

RICARDO BUCHALLA AUADA

**UTILIZAÇÃO DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS EM DINÂMICA DOS
FLUIDOS COMPUTACIONAL**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em
Engenharia.

São Paulo, 1997

RICARDO BUCHALLA AUADA

**UTILIZAÇÃO DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS EM DINÂMICA DOS
FLUIDOS COMPUTACIONAL**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em
Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. Julio Romano Meneghini

São Paulo, 1997

DEDALUS - Acervo - EPMN



31600010109

À pessoa muito especial que é a minha mãe, Leila.

Agradecimentos

O trabalho desenvolvido foi muito proveitoso e trouxe muita satisfação pessoal e profissional. Naturalmente, como em qualquer empreendimento, a participação de outras pessoas, como amigos, colegas, direta ou indiretamente, foi fundamental ao bom encaminhamento desse trabalho. De forma breve, espero poder aqui expressar minha gratidão.

Como não deveria deixar de ser, de forma justa, gostaria em primeiro lugar de agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Julio R. Meneghini, por todo o empenho e paciência dedicados. Desde o início do projeto, de forma lúcida, mostrou quais rotas seriam melhores e, ao mesmo tempo, estimulou o uso da criatividade de forma ampla. Isso transformou este desafio numa jornada agradável e intrigante, despertando grande paixão pela pesquisa científica.

Ao Prof. Dr. Otávio M. Silvaes pela orientação no início do mestrado, acompanhando as matérias cursadas e ajudando na escolha de temas interessantes ao estudo. A troca de orientador foi devida unicamente a apresentação de uma proposta feita pelo Prof. Dr. Meneghini, que despertou muito interesse, e que fora muito bem aceita pelo Prof. Dr. Silvaes.

Ao Ernani Volpe por auxiliar no desenvolvimento da análise vetorial do processo de geração de malhas, através de sugestões e aprimorando a visão geométrica do problema. Ao Cesáreo de La Rosa, por examinar os resultados obtidos, verificando a validade dos mesmos, além de auxiliar na redação de parte do texto. Ao Fábio Saltara por discutir temas relacionados ao método numérico, acrescentando valor ao trabalho.

A todos os amigos da *sala TS 13*, pelo apoio e companheirismo, tornando o ambiente de trabalho descontraído e motivador. Aos colegas Tarcísio Hess e Antenor Freitas, companheiros do dia-a-dia. A todos aqueles que, de uma forma ou outra, estiveram presentes durante o desenvolvimento deste trabalho.

De forma especial, à Claudia, companheira dos dias e das noites que envolveram este trabalho. Obrigado pela paciência e confiança depositadas nesta empreitada.

Ao CNPQ, pelo apoio recebido através de bolsa de estudo e à FAPESP por financiar equipamentos.

Sumário

LISTA DE SÍMBOLOS	X
LISTA DE FIGURAS	XIII
LISTA DE TABELAS	XXI
I. INTRODUÇÃO	1
II. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
1. GERAÇÃO DE MALHAS PARA DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL	9
1.1 Malhas Estruturadas	9
1.1.1 Introdução	9
1.1.2 Fundamentos matemáticos	10
1.1.3 Definição do sistema de coordenadas	14
1.1.4 Controle do espaçamento da malha	18
1.1.5 Geração de malhas ortogonais	21
1.1.6 Resultados	22
1.2 Malhas não-estruturadas - fundamentos geométricos	28
1.2.1 Introdução	28
1.2.2 Definição do contorno (obtenção da frente de partida)	29
1.2.3 Criação dos triângulos	30
1.2.4 Verificação de um ponto novo	33
1.2.5 Atualização da frente	34
1.2.6 Condição de fechamento da malha	39
1.3 Malhas não-estruturadas - fundamentos algébricos	40
1.3.1 Introdução	40
1.3.2 Definição de segmento x vetor	41
1.3.3 Vetores ortogonais	42
1.3.4 Determinação de interior X exterior do domínio	44
1.3.5 Equação de uma reta	44

1.3.6 Cálculo de ângulos entre dois segmentos consecutivos	45
1.3.7 Bissetriz de ângulos	47
1.3.8 Altura de triângulos	49
1.3.9 Verificação de um ponto novo	50
1.4 Malhas não-estruturadas - Parâmetros	52
1.4.1 Introdução	52
1.4.2 Influência de LS e LI na formação dos triângulos	53
1.4.3 Resultados	54
1.4.3.1 Malha gerada no interior de um círculo	60
1.4.3.2 Malha gerada no interior de um Túnel de Vento	64
1.4.3.3 Malha gerada no interior de meio Túnel de Vento	66
1.4.3.4 Malha gerada ao redor de um degrau	66
2. TRATAMENTO QUALITATIVO DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS	70
2.1 Amaciamento da malha (método dos triângulos)	70
2.1.1 Introdução	70
2.1.2 O processo de amaciar	71
2.1.3 Ajustando os nós	72
2.1.4 Estabelecendo os limites	75
2.1.5 Resultados	77
2.1.5.1 Malha gerada no interior de um círculo	77
2.1.5.2 Malha gerada no interior de um Túnel de Vento	81
2.1.5.3 Malha gerada no interior de meio Túnel de Vento	82
2.1.5.4 Malha gerada ao redor de um degrau	83
2.2 Amaciamento da malha (método dos polígonos)	85
2.2.1 Introdução	85
2.2.2 Definição dos vizinhos	86
2.2.3 O processo de amaciar	87
2.2.4 Considerações finais	88
2.2.5 Resultados	89
2.2.5.1 Malha gerada no interior de um círculo	89
2.2.5.2 Malha gerada no interior de um Túnel de Vento	93
2.2.5.3 Malha gerada no interior de meio Túnel de Vento	94
2.2.5.4 Malha gerada ao redor de um degrau	95
2.3 Domínios multiplamente conexos	97
2.3.1 Introdução	97
2.3.2 Definição do contorno	98
2.3.3 Resultado	101
2.3.3.1 Círculo duplamente conexo	101
2.3.3.2 Círculo triplamente conexo	104
2.3.3.3 Círculo multiplamente conexo	107
2.4 Organização dos dados (conectividade)	110
2.4.1 Introdução	110
2.4.2 Estruturação dos dados	111
2.4.3 Os vizinhos	113
2.4.4 Contorno e frente	114
2.4.5 Parâmetros	115

3. MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS: PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR	117
3.1 Introdução	117
3.2 Discretização da Equação de Condução de Calor	118
3.3 O Esquema Implícito	122
3.4 Utilização do Termo Fonte	124
3.5 Aspectos Geométricos para Malhas Não-estruturadas	125
3.6 Equações Discretizadas para Malhas Não-estruturadas	128
3.7 Método Numérico - Gauss-Seidel	129
3.8 Critérios para Consistência e Convergência	131
3.9 Sobre-relaxação e Sub-relaxação	134
3.10 Resultados	136
3.10.1 Análise Analítica da Condução de Calor Bi-dimensional	137
3.10.2 Análise Numérica da Condução de Calor Bi-dimensional	143
4. MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS: PROBLEMAS DE CONVECÇÃO DE CALOR	146
4.1 Introdução	146
4.2 Discretização da Equação de Convecção	146
4.3 Generalização da Equação de Discretização	151
4.4 Aspectos Geométricas para Malhas Não-estruturadas	155
4.5 Equação de Discretização para Malhas Não-estruturadas	157
4.6 Resultados	159
4.6.1 Análise Analítica da Convecção de Calor (Escoamento Entre Duas Placas Paralelas)	159
4.6.2 Análise Numérica da Convecção de Calor Bi-dimensional	164
5. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES	167
6. SUGESTÕES PARA NOVAS PESQUISAS	176

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Lista de Símbolos

Símbolo	Definição
a_p, a_v	Coefficientes dos termos das equações de discretização do método dos volumes finitos.
a_p^0	Coefficiente do volume P num instante de tempo anterior.
A_p	Área do volume P.
b	Coefficiente originado da integração no volume de controle, do termo linear da fonte, no método dos volumes finitos.
c	Calor específico.
C_p	Calor específico à pressão constante.
D	Componente condutiva do número de Peclet.
D_1, D_2, D_3	Distorção entre os lados de um triângulo.
f	Fator de ponderação.
F	Componente convectiva do número de Peclet.
g_{ij}	Tensor métrico.
$I_{(o)}$	Funcional que representa a ortogonalidade do mapeamento.
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	Versores do sistema de coordenadas cartesiano.
J	Jacobiano da transformação do sistema de coordenadas.

Símbolo	Definição
J_1, J_2	Matrizes Jacobianas de transformações.
k	Condutividade térmica.
LI	Limite inferior para o ângulo α .
LS	Limite superior para o ângulo α .
L_1, L_2, L_3	Lados de um triângulo.
P	Pressão local.
$P(\xi, \eta)$	
ou $P(x, y)$	Função para controle do espaçamento do sistema de coordenadas gerado.
P_1, P_2, P_3	Pontos do espaço cartesiano.
Pe	Número de Peclet.
$Q(\xi, \eta)$	
ou $Q(x, y)$	Função para controle do espaçamento do sistema de coordenadas gerado.
S	Fonte ou sorvedouro de uma propriedade.
S_p, S_c	Termos originários da linearização da fonte da equação de Navier-Stokes.
$S_1, S_2, S_3,$	
S_4, S_5	Pontos da frente de geração da malha não-estruturada.
\bar{S}	Média linearizada do termo fonte.
$\vec{s}(u, v, w)$	Vetor entre dois ponto P_1 e P_2 .
T	Temperatura local.

Símbolo	Definição
T_p^0	Temperatura no volume P num instante de tempo anterior.
T_p^1	Temperatura no volume P num instante de tempo posterior.
u, v, w	Componentes do vetor \vec{s}
V	Centro do volume vizinho.
V'	Projeção do centro do volume vizinho.
V_N	Velocidade normal a face do volume.
V_x, V_y	Velocidades nas direções cartesianas x e y respectivamente.
V_1, V_2, V_3	Centro dos volumes vizinhos ao volume P.
x, y, z	Coordenadas cartesianas.
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Ângulo entre dois segmentos da frente da malha não-estruturada.
Δt	Intervalo de tempo.
ξ, η	Coordenadas generalizadas.
ϕ	Propriedade genérica.
$\Gamma_{(i)}$	Contorno (i) de um corpo ou passagem no espaço físico.
$\Gamma_{(i)}^*$	Contorno (i) de um corpo ou passagem no espaço matemático transformado.
θ	Ângulo entre a normal da face entre dois volumes e o segmento que une os
ρ	Massa específica.
	centros dos dois volumes.

Lista de Figuras

Figura	Descrição	Pág.
1.1	Domínio do escoamento dado em coordenadas cartesianas	11
1.2	Espaço matemático transformado em coordenadas generalizadas	12
1.3	Condições de contorno para se obter as funções $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$	15
1.4	a) Espaço físico; b) Espaço matemático transformado	17
1.5	Malha Homogênea	23
1.6	Malha com Controle de Espaçamento	26
1.7	Malha ortogonalizada	27
1.8	Discretização do contorno do domínio	29
1.9	Caso a) de geração de triângulos	30
1.10	Caso b) de geração de triângulos	32
1.11	Caso c) de geração de triângulos	33
1.12	Frente antes da atualização para o caso a)	35
1.13	Frente depois da atualização para o caso a)	35
1.14	Exemplo da atualização da frente para o caso a)	36
1.15	Frente antes da atualização para o caso b)	36
1.16	Frente depois da atualização para o caso b)	37
1.17	Exemplo da atualização da frente para o caso b)	37
1.18	Frente antes da atualização para o caso c)	38
1.19	Frente depois da atualização para o caso c)	38

Figura	Descrição	Pág.
1.20	Exemplo da atualização da frente para o caso c)	39
1.21	Condição de fechamento da malha	40
1.22	Um vetor definido por dois pontos	42
1.23	Representação de uma base ortogonal	42
1.24	Dois vetores sobre dois segmentos consecutivos da frente	45
1.25	Duas situações possíveis de formação de ângulos entre dois segmentos consecutivos da frente	46
1.26	Ângulo formado entre dois segmentos da frente conforme seção 1.2.3 a)..	47
1.27	Bissetriz do ângulo α	48
1.28	Bissetriz do ângulo α formado por dois segmentos de tamanho diferente..	48
1.29	Ponto médio do segmento para construção do triângulo conforme seção 1.2.3 b)	49
1.30	Perpendicular sobre o ponto médio do segmento para construção do triângulo da seção 1.2.3 b)	50
1.31	Um ponto novo sobre a frente e a verificação de sua posição	51
1.32	Círculo com $LI = \frac{5}{12}\pi$ e $LS = \frac{11}{12}\pi$	55
1.33	Círculo com $LI = \frac{5}{12}\pi$ e $LS = \frac{9}{12}\pi$	56
1.34	Círculo com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$	57
1.35	Círculo com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{8}{12}\pi$	58

Figura	Descrição	Pág.
1.36	Círculo com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{9}{12}\pi$	59
1.37	Túnel com $LI = \frac{7}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$	61
1.38	Túnel com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$	62
1.39	Túnel com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{11}{12}\pi$	63
1.40	Meio-túnel com $LI = \frac{8}{12}\pi$ e $LS = \frac{11}{12}\pi$	64
1.41	Meio-túnel com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{11}{12}\pi$	65
1.42	Degrau com $LI = \frac{8}{12}\pi$ e $LS = \frac{11}{12}\pi$	66
1.43	Degrau com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$	67
1.44	Degrau com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{9}{12}\pi$	68
1.45	Degrau com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{8}{12}\pi$	69
2.1	Lados de um triângulo	72
2.2	Fluxograma de amaciamento	74
2.3	Triângulo ajustando	75
2.4	Malha da figura 1.29 amaciada pelo método dos triângulos, com $LI = \frac{5}{12}\pi$ e $LS = \frac{11}{12}\pi$	78

Figura	Descrição	Pág.
2.5	Malha da figura 1.32 amaciada pelo método dos triângulos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{8}{12}\pi$	79
2.6	Malha da figura 1.33 amaciada pelo método dos triângulos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{9}{12}\pi$	80
2.7	Malha da figura 1.35 amaciada pelo método dos triângulos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$	81
2.8	Malha da figura 1.38 amaciada pelo método dos triângulos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{11}{12}\pi$	82
2.9	Malha da figura 1.42 amaciada pelo método dos triângulos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{9}{12}\pi$	83
2.10	Malha da figura 1.43 amaciada pelo método dos triângulos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{8}{12}\pi$	84
2.11	Elementos vizinhos	86
2.12	Nó central de um polígono formado por elementos vizinhos	86
2.13	Resultante entre os vetores formado pelos vizinhos e o nó central	87
2.14	Nó central colocado no centro do polígono	88
2.15	Malha da figura 1.29 amaciada pelo método dos polígonos, com $LI = \frac{5}{12}\pi$ e $LS = \frac{11}{12}\pi$	90

Figura	Descrição	Pág.
2.16	Malha da figura 1.32 amaciada pelo método dos polígonos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{8}{12}\pi$	91
2.17	Malha da figura 1.33 amaciada pelo método dos polígonos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{9}{12}\pi$	92
2.18	Malha da figura 1.35 amaciada pelo método dos polígonos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$	93
2.19	Malha da figura 1.38 amaciada pelo método dos polígonos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{11}{12}\pi$	94
2.20	Malha da figura 1.42 amaciada pelo método dos polígonos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{9}{12}\pi$	95
2.21	Malha da figura 1.43 amaciada pelo método dos polígonos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{8}{12}\pi$	96
2.22	Domínio multiplamente conexo	98
2.23	Linhas de junção entre contornos	99
2.24	Discretização do contorno	100
2.25	Frente de partida	100
2.26	Domínio duplamente conexo com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$	101
2.27	Malha da figura 2.26 amaciada pelo Método dos Triângulos	102

Figura	Descrição	Pág.
2.28	Malha da figura 2.26 amaciada pelo Método dos Polígonos	103
2.29	Domínio triplamente conexo com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$	104
2.30	Malha da figura 2.29 amaciada pelo Método dos Triângulos	105
2.31	Malha da figura 2.26 amaciada pelo Método dos Polígonos	106
2.32	Domínio multiplamente conexo com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{9}{12}\pi$	107
2.33	Malha da figura 2.32 amaciada pelo Método dos Triângulos	108
2.34	Malha da figura 2.32 amaciada pelo Método dos Polígonos	109
2.35	Formação da malha	111
2.36	Lista com os nós e as respectivas coordenadas	112
2.37	Lista com os elementos e respectivos vértices	112
2.38	Lista com os vizinhos de cada nó	113
2.39	Estrutura da frente	114
2.40	Frente alterada pela deleção de um segmento	115
2.41	Lista de parâmetros	116
3.1	Elemento na fronteira e seus vizinhos	118
3.2	Volume de controle unidimensional	120
3.3	Interpretação gráfica dos esquemas	123
3.4	Região discretizada de um domínio qualquer	126
3.5	Centróide de um volume	127
3.6	Distância entre dois centróides	127
3.7	Distância entre centróides na fronteira	128

Figura	Descrição	Pág.
3.8	Elemento P e seus vizinhos	129
3.9	Linhas de Fluxo de Calor e Isotermas em uma placa retangular. Ao longo de cada lado são mostradas as condições de contorno utilizadas	140
3.10	Malha não-estruturada representando uma placa quadrada	142
3.11	Isotermas do problema bi-dimensional de condução de calor através do método analítico e plotada através do programa de visualização ENSIGHT	143
3.12	Isotermas do problema bi-dimensional de condução de calor através do método numérico empregando a malha não-estruturada da figura 3.10 e plotada através do programa de visualização ENSIGHT	144
4.1	Solução exata para o problema convectivo	151
4.2	Comparação entre a função $A(P)$ e a solução exata para os esquemas da tabela 4.1	153
4.3	Velocidade normal a interface de dois elementos	155
4.4	Componentes da velocidade nos centróides	156
4.5	Componentes da velocidade na interface	156
4.6	Escoamento entre duas placas planas	160
4.7	Distribuição de velocidades do escoamento entre duas placas paralelas	161
4.8	Distribuição de temperaturas para $PrEc \approx 0$	162
4.9	Malha não-estruturada entre duas placas paralelas	163
4.10	Detalhe da malha da figura 4.8 mostrando a região de entrada	163

Figura	Descrição	Pág.
4.11	Isotermas do problema bi-dimensional de convecção de calor através do método analítico e plotada através do programa de visualização ENSIGHT	164
4.12	Isotermas do problema bi-dimensional de convecção de calor através do método numérico empregando a malha não-estruturada da figura 4.8 e plotada através do programa de visualização ENSIGHT	165
5.1	Aproximação entre os valores de V e V'	173

Lista de Tabelas

Tabela	Descrição	Pág.
3.1	Comparação entre a solução analítica e a solução numérica para o problema bi-dimensional de condução de calor	145
4.1	A função $A(IPI)$ para diversos esquemas	153
4.2	Comparação entre a solução analítica e a solução numérica para o problema bi-dimensional de convecção de calor	166

Resumo

Este trabalho tem como primeiro objetivo o desenvolvimento de um gerador de malhas não-estruturadas para aplicação em problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor. O desenvolvimento de um algoritmo baseado no *Método dos Volumes Finitos* para malhas não-estruturadas e para a solução de problemas de condução e convecção é o segundo objetivo.

O gerador de malhas apresentado permite construir malhas não-estruturadas, com elementos na forma triangular, sobre domínios com geometria complexa, adaptadas às fronteiras desse domínio. Além da geração da malha, é apresentado um estudo sobre o tratamento qualitativo da mesma, mostrando dois métodos de amaciamento: o *Método dos Triângulos* e o *Método dos Polígonos*. Alguns resultados são apresentados para ilustrar o processo. Dois algoritmos, um para condução e outro para convecção de calor, foram desenvolvidos, usando os triângulos da malha como volumes de controle. Para validar os resultados, é apresentada uma comparação com uma solução analítica conhecida de problemas com condição de contorno simples. Algumas sugestões são feitas no sentido de aprimorar a metodologia desenvolvida e poder dar continuidade à pesquisa .

Abstract

The first objective of this work is to develop an unstructured mesh generator for Fluids Dynamics and Heat Transfer problems. The development of an algorithm, based on the *Finite Volume Method*, for unstructured meshes and for the solution of conduction and convection problems, is the second objective.

The mesh generator presented allows to construct unstructured meshes, with triangular shape elements, over domains with complex geometry, fitted to the boundaries of this domain. Besides the generation of the mesh, a study about the qualitative enhancement of the meshes is presented using two methods: *Triangles Method* and *Polygons Method*. Some results are shown to illustrate the process. Two algorithms, one for conduction and the other for convection, are developed, using the triangles as the control volumes. For validating the results, a comparison with known analytical solutions of simple boundary conditions problems is made. Some suggestions are made in order to improve the methodology adopted and to keep the track of the research.

I. Introdução

Os problemas de mecânica dos fluidos, assim como transferência de calor, ou ambos integrados, são freqüentes na engenharia, apresentando uma vasta gama de aplicações, desde sistemas de ventilação e processos termodinâmicos, até projetos aerodinâmicos e hidrodinâmicos. Para investigar esses problemas, pode-se utilizar uma abordagem experimental, numérica ou analítica. Na verdade as três se completam.

Este trabalho tem por finalidade apresentar uma abordagem estritamente numérica dos problemas citados acima. Para isso são utilizados modelos matemáticos baseados nas equações gerais de balanço da mecânica dos fluidos. Essas equações se baseiam nos princípios da conservação da massa, energia e quantidade de movimento. Para buscar a solução dessas equações, são utilizados, na maioria das vezes, métodos numéricos. Os métodos numéricos baseiam-se em processos que discretizam o domínio em estudo. Entre os métodos numéricos, os três mais conhecidos são o *Método de Diferenças Finitas*, que aproxima as equações gerais a forma de diferenças, o *Método dos Volumes Finitos*, que considera os fluxos e variações das propriedades em estudo em pequenos volumes de controle e o *Método dos Elementos Finitos*, onde as aproximações são baseadas na aplicação de princípios variacionais ou métodos de minimização de erros da conservação da propriedade em estudo em regiões finitas.

Dessa forma, a metodologia mais adequada para a simulação numérica de um problema de escoamento limitado por fronteiras de geometria arbitrária, seja através de uma passagem ou em torno de um corpo submerso, pode ser dividida em duas etapas: discretização do domínio em estudo e resolução das equações do modelo matemático sobre esse domínio. A primeira etapa é comumente chamada de “pré-processamento”.

É fundamental a escolha adequada dos sistema de coordenadas onde se processará a discretização do domínio. Uma escolha inadequada pode tornar muito mais difícil a especificação das condições de contorno do problema em estudo. Por exemplo,

quando se analisa o escoamento no interior de um conduto de seção circular, onde o emprego de um sistema de coordenadas cartesianas implica numa representação tridimensional do problema, a adoção de um sistema cilíndrico, que considera a simetria axial das fronteiras físicas, representa-o na forma bi-dimensional. Infelizmente, em muitos dos casos que apresentam interesse prático para estudo do escoamento, as fronteiras não têm uma geometria simples. Esse fato levou ao desenvolvimento de metodologias para obtenção de malhas que se moldam às formas das fronteiras do escoamento.

A vantagem principal da utilização de malhas que se moldam às fronteiras do escoamento está na facilidade de especificação das condições de contorno das propriedades em estudo. Como os elementos ou volumes que discretizam o domínio são moldados às fronteiras, não são necessárias interpolações para especificar as condições de contorno. Outros motivos para a utilização desse tipo de malha podem ser verificados na solução de escoamentos viscosos, que são controlados pelos gradientes elevados de velocidade próximos a fronteira. Nesse caso, se a malha não fosse moldada a fronteira do escoamento, seriam necessárias interpolações próximas da superfície que provocariam erros que poderiam se propagar por todo o domínio.

Dentre as malhas que se moldam a fronteira do escoamento, podemos classificá-los em dois tipos. Um deles é conhecido como malhas estruturadas e o outro como malhas não-estruturadas. As malhas estruturadas nada mais são que um sistema de coordenadas que se molda as fronteiras do escoamento. As linhas de coordenadas constantes são utilizadas para delinear o contorno dos elementos que acabam por ser quadriláteros. Dessa forma, os elementos apresentam entre si uma relação de sequência no sentido das coordenadas. As malhas não-estruturadas são construídas em cima de um sistema de coordenadas, seja ele cartesiano ou não, sendo que sua estrutura é definida pela disposição aleatória dos elementos sobre o domínio. Esses elementos podem ser variados, ou seja, triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, etc. Note que

mesmo no caso das malhas não-estruturadas os elementos se moldam à fronteira do escoamento.

Ambos os tipos apresentam vantagens e desvantagens. As malhas estruturadas são uma forma elegante de abordagem do problema, uma vez que definida uma transformação para um dado domínio, todo o trabalho de cálculo é efetuado sobre o espaço transformado. Para regiões que apresentam simetrias e a fronteira do escoamento é definida por uma linha contínua, sem ressaltos, esse método é ideal, pois além de versátil, apresenta bons resultados. Porém, quando a geometria do escoamento é muito complexa, apresentando ressaltos e regiões pontiagudas, torna-se difícil a geração de uma malha com boa qualidade ou até mesmo impossível para certos casos. As regiões de ressaltos não serão discretizadas adequadamente, pois próximos delas elementos ou volumes com distorções elevadas aparecem, tornando a solução grosseira e sem precisão. Também é importante citar a dificuldade de se executar refinamentos dinâmicos sobre a malha durante uma simulação. Problemas tridimensionais com geometria complexa se tornam muito complicados.

Para as malhas não-estruturadas, ressaltos e regiões pontiagudas não são obstáculos. Como os elementos são distribuídos aleatoriamente sobre o domínio, todas as regiões podem ser preenchidas igualmente, não se permitindo o aparecimento de elementos de proporções indesejadas, obtendo-se uma solução, se não quantitativa, qualitativamente ótima. Os refinamentos podem ser feitos dinamicamente durante uma simulação, não necessitando estar parando e começando novamente os cálculos para que sejam realizadas interpolações.

Porém, os esforços são muito maiores em problemas que são resolvidos com malhas não-estruturadas. Além de cálculos mais extensos, são necessários mais recursos de equipamentos, como memória e velocidade de processamento. Além disso, métodos do tipo TDMA não são aplicados dada a distribuição aleatória dos volumes. Dependendo da geometria do domínio, é mais conveniente utilizar-se malhas

estruturadas. Dessa forma, o ideal é trabalhar com malhas híbridas, onde para cada parte do domínio se aplica um dos métodos, conforme as características da região.

O objetivo deste trabalho consiste em desenvolver um algoritmo para a solução de Problemas de Condução e Convecção de Calor baseado no *Método dos Volumes Finitos* (MVF) para malhas não-estruturadas. Conforme explicado no início, esse método visa efetuar o balanço da propriedade em estudo em pequenos volumes de controle. As equações da Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor são discretizadas para poderem ser aplicadas diretamente em cada um dos pequenos volumes que constituem o domínio. Utiliza-se um método iterativo, *Método de Gauss-Seidel*, que varre a malha toda e, conforme o erro obtido, recomeça o processo ou termina-o, trazendo o resultado final. São necessários alguns critérios para garantir a convergência do processo e também que os resultados obtidos sejam fisicamente realísticos. A obtenção desse algoritmo foi a contribuição deste trabalho à Dinâmica dos Fluidos Computacional, criando possibilidades de novas pesquisas, visando ampliar a compreensão do assunto.

Várias abordagens são possíveis no desenvolvimento do MVF, dependendo basicamente de como são construídos os volumes. Uma possibilidade é utilizar os próprios volumes obtidos na geração da malha. Dessa forma todo o cálculo é efetuado tomando-se como referência o centro do volume. Essa abordagem é interessante, pois permite a aplicação do método numérico diretamente sobre a malha gerada e por isso foi a opção escolhida para implementação do MVF neste trabalho. Outra possibilidade é construir volumes de controle a partir da composição entre os volumes que compartilhem um mesmo nó da malha gerada, criando-se assim polígonos com um nó central. Esse procedimento é mais árduo, pois necessita de um retrabalho da malha gerada, mas *pode* vir a trazer resultados mais precisos, pois um número maior de componentes influenciam cada volume. Essa abordagem pode ser vista em Maliska(1995) como será visto na revisão bibliográfica apresentada a seguir.

Uma vez desenvolvido o gerador de malhas e o método numérico, deve-se verificar a validade desse método. Para isso são escolhidos problemas simples com solução analítica para a equação de balanço e essa é comparada com as soluções obtidas pelo método numérico. Esse procedimento permite se obter confiabilidade na utilização da ferramenta desenvolvida em casos com geometria mais complexa, porém a análise do pesquisador é essencial para verificar a natureza dos resultados.

Uma breve descrição de cada capítulo desta dissertação é dada a seguir. No capítulo 1, são citados brevemente os conceitos de geração de malhas estruturadas e dados alguns exemplos. É formulado um método de geração de malhas não-estruturadas descrito em detalhes, abordando conceitos algébricos e geométricos. No final do capítulo são explicados os parâmetros utilizados na geração das malhas não-estruturadas e também são mostrados alguns resultados obtidos para diversas geometrias. O capítulo 2 apresenta ferramentas para o tratamento qualitativo das malhas não-estruturadas. Dois métodos de amaciamento são descritos, o *Método dos Triângulos* e o *Método dos Polígonos*, assim como seus respectivos resultados. Depois, ainda no capítulo 2, é mostrado como gerar malhas em domínios multiplamente conexos. Alguns exemplos são apresentados de forma ilustrativa. Para concluir este capítulo é apresentada a estrutura de dados e as relações de coletividade utilizadas pelo gerador de malhas não estruturadas.

O capítulo 3 apresenta o *Método dos Volumes Finitos* para problemas de condução de calor. Nesse capítulo estão inclusos conceitos básicos do *Método dos Volumes Finitos* que são utilizados no capítulo seguinte. Um caso teste é apresentado para validar o método. No capítulo 4 é apresentado o *Método dos Volumes Finitos* para problemas convectivos. Um caso teste é apresentado para validar o método. Para finalizar são apresentadas as conclusões finais e sugestões para novas pesquisas, dando continuidade ao trabalho já desenvolvido até o momento. Um apêndice foi incluído, onde encontram-se as listagens dos programas gerados.

II. Revisão Bibliográfica

Este trabalho visa estabelecer um método para a geração de malhas não-estruturadas para a aplicação em dinâmica dos fluidos computacional. Inicialmente é feito um resumo de malhas estruturadas, que apesar de anteceder a utilização das não-estruturadas, não deixa de ser uma área ainda a ser explorada. Dessa forma, esta revisão aborda os dois métodos de geração de malhas.

Os trabalhos de Meneghini(1989) e Volpe(1993) foram muito importantes para compreender o processo de geração de malhas estruturadas . Dentro desses trabalhos é possível obter um referência completa sobre o tema.

As malhas estruturadas consistem em sistemas de coordenadas adaptados a fronteira do escoamento. Esses sistemas podem ser obtidos através da solução numérica de equações diferenciais. Winslow(1966) utiliza a equação de Laplace. Thompson(1974) aprimorou e desenvolveu o método, cabendo a ele os méritos da divulgação da utilização desses sistemas. Godunov(1972) apresenta uma metodologia para controle do espaçamento do sistema gerado. Thompson(1977) aprimora esse método através da equação de Poisson, conseguindo um controle mais efetivo.

Os sistemas de coordenadas gerados até então apresentavam o inconveniente de gerar sistemas de coordenadas não ortogonais, dificultando a aplicação dos métodos numéricos. Dessa forma, Hung(1977), Pope(1978) e Ryskin(1983) propuseram metodologias semelhantes para a geração de um sistema ortogonal, que consiste basicamente na solução de um sistema de equações advindas da definição do operador diferencial Laplaciano para um sistema ortogonal e da relação entre os fatores de escala. Brackbill(1982) e Giannakopoulos(1988) mostram uma nova metodologia para a obtenção de sistemas ortogonais que se baseia em princípios variacionais, procurando minimizar certos funcionais que representam propriedades do mapeamento.

Em George(1991) são citadas dois métodos automáticos para a geração de malhas não-estruturadas, o Método de Voronoï e o Método do Avanço Frontal (Advancing Front Method). Peraire(1990) descreve o Método do Avanço Frontal e mostra que é mais interessante que o Método de Voronoi, pois esse último trabalha com pontos pré-determinados, cabendo ao pesquisador definir a posição dos pontos.

George(1991) descreve o processo de como se obter uma malha não-estruturada através do Método do Avanço Frontal, mostrando que existem duas etapas necessárias, a geração da malha propriamente dita e o amaciamento dessa malha. Porém não fica claro como desenvolver esse amaciamento. Peraire(1990) também mostra a necessidade desses dois procedimentos e determina um caminho para o amaciamento.

Peraire(1987) e Peraire(1990) citam a necessidade de refinamento na malha gerada em posições específicas. Essas posições são determinadas pelos resultados do método numérico aplicado. É o que se chama *Refinamento Adaptado* ("Adaptative Remeshing"). Marcum(1995) apresenta um procedimento que utiliza um processo iterativo de criação de pontos que visa estabelecer pontos otimizados, sem necessidade de amaciamento posterior. Os resultados obtidos são qualitativamente semelhantes aos dos métodos citados acima.

Quanto à solução das equações da Termodinâmica e da Dinâmica dos Fluidos, emprega-se o *Método dos Volumes Finitos*. Patankar(1980) é referência obrigatória, pois além de ser o grande divulgador do método também foi um dos criadores do mesmo. Este método propõe que se divida o domínio em estudo em um conjunto de volumes de dimensões finitas. Sobre esses volumes se realizam os balanços de massa, quantidade de movimento e energia. As equações que descrevem os princípios de conservação dessas grandezas fazem-no na forma diferencial, e são discretizadas e resolvidas numericamente.

Thiart(1990) apresenta um método que empregam malhas computacionais que não deslocam os pontos nos quais as velocidades são calculadas em relação àqueles das demais grandezas (*nonstaggered grid*). Baliga (1983) propõe um método para

escoamentos incompressíveis e troca de calor para malhas não-estruturadas, utilizando um abordagem de elementos finitos para volumes de controle. Os volumes são polígonos formados pela mediana dos triângulos vizinhos a um mesmo nó. Maliska(1995) apresenta um estudo completo sobre o *Método dos Volumes Finitos* com uma abordagem para malhas não-estruturadas. Utiliza um enfoque para *Diagramas de Voronoi*. Mostra como implementar o *Método de Gauss Seidel* e o SIMPLEC para o caso de malhas não-estruturadas. No caso do cálculo do campo de velocidades, apresenta uma proposta que ainda não fora testada.

1. Geração de Malhas para Dinâmica dos Fluidos Computacional

1.1 Malhas Estruturadas

1.1.1 Introdução

As malhas estruturadas são compostas por elementos que estão fixos ao sistema de coordenadas utilizado. Dessa forma, em um sistema bi-dimensional, um elemento pode ser identificado como sendo o n -ésimo elemento da m -ésima coluna. Dentre os sistemas de coordenadas utilizados, o sistema de coordenadas orientadas de acordo com as fronteiras do escoamento, ou seja, um sistema de coordenadas que se moldam às formas das fronteiras do escoamento, é tratado neste capítulo.

Esse tipo de malha facilita a especificação das condições de contorno das propriedades em estudo, pois as fronteiras do escoamento são representadas por linhas de coordenadas constantes, não necessitando nenhum tipo de interpolação ou outro mecanismo artificial que altere a forma da fronteira física. Como nesse sistema as coordenadas acompanham as eventuais curvaturas do domínio, não existirão erros grosseiros inerentes a interpolações que seriam necessárias em um sistema cartesiano. Em um escoamento viscoso, no qual a solução é controlada pelos gradientes de velocidade próximos a fronteira, os possíveis erros provenientes de interpolações se propagariam por toda a região de estudo.

Nesta seção será dada uma breve explicação de como se obter malhas estruturadas para geometrias arbitrárias, uma vez que o escopo do trabalho está no desenvolvimento de métodos para a geração de malhas não-estruturadas. Para se efetuar um estudo mais aprofundado no tema, pode-se consultar os trabalhos de Meneghini(1989) e Volpe(1993) citados na bibliografia, trabalhos esses que se basearam no método de Thompson(1974) para geração de malhas estruturadas.

1.1.2 Fundamentos matemáticos

A geração do sistema de coordenadas desejado constitui-se em uma transformação do espaço físico em um espaço matemático. Essa transformação deve ser bi-unívoca, a fim de que o problema a ser resolvido apresente apenas um solução. Caso contrário seria inviável determinar uma solução para um problema, pois, para cada elemento no espaço matemático, poderia haver mais que um elemento correspondente no espaço físico.

Considere o domínio de um escoamento dado nas coordenadas cartesianas x e y conforme a figura 1.1.

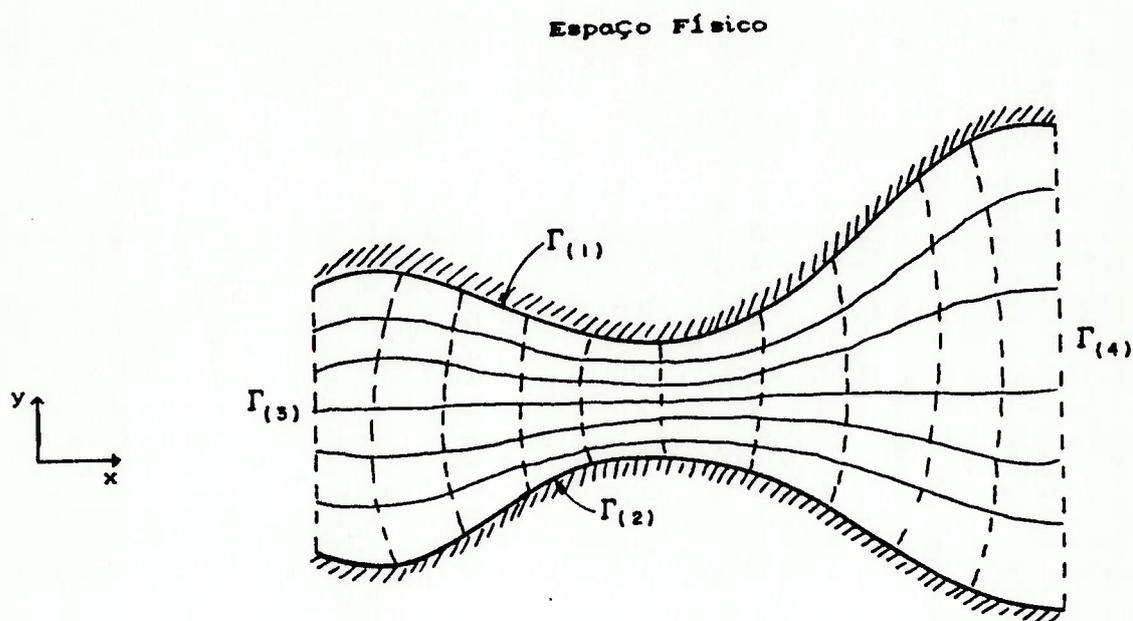


Figura 1.1 - Domínio do escoamento dado em coordenadas cartesianas.

Considere agora um sistema generalizado de coordenadas ξ e η conforme a figura 1.2.

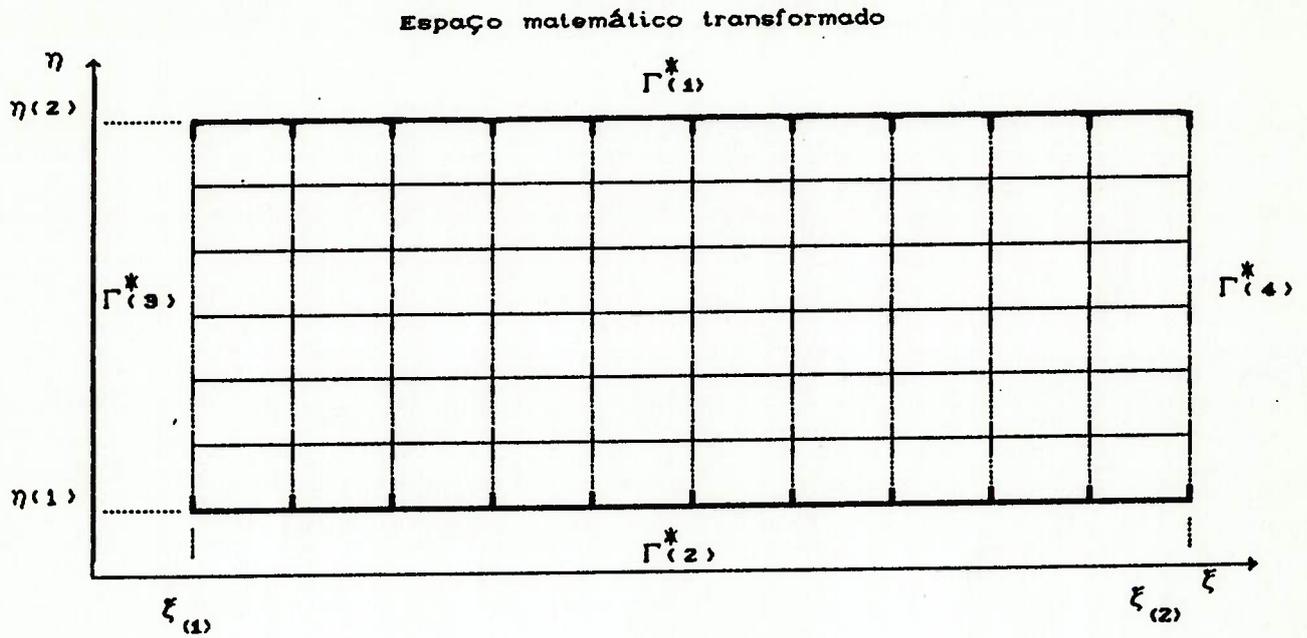


Figura 1.2 - Espaço matemático transformado em coordenadas generalizadas.

Dessa forma as transformações para cada sistema de coordenadas são dadas por:

$$\xi = \xi(x, y) \text{ e } \eta = \eta(x, y) \tag{1.1}$$

$$x = x(\xi, \eta) \text{ e } y = y(\xi, \eta) \tag{1.2}$$

A matriz jacobiana da transformação (1.1) é definida como:

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

e a matriz jacobiana da transformação (1.2) é definida como:

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

O Jacobiano (J) é definido como o determinante da matriz J_2 , ou seja:

$$J = \det[J_2] = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (1.5)$$

Quando o Jacobiano é igual a zero ($J = 0$), a transformação não é bi-unívoca. Dessa forma não deve existir nenhum ponto sobre o domínio que apresente $J = 0$. Uma maneira de garantir isso é verificando se o sinal do Jacobiano é igual em todos os pontos, ou seja, sempre positivo ou sempre negativo. Isso, levando-se em conta que, a variação do Jacobiano sobre o domínio é contínua.

O sistema de coordenadas a ser obtido deve ser tal que os contornos $\Gamma_{(1)}$ e $\Gamma_{(2)}$ no espaço físico correspondam aos contornos $\Gamma^*_{(1)}$ e $\Gamma^*_{(2)}$ no espaço matemático transformado. Da mesma maneira, as linhas que delimitam o domínio $\Gamma_{(3)}$ e $\Gamma_{(4)}$ passam a corresponder, no espaço transformado, às linhas $\Gamma^*_{(3)}$ e $\Gamma^*_{(4)}$. Tem-se assim

que $\Gamma_{(1)}^* = \eta_{(1)} = \text{constante}$, $\Gamma_{(2)}^* = \eta_{(2)} = \text{constante}$, $\Gamma_{(3)}^* = \xi_{(1)} = \text{constante}$ e $\Gamma_{(4)}^* = \xi_{(2)} = \text{constante}$ (figuras 1.1 e 1.2).

1.1.3 Definição do sistema de coordenadas

A geração do sistema de coordenadas consiste na obtenção das funções $\xi = \xi(x,y)$ e $\eta = \eta(x,y)$, as quais permitem uma relação bi-unívoca entre o espaço físico e o espaço matemático transformado, como visto na seção 1.1.2. Para a relação ser bi-unívoca o Jacobiano deve existir em todos os pontos do domínio, ou seja, nunca se anular. Dessa forma, a existência do Jacobiano deve ser verificada ponto-a-ponto na obtenção das funções $\xi = \xi(x,y)$ e $\eta = \eta(x,y)$.

Para que o sistema de coordenadas gerado seja orientado de acordo com as fronteiras do domínio, as funções $\xi = \xi(x,y)$ e $\eta = \eta(x,y)$ devem assumir valores máximos e mínimos apenas nas fronteiras do domínio. Considerando o domínio indicado na figura 1.3, as fronteiras são $\Gamma_{(1)}$, $\Gamma_{(2)}$, $\Gamma_{(3)}$ e $\Gamma_{(4)}$. A maneira mais simples de se obter as funções de transformação seria considerar uma interpolação linear em x e y das funções $\xi = \xi(x,y)$ e $\eta = \eta(x,y)$. A equação de Laplace satisfaz esta condição de linearidade. Além disso, por esta equação diferencial ser do tipo elíptica, no caso de condição de Dirichlet pode-se especificar as condições de contorno em todas as fronteiras do domínio. Considerando que $\xi = \xi(x,y)$ e $\eta = \eta(x,y)$ sejam harmônicas, isto é, satisfaçam a equação de Laplace, Thompson(1974) mostra que o Jacobiano não

se anula, sendo por essa razão um transformação bi-unívoca. Assim, a maneira mais simples de se obter um sistema de coordenadas orientado de acordo com as fronteiras do domínio é fazer com que as funções $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$ satisfaçam a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \quad (1.7)$$

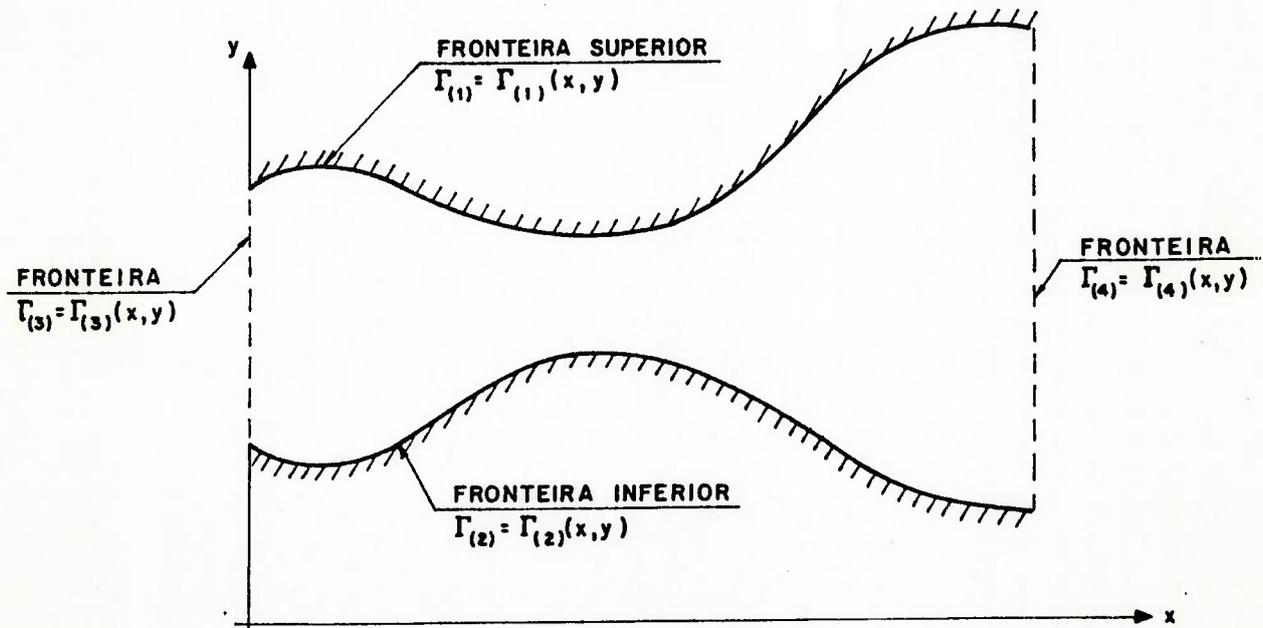


Figura 1.3 - Condições de contorno para se obter as funções $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$.

As condições de contorno para resolver o caso da figura 1.3 são:

$$\text{em } \Gamma_{(1)} \quad \begin{cases} \xi = \xi_{(1)}(x, y) \\ \eta = \eta_{(1)} = \text{constante} \end{cases}$$

$$\text{em } \Gamma_{(2)} \quad \begin{cases} \xi = \xi_{(2)}(x, y) \\ \eta = \eta_{(2)} = \text{constante} \end{cases}$$

$$\text{em } \Gamma_{(3)} \quad \begin{cases} \xi = \xi_{(3)} = \text{constante} \\ \eta = \eta_{(3)}(x, y) \end{cases}$$

$$\text{em } \Gamma_{(4)} \quad \begin{cases} \xi = \xi_{(4)} = \text{constante} \\ \eta = \eta_{(4)}(x, y) \end{cases}$$

Marion(1970) mostra que a equação de Laplace tem a propriedade de sua solução assumir valores máximos e mínimos apenas nas fronteiras do domínio, satisfazendo assim as exigências discutidas no início da seção. Dessa forma, a utilização das equações de Laplace mostra-se muito adequada. As equações (1.6) e (1.7) são difíceis de serem resolvidas numericamente devido às condições de contorno. Na figura 1.4 pode-se verificar que no espaço físico o contorno $\Gamma_{(1)}$ corresponde a $\eta_{(1)} = \text{constante}$ e para ele ser avaliado devem ser efetuadas interpolações em x e y . Winslow(1966) propõe uma solução para esse problema através da inversão das variáveis independentes e dependentes nas equações (1.6) e (1.7). Dessa forma, não se procura obter as funções $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$, mas sim as funções $x = x(\xi, \eta)$ e $y = y(\xi, \eta)$. A partir dessa inversão, as equações (1.6) e (1.7) se transformam em:

$$g_{22} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \quad (1.8)$$

$$g_{22} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0 \quad (1.9)$$

onde

$$g_{22} = \left[\frac{\partial x}{\partial \eta} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \eta} \right]^2 \quad (1.10)$$

$$g_{12} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (1.11)$$

$$g_{11} = \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \xi} \right]^2 \quad (1.12)$$

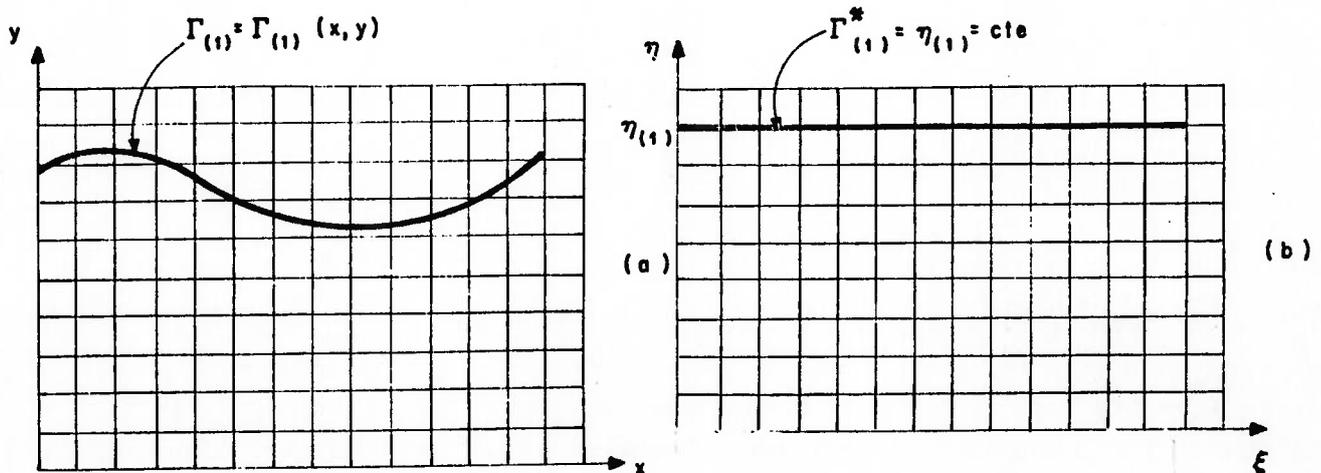


Figura 1.4 - a) Espaço físico; b) Espaço matemático transformado.

As equações (1.8) e (1.9), com variáveis independentes ξ e η , são resolvidas no espaço matemático transformado, no qual as condições de contorno são muito mais simples. Quando essas equações são resolvidas numericamente, não é necessário utilizar interpolações para a avaliação das condições de contorno. Apesar de (1.8) e (1.9) formarem um sistema de equações diferenciais elípticas quase-lineares mais complexo do que o sistema de equações de Laplace (1.7) e (1.8), do ponto de vista numérico não há dificuldades maiores. As equações (1.8) e (1.9) são chamadas na literatura de "equações de Thompson", por ter sido esse pesquisador o primeiro a propor o uso delas para a geração de coordenadas orientadas de acordo com as fronteiras do escoamento.

1.1.4 Controle do espaçamento da malha

O controle do espaçamento da malha é tema de grande importância. Para entendê-lo basta pensar no estudo da camada limite, onde predominam gradientes elevados de velocidade nas regiões próximas aos contornos físicos do escoamento. Se não forem tomadas precauções na geração da malha, erros grosseiros podem ser propagados. Para solucionar esse tipo de problema, não basta gerar um malha com espaçamento pequeno no domínio todo. Esse procedimento provocaria um aumento exagerado e desnecessário do tempo de processamento e da utilização da memória do computador. A melhor medida é controlar o espaçamento em regiões específicas de interesse.

Godunov(1972) propôs que um sistema de coordenadas seja criado a partir das equações (1.6) e (1.7), porém não homogêneas. Dessa forma tem-se:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(x, y) \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(x, y) \tag{1.13}$$

Thompson(1974) nota que se P e Q são tomadas como funções de ξ e η , o controle é mais efetivo:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta) \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta) \tag{1.15}$$

Invertendo-se as variáveis dependentes e independentes, essas equações tornam-se no espaço transformado em:

$$g_{22} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + J^2 \left[P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta} \right] = 0 \tag{1.16}$$

$$g_{22} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + J^2 \left[P \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] = 0 \quad (1.17)$$

Quando P e Q são tomadas como constantes positivas, as coordenadas ξ e η se aproximam de $\xi_{(máxima)}$ e $\eta_{(máxima)}$ respectivamente. No caso de P e Q serem tomadas como constantes negativas, as coordenadas P e Q se aproximam de $\xi_{(mínima)}$ e $\eta_{(mínima)}$ respectivamente. Normalmente, P e Q são funções escolhidas de forma a se obter uma concentração de linhas de coordenadas constantes em regiões determinadas.

Embora esse tipo de procedimento nem sempre apresente o resultado desejado, como por exemplo a possibilidade de geração de malhas com deformações exageradas, onde a não ortogonalidade pode ser elevada, foi utilizado extensamente na bibliografia e mostrou-se essencial na resolução de problemas, uma vez que era a única maneira de se conseguir um controle sobre o espaçamento da malha em regiões específicas. Com o surgimento das malhas não-estruturadas tornou-se mais fácil o controle do espaçamento em regiões de interesse, pois acrescentar elementos numa malha desse tipo não confere grande complexidade e pode ser feito em qualquer local do domínio, conforme o interesse do estudo que se esteja fazendo. Essa é mais uma razão para o avanço e desenvolvimento dos métodos de geração de malhas não-estruturadas.

1.1.5 Geração de malhas ortogonais

O sistema de coordenadas gerado nas seções anteriores não é necessariamente um sistema ortogonal. A utilização de sistemas de coordenadas ortogonais é muito interessante, uma vez que as equações básicas da Mecânica dos Fluidos tornam-se mais simples. Isso ocorre, pois o tensor métrico em um sistema ortogonal apresenta apenas os termos da diagonal principal diferentes de zero.

Um dos métodos para a geração de um sistema de coordenadas ortogonais é através da transformação conforme. Nesse caso os fatores de escala são iguais a unidade. Isso faz com que o ângulo entre duas linhas de coordenadas constantes no espaço físico seja conservado no espaço transformado. Por essa razão, um quadrado no sistema de coordenadas xy será transformado em um quadrado no sistema $\xi\eta$. Fornberg(1980) cita que a igualdade dos fatores de escala pode ser uma exigência por demais restritiva, fornecendo sistemas de coordenadas mau condicionadas e sem utilidade prática. Hung(1977) e Pope(1978) sugerem que uma relação entre os fatores de escala constante e diferente da unidade. Ryskin(1983) mostra que essa metodologia ainda é restritiva, uma vez que a relação entre os fatores de escala não pode ser tomada como uma função variável sobre o domínio.

Outros métodos para geração de sistemas de coordenadas ortogonais são baseados em princípios variacionais. Nesse caso procura-se minimizar funcionais que expressam a não ortogonalidade do sistema. Exemplos desse procedimento podem ser encontrados em Brackbill(1982) e Giannakopoulos(1988).

Um terceiro procedimento para a geração de sistemas ortogonais consiste na resolução de uma equação diferencial hiperbólica. Essa equação é obtida considerando as possíveis relações do cálculo vetorial e diferencial que representam a condição de ortogonalidade.

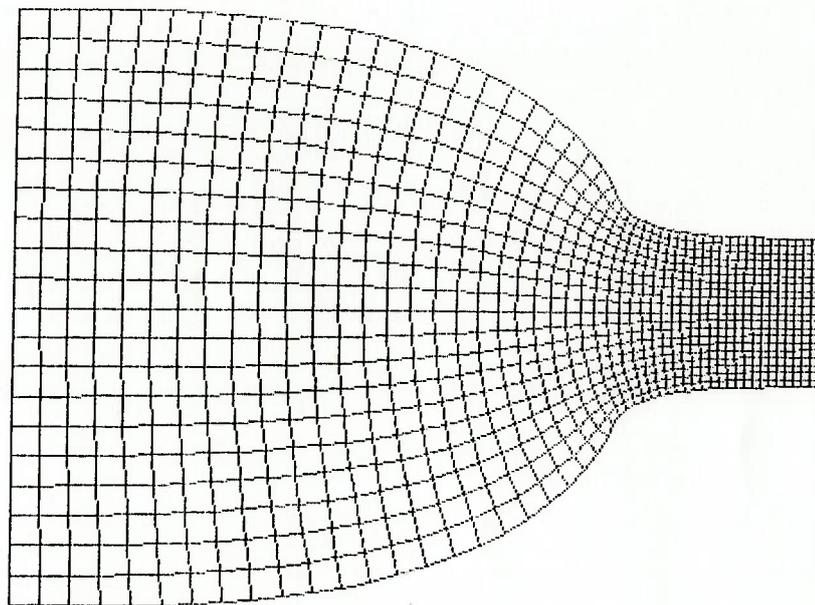
Os métodos de geração de sistemas ortogonais têm maior restrição que o método de Thompson(1974) descrito nas seções anteriores. Esses métodos, além de apresentar problemas de não convergência e de distorções não desejadas das linhas de coordenadas, mostram uma certa dependência em relação à geometria particular do caso em estudo. Esse é custo de se utilizar um sistema ortogonal. Mesmo assim, o uso de sistemas de coordenadas ortogonais é muito interessante, uma vez que as equações básicas são em muito simplificadas. Cabe ao pesquisador decidir o seu uso ou não, baseando-se na geometria do domínio.

1.1.6 Resultados

Nesta seção são apresentados alguns exemplos de malha estruturada baseado no contorno do túnel de vento do IPT (*Instituto de Pesquisa Tecnológica do Estado de São Paulo*) conforme Volpe(1993). A primeira malha apresentada é chamada de homogênea, pois nela não foram executados refinamentos e nem ortogonalizações. A segunda malha está refinada nas paredes utilizando-se funções P e Q. A terceira malha é uma malha ortogonalizada. Note que I_o indica o nível de ortogonalidade da malha. Quanto menor for o valor de I_o , mais ortogonal são os elementos gerados. O índice I_{te} indica o número

de iterações que foram necessárias para a convergência do programa. A figura 1.5 mostra uma malha estruturada sem controle de espaçamento e sem ortogonalização (Malha Homogênea).

Malha Homogênea



Io = 2.01937205880806E-0007
Ite = 103

Figura 1.5 - Malha Homogênea

Utilizando-se as funções de controle de espaçamento dadas abaixo:

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^n a_{(i)} \operatorname{sgn}(\xi - \xi_{(i)}) \exp(-c_{(i)} |\xi - \xi_{(i)}|) -$$

$$\sum_{j=1}^m b_{(j)} \operatorname{sgn}(\xi - \xi_{(j)}) \exp(-d_{(j)} \sqrt{(\xi - \xi_{(j)})^2 + (\eta - \eta_{(j)})^2})$$

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^n p_{(i)} \operatorname{sgn}(\eta - \eta_{(i)}) \exp(-r_{(i)} |\eta - \eta_{(i)}| - \sum_{j=1}^m q_{(j)} \operatorname{sgn}(\eta - \eta_{(j)}) \exp(-s_{(j)} \sqrt{(\xi - \xi_{(j)})^2 + (\eta - \eta_{(j)})^2})$$

onde

LINHAS DE COORDENADA FIXAS

(i)	$\xi_{(i)}$	$\eta_{(i)}$
1	0	1
2	0	21
3	0	0
4	0	0

COORDENADAS DE PONTOS FIXOS

(j)	$\xi_{(j)}$	$\eta_{(j)}$
1	1	1
2	1	21
3	50	1
4	50	21

COEFICIENTES DE P e Q- linhas fixas

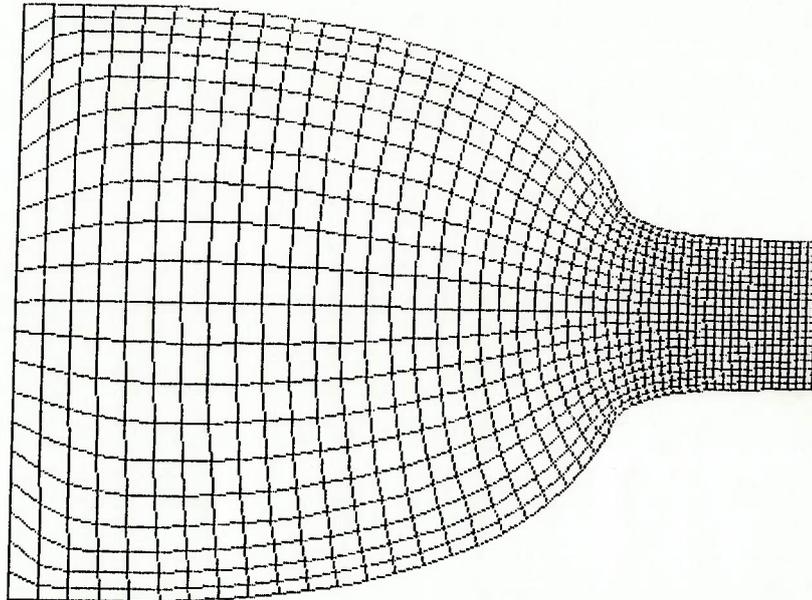
(i)	$a_{(i)}$	$c(i)$	$P_{(i)}$	$r_{(i)}$
1	0.0	0.0	1400.0	0.5
2	0.0	0.0	1400.0	0.5
3	0.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	0.0

COEFICIENTES DE P e Q - Pontos fixos

(j)	$b(j)$	$\bar{d}(j)$	$q(j)$	$s(j)$
1	0.0	0.0	800.0	0.5
2	0.0	0.0	800.0	0.5
3	0.0	0.0	800.0	0.5
4	0.0	0.0	800.0	0.5

pode-se obter a malha da figura 1.6.

Malha c/ P e Q



Io = 2.36858958638615E-0006

Ite = 93

Figura 1.6 - Malha com Controle de Espaçamento

Utilizando-se a função de ortogonalização abaixo:

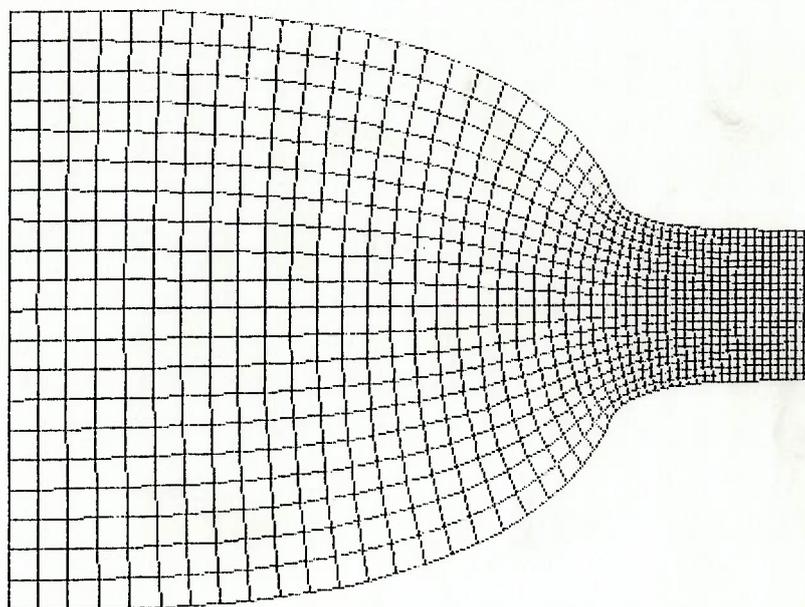
$$I_{(o)} = \int_D [\nabla \xi \cdot \nabla \eta]^2 J^3 dV$$

Invertendo as variáveis dependentes obtém-se:

$$I_{(o)} = \int_1^M \int_1^N \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right]^2 d\xi d\eta$$

pode-se obter a malha ortogonalizada da figura 1.7.

Malha Ortogonalizada



$I_0 = 1.93670010010931E-0008$

$I_{te} = 215$

$\Lambda_0 = 100$

Figura 1.7 - Malha ortogonalizada

1.2 Malhas não-estruturadas - fundamentos geométricos

1.2.1 Introdução

Existem inúmeros métodos para a geração de malhas não-estruturadas. Muitos deles são "manuais", ou seja, o usuário tem que executar passo-a-passo a discretização do domínio, fazendo com que a geração torne-se quase artesanal. É natural que o resultado obtido seja bom para malhas simples, porém em aplicações práticas da dinâmica dos fluidos computacional, torna-se quase impossível gerar malhas manualmente, uma vez que o número de elementos criados pode ser muito elevado e a complexidade da fronteira pode ser considerável. Daí veio a necessidade de criar-se métodos automáticos.

Entre os métodos automáticos, George(1991) descreve o Método do Avanço Frontal (Advancing Front Method) e o Método de Voronoi. Já Peraire(1990), cita apenas o Método do Avanço Frontal, o qual é utilizado extensamente em seus trabalhos.

O trabalho apresentado nesta dissertação é baseado no Método do Avanço Frontal. Esse é um método cíclico, no qual cada ciclo preencherá com triângulos uma determinada faixa do domínio em questão. O avanço é dado na direção central do domínio obrigando o fechamento da malha. Os triângulos gerados serão tomados como volumes de controle para a aplicação do Método dos Volumes Finitos.

Neste capítulo (Fundamentos Geométricos) é mostrado o algoritmo básico para a geração da malha através das condições para a criação dos triângulos e o processo cíclico a ser seguido. No próximo capítulo (Fundamentos Algébricos) são descritos

todos os cálculos necessários para a execução desse método. Assim sendo, enquanto os fundamentos geométricos compreendem uma visão global, os fundamentos algébricos, permitem uma visão detalhada de cada seção do processo de geração.

1.2.2 Definição do contorno (obtenção da frente de partida)

O contorno do domínio é o ponto de partida para o processo de geração da malha. O primeiro passo consiste em discretizar a linha do contorno com pontos. Esses pontos unidos por segmentos de reta formam o contorno poligonal do domínio. Esse contorno poligonal corresponde à frente de partida da malha (figura 1.8).

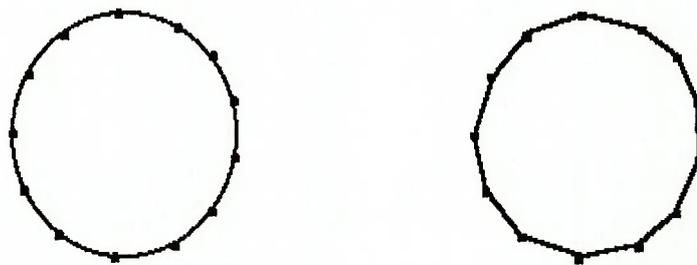


Figura 1.8 - Discretização do contorno do domínio.

1.2.3 Criação dos triângulos

A criação dos triângulos (ou elementos) é dada a partir da frente de partida. Os segmentos da frente são os lados dos triângulos. Cada vez que um triângulo é criado a frente deve ser atualizada. O contorno do domínio nunca se altera, porém a frente avançará em direção ao centro como se fosse uma espiral.

Cada dois segmentos consecutivos da frente formam um ângulo α . Conforme a medida desse ângulo existem três caminhos a serem seguidos para a criação dos triângulos. Esses caminhos são definidos da seguinte maneira:

a) para $LI \leq \alpha \leq LS$

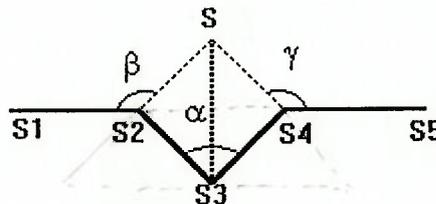


Figura 1.9 - Caso a) de geração de triângulos.

onde $LI = \frac{\pi}{2}$ e $LS = \frac{5}{6}\pi$ (figura 1.9), sendo LI o limite inferior e LS o limite superior do ângulo α .¹

Dois triângulos são criados neste caso conforme as linhas tracejadas na figura 1.9. Note que S pertence a bissetriz do ângulo α . George(1991) cita a seguinte recomendação para que os triângulos sejam aproximadamente equiláteros:

$$dSS_3 = \frac{1}{6}(2dS_2S_3 + 2dS_3S_4 + dS_1S_2 + dS_4S_5) \quad (1.18)$$

George(1991) ainda cita que é necessário garantir que $\frac{\pi}{5} \leq \beta \leq (2\pi - \frac{\pi}{5})$ e $\frac{\pi}{5} \leq \gamma \leq (2\pi - \frac{\pi}{5})$. Caso essas condições não se confirmem, não se caracteriza este caso.

Esses valores são empíricos e mostraram bons resultados.

¹o valor determinado por George(1991) para LS é diferente. Ele sugere $LS = \frac{2}{3}\pi$. Como será visto no capítulo 2 seção 1, esses valores são parâmetros que devem ser variados conforme o domínio em questão.

b) para $\alpha > LS$

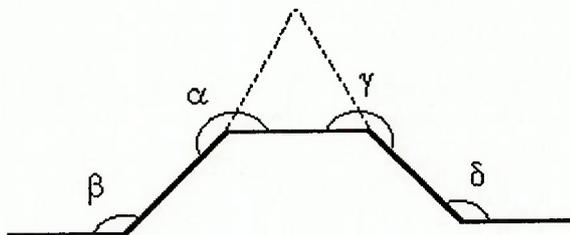


Figura 1.10 - Caso b) de geração de triângulos.

onde $LS = \frac{5\pi}{6}$ (figura 1.10).²

O triângulo será criado conforme as linhas tracejadas da figura 1.10. Para que seja aproximadamente equilátero, a proporção da altura do triângulo sobre o comprimento do segmento da frente deve ser de $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Para esse caso George(1991) apenas acrescenta que deve-se utilizar o menor dos dois segmentos da frente para a criação do triângulo. Além disso, é necessário também a verificação de outras 3 condições que são: β e $\delta > \frac{\pi}{3}$ e $\gamma > LS$. Caso essas condições não se confirmem, não se caracteriza este caso. Essas últimas condições não são citadas em nenhuma referência, mas encontradas pelo autor deste trabalho.

²vide nota de rodapé n. 1

c) para $\alpha < \frac{3}{5}\pi$ (figura 1.11)

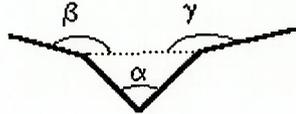


Figura 1.11 - Caso c) de geração de triângulos.

Um triângulo é obtido através da união dos dois segmentos, conforme mostra a linha tracejada da figura 1.11. Neste caso, além das condições dadas para a, também é necessário verificar se b e $g > 0$. Deve-se, no entanto, tomar o cuidado de primeiro tentar formar os triângulos conforme o caso a). Caso não seja possível, daí então, deve-se verificar as condições para este caso.

1.2.4 Verificação de um ponto novo

Conforme visto nos casos a) e b) da seção 1.2.3, para a criação dos triângulos, é necessário a determinação de um ponto novo dentro do domínio. A determinação desse ponto seguirá os critérios geométricos também citados na seção 1.2.3. Porém, para garantir que esse ponto não esteja em um local inapropriado, é necessário fazer uma

verificação. Essa verificação garantirá que nenhum ponto novo sobreponha um elemento já existente e que também não esteja fora do domínio.

Se, apesar de todas as condições citadas na seção 1.2.3 serem, satisfeitas, for verificada uma posição irregular para o ponto novo, o(s) triângulo(s) não será(ão) criado(s). Caso a verificação determine que a posição desse ponto novo é adequada, então o(s) triângulo(s) será(ão) criado(s) e a frente atualizada.

A partir da criação do ponto novo, novo(s) triângulo(s) é(são) formado(s). A verificação consiste em garantir que os segmentos que compõem os lados desse(s) novo(s) triângulo(s), não cruzem nenhum outro segmento da frente, além de seus próprios vizinhos.

1.2.5 Atualização da frente

Peraire(1987) mostra uma técnica de realizar a atualização da frente. O método apresentado nesta seção é totalmente baseado nessa técnica, levando-se em conta a forma de abordagem para a criação dos triângulos citada acima.

Um triângulo só é criado quando todas as condições das seções 1.2.3 e 1.2.4 são satisfeitas. Após a criação de um triângulo novo na malha, a frente deve ser atualizada. Para cada um dos três casos de criação de triângulos existe um processo de atualização da frente diferente. Os processos I, II e III abaixo referem-se aos casos a), b) e c) da seção 1.2.3 respectivamente.

I) Esse é o processo mais simples dos três. Dois triângulos são criados, sendo que os dois segmentos da frente que estavam sendo utilizados, deixam de fazer parte da frente e os dois segmentos novos, que surgiram com a criação dos triângulos, assumem essas posições. Veja as figuras 1.9 e 1.10.

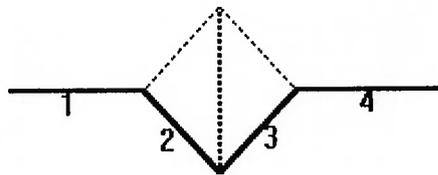


Figura 1.12 - Frente antes da atualização para o caso a).

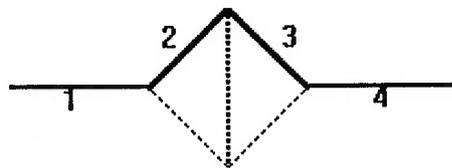


Figura 1.13 - Frente depois da atualização para o caso a).

Um exemplo é dado pela figura 1.14.

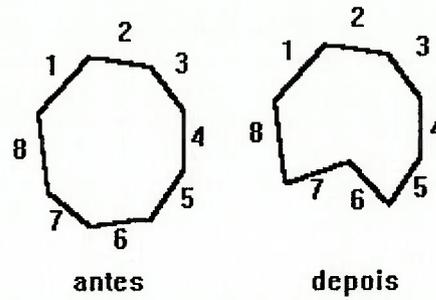


Figura 1.14 - Exemplo da atualização da frente para o caso a).

II) Neste processo um triângulo é criado sobre um segmento já existente. A frente antes da criação do triângulo pode ser vista na figura 1.15.

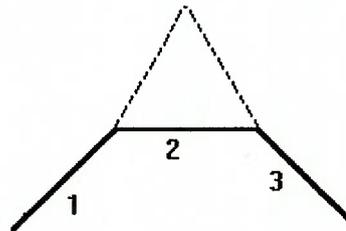


Figura 1.15 - Frente antes da atualização para o caso b).

Após a criação do triângulo a frente fica conforme a figura 1.16.

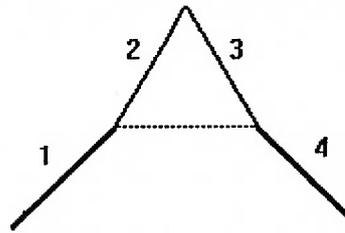


Figura 1.16 - Frente depois da atualização para o caso b).

Pode-se perceber que foi acrescentado um segmento à frente neste caso. Por isso a atualização da frente agora é mais complexa. No caso das figuras 1.12 e 1.13, o segmento 2 passa a ser o primeiro lado do triângulo novo. A partir de então os segmentos restantes da frente são renumerados até o segmento 1, que não é alterado. Um exemplo é dado pela figura 1.17.

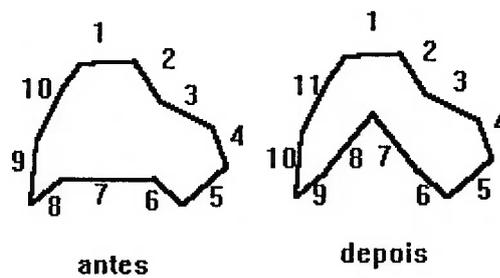


Figura 1.17 - Exemplo da atualização da frente para o caso b).

III) Neste processo ocorre o oposto do caso anterior. O triângulo criado decrementa um segmento da frente. Veja as figuras 1.15 e 1.16.

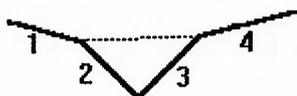


Figura 1.18 - Frente antes da atualização para o caso c).

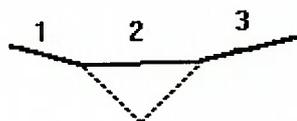


Figura 1.19 - Frente depois da atualização para o caso c).

O segmento 2 passa a ser o segmento novo do triângulo gerado. A partir de daí, os segmentos restantes da frente são renumerados até o segmento 1, que não é alterado. Um exemplo é dado pela figura 1.20.

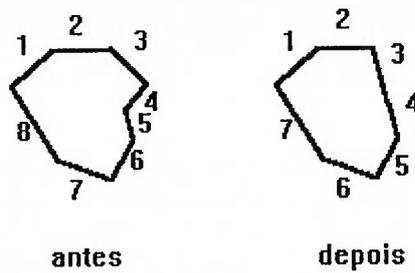
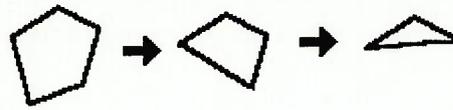


Figura 1.20 - Exemplo da atualização da frente para o caso c).

1.2.6 Condição de fechamento da malha

A formação da malha é feita através das sucessivas criações de triângulos. Para isso existe um ponteiro que indica o segmento que está sendo analisado. Após a criação ou não de novo(s) triângulo(s) o ponteiro passa para o próximo segmento da frente. Dessa forma a frente é percorrida (no sentido anti-horário), os triângulos são criados, a frente atualizada. Quando a frente for composta por apenas três segmentos, o último elemento é criado com esses segmentos e a malha é dita fechada. Um exemplo é dado pela figura 1.21.



fechamento da frente

Figura 1.21 - Condição de fechamento da malha.

1.3 Malhas não-estruturadas - fundamentos algébricos

1.3.1 Introdução

Na seção anterior (Fundamentos Geométricos) foi apresentada uma visão global do processo de geração de malhas não-estruturadas através do Método do Avanço Frontal. Toda a álgebra envolvida no processo de geração é mostrada neste capítulo, que serve como suporte aos procedimentos definidos no capítulo anterior. Por isso, após uma leitura inicial, é recomendável uma a leitura em paralelo com o capítulo anterior. Dessa forma os conceitos abordados ficarão mais claros e melhor direcionados.

Para a modelagem dos elementos triangulares e dos segmentos da frente, são utilizados amplamente os conceitos da geometria vetorial. Essa ferramenta permite uma abordagem matricial, limpa e clara na geração das malhas. Caso contrário, as rotinas seriam cheias de condições do tipo " if ", o que não é desejável, pois esse tipo de

condição dificulta a vetorização do código, tornando-o também menos elegante. Um código vetorizado trabalha com resultados diretos e não depende de condições externas, propiciando principalmente uma leitura clara e correta dos conceitos envolvidos. E quando o código se avoluma, torna-se quase impossível atentar-se a todos os detalhes.

1.3.2 Definição de segmento x vetor

Cada segmento é definido através de dois pontos, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

Esses dois pontos definem um vetor $\vec{s}(u, v, w)$ da seguinte forma:

$$\vec{s}(u, v, w) = P_2 - P_1 \tag{1.19}$$

onde

$$u = x_2 - x_1$$

$$v = y_2 - y_1$$

$$w = z_2 - z_1$$

Como a malha gerada é bi-dimensional, os valores na direção de z são considerados unitários, ou seja, $z_1, z_2 = 1$ e por conseqüência $w = 0$.

Veja figura 1.22.

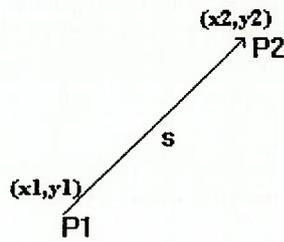


Figura 1.22 - Um vetor definido por dois pontos.

1.3.3 Vetores ortogonais

O produto vetorial entre dois vetores $\vec{s}_1(u_1, v_1, w_1)$ e $\vec{s}_2(u_2, v_2, w_2)$ apresenta os seguintes resultados:

$$\vec{s}_1 \wedge \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}, \quad (1.20)$$

onde $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é uma base ortogonal conforme a figura 1.23.

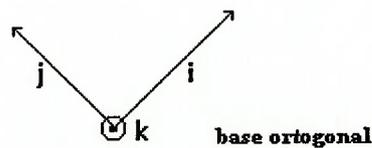


Figura 1.23 - Representação de uma base ortogonal.

O plano (\vec{i}, \vec{j}) é o plano sobre o qual a malha será gerada. Além disso, quando dois vetores ortogonais são multiplicados vetorialmente, um terceiro vetor, ortogonal aos dois primeiros, surge. Assim, considerando um vetor $\vec{s}_1(u_1, v_1, w_1)$ que esteja contido no plano (\vec{i}, \vec{j}) e outro vetor $\vec{s}_2(u_2, v_2, w_2)$ que seja normal ao plano (\vec{i}, \vec{j}) , tem-se:

$$\begin{aligned} w_1 = 0 &\Rightarrow \vec{s}_1 = u_1 \vec{i} + v_1 \vec{j} \\ u_2, v_2 = 0 &\Rightarrow \vec{s}_2 = w_2 \vec{k} \end{aligned} \quad (1.21) \text{ e } (1.22)$$

O produto vetorial entre esses dois vetores é:

$$\vec{s}_1 \wedge \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 0 & u_1 \\ w_2 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}, \text{ ou} \quad (1.23)$$

$$\vec{s}_1 \wedge \vec{s}_2 = v_1 w_2 \vec{i} - u_1 w_2 \vec{j} \quad (1.24)$$

Ou seja, o vetor resultante também está no plano (\vec{i}, \vec{j}) . Se $\vec{s}_2(u_2, v_2, w_2)$ for unitário, tem-se $w_2 = 1$. Então:

$$\vec{s}_1 \wedge \vec{s}_2 = v_1 \vec{i} - u_1 \vec{j} = \vec{s}_0 \quad (1.25)$$

Dessa forma, o vetor ortogonal a $\vec{s}_1(u_1, v_1)$ é $\vec{s}_0(v_1, -u_1)$, sendo que $\vec{s}_0(v_1, -u_1)$ está contido no plano (\vec{i}, \vec{j}) .

1.3.4 Determinação de interior X exterior do domínio

Pode-se obter um vetor ortogonal a um outro vetor que represente um segmento da frente conforme visto na seção 1.3.3. Se o vetor sobre o segmento indicar o sentido horário da frente, o vetor ortogonal a ele sempre apontará para o interior do domínio (veja figura 1.23). Dessa forma, os pontos novos assim como os elementos novos são construídos no interior do domínio, não havendo o risco de criar triângulos exteriores. Essa característica é garantida pela "regra da mão direita" quando é efetuada uma multiplicação vetorial.

1.3.5 Equação de uma reta

Dado um vetor \vec{s} , um escalar a e um ponto inicial P_1 , uma reta é definida da seguinte maneira:

$$r: P = P_1 + \alpha \vec{s} \quad (1.26)$$

1.3.6 Cálculo de ângulos entre dois segmentos consecutivos

Considerando figura 1.24, pode-se obter dois vetores sobre os segmentos $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{P_2P_3}$. Eles são respectivamente $\vec{s}_1(u_1, v_1)$ e $\vec{s}_2(u_2, v_2)$.

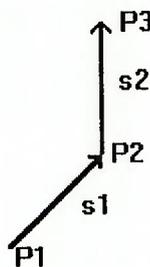


Figura 1.24 - Dois vetores sobre dois segmentos consecutivos da frente.

Como é sabido da álgebra vetorial,

$$\frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{\|\vec{s}_1\| \|\vec{s}_2\|} = \cos \theta, \quad (1.27)$$

onde

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = (u_1 u_2 + v_1 v_2) \quad (1.28)$$

$$\|\vec{s}_1\| = \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \quad (1.29)$$

$$\|\vec{s}_2\| = \sqrt{u_2^2 + v_2^2} \quad (1.30)$$

Se $\cos\theta$ for negativo, então $\theta > \frac{\pi}{2}$ e se $\cos\theta$ for positivo, então $\theta < \frac{\pi}{2}$. Através da função arco coseno, obtém-se θ . Porém, para ângulos replementares, $\cos\theta$ é igual e de mesmo sinal. Dessa forma não é possível saber se o ângulo medido é maior ou menor que o ângulo raso. Para descobrir isso, é necessário utilizar alguns artifícios.

Utilizando os conceitos de vetores ortogonais da seção 1.3.3, é possível obter dois vetores, \vec{s}_{11} e \vec{s}_{22} , ortogonais a \vec{s}_1 e \vec{s}_2 respectivamente. Através do conceito de equação de reta dado na seção 1.3.5, tem-se:

$$r: P = P_1 + \alpha_1 \vec{s}_{11} \tag{1.31}$$

$$s: P = P_3 + \alpha_2 \vec{s}_{22} \tag{1.32}$$

Se o ponto de intercessão entre as retas r e s estiver dentro do domínio, o ângulo procurado será menor que o ângulo raso, caso contrário, se o ponto de intercessão estiver fora do domínio, o ângulo será maior que o ângulo raso (seção 1.3.5). Veja figura 1.25.

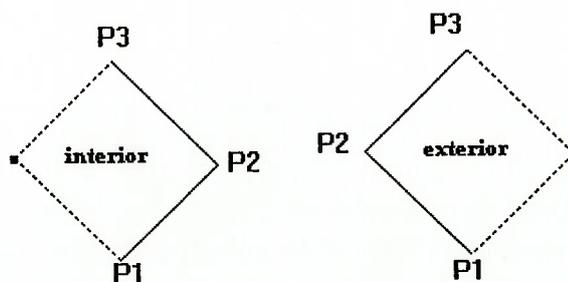


Figura 1.25 - Duas situações possíveis de formação de ângulos entre dois segmentos consecutivos da frente.

Através do sinal de α_1 e α_2 é possível determinar se o ponto de intersecção está dentro ou fora do domínio. Se α_1 e α_2 forem positivos, o ponto de intersecção estará dentro do domínio, caso contrário, estará no exterior. Dessa forma, basta resolver um sistema de duas equações com duas incógnitas.

Resumidamente o processo é descrito em três etapas: a primeira etapa consiste em obter os vetores ortogonais aos vetores que se apoiam sobre os segmentos que compõem o ângulo a ser medido; a segunda etapa determina se o ângulo é agudo ou obtuso e a terceira etapa define se o ângulo é maior ou menor que o ângulo raso.

1.3.7 Bissetriz de ângulos

Para a criação dos triângulos da seção 1.2.3 a) é necessário construir a bissetriz do ângulo α . Para isso, usa-se os conceitos de ortogonalidade descritos na seção 1.3.3. Considere a figura 1.26.

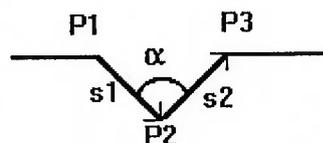


Figura 1.26 - Ângulo formado entre dois segmentos da frente conforme seção 1.2.3 a).

Verifique que a intercessão entre as duas retas perpendiculares aos vetores $\vec{s}_1(u_1, v_1)$ e $\vec{s}_2(u_2, v_2)$ é um ponto e que esse ponto e o ponto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ definem uma reta conforme a figura 1.27.

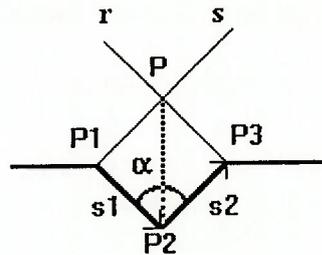


Figura 1.27 - Bissetriz do ângulo α .

Essa reta é a bissetriz do ângulo α . Observe porém que os segmentos podem ser de comprimentos diferentes. Nesse caso a reta obtida não é a bissetriz. Por isso é necessário que as perpendiculares passem por pontos equidistantes ao ponto P_2 sobre os segmentos. Veja figura 1.28.

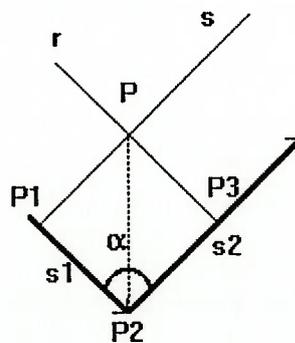


Figura 1.28 - Bissetriz do ângulo α formado por dois segmentos de tamanho diferente.

1.3.8 Altura de triângulos

Para criar um triângulo conforme mostra a seção 1.2.3 b) é necessário obter-se a altura desse triângulo. Esse é um processo simples que consiste em traçar uma perpendicular sobre o ponto médio do segmento da frente, conforme figura 1.29.

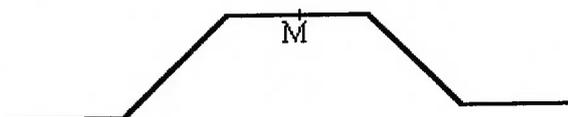


Figura 1.29 - Ponto médio do segmento para construção do triângulo conforme seção 1.2.3 b).

Utilizando os conceitos da seção 1.3.3 define-se um vetor ortogonal ao segmento da frente. Utilizando o ponto médio desse segmento, obtém-se uma reta que é perpendicular ao segmento. Sobre essa reta apoia-se a altura do triângulo(figura 1.30).

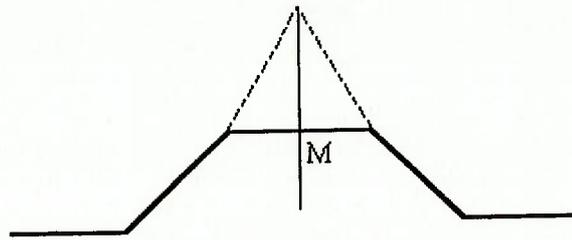


Figura 1.30 - Perpendicular sobre o ponto médio do segmento para construção do triângulo da seção 1.2.3 b).

1.3.9 Verificação de um ponto novo

A partir da criação de um ponto novo, surgem lados do(s) novo(s) elemento(s), que não podem cruzar a frente. Para garantir que um lado de um elemento novo não cruze a frente é necessário que seja feita uma verificação segmento a segmento da frente. Para essa verificação, são colocadas retas sobrepondo o lado do triângulo novo e o segmento da frente. Veja figura 1.31.

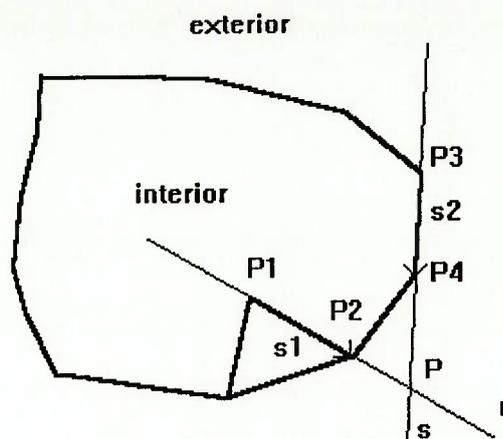


Figura 1.31 - Um ponto novo sobre a frente e a verificação de sua posição.

A localização do ponto de intercessão entre as retas r e s determina se os segmentos se cruzam ou não. Assim tem-se:

$$r: P = P_1 + \alpha \vec{s}_1 \quad (1.33)$$

$$s: P = P_3 + \beta \vec{s}_2 \quad (1.34)$$

onde:

$$\vec{s}_1 = P_1 - P_2$$

$$\vec{s}_2 = P_3 - P_4$$

Se $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$, então os segmentos se cruzam e o ponto novo não serve para a criação de novos elementos. Caso, ou α ou β , esteja fora desse intervalo, o ponto novo é adequado para a construção de novos elementos.

1.4 Malhas não-estruturadas - Parâmetros

1.4.1 Introdução

Nas seções 2 e 3 foi mostrado todo o processo para geração das malhas não-estruturadas. Na seção 1.2.3 foram mostrados dois parâmetros importantes na escolha do tipo de elemento a ser gerado. Esses parâmetros foram chamados de LS e LI e definem o aspecto geral da malha. Este capítulo visa mostrar a maneira como os parâmetros influenciam a formação da malha. Também é neste capítulo que se encontram os exemplos dos resultados obtidos através do método apresentado nos capítulos anteriores. Os exemplos são dados de maneira ilustrativa para mostrar os diferentes resultados obtidos através da variação dos parâmetros.

1.4.2 Influência de LS e LI na formação dos triângulos

Como pode ser visto na seção 1.2.3, LS e LI definem os limites superior e inferior respectivamente para a escolha do tipo de triângulo a ser criado. Esses limites definem três intervalos diferentes que são: $\alpha < LI$, $LI \leq \alpha \leq LS$, $\alpha > LS$. Para cada intervalo, é criado um tipo diferente de triângulo. A variação dos parâmetros determina onde deve começar e terminar cada tipo. Dessa forma, se for aumentado o valor de LS,

as condições para a criação dos triângulos do tipo b) ficam mais limitadas, abrindo maior espaço para triângulos do tipo a) e c). Já LI determina como o espaço para a criação dos triângulos é dividido entre os tipos a) e c). Quanto menor for LI, maior espaço haverá para os triângulos do tipo a) e vice-versa.

Todos os valores mostrados neste texto são provenientes da experiência do autor, não havendo outras referências. Como fora mostrado na seção 1.2.3, George(1991) cita alguns valores, porém esses valores são fixos. Foi notado que esses valores dependem de cada contorno e do aspecto da malha desejado. Existem casos em que se deseja malhas mais abertas e outros malhas mais fechadas. O resultado final deve ser qualificado conforme o estudo que se deseja fazer no dado domínio e essa análise só pode ser feita com base no método numérico a ser adotado posteriormente. Dessa forma, cabe ao especialista na área de dinâmica dos fluidos computacional definir os parâmetros mais adequados. Para isso ele precisa testar diferentes valores desses parâmetros até atingir o resultado desejado.

1.4.3 Resultados

Nesta etapa do processo a malha gerada, também chamada de malha original, apresenta elementos indesejados principalmente no momento do fechamento. Pode-se notar linhas nas regiões onde ocorreu o fechamento. Numa etapa posterior, a malha original é amaciada, ou seja, seus elementos são distribuídos mais uniformemente sobre o domínio de forma que os triângulos sejam aproximadamente equiláteros. Nesta fase é

avaliado apenas o aspecto geral da malha. A partir daí já é possível definir os parâmetros mais adequados e então passar para a segunda etapa, a qual será vista nos próximos capítulos.

Os exemplos dados ao longo deste trabalho visam obter uma malha com elementos aproximadamente homogêneos. Para efeitos didáticos, as variações nos parâmetros são feitas unitariamente. Assim, existe uma limitação nas possibilidades de variação. Porém isso não é necessário, as variações podem e devem ser feitas com parcelas fracionadas, conforme a necessidade do pesquisador.

1.4.3.1 Malha gerada no interior de um círculo

Como exemplo inicial foi escolhido um contorno na forma circular e dividido em 120 partes iguais. Para esse contorno foram experimentados quatro combinações diferentes para os parâmetros LI e LS. A figura 1.32 mostra o caso para $LI = \frac{5}{12}\pi$ e

$$LS = \frac{11}{12}\pi.$$

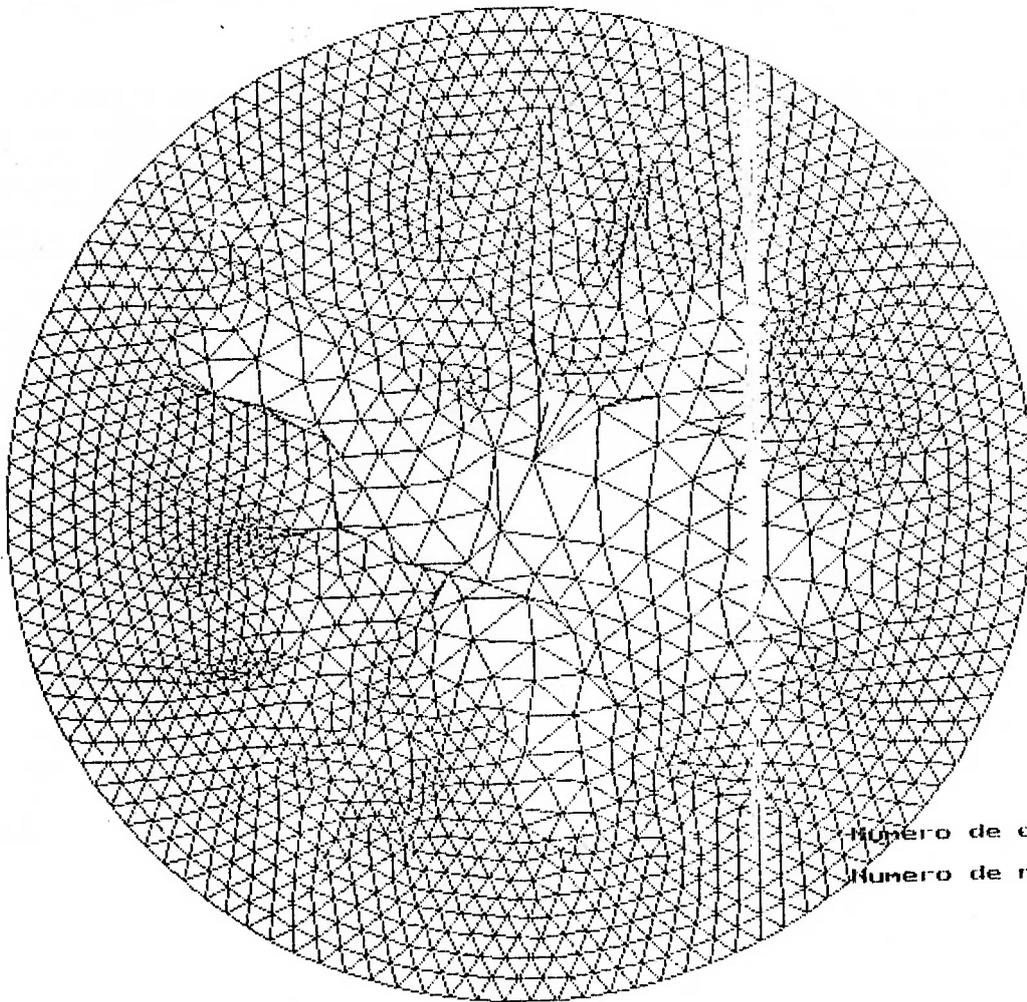


Figura 1.32 - Círculo com $LI = \frac{5}{12}\pi$ e $LS = \frac{11}{12}\pi$.

Note que os elementos do centro do círculo são muito grandes. Esses elementos, indesejados no caso aqui apresentado, são provenientes principalmente dos triângulos do tipo a) apresentados na seção 1.2.3. Dessa forma, uma segunda malha foi gerada com os parâmetros $LI = \frac{5}{12}\pi$ e $LS = \frac{9}{12}\pi$, conforme figura 1.33.

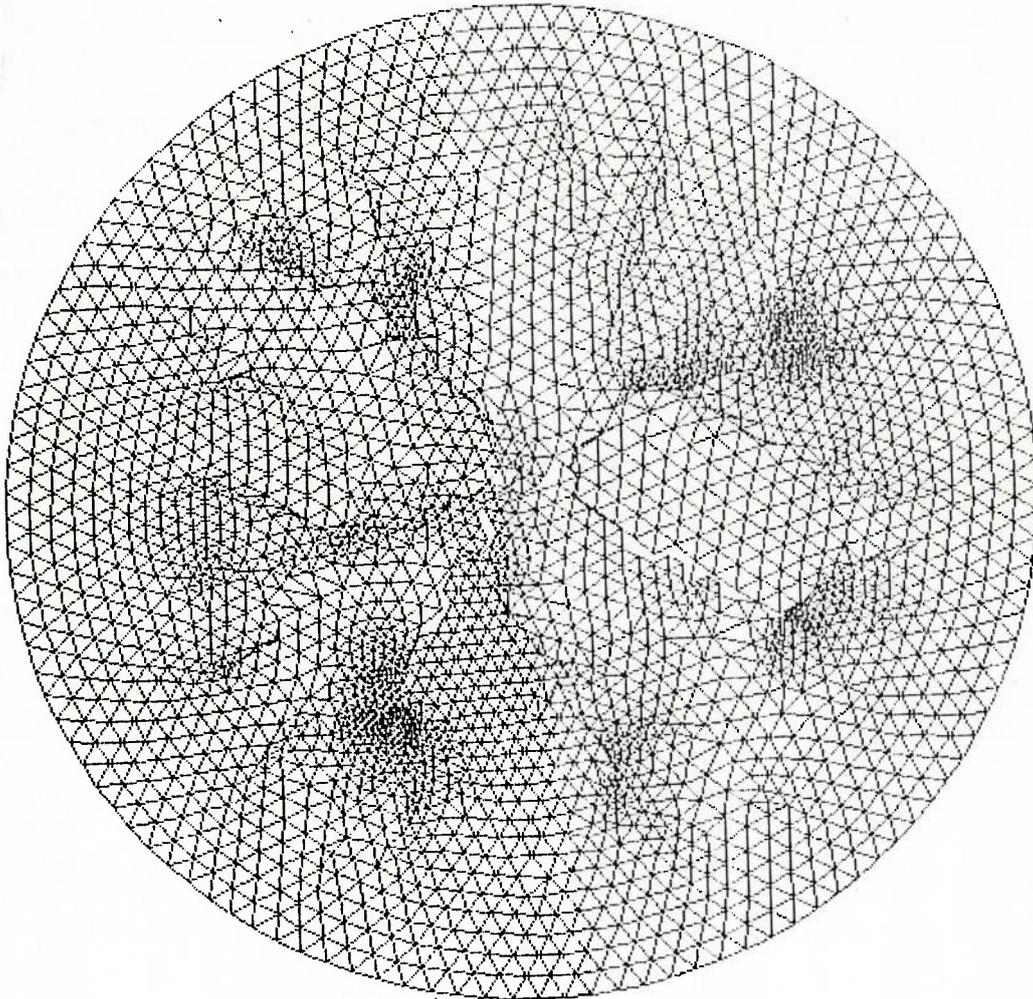


Figura 1.33 - Círculo com $LI = \frac{5}{12}\pi$ e $LS = \frac{9}{12}\pi$.

Nesse caso, surgiram muitos triângulos do tipo b), havendo uma concentração exagerada de pequenos elementos em algumas regiões e conseqüentemente a malha não fechou. Para resolver esse problema, os limites foram deslocados para cima,

sendo $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$, conforme a figura 1.34.

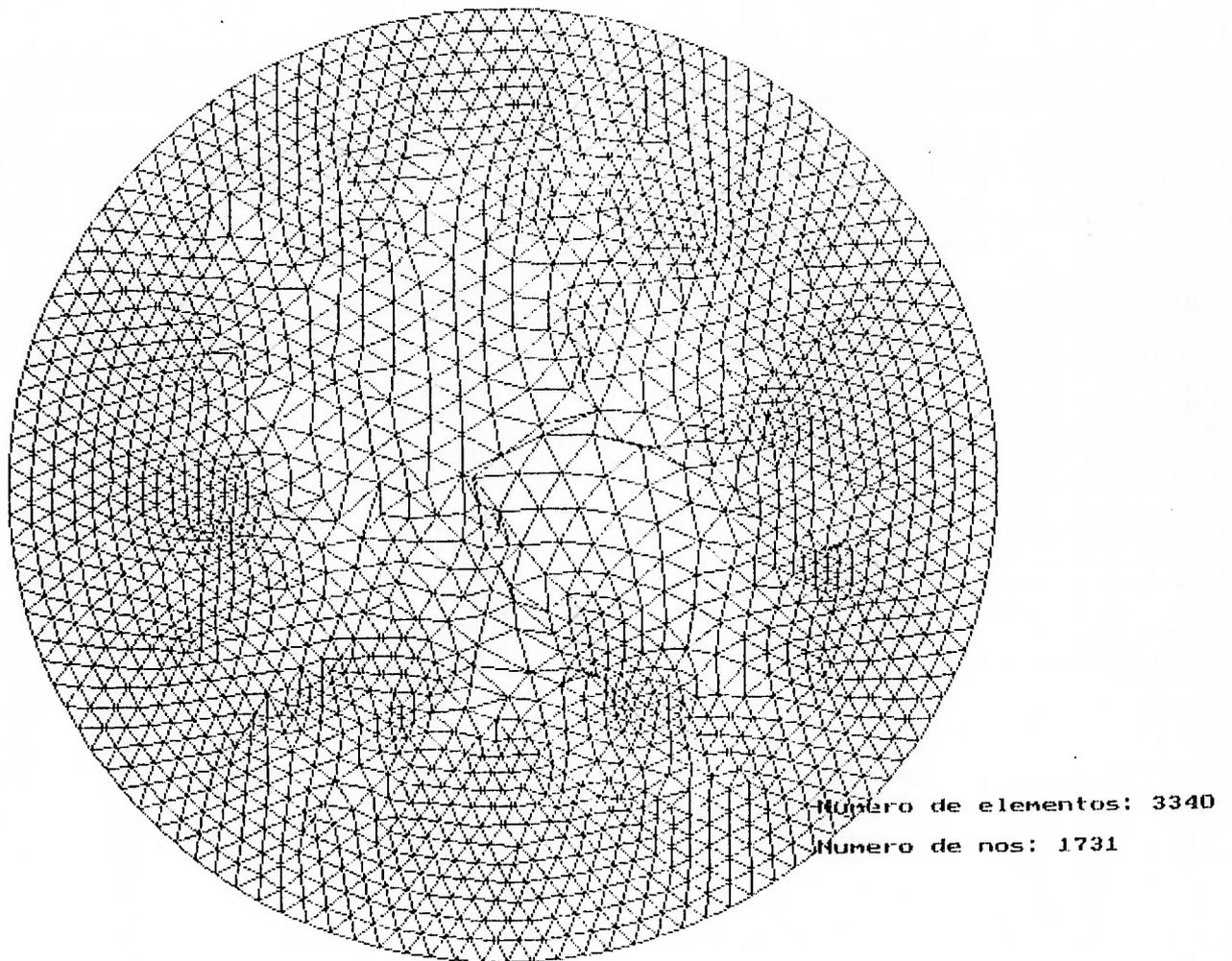
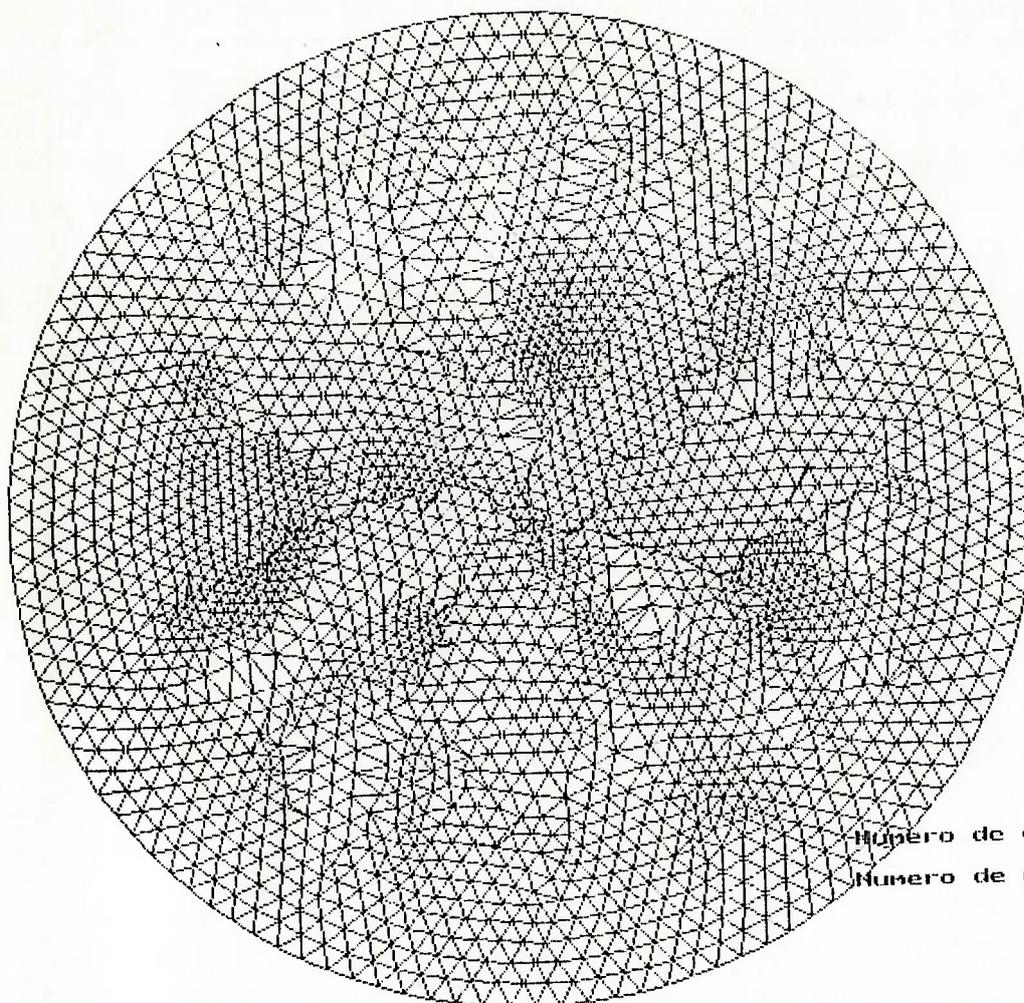


Figura 1.34 - Círculo com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$.

É possível notar uma melhora sensível no aspecto geral da malha, porém os elementos do centro ainda estão muito grandes. Essa distorção de tamanho já é menor que a apresentada na figura 1.32, mas a malha ainda não está adequada. Para diminuir a formação desses elementos não desejados, os limites para os triângulo do tipo a) são

diminuídos novamente. Dessa forma, usando $LI = \frac{6}{12} \pi$ e $LS = \frac{8}{12} \pi$, obtém-se a malha da figura 1.35.



Numero de elementos: 4804
Numero de nos: 2463

Figura 1.35 - Círculo com $LI = \frac{6}{12} \pi$ e $LS = \frac{8}{12} \pi$.

Essa malha já está adequada, apresentando grande homogeneidade. Dependendo da aplicação, pode-se desejar uma menor concentração de triângulos. Para isso, basta

ampliar um pouco o intervalo para triângulos do caso a), ou seja, para $LI = \frac{6}{12} \pi$ e

$LS = \frac{9}{12} \pi$, obtém-se a malha da figura 1.36.

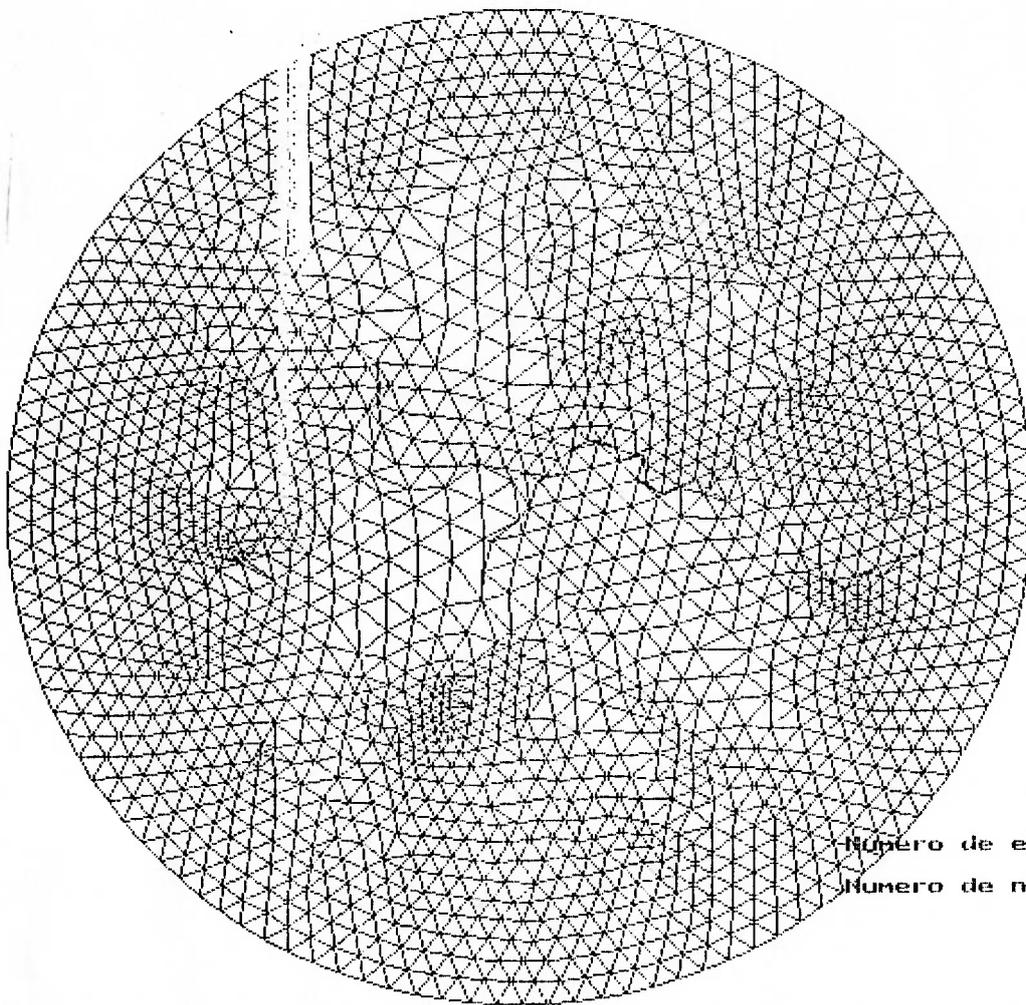


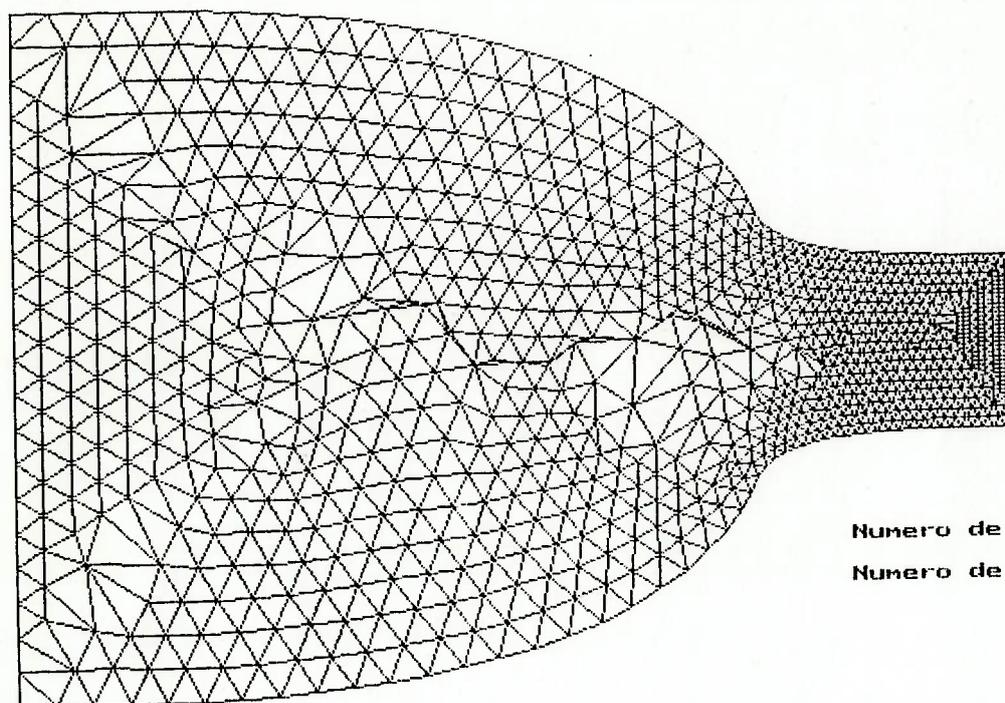
Figura 1.36 - Círculo com $LI = \frac{6}{12} \pi$ e $LS = \frac{9}{12} \pi$.

Note que a concentração de elementos em alguns locais diminuiu, porém é possível observar o surgimento de alguns triângulos maiores. Cabe ao pesquisador determinar qual malha se adapta melhor ao seu problema.

1.4.3.2 Malha gerada no interior de um Túnel de Vento

Este exemplo utiliza o mesmo contorno (túnel de vento) apresentado na seção 1.1 (Malhas estruturadas). É importante citar que neste caso o contorno não está dividido em partes iguais. Pode-se notar uma diminuição dos elementos na região de estreitamento. Isso é desejado, uma vez que para maior definição do escoamento é necessário que elementos menores sejam criados nessa região. Por outro lado, a parte larga do túnel não necessita de tanta definição, podendo o contorno ser discretizado em partes maiores. O resultado é uma distribuição de elementos mais concentrada no estreitamento.

Utilizando-se inicialmente os parâmetros $LI = \frac{7}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$, obtém-se a malha da figura 1.37.

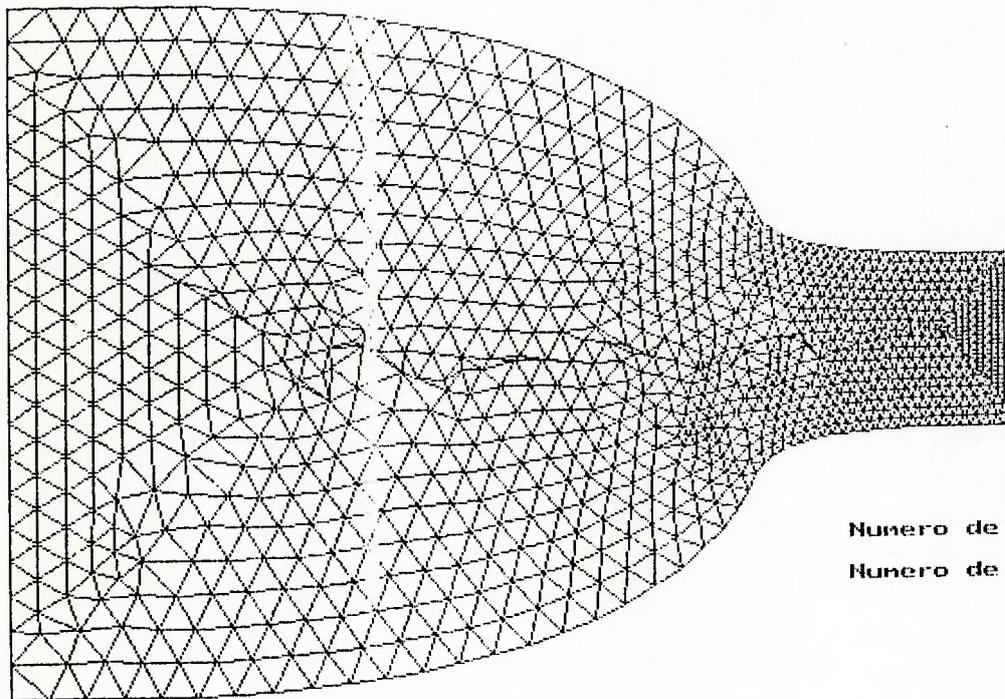


Numero de elementos: 1864
 Numero de nos: 1002

Figura 1.37 - Túnel com $LI = \frac{7}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$.

Nota-se uma "costura" de triângulos do tipo c) vindo dos cantos do túnel. Esses elementos podem ser eliminados diminuindo LI para $LI = \frac{6}{12}\pi$ e mantendo $LS = \frac{10}{12}\pi$.

O resultado é mostrado na figura 1.38.



Numero de elementos: 2084
Numero de nos: 1112

Figura 1.38 - Túnel com $LI = \frac{6}{12} \pi$ e $LS = \frac{10}{12} \pi$.

A malha gerada apresenta um aspecto geral muito bom, com variação homogênea dos triângulos, conforme desejado. Um outro experimento foi efetuado com os parâmetros $LI = \frac{6}{12} \pi$ e $LS = \frac{11}{12} \pi$. Os resultados são mostrados na figura 1.39.

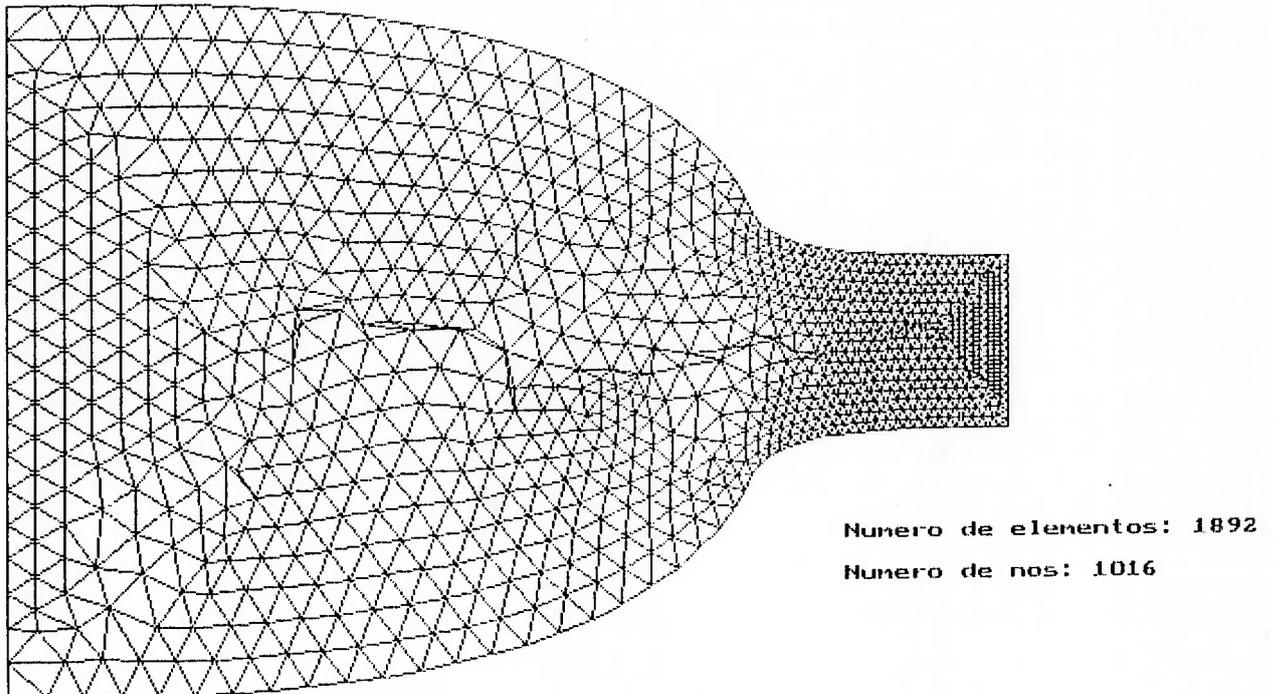
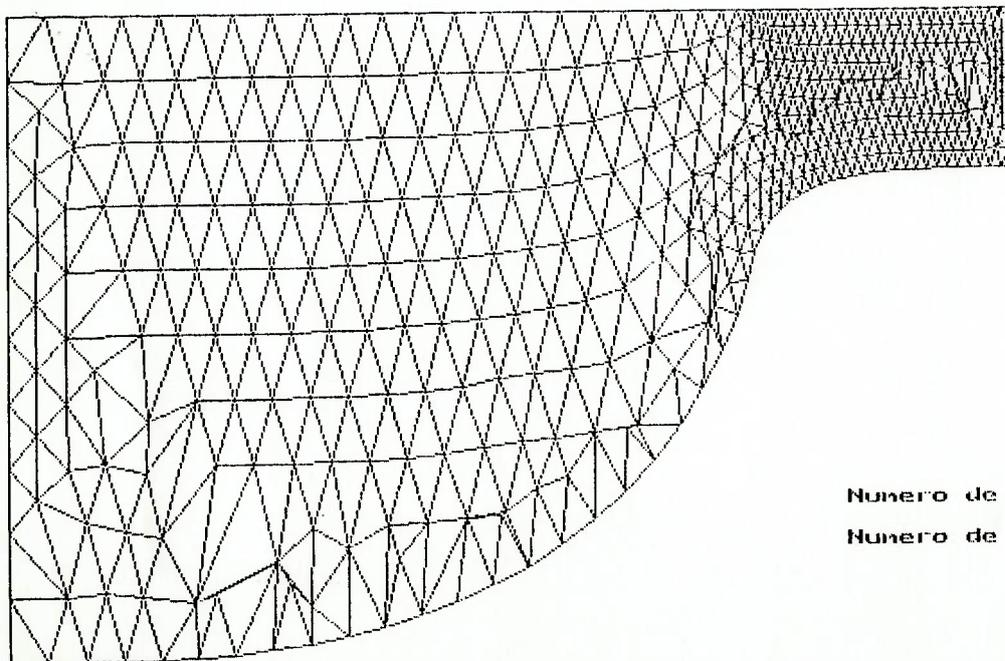


Figura 1.39 - Túnel com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{11}{12}\pi$.

O aumento de LS aumentou a quantidade de triângulos do tipo a), gerando alguns triângulos grandes indesejados. Porém o aspecto geral da malha também é bom e cabe ao pesquisador decidir qual malha utilizar. Malhas com menos elementos exigem menor tempo de cálculo para a resolução do método numérico, o que pode ser desejável, mas por outro lado não trazem resultados tão precisos quanto malhas mais refinadas.

1.4.3.3 Malha gerada no interior de meio Túnel de Vento

O túnel de vento mostrado no exemplo 2 apresenta simetria radial. É possível tirar benefício dessa simetria dividindo-se o domínio, gerando a malha sobre esse domínio dividido e depois espelhando a outra metade. As vantagens são maior homogeneidade da malha e menor tempo de cálculo. A malha gerada para meio-túnel com os parâmetros $LI = \frac{8}{12}\pi$ e $LS = \frac{11}{12}\pi$ pode ser vista na figura 1.40.

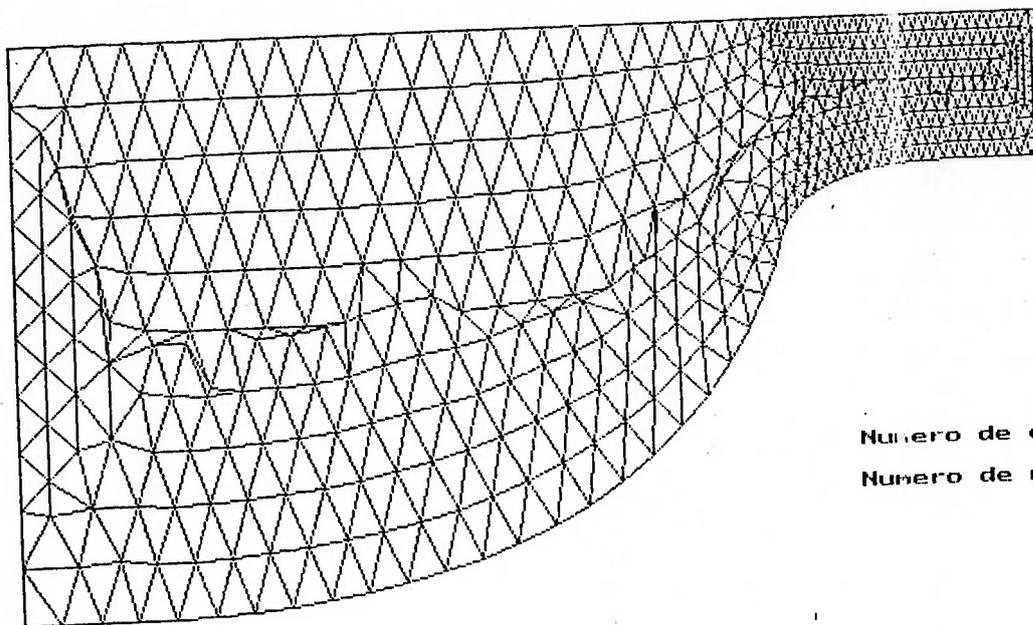


Numero de elementos: 876
Numero de nos: 498

Figura 1.40 - Meio-túnel com $LI = \frac{8}{12}\pi$ e $LS = \frac{11}{12}\pi$.

Note que aparece uma "costura" vinda do canto do túnel. Essa costura é devida a geração inapropriada de triângulos do tipo c). Para evitar isso é possível diminuir LI

para $LI = \frac{6}{12}\pi$ e manter $LS = \frac{11}{12}\pi$. O resultado pode ser visto na figura 1.41.

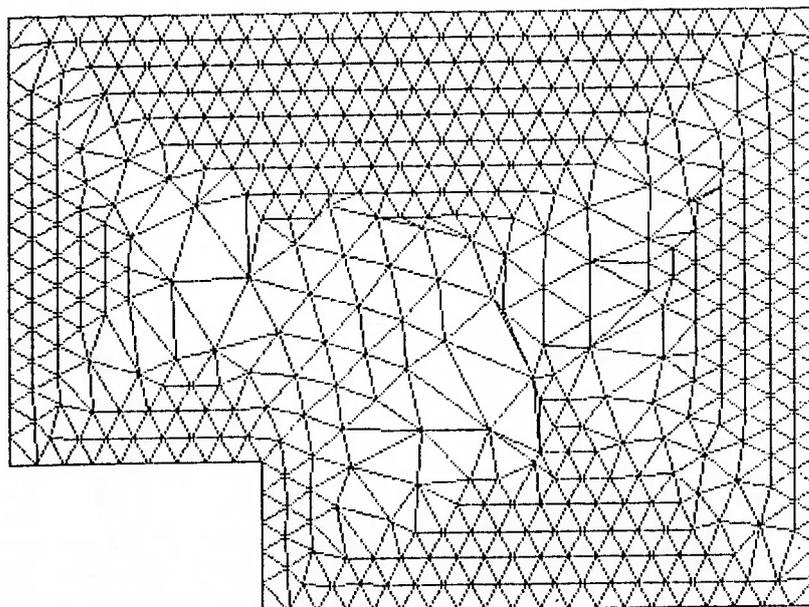


Numero de elementos: 976
Numero de nos: 548

Figura 1.41 - Meio-túnel com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{11}{12}\pi$.

1.4.3.4 Malha gerada ao redor de um degrau

O domínio apresentado neste exemplo foi escolhido para exemplificar o caso de fronteiras que apresentam ressaltos. As malhas não-estruturadas são muito versáteis e poderosas nesses casos, não apresentando dificuldades maiores. Os elementos gerados são homogêneos e bem comportados. Para os parâmetros $LI = \frac{8}{12}\pi$ e $LS = \frac{11}{12}\pi$ obtém-se a malha da figura 1.42.

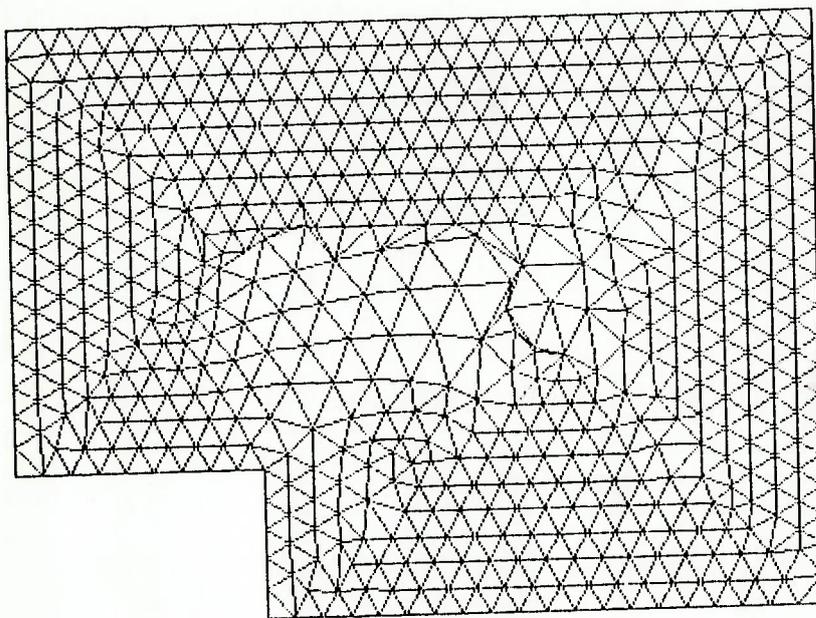


Numero de elementos: 920
Numero de nos: 510

Figura 1.42 - Degrau com $LI = \frac{8}{12}\pi$ e $LS = \frac{11}{12}\pi$.

Note que surgiram muitos elementos indesejados. É possível notar algumas "costuras" provenientes de triângulos do tipo c) e alguns triângulos grandes do tipo a). Para resolver o problema da "costura" deve-se diminuir LI e para evitar triângulos do tipo a) com tamanho fora do padrão deve-se diminuir LS. Assim sendo, utilizando

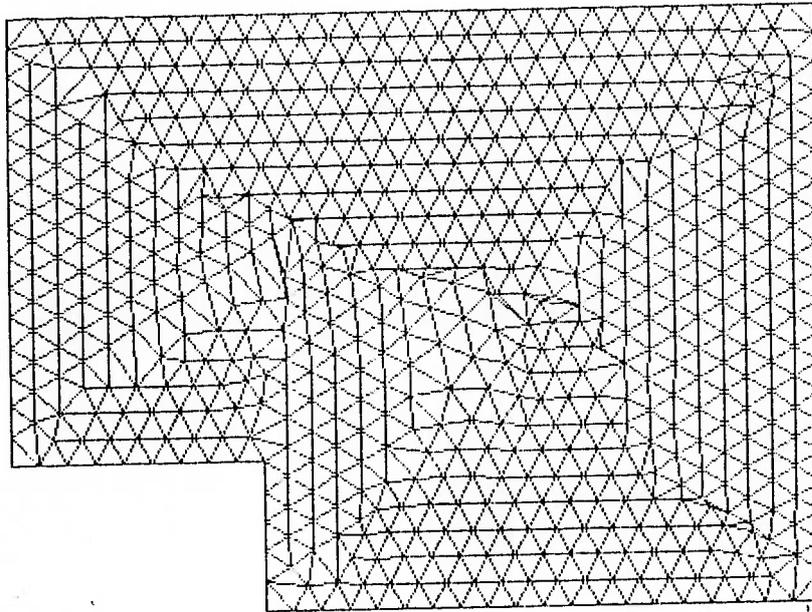
$$LI = \frac{6}{12}\pi \text{ e } LS = \frac{10}{12}\pi, \text{ a malha gerada pode ser vista na figura 1.43.}$$



Numero de elementos: 1126
Numero de nos: 613

Figura 1.43 - Degrau com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$.

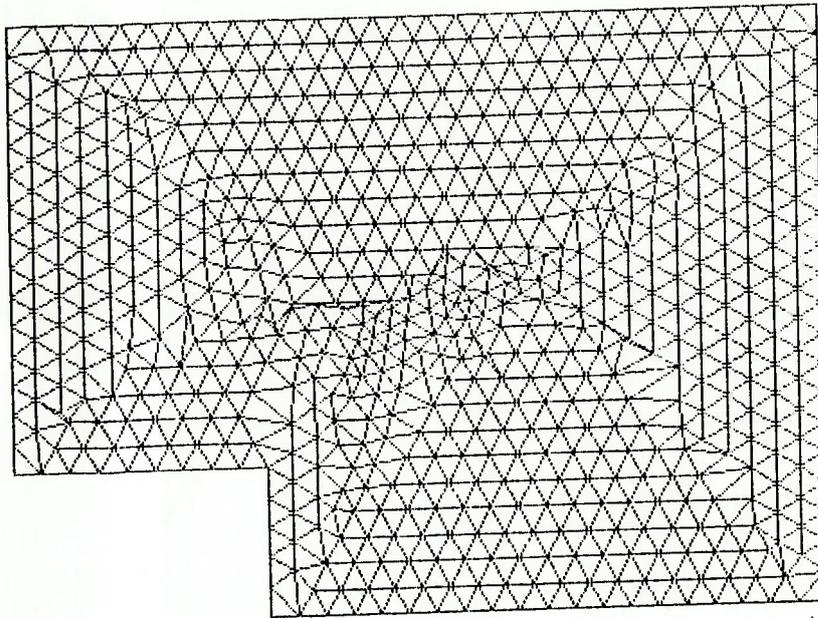
Ainda existem muitos triângulos grandes do tipo a). Mais uma diminuição de LS é necessária, utilizando os parâmetros $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{9}{12}\pi$, conforme a figura 1.44.



Numero de elementos: 1240
Numero de nos: 670

Figura 1.44 - Degrau com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{9}{12}\pi$.

Note que ainda existem algumas "costuras", porém com pouca expressividade. A malha já apresenta um aspecto geral muito bom. O amaciamento eliminará o problema dessas pequenas "costuras". Um outro caso interessante para ser citado é caso dos parâmetros $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{8}{12}\pi$, que pode ser visto na figura 1.45.



Numero de elementos: 1302
Numero de nos: 701

Figura 1.45 - Degrau com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{8}{12}\pi$.

Aqui as "costuras" mudaram de lado e também não representam problemas. O aspecto geral dessa malha também está muito bom.

2. Tratamento Qualitativo de Malhas Não-Estruturadas

2.1 Amaciamento da malha (método dos triângulos)

2.1.1 Introdução

No capítulo 1 (seções 1.2 e 1.3) foi mostrado como se obter uma malha não-estruturada a partir do contorno de um domínio. A aparência da malha é resultado direto da discretização do contorno do domínio e dos parâmetros estabelecidos (seção 1.4). Na seção 1.4 também são mostrados os resultados obtidos e pode-se observar alguns problemas como a grande variação de tamanho entre triângulos vizinhos e triângulos mal formados, ou seja, "pouco equiláteros".

Nesta seção é apresentada uma técnica para diminuir essas diferenças. É o que se chama de Amaciamento da Malha. George(1991) cita a necessidade de se adotar essa técnica, porém nada diz a respeito da forma como deve ser feita. Peraire(1990) também mostra essa necessidade e explica que os lados dos elementos funcionam como molas de dureza proporcional ao comprimento dos lados. Os nós são movimentados até esse sistema entrar em equilíbrio. Essa é a idéia básica utilizada na próxima seção (método dos polígonos). Nesta seção é apresentado um método diferente, desenvolvido pelo autor desta dissertação, que visa aproximar os triângulos a triângulos equiláteros. Os elementos da malha são mantidos, porém seus nós são mudados de lugar para, dessa forma, mudar as proporções dos triângulos. Esse remanejamento de nós é feito segundo

critérios que garantem que não haja deterioração da malha, ou seja, não haja sobreposição de triângulos.

O amaciamento apresenta limites. Esses limites são inerentes ao próprio processo, como será visto nas próximas seções, e também provêm da malha original. Para que os triângulos sejam equiláteros, os nós devem possuir seis elementos ligados a eles. Porém, na geração da malha, aparecem nós com mais ou menos que seis elementos atrelados. Dessa forma, torna-se impossível que todos os elementos sejam equiláteros, existindo uma distorção nos elementos.

2.1.2 O processo de amaciar

O rearranjo dos nós tem que ser feito muito lentamente para não deteriorar a malha. Além disso, o amaciamento deve começar com os elementos mais distorcidos da malha. Mede-se a distorção de um elemento através da razão entre as medidas dos seus lados. Dessa forma tem-se:

$$D_1 = \left| \frac{(L_1 - L_2)}{L_1} \right|, \quad D_2 = \left| \frac{(L_2 - L_3)}{L_2} \right|, \quad D_3 = \left| \frac{(L_3 - L_1)}{L_3} \right| \quad (2.1)$$

onde L_1, L_2 e L_3 são os lados de um triângulo definidos conforme a figura 2.1.

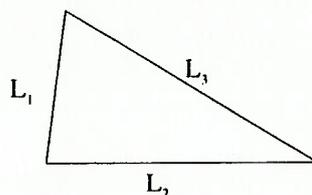


Figura 2.1 - lados de um triângulo.

O processo consiste em varrer a malha elemento a elemento. Os triângulos que apresentam distorção maior que um determinado parâmetro (A) são ajustados. Os triângulos com distorção menor não são tocados. Após o último elemento ser verificado, o processo recomeça. Se, durante uma varredura na malha, não for encontrado nenhum elemento com distorção maior que o parâmetro definido, então esse parâmetro é diminuído e o processo recomeça. Dessa forma todos os triângulos que apresentam alguma distorção são ajustados. O processo termina quando o parâmetro for igual a zero (figura 2.2).

2.1.3 Ajustando os nós

Ajuste dos nós é feito em pequenos incrementos ou decrementos nos lados dos triângulos. Assim para o triângulo da figura 2.1 o lado L_1 é esticado em $0,1\%¹$ de sua medida enquanto que o lado L_3 é reduzido em $0,1\%$ de sua medida (figura 2.3).

¹valor empírico encontrado pelo autor

Repare que as variações no comprimento se dão nos dois extremos dos lados, sendo metade em cada sentido. Dessa forma o triângulo executa uma "rotação", permitindo um acentamento melhor entre os elementos. Caso as variações fossem somente em um sentido, os triângulos estariam fixos em um dos nós, o que proibiria o rearranjo entre eles.



Figura 2.2 - fluxograma de amaciamento.

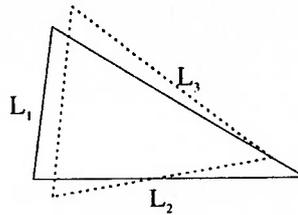


Figura 2.3 - triângulo ajustando.

2.1.4 Estabelecendo os limites

Como foi visto na seção 2.1.2, o processo de amaciamento da malha é cíclico. Também foi visto que existe um parâmetro de comparação para determinar quais elementos serão ajustados em cada ciclo. Os limites do amaciamento estão diretamente ligados a esse parâmetro.

Esse parâmetro define um percentual da diferença entre o comprimento dos lados do triângulo, representando a distorção do elemento. Se um triângulo apresentar distorção maior que o parâmetro definido, ele é rearranjado, de tal forma que após várias passagens, esse elemento deve se aproximar de um triângulo equilátero. O parâmetro é diminuído sempre que não for encontrado nenhum elemento com distorção maior que ele. Acontece que quando existem mais ou menos do que seis elementos atrelados a um nó, esses triângulos nunca poderão ser equiláteros. Dessa forma sempre apresentarão uma distorção que impedirá a diminuição do valor do parâmetro. Assim o processo permanece rodando eternamente, sem que o parâmetro alcance o seu valor mínimo que é

zero. Os elementos que apresentam distorção menor que o parâmetro nunca são tocados e conseqüentemente nunca são corrigidos.

Para contornar essa limitação, pode-se fazer com que o parâmetro seja diminuído depois de um número determinado de passagens sem que houvesse alteração nele. Deve-se tomar o cuidado de não diminuir o parâmetro antes de ter-se ajustado todos os elementos que ainda podiam ser ajustados antes desta diminuição. Em alguns casos, isso pode levar a deterioração da malha, vindo a existir elementos que cruzem as fronteiras de outros. Uma maneira é apenas utilizar essa técnica quando a distorção máxima dos elementos não for maior que um limite pré-estabelecido. Assim o processo se dará normalmente e quando a distorção máxima dos elementos for menor que esse limite, utiliza-se essa técnica de diminuição do parâmetro. Isso permite que o parâmetro atinja o valor zero e termine o processo.

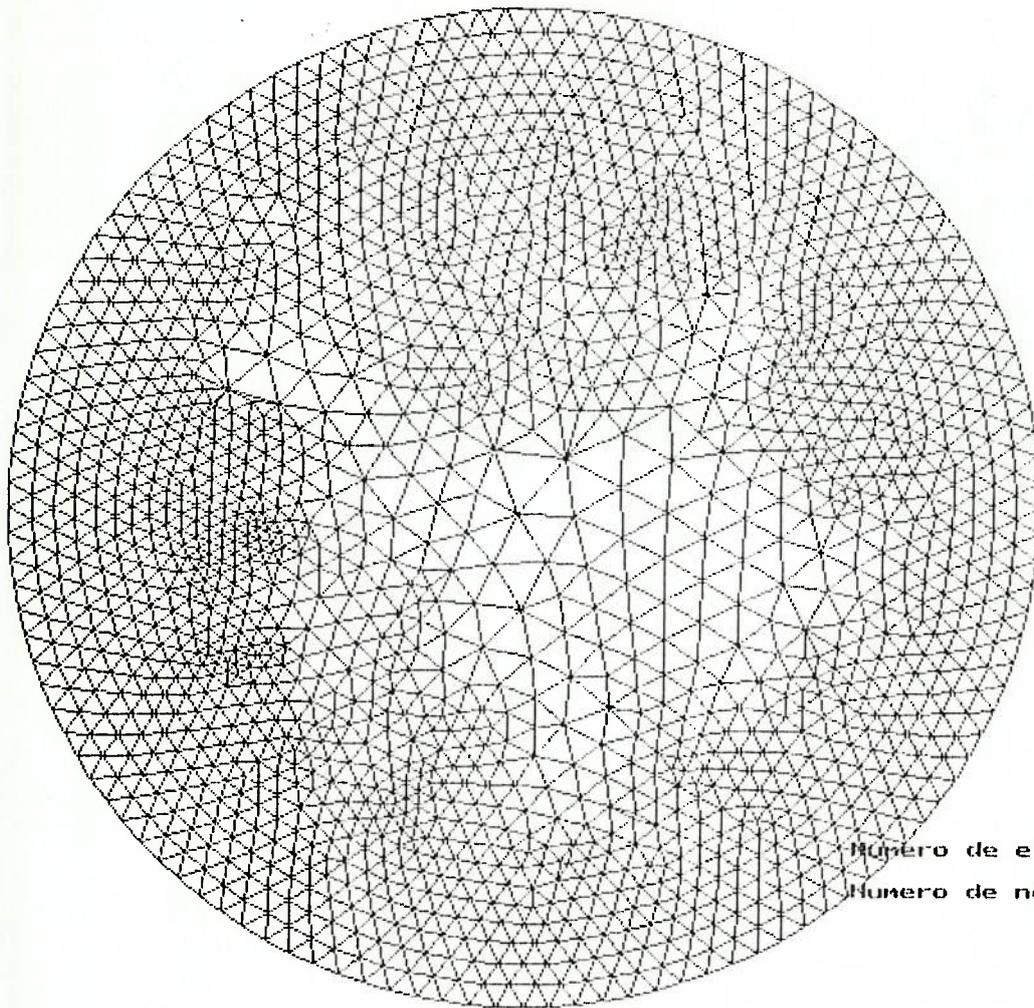
Outra limitação que é inerente ao processo está no fato de cada elemento fazer fronteira com outros dois (no caso da fronteira do domínio) ou três elementos. A mudança nas proporções de um elemento necessariamente muda as proporções dos outros elementos. Se essa mudança não for favorável, existirá uma necessidade de rearranjar os elementos vizinhos. Dessa forma o processo se transforma em uma disputa de "cabo-de-guerra", enquanto um elemento requisita uma mudança num sentido, o vizinho requisita uma mudança no outro. É por isso que duas providências foram tomadas, uma é a variação lenta e gradual entre as proporções do triângulo e a outra é efetuar a mudança em todos os nós do elemento, conforme visto na seção 2.1.3.

2.1.5 Resultados

Os resultados apresentados aqui são relativos às malhas geradas no capítulo 1. Foram escolhidas as malhas com melhor aspecto geral para serem amaciadas. Dessa forma é possível fazer a comparação entre as malhas não amaciadas e as malhas amaciadas.

2.1.5.1 Malha gerada no interior de um círculo

A malha da figura 1.29, após o amaciamento pelo método dos triângulos, resultou na malha da figura 2.4.

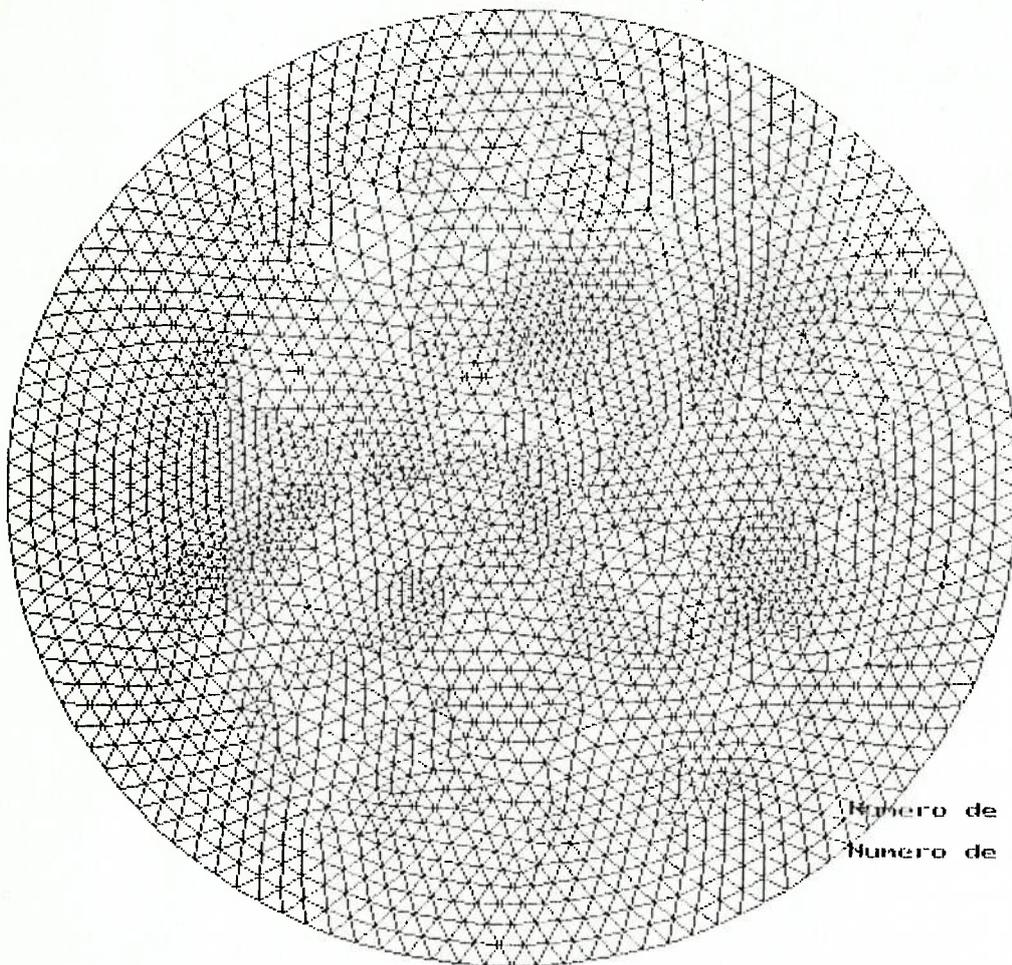


Número de elementos: 3228
Número de nos: 1675

Figura 2.4 - Malha da figura 1.29 amaciada pelo método dos triângulos, com $LI = \frac{5}{12}\pi$ e

$$LS = \frac{11}{12}\pi.$$

A malha da figura 1.32, após o amaciamento pelo método dos triângulos, resultou na malha da figura 2.5.

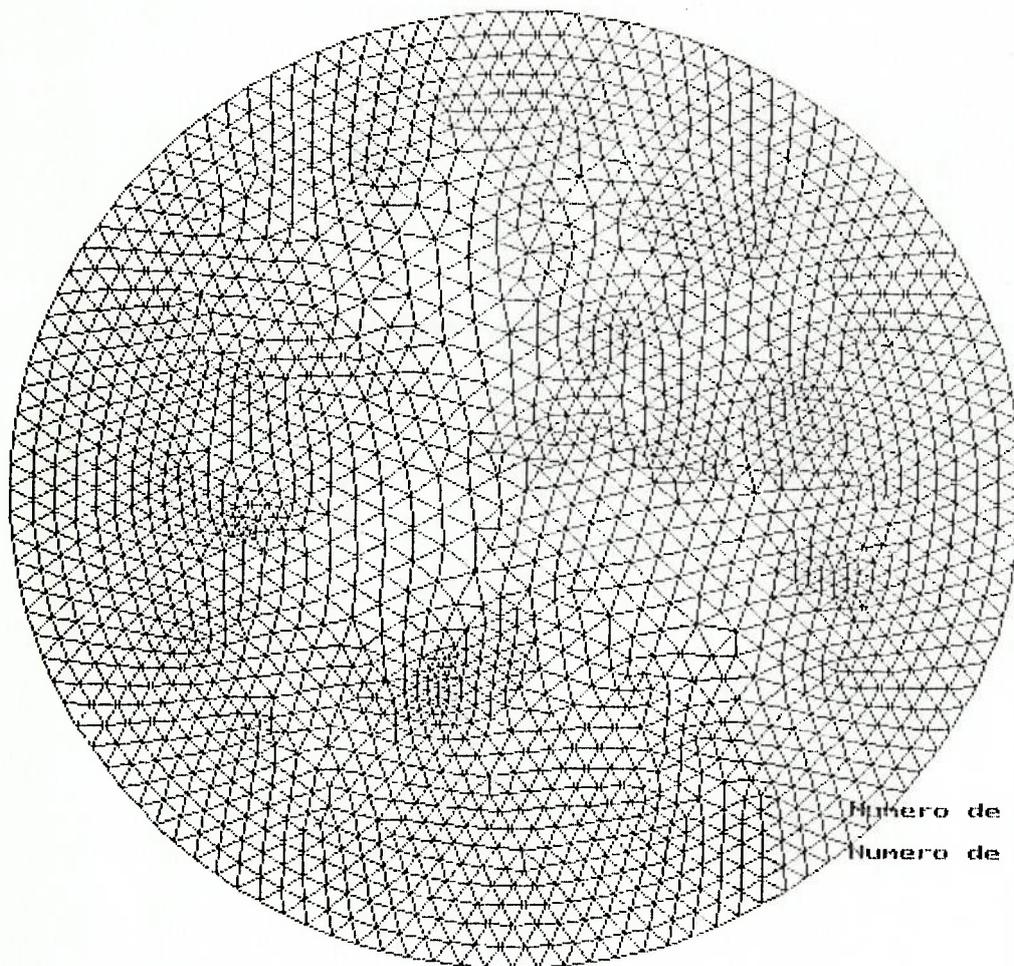


Numero de elementos: 4804
Numero de nos: 2463

Figura 2.5 - Malha da figura 1.32 amaciada pelo método dos triângulos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e

$$LS = \frac{8}{12}\pi.$$

A malha da figura 1.33, após o amaciamento pelo método dos triângulos, resultou na malha da figura 2.6.



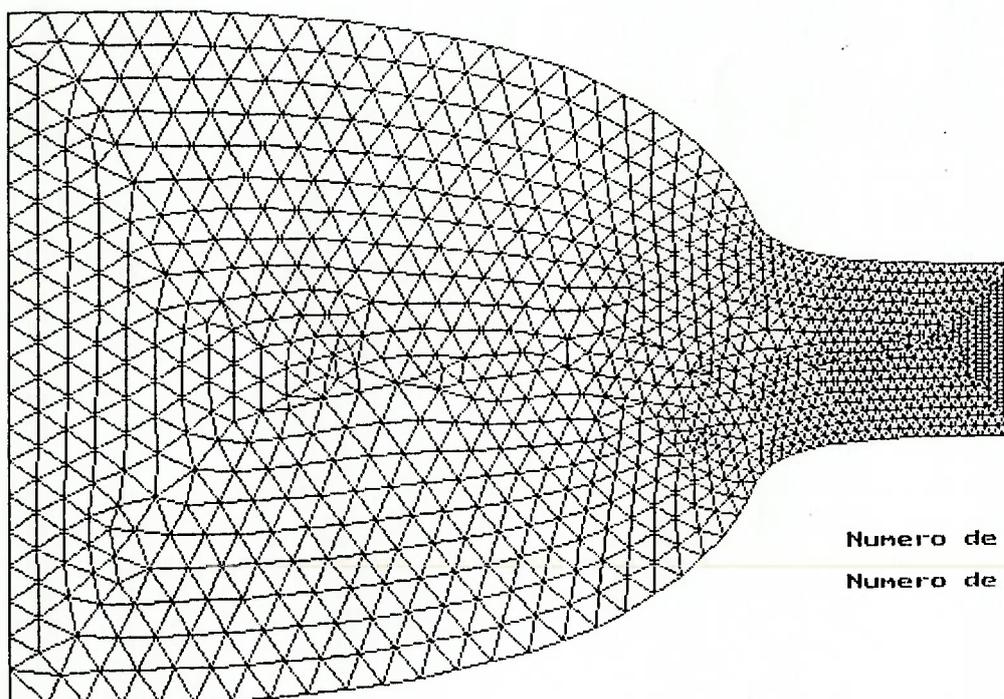
Numero de elementos: 3546
Numero de nos: 1834

Figura 2.6 - Malha da figura 1.33 amaciada pelo método dos triângulos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e

$$LS = \frac{9}{12}\pi.$$

2.1.5.2 Malha gerada no interior de um Túnel de Vento

A malha da figura 1.35, após o amaciamento pelo método dos triângulos, resultou na malha da figura 2.7.



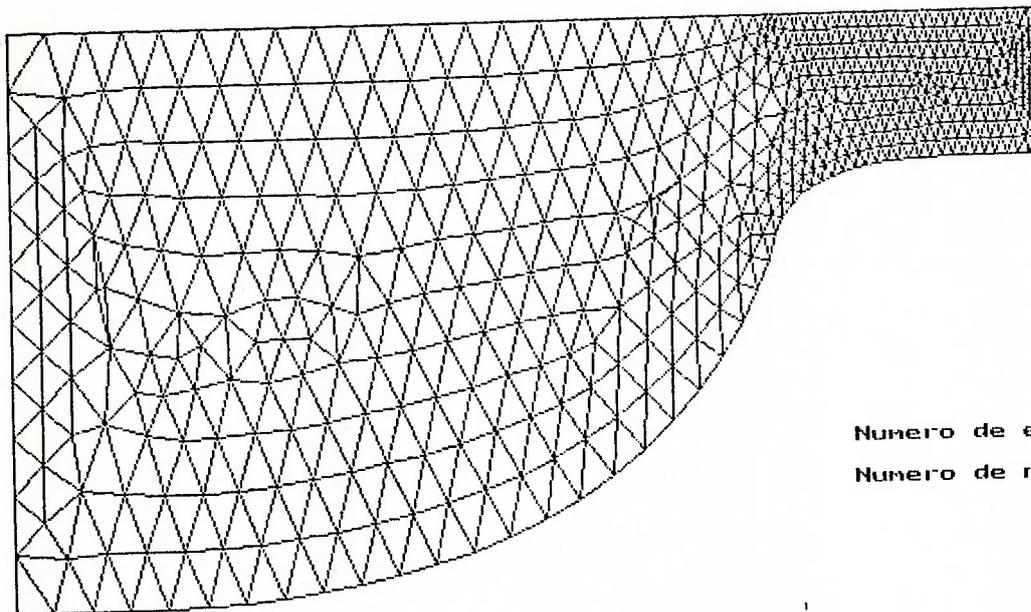
Numero de elementos: 2084
Numero de nos: 1112

Figura 2.7 - Malha da figura 1.35 amaciada pelo método dos triângulos, com $LI = \frac{6}{12} \pi$ e

$$LS = \frac{10}{12} \pi.$$

2.1.5.3 Malha gerada no interior de meio Túnel de Vento

A malha da figura 1.38, após o amaciamento pelo método dos triângulos, resultou na malha da figura 2.8.



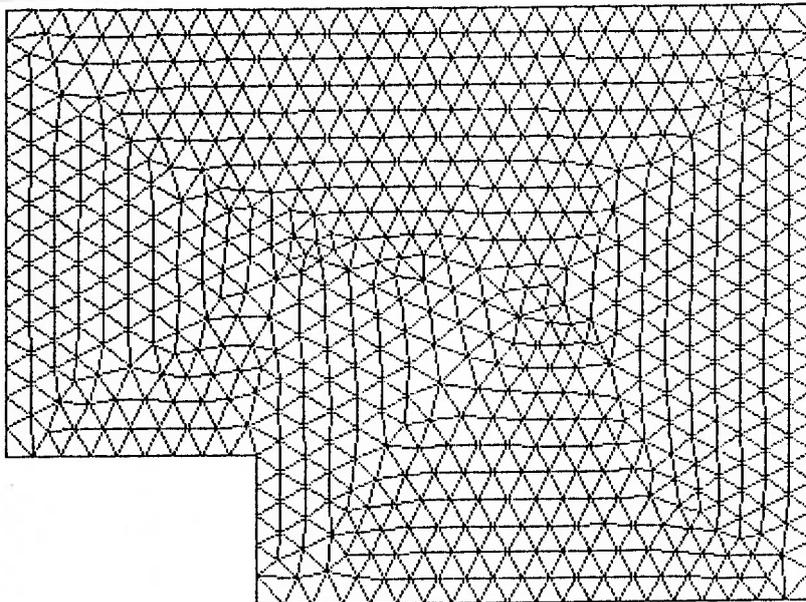
Numero de elementos: 976
Numero de nos: 548

Figura 2.8 - Malha da figura 1.38 amaciada pelo método dos triângulos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e

$$LS = \frac{11}{12}\pi.$$

2.1.5.4 Malha gerada ao redor de um degrau

A malha da figura 1.42, após o amaciamento pelo método dos triângulos, resultou na malha da figura 2.9.

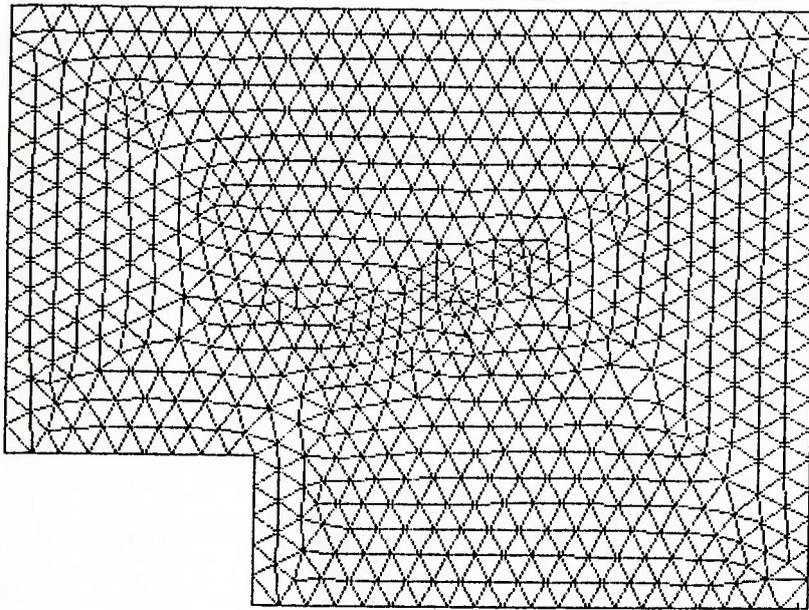


Numero de elementos: 1240
Numero de nos: 670

Figura 2.9 - Malha da figura 1.42 amaciada pelo método dos triângulos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e

$$LS = \frac{9}{12}\pi.$$

A malha da figura 1.43, após o amaciamento pelo método dos triângulos, resultou na malha da figura 2.10.



Numero de elementos: 1302
Numero de nos: 701

Figura 2.10 - Malha da figura 1.43 amaciada pelo método dos triângulos, com $LI = \frac{6}{12} \pi$ e

$$LS = \frac{8}{12} \pi .$$

2.2 Amaciamento da malha (método dos polígonos)

2.2.1 Introdução

Outro método de amaciamento foi desenvolvido procurando melhorar os resultados do primeiro. Este método, que será descrito nas próximas seções, também faz o ajuste da malha através do rearranjo dos nós. Porém a diferença entre este método e o anterior é que um nó é visto como o centro de um polígono formado por todos os elementos que estão atrelados a ele. Variações são feitas na posição desse nó procurando colocá-lo no centro do polígono. Esse método é citado por Peraire(1990).

As mesmas limitações existem neste caso, porém o resultado perseguido é estabelecido utilizando-se um número maior de parâmetros que são todos os elementos vizinhos que se atrelam a um mesmo nó. O processo envolve mais considerações, porém ele converge com um número menor de iterações, de 3 a cinco 5, sendo incomparavelmente mais rápido que o anterior. Os resultados obtidos foram melhores que os anteriores, como será mostrado no final desta seção.

2.2.2 Definição dos vizinhos

Os vizinhos são definidos como os elementos que estão atrelados a um mesmo nó, conforme a figura 2.11.

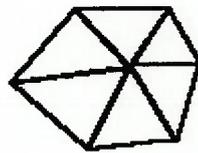


Figura 2.11 - elementos vizinhos.

Dessa forma, um nó qualquer pode ser considerado o "centro" de um polígono, que é formado pelos elementos vizinhos, conforme figura 2.12.

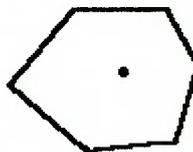


Figura 2.12 - nó central de um polígono formado por elementos vizinhos.

2.2.3 O processo de amaciar

Amaciar a malha, neste caso, consiste em colocar um determinado nó no centro do polígono formado pelos seus vizinhos. Para isso, utiliza-se a resultante entre os vetores formados pelo nó central e seus vizinhos, conforme a figura 2.13.

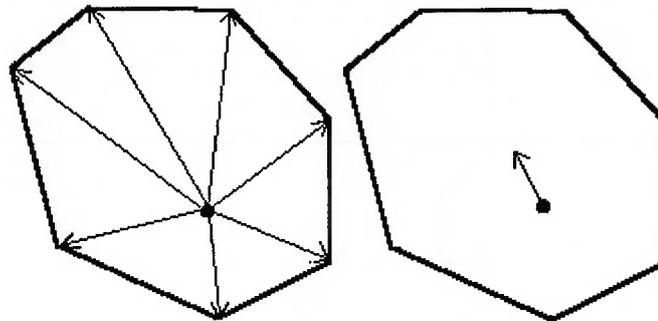


Figura 2.13 - resultante entre os vetores formado pelos vizinhos e o nó central.

Essa resultante indica o local onde deve ser colocado o nó central, conforme a figura 2.14. Uma vez ajustado um polígono, o mesmo processo é aplicado a um outro nó central e seu polígono. Note que os nós que formam o contorno nunca são alterados. Como os polígonos estão ligados aos outros elementos da malha, existe o efeito de "cabo-de-guerra" entre os polígonos, similar ao do capítulo anterior, que encontra o equilíbrio depois de 3 a 5 ciclos de ajuste sobre a toda malha.

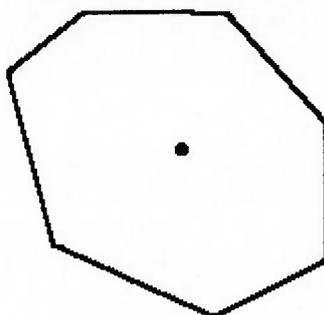


Figura 2.14 - nó central colocado no centro do polígono.

2.2.4 Considerações finais

Este método é muito rápido, durando de 10 a 15 segundos para uma malha de aproximadamente 2000 elementos. No método dos triângulos apresentado no capítulo anterior, esse tempo seria de aproximadamente 20 minutos. Além disso, os resultados obtidos através do método dos polígonos são melhores, apresentando elementos mais homogêneos, como pode ser visto na próxima seção.

Dessa forma, o método dos triângulos se estabelece como uma contribuição do autor, porém com limitações no que se refere ao tempo de processamento. Porém, é importante entender que foi de grande contribuição para o desenvolvimento total do trabalho, uma vez que foi o primeiro método a ser desenvolvido e permitiu uma visão mais clara para a abordagem do problema, convergindo para a obtenção do método dos polígonos.

2.2.5 Resultados

As malhas apresentadas aqui são referentes as mesmas malhas originais que foram utilizadas no amaciamento do capítulo anterior (método dos triângulo). Dessa forma é possível fazer uma comparação entre os dois tipos de amaciamento. As regiões circuladas com caneta estão destacadas para que se possa verificar mais facilmente as diferenças entre os dois métodos. Os resultados apresentados aqui se mostraram mais bem comportados que os do capítulo anterior. Apesar de as diferenças serem sutis, podem influenciar o resultado do método numérico a ser aplicado.

2.2.5.1 Malha gerada no interior de um círculo

A malha da figura 1.29, após o amaciamento pelo método dos polígonos, resultou na malha da figura 2.15.

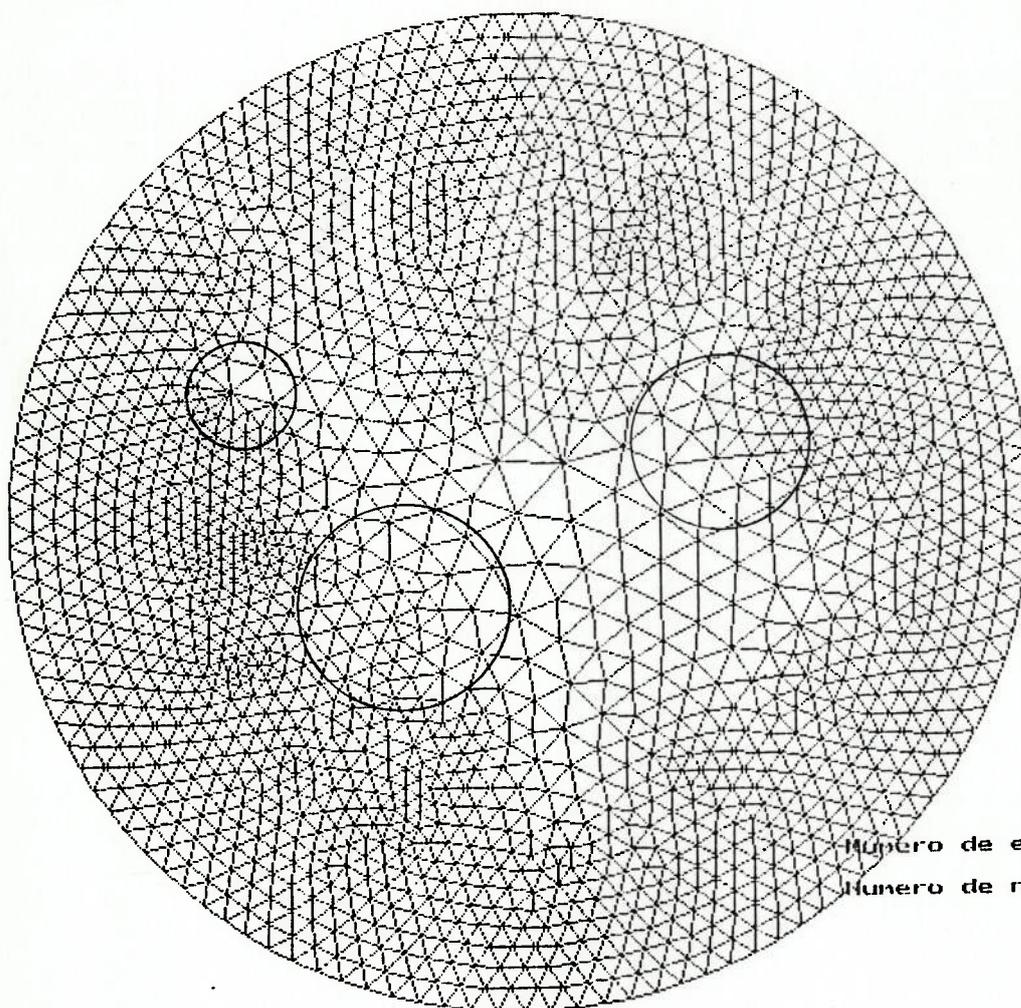


Figura 2.15 - Malha da figura 1.29 amaciada pelo método dos polígonos, com $LI = \frac{5}{12}\pi$ e

$$LS = \frac{11}{12}\pi.$$

A malha da figura 1.32, após o amaciamento pelo método dos polígonos, resultou na malha da figura 2.16.

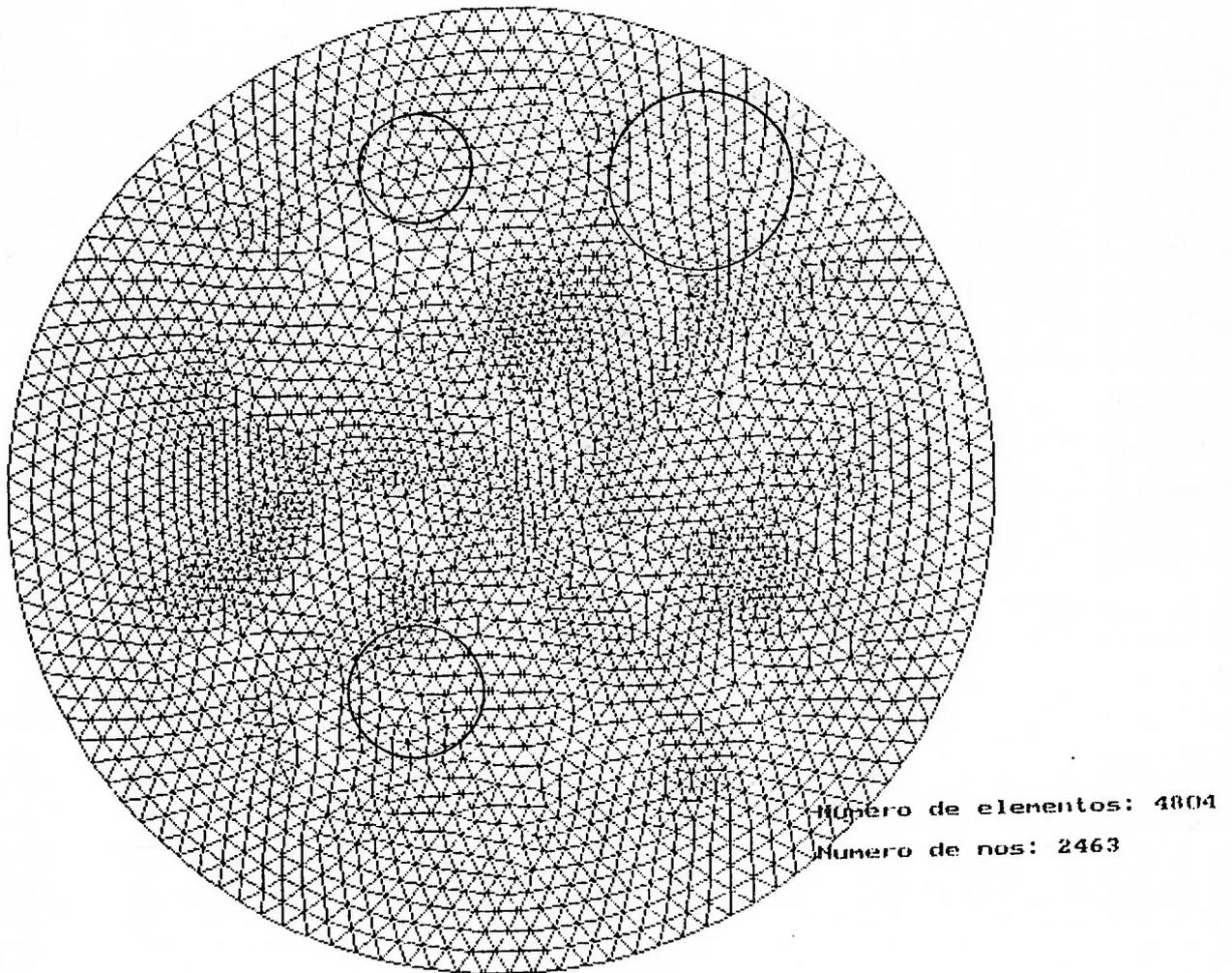
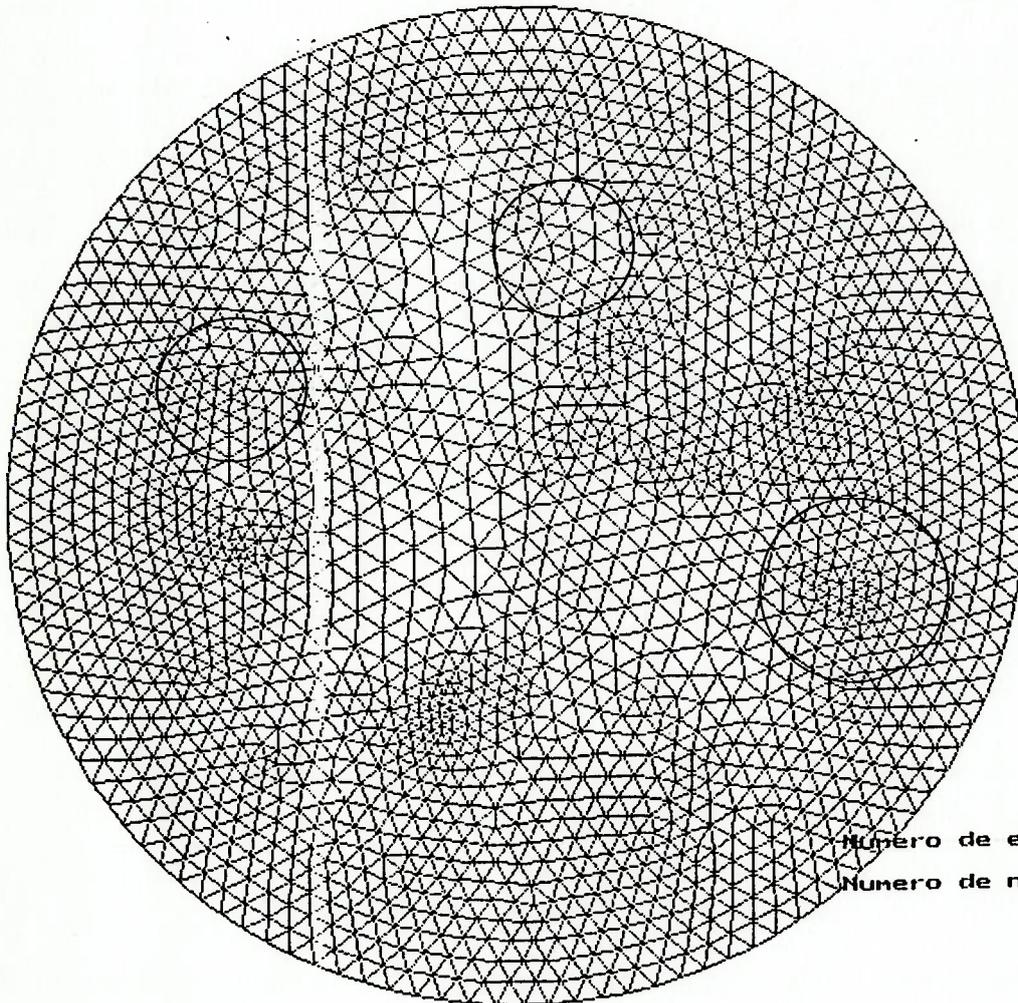


Figura 2.16 - Malha da figura 1.32 amaciada pelo método dos polígonos, com $LI = \frac{6}{12} \pi$ e

$$LS = \frac{8}{12} \pi .$$

A malha da figura 1.33, após o amaciamento pelo método dos polígonos, resultou na malha da figura 2.17.



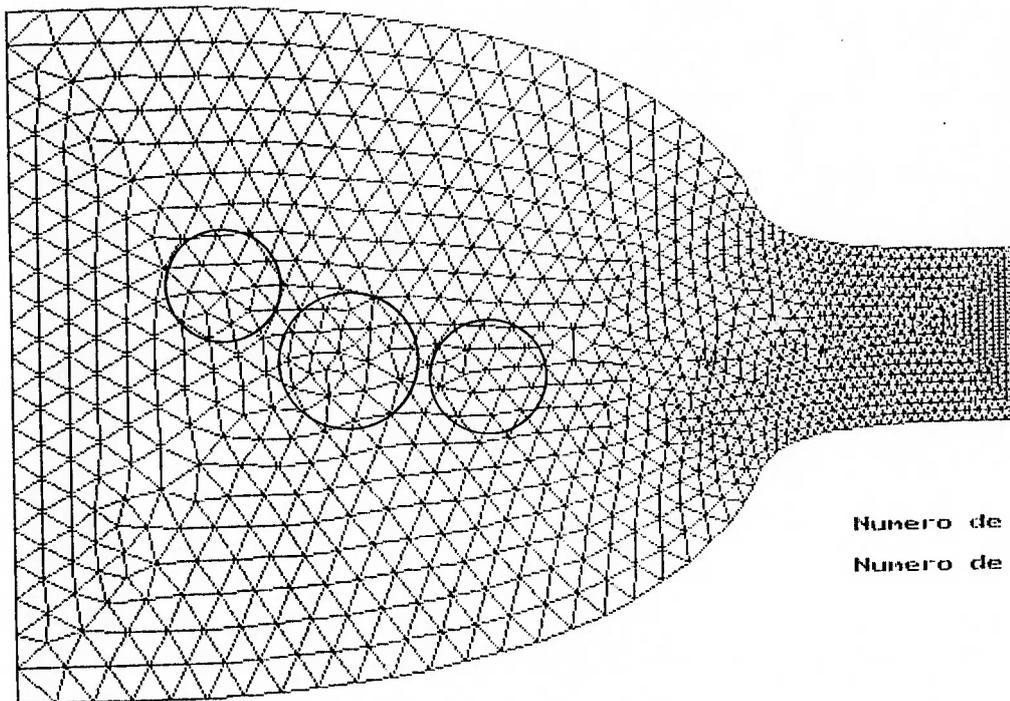
Numero de elementos: 3546
Numero de nos: 1834

Figura 2.17 - Malha da figura 1.33 amaciada pelo método dos polígonos, com $LI = \frac{6}{12} \pi$ e

$$LS = \frac{9}{12} \pi .$$

2.2.5.2 Malha gerada no interior de um Túnel de Vento

A malha da figura 1.35, após o amaciamento pelo método dos polígonos, resultou na malha da figura 2.18.



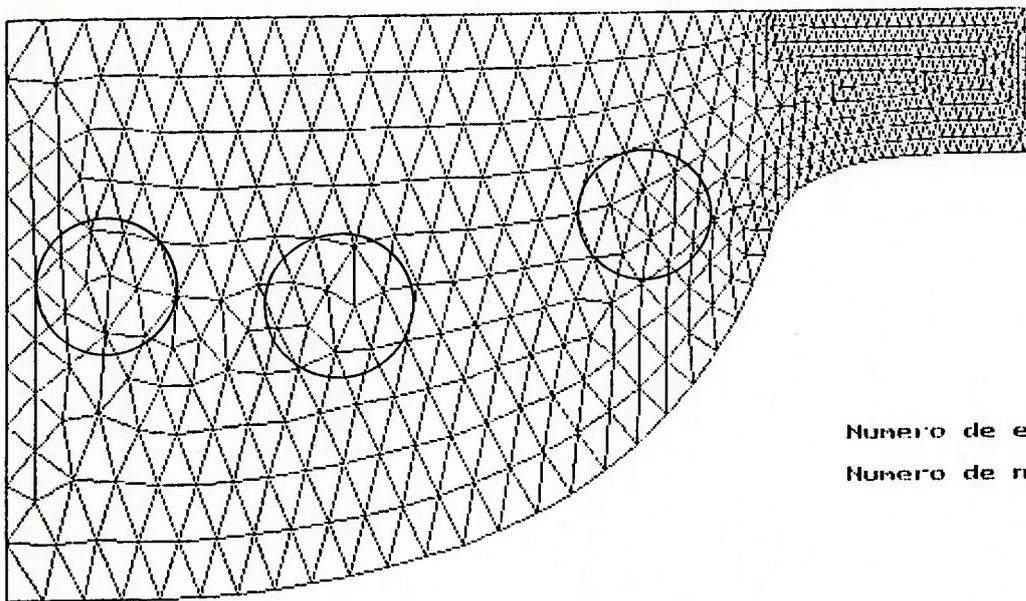
Numero de elementos: 2084
Numero de nos: 1112

Figura 2.18 - Malha da figura 1.35 amaciada pelo método dos polígonos, com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e

$$LS = \frac{10}{12}\pi.$$

2.2.5.3 Malha gerada no interior de meio Túnel de Vento

A malha da figura 1.38, após o amaciamento pelo método dos polígonos, resultou na malha da figura 2.19.



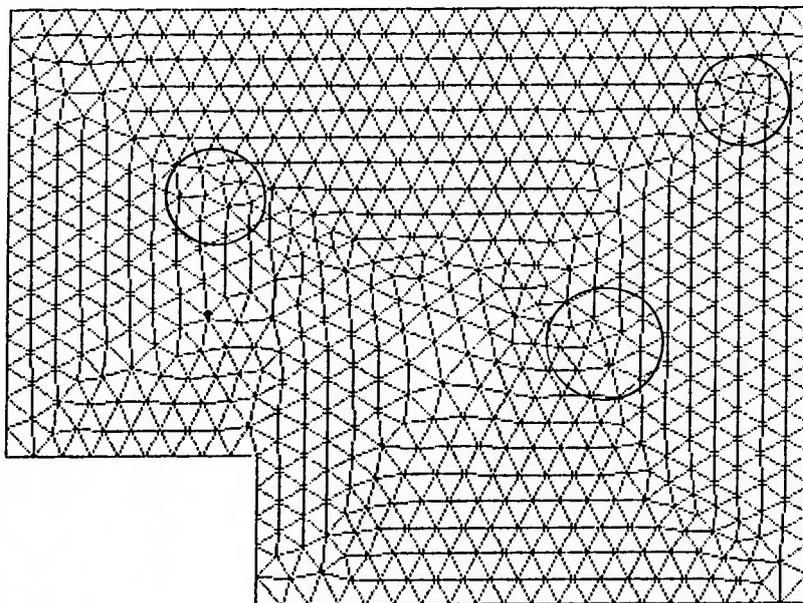
Numero de elementos: 976
Numero de nos: 548

Figura 2.19 - Malha da figura 1.38 amaciada pelo método dos polígonos, com $LI = \frac{6}{12} \pi$ e

$$LS = \frac{11}{12} \pi.$$

2.2.5.4 Malha gerada ao redor de um degrau

A malha da figura 1.42, após o amaciamento pelo método dos polígonos, resultou na malha da figura 2.20.



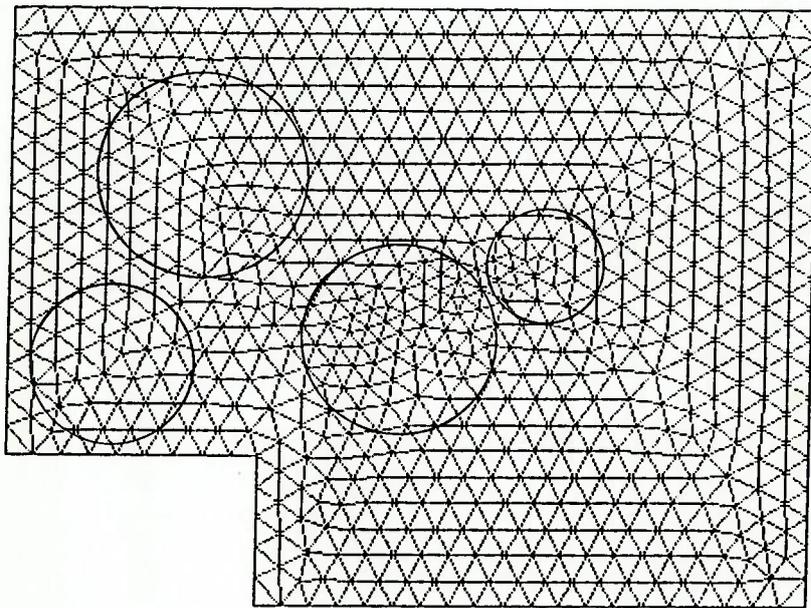
Numero de elementos: 1240

Numero de nos: 670

Figura 2.20 - Malha da figura 1.42 amaciada pelo método dos polígonos, com $LI = \frac{6}{12} \pi$ e

$$LS = \frac{9}{12} \pi .$$

A malha da figura 1.43, após o amaciamento pelo método dos polígonos, resultou na malha da figura 2.21.



Numero de elementos: 1302
Numero de nos: 701

Figura 2.21 - Malha da figura 1.43 amaciada pelo método dos polígonos, com $LI = \frac{6}{12} \pi$ e

$$LS = \frac{8}{12} \pi .$$

2.3 Domínios multiplamente conexos

2.3.1 Introdução

Os domínios multiplamente conexos são de grande importância para as aplicações da mecânica dos fluidos. Problemas relacionados a aerodinâmica e hidrodinâmica como escoamento ao redor de asas, aerofólios, submarinos, etc., assim como vibrações induzidas por vórtices nos elementos cilíndricos de plataformas de prospecção de petróleo, pontes, etc., e mais uma vasta gama de estudos utilizam domínios multiplamente conexos. Isso torna essencial a utilização de malhas especiais para esse tipo de domínio.

Nesta seção é mostrado como se obter malhas não-estruturadas para domínios multiplamente conexos. O método de geração é absolutamente o mesmo apresentado nos capítulo 1. O que diferencia um domínio simplesmente conexo de um multiplamente conexo é simplesmente a definição de seu contorno. Uma vez definido o contorno adequadamente, a rotina de geração de malhas a ser utilizada é a mesma para todos os casos. Isso facilita muito o trabalho do pesquisador que não necessita de rotinas diferentes para cada abordagem e também permite uma análise simples e direta do problema.

2.3.2 Definição do contorno

O contorno de um domínio multiplamente conexo é discretizado da mesma maneira que um domínio simplesmente conexo. A diferença está no fato de no primeiro caso existir um contorno externo e outro(s) interno(s), conforme a figura 2.22.

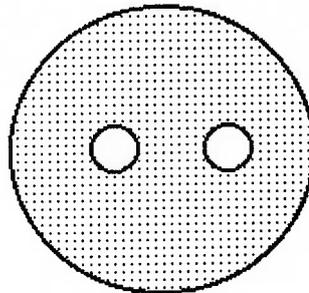


Figura 2.22 - domínio multiplamente conexo.

Como visto na seção 1.2, a discretização do contorno e a junção dos pontos por segmentos de reta, determina a frente de partida para o processo de geração dos elementos da malha. Fica claro então então que a frente de partida deve ser contínua, sem interrupções. Quando o domínio é multiplamente conexo, os contornos interno(s) e externo ficam separados. Para que a frente seja contínua, deve-se definir uma linha de ligação entre os contornos, conforme a figura 2.23.

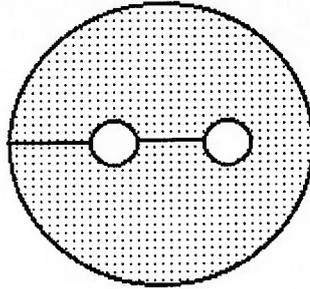


Figura 2.23 - linhas de junção entre contornos.

Essas linhas de junção entre os contornos também precisam ser discretizadas. A frente deve ser definida como uma seqüência de segmentos consecutivos e as linhas de junção servem como pontes, porém não apenas num sentido e sim para ir e voltar de um contorno interno. Essas pontes de duas mãos utilizam os mesmos pontos para ir e voltar, porém em cada caso a frente estará enxergando lados opostos do domínio, conforme a figura 2.24.

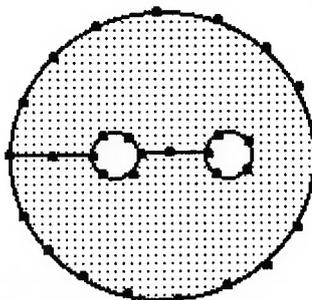


Figura 2.24 - discretização do contorno.

A frente, por definição (vide seção 1.2), roda no sentido anti-horário para o contorno externo e no sentido horário para o(s) contornos internos (figura 2.25). Uma vez definida esta seqüência, a frente de partida está pronta e o problema passa a ser similar ao caso dos domínios simplesmente conexos. Os parâmetros LI e LS são utilizados da mesma maneira que fora explicada na seção 1.4. para que se consiga obter a malha adequada ao problema em estudo. Os métodos de amaciamento mostrados nas seções 2.1. e 2.2. também podem ser utilizados sem modificações.

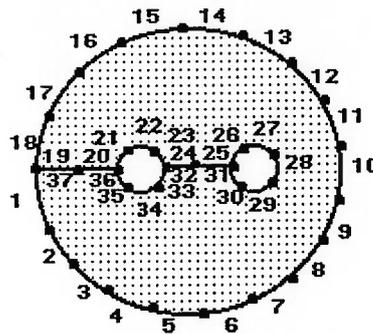


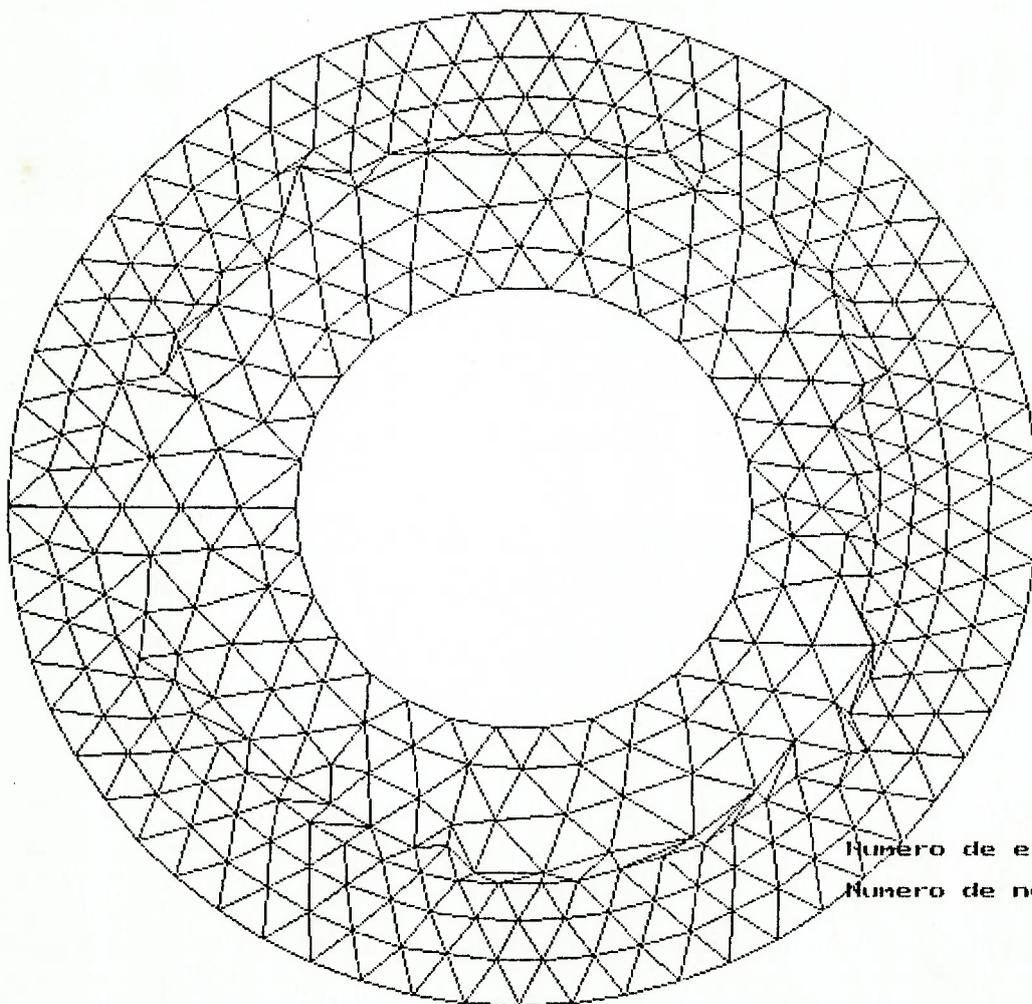
Figura 2.25 - frente de partida.

2.3.3 Resultado

2.3.3.1 Círculo duplamente conexo

Como primeiro exemplo é mostrado o caso de um domínio duplamente conexo, onde um círculo pequeno define o contorno interno de um domínio circular. Os

parâmetros utilizados foram $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$.



Numero de elementos: 660
Numero de nos: 381

Figura 2.26 - Domínio duplamente conexo com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$.

Essa malha, quando amaciada pelo Método dos Triângulos fica conforme a figura 2.27.

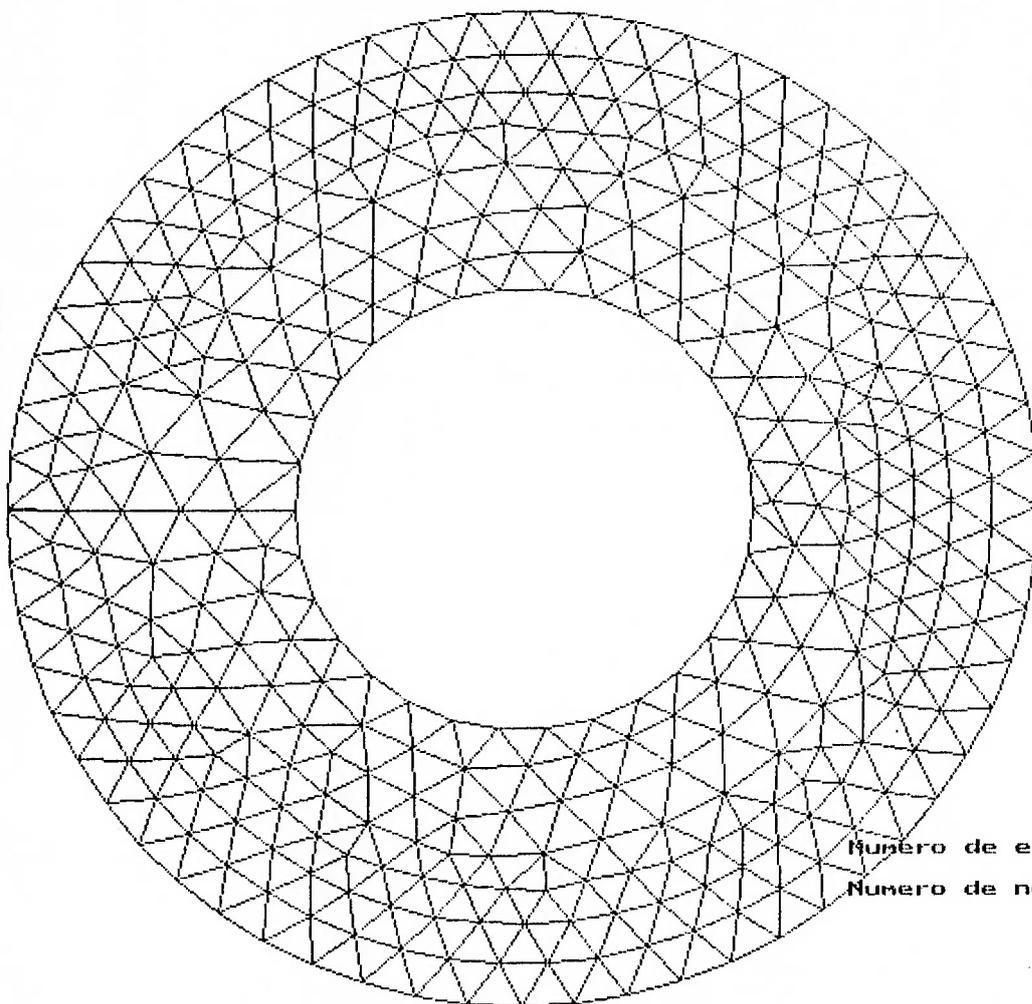


Figura 2.27 - Malha da figura 2.26 amaciada pelo Método dos Triângulos.

E, a malha da figura 2.26, quando amaciada pelo Método dos Polígonos, fica conforme a figura 2.28.

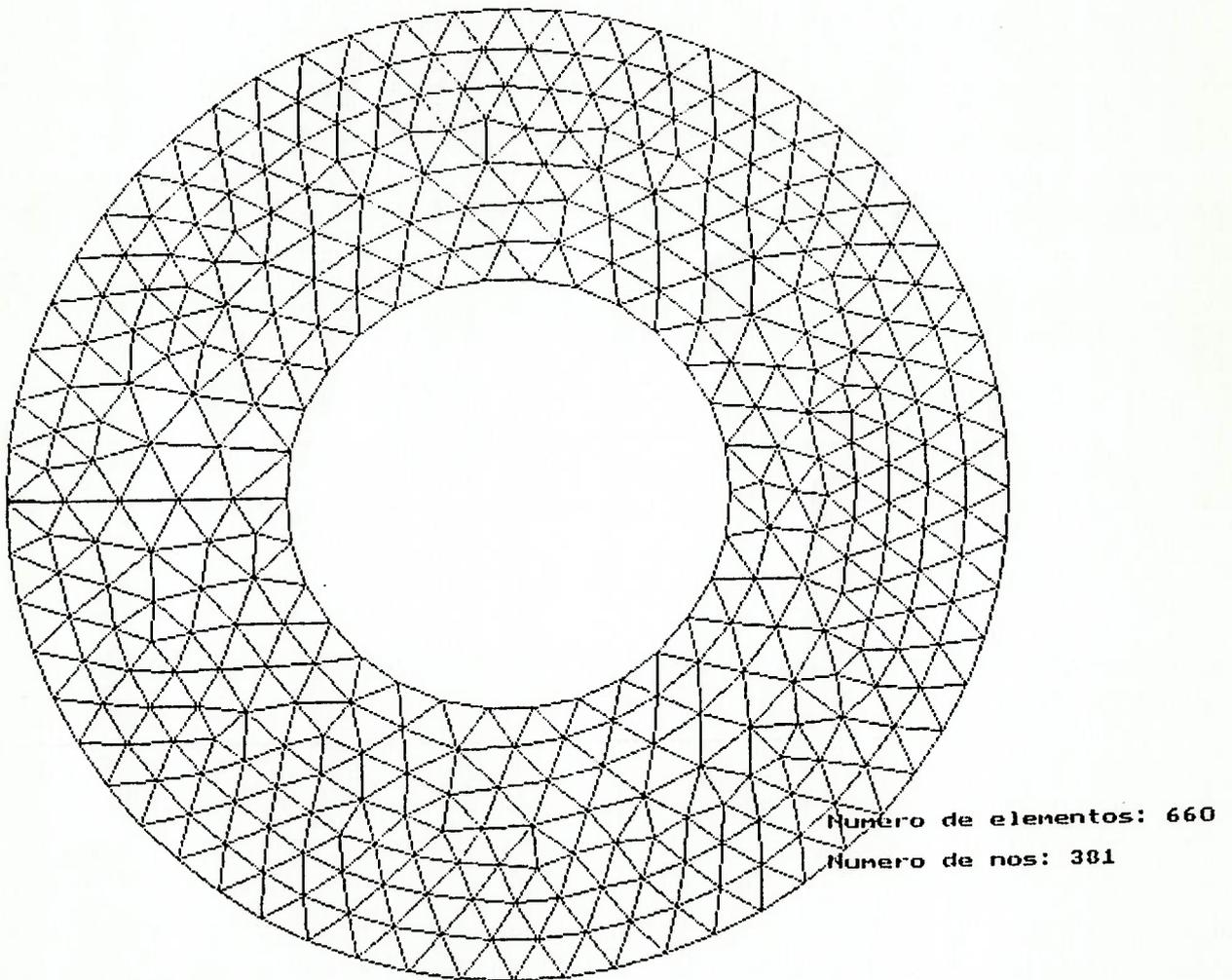


Figura 2.28 - Malha da figura 2.26 amaciada pelo Método dos Polígonos.

2.3.3.2 Círculo triplamente conexo

Este exemplo mostra um domínio triplamente conexo, onde dois círculos de tamanhos diferentes formam os contornos internos de um domínio circular. Os

parâmetros são $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$.

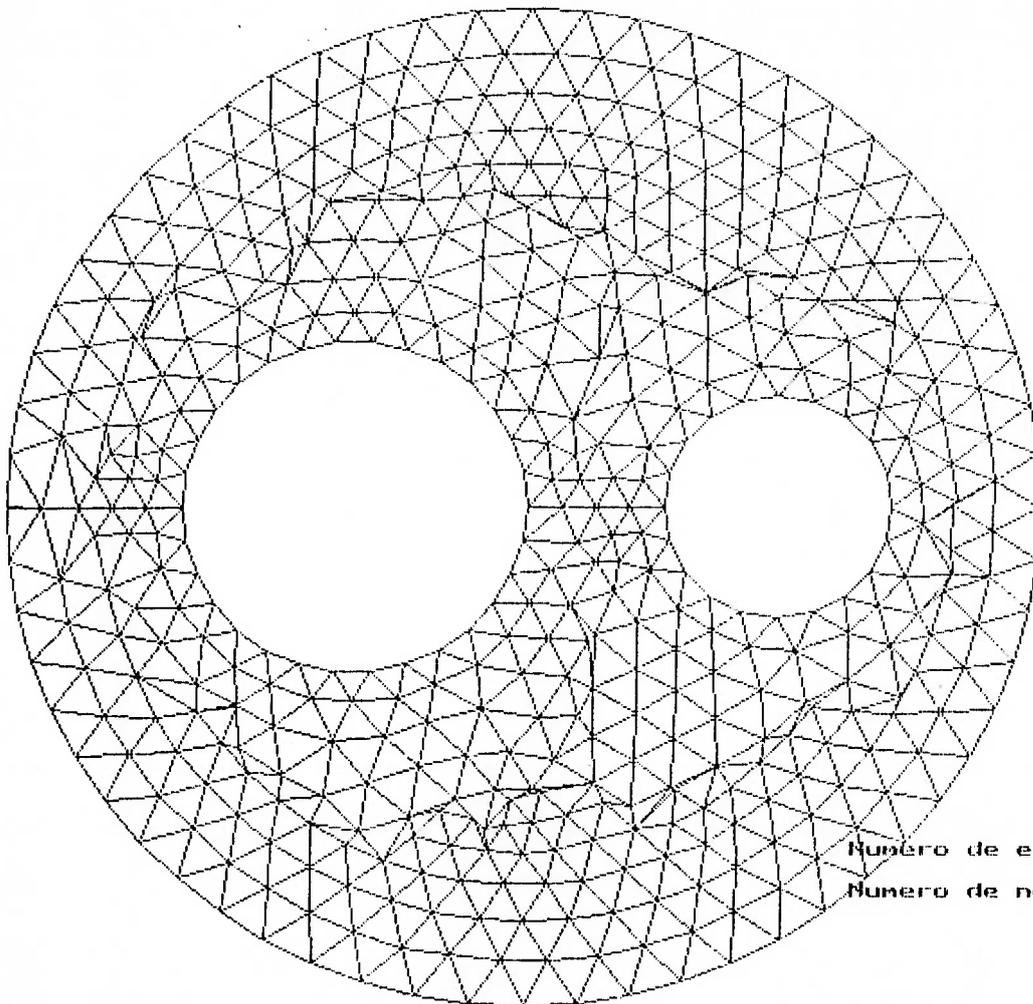


Figura 2.29 - Domínio triplamente conexo com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{10}{12}\pi$.

Essa malha amaciada pelo Método dos Triângulos pode ser vista na figura 2.30.

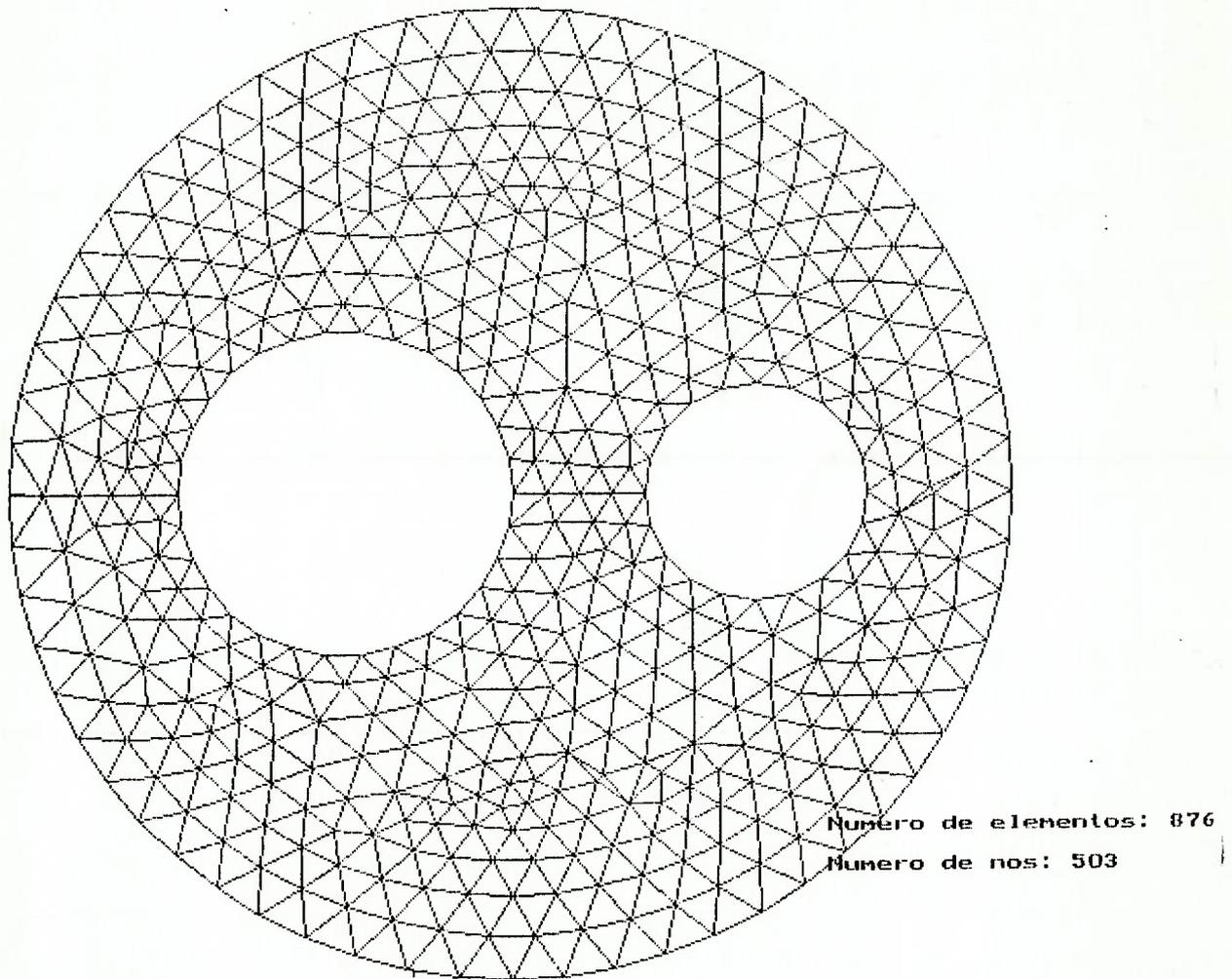


Figura 2.30 - Malha da figura 2.29 amaciada pelo Método dos Triângulos.

A malha da figura 2.29, amaciada pelo Método dos Polígonos, pode ser vista na figura 2.31.

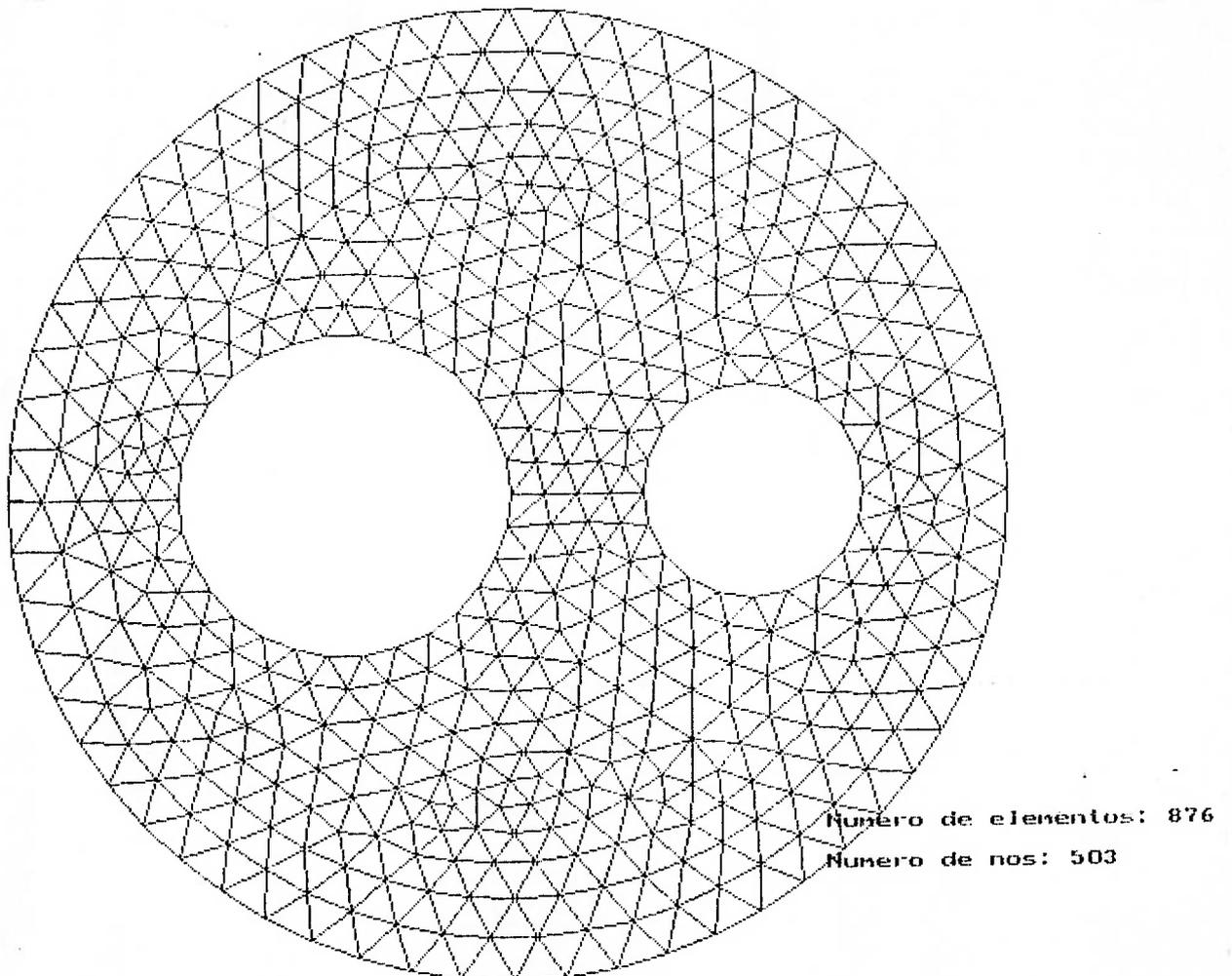


Figura 2.31 - Malha da figura 2.26 amaciada pelo Método dos Polígonos.

2.3.3.3 Círculo multiplamente conexo

Aqui é mostrado o caso de um domínio multiplamente conexo, onde quatro círculos, três de mesmo tamanho e um menor, formam os contornos internos de um domínio circular. Os parâmetros utilizados são $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{9}{12}\pi$.

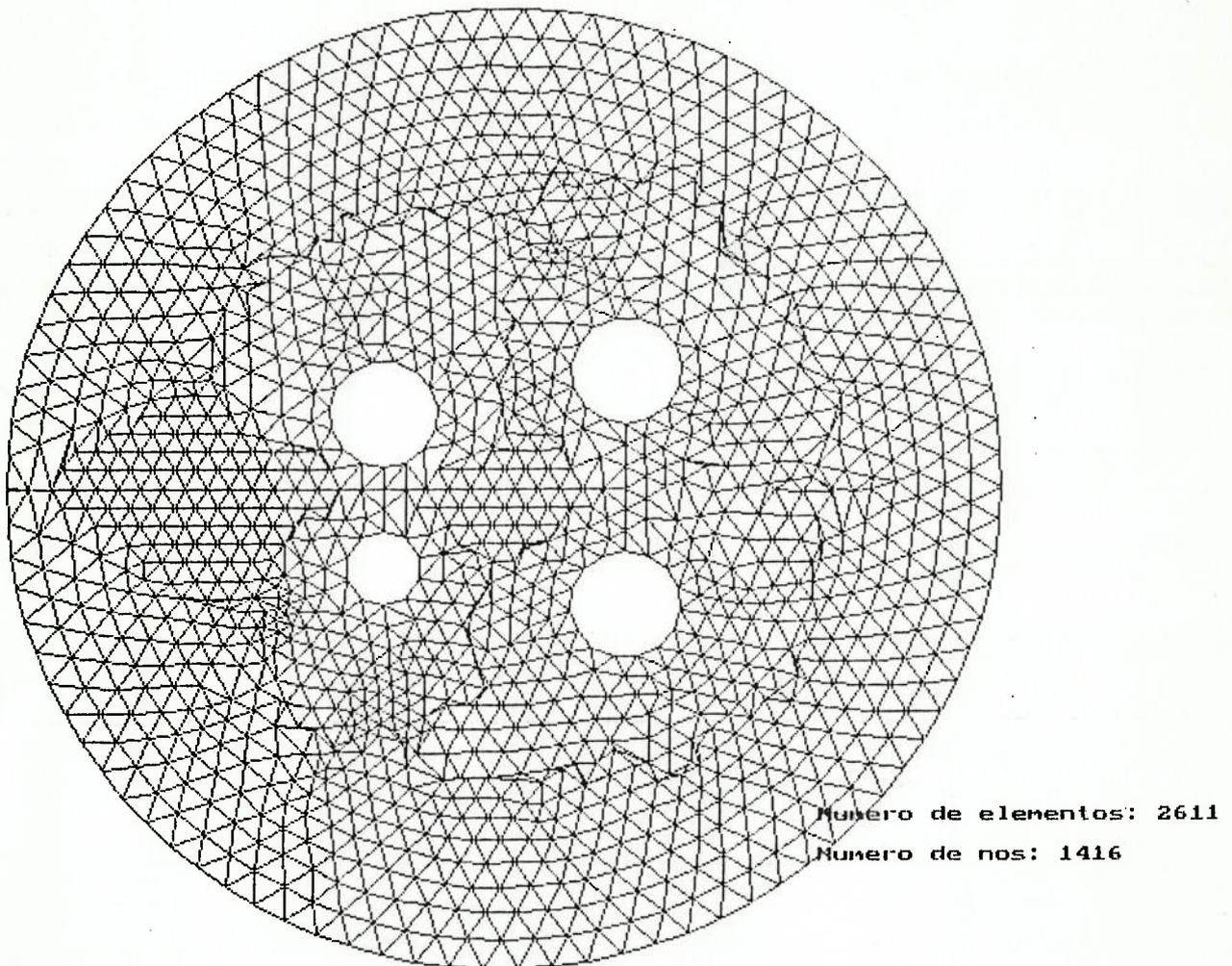


Figura 2.32 - Domínio multiplamente conexo com $LI = \frac{6}{12}\pi$ e $LS = \frac{9}{12}\pi$.

Essa malha amaciada pelo Método dos Triângulos pode ser vista na figura 2.33.

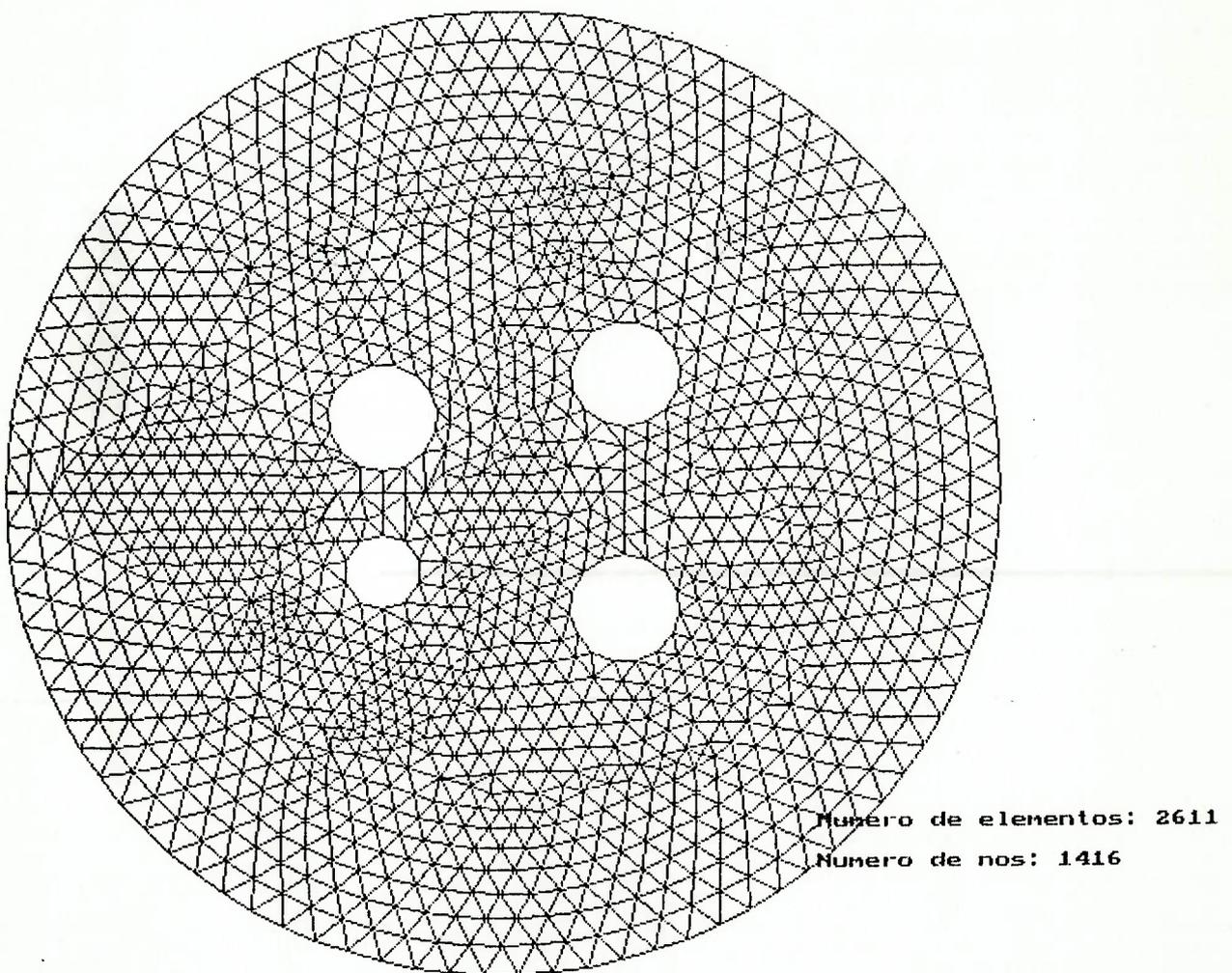


Figura 2.33 - Malha da figura 2.32 amaciada pelo Método dos Triângulos.

A malha da figura 2.32, amaciada pelo Método dos Polígonos, pode ser vista na figura 2.34.

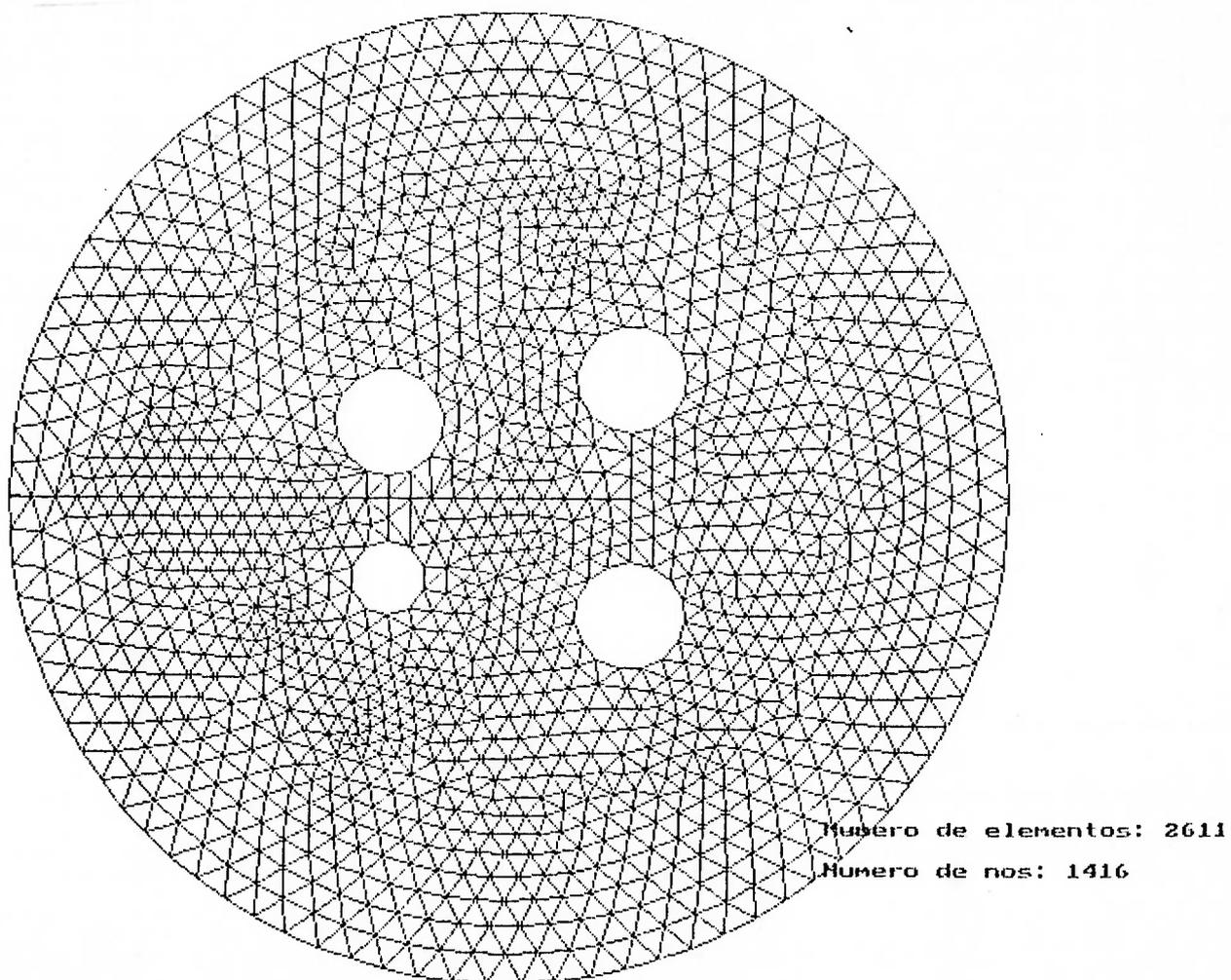


Figura 2.34 - Malha da figura 2.32 amaciada pelo Método dos Polígonos.

2.4 Organização dos dados (conectividade)

2.4.1 Introdução

A malha gerada nos capítulos anteriores nada mais é que um conjunto de dados organizados através de relações de conectividade entre os nós. Os dados são gravados em forma de arquivos texto. Esses arquivos contém uma seqüência simples de números. Esses números não significam nada se não existir uma relação entre eles. Neste capítulo é visto como esses dados são organizados.

Os dados são obtidos ao longo do processo de geração da malha e são armazenados em variáveis na forma de vetores. A cada elemento criado essas variáveis são atualizadas. No final do processo, todos os pontos, assim como os elementos da malha estão armazenados na memória RAM. Através de um protocolo, esses dados são transferidos para o disco. Para lê-los e utilizá-los novamente, basta ler o disco utilizando o mesmo protocolo.

Para a definição dos nós vizinhos, conforme a seção 7.2, é necessária uma rotina a parte que utiliza os dados da malha gerada. Essa rotina é processada após o fechamento da malha e armazena na memória todos os nós vizinhos a cada nó da malha. Da mesma maneira que para os outros dados, através de um protocolo, esses dados são transferidos e podem posteriormente ser lidos do disco.

2.4.2 Estruturação dos dados

Uma malha é composta por todos os seus elementos justapostos. Esses elementos são triângulos e por isso possuem 3 vértices. Esses vértices são os nós da malha. Cada nó possui coordenadas X,Y no plano cartesiano. Essas coordenadas são o ponto de partida para estabelecer a estrutura dos dados (figura 2.35).

OBJETO	COMPONENTES
Nós	Coordenadas X e Y
Elementos	Vértices 3 nós
Malha	Elementos n elementos

Figura 2.35 - formação da malha.

Dessa forma, uma lista com as coordenadas X,Y de cada nó é estabelecida. Cada nó, no momento da sua criação, durante o processo de geração da malha, recebe um número seqüencial, consecutivo, incrementado de uma unidade. Esse número está relacionado diretamente com as coordenadas do nó no espaço cartesiano. Essa lista então, armazena todos os nós e suas respectivas coordenadas (figura 2.36).

Nó	Coordenadas	
1	X1	Y1
2	X2	Y2
3	X3	Y3
4	X4	Y4
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Figura 2.36 - lista com os nós e as respectivas coordenadas.

Uma lista cheia de pontos não define uma malha. É necessário definir as ligações entre esses pontos, ou as relações de conectividade. Essas relações são obtidas através das definições dos elementos que compõem a malha. Um elemento é definido por três nós, sendo cada um deles um vértice do triângulo. Então surge uma segunda lista que armazena os elementos através dos números dos nós que os compõem (figura 2.37)

Elemento	Vértices		
1	Nó11	Nó12	Nó13
2	Nó21	Nó22	Nó23
3	Nó31	Nó32	Nó33
4	Nó41	Nó42	Nó43
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Figura 2.37 - lista com os elementos e respectivos vértices.

Assim, a primeira lista determina as coordenadas de cada nó da malha, enquanto que a segunda lista determina como esses nós são ligados para formar a malha.

2.4.3 Os vizinhos

Uma outra maneira de definir a conectividade entre os nós é através dos nós vizinhos. Cada nó está atrelado a outros nós conforme a seção 7.2..Assim, todos os elementos que tiverem um mesmo nó em comum, são elementos vizinhos. Dessa forma, também existem duas listas, a primeira com as coordenadas dos nós, conforme a seção 2.4.2., e a segunda que armazena quais são os nós vizinhos de cada nó. Unindo cada nó com o seu vizinho, é possível formar a malha (figura2.38).

Nó	Nós vizinhos						
1	Nó11	Nó12	Nó13	Nó14	Nó15	Nó16	Nó17
2	Nó21	Nó22	Nó23	Nó24	Nó25	Nó26	
3	Nó31	Nó32	Nó33	Nó34	Nó35	Nó36	
4	Nó41	Nó42	Nó43	Nó44			
5	Nó51	Nó52	Nó53	Nó54	Nó55	Nó56	Nó57
6	Nó61	Nó62	Nó63	Nó64	Nó65	Nó66	
.
.
.

Figura 2.38 - lista com os vizinhos de cada nó.

2.4.4 Contorno e frente

O contorno é formado pelos nós utilizados para discretizar a fronteira do domínio. Esses nós e suas respectivas coordenadas estabelecem uma lista. Essa lista é utilizada como frente de partida no processo de geração da malha. Essa frente é armazenada de tal forma que mostra a ligação de um nó com o seu consecutivo, conforme a figura 2.39.



Figura 2.39 - estrutura da frente.

Note que quando a frente é atualizada e a relação entre um nó e seu consecutivo é mudada, troca-se os pares de tal forma que a frente siga um caminho diferente, conforme a figura 2.40.

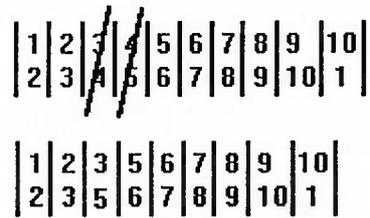


Figura 2.40 - frente alterada pela deleção de um segmento.

2.4.5 Parâmetros

Existem ainda parâmetros específicos para cada malha que também é importante serem citados. Para cada malha há o Número de Nós, o Número de Elementos, o valor máximo de X e Y e o valor mínimo de X e Y. Esses parâmetros são armazenados antes das listas com as relações de conectividade. Esses parâmetros, além de representarem características da malha, são usados para definir os protocolos de gravação e leitura dos dados em disco. Também são utilizados nas rotinas gráficas para definir os limites da tela (figura 2.41).

NNós
NElemento
Xmax
Ymax
Xmin
Ymin

Figura 2.41 - lista de parâmetros.

3. Método dos Volumes Finitos: Problemas de Condução de Calor

3.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada a formulação para o problema de Condução de Calor. Essa formulação é baseada no Método dos Volumes Finitos utilizando elementos triangulares, diferentemente de Patankar(1980) que utiliza elementos quadrangulares. Dessa forma pode-se utilizar malhas não-estruturadas conforme visto nos capítulos anteriores.

Os elementos triangulares gerados pelo método desenvolvido neste trabalho não apresentam necessariamente lados ortogonais às linhas que unem os centróides dos elementos. Isso pode gerar erros, uma vez que a integração das equações diferenciais que foram apresentadas no capítulo anterior é feita segundo a direção normal à superfície do volume de controle. Assim sendo, é necessário utilizar projeções normais que corrijam as distâncias entre os centróides, conforme visto em Arkell(1995).

Os cálculos são feitos no próprio centróide, determinando assim o Método Centrado no Volume. Isso simplifica a modelagem, uma vez que são claros os limites de cada volume de controle. Um elemento é influenciado pelos seus vizinhos diretamente sem necessidade de estar levando em conta aspectos como interpolações entre os nós que, além de inserirem maior complexidade, podem estar inserindo erros numéricos devido a arredondamentos.

Apesar de simplificar a resolução, o Método Centrado no Volume não é direto quanto às condições de contorno. Essas geralmente são dadas na fronteira do volume e não no centro do mesmo. Para resolver esse problema o autor desenvolveu um método que associa elementos planos, ou seja, elementos definidos apenas por um segmento de reta, no contorno do domínio. Esse elemento plano possui um centróide que é definido como o ponto médio desse segmento (figura 3.1). A distância entre os centróides passa a ser então a normal entre o centróide do elemento interior e o segmento. Dessa forma resolve-se o problema das condições de contorno sem dificultar a resolução do método.

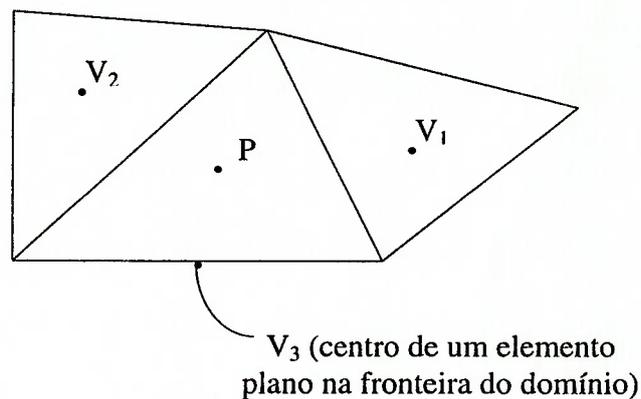


figura 3.1 - elemento na fronteira e seus vizinhos.

O desenvolvimento detalhado do método é apresentado a seguir. No final são mostrados os resultados obtidos comparados a resultados analíticos. Os resultados obtidos foram muito bons, validando assim o método utilizado.

3.2 Discretização da Equação de Condução de Calor

A equação para transferência de calor por condução térmica, em regime transitório e considerando o termo fonte, pode ser escrita como abaixo:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S \quad (3.1)$$

onde k é a condutividade térmica, T é a temperatura, S é o termo fonte, ρ é a densidade e c é o calor específico a pressão constante.

No Método dos Volumes Finitos calcula-se as variações de determinada propriedade entre pequenos volumes de controle, que são os próprios elementos da malha. Assim sendo, cada triângulo corresponde a um volume de controle. Como as equações acima estão na forma diferencial, precisa-se integrá-las para depois poder discretizá-las em cada volume. Para facilitar as deduções, é utilizada a forma unidimensional da equação 3.1 (direção x). Além disso, o termo fonte é desconsiderado nesse momento, mas será acrescentado no item 3.4. Dessa forma, tem-se:

$$\rho c \int_x \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_x \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt \quad (3.2)$$

Considerando que o valor de T no centro do volume prevaleça sobre todo o volume de controle, pode-se dizer que:

$$\rho c \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx = \rho c \Delta x (T_p^1 - T_p^0) \quad (3.3)$$

onde T_p^1 corresponde à temperatura num momento posterior e T_p^0 corresponde à temperatura num momento anterior. Δx corresponde a variação espacial na direção x do volume de controle.

Seguindo o mesmo raciocínio para $k \frac{\partial T}{\partial x}$ na equação 3.2, porém agora considerando que T varie de forma linear dentro do volume de controle, obtém-se:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_x \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{k_- (T_{-p} - T_p)}{\delta x_-} - \frac{k_+ (T_p - T_{+p})}{\delta x_+} \right] dt \quad (3.4)$$

onde o subscrito '-' refere-se ao espaço imediatamente anterior ao ponto P e o subscrito '+' refere-se ao espaço imediatamente posterior ao ponto P, conforme a figura abaixo:

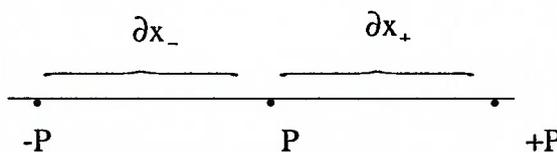


figura 3.2 - volume de controle unidimensional.

Dessa forma, utilizando-se a equação 3.3 e 3.4 sobre a equação 3.2, chega-se ao seguinte resultado:

$$\rho c \Delta x (T_p^1 - T_p^0) = \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{k_- (T_{-p} - T_p)}{\delta x_-} - \frac{k_+ (T_p - T_{+p})}{\delta x_+} \right] dt \quad (3.5)$$

É necessário saber como a temperatura T varia no tempo. Para isso Patankar(1980) propõe a seguinte relação:

$$\int_t^{t+\Delta t} T_p dt = [fT_p^1 + (1-f)T_p^0] \Delta t \quad (3.6)$$

onde f é um fator de ponderação entre 0 e 1. Usando fórmulas análogas para T_p^1 e T_p^0 , a equação 3.5 pode ser escrita como:

$$\rho c \Delta x (T_p^1 - T_p^0) =$$

$$f \left[\frac{k_- (T_{-p}^1 - T_p^1)}{\delta x_-} - \frac{k_+ (T_p^1 - T_{+p}^1)}{\delta x_+} \right] + (1-f) \left[\frac{k_- (T_{-p}^0 - T_p^0)}{\delta x_-} - \frac{k_+ (T_p^0 - T_{+p}^0)}{\delta x_+} \right] \quad (3.7)$$

Considerando o sobrescrito 1 para os novos valores de T no instante de tempo $t + \Delta t$, a equação 3.7 é rearranjada da seguinte maneira:

$$a_p T_p^1 = a_{-p} [fT_{-p}^1 + (1-f)T_{-p}^0] + a_{+p} [fT_{+p}^1 + (1-f)T_{+p}^0] + [a_p^0 - (1-f)a_{-p} - (1-f)a_{+p}] T_p^0 \quad (3.8)$$

onde

$$a_{-p} = \frac{k_-}{\delta x_-}$$

$$a_{+p} = \frac{k_+}{\delta x_+}$$

$$a_p^0 = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t}$$

$$a_p = f a_{-p} + f a_{+p} + a_p^0$$

onde Δt representa o intervalo de tempo entre dois instantes consecutivos.

A equação 3.8 representa a forma discretizada da equação para transferência de calor por condução térmica, em regime transitório sem considerar o termo fonte e numa única direção (direção x). Por analogia pode-se deduzir as equações para os casos bi-dimensional e tridimensional.

3.3 O Esquema Implícito

Conforme o valor do fator de ponderação f adotado, a equação discretizada recai em um dos 3 esquemas de equação diferencial parabólica:

$f = 0$ - esquema explícito

$f = 0,5$ - esquema Crank-Nicolson

$f = 1$ - esquema implícito

A interpretação gráfica de cada esquema pode ser vista na figura 3.3.

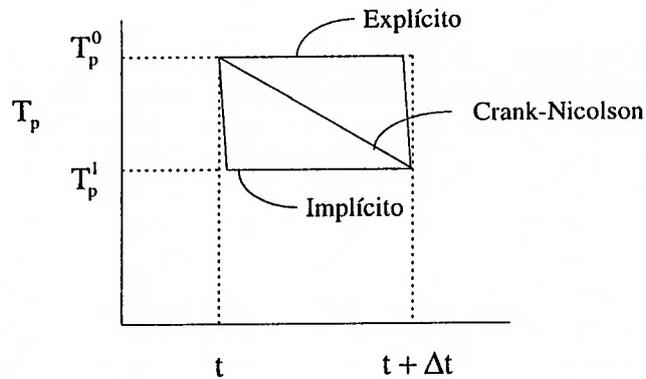


figura 3.3 - interpretação gráfica dos esquemas.

Como o único valor de f que garante que o coeficiente de T_p^0 na equação 3.8 nunca seja negativo é 1, o esquema a ser utilizado é o esquema implícito. A razão disso é satisfazer os requisitos de simplicidade e comportamento físico realista, como será explicado mais adiante no item Critérios de Convergência.

Adotando-se então $f = 1$, a equação 3.8 pode ser simplificada para:

$$a_p T_p = a_{-p} T_{-p} + a_{+p} T_{+p} + a_p^0 T_p^0 \quad (3.9)$$

onde

$$a_{-p} = \frac{k_-}{\delta x_-}$$

$$a_{+p} = \frac{k_+}{\delta x_+}$$

$$a_p^0 = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t}$$

$$a_p = a_{-p} + a_{+p} + a_p^0$$

3.4 Utilização do Termo Fonte

Geralmente o termo fonte é uma função de T e é importante determinar essa na discretização da equação de transferência de calor. Como as equações discretizadas são obtidas através de álgebra linear, pode-se levar em conta apenas a dependência linear do termo fonte em relação a T . Dessa forma pode-se escrever o termo fonte médio da seguinte maneira:

$$\bar{S} = S_c + S_p T_p \quad (3.10)$$

onde S_c representa a parte constante de \bar{S} , enquanto S_p é o coeficiente de T_p . S_p não representa o valor de S no ponto P , como pode-se pensar. Nessa análise, considera-se que o valor de T_p prevaleça sobre todo o volume de controle.

Quando S é uma função não-linear de T , há a necessidade de linearizar essa função. Nesse caso, os valores de S_c e S_p são recalculados a partir dos valores de T obtidos durante o processo iterativo.

Utilizando-se o termo fonte linearizado, a equação de discretização resulta em:

$$a_p T_p = a_{-p} T_{-p} + a_{+p} T_{+p} + b \quad (3.11)$$

onde

$$a_{-p} = \frac{k_-}{\delta x_-}$$

$$a_{+p} = \frac{k_+}{\delta x_+}$$

$$a_p^0 = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t}$$

$$b = S_c \Delta x + a_p^0 T_p^0$$

$$a_p = a_{-p} + a_{+p} + a_p^0 - S_p \Delta x$$

3.5 Aspectos Geométricos para Malhas Não-estruturadas

Num primeiro momento é importante entender alguns aspectos geométricos da malha não-estruturada, seja para condução de calor, convecção ou escoamento, para depois poder aplicar as equações discretizadas. Numa malha desse tipo, as faces dos elementos não estão sempre direcionadas na mesma direção. Dessa forma não é possível determinar por onde é a entrada e a saída do elemento. O balanço em um volume de controle, utilizando-se o princípio da continuidade, é que determina os fluxos de massa e energia.

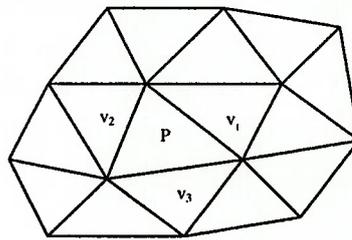


figura 3.4 - região discretizada de um domínio qualquer.

A figura 3.4 apresenta um região discretizada de um domínio qualquer. Para efeito de estudo são mostrados o volume P e seus vizinhos. A análise feita aqui, com apenas um dos vizinhos, é válida para todos os vizinhos e para todos os elementos da malha, com exceção dos elementos que se situam na fronteira do domínio. Para esses elementos, a relação com os vizinhos internos ao domínio é a mesma, mas a relação

com o vizinho externo, que se trata de um elemento plano, conforme explicado na introdução, acontece de outra forma, que também é explicada a seguir.

Determina-se o centro de um elemento através do encontro das medianas, conforme a figura 3.5.

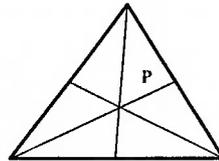


figura 3.5 - centróide de um volume.

A análise a ser feita agora é o balanço entre um elemento e seus vizinhos. Para isso são utilizados os elementos P e V_1 da figura 3.4 ampliados conforme a figura 3.6.

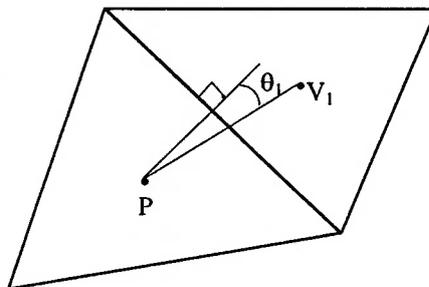


figura 3.6 - distância entre dois centróides.

Onde θ é o ângulo entre a normal ao lado em comum e a reta que une os dois centros. Como o balanço feito no volume de controle considera o fluxo de entrada e

saída na direção normal à superfície de contato, a distância entre os dois elementos se torna $\overline{PV}_1 \cos\theta$ ¹.

Para o caso dos elementos da borda, onde 1 ou 2 elementos vizinhos são elementos planos, a situação fica como mostrada na figura 3.7.

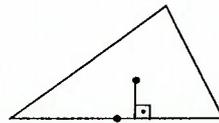


Figura 3.7 - Distância entre centróides na fronteira.

A distância entre os dois centróides corresponde ao segmento traçado na figura 3.7. Dessa forma fica simples a abordagem no contorno. Os cálculos podem ser efetuados exatamente da mesma maneira que é feito no caso de elementos interiores.

3.6 Equações Discretizadas para Malhas Não-estruturadas

Para a dedução da equação de discretização das malhas não-estruturadas são utilizados os conceitos apresentados no item anterior aplicados a equação 3.11. Deve-se lembrar que a dedução feita para a equação 3.11 levou em consideração uma situação unidimensional. No caso das malhas não-estruturadas apresentadas nesta dissertação a

¹ Essa aproximação é apresentada em Peraire(1990) e considera que, dentro de um dado volume de controle, a propriedade em estudo seja constante sobre todo o volume. Maiores detalhes sobre esta aproximação são apresentados no capítulo 5.

situação é bi-dimensional. Isso acarreta que o fluxo de calor se dá sobre uma superfície, que no caso é o lado em comum entre um elemento e seu vizinho, conforme figura 3.8.

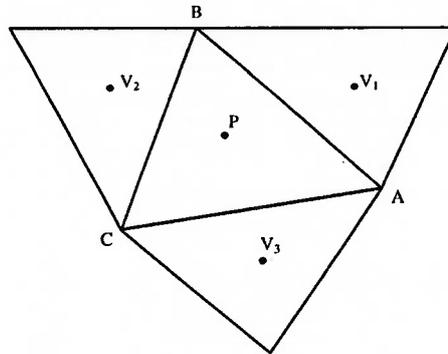


figura 3.8 - elemento P e seus vizinhos.

Dessa forma, a equação de discretização pode ser escrita da seguinte maneira:

$$a_p T_p = a_{v1} T_{v1} + a_{v2} T_{v2} + a_{v3} T_{v3} + b \quad (3.12)$$

onde

$$a_{v1} = \frac{k_{pv1} \overline{AB}}{\overline{PV_1} \cos \theta_1}$$

$$a_{v2} = \frac{k_{pv2} \overline{BC}}{\overline{PV_2} \cos \theta_2}$$

$$a_{v3} = \frac{k_{pv3} \overline{CA}}{\overline{PV_3} \cos \theta_3}$$

$$a_p^0 = \frac{\rho c A_P}{\Delta t}$$

$$b = S_c A_p + a_p^0 T_p^0$$

$$a_p = a_{v1} + a_{v2} + a_{v3} + a_p^0 - S_p A_p$$

onde A_p é a área do elemento P e o índice PV indica a interface entre o elemento P e o vizinho V.

3.7 Método Numérico - Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel é um método simples no qual os valores das variáveis são calculados elemento-a-elemento, numa determinada ordem. Apenas um valor para T é armazenado na memória para cada elemento. No início do processo iterativo, esse valor é a estimativa inicial para a temperatura de cada elemento. Depois, os valores a serem usados são os obtidos na iteração anterior. Toda vez que um valor novo é calculado para um elemento, esse valor substitui o valor anterior, que deixa de existir. Dessa forma, o espaço de memória necessário é mínimo. Seja a equação de discretização 3.12:

$$a_p T_p = a_{v1} T_{v1} + a_{v2} T_{v2} + a_{v3} T_{v3} + b \quad (3.12)$$

sendo T_p o valor a ser calculado num determinado instante do processo, tem-se:

$$T_p = \frac{a_{v1}T_{v1} + a_{v2}T_{v2} + a_{v3}T_{v3} + b}{a_p} \quad (3.13)$$

Para os elementos vizinhos já calculados, os valores da temperatura são os mais recentes, para os elementos vizinhos ainda não calculados, os valores da temperatura são provenientes da iteração anterior. Quando todos os elementos tiverem sido visitados, uma iteração estará completa. O processo recomeça então e se repete até que a diferença de temperatura em cada elemento, entre uma iteração e outra, seja menor que um erro determinado. Ou seja:

$$\frac{\|T_p^D - T_p^A\|}{T_{MAX}} < \text{Erro} \quad (3.14)$$

onde T_p^D é o valor da temperatura numa iteração posterior, T_p^A é o valor da temperatura numa iteração anterior e T_{MAX} é o valor máximo da temperatura. O valor de T_{MAX} geralmente corresponde ao maior valor da condição de contorno, mas caso seja considerado um termo fonte, essa temperatura é incerta. Mesmo assim, o maior valor da condição de contorno, geralmente se comporta muito bem. O pior que pode acontecer é estar trabalhando com uma precisão maior que a estabelecida e conseqüentemente tomar mais tempo para convergir, porem não compromete os resultados obtidos.

3.8 Critérios para Consistência e Convergência

Quando se desenvolve um método numérico, o primeiro aspecto que deve-se ter em mente é o fato desse método ter comportamento físico realístico ou não. Um método que não se comporta realisticamente não é um método consistente e não tem aplicação prática. Alguns critérios devem ser estabelecidos para garantir a consistência do método. O segundo aspecto a ser analisado é a convergência do método. Um método que não converge não traz resultado algum, sendo necessário estabelecer critérios para a convergência.

Para garantir a consistência de um método numérico pode-se levar em conta quatro critérios básicos conforme Patankar(1980):

- **Consistência nas faces dos volumes de controle:** o fluxo de calor que sai de um volume de controle através de uma face deve ser idêntico ao fluxo de calor que entra o próximo volume de controle através da mesma face. Para garantir isso deve-se tomar cuidado com perfis de variação de temperatura quadráticos ou superiores, pois a sua derivada pode ter valores diferentes para uma mesma face, se provinda de um elemento ou de outro. Outro aspecto que pode gerar inconsistência é utilizar, para uma mesma face, a condutividade térmica do centro do elemento de um lado e do centro do outro elemento para o outro lado. Nesse caso, deve-se utilizar um valor calculado para a face entre os elementos, através de interpolação, de tal forma que o valor seja o mesmo se calculado por um lado ou pelo outro.
- **Coeficientes positivos:** se a temperatura de um elemento aumenta e as outras condições são mantidas inalteradas, então a temperatura dos vizinhos desse elemento

deve aumentar também. Para que isso ocorra, os coeficientes da equação 3.12 devem ter todos o mesmo sinal. Por motivo único de simplificação, todos os coeficientes devem ser positivos ao invés de negativos. Porém isso não faz nenhuma diferença.

- Linearização do termo fonte com inclinação negativa: considerando a equação 3.12 percebe-se que mesmo que todos os coeficientes dos elementos vizinhos sejam positivos, o coeficiente do elemento central a_p pode ser negativo dependendo do valor de S_p . Para evitar isso, basta garantir que S_p não seja positivo. Dessa forma, quando o termo fonte é linearizado conforme a equação 3.10, o coeficiente S_p deve sempre ser menor ou igual a zero.

- soma dos coeficientes dos vizinhos: quando o termo fonte não existir e as temperaturas dos vizinhos forem iguais, a temperatura do elemento central T_p deve ser igual a elas. Dessa forma tem-se:

$$a_p = a_{v1} + a_{v2} + a_{v3} \tag{3.15}$$

No Método de Gauss-Seidel, para garantir que haja convergência, Patankar(1980) cita que é necessário observar o seguinte critério, conhecido como *critério de Scarborough*:

$$\frac{|a_{v1} + a_{v2} + a_{v3}|}{|a_p|} \begin{cases} \leq 1 & \text{para todas as equações} \\ < 1 & \text{para pelo menos uma equação} \end{cases} \tag{3.16}$$

Esse critério é suficiente, mas não necessário. Isso quer dizer que as vezes pode-se violar esse critério e mesmo assim obter-se convergência. Porém, para garantir que haja convergência, convém sempre seguir esse critério. Também é importante notar que alguns dos critérios de consistência citados acima terminam por garantir o *critério de Scarborough*. Por exemplo, a presença de S_p negativo garante que:

$$\frac{|a_{v1} + a_{v2} + a_{v3}|}{|a_p|} < 1 \quad (3.17)$$

Outro aspecto, a necessidade de todos os coeficientes serem positivos garante que:

$$\frac{|a_{v1} + a_{v2} + a_{v3}|}{|a_p|} = 1 \quad (3.18)$$

para todas as equações. Falta apenas determinar onde está a equação para que a condição acima seja menor que um. Essa equação está nas condições de contorno, pois para o *critério de Scarborough* a somatória dos vizinhos deve ser calculada apenas nos vizinhos *desconhecidos* e a_p por outro lado leva em conta todos os vizinhos, inclusive o coeficiente do(s) ponto(s) do contorno(s).

Dessa forma, os critérios acima além de garantirem resultados fisicamente realísticos, também asseguram que o método numérico convirja. Isso tudo sem serem contraditórios, mas sim complementares. O Método de Gauss-Seidel, como apresentado, apesar de ser simples, pode acabar sendo um método de convergência lenta. Por isso usa-se técnicas de sobre e sub-relaxação que são vistas no próximo item.

3.9 Sobre-relaxação e Sub-relaxação

Na solução iterativa de equações algébricas ou no processo iterativo como um todo usado para lidar com não-linearidades, geralmente é necessário acelerar ou reduzir as mudanças, de iteração a iteração, nos valores da variável dependente. Esse processo é chamado de *sobre-relaxação* ou *sub-relaxação*, dependendo se as mudanças na variável são aceleradas ou reduzidas. Para o Método de Gauss-Seidel utiliza-se sobre-relaxação, resultando num esquema chamado de SOR (Sucessive Over-Relaxation).

Dois métodos de aplicação de relaxação são apresentados. O primeiro, levando-se em conta a equação 3.13, adiciona-se e subtrai-se T_p^A (temperatura num iteração anterior) no lado direito da equação:

$$T_p = T_p^A + \left(\frac{a_{v1}T_{v1} + a_{v2}T_{v2} + a_{v3}T_{v3} + b}{a_p} - T_p^A \right) \quad (3.19)$$

onde o termo dentro dos parêntesis representa a variação de T_p produzida na iteração atual. Pode-se alterar essa variação através da introdução de um fator de relaxação α .

Assim:

$$T_p = T_p^A + \alpha \left(\frac{a_{v1}T_{v1} + a_{v2}T_{v2} + a_{v3}T_{v3} + b}{a_p} - T_p^A \right) \quad (3.20)$$

Quando as iterações convergem, ou seja, T_p fique igual a T_p^A , implica que os valores de T também satisfaçam a equação original. Quando α estiver entre 0 e 1, o

efeito resultante é de sub-relaxação e, quando α for maior que 1, o efeito é de sobre-relaxação. Exemplos de valores podem ser vistos em Roache(1982).

Não existem regras gerais para escolher o valor de α . Deve-se basear na experiência do pesquisador para cada caso. Também não há necessidade de manter-se o mesmo valor para α durante todo o processo iterativo. Nem para todos os elementos da malha é necessário manter-se o mesmo valor de α , porém é conveniente que o seja.

O segundo método consiste na substituição da equação de discretização por:

$$(a_p + i)T_p = a_{v1}T_{v1} + a_{v2}T_{v2} + a_{v3}T_{v3} + b + iT_p^A \quad (3.20)$$

onde i é chamado de inércia. Valores positivos de i resultam em sub-relaxação e valores positivos resultam em sobre-relaxação. Também nesse caso o valor de i deve ser obtido através de experiência.

Nesta formulação pode-se considerar a solução de regime transitório como um caso particular de sub-relaxação para o regime permanente, onde T_p^0 simplesmente representa o valor da iteração anterior T_p^A , $a_p^0 T_p^0$ atua como iT_p^A e i é análogo ao coeficiente a_p^0 . Além disso a variação no tempo corresponde às iterações.

3.10 Resultados

Para poder validar o método, é feita uma comparação entre o método numérico apresentado neste capítulo e a solução analítica para um problema com condição de contorno simples. A solução analítica utilizada pode ser vista em Holman(1983) e representa a solução do problema bi-dimensional de condução de calor em uma placa quadrada.

3.10.1 Análise Analítica da Condução de Calor Bi-dimensional

O desenvolvimento será realizado considerando a placa retangular mostrada na figura 3.9. Considerando a equação para a condução de calor:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.21)$$

Considerando condutividade térmica, K , constante, têm-se:

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.22)$$

Em se tratando das condições de contorno, três lados da placa são mantidos à uma temperatura $T_1 = \text{constante}$ e sobre o outro lado existe uma dada distribuição de temperatura. Considera-se para este último lado uma distribuição senoidal da mesma.

O método de separação de variáveis é utilizado na resolução analítica da equação (3.22). O ponto fundamental deste método, segundo Holman(1983), é que a solução da equação diferencial é admitida na forma do seguinte produto entre funções da coordenada x e da coordenada y :

$$T = X Y \tag{3.23}$$

onde

$$X = X(x),$$

$$Y = Y(y).$$

Voltando às condições de contorno, têm-se:

$$T = T_1 \quad \text{em } y = 0$$

$$T = T_1 \quad \text{em } x = 0$$

$$T = T_1 \quad \text{em } x = W$$

$$T = T_m \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{W}\right) + T_1 \tag{3.24}$$

$$\text{em } y = H,$$

onde T_m é a amplitude da função seno. Substituindo a equação (3.23) na equação (3.22), têm-se:

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (3.25)$$

Observa-se que cada lado da equação acima é independente do outro, uma vez que x e y são variáveis independentes. Pode-se então obter duas equações diferenciais ordinárias em termos de uma constante, chamada de *constante de separação*:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \quad (3.27)$$

A álgebra deste problema pode ser simplificada pela seguinte mudança de variáveis:

$$\theta = T - T_1 \quad (3.28)$$

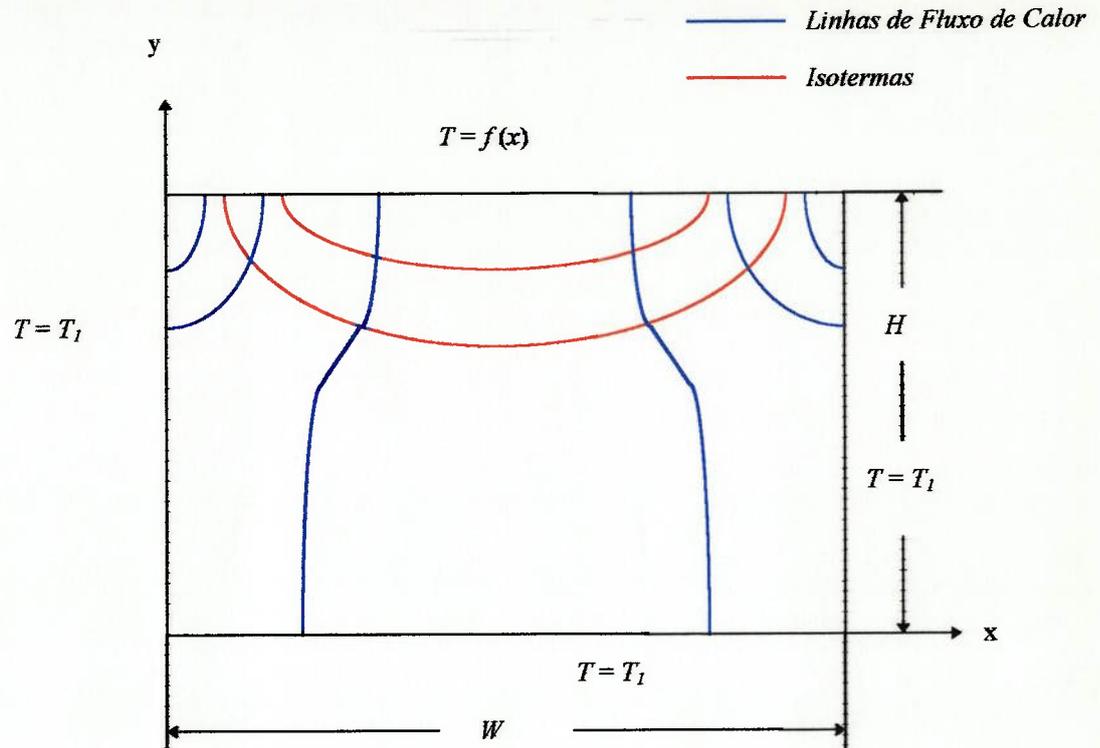


Figura 3.9 - Linhas de Fluxo de Calor e Isotermas em uma placa retangular. Ao longo de cada lado são mostradas as condições de contorno utilizadas.

Utilizando-se as 3 primeiras condições de contorno do problema (temperaturas constantes ao longo do lado da placa) e resolvendo as equações algébricas associadas chega-se à seguinte relação para o valor de λ :

$$\lambda = \frac{n \pi}{W} \quad (3.29)$$

Na equação acima n é um número inteiro. Dessa forma a solução da equação diferencial pode ser escrita como uma soma das soluções para cada valor de n . Uma vez que esta é uma soma infinita, a solução final é dada pela seguinte série infinita:

$$\theta = T - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{W} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{W} \quad (3.30)$$

Nesta expressão as constantes foram combinadas e os termos exponenciais convertidos em uma função hiperbólica. Aplicando-se a condição de contorno final (distribuição senoidal), chega-se a:

$$T_m \operatorname{sen} \frac{\pi x}{W} - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{W} \operatorname{senh} \frac{n\pi H}{W} \quad (3.31)$$

onde deve-se ter $C_n = 0$ para $n > 1$. A solução final será, portanto:

$$T = T_m \frac{\operatorname{senh}(\pi y / W)}{\operatorname{senh}(\pi H / W)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{W}\right) + T_1 \quad (3.32)$$

Para a obtenção da distribuição de temperatura através da equação acima, foi realizado um programa tomando-se uma malha não-estruturada representando a placa em estudo, conforme figura 3.10, e calculando o valor da temperatura nos centros dos elementos. Foram utilizados os seguintes valores para os parâmetros T_m , T_1 , W e H :

$$T_m = 150^\circ\text{C}, T_1 = 30^\circ\text{C}, W = H = 40 \quad (3.33)$$

Numero de elementos -> 510

Numero de nos -> 286

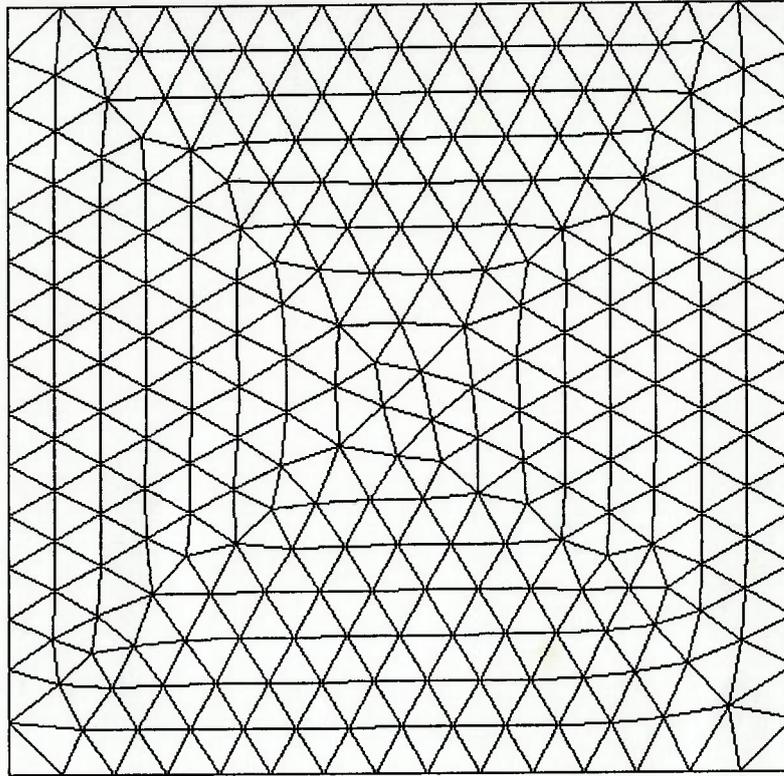


Figura 3.10 - Malha não-estruturada representando uma placa quadrada.

A figura 3.11 mostra a distribuição de temperatura obtida pelo modelo analítico e visualizada utilizando o programa **ENSIGHT** disponível no Laboratório de Computação Científica Avançada da USP (LCCA).

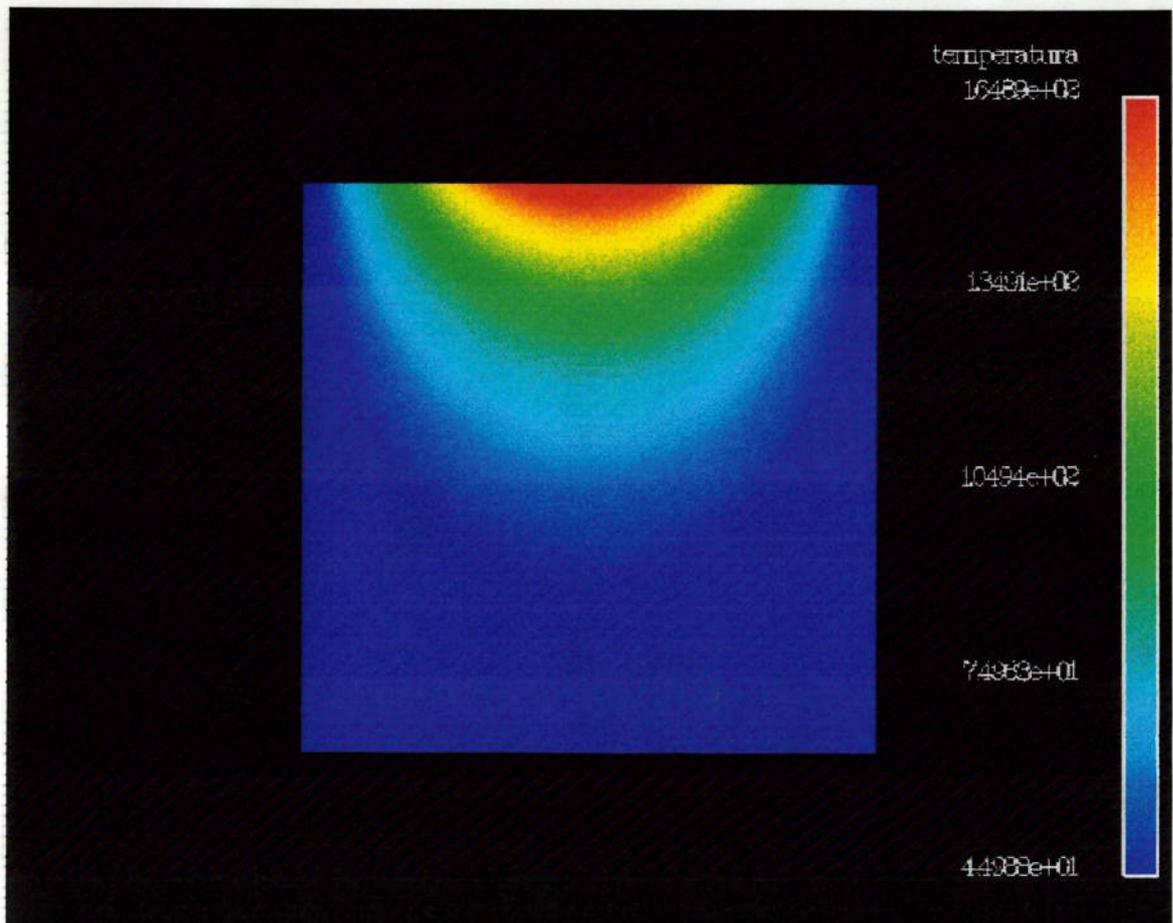


Figura 3.11 - Isotermas do problema bi-dimensional de condução de calor através do método analítico e plotada através do programa de visualização ENSIGHT.

3.10.2 Análise Numérica da Condução de Calor Bi-dimensional

Nesta etapa procurar-se mostrar os resultados obtidos para o problema bi-dimensional da condução de calor em uma placa plana em regime permanente, através do método numérico implementado. O Método dos Volumes Finitos foi utilizado inicialmente para a malha não-estruturada da figura 3.10.

A solução numérica e a solução analítica são dadas a seguir. A solução numérica praticamente coincide com a solução analítica, não só qualitativamente como

quantitativamente, conforme a tabela 3.1. Conforme pode-se observar nesta tabela, o maior erro encontrado é de 1,95 %, cujo elemento encontra-se no contorno, no canto superior direito da placa.

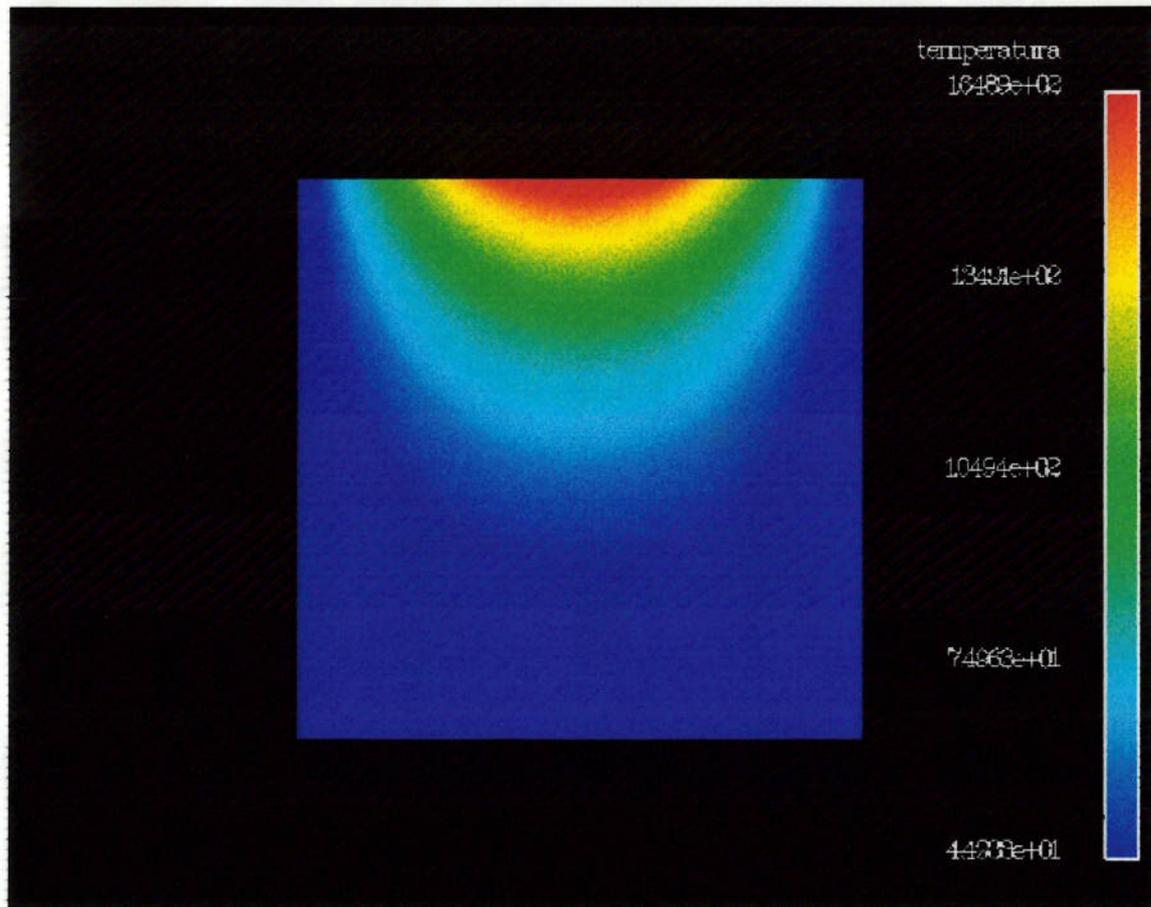


Figura 3.12. Isotermas do problema bi-dimensional de condução de calor através do método numérico empregando a malha não-estruturada da figura 3.10 e plotada através do programa de visualização ENSIGHT.

Menor diferença percentual encontrada entre a solução analítica e a numérica	7,9 E-04 %
Menor diferença absoluta encontrada entre a solução analítica e a numérica	2.7 E-04
Número do elemento de ocorrência na malha não-estruturada	138
Temperatura do elemento (solução analítica)	34,06183 °C
Temperatura do elemento (solução numérica)	34,06156 °C
Maior diferença percentual encontrada entre a solução analítica e a numérica	1,95 %
Maior diferença absoluta encontrada entre a solução analítica e a numérica	1,21109
Número do elemento de ocorrência na malha estruturada	138
Temperatura do elemento (solução analítica)	62,11352 °C
Temperatura do elemento (solução numérica)	60,90243 °C

Tabela 3.1. Comparação entre a solução analítica e a solução numérica para o problema bi-dimensional de condução de calor.

4. Método dos Volumes Finitos: Problemas de Convecção de Calor

4.1 Introdução

Nesta seção são tratados problemas onde convecção e condução estão presentes simultaneamente, considerando conhecido o campo de velocidades. Considerações geométricas são necessárias em complementação às feitas no capítulo anterior. Agora são levados em conta grandezas vetoriais que influenciam o fluxo de calor. Por isso é necessária uma abordagem nova que leva em conta essas grandezas. Porém toda essa construção é feita em cima dos conceitos já apresentados no capítulo anterior.

4.2 Discretização da Equação de Convecção

Um aspecto importante a ser observado no problema de convecção é o fato do campo de velocidades ter que satisfazer a equação da continuidade. Dessa forma, conforme pode ser visto em Patankar (1980):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (4.1)$$

onde u , v e w representam as velocidades nas direções X , Y e Z respectivamente e ρ é a densidade do fluido em estudo.

A equação diferencial da convecção pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u T) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v T) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w T) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial z}\right) + S \quad (4.2)$$

onde k é a condutividade térmica do fluido em estudo e C_p é o calor específico à pressão constante..

Aplicando-se a equação 4.1 sobre a equação 4.2 obtem-se:

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} + \rho w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial z}\right) + S \quad (4.3)$$

que é a forma da equação de convecção que será utilizada neste capítulo.

Como no capítulo anterior, primeiro utiliza-se um caso simples para deduzir a equação de discretização, para depois poder expandi-la para o situação completa. Dessa forma, considerando a equação unidimensional em regime permanente, estando presentes apenas os termos de convecção e difusão, tem-se:

$$\frac{d}{dx}(\rho u T) = \frac{d}{dx}\left(\frac{k}{C_p} \frac{dT}{dx}\right) \quad (4.4)$$

que pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dx} \left(\rho u T - \frac{k}{C_p} \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (4.5)$$

definindo

$$J \equiv \rho u T - \frac{k}{C_p} \frac{dT}{dx} \quad (4.6)$$

tem-se:

$$\frac{dJ}{dx} = 0 \quad (4.7)$$

Integrando-se sobre o volume de controle da figura 3.2, obtem-se:

$$J_- - J_+ = 0 \quad (4.8)$$

A equação da continuidade 4.1 torna-se:

$$\frac{d}{dx} (\rho u) = 0 \quad (4.9)$$

ou

$$\rho u = \text{constante} \quad (4.10)$$

Considerando k e C_p constante, num domínio de $0 \leq x \leq L$, pode-se obter a solução exata para a equação 4.7:

$$\text{em } x = 0 \quad T = T_0$$

$$\text{em } x = L \quad T = T_L$$

e a solução é:

$$\frac{T - T_0}{T_L - T_0} = \frac{\exp(Px/L) - 1}{\exp(P) - 1} \quad (4.11)$$

onde P é o número de Peclet definido como:

$$P \equiv \frac{\rho u L}{k/C_p} \quad (4.12)$$

Substituindo T_0 e T_L por T_p e T_{-p} e utilizando esse perfil da solução exata sobre a equação 4.6, obtem-se:

$$J_- = F_- \left(T_p + \frac{T_p - T_{-p}}{\exp(P_-) - 1} \right) \quad (4.13)$$

e

$$J_+ = F_+ \left(T_{+p} + \frac{T_{+p} - T_p}{\exp(P_+) - 1} \right) \quad (4.14)$$

onde

Cap. 4 - Método dos Volumes Finitos: Problemas de Convecção de Calor

$$F_- \equiv \rho u_-$$

$$F_+ \equiv \rho u_+$$

$$P_- \equiv \frac{\rho u_- \delta x_-}{k_- / C p_-}$$

$$P_+ \equiv \frac{\rho u_+ \delta x_+}{k_+ / C p_+}$$

u_- e u_+ são velocidades nas interfaces dos elementos

Dessa forma a equação 4.8 fica:

$$F_- \left(T_p + \frac{T_p - T_{-p}}{\exp(P_-) - 1} \right) - F_+ \left(T_{+p} + \frac{T_{+p} - T_p}{\exp(P_+) - 1} \right) = 0 \quad (4.15)$$

que pode ser colocada da seguinte maneira:

$$a_p T_p = a_{-p} T_{-p} + a_{+p} T_{+p} \quad (4.16)$$

onde

$$a_{-p} = \frac{F_-}{\exp(P_-) - 1}$$

$$a_{+p} = \frac{F_+ \exp(P_+)}{\exp(P_+) - 1}$$

$$a_p = a_- + a_+$$

A figura 4.1 apresenta graficamente a solução representada pela equação 4.16.

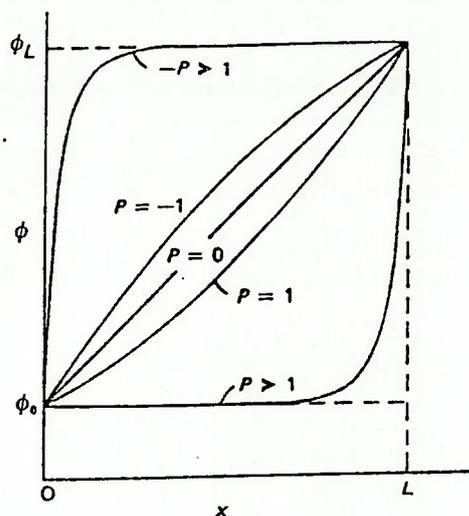


Figura 4.1 - Solução exata para o problema convectivo

4.3 Generalização da Equação de Discretização

A equação 4.15 obtida no item anterior é obtida através da solução exata da equação diferencial para um problema unidimensional em regime permanente. Isso pode ser muito bom por um lado, pois permite obter-se resultados realísticos e precisos, por outro lado essa equação utiliza exponenciais que tomam um tempo computacional considerável para serem calculadas. Além disso, os resultados obtidos não são exatos para casos bi ou tri-dimensionais e termos fonte diferentes de zero, o que não justifica o gasto de tempo computacional extra. Para lidar com essa dificuldade necessita-se de um esquema computacional eficiente e que traga bons resultados.

Para evitar o uso da função exponencial, Patankar[1980] apresenta uma formulação generalizada, onde diversas funções aproximadoras podem ser utilizadas.

Dessa forma tem-se:

$$a_p T_p = a_{-p} T_{-p} + a_{+p} T_{+p} \quad (4.17)$$

onde

$$a_{-p} = D_- A(|P_-|) + [F_-, 0]$$

$$a_{+p} = D_+ A(|P_+|) + [-F_+, 0]$$

$$a_p = a_- + a_+$$

$$D_- = \frac{k_- / Cp_-}{\delta x_-}$$

$$D_+ = \frac{k_+ / Cp_+}{\delta x_+}$$

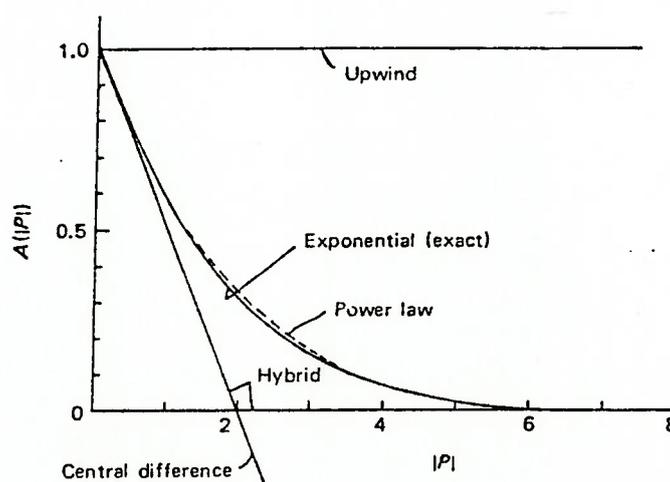
$[F_-, 0]$ é o valor maior entre F_- e 0 (zero)

$[-F_+, 0]$ é o valor maior entre F_+ e 0 (zero)

e $A(|P|)$ é uma função do número de Peclet. Essa função provém de expressões interpoladoras simplificadas. Estas expressões procuram levar em conta a importância relativa dos termos convectivos e difusivos da equação de balanço, o que pode ser considerado diretamente através da avaliação do número de Peclet local. Uma série de expressões desse tipo são encontradas em Patankar(1980) e apresentadas na tabela 4.1.

A figura 4.2 mostra uma comparação entre a solução exata apresentada na seção 4.2 e os diversos esquemas apresentados na tabela 4.1.

Scheme	Formula for $A(P)$
Central difference	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Hybrid	$\llbracket 0, 1 - 0.5 P \rrbracket$
Power law	$\llbracket 0, (1 - 0.1 P)^2 \rrbracket$
Exponential (exact)	$ P / [\exp(P) - 1]$

Tabela 4.1 - A função $A(|P|)$ para diversos esquemas.Figura 4.2 - Comparação entre a função $A(|P|)$ e a solução exata para os esquemas da tabela 4.1.

Cap. 4 - Método dos Volumes Finitos: Problemas de Convecção de Calor

Como pode ser visto na figura 4.2, o esquema *Power Law* é o mais próximo da solução exata e conseqüentemente é a opção adotada.

Ainda está faltando considerar o regime transitório e o termo fonte. Analogamente, como foi feito no capítulo anterior no caso da condução, as equações completas podem ser escritas como:

$$a_p T_p = a_{-p} T_{-p} + a_{+p} T_{+p} + b \quad (4.18)$$

onde

$$a_{-p} = D_- A(|P_-|) + [-F_-, 0]$$

$$a_{+p} = D_+ A(|P_+|) + [F_+, 0]$$

$$a_p^0 = \frac{\rho_p^0 \Delta x}{\Delta t}$$

$$b = S_c \Delta x + a_p^0 T_p^0$$

$$a_p = a_- + a_+ + a_p^0 - S_p \Delta x$$

É importante notar que os coeficientes da equação 4.18 serão sempre positivos, o que atende ao *critério de Scarborough* apresentado na seção 3.8, garantindo soluções fisicamente realísticas.

4.4 Aspectos Geométricas para Malhas Não-estruturadas

A convecção existe a partir da existência de um campo de velocidades que é uma grandeza vetorial. Por ser vetorial, essa grandeza exibe não apenas intensidade, mas também uma direção e um sentido. Com isso, não basta utilizar interpolações diretamente, mas é preciso antes calcular resultantes que levam em conta essas direções e sentidos, para depois então poder-se interpolar as intensidades.

Para os volumes finitos em estudo, precisa-se definir as velocidades que entram e saem deles, na direção normal às superfícies de contato. Essas superfícies de contato nada mais são que as faces dos elementos triangulares que compõem a malha. Dessa forma tem-se:

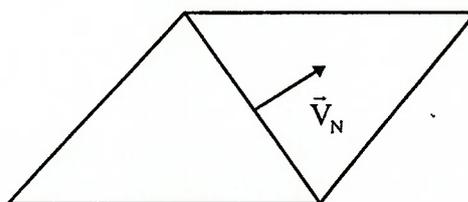


Figura 4.3 - velocidade normal a interface de dois elementos.

O campo de velocidades é dado no centro de cada elemento através da composição de vetores nas direções ortogonais X e Y conforme figura abaixo:

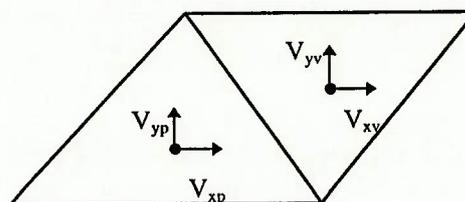


Figura 4.4 - componentes da velocidade nos centróides.

Para o cálculo do vetor velocidade normal à uma face, primeiro obtém-se a resultante nas direções X e Y entre os dois elementos que se tocam por essa face. Para isso deve-se considerar a distância entre o centro de cada elemento e a face conforme visto em 3.5. (figura 3.6). Os vetores nas direções X e Y podem ser vistos na figura 4.5.

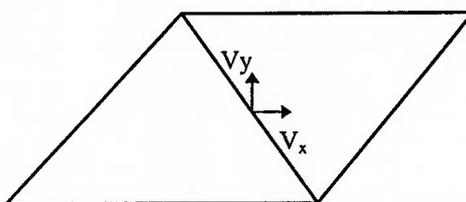


Figura 4.5 - componentes da velocidade na interface.

A partir dos valores de V_x e V_y na face, pode-se obter o valor de \vec{V}_N como visto na figura 4.3.

4.5 Equação de Discretização para Malhas Não-estruturadas

Como nas malhas não-estruturadas não existe uma direção preferencial, como é o caso das linhas de coordenadas para as malhas estruturadas, adota-se que o vetor velocidade é considerado positivo quando sai do volume de controle e negativo quando entra nele.

Analogamente à seção 3.7, a equação de discretização para as malhas não-estruturadas pode ser obtida a partir da equação para o caso unidimensional, lembrando-se que o caso das malhas não-estruturadas trata de um problema bi-dimensional e por isso deve-se considerar o fluxo de calor através de superfícies, que são os lados dos elementos.

$$a_p T_p = a_{v1} T_{v1} + a_{v2} T_{v2} + a_{v3} T_{v3} + b \quad (4.19)$$

onde

$$a_{v1} = D_{v1} A(|P_{v1}|) + [-F_{v1}, 0]$$

$$a_{v2} = D_{v2} A(|P_{v2}|) + [-F_{v2}, 0]$$

$$a_{v3} = D_{v3} A(|P_{v3}|) + [-F_{v3}, 0]$$

$$a_p^0 = \frac{\rho_p^0 \Delta V}{\Delta t}$$

$$b = Sc \Delta V + a_p^0 T_p^0$$

$$a_p = a_{v1} + a_{v2} + a_{v3} + a_p^0 - Sp \Delta V$$

$$F_{V1} = \rho V_{N1} \overline{AB}$$

$$F_{V2} = \rho V_{N2} \overline{BC}$$

$$F_{V3} = \rho V_{N3} \overline{CA}$$

$$D_{V1} = \frac{k_{V1}/Cp_{V1} \overline{AB}}{PV_1 \cos\theta_1}$$

$$D_{V2} = \frac{k_{V2}/Cp_{V2} \overline{BC}}{PV_2 \cos\theta_2}$$

$$D_{V3} = \frac{k_{V3}/Cp_{V3} \overline{CA}}{PV_3 \cos\theta_3}$$

$$P_{V1} = \frac{\rho V_{N1} \overline{PV_1} \cos\theta_1}{k_{V1}/Cp_{V1}}$$

$$P_{V2} = \frac{\rho V_{N2} \overline{PV_2} \cos\theta_2}{k_{V2}/Cp_{V2}}$$

$$P_{V3} = \frac{\rho V_{N3} \overline{PV_3} \cos\theta_3}{k_{V3}/Cp_{V3}}$$

V_{N1} é a velocidade na interface entre P e V_1

V_{N2} é a velocidade na interface entre P e V_2

V_{N3} é a velocidade na interface entre P e V_3

$[-F_{V1}, 0]$ é o maior valor entre $-F_{V1}$ e 0 (zero)

$[-F_{V2}, 0]$ é o maior valor entre $-F_{V2}$ e 0 (zero)

$[-F_{V3}, 0]$ é o maior valor entre $-F_{V3}$ e 0 (zero)

4.6 Resultados

Para poder validar o método, da mesma maneira que no capítulo anterior, é feita uma comparação entre o método numérico apresentado neste capítulo e a solução analítica para um problema com geometria simples. O modelo analítico utilizado é encontrado em White(1974) e apresenta a resolução do problema de convecção de calor em um escoamento em regime permanente entre duas placas paralelas.

4.6.1 Solução analítica da Convecção de Calor para o escoamento entre duas placas paralelas)

Na figura 4.6, duas placas infinitas estão afastadas de $2h$ e a placa superior move a uma velocidade U relativa a inferior. Um gradiente de pressão também existe na direção X . A placa superior está à temperatura constante T_1 e a placa inferior está à temperatura constante T_0 . Essas condições de contorno são independentes de X e Z , dessa forma $T = T(y)$ e a única componente da velocidade é $u = u(y)$. As equações da continuidade, momento e energia podem ser escrita da seguinte maneira:

$$\text{Continuidade} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.20)$$

$$\text{Momento} \quad 0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (4.21)$$

Energia
$$0 = k \frac{d^2 T}{dy^2} + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (4.22)$$

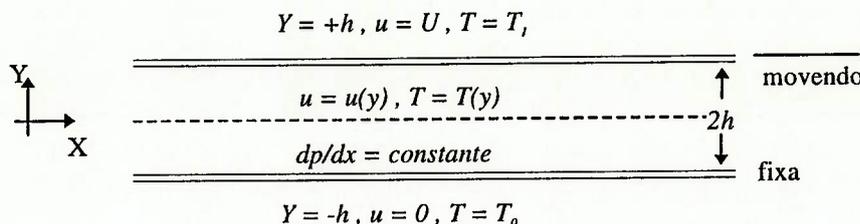


Figura 4.6 - Escoamento entre duas placas planas.

A equação da continuidade (4.20) simplesmente garante que $u = u(y)$. A equação de momento (4.21) pode ser integrada duas vezes para obter u , e depois, integrando a equação da energia (4.22) duas vezes, obtém-se T . Para utilizar um número mínimo de parâmetros, as seguintes variáveis adimensionais são definidas:

$$u^* = \frac{u}{U} \quad T^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad (4.23)$$

Dessa forma, as equações básicas ficam da seguinte maneira:

Momento
$$\frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} = \frac{h^2}{\mu U} \frac{dp}{dx} = -B = \text{constante} \quad (4.24)$$

Energia
$$\frac{d^2 T^*}{dy^{*2}} = \frac{\mu U^2}{k(T_1 - T_0)} \left[- \left(\frac{du^*}{dy^*} \right)^2 \right] \quad (4.25)$$

onde B é um gradiente de pressão adimensional e o parâmetro na equação 4.25 é o número de Brinkman, o qual é o produto entre os números de Prandtl e Eckert:

$$\frac{\mu U^2}{k(T_1 - T_0)} = \frac{\mu C_p}{k} \frac{U^2}{C_p(T_1 - T_0)} = \text{Pr Ec} \quad (4.26)$$

As condições de contorno são condição de aderência e temperatura constante nas placas:

$$\begin{array}{lll} \text{Em } y^* = +1 & u^* = 1 & T^* = 1 \\ \text{Em } y^* = -1 & u^* = 0 & T^* = 0 \end{array} \quad (4.27)$$

A equação 4.24 pode então ser resolvida através de uma integração dupla:

$$u^* = \frac{1}{2}(1 + y^*) + \frac{1}{2}B(1 - y^{*2}) \quad (4.28)$$

Esta solução, a qual é independente da temperatura, pode ser vista na figura 4.7.

Se o valor de B for negativo, significa que o gradiente de pressão é oposto ao movimento da placa superior.

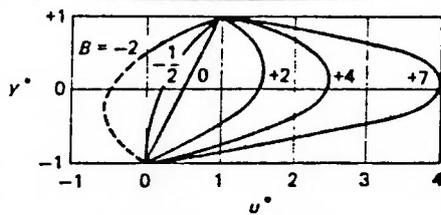


Figura 4.7 - Distribuição de velocidades do escoamento entre duas placas paralelas.

Com u^* da equação 4.28, a equação 4.25 determina uma distribuição de T^* da seguinte maneira:

$$T^* = \frac{1}{2}(1+y^*) + \frac{\text{Pr Ec}}{8}(1-y^{*2}) - \frac{\text{Pr Ec}B}{6}(y^* - y^{*3}) + \frac{\text{Pr Ec}B^2}{12}(1-y^{*4}) \quad (4.29)$$

A distribuição de temperaturas para PrEc aproximadamente zero, baseado na equação 4.29, pode ser vista na figura 4.8.

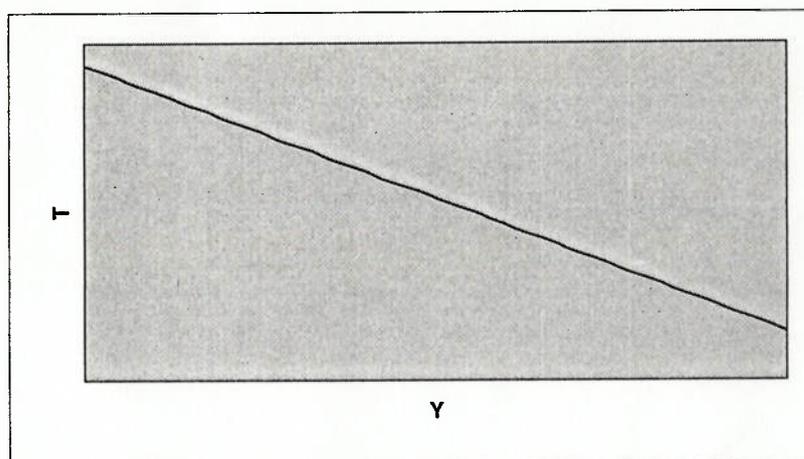


Figura 4.8 - Distribuição de temperaturas para $\text{PrEc} \approx 0$.

O fluido utilizado na simulação foi a água nas seguintes condições:

$$T_0 = 10^\circ\text{C}$$

$$T_1 = 65.55^\circ\text{C}$$

$$\text{PrEc} = 2,52 \times 10^{-5}$$

$$B = 10$$

Para a solução numérica, utilizando o *Método dos Volumes Finitos*, a malha não-estruturada utilizada nas simulações é mostrada na figura 4.9. O detalhe desta malha,

próximo à região de entrada, é apresentado na figura 4.10. O resultado obtido pode ser visto na distribuição de temperaturas da figura 4.11.

Numero de elementos -> 4762

Numero de nos -> 2545



Figura 4.9 - Malha não-estruturada entre duas placas paralelas.

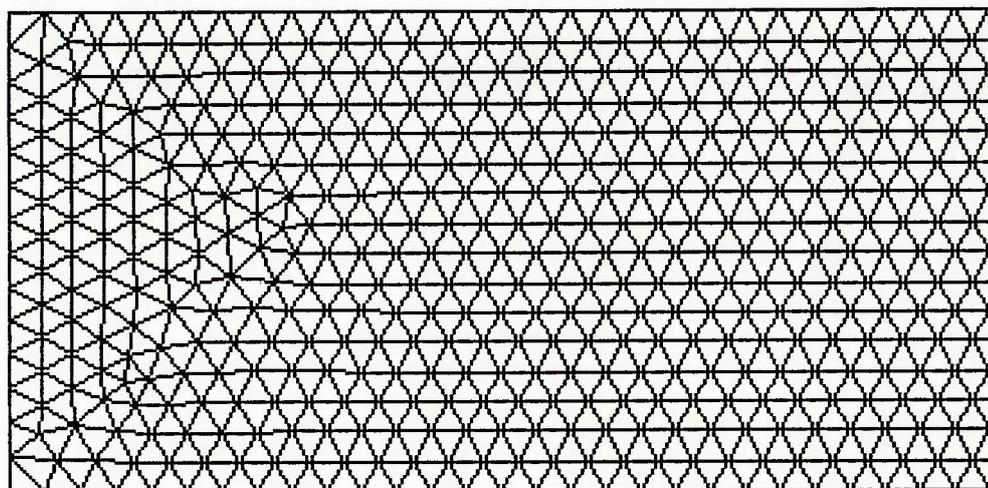


Figura 4.10 - Detalhe da malha da figura 4.8 mostrando a região de entrada.

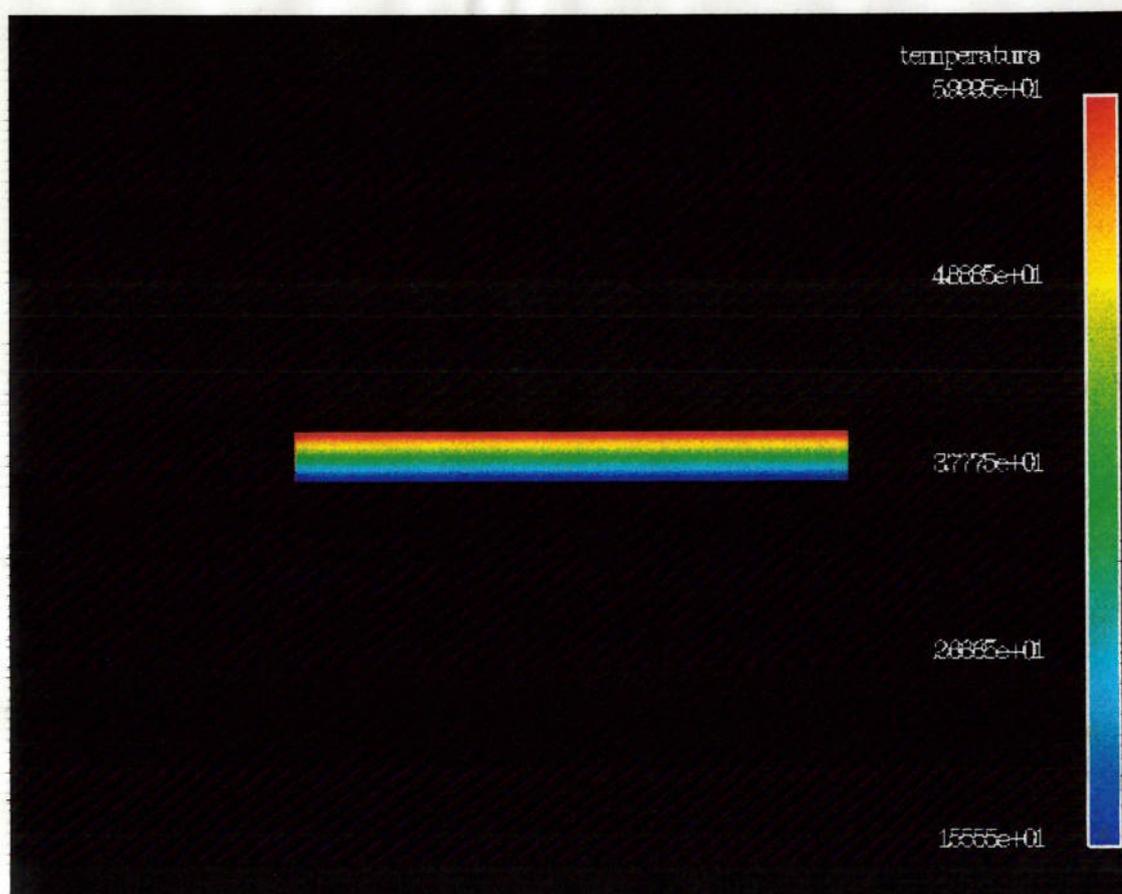


Figura 4.11 - Isotermas do problema bi-dimensional de convecção de calor através do método analítico e plotada através do programa de visualização ENSIGHT.

4.6.2 Análise Numérica da Convecção de Calor Bi-dimensional

Nesta etapa procura-se mostrar os resultados obtidos para o problema bi-dimensional da convecção de calor para o escoamento de água entre duas placas paralelas em regime permanente, através do método numérico implementado. O Método dos Volumes Finitos foi utilizado inicialmente para malha não-estruturada da figura 4.9.

A solução numérica é mostrada na figura 4.12. É possível perceber que a solução numérica praticamente coincide com a solução analítica, conforme a tabela 4.1. O maior erro encontrado foi de 0,79 % e se encontra em um elemento que se localiza no contorno da malha.



Figura 4.11. Isotermas do problema bi-dimensional de convecção de calor através do método numérico empregando a malha não-estruturada da figura 4.8 e plotada através do programa de visualização ENSIGHT.

O pequeno erro mostra a aplicabilidade do *Método dos Volumes Finitos*, desenvolvido nesta dissertação, para soluções de problemas de convecção.

Menor diferença percentual encontrada entre a solução analítica e a numérica	2.4 E-05 %
Menor diferença absoluta encontrada entre a solução analítica e a numérica	2.9 E-06
Número do elemento de ocorrência na malha não-estruturada	604
Temperatura do elemento (solução analítica)	12,29619 °C
Temperatura do elemento (solução numérica)	12,29619 °C
Maior diferença percentual encontrada entre a solução analítica e a numérica	0,79 %
Maior diferença absoluta encontrada entre a solução analítica e a numérica	0,49204
Número do elemento de ocorrência na malha estruturada	322
Temperatura do elemento (solução analítica)	62,61858 °C
Temperatura do elemento (solução numérica)	63,11062 °C

Tabela 4.2. Comparação entre a solução analítica e a solução numérica para o problema bi-dimensional de convecção de calor.

5. Discussão dos Resultados e Conclusões

As malhas estruturadas que foram apresentadas no capítulo 1 servem para ilustrar o processo de geração desse tipo de malha. Três casos diferentes foram apresentados para poder ilustrar como gerar malhas sobre um mesmo domínio com características diferentes. A figura 1.5 mostra uma malha homogênea onde não há controle de espaçamento nem controle sobre a ortogonalização dos elementos. Já a figura 1.6 mostra a mesma malha, porém com controle de espaçamento na direção horizontal. Esse controle permite aumentar a precisão dos cálculos numa região onde a camada limite se forma. É sempre interessante efetuar o controle de espaçamento da malha sobre regiões onde as características do fenômeno físico a ser estudado possuem gradientes elevados. Como no caso das malhas estruturadas, o *Método dos Volumes Finitos* depende da métrica, quanto mais ortogonais forem os elementos, melhor serão os resultados obtidos. Nesse intuito são geradas malhas ortogonalizadas conforme a figura 1.7.

Como o foco principal do trabalho está nas malhas não-estruturadas, foram apresentados malhas para diversos domínios com características diferentes. Primeiro foi mostrado um domínio circular (figuras 1.32 a 1.36). É interessante analisar esse tipo de domínio, pois a partir dele pode-se construir domínios múltiplamente conexos que venham a simular escoamentos sobre corpos, como por exemplo cilindros, asas, etc. Foram apresentadas diversas variações nos parâmetros LI e LS para poder exemplificar o método de obtenção das malhas. Pode-se perceber que com o manuseio desses parâmetros é possível direcionar o tipo de malha que se deseja. Esse procedimento,

Cap. 5 -Discussão dos Resultados e Conclusões

apesar de flexível, muitas vezes pode tomar algum tempo para poder gerar a malha desejada.

No segundo exemplo apresentado de malha não-estruturada é mostrado o túnel de vento do IPT (figuras 1.37 a 1.39). Esse exemplo é muito bom para poder mostra como efetuar o controle de espaçamento sobre regiões desejadas. Note que no estreitamento do túnel os elementos são menores, o que é interessante, pois os gradientes de velocidade e pressão devem ser maiores. No gerador desenvolvido isso é simples de ser obtido através do controle sobre o espaçamento entre os pontos do contorno. Note porém que não é possível controlar o espaçamento dos elementos que estão próximos a fronteira do domínio, como foi feito no caso das malhas estruturadas. Existem técnicas que definem a razão de aspecto entre as direções verticais e horizontais dos elementos, bem como sobre o comprimento dos mesmos. Essa razão de aspecto pode ser variada conforme a região do domínio, tornando possível escolher que tipo de elementos construir em cada região. Esse não é um procedimento de fácil implementação e o pesquisador precisa escolher as regiões de interesse antes de gerar a malha. Outra possibilidade é o refinamento da malha sobre a região desejada. O refinamento pode ser feito após efetuados os cálculos numéricos e ser verificado onde estão os maiores gradientes da propriedade em estudo. Esse método é muito mais interessante, pois permite avaliar o fenômeno antes e depois escolher a região que precisa de maior controle sobre o espaçamento. Além disso a sua implementação é mais simples e direta.

As figuras 1.40 a 1.42 mostram o mesmo túnel de vento das figuras anteriores, porém cortado ao meio. O objetivo desse corte é aproveitar a simetria axial que existe na geometria. Pode ser mais rápido e prático gerar malhas sobre domínios menos

Cap. 5 - Discussão dos Resultados e Conclusões

complexos e depois juntá-los. Além disso a malha final, obtida a partir da junção entre as malhas parciais, é mais uniforme, pois as partes são idênticas. Também pode-se gerar malhas com concentração de elementos diferentes em regiões diferentes. Esse procedimento é conhecido como construção de blocos e permite simplificar a geração de malhas para domínios complexos.

O último exemplo apresentado (figuras 1.43 a 1.46) serve para ilustrar casos onde haja uma variação brusca na fronteira do domínio. Casos como esse demonstram a grande versatilidade das malhas não-estruturadas sobre as malhas estruturadas. Pode-se observar que os elementos obtidos não perdem a uniformidade por causa do ressalto. Ao contrário, o ressalto é contornado pela malha como se a fronteira fosse uma linha reta. Geralmente sobre esses ressaltos encontra-se formação de recirculação e com uma malha esparsa não é possível capturar tal efeito. Vale lembrar que essa malha também poderia ser gerada através da construção de blocos.

As malhas obtidas no capítulo 1 são malhas que apresentam elementos muito distorcidos, principalmente na região de fechamento, onde encontra-se uma "costura". Esses elementos naturalmente não são desejados e precisam ser corrigidos. O capítulo 2 mostra exatamente como isso é feito. As mesmas malhas do capítulo 1 foram usadas para poder usá-las como referência. O primeiro método apresentado, o *Método dos Triângulos*, é uma abordagem exclusiva do autor deste trabalho. O método atingiu o seu objetivo, transformando os elementos distorcidos em elementos regulares, porém o tempo computacional utilizado foi muito elevado. O segundo método apresentado, o *Método dos Polígonos*, mostrou-se muito eficiente. Com tempo computacional reduzido, pode-se obter uma ótima regularização dos elementos. O pesquisador deve sempre proceder com o amaciamento da malha após tê-la gerado. Porém não há a

necessidade de aplicar os dois métodos de amaciamentos, um após o outro. Foram feitos testes e verificou-se que não há ganhos nesse sentido. A sugestão é que se use o *Método dos Polígonos*.

A metodologia apresentada para a geração de malhas não-estruturadas em domínios multiplamente conexos mostrou-se eficiente e comprovou a eficiência e flexibilidade do gerador de malhas desenvolvido. Domínios multiplamente conexos são de vasta utilização na Termodinâmica e Dinâmica dos Fluidos, pois permitem a simulação de fenômenos físicos ao redor de corpos. A técnica da linha de corte é simples de ser aplicada e pode também ser usada para determinar uma região com espaçamento diferenciado, através da variação entre as distâncias dos nós que discretizam a linha. Vale lembrar que uma vez gerada a malha, o processo de amaciamento dá-se normalmente, sem precisar de ajustes especiais para o fato do domínio ser multiplamente conexo. Isso provém do fato da linha de corte fazer parte do contorno do domínio. Dessa forma, com o mesmo gerador, é possível discretizar domínios de natureza complexa e variada.

A estrutura de dados escolhida para armazenar as informações das malhas foi a mais simples encontrada. Qualquer pesquisador que queira utilizar uma malha criada pelo gerador desenvolvido terá facilidade em ler as informações e fazer uso delas. Isso é muito bom de forma geral, pois permite a universalização das malhas. Por outro lado, para poder tirar proveito dessa simplicidade, não é possível obter de forma direta dados mais específicos, como por exemplo quais são os elementos vizinhos de um dado elemento. Para resolver esse problema, foram criadas rotinas que buscam essas informações no banco de dados que compõem a malha e as trazem de forma organizada. O aspecto preponderante aqui é que todas as informações estão disponíveis de uma

forma simplificada. Basta ao pesquisador determinar quais são suas necessidades e através de rotinas complementares, buscá-las no banco de dados da malha gerada. Isso permite ao pesquisador incrementar a biblioteca de aplicativos de pós tratamento das malhas. Nada impede que um novo método de amaciamento seja desenvolvido ou que um método de refinamento seja criado. Dessa forma, o que pode parecer um inconveniente, acaba por tornar-se numa ferramenta poderosa e flexível.

Diferentemente do *Método dos Elementos Finitos*, onde, a partir de princípios variacionais, minimiza-se o erro de uma função, sendo a matemática envolvida mais complexa, no caso do *Método dos Volumes Finitos* a matemática necessária é relativamente simples, com a vantagem das equações discretizadas representarem os fenômenos físicos em estudo. Essa é uma abordagem elegante para engenheiros, pois permite o desenvolvimento de simulações de fenômenos novos através da discretização das equações em estudo. Ambos os métodos trazem resultados satisfatórios, o que permite ao pesquisador escolher aquele que mais interessá-lo.

Para efetuar os balanços das propriedades em estudo, o *Método dos Volumes Finitos* pode fazer uso tanto dos nós da malha quanto dos centros dos elementos. Na verdade a escolha deve-se a forma como é construído o volume de controle. No caso de malhas com elementos triangulares, que é o caso deste trabalho, os volumes de controle podem ser compostos por elementos que tenham um mesmo nó em comum (elementos vizinhos), formando polígonos, ou o próprio elemento pode ser considerado como um volume de controle. No caso dos volumes de controle serem polígonos compostos pelos elementos vizinhos, os balanços são efetuados nos nós da malha e, no caso dos volumes de controle serem os próprios elementos da malha, os balanços são efetuados no centro

dos elementos. Por motivos de simplificação o autor escolheu trabalhar com volumes de controle constituídos pelo próprio elemento.

Para os problemas de condução de calor os resultados obtidos foram satisfatórios. O maior erro obtido em relação ao cálculo analítico foi de 1,95 %. Vale aqui colocar que o elemento que apresentou esse erro localiza-se na fronteira do domínio. Foi possível verificar que quanto mais ao centro da malha, os erros diminuíram. O que pode explicar esse fato são as condições de contorno que não são dadas nos nós e os balanços serem efetuados no centro dos elementos. Se os balanços fossem efetuados nos nós, as condições de contorno seriam dadas também nos nós. Uma vez que todas as interpolações adotadas foram lineares, um erro pode provir de aproximações grosseiras. Outro aspecto importante a ser colocado é o fato de cada volume de controle ser influenciado por apenas três elementos. No caso dos volumes poligonais, esses são influenciados por quatro ou mais nós. Ou seja, o balanço das propriedades leva em conta mais informações, o que deve trazer melhores resultados.

A aproximação feita para se avaliar o fluxo da propriedade em estudo através da interface entre dois volumes de controle, considera que a propriedade é constante dentro de todo o volume. Conforme a figura 5.1, pode-se fazer uma expansão em série de Taylor, desprezando termos de segunda ordem, à partir do ponto V, obtendo-se para o valor da propriedade em V':

$$\phi_{V'} = \phi_V + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (5.1)$$

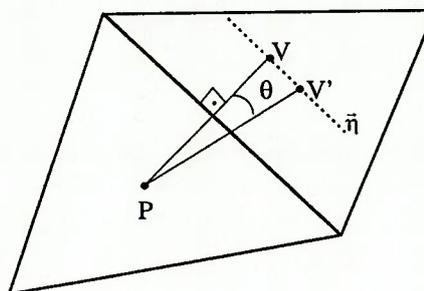


Figura 5.1 - Aproximação entre os valores de V e V'.

Na metodologia utilizada, considera-se $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\eta}} \cong 0$. Uma alternativa seria utilizar-se de uma expansão em série de Taylor e avaliar $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\eta}}$ localmente. Esta opção não foi testada nesta dissertação e corresponderia a uma avaliação do fluxo com uma precisão correta até termos de primeira ordem.

As mesmas observações citadas acima sobre problemas difusivos são válidas para os problemas de convectivos. Cabe ainda colocar que a dificuldade de se determinar a direção principal das faces dos elementos em malhas não-estruturadas foi sobreposta pela utilização do esquema *Power Law* proposto por Patankar(1980), que leva em conta o Número de Peclet. O Número de Peclet representa a razão entre as forças de convectivas e difusivas. Dessa forma, quando as forças convectivas forem menos representativas, as forças difusivas influenciam com maior peso o balanço das propriedades e vice-versa. Assim, através da definição de velocidade positiva ou velocidade negativa, conforme o vetor aponte para dentro ou para fora do volume, pode-

se facilmente determinar qual a influência que um elemento exerce sobre o seu vizinho e qual a natureza dessa influência.

O trabalho desenvolvido cumpriu com sua proposta inicial de utilizar malhas não-estruturadas em Dinâmica dos Fluidos Computacional. Os temas abordados foram investigados em profundidade e os resultados obtidos foram plenamente aceitáveis. A extensão do trabalho foi grande, partindo do início do processo de geração de malhas, explorando o tratamento qualitativo das malhas e desenvolvendo métodos numéricos para serem aplicados sobre as malhas, exigindo grande esforço e dedicação do autor. Trouxe como recompensa modelos e métodos que poderão ser aplicados e melhorados a qualquer momento, além da grande satisfação proveniente de tal realização.

As malhas não-estruturadas estabelecem-se como alternativa muito propícia para aplicações na Dinâmica dos Fluidos devido a sua grande flexibilidade. Por se tratar de uma área recente do conhecimento, ainda permite a descoberta e desenvolvimento de muitas ferramentas. A bibliografia disponível está sendo formada, tornando necessário para os pesquisadores da área muita criatividade. De qualquer maneira, vê-se claramente uma migração para esse tipo de malhas entre os pesquisadores, o que deverá solidificar os conceitos e métodos de geração das malhas não-estruturadas. Vale lembrar que as malhas estruturadas não deixam de ter um espaço neste universo dinâmico da ciência. O uso de malhas híbridas possivelmente representa a melhor resposta as demandas dos pesquisadores, onde pode-se usufruir das vantagens de ambos os tipos.

O *Método dos Volumes Finitos* mostrou um grande potencial de utilização e deve ser mais explorado em busca de melhorar os resultados e ampliar a gama de aplicações. As referências encontradas tratam principalmente de aplicações em malhas estruturadas. Toda a bibliografia disponível para a aplicação sobre malhas não-

Cap. 5 -Discussão dos Resultados e Conclusões

estruturadas é atual e ainda não está completa. Percebe-se que grande parte dos pesquisadores preferiu a utilização das malhas não-estruturadas vinculadas ao *Método dos Elementos Finitos*.

6. Sugestões para Novas Pesquisas

O gerador de malhas não-estruturadas obtido por este trabalho permite a geração de malhas sobre domínios bi-dimensionais com geometria complexa. Os métodos de tratamento qualitativo das malhas são adequados e versáteis. Porém ainda restam muitas ferramentas a serem desenvolvidas. Possivelmente a mais importante delas seja um refinador adaptativo para regiões específicas. Com esse refinador poder-se-ia refinar regiões da malha, através da inserção de elementos, possibilitando obter cálculos mais apurados sobre regiões que apresentem gradientes elevados das propriedades em estudo. Adaptativo, pois possibilitaria o refinamento conforme os resultados obtidos pelo método numérico empregado. Outra sugestão é o desenvolvimento de malhas híbridas. Nesse caso o importante é definir como será a relação de conectividade entre os elementos e nós dos diferentes tipos de malhas. Naturalmente o método numérico terá que seguir a mesma lógica.

Na questão do *Método dos Volumes Finitos* poder-se-ia utilizar os *Volumes de Voronoi*. Dessa forma acredita-se na melhora dos resultados obtidos. A definição desses volumes se daria através de um programa complementar, que trabalhe sobre a malha gerada para um determinado domínio. Esse programa verificaria todos os elementos vizinhos a um mesmo nó e determinaria o polígono composto pelas mediatrizes dos lados desses elementos. Depois seria necessário adaptar-se o método numérico para os novos volumes

Cap. 6 - Sugestões para Novas Pesquisas

de controle. Isso modificaria a forma de especificar as condições de contorno e do balanceamento das propriedades.

Outra possibilidade interessante seria desenvolver o *Método dos Volumes Finitos* para regimes transitórios e com a presença do termo fonte. Na verdade toda a formulação já fora apresentada, bastando a implementação do método. Com isso, as possibilidades de aplicações tornam-se mais extensas e completas. É importante destacar a necessidade do desenvolvimento do *Método dos Volumes Finitos* para calcular o campo de velocidades de um escoamento em malhas não-estruturadas. A grande dificuldade seria a carência de referências bibliográficas e naturalmente a implementação de um dos métodos de acoplamento entre velocidade e pressão, como por exemplo o SIMPLE, SIMPLER ou SIMPLEC, entre outros. Para finalizar é importante citar a necessidade de desenvolvimento de modelos para escoamentos turbulentos. Modelos $k-\varepsilon$ podem ser aplicados diretamente, uma vez que a equação de transporte de uma propriedade genérica já fora obtida. Além disso, outros modelos, como por exemplo LES, podem trazer grandes contribuições às pesquisas da área.

Referências Bibliográficas:

ARKELL, R. H. - *Wake Dynamics of Cylinders Encountering Free Surface Gravity Waves.* Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy - Imperial College of Science Technology and Medicine, 1995.

BALIGA, B. R. and PATANKAR, S. V. - *A Control Volume Finite-Element Method for Two-dimensional Fluid Flow and Heat Transfer.* **NUMERICAL HEAT TRANSFER**, 1983, vol. 6, pp. 245-261.

BALIGA, B. R., PHAM, T. T. and PATANKAR, S. V. - *Solution of Some Two-dimensional Incompressible Fluid Flow and Heat Transfer Problems, Using a control Volume Finite-Element Method.* **NUMERICAL HEAT TRANSFER**, 1983, vol. 6, pp. 263-282.

BRAATEN, M. E. and PATANKAR, S. V. - *A Block Corrected Subdomain Solution Procedure for Recirculating Flow Calculations.* **NUMERICAL HEAT TRANSFER**, 1989, Part B, 15:1-20.

BRAGA, W. - *On the Use of Some Weighted Upwind Schemes for Strongly Convective Flows.* **NUMERICAL HEAT TRANSFER**, Part B, vol. 18 pp. 43-60, 1990.

BRACKBILL, J. U. and SALTZMAN, J. S. - *Adaptative Zoning for Singular Problems in Two Dimensions.* **J.COMPUT.PHYS.**, 1982, 46:342-368.

FORNBERG, B. - *A Numerical Method for conformal Mapping.* **SOC.IND.APPL.MATH.J.SCI.STAT.COMP**, 1980, 1:336.

GEORGE, P. L. - *Automatic Mesh Generation - Application to Finite Element Methods.* JOHN WILEY & SONS, 1991.

GIANNAKOPOULOS, A. E. and ENGEL, A.J. - *Directional Control in Grid Generation.* J.COMPUT.PHYS., 1988, 422-439.

GODUNOV, S. K. and PROKOPOV, G. P. - *The Use of Moving Meshes in Gas Dynamics Computations.* USSR COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL PHYSICS, 1972, 12(182).

HOLMAN, J. P. - *Transferência de Calor.* McGraw-Hill do Brasil, 1983.

HUNG, T. K. and BROWN, T. D. - *An Implicit Finite-Difference Method for Solving the Navier-Stokes Equation Using Orthogonal Curvilinear Coordinates.* J.COMPUT.PHYS., 1977, 23:343-363.

MAHDI, H. S. and KINNEY, R. B. - *Time-Dependent Natural Convection in a Square Cavity: Application of a New Finite Volume Method.* INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS, vol. 11, 57-86, 1990.

MALISKA, C. R. - *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional,* Rio de Janeiro, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. , 1995.

MARCUM, D. L. and WEATHERILL, N. P. - *Unstructured Grid Generation Using Iterative Point Insertion and Local Reconnection.* AIAA Journal, 1995, 33:9:1619-1625.

MARION, J. R., and HEALD, M. A. - **Classical Eletromagnetic Radiation**. 2nd.ed., New York, Academic Press, 1970.

MENEGHINI, J. R. - *Geração e Utilização de Sistemas de Coordenadas Orientadas de Acordo com as Fronteiras do escoamento*. Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1989.

PATANKAR, S. V. - **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**, New York, McGraw-Hill Book Company, 1980.

PERAIRE, J., MORGAN, K. and PEIRO, J. - *Unstructured Mesh Methods for CFD*. IC Aero Report 90-04 - Imperial College of Science Technology and Medicine, 1990.

PERAIRE, J., PEIRO, J., FORMAGGIA, L., MORGAN, K. and ZIENKIEWICZ, O. C. - *Finite Element Euler Computations in Three Dimensions*. INT.J.NUM.METHODS ENG., 1988, 26:2135-2159.

PERAIRE, J., VAHDATI, M., MORGAN, K. and ZIENKIEWICZ, O. C. - *Adaptative Remeshing for Compressible Flow Computations*. J.COMPUT.PHYS., 1987, 72:449-466.

POPE, S. B. - *The Calculation of Turbulent Recirculating Flows in General Orthogonal Coordinates*. J.COMPUT.PHYS., 1978, 26:197-217.

PROBERT, J., HASSAN, O. and MORGAN, K. - *An Adaptative Finite Element for Transient Compressible Flows with Moving Boundaries*. INT.J.NUM.METHODS ENG., 1991, 32:751-765.

PROBERT, J., HASSAN, O., PERAIRE, J. and MORGAN, K. - *An Adaptive Finite Element Method For Transient Compressible Flows.* **INT.J.NUM.METHODS ENG.**, 1991, 32:1145-1159.

ROACHE, P. J. - **Computational Fluid Dynamics.** Albuquerque, Hermosa Pub., 1972.

ROSA, C. S. - **2º relatório semestral de doutorado entregue a FAPESP - 1996.**

RYSKIN, G. and LEAL, L. G. - *Orthogonal Mapping.* **J.COMPUT.PHYS.**, 1983, 23:71:100.

THIART, G. D. - *Improved Finite Difference Scheme for the Solution of Convection-Diffusion Problems with the SIMPLEN Algorithm.* **NUMERICAL HEAT TRANSFER**, 1990, Part B, 18:81-95.

THOMPSON, J. F., THAMES, F. C. and MASTIN, C. W. - *Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies.* **J.COMPUT.PHYS.**, 1974, 15:299-319.

_____. _____. _____. - *TOMCAT - A code for Numerical Generation of Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems on Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies.* **J.COMPUT.PHYS.**, 1977, 24:274-302.

VOLPE, V. V. - *Estudo da Transferência de Calor e Quantidade de Movimento no escoamento laminar através de passagens com geometria arbitrária: Modelos compressível e incompressível.* Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1993.

WHITE, F. M. - **Viscous Fluid Flow**, McGraw-Hill Inc., 1974.

WINSLOW, A. J. - *Numerical Solution of Quase-linear Poisson Equation in a Non-Uniform Triangular Mesh.* **J.COMPUT.PHYS.**, 1966, 2:149.