiva.

Nos métodos de iteração polinomial apenas os autovalores são computados. Os autovetores correspondentes normalmente são calculados utilizando-se métodos de iteração vetorial.

V.4.1 - ITERACAO POLINOMIAL EXPLICITA

Neste método, o primeiro passo é escrever o polinômio característico $p(\mu)$ numa forma explícita, tal como:

$$(5.53) \quad p(\mu) = \alpha_n \mu^n + \alpha_{n-1} \mu^{n-1} + \dots + \alpha_1 \mu + \alpha_0$$

determinando os coeficientes $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.

Após isto são calculados os autovalores.

Sob o ponto de vista teórico, os métodos de iteração polinomial explícita são convenientes.

Numericamente, entretanto, apresentam uma séria dificuldade: pequenas variações nos coeficientes $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ ocasionam grandes erros nas raízes do polinômio. [11,12]

Como erros de arredondamento são inerentes ao cálculo computacional, estes métodos tem encontrado aplicação prática muito limitada e somente são empregados utilizando-se um número muito grande de algarismos significativos no computador.

V.4.2 - ITERACAO POLINOMIAL IMPLICITA

No método da iteração polinomial implícita é determinado o valor de $p(\mu)$ sem que seja necessário determinar-se os coeficientes $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ de (5.52). [11]

O valor de $p(\mu)$ pode ser obtido através da decomposição de $K - \mu M$ em uma matriz triangular inferior unitária L e uma matriz triangular superior S ,

$$(5.54) \quad K - \mu M = L S$$

onde,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & & & & \\ s_{21} & s_{22} & & & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{n,n-1} & s_{nn} \end{bmatrix}$$

O polinômio característico $p(\mu)$ pode então ser determinado por

$$(5.55) \quad p(\mu) = \det (K - \mu M) = \det L \cdot \det S = \prod_{i=1}^n s_{ii}$$

As raízes μ_i podem ser obtidas utilizando-se algum processo iterativo conhecido.

Em geral utiliza-se o método da iteração da secante, baseado em interpolações lineares.

Para $u_{k-1} < u_k$,

$$(5.56) \quad u_{k+1} = u_k - \frac{p(u_k)}{p(u_k) - p(u_{k-1})} (u_k - u_{k-1})$$

onde u_k é a k -ésima iteração.

Exemplo: Calcular μ_1 do problema $K \phi = \mu M \phi$, onde

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix}$$

adotando $u_1 = -1$ e $u_2 = 0$,

$$\begin{aligned} p(-1) &= \det \begin{bmatrix} 5/2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5/2 \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2/5 & 1 & \\ 0 & -5/23 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/2 & & \\ & 23/5 & \\ & & 105/46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2/5 & 0 \\ & 1 & -5/23 \\ & & 1 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$p(-1) = 26.25$$

da mesma forma, $p(0) = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 12$

Utilizando eq. (5.56)

$$u_3 = 0 - \frac{12}{12 - 26.25} [0 - (-1)] ; \quad u_3 = 0.8421$$

Procedendo da mesma forma obtém-se:

$$\begin{aligned} p(0.8421) &= 4.7150 & ; & \quad u_4 = 1.3871 \\ p(1.3871) &= 1.8467 & ; & \quad u_5 = 1.7380 \\ p(1.7380) &= 0.63136 & ; & \quad u_6 = 1.9203 \\ p(1.9203) &= 0.16899 & ; & \quad u_7 = 1.9870 \\ p(1.9870) &= 0.026347 & ; & \quad u_8 = 1.9993 \end{aligned}$$

após seis iterações temos uma aproximação ao primeiro autovalor,

$$\mu_1 = 1.9993$$

V.5 - MÉTODOS BASEADOS NA PROPRIEDADE DA SEQUÊNCIA DE STURM

Considerando $K^{(r)}$ a matriz de ordem $(n-r)$ obtida suprimindo-se as últimas r linhas e colunas de K , obtém-se o problema:

$$(5.57) \quad K^{(r)} \phi^{(r)} = \mu^{(r)} \phi^{(r)}$$

onde $\phi^{(r)}$ é um vetor de ordem $(n-r)$ e $K^{(0)} = K$, $\mu^{(0)} = \mu$ e $\phi^{(0)} = \phi$.

Por exemplo, para $r = 2$ teríamos

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1,n-2} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n-2,1} & k_{n-2,2} & \dots & k_{n-2,n-2} \end{bmatrix}$$

Os polinômios característicos associados a estes problemas são funções de variáveis reais que formam uma sequência de Sturm, que possui uma importante propriedade.

Propriedade de separação dos autovalores:

Os autovalores do problema

$$(5.58) \quad K^{(r+1)} \phi^{(r+1)} = \mu^{(r+1)} \phi^{(r+1)}$$

separam as raízes do problema (8.1), isto é [11] :

Utiliza-se o método da biseccão de intervalos para a determinação dos autovalores desejados.

A base do método da biseccão é a decomposição de $K - u_k M$ na forma $L D L^t$ e seleccionar u_k de tal forma a se obter, dos sinais algébricos dos elementos diagonais de D , informações sobre os autovalores. Por exemplo, se desejarmos os autovalores dentro de um dado intervalo (u_1, u_2) deve-se proceder da seguinte maneira:

- a) fatorar $K - u_1 M$ e determinar o número de autovalores, q_1 , menores que u_1 .
- b) fatorar $K - u_2 M$ e determinar o número de autovalores, q_2 , menores que u_2 .
- c) utilizar um procedimento de biseccão do intervalo (u_1, u_2) para isolar os autovalores nele contidos.

VI - MÉTODOS AVANÇADOS

Quando a ordem das matrizes K e M é muito alta, caso de estruturas muito grandes ou complexas, existem métodos específicos para a solução do problema generalizado.

$$(6.1) \quad K \phi = \mu M \phi$$

Estes métodos, denominados neste trabalho de métodos avançados, combinam os processos básicos de solução abordados nos capítulos anteriores, no intuito de criar-se um procedimento de solução mais eficiente para grandes problemas. [3,20-31]

Em geral um problema é considerado grande quando apenas parte dele é possível de ser armazenada na memória principal do computador. Assim, para estes tipos de problemas, é muito mais econômico determinar apenas aqueles autovalores e autovetores requeridos em vez de se calcular todos (como no método de Jacobi, por exemplo).

Como, geralmente, numa análise dinâmica de estruturas discretizadas por elementos finitos estamos interessados em obter somente alguns autopares do problema, principalmente no caso de matrizes K e M muito grandes, são empregados os métodos descritos aqui.

Os métodos aqui apresentados foram desenvolvidos para a determinação dos p menores autovalores e autovetores mas também podem, com a utilização da estratégia do deslocamento serem utilizados para o cálculo dos maiores autopares como é requerido na análise de flambagem ou para cálculo de autopares dentro de uma faixa do espectro.

VI.1 - O METODO DA BUSCA DO DETERMINANTE

A primeira consideração a ser feita sobre o método da busca do determinante ("determinant search") é a de que ele opera diretamente sobre o problema generalizado (6.1). [3,20,23,25,31]

O método da busca do determinante é uma combinação de 3 técnicas fundamentais: iteração polinomial, propriedade da sequência de Sturm e iteração vetorial.

a) É utilizada a iteração polinomial implícita com o polinômio característico $p(\mu)$ no intuito de se obter, inicialmente, uma "aproximação" do autovalor desejado.

Utilizando o fato de que os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$(6.2) \quad p(\mu) = \det (K - \mu M)$$

para avaliar $p(\mu)$, a matriz $K - \mu M$ é fatorada na forma $L^t D L$, descrita anteriormente. Desta forma

$$(6.3) \quad p(\mu) = \prod_{i=1}^n d_{ii} = d_{11} d_{22} \dots d_{nn}$$

Iremos considerar a determinação do primeiro autovalor, que é um caso típico. Se u_{k-1} e u_k são duas aproximações de μ_1 , onde $u_{k-1} < u_k < \mu_1$, a "aproximação" seguinte, u_{k+1} é dada por

$$(6.4) \quad u_{k+1} = u_k - f \frac{p(u_k)}{p(u_k) - p(u_{k-1})} (u_k - u_{k-1})$$

onde f é uma constante. Quando $f = 1$ tem-se a iteração da secante descrita anteriormente.

Na prática, para aceleração de convergência, o valor de f é duplicado após cada iteração em que u_k não sofreu alteração em seus dois dígitos mais significativos.

b) A iteração polinomial é continuada até que se consiga passar por um ou mais autovalores.

E utilizada a propriedade da sequência de Sturm para fornecer informações a respeito do número de autovalores menores que u_k , o que u_k , o que serve para detectar se a iteração polinomial "passou" por uma raiz simples ou um grupo de raízes.

c) Uma vez estabelecido que a iteração polinomial "passou" por uma ou mais raízes (autovalores), utiliza-se o método da iteração inversa, com deslocamento igual ao valor de u_k , para determinação precisa dos autovetores e autovalores. O processo é continuado até que se calculem os p autopares requeridos.

A iteração descrita acima para μ_1 e ϕ_1 é típica e pode ser utilizada para calcular qualquer outro autopar, digamos (μ_{j+1}, ϕ_{j+1}) , utilizando-se em vez de $p(\mu)$ como em (6.4) o polinômio $p_j(\mu)$ modificado sem as raízes μ_1, \dots, μ_j ,

$$(6.5) \quad p_j(\mu) = \frac{p(\mu)}{\prod_{i=1}^j (\mu - \bar{\mu}_i)}$$

onde $\bar{\mu}_i$ representa uma aproximação precisa do autovalor μ_i .

VI.2 - O METODO DA ITERAÇÃO POR SUBESPACOS

O objetivo básico do método é determinar os p menores autovalores e autovetores do problema generalizado, satisfazendo

$$(6.6) \quad \underset{(n \times n)}{K} \underset{(n \times p)}{\Phi} = \underset{(n \times n)}{M} \underset{(n \times p)}{\Phi} \underset{(p \times p)}{U}$$

onde U é matriz diagonal contendo os p menores autovalores de (6.1). [1, 3, 20-22, 24, 29, 31]

$$(6.7) \quad U = \text{diag} [\mu_i] \quad ; \quad i = 1, \dots, p$$

e Φ contém os p autovetores correspondentes

$$(6.8) \quad \Phi = [\phi_1, \dots, \phi_p]$$

Os p autovetores devem satisfazer as condições de ortogonalidade:

$$(6.9) \quad \Phi^t K \Phi = U$$

$$(6.10) \quad \Phi^t M \Phi = I$$

onde I é matriz identidade ($p \times p$).

O método da iteração por subespaços consiste basicamente em:

- estabelecer um conjunto de q vetores iniciais, $q > p$, onde p é o número de autopares a ser determinado ;
- utilizar iteração inversa simultânea para os q vetores e análise de Rayleigh-Ritz a fim de se obter uma redução do problema , da

ordem n para a ordem q. Determinar os autopares do problema reduzido que são "aproximações" dos menores autopares do problema generalizado original (6.1).

c) após a convergência da iteração, utilizar a propriedade da sequência de Sturm para a verificação dos autopares calculados.

VI.2.1 - A ANÁLISE DE RAYLEIGH-RITZ

Na análise de Ritz, a hipótese básica é considerar um conjunto de vetores ϕ^* como combinações lineares dos vetores de Ritz r_i , dados por [1,3] :

$$(6.11) \quad \phi^* = \sum_{i=1}^q z_i r_i \quad ; \quad i=1, \dots, q$$

onde z_i são denominados coordenadas de Ritz ou coordenadas generalizadas.

Os vetores r_i , ordem $(n \times 1)$, são formas arbitradas, linearmente independentes.

Para o vetor ϕ^* o coeficiente de Rayleigh é dado por

$$(6.12) \quad R(\phi^*) = \frac{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q z_i z_j k_{i,j}^*}{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q z_i z_j m_{i,j}^*} = \frac{k^*}{m^*}$$

onde,

$$(6.13) \quad k_{i,j}^* = r_i^t K r_j$$

$$(6.14) \quad m_{i,j}^* = r_i^t M r_j$$

Ritz propôs que os coeficientes z_i fossem escolhidos de modo a tornar o coeficiente de Rayleigh $R(\phi^*)$ estacionário. Desta forma

$$(6.15) \quad \frac{\partial R(\phi^*)}{\partial z_i} = 0 \quad ; \quad i=1, \dots, q$$

pois z_i são as únicas variáveis.

Substituindo (6.12) em (6.15) resulta que

$$(6.16) \quad \frac{\partial R(\phi^*)}{\partial z_i} = \frac{2 m^* \sum_{j=1}^q z_j k_{ij}^* - 2 k^* \sum_{j=1}^q z_j m_{ij}^*}{(m^*)^2} = 0$$

Utilizando $\mu^* = k^*/m^*$,

$$(6.17) \quad \sum_{j=1}^q z_j (k_{ij}^* - \mu^* m_{ij}^*) = 0 \quad ; \quad \text{para } i=1, \dots, q$$

Escrevendo as q equações de (6.17) na forma matricial, obtém-se o problema de valores próprios

$$(6.18) \quad \begin{matrix} \mathbf{K}^* & \mathbf{z} & = & \mu^* & \mathbf{M}^* & \mathbf{z} \\ (q \times q) & (q \times 1) & & & (q \times q) & (q \times 1) \end{matrix}$$

onde \mathbf{K}^* e \mathbf{M}^* são matrizes de ordem $(q \times q)$ cujos elementos são definidos por (6.13) e (6.14), respectivamente,

$$(6.19) \quad \mathbf{K}^* = \mathbf{R}^t \mathbf{K} \mathbf{R}$$

$$(6.20) \quad \mathbf{M}^* = \mathbf{R}^t \mathbf{M} \mathbf{R}$$

onde \mathbf{R} é dado por

$$(6.21) \quad R = [r_1 \quad r_2 \quad \dots \quad r_q]$$

e z é o vetor das coordenadas de Ritz

$$(6.22) \quad z^t = [z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_q]$$

Desta forma, verifica-se que é possível através da análise de Rayleigh-Ritz a redução do problema original de n graus de liberdade para um sistema de q graus de liberdade, $q < n$, expresso pela equação (6.18).

A solução de (6.18) produz q autovalores $\mu_1^* , \dots , \mu_q^*$ que são aproximações dos autovalores do problema original e q autovetores

$$(6.23) \quad \begin{aligned} z_1^t &= [z_1^1 \quad z_2^1 \quad \dots \quad z_q^1] \\ z_2^t &= [z_1^2 \quad z_2^2 \quad \dots \quad z_q^2] \\ &\vdots \\ z_q^t &= [z_1^q \quad z_2^q \quad \dots \quad z_q^q] \end{aligned}$$

O conjunto de todas as soluções pode ser expresso por:

$$(6.24) \quad Z = [z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_q]$$

matriz que agrupa todos os autovetores de (6.18), e

$$(6.25) \quad U^* = \text{diag} [\mu_1^* , \mu_2^* , \dots , \mu_q^*]$$

matriz diagonal dos autovalores de (6.18).

Podemos escrever, para o conjunto de q autopares

$$(6.26) \quad K^* Z = M^* Z U^*$$

Os autovalores μ_i^* obtidos representam boas aproximações dos p menores autovalores μ_i do problema $K \phi = \mu M \phi$, desde que $0 < p < q/2$. [1,3]

Os autovetores z_i são utilizados para avaliar os vetores $\phi_i^*, \dots, \phi_q^*$ os quais são "aproximações" dos autovetores do problema original. De (6.11) e (6.23),

$$(6.27) \quad \phi_i^* = \sum_{j=1}^q z_j^i r_j \quad i = 1, \dots, q$$

ou,

$$(6.28) \quad \phi_i^* = R z_i \quad i = 1, \dots, q$$

Para o conjunto das soluções, tem-se

$$(6.29) \quad \begin{matrix} \Phi^* & = & R & Z \\ (n \times q) & & (n \times q) & (q \times q) \end{matrix}$$

Na análise dinâmica prática é utilizada, inicialmente, a iteração inversa (simultânea) a fim de se obter uma boa estimativa para os vetores de Ritz.

Uma vez estabelecido um conjunto de q vetores iniciais, Φ^* , no início de cada passo da solução, obtém-se através da iteração inversa, a estimativa dos vetores de Ritz, r_i :

$$(6.30) \quad K R = M \Phi^*$$

Uma vez estimados os vetores de Ritz é feita a redução do problema para a forma descrita em (6.26), com as matrizes de rigidez e massa reduzidas, K^* e M^* respectivamente, determinadas por

(6.19) e (6.20).

Para a determinação dos autopares do problema reduzido utiliza-se o Método de Jacobi Generalizado. Vale notar que, como o problema (6.26) é de pequena ordem, o método de Jacobi é bastante eficiente.

Posteriormente são determinadas as "aproximações", Φ^* , dos autovetores do problema original através de:

$$(6.31) \quad \Phi^* = R Z$$

Caso não tenha sido verificado o critério de convergência pré-estabelecido, determina-se um novo conjunto de vetores de Ritz através de (6.30), utilizando-se do conjunto de vetores Φ obtido em (6.31), e repete-se o processo.

Na implementação computacional tem-se:

- a) estabelecer o conjunto de q vetores de partida, X_1
- b) iteração inversa e análise de Rayleigh-Ritz

$$(6.32) \quad K \bar{X}_{k+1} = M X_k^*$$

$$(6.33) \quad M_{k+1}^* = \bar{X}_{k+1}^t M \bar{X}_{k+1}$$

$$(6.34) \quad K_{k+1}^* = \bar{X}_{k+1}^t K \bar{X}_{k+1}$$

$$(6.35) \quad K_{k+1}^* Z_{k+1} = M_{k+1}^* Z_{k+1} U_{k+1}^*$$

$$(6.36) \quad X_{k+1} = \bar{X}_{k+1} Z_{k+1}$$

Desde que os vetores de X_k^* não sejam ortogonais a um dos auto-
vetores $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$, tem-se para $k \rightarrow \infty$

$$U_{k+1}^* \rightarrow U$$

$$X_{k+1}^* \rightarrow \Phi$$

A convergência do método é medida utilizando-se as "aproximações" dos autovalores nos passos $(k-1)$ e (k) , $\mu_i^{*(k)}$ e $\mu_i^{*(k-1)}$, respectivamente, para $i = 1, \dots, p$

$$(6.37) \quad \left| \frac{\mu_i^{*(k+1)} - \mu_i^{*(k)}}{\mu_i^{*(k+1)}} \right| \leq \text{tol} \quad i=1, \dots, p$$

Após a determinação dos autovetores é necessário verificar se aqueles são realmente os autovetores requeridos já que as relações (6.9) e (6.10) são satisfeitas para quaisquer autopares.

Para esta verificação é utilizada a propriedade da sequência de Sturm aplicando-se um deslocamento $\delta > \mu_p$, onde μ_p é o maior autovalor calculado.

A propriedade da sequência de Sturm irá determinar o número de autovalores menores do que δ , que no caso deve ser p .

VI.3 - O METODO DE LANCZOS

O método de Lanczos foi originalmente proposto em 1950 como forma de tridiagonalizar matrizes simétricas. Recentemente foi recuperado como um eficiente método para computar um número reduzido de autovalores/autovetores de matrizes esparsas de alta ordem. [22, 23, 28, 29, 34-41].

Diversas versões do método de Lanczos requerem a transformação do problema generalizado para a forma clássica. Devido as características de convergência do método, geralmente escolhe-se a matriz de rigidez para ser decomposta através do processo de Cholesky (equação 4.4), a fim de se obter a redução do problema.

Considerando o problema de valores próprios em sua forma clássica,

$$(6.38) \quad A \phi = \mu \phi$$

podemos afirmar que o objetivo do método é obter uma matriz tridiagonal T de ordem m ($m < n$), a partir da matriz A , e determinar os autovalores/autovetores desta matriz tridiagonal.

Os autovalores de T são, conforme procedimento de Rayleigh-Ritz aproximações dos autovalores μ_i do problema (6.38).

A grande aplicabilidade do método de Lanczos reside no fato de que boas aproximações dos autovalores (e correspondentes autovetores) dos extremos do espectro surgem para valores pequenos de m .

Considere uma sequência de vetores q_j , obtidos através de:

$$(6.39) \quad \beta_j q_{j+1} = A q_j - \alpha_j q_j - \beta_{j-1} q_{j-1} = r_j \quad ; \quad j=1, \dots, m$$

onde $q_0 = 0$ e q_1 é um vetor arbitrariamente escolhido.

Os coeficientes α_j e β_{j-1} são tomados de forma a fazer q_{j+1} ortogonal a q_j e q_{j-1} . O coeficiente β_j é escolhido para que q_{j+1} tenha módulo unitário.

Deste modo,

$$(6.40) \quad \alpha_j = q_j^t A q_j$$

$$(6.41) \quad \beta_j = \|r_j\|$$

A sequência de vetores gerada através de (6.39) é mutuamente ortogonal, podendo-se escrever

$$(6.42) \quad Q^t Q = I$$

onde Q é a matriz dos vetores de Lanczos,

$$(6.43) \quad Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$$

Utilizando-se da matriz ortogonal Q é possível, através do procedimento de Rayleigh-Ritz (seção VI.2.1), a transformação do problema $A \phi = \mu \phi$ na forma,

$$(6.44) \quad T y = \mu y$$

onde,

$$(6.45) \quad T = Q^t A Q$$

e

$$(6.46) \quad \phi_j = Q y_j$$

A transformação (6.46) pode ser escrita para os m autovetores

ocorrer para $j=n$ mas, geralmente se dá muito antes. Valores típicos são $p=10$, $m=300$, $n=10^4$. [32]

Para monitorar convergência utiliza-se o valor da norma

$$(6.51) \quad \|A \phi - \phi \mu^*\|$$

Utilizando (6.44) e (6.46), a norma acima torna-se

$$(6.52) \quad \|AQ\phi - Q\phi \mu^*\|$$

$$(6.53) \quad \|(AQ - QT) y_j\|$$

Reescrevendo a equação (6.39) em forma matricial,

$$(6.54) \quad A Q_j - Q_j T_j = r_j e_j^t$$

onde $e_j^t = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$ é um vetor de ordem j e $r_j = q_{j+1} \beta_j$.

A norma (6.51) torna-se

$$(6.55) \quad \|(\beta_j q_{j+1} e_j^t) y_j\| = \beta_j |e_j^t y_j|$$

ou

$$(6.56) \quad \|A \phi - \phi \mu^*\| = \beta_j |y_{j,m}|$$

onde $y_{j,m}$ é o m -ésimo elemento de y_j .

A conclusão importante da eq. (6.56) é que pode-se obter a estimativa de erro sem calcular-se ϕ e, conseqüentemente, sem se utilizar da matriz Q que pode ser mantida na memória secundária, representando uma considerável economia computacional.

O comportamento real do método de Lanczos, entretanto, difere

um pouco da teoria. O efeito dos erros de arredondamento no processo é bastante significativo, destruindo a ortogonalidade entre as colunas da matriz Q , ou seja, entre os vetores q_i . Devido a este motivo, o método passa a convergir para autovalores repetidos.

Lanczos propôs que fosse feita reortogonalização entre o novo vetor e os vetores previamente computados q_i , em cada passo da iteração, para corrigir o problema. No entanto, a implementação computacional deste procedimento, denominado de "reortogonalização completa" é muito dispendiosa.

Recentes desenvolvimentos do método de Lanczos são baseados em reortogonalizações parciais ou seletivas, em lugar da completa. A idéia básica é ortogonalizar q_{i+1} apenas com relação aos autovetores computados [32, 34, 36]. Desta maneira, é mantido um certo grau de ortogonalidade entre os vetores de Lanczos, o que é suficiente para assegurar a convergência. Quantitativamente o grau de independência linear pode ser medido através da norma

$$(6.57) \quad l_m = \|I - Q_m^t Q\|$$

Desde que $l_m < \text{tol}$, onde tol é a precisão (tolerância) estabelecida, a iteração prossegue sem reortogonalização. Quando l_m atinge a tolerância l_m , é feita a reortogonalização e a iteração prossegue (valor típico para l_m é 0.01).

VI.3.1 - O METODO DE LANCZOS PARA O PROBLEMA GENERALIZADO

Em vez de se reduzir explicitamente o problema generalizado para a forma clássica antes da aplicação do algoritmo de Lanczos, diferentes versões do método têm sido propostas utilizando a estratégia da "redução implícita" do problema [29,32,33,37,40].

Desta maneira, o método de Lanczos é aplicado a matriz $K^{-1}M$ sem que este produto seja computado explicitamente, o que destruiria a simetria e esparsidade do problema.

Exemplificando, o vetor $w = M^{-1} K u$ é computado em 2 etapas:

$$(6.58) \quad a) \quad v = M u$$

$$(6.59) \quad b) \quad K w = v \quad , \text{ calculando } w$$

Procedendo desta forma é possível explorar a esparsidade e simetria das matrizes envolvidas.

A implementação computacional do método de Lanczos com redução implícita é proposta abaixo. [29,37]

(a) triangularizar a matriz de rigidez

$$(6.60) \quad K = L D L^t$$

(b) adotar $q_0 = 0$, um vetor inicial r_0 e $\beta_1 = (r_0^t M r_0)^{1/2}$

(c) para $i=1,2,\dots,m$

$$(6.61) \quad q_i = r_{i-1} / \beta_i$$

$$(6.62) \quad r_j = K^{-1} M q_j$$

$$(6.63) \quad r_j = r_j - \beta_j q_{j-1}$$

$$(6.64) \quad \alpha_j = r_j^t (M q_j)$$

$$(6.65) \quad r_j = r_j - \alpha_j q_j$$

$$(6.66) \quad \beta_j = (r_j^t M r_j)^{1/2}$$

(d) computar os autopares (μ_j^*, y_j) da matriz T e testar convergência.

O algoritmo procede como anteriormente descrito, exceto pelo fato de que as colunas da matriz Q são agora M-ortogonais:

$$(6.67) \quad Q^t M Q = I$$

satisfazendo a seguinte relação [32],

$$(6.68) \quad Q^t (MK^{-1}M) Q = T$$

Utilizando-se da transformação (6.46) obtém-se, da maneira similar o problema,

$$(6.69) \quad T y = \frac{1}{\mu^*} y$$

VII - ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS METODOS

VII.1 - ARMAZENAGEM DAS MATRIZES K E M

A primeira consideração a ser feita sobre os métodos para determinação de valores próprios é sobre a armazenagem das matrizes K e M, na memória do computador.

Para se obter vantagem das características das matrizes de rigidez e massa é adotado um esquema especial de armazenagem e endereçamento dos elementos, visando minimizar os requisitos de memória.

Sendo a matriz K simétrica, é necessário armazenar apenas os elementos da diagonal principal e aqueles situados acima desta, por exemplo.

Devido as características de banda da matriz, somente são armazenados os elementos situados dentro da banda da matriz. Isto é, os elementos nulos situados fora da banda da matriz não necessitam ser armazenados, representando uma considerável economia de memória.

Desta forma, em vez de se utilizar uma variável indexada de 2 índices (em linguagem FORTRAN: $K(I,J)$) para representar os elementos da matriz de rigidez, utiliza-se uma variável de um só índice na forma descrita a seguir.

Por exemplo, para um sistema de ordem 8:

diagonal de K , k_{ii} , em A é $DIAGA(I)$.

Desta forma, o número de elementos não nulos na i -ésima coluna de K é igual a $DIAGA(I+1) - DIAGA(I)$ e os endereços dos elementos serão $DIAGA(I)$, $DIAGA(I)+1$, $DIAGA(I)+2$, ..., $DIAGA(I+1)-1$.

Procedimentos de armazenagem deste tipo são utilizados eficientemente em programas computacionais de análise estrutural. [26,30,31]

VII.2 - MÉTODOS BÁSICOS

VII.2.1 - JACOBI

O método de Jacobi fornece a solução completa do problema, isto é, todos os autovalores e autovetores.

Durante cada passo k da solução, as matrizes permanecem simétricas, podendo-se trabalhar com sua parte triangular superior.

No método de Jacobi Generalizado se evita a transformação do problema para a forma padrão, calculando diretamente todos os autovalores e autovetores do problema generalizado.

Pode-se demonstrar que a convergência do método é quadrática, quando os elementos fora da diagonal são de pequena magnitude, ou seja, quando o problema está quase resolvido. Por isso, quando os elementos não-diagonais são esparsos e pequenos, o método de Jacobi é bastante eficiente. [11]

Grandes vantagens do método de Jacobi são sua simplicidade, facilidade de implementação computacional, estabilidade e convergência.

Os cálculos envolvidos na solução estão representados abaixo, onde é fornecido o número de operações e a memória principal requerida, para uma varredura das matrizes. O número total de varre-

duras completas dependem da magnitude e posição dos elementos não-diagonais e da precisão estabelecida para a solução. Em geral, a solução é obtida depois de 2 a 8 varreduras. [11,12,18]

	número de operações	memória requerida
- cálculo dos fatores de acoplamento	6	
$\frac{k_{i,j}^2}{k_{i,i} k_{j,j}}, \frac{m_{i,j}^2}{m_{i,i} m_{j,j}}$		
- anular elemento (i, j)	4n + 12	utilizando simetria das matrizes
$k_{i,i}^* = k_{i,i} m_{j,j} - m_{i,j} k_{j,j}$		
$k_{j,j}^* = k_{j,j} m_{i,i} - m_{i,j} k_{i,i}$		n(n+2)
$k^* = k_{i,i} m_{j,j} - m_{i,j} k_{j,j}$		
$x = \frac{k^*}{2} + (\sin \alpha k^*) \sqrt{\frac{(k^*)^2}{4} + k_{i,i}^* k_{j,j}^*}$		
$\alpha = \frac{k_{j,j}^*}{x} \quad e \quad \beta = -\frac{k_{i,i}^*}{x}$		
$K_{k+1} = P_k^t K_k P_k$		
$M_{k+1} = P_k^t M_k P_k$		
- cálculo dos autovetores	2n	n ²
$(P_1 \dots P_{k-1}) P_k$		
- total para 1 varredura	3n ³ + 6n ²	2n ² + 2n

Tabela 7.1 - Sumário do Método de Jacobi Generalizado

Como numa análise dinâmica por elementos finitos estamos interessados, na maioria das vezes, em poucos autopares não se justifica a aplicação direta do método de Jacobi, principalmente para grandes problemas.

Porisso o método de Jacobi deve ser empregado em problemas que

envolvam matrizes de pequena ordem ou como método auxiliar de um processo de solução (caso do método da iteração por subespaços onde é aplicado para resolução de um problema de ordem reduzida).

VII.2.2 - ITERAÇÃO VETORIAL

Os métodos de iteração vetorial são particularmente simples de implementar de forma que se possa levar vantagem da esparsidade das matrizes.

Uma dificuldade inicial destes métodos é que convergência pode ser muito lenta, dependendo da razão μ_1/μ_2 (iteração inversa) e μ_{n-1}/μ_n (potência), o que leva a utilização do "deslocamento espectral".

Em ambos métodos a utilização do deslocamento aumenta a rapidez de convergência. No entanto, para o método da potência, a convergência pode ser obtida apenas para o menor (μ_1, ϕ_1) ou o maior (μ_n, ϕ_n) autovetor. Para a iteração inversa, a utilização do deslocamento possibilita a obtenção de qualquer autovetor e a taxa de convergência pode ser bastante alta, segundo uma apropriada escolha de δ . Por isso o método da iteração inversa é muito mais importante na determinação de valores próprios para análise de vibrações.

Na prática, entretanto, a dificuldade reside em arbitrar um valor conveniente para o deslocamento δ .

Uma outra dificuldade da iteração vetorial é que após a convergência do método para um autovetor, digamos (μ_1, ϕ_1) , é necessário utilizar um processo de ortogonalização vetorial para impedir que a convergência se dê novamente para o mesmo autovetor. Para tal é necessário calcular os autovetores com precisão relativamente alta e aplicar o processo de ortogonalização em cada passo da iteração. É também impraticável garantir a convergência para um autovetor espe-

cífico, arbitrariamente escolhido.

VII.2.3 - MÉTODOS DE ITERAÇÃO POLINOMIAL E MÉTODOS BASEADOS NA PROPRIEDADE DA SEQUÊNCIA DE STURM

O método de iteração polinomial requer, para cada iteração, $1/2nm_k^2 + 3/2nm_k$ operações para decomposição triangular e cerca de $1/2nm_k^2$ para o cálculo de $p(\mu)$, onde m_k = metade da largura de banda de K . Para matrizes de pequena largura o método é eficiente.

Entretanto, durante a iteração, o método pode "passar" por duas raízes por exemplo, o que não seria detectado através da mudança de sinal. Por isso o método de iteração polinomial só é implementado em conjunto com outras técnicas.

O método da biseccção pode ser aplicado diretamente ao problema generalizado, determinando apenas os autovalores. Uma evidente limitação é que os autovetores não podem ser determinados. Entretanto, quando os autovalores são calculados com alguma precisão, pode ser utilizado o método da iteração inversa para tal.

O método da biseccção é eficientemente utilizado para sistemas de alta ordem de pequena largura de banda, pois é baseado na decomposição triangular de matriz ($1/2nm_k^2 + 3/2nm_k$ operações por decomposição).

E particularmente eficiente quando são requeridos alguns poucos autovalores dentro de um determinado intervalo, distante de μ_1 .

O método possui entretanto duas grandes desvantagens: a convergência é muito lenta quando existe um agrupamento de autovalores e pode ser necessário a permutação entre linhas da matriz K durante a decomposição triangular, requerendo maiores número de cálculos e memória pois a simetria é destruída.

VII.3 - MÉTODOS AVANÇADOS

VII.3.1 - MÉTODO DA BUSCA DO DETERMINANTE

O método da busca do determinante é normalmente utilizado para o cálculo dos p menores autovalores e correspondentes autovetores do problema generalizado.

A idéia básica do método é determinar uma boa aproximação, de forma econômica, de um autovalor e a partir daí aplicar o método da iteração inversa para a determinação de um autopar.

Obtendo-se uma boa aproximação do autovalor requerido, não é necessário proceder a ortogonalização com relação a todos os autovetores calculados previamente. Na referência [3] sugere-se utilizar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt com relação aos últimos 6 autovetores calculados, durante a aplicação da iteração inversa.

O método da busca do determinante é mais eficiente quando implementado como uma rotina de solução "in core", quer dizer, na memória principal do computador. Como este método tem sido aplicado a análise de matrizes de pequena largura de banda em computadores de grande porte, sistemas de alta ordem podem ser resolvidos utilizando-se a memória principal.

O número de iterações necessária para a solução depende do sistema considerado. São necessárias cerca de seis iterações da secante e seis iterações inversas para a determinação de um autopar.

A tabela abaixo apresenta o sumário da solução [3]:

	número de operações	memória requerida
- iteração da secante		
$\bar{K} = K - \delta_k M$	n	
$\bar{K} = L D L^t$	$1/2nm^2 + 3/2nm$	
$p(\delta_k) = \prod_{i=1}^n d_{ii}$	n	
- iteração inversa		utilizando simetria das matrizes
$\bar{K} \bar{x}_{k+1} = y_k$	$n(2m+1)$	$n(m+1) + 10n$
$\bar{y}_{k+1} = M \bar{x}_{k+1}$	n	
$R(\bar{x}_{k+1}) = \frac{\bar{x}_{k+1}^t y_k}{\bar{x}_{k+1}^t y_{k+1}}$	2n	
$y_{k+1} = \frac{\bar{y}_{k+1} - \sum_{j=1}^6 \alpha_{k+1,j} \phi_{k+1,j}}{(\bar{x}_{k+1}^t y_{k+1})^{1/2}}$	13n	
onde $\phi_j = M \phi_j$ e $\alpha_j = \bar{x}_{k+1}^t \phi_j$		
- estimativa do erro	$5nm+2n$	
- total para p menores autopares	$(2nm^2+26nm+116n)p$	
supondo 6 iterações por autopar		

Tabela 7.2 - Sumário do método da busca do determinante, considerando a matriz de massa diagonal.

(m = metade da largura de banda de K)

VII.3.2 - METODO DA ITERAÇÃO POR SUBESPACOS

Quando a largura de banda das matrizes K e M aumenta, a iteração através de polinômios requerem muito mais operações do que a iteração polinomial. Nestes casos é vantajoso utilizar o método da iteração por subespaços, que se baseia na iteração inversa simultânea com um conjunto de vetores.

O método também foi desenvolvido para problemas em que as matrizes são grandes demais para serem armazenadas na memória principal do computador.

O objetivo do método é determinar os p menores autovalores e correspondentes autovetores, sendo aplicado diretamente ao problema generalizado.

É utilizado o fato de que os autovetores formam uma base M -ortonormal do espaço vetorial de dimensão p . Através da iteração (simultânea com vários vetores) inversa, a base vetorial formada pelos vetores iniciais, E_1 , irá continuamente, até a precisão pré-estabelecida, se aproximando da base formada pelos autovalores, E .

Supondo que a ordenação dos vetores em X_{k+1} é tal que o i -ésimo elemento diagonal em U_{k+1} é maior que o $(i-1)$ -ésimo elemento, $i=2, \dots, p$, então a i -ésima coluna de X_{k+1} converge linearmente para ϕ_i e a taxa de convergência é dada por μ_i / μ_{p+1} . Consequentemente os primeiros modos convergem mais rapidamente. Em geral a iteração é realizada com q vetores ($q > p$) para acelerar o processo de convergência mas, naturalmente, isto requer um adicional de cálculo em cada iteração. Pela experiência, tem sido proposto que uma escolha adequada é $q = \min(2p, p+8)$. [1,3,31]

A tabela abaixo apresenta um sumário do método da iteração por subespaços, indicando número de operações e memória requerida. [3]

	número de operações	memória requerida
- fatorização de K		
$K = L D L^t$	$1/2nm^2 + 3/2nm$	
- iteração subespaço		
$K \bar{X}_{k+1} = Y_k$	$nq(2m+1)$	método implementado utilizando a memória auxiliar
$K_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^t Y_k$	$1/2nq(q+1)$	
$\bar{Y}_{k+1} = M \bar{X}_{k+1}$	nq	
$M_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^t \bar{Y}_{k+1}$	$1/2nq(q+1)$	
$K_{k+1} Q_{k+1} = M_{k+1} Q_{k+1} U_{k+1}$	$10q^3$	
$Y_{k+1} = \bar{Y}_{k+1} Q_{k+1}$	nq^2	
- sequência Sturm		
$\bar{K} = K - \delta_k M$	n	
$\bar{K} = L D L^t$	$1/2nm^2 + 3/2nm$	
- estimativa do erro	$5nm+2n$	
- total para p menores autovalores supondo 10 iterações e $q = \min\{2p, p+8\}$	$nm^2 + nm(3+5p) + 2np + 20nq(m+q+3/2) + 100q^3$	

Tabela 7.3 - Sumário do método da iteração por subespaços, considerando a matriz de massa diagonal.
(m = metade da largura de banda de K)

VII.3.3 - MÉTODO DE LANCZOS

O método de Lanczos tem sido aplicado na determinação dos menores autovalores e correspondentes autovetores.

Pode ser aplicado ao problema clássico ou diretamente ao problema generalizado utilizando-se do artifício da redução implícita.

Apesar do custo inicial da redução para a forma clássica, na primeira versão do método (problema clássico) a matriz A só é envolvida em pré-multiplicações com vetores (Ax), o que possibilita a exploração das características especiais de A.

Na implementação direta sobre o problema generalizado, não há a necessidade de se reduzir o problema. Entretanto, a cada iteração, deve-se resolver o sistema de equações (6.62).

Após terceira iteração é possível armazenar o vetor q_{j-1} na memória auxiliar. Ele não é necessário até que o autovetor ϕ_j tenha que ser calculado através de $\phi_j = Q y_j$.

A tabela abaixo fornece um resumo do método, indicando o número de iterações e memória requerida (adaptado da ref.[29]).

	número de operações	memória requerida
- fatorização de K		
$K = L D L^t$	$1/2nm^2 + 3/2nm$	
- cálculo vetores de Lanczos	$(2m+1)n + 6n$	
$q_j = r_{j-1} / \beta_j$		
$r_j = K^{-1} M q_j$		$n(m+1) + 4n$
$r_j = r_j - \beta_j q_{j-1}$		$+ 2j$
$\alpha_j = r_j^t M q_j$		
$\beta_{j+1} = [r_j^t M r_j]^{1/2}$		
- ortogonalização com relação a um autovetor	$2n$	
- testar convergência e computar um autovetor	$30j + nj$	
- total para p autopares supondo $2p$ iterações para a solução	$1/2nm^2 + 3/2mn + 2pn(2m+9) + p(2p+1)(n+30)$	

Tabela 7.4 - Sumário do método de Lanczos considerando a matriz de massa diagonal.

(m = metade da largura de banda de K).

VII.4 - COMPARAÇÃO DE EFICIÊNCIA

Para fazermos uma comparação aproximada da eficiência computacional dos métodos, poderemos utilizar o número de operações relativos a cada método, fornecido nas tabelas 7.1, 7.2, 7.3 e 7.4.

método	no. operações
Lanczos	$1/2nm^2 + 3/2nm + 2np(2m+9) + (n+30)(p+2p^2)$
It. Subespaços	$nm^2 + nm(3+5p) + 2np + 20nq(m+q+3/2) + 100q^3$
B. Determinante	$(2nm^2 + 26nm + 116n)p$
Jacobi Gener.	$\approx 10n^3$

Tabela 7.5 - Comparação de eficiência computacional, formulação geral

Atribuindo valores típicos de problemas de análise estrutural, podemos obter a tabela abaixo,

n	m	p	número de operações (M=10 ⁶)			
			Lanczos	Iter. Sub.	Busca Det.	Jacobi
1000	20	7	1.02 M	11.91 M	10.05 M	10000 M
1000	40	7	2.21 M	25.07 M	30.49 M	10000 M
468	45	60	9.68 M	112.55 M	149.83 M	1025 M

Tabela 7.6 - Comparação de eficiência computacional, valores específicos (n=ordem das matrizes; m=meia largura de banda de K; p=número de autopares desejados). A matriz M é suposta diagonal.

VII.5 - UTILIZAÇÃO DE MEMÓRIA AUXILIAR - MINIS E MICROCOMPUTADORES

Durante o processo de cálculo dos autovalores/autovetores é necessário a resolução de sistemas lineares de equações.

A discretização de estruturas pelo método dos elementos finitos resulta em grandes sistemas de equações. Em muitos problemas, os sistemas são tão grandes que a necessidade de armazenagem de dados excede a quantidade de memória principal do computador, particularmente quando minis/microcomputadores são utilizados.

Nestas situações é necessário a utilização da memória auxiliar.

Um dos procedimentos mais utilizados é dividir as matrizes em blocos, ou submatrizes, e proceder a resolução do sistema por partes, permanecendo na memória principal apenas a submatriz que está sendo efetivamente utilizada. [43,43]

Assim pode-se analisar estruturas cuja necessidade de armazenagem excede a memória principal, fazendo-se uso da memória secundária para armazenar os blocos de informações relativas a cada submatriz.

Quando a memória auxiliar é utilizada por um programa, os benefícios derivados de uma maior capacidade têm a sua contrapartida no aumento do tempo de processamento. Conseqüentemente, é essencial que a transferência de dados entre as memórias principal e auxiliar (E/S) seja minimizada para tornar estes métodos práticos.

No programa SAP-IV [31], é utilizado o método da iteração por subespaços para determinação dos autovalores/autovetores de sistemas cuja necessidade de armazenagem de dados supera a quantidade de memória principal do computador. Para a rotina desenvolvida os requisitos de memória principal são pequenos, utilizando-se da estratégia descrita acima.

O método da busca do determinante também é disponível no pro-

grama SAP-IV. Entretanto este método requer muitas decomposições triangulares e pode competir com a iteração por subespaços somente para problemas de pequena largura de banda e que podem ser resolvidos sem utilização de memória auxiliar.

No método da iteração por subespaços, as equações (6.32) a (6.36) são resolvidas de forma independente, utilizando-se do procedimento de partição de matrizes.

Durante o processo de solução através da iteração por subespaços, o sistema de equações (6.35) é resolvido "in core", ou seja na memória principal.

Para a solução de (6.35) utiliza-se o método de Jacobi Generalizado, que requer cerca de $2q^2 + 2q$ locações de memória e, no caso de muitos vetores serem calculados, este requisito de memória pode governar o tamanho do problema.

A necessidade de memória para o método de Lanczos é consideravelmente menor do que para a iteração por subespaços. Além dos fatores L e D (decomposição triangular de K) deve ser mantido na memória principal apenas a matriz tridiagonal ($2j$ locações de memória), 2 vetores ($2n$ locações) para cálculo do vetor de Lanczos e 1 vetor (n locações) para a ortogonalização.

A iteração por subespaços deve acessar a base de vetores a cada iteração ($2qn$ locações) e resolver o problema reduzido (6.35) também durante cada iteração ($2q^2 + 2q$ locações), além dos fatores L e D da matriz K.

VII.8 - IMPLEMENTAÇÃO DOS MÉTODOS EM COMPUTAÇÃO PARALELA/VETORIAL

O desenvolvimento de novas arquiteturas de computação têm possibilitado a solução de problemas mais complexos e a redução do

tempo de processamento. Algoritmos, baseados em cálculos sequenciais necessitam ser modificados ou substituídos por algoritmos que exploram as vantagens destes novos sistemas.

O processamento paralelo implica em 2 ou mais tarefas sendo executadas simultaneamente, em diferentes processadores. Assim sendo, as aplicações mais adequadas ao processamento paralelo são aquelas que requerem um grande número de cálculos independentes, com um mínimo de comunicação entre os processadores.

Muito trabalho tem sido devotado ao desenvolvimento de algoritmos para computadores de arquitetura avançada. [43-45]

É proposta a implementação do método de Lanczos para computação paralela [48]. A idéia básica do processo é introduzir diversos deslocamentos espectrais δ , diferentes, e então realizar a computação simultânea dos autovalores (nos diferentes processadores), em diferentes faixas do espectro. Deste modo, a implementação do método é feita nos seguintes passos:

- a) introduzir o deslocamento espectral δ
- b) decomposição triangular das matriz de rigidez utilizando o deslocamento δ

$$K' = K - \delta M = L D L^t$$

- c) proceder a redução para o problema $T y = \mu^* y$
- d) utilizar o método da biseccção para obter os autovalores da matriz tridiagonal.

A utilização desta estratégia leva a superposição de alguns autovalores, ou melhor, ao cálculo de mesmos autovalores por 2 processadores diferentes. Isto acarreta, naturalmente, um certo desperdício de tempo, embora estes autovalores repetidos seja utilizados para verificação dos resultados.

Através da utilização de vários deslocamentos espectrais é pos-

sível explorar o paralelismo pois cada processador pode executar os cálculos em faixas diferentes do espectro, independentemente, podendo assim manter as vantagens do método de Lanczos. Como forma de evitar a excessiva superposição de cálculos, proporia a utilização da propriedade da sequência de Sturm para separação das faixas, antes da aplicação do algoritmo de Lanczos. Desta maneira, conhecendo-se a priori o número de autovalores situados dentro das determinadas faixas, seria possível minimizar os cálculos.

A utilização da estratégia do deslocamento parece, segundo estes experimentos iniciais, ser bastante eficaz no processamento paralelo pois também acelera a convergência [29,32].

VII.7 - OBSERVAÇÕES SOBRE O DESENVOLVIMENTO DE PROGRAMAS

Atualmente existem poderosos programas de análise estrutural comercialmente disponíveis tais como SAP, NASTRAN, GENESYS, STRUDL, etc. A produção de um bom programa, no entanto, não é uma tarefa fácil exigindo uma grande técnica e experiência de programação. Como em qualquer campo da engenharia, o programador deve criar um protótipo, testá-lo repetidamente e ir obtendo melhorias antes de lançar comercialmente o produto que será utilizado em diferentes computadores.

Devido ao tamanho das matrizes envolvidas, tais programas possuem uma arquitetura bastante complexa de forma a buscar o máximo de eficiência, reduzindo ao mínimo a memória requerida e o tempo de processamento. Em geral, estes programas possuem uma boa combinação de técnicas para obtenção das matrizes K e M , movimentação de dados entre a memória principal e auxiliar, determinação dos resultados e manuseio de informações.

Estas dificuldades, associadas ao alto custo do desenvolvimento

de um novo programa, têm levado á adaptação dos programas comercialmente existentes, caso dos departamentos de Engenharia Mecânica e Naval da EPUSP que utiliza o programa SAP-4 para desenvolvimento de suas análises. E também o caso do "SAP User's Group" da University of Southern California que já produziu as versões SAP-5 , SAP-6 e SAP-7.

ESCOLA POLITECNICA - USP
SERVICO DE BIBLIOTECAS

VIII - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A análise dinâmica de estruturas discretizadas por elementos finitos requer um grande esforço computacional. A ordem das matrizes envolvidas pode atingir até alguns milhares, dependendo do tamanho e complexidade da estrutura e refinamento da análise.

Os altos custos computacionais envolvidos aliados á necessidade de se resolver problemas de crescente complexidade têm gerado muitas pesquisas de métodos mais eficientes. A importância que o estudo de grandes problemas matriciais assumiu, proporcionou o desenvolvimento de um novo campo de estudo, comumente denominado de "tecnologia de matrizes esparsas".

Muitos métodos eficientes são atualmente disponíveis para a resolução do problema de valores próprios envolvendo matrizes de pequena ordem [18,26], sendo que uma boa parte destes são baseados nas técnicas descritas no capítulo V.

Para problemas grandes, ou seja, aqueles em que apenas uma parte das matrizes é possível de ser armazenada na memória principal, os métodos básicos são, entretanto, ineficientes.

Desta forma, quando o sistema considerado é grande, procura-se combinar as técnicas básicas descritas no capítulo V no sentido de se criar procedimentos mais poderosos de cálculo, denominados neste trabalho de métodos avançados. As técnicas descritas no capítulo VI são extensivamente utilizadas em diversos programas computacionais. [3,9,18,26,29,30,31]

Uma grande dificuldade reside em como comparar a eficiência dos diversos métodos. A comparação dos métodos através de programas, utilizados como "caixas pretas" não fornecem um indicativo seguro sobre as vantagens de um método sobre outro, que permita a generalização do conceito.

Assim, procurou-se analisar os métodos com relação a memória e número de operações necessários a cada passo de iteração.

Devido ao caráter essencialmente iterativo dos métodos é impraticável determinar-se o número de iterações necessárias para a convergência. Isto é extremamente dependente das características do problema (como da distribuição dos autovalores, por exemplo). Para uma avaliação do número de iterações necessárias, procurou-se recorrer a valores disponíveis na bibliografia.

Naturalmente, os valores encontrados nas referências são úteis na medida em que se pode estabelecer uma "previsão" sobre a rapidez dos métodos. São valores considerados médios surgidos da resolução de problemas típicos de análise estrutural, podendo sofrer variações conforme o tipo de problema e solução requerida.

O programa SAP-IV utiliza os métodos da busca do determinante e da iteração por subespaços. O método da busca do determinante é adequado a resolução de problemas cuja largura de banda das matrizes é pequena, pois é baseado em iterações polinomiais. A implementação do método é feita utilizando-se apenas a memória principal do computador. Como são necessárias muitas decomposições triangulares, a utilização da memória auxiliar diminui bastante a eficiência do método.

O método da iteração por subespaços é um procedimento mais geral utilizado pelo programa para a determinação de autovalores/autovetores. É mais eficiente na resolução de sistemas com grande largura de banda ou sistemas grandes demais para armazenagem na memória principal do computador.

Através da análise realizada, é possível se prever uma considerável superioridade do método de Lanczos com relação aos métodos da iteração por subespaços e busca do determinante. Esta conclu-

são é verificada na prática por vários investigadores [29, 35, 36, 40]. As comparações de eficiência são realizadas apenas considerando-se o tempo de processamento central, utilizando os programas (computadores de grande porte, digitais) como "caixas pretas". As vantagens do método de Lanczos podem, a princípio, serem estendidas para a implementação em mini/microcomputadores e também para o processamento paralelo.

Deixaria como sugestão para futuros trabalhos, o desenvolvimento de um algoritmo baseado no método de Lanczos a ser implementado no programa SAP-IV. A versão SAP-7, desenvolvida pela University of Southern California, utiliza o método de Lanczos como o algoritmo recomendado para a solução do problema de valores próprios [35]. Para este desenvolvimento seria necessário fazer uma comparação das vantagens da implementação com redução implícita do problema.

Outra sugestão para trabalhos seria a análise através da utilização do conjunto de vetores de Lanczos para gerar a base de transformação de coordenadas, em vez do conjunto de autovetores utilizado no método da superposição modal. Proposição original em: Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors, Edward L. Wilson et alli, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 10 : 813-821, 1982. A referência 37 aborda o método para análise dinâmica de plataformas marítimas, indicando vasta bibliografia.

IX. BIBLIOGRAFIA

- [1] CLOUGH, R. W. & PENZIEN, J. Dynamics of Structures. New York, McGraw-Hill, 1975.
- [2] CRAIG JR., R. R. Structural Dynamics. New York, John Wiley & Sons, 1981.
- [3] BATHE, K. J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1976.
- [4] CLOUGH, R. W. Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Response. In : Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Designing. Alabama, University of Alabama Press, 1971.
- [5] TIMOSHENKO, S. ; YOUNG, D. H. ; WEAVER JR., W. Vibration Problems in Engineering. 4. ed., New York, John Wiley & Sons, 1974.
- [6] SALVAGNI, R. B. Vibrações em Navios; análise pelo método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Depto. de Engenharia Naval. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1978.
- [7] HURTY, W. C. & RUBINSTEIN, M. F. Dynamics of Structures. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1964.
- [8] WILSON, E. L. Structural Analysis in Microcomputers. In: Engineering Software for Microcomputers. Swansea, United Kington, Pineridge Press, 1984.
- [9] ZIENKIEWICZ, O. C. The Finite Element Method. 3.ed., London, McGraw-Hill, 1977.
- [10] HARRIS, C. M. & CREDE, C. E. Shock and Vibration Handbook. 2.ed., New York, McGraw-Hill, 1976.
- [11] WILKINSON, J. H. The Algebraic Eigenvalue Problem. London, Oxford University Press, 1965.

- [12] SCHWARZ, H. R. ; RUTISHAUSER, H. ; STIEFEL, E. Numerical Analysis of Symmetric Matrices. Englewood Cliffs , New Jersey, Prentice-Hall, 1973.
- [13] HOUSEHOLDER, A. S. The Theory of Matrices in Numerical Analysis. New York, Blaisdel Publishing Co., 1964.
- [14] CRANDAL, S.H. Engineering Analysis. New York, McGraw-Hill , 1956.
- [15] FADDEEV, D. K. & FADDEEVA, V. N. Computational Methods of Linear Algebra. San Francisco, W. H. Freeman, 1963.
- [16] FOX, M. A. An Introduction to Numerical Linear Algebra. Oxford, Clarendon Press, 1964.
- [17] STEWART, G. W. Introduction to Matrix Computations. New York, Academic Press, 1973.
- [18] WILKINSON, J. H. & REINSCH, C. Linear Algebra - Handbook for Automatic Computation. Vol. II, New York, Springer-Verlag, 1971.
- [19] GUPTA, K. K. Solution of Eigenvalue Problems by Sturm Sequence Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 4 : 379-404, 1972.
- [20] BATHE, K. J. & WILSON, E. L. Solution Methods for Eigenvalue Problems in Structural Mechanics. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 6 : 213-226 , 1973.
- [21] BATHE, K. J. & RAMASWAMY, S. An Accelerated Subspace Iteration Method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 23 : 313-331, 1980.
- [22] JENNINGS, A. Solution of Sparse Eigenvalue Problems. In: Sparsity and its Applications. Cambridge, Cambridge University Press, 1985.

- [23] _____. Eigenvalue Methods and the Analysis of Structural Vibration. In: Sparse Matrices and their Uses. London, Ed. I.S. Duff, Academic Press, 1981.
- [24] WILSON, E. L. & ITOH, T. An Eigensolution Strategy for Large Systems. Computers & Structures. 16 : 259-265, 1983.
- [25] WILSON, E. L. Numerical Methods for Dynamic Analysis. In: Numerical Methods in Offshore Engineering. New York, John Wiley & Sons, 1978.
- [26] GARBOW, B. S.; BOYLE, J. M.; DONGARRA, J. J.; MOLER, C. B. Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide Extension. Lecture Notes in Computer Science, Vol.51, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [27] PETERS, G. & WILKINSON, J. H. $Ax = Bx$ and the generalized Eigenproblem. SIAM Journal Numerical Analysis, 7 : 479-492, 1970.
- [28] STEWART, G. W. A Bibliographical Tour Of The Large, Sparse Generalized Eigenvalue Problem. In: Sparse Matrix Computations. London, Academic Press, 1976.
- [29] NOUR-OMID, B.; PARLETT, B. N.; TAYLOR, R.L. Lanczos Versus Subspace Iteration for Solution of Eigenvalue Problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19 : 859-871, 1983.
- [30] CORR, R. B. & JENNINGS, A. A Simultaneous Iteration Algorithm for Symetric Eigenvalue Problems. International Journal for Numerical Methods in Enginnering, 10 : 647-663, 1976.
- [31] BATHE, K. J.; WILSON, E. L.; PETERSON, F.E. SAP IV - A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems. Berkeley, University of California, 1974.

- [32] PARLETT, B.N. THE SYMMETRIC EIGENVALUE PROBLEM, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1980.
- [33] PISSANETZKY, S. SPARSE MATRIX TECHNOLOGY, New York, Academic Press, 1984.
- [34] SCOTT, D. S. The Lanczos Algorithm. In: Sparse Matrices and Their Uses. London, Ed. I.S.Duff, Academic Press, 1981.
- [35] WEINGARTEN, V.I; RAMANATHAN, R.K. ; CHEN, C.N. Lanczos Eigenvalue Algorithm for Large Structures on a Minicomputer Computers & Structures, 16 : 253-257, 1983.
- [36] CHANG, S.C. Lanczos Algorithm with Selective Reorthogonalization for Eigenvalue Extraction in Structural Dynamic and Stability Analysis. Computers & Structures, 23 : 121-128, 1986.
- [37] COUTINHO, L.G.A. et alli. The Application of the Lanczos Mode Superposition Method in Dynamic Analysis of Offshore Structures. Computers & Structures, 25 : 615-625, 1987.
- [38] SMITH, I.M. & HESHMATI, E.E. Use of a Lanczos Algorithm in Dynamic Analysis of Structures. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 11 : 585-588, 1983.
- [39] OJALVO, I.U. Proper Use of Lanczos Vectors for Large Eigenvalue Problems. Computers & Structures (Trends in Numerical Analysis and Parallel Algorithms), 20 : 115-120, 1985.
- [40] CHOWDHRY, P.C. The Truncated Lanczos Algorithm for Partial Solution of the Symmetric Problem. Computers & Structures, 6 : 439-446, 1976.
- [41] MATTHIES, H.G. A Subspace Lanczos Method for the Generalized Symmetric Eigenproblem. Computers & Structures, 21 : 319-325, 1985.

- [42] JENNINGS, A. & ORR, D.R.L. Application of the Simultaneous Iteration Method to Undamped Vibration Problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 3 : 13-24, 1971.
- [43] WEAVER JR., W. COMPUTER PROGRAMS FOR STRUCTURAL ANALYSIS. New York, Van Nostrand, 1967.
- [44] CAREY, G.F. & ODEN, J.T. FINITE ELEMENTS - COMPUTATIONAL ASPECTS, VOL III. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1984.
- [45] FARHAT, C. & WILSON, E. A New Finite Element Concurrent Computer Program Architecture. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24 : 1771-1792, 1987.
- [46] NOOR, A.K. Parallel Processing in Finite Element Structural Analysis. Engineering with Computers, 3 : 225-241, 1988.
- [47] STORAASLI, O. & RANSOM, J. Structural Dynamic Analysis on a Parallel Computer: The Finite Element Machine. Computers & Structures, 26 : 551-559, 1987.
- [48] BOSTIC, S.W. & FULTON, R.E. Implementation of the Lanczos Method for Structural Vibration Analysis on a Parallel Computer. Computers & Structures, 25 : 395-403, 1987.