

EDSON MARCONI

ABORDAGEM DO CONTROLE LINEAR QUADRÁTICO ATRAVÉS
DA TEORIA DE JOGOS DIFERENCIAIS

Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
título de Doutor em Engenharia.

São Paulo

1994

OK

EDSON MARCONI

**ABORDAGEM DO CONTROLE LINEAR QUADRÁTICO ATRAVÉS
DA TEORIA DE JOGOS DIFERENCIAIS**

Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
título de Doutor em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Prof.Dr.José Sotelo Jr.

São Paulo
1994

Agradecimentos

Ao amigo e orientador Prof.Dr.José Sotelo Jr. pelo apoio e incentivo em todos os passos da pesquisa.

Ao Prof.G.E.O.Giacaglia pela cessão de recursos computacionais.

A minha esposa Rosana pelo incentivo e compreensão.

A minha mãe Christina por uma vida de dedicação.

Aos amigos da ASEA BROWN BOVERI que entendem e apoiam o trabalho de pesquisa.

DEDALUS - Acervo - EPMN



31600010339

*A minha esposa Rosana e aos meus
filhos, Vinícius e Beatriz.*

SUMÁRIO

Lista de Símbolos

Lista de Figuras

Resumo

"Abstract"

	Pág.
1. Introdução.....	1
2. O Controle Linear-Quadrático.....	12
2.1 Definição do problema enfocado.....	12
2.2 Seleção das matrizes de ponderação.....	14
3. Alguns conceitos importantes.....	18
3.1 Considerações gerais.....	18
3.2 Definição de soluções em problemas de multi- critério e conceituação de exclusividade na relação jogador/critério.....	21
3.3 Determinação do conjunto Pareto-ótimo.....	26
4. Formalização da solução do regulador, via Teoria dos Jogos.....	30
4.1 Considerações iniciais.....	30
4.2 Definição do Jogo.....	39
4.3 Conclusão do capítulo.....	48
5. Considerações a respeito do tempo final finito ($t_f=T$).....	49

	Pág.
5.1 Considerações a respeito da realimentação linear.....	49
5.2 Considerações a respeito da realimentação linear gerada pela equação de Riccati.....	59
5.3 Conclusão do capítulo.....	71
6. Considerações a respeito da robustez.....	72
6.1 Sistema em malha aberta equivalente para regime permanente.....	74
6.2 Efeito de distúrbio na planta.....	75
6.3 Efeito das variações paramétricas da planta....	77
6.4 Robustez do regulador com realimentação ótima de estado.....	77
6.5 Aplicação ao caso SISO.....	80
6.6 Robustez do regulador com realimentação ótima da variável observada.....	83
6.7 Conclusão do capítulo.....	86
7. Considerações a respeito do caso MIMO.....	87
7.1 Tempo final tendendo à infinito.....	87
7.1.1 Programa computacional.....	89
7.1.2 Exemplo de aplicação.....	92
7.1.3 Geração do conjunto Pareto-ótimo.....	97
7.2 Considerações a respeito da robustez à sensibilidade para o caso MIMO.....	103
7.2.1 Exemplo de aplicação.....	104
7.2.2 Implementação computacional.....	106

	Pág.
7.3 Considerações a respeito da robustez relacionada à estabilidade do sistema.....	106
7.3.1 Exemplo de aplicação.....	108
7.3.2 Implementação computacional.....	109
7.4 Considerações a respeito da alocação de pólos..	109
7.4.1 Programa computacional.....	112
7.4.2 Exemplo de aplicação.....	113
7.5 Tempo final finito.....	118
7.5.1 Programa computacional.....	119
7.5.2 Exemplo de aplicação.....	119
7.6 Conclusão do capítulo.....	122
8. Comentários e Conclusões.....	124
ANEXO A: Algoritmo para determinação do conjunto Pareto-ótimo.....	132
A.1 Introdução.....	132
A.2 Método das Ponderações.....	132
A.3 Método de Estimação do Conjunto Não-inferior.....	133
A.4 Algoritmo.....	136
ANEXO B: Diagrama de blocos do program de busca de matrizes Pareto-ótimas.....	140
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	144
BIBLIOGRAFIA.....	148

Lista de Símbolos

$A(t), A$	Matriz da planta de um sistema diferencial linear de ordem finita.
$B(t), B$	Matriz de entrada de um sistema diferencial linear de ordem finita.
$C(t), C$	Matriz de saída para a variável observada.
Ce_{∞}	Erro quadrático médio em regime permanente.
Cu_{∞}	Controle quadrático médio em regime permanente.
D	Matriz de saída para a variável controlada.
$\tilde{e}(t)$	Erro de estimativa.
F	Matriz de ponderação do estado final.
$G(s)$	Matriz de transferência da variável observada para $-u$.
$H(s)$	Matriz de transferência do sinal de entrada para a variável observada.
$H_0(s)$	Definição anterior, referente a valores nominais.
I	Matriz identidade.
I_i	Índice de desempenho relacionado ao jogador i correspondente ao caso MIMO, definido na página 31.
i_i	Índice de desempenho relacionado ao jogador i correspondente ao caso SISO e definição equivalente à anterior.
\bar{I}_i	Índice de desempenho relacionado ao jogador i correspondente ao caso MIMO, definido na página 40.
\tilde{I}_i	Índice de desempenho relacionado ao jogador i correspondente ao caso SISO e definição

	equivalente à anterior.
J	Critério de desempenho linear quadrático.
J_i	Função critério relacionada ao jogador i .
\bar{J}	Critério de desempenho para o caso em que as variáveis de controle e estado são estocásticas.
$K(s)$	Matriz de transferência da planta (de u para z).
K	Ganho de realimentação.
K	Matriz de ganho do observador no regime permanente.
l_i	Linha das melhores escolhas de uma variável de decisão, em relação a um determinado critério, no plano definido por duas variáveis de decisão.
M_i	Matriz de auto-valores associados à matriz A_i .
MEP	Máximo erro permitido (NISE).
MEPO	Máximo erro possível.
N	Ponto de equilíbrio Nash.
N	Número de pontos Pareto-ótimos gerados no estágio.
$N(s)$	Matriz de transferência do sistema em malha fechada da variável de referência r para a entrada da planta u .
$N_o(s)$	Definição anterior referente a valores nominais.
n	ordem do sistema.
O_i	Ponto de menor índice i do plano definido pelas variáveis de decisão.
$P(t)$	Matriz de variância.
$Pr(t)$	Matriz de variância.
$Q(t), Q$	Matriz de ponderação do estado.

q	Variável de ponderação do estado.
$R(t), R$	Matriz de ponderação da entrada.
$Rd(s)$	Matriz de retorno da diferença ($=[Se(s)]^{-1}$).
r	Variável de ponderação da entrada.
S, s	Solução da equação algébrica de Riccati.
$S(t)$	Solução da equação diferencial matricial de Riccati.
$S(s)$	Matriz de sensibilidade.
$Se(s)$	Matriz de sensibilidade.
$S_o, Se_o(s)$	Definição anterior referente a valores nominais.
S_i	Ponto Pareto-ótimo tendo o i -ésimo valor mais alto de J .
S_f, s_f	Solução da equação diferencial de Riccati para o instante final.
s	Variável da transformada de Laplace.
s_i	i -ésimo auto-valor desejado.
T	Período de duração do controle.
$T(s)$	Transmissão do sistema de controle em malha fechada (da variável de referência r para a variável controlada z).
t	Tempo.
t_o	Instante inicial.
t_f	Instante final ($=T$).
t_{\min}	Tempo mínimo de controle.
$u(t)$	Variável de entrada.
$u^o(t)$	Variável ótima de entrada.
u_i	Variável de decisão relacionada ao jogador i .
u_r	Entrada de referência.
V_i	Intensidade de ruído branco.

$V_p(s)$	Transformada de Laplace de $v_p(t)$.
$v_p(t)$	Variável de distúrbio.
w	Frequência.
w_i	Peso correspondente ao critério i .
$w_i(t)$	Ruído branco.
$x(t)$	Variável de estado.
x_0	Estado inicial.
x_r	Estado de referência.
x_f	Estado final.
$\hat{x}(t)$	Vetor de observação.
$y(t)$	Variável observada.
$Z(s)$	Transformada de Laplace da variável controlada.
$z(t)$	Variável controlada.
Γ	Conjunto de vetores factíveis como solução do problema.
γ	Vetor cujos componentes são os índices de desempenho que definem o jogo.
ϵ	Escalar positivo muito menor que 1.
Λ	Conjunto Pareto-ótimo.
Λ_i	Matriz diagonal de auto-valores para o estágio i .
λ_i	i -ésimo auto-valor.
$\Sigma_r(w)$	Matriz de densidade espectral de potência da parte variável do sinal de referência.
$\Sigma_v(w)$	Matriz de densidade do espectro de potência do processo estocástico v .
Φ	Matriz de transição de estado.
Ω	Parte do conjunto Pareto-ótimo contido num invólucro convexo.

Operações

\mathbf{x}^T	Transposta do vetor \mathbf{x} .
\mathbf{A}^T	Matriz transposta de \mathbf{A} .
\mathbf{A}^{-1}	Inverso da matriz quadrada \mathbf{A} .
\mathbf{A}^*	Matriz conjugada transposta de \mathbf{A} .
$\text{tr}(\mathbf{A})$	Traço da matriz quadrada \mathbf{A} .
$\ \mathbf{A}\ $	Norma genérica da matriz \mathbf{A} .
$\ \mathbf{A}\ $	Norma de Frobenius da matriz \mathbf{A} .
$\ \mathbf{x}\ $	Norma Euclidiana do vetor \mathbf{x} .
$\sigma[\mathbf{A}]$	Mínimo valor singular de \mathbf{A} .
$E(\mathbf{x})$	Operador de expectância de \mathbf{x} .
\min_u	Mínimo com respeito a u .
dx	Intervalo infinitesimal da variável \mathbf{x} .
Δx	Intervalo finito da variável \mathbf{x} .
$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$	Derivada temporal do vetor $\mathbf{x}(t)$.
$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$	Derivada parcial de \mathbf{x} em relação à t .

Obs.: Demais símbolos definidos no texto.

Lista de Figuras

	Pág.
FIGURA 1.1: Diagrama de blocos do sistema de controle em malha aberta.	2
FIGURA 3.1: Linhas de contorno de J_1 e J_2 .	21
FIGURA 3.2: Identificação dos pontos NASH.	23
FIGURA 3.3: Conjunto Pareto-ótimo.	25
FIGURA 3.4: Conjunto Λ representado no plano $J_1 \times J_2$.	27
FIGURA 3.5: Método das restrições.	29
FIGURA 5.1: Representação tridimensional de \bar{i}_x e \bar{i}_u no espaço $r \times q \times t_r$.	53
FIGURA 5.2: Comportamento ao redor de um ponto P de $\bar{A}\bar{N}_1$.	59
FIGURA 5.3: Comportamento ao redor de um ponto P de $\bar{N}_1\bar{N}_2$.	70
FIGURA 6.1: (a) Sistema de controle em malha fechada; (b) Sistema de controle equivalente em malha aberta para regime permanente.	74
FIGURA 6.2: Sistema de controle com distúrbio na planta V_p .	76
FIGURA 6.3: Configuração do sistema de controle com realimentação através de um observador com distúrbio na planta e na medição.	83
FIGURA 7.1: Conjunto Pareto-ótimo Λ .	98
FIGURA 7.2: Erro máximo possível.	101
FIGURA 7.3: Erro máximo possível.	101
FIGURA A.1: A solução ótima do problema ponderado varia com w_i .	133

	Pág.
GRÁFICO 5.5: Curvas de \bar{i}_x e \bar{i}_v constantes no plano $t_f \times K$.	57
GRÁFICO 5.6: Inclusão da restrição $t_f \geq t_{\min}$ para (5.5).	58
GRÁFICO 5.7: Curvas de \bar{i}_x const., no plano $r \times q$ para $t_f=1$.	65
GRÁFICO 5.8: Curvas de \bar{i}_v const., no plano $r \times q$ para $t_f=1$.	65
GRÁFICO 5.9: Curvas de \bar{i}_x const., no plano $t_f \times q/r$.	66
GRÁFICO 5.10: Curvas de \bar{i}_v const., no plano $t_f \times q/r$.	67
GRÁFICO 5.11: Curvas de \bar{i}_x e \bar{i}_v const., no plano $t_f \times q/r$.	68
GRÁFICO 5.12: Inclusão da restrição $t_f \geq t_{\min}$ para (5.11).	70
GRÁFICO 6.1: Inclusão da restrição β_{\max} referente à garantia de robustez.	81
GRÁFICO 6.2: Inclusão da restrição K_{\min} referente à garantia de robustez.	82
GRÁFICO 7.1: Conjunto Pareto-ótimo, caso MIMO, $t_f \rightarrow \infty$.	97
GRÁFICO 7.2: Conjunto Pareto-ótimo com a condição adicional de pólos pré-fixados.	116
GRÁFICO 7.3: Conjunto Pareto-ótimo para o caso MIMO com tempo final finito.	121

RESUMO

Este trabalho utiliza a Teoria de Jogos Diferenciais para estudar o projeto de sistema de controle com critério de desempenho linear-quadrático.

O emprego de tal ferramenta se deve ao fato de que a principal característica deste tipo de projeto é a existência de conflito de interesses entre os diversos objetivos a serem alcançados.

O problema é definido através de um jogo cujas funções-objetivos possuem um forte apelo físico (precisão da trajetória e gasto de energia de controle), o que facilita bastante a interpretação dos resultados.

Foram analisados os casos SISO e MIMO com tempo final de controle finito e infinito, incorporando o aspecto da robustez. O problema da robustez foi tratado como um vínculo adicional que impõe limites ao conjunto de soluções encontradas para o problema originalmente definido.

Apontam-se como principais resultados: a diferença de "qualidade" de soluções entre os casos SISO (jogo de soma-zero) e MIMO (jogo cooperativo) e a metodologia para encontrar as matrizes de ponderação que levam a soluções Pareto-ótimas.

Assim, os resultados obtidos são estimulantes no sentido de se aplicar tal metodologia para o projeto geral de sistema de controle.

ABSTRACT

This work uses the Differential Game Theory to study the controller design with linear-quadratic performance index. The main characteristic of this kind of problem is the conflict of interests among the goals to be achieved by the design, what can justify the use of this tool (D.G.T).

The problem will be defined through a game whose objective-functions have a strong physical appeal (path and use of control energy), which will make the results interpretation easier.

It was analyzed the SISO case and MIMO case with finite and infinite time of control including the robustness aspect. The robustness problem was treated as an additional constraint that impose limits to the solutions of the Pareto-optimal set found for the originally defined problem. The main results are: the difference of "quality" solutions between the SISO case (zero-sum game) and MIMO case (cooperative game) and the methodology to find weight matrices of the Pareto-optimal solutions.

Thus, the results obtained are stimulating in the sense to apply this methodology to the general design of control systems.

1. Introdução

São inúmeros os trabalhos publicados na área de controle ótimo de sistemas dinâmicos em que o índice de desempenho linear quadrático é utilizado como critério consistente na otimização do controle a ser usado.

Um sistema de controle possui restrições (vínculos) que devem ser satisfeitas, bem como interesses ou objetivos, de natureza conflitantes, que devem ser atingidos. Assim, tendo em vista estes aspectos, a presente pesquisa utiliza a Teoria de Jogos Diferenciais para tratar do problema.

Alguns trabalhos dedicaram-se a analisar com profundidade o significado matemático e físico do uso deste critério. Dentre eles destaca-se o trabalho de ATHANS (1971) ref.[1], que apresenta com bastante clareza a idéia de que o controle linear quadrático mantém o comportamento do modelo linearizado adotado o mais realista possível ("as honest as possible"). Além disso, várias considerações a respeito das matrizes de ponderação foram feitas salientando suas implicações práticas e, particularmente, destacando a importância de se explorar este campo.

Como exemplo desta linha de pesquisa pode-se citar os autores KWAKERNAAK; SIVAN (1972) ref.[2], que, trabalhando com expressões no domínio da frequência, fazem considerações qualitativas sobre a robustez do sistema, analisando tendências assintóticas das matrizes de ponderação. É também desta referência um levantamento de vários aspectos conflitantes que ocorrem no projeto de um regulador. Os autores apontam como objetivo básico do projeto obter-se o

nível mais baixo possível de erro de trajetória sem que o limite máximo do sinal de entrada seja atingido. Considerando-se o sistema invariante no tempo e as matrizes de ponderação pré-fixadas, os seguintes aspectos de projeto são tratados: estabilidade, duração do período transitório ("settling time"), precisão de trajetória, minimização da quantidade de controle necessária, distúrbios no sistema de controle, ruído de observação e incertezas dos parâmetros da planta (os processos estocásticos representados pelas variáveis de referência, distúrbio na planta e ruído de observação são considerados estatisticamente não-correlacionados). Assim, os objetivos de projeto e os respectivos conflitos existentes podem ser resumidos da seguinte forma:

i. O primeiro objetivo apontado é o da alocação de pólos (o mais à esquerda possível do plano complexo de sua representação). Caso o sistema em malha aberta seja instável, a estabilização através da realimentação passa a ser o principal objetivo do controlador.

Considerando o sistema controlado assintoticamente estável, cujo diagrama de blocos está representado abaixo:

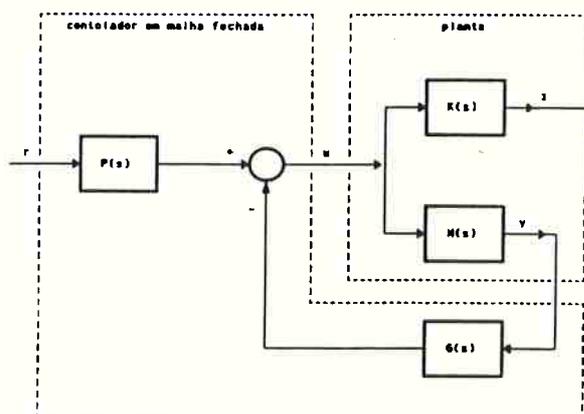


FIGURA 1.1: Diagrama de blocos do sistema de controle em malha fechada.

Introduzindo distúrbios e ruído de observação identicamente nulos e sendo a variável de referência representada pela soma de um vetor estocástico (parte constante) com um vetor que represente um processo estocástico de amplitude estacionária e média nula (parte variável), pode-se estabelecer os seguintes objetivos para o caso SISO (facilmente adaptáveis ao caso MIMO):

ii. Obter pequenos desvios (erros) de trajetória ("tracking error") no regime permanente. Isto é possível fazendo $|T(j\omega) - 1| \leq \epsilon$, onde ϵ é pequeno em relação a 1, para a faixa de frequência que a matriz de densidade espectral de potência da parte variável do sinal de referência ($\Sigma_r(\omega)$) assume valores significantes ($T(j\omega)$ é a transmissão do sistema de controle em malha fechada, isto é, a matriz de transferência da variável de referência para a variável de entrada).

iii. Obter pequenas amplitudes do sinal de entrada no regime permanente. Isto é possível tornando-se $|N(j\omega)|$ suficientemente pequeno sobre a banda de frequência da variável de referência ($N(j\omega)$ é a matriz de transferência do sistema em malha fechada da variável de referência para a variável de entrada).

Verifica-se que os objetivos (ii) e (iii) são conflitantes e deverá ser estabelecido um compromisso entre estes dois requisitos baseado em especificações do sistema de controle.

iv. Com relação à fase transitória, é objetivo do projeto que se tenha o menor "settling time" possível.

v. Com relação aos distúrbios da planta, para reduzir o aumento no erro de trajetória que este efeito causa durante

o regime permanente, considerando-se que a variável escalar controlada também é a observada, $|S(jw)|$ deverá ser pequeno sobre a banda de frequência do distúrbio equivalente na variável controlada (caso o erro constante seja relevante, $S(0)$ deve ser preferencialmente nulo).

A função de sensibilidade é dada por $S(jw) = (1 + H(jw)G(jw))^{-1}$ onde $H(jw)$ é a matriz de transferência do sinal de entrada para a variável observada e $G(jw)$ a matriz de transferência da variável observada para $-u$.

Este objetivo é conflitante com os objetivos i e iii, assim, novamente um compromisso entre os requisitos deverá ser estabelecido.

vi. Para reduzir o aumento na magnitude do sinal de entrada necessário, devido ao distúrbio no sistema, considerando-se que a variável escalar controlada também é a observada, $|G(jw)/(1 + H(jw)G(jw))|$ deve ser pequeno sobre a banda de frequência do distúrbio equivalente na variável controlada. Este objetivo é conflitante com o objetivo v.

vii. Com relação ao ruído de observação, para reduzir o aumento deste efeito no erro de trajetória durante o regime permanente, considerando-se que a variável escalar controlada também é a observada, $|H(jw)G(jw)/(1 + H(jw)G(jw))|$ deverá ser pequeno sobre a banda de frequência do ruído de observação.

Este objetivo também é conflitante com o objetivo v.

viii. Para reduzir o aumento na amplitude do sinal de entrada, $|G(jw)/(1 + G(jw)H(jw))|$ deve ser pequeno sobre a banda de frequência do ruído de observação.

Este objetivo também é conflitante com o objetivo v.

ix. Com relação às incertezas dos parâmetros da planta, este efeito pode ser representado através de uma variação da função de transferência da planta $H(j\omega)$. Para reduzir o erro de trajetória em regime permanente, devido à variação $\Delta H(j\omega)$, considerando-se que a variável escalar controlada também é a observada, a função de sensibilidade nominal $S_o(j\omega)$ deve ser pequena sobre a banda de frequência $|\Delta H(j\omega)N_o(j\omega)|^2 \cdot \Sigma_r(\omega)$, onde $N_o(j\omega)$ também se refere aos valores nominais. Para erros constantes relevantes, $S_o(0)$ deve ser preferivelmente zero quando $\Delta H(0) \cdot N_o(0) \neq 0$.

Os dois trabalhos mencionados acima são muito importantes para justificar a pesquisa aqui desenvolvida. O primeiro por provocar um grande interesse pelo assunto e o segundo pela importância com que salienta a característica predominante num projeto de controle: o conflito entre objetivos; apontando o caminho a ser seguido nesta pesquisa. Assim, no presente trabalho, também dentro de um enfoque de conflito de interesses, pretende-se discutir o valor das matrizes de ponderação no controle linear quadrático aplicado ao problema dos reguladores, limitando-se ao caso determinístico ("L.Q. Case") e à versão em que as matrizes de ponderação são invariantes no tempo e procurando, sempre, caminhar sob a ótica dos problemas de projeto de um controlador. Pretende-se, dessa forma, dar ao projetista do controlador subsídios para selecioná-las, tendo em vista aspectos físicos envolvidos.

A idéia básica do trabalho é explorar o fato de que o índice de desempenho é constituído por uma soma de parcelas que

assumem valores conflitantes, o que torna uma abordagem através de jogos diferenciais, pelo menos em princípio, bastante conveniente.

Foi estabelecido, então, um jogo contendo dois índices de desempenho, gerados a partir do índice linear quadrático, a serem minimizados através de duas variáveis de decisão (jogadores), que, no caso, foram as próprias matrizes de ponderação. Assim, caracterizado o problema por múltiplos objetivos e múltiplos jogadores, partiu-se em busca não mais de solução única, mas de um conjunto de soluções não-inferiores ou Pareto-ótimas.

Dentro deste enfoque, fica claro que, tão importante quanto definir uma lei de controle ótima, via equação de Riccati, é selecionar as matrizes de ponderação que definirão, em última análise, o próprio ganho do sistema.

O problema do regulador foi considerado de duas formas: inicialmente com tempo final tendendo a infinito e, posteriormente, verificando-se a influência sobre os resultados quando a duração do controle é limitada a um certo intervalo de tempo.

Foram consultados muitos artigos na literatura especializada referentes aos chamados jogos diferenciais (sub-conjunto de uma teoria mais abrangente denominada Teoria dos Jogos). Alguns, citados ao longo do texto, contribuíram diretamente para o conteúdo desta pesquisa, outros, porém, foram importantes para o aprendizado do autor, introduzindo conceitos, elucidando dúvidas e principalmente ajudando a situar esta pesquisa no universo de trabalhos realizados dentro da Teoria de Jogos. Assim, alguns destes trabalhos

serão, agora, mencionados.

Embora não tenha sido com o objetivo de estudar a influência das matrizes de ponderação no problema do regulador, o trabalho de KRIKELIS, N.J.; REKASIUS, Z.V. (1971) ref[3], é um bom exemplo da utilização de jogos diferenciais para tratar do problema de controle ótimo com índice de desempenho quadrático em função dos vetores de estado e controle. Naquele trabalho estuda-se uma equação de vínculo dinâmico que possui dois vetores de controle manipulados por dois jogadores com interesses e índices de desempenho quadráticos distintos.

Assim, foram propostos dois problemas de jogos diferenciais: um com soma não-zero e outro de soma zero. Para ambos mostra-se que, no caso de existir uma solução que caracteriza um ponto de sela, as estratégias ótimas dependerão de matrizes que são soluções de uma equação do tipo Riccati.

Outro exemplo interessante de abordagem do problema do regulador, identificando objetivos conflitantes, é o trabalho de KATOPIS, G.A.; LIN, J.G. (1974) ref.[4], onde constata-se que a convexidade da curva que relaciona os dois índices de desempenho escolhidos para o projeto, depende, entre outras coisas, das condições iniciais do problema.

A teoria de jogos diferenciais foi iniciada em 1954 por R. Isaacs através de uma abordagem formal, mas sem uso intensivo da técnica clássica de cálculo variacional. Um tratamento rigoroso baseado no cálculo das variações veio em 1964 com L.D. Berkowitz. Contudo, o primeiro trabalho prático

foi publicado por HO, Y.C.; BRYSON Jr., A.E.; BARON, S. (1965) ref.[5], onde tratou-se do cálculo das estratégias ótimas para o problema do perseguidor e evasor, caracterizando um jogo de soma zero. Dois jogadores com dinâmicas próprias e com interesses diretamente opostos com relação a um índice de desempenho quadrático que leva em conta a distância entre os jogadores e os respectivos limites de energia disponíveis tentam minimizar suas funções-custo.

Tal trabalho deu origem a uma série de outros que procuraram sofisticar as características dos modelos e dos jogos para atenderem diversas situações reais enfrentadas em problemas, tais como: manobras de embarcações, controle de mísseis e anti-mísseis, tráfego de aeronaves, etc. Pode-se citar como exemplo desta linha de pesquisa trabalhos importantes como os de: BEHN, R.D.; HO, Y.C. (1968) ref.[6]; MEIER III, L. (1969) ref.[7]; RHODES, I.B.; LUENBERGER, D.G. (1969) ref.[8]; LEONDES, C.T.; STUART Jr., D.M. (1972) ref.[9]; MEDANIC, J.; ANDJELIC, M. (1972) ref.[10]; FOLEY, M.H.; SCHMITENDORF, W.E. (1974) ref.[11] e SCHMITENDORF, W.E. (1977) ref.[12].

Com a expansão da utilização dos jogos diferenciais nos problemas de engenharia, passou-se a estudar intensamente os seus mais diversos tipos, jogos de soma não-zero, com dois ou mais controladores, com duas ou mais funções-critério, com ou sem cálculo estocástico envolvido, etc.

Os problemas de projeto de otimização de sistema de controle com múltiplos critérios ganharam uma nova ferramenta com a teoria dos jogos e todos os conceitos de solução pertinentes. O trabalho de TABAK, D.; SCHY, A.A.; GIESY, D.P.

e JOHNSON, K.G. (1979) ref. [13] é bastante representativo da utilização desta teoria para o projeto de controle de navegação de aeronaves.

Mais recentemente estão sendo abordados os problemas integrados, como exemplo pode-se citar o trabalho de RAO, S.S.; VENKAYYA, V.B. e KHOT, N.S. (1988) ref. [14], onde é tratado o problema de estruturas ativamente controladas, sujeitas a restrições dos parâmetros de amortecimento do sistema em malha fechada como um problema de multi-objetivos. São tidos como objetivos a serem minimizados: o peso da estrutura e a energia do sistema controlado; para tanto são consideradas variáveis de projeto as áreas das secções transversais dos componentes da estrutura. Em outras palavras, pode-se dizer que o objetivo de um sistema de controle ativo de vibração é permitir que grandes estruturas, com baixo peso, tenham seus problemas de vibração eliminados ou reduzidos a um nível razoável.

Finalmente, cabe ressaltar que tem sido crescente a publicação de trabalhos utilizando os conceitos da teoria de jogos para tratar os problemas de controle e principalmente de projeto integrado, mostrando ser esta uma ferramenta muito útil na abordagem de problemas de otimização.

O trabalho foi organizado em oito capítulos e dois anexos (A e B), sendo este o capítulo introdutório.

O capítulo 2 apresenta o problema enfocado e os principais aspectos apontados no trabalho de ATHANS (1971), salientando as dificuldades da seleção das matrizes de ponderação do índice de desempenho linear quadrático.

O capítulo 3 introduz uma série de conceitos e definições relacionados à Teoria de Jogos Diferenciais. Alguns de carácter elucidativos, outros dirigidos especificamente para a caracterização do jogo que será definido no tratamento do problema e, portanto, muito importantes com relação à natureza das soluções a serem encontradas.

O capítulo 4 discute a definição do jogo a ser proposto para o problema geral (caso MIMO) e apresenta a solução para o caso SISO que, como pode ser visto, caracteriza um jogo de soma-zero, ou seja, não cooperativo.

O capítulo 5 estuda o problema do regulador para o caso em que o tempo final não tende a infinito (como ocorre no capítulo anterior), ou seja, tempo final finito. São tratados os casos em que o ganho de realimentação é invariante no tempo em que o ganho é gerado a partir da solução da equação diferencial de Riccati. Outro aspecto importante tratado no capítulo é com relação à "qualidade" das soluções encontradas quando se mudam as variáveis de decisão.

O capítulo 6 trata do problema da robustez relacionada à sensibilidade do sistema. Neste capítulo foi possível derivar uma inequação que estabelece, para o caso MIMO, a condição necessária para garantir tal propriedade. O capítulo também mostra graficamente, para o caso SISO, a limitação imposta, no plano das variáveis de decisão, à região de soluções factíveis ao projeto.

O capítulo 7 dedica-se ao caso MIMO. Para este caso o jogo passa a ter a característica cooperativa, assim, é apresentado um programa de seleção de matrizes de ponderação

que fornece soluções Pareto-ótimas para o problema. Além disso, o capítulo aborda os aspectos de robustez quanto à sensibilidade e estabilidade e apresenta uma maneira de como tratar da alocação de pólos, caso esta seja necessária.

O capítulo 8 apresenta os comentários e conclusões, sugerindo pontos a serem abordados num eventual prosseguimento da pesquisa.

O anexo A mostra um resumo dos métodos numéricos existentes para determinação do conjunto Pareto-ótimo.

Finalmente, o anexo B apresenta o diagrama de blocos do programa de seleção de matrizes de ponderação discutido no capítulo 7.

2. O Controle Linear-Quadrático

2.1 Definição do problema enfocado

O problema do regulador linear quadrático determinístico ótimo consiste em encontrar uma função $u^o(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$, para a qual o critério:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) * Q(t) * x(t) + u^T(t) * R(t) * u(t)] dt + x^T(t_f) * F * x(t_f) \quad (2.1)$$

(onde: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado ou perturbação de estado, pois será considerado como o estado de referência ou equilíbrio desejado o estado zero ($x_r(t) \equiv 0$), $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle da planta, F é uma matriz simétrica não-negativa definida e Q e R são matrizes simétricas positivas-definidas para $t_0 \leq t \leq t_f$), seja mínimo e satisfaça as seguintes restrições:

a) Vínculo dinâmico dado por:

$$\dot{x}(t) = A(t) * x(t) + B(t) * u(t) \quad (2.2)$$

onde:

$A(t)$ é uma matriz $n \times n$ cujos componentes são funções contínuas de t e,

$B(t)$ é uma matriz $n \times m$ cujos componentes são funções pelo menos contínuas por partes de t .

b) Condição inicial dada por:

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.3)$$

O caso em que as matrizes A, B, Q e R, da formulação acima, são constantes, é chamado de problema do regulador linear quadrático determinístico ótimo invariante no tempo.

Observe que o problema acima é definido partindo-se da hipótese de que as matrizes de ponderação Q, R e F são conhecidas pelo projetista do controlador, o que, na prática, via de regra, não é verdade.

Restringindo-se a análise ao problema invariante no tempo, para os casos em que $t_f \rightarrow \infty$, portanto $x(t_f) = x_f = 0$ (2.4a); e para $t_f = T$ (finito) com $x(t_f) = x_f \approx 0$, acrescentando-se o vínculo terminal $x(t_f) \leq x^*$ (2.4b), onde x^* é o limite máximo de aceitação para o estado final do sistema, pode-se simplificar o índice de desempenho apresentado, eliminando-se o último termo $[x^T(t_f) * F * x(t_f)]$, ficando:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) * Q * x(t) + u^T(t) * R * u(t)] dt \quad (2.5)$$

E o vínculo dinâmico associado passa a ser escrito,

$$\dot{x}(t) = A * x(t) + B * u(t) \quad (2.6)$$

Neste trabalho pretende-se estudar a influência da escolha de Q e R no comportamento do regulador linear determinístico invariante no tempo, para sistemas completamente controláveis, com índice de desempenho quadrático definido por (2.5) e vínculos definidos por (2.6), (2.3), (2.4a) e (2.4b). Assim, pode-se apontar como principal objetivo deste trabalho discutir a seleção destas matrizes, o seu significado físico e obter o conjunto de melhores opções.

2.2 Seleção das matrizes de ponderação

Segundo ATHANS (1971), a seleção das matrizes de ponderação do critério linear quadrático não é um problema simples. Normalmente são selecionadas pelo projetista baseado na sua experiência de engenharia e simulando diversos valores (tentativa e erro), pois não existe um consenso universal a respeito de quais valores devem ser utilizados para uma determinada aplicação. Desta forma, alguns pesquisadores procuram estabelecer, para problemas específicos, regras para os valores relativos entre seus componentes.

Na maioria das aplicações, estas matrizes são selecionadas como diagonais, para que componentes específicos do vetor de estado e de controle possam ser penalizados individualmente, o que facilita o projetista na determinação relativa destes pesos. Além disso, como escolha inicial para os elementos da diagonal de R e Q são, via de regra, adotadas como:

$$r_{i,i}=1/[(u_{\max.})_{i,i}]^2 \text{ e } q_{i,i}=1/[(x_{\max.})_{i,i}]^2$$

onde: $(u_{\max.})_{i,i}$ representa a máxima magnitude de controle permitida ao projeto, para o correspondente grau de liberdade e $(x_{\max.})_{i,i}$ a máxima magnitude do estado permitida ao projeto, para o correspondente grau de liberdade.

O projetista adota tais matrizes e através de simulações e análise do comportamento dinâmico do sistema é feito o ajuste destes coeficientes.

Baseado na dependência da equação de Riccati com relação a estas matrizes, pode-se estabelecer certas propriedades qualitativas que, de forma pragmática, podem ajudar o projetista:

- i. Quanto maior $\|F\|$, maior a matriz de ganho de realimentação para instantes próximos do instante final.
- ii. Quanto maior $\|Q(t)\|$, maior a matriz de ganho de realimentação e mais rapidamente o vetor de estado será reduzido a valores pequenos (aumentando $Q(t)$ resulta no aumento da largura de banda do sistema em malha fechada).
- iii. Quanto maior $\|R\|$, menor a matriz de ganho de realimentação e mais lenta será a resposta do sistema.
- iv. É preciso, também, ter em mente que, quando o vetor de estado contém algumas variáveis e suas respectivas derivadas com relação ao tempo, se a matriz $Q(t)$ for tal que não penalize estas derivadas, o sistema será mais oscilatório.
- v. O trabalho escrito por ATHANS (1971) ref.[1] considera um sistema dinâmico genérico, não-linear, dado por:
 $dx(t)/dt=f(x(t),u(t))$.

Expandindo-se por série de Taylor o lado direito desta expressão pode-se escrever:

$$f(x(t),u(t))=A.x(t)+B.u(t)+k(x(t),u(t)),$$

onde $k(x(t),u(t))$ é um termo de alta ordem (nulo para o modelo linearizado).

Usando-se o teorema de Taylor que permite truncar uma série de Taylor para um ponto arbitrário, pode-se representar o termo de alta ordem da expressão acima de maneira exata através da seguinte expressão:

$$k(x(t),u(t)) = 1/2 \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot x^T(t) \cdot \left[\frac{\partial^2 f_i(\cdot)}{\partial x^2(t)} \right]_{\cdot} \cdot x(t) +$$

$$+ u^T(t) \cdot \frac{\partial^2 f_i(\cdot)}{\partial u^2(t)} \Big|_{\cdot} \cdot u(t) + 2 \cdot x^T(t) \cdot \frac{\partial^2 f_i(\cdot)}{\partial x(t) \cdot \partial u(t)} \Big|_{\cdot} \cdot u(t)$$

onde: ϕ_i são os vetores da base em R_n .

Observe que esta expressão é quadrática em x e u com os respectivos coeficientes: $\partial^2 f_i(\cdot) / \partial x^2(t) \Big|_{\cdot}$ e $\partial^2 f_i(\cdot) / \partial u^2(t) \Big|_{\cdot}$; onde $x_{\cdot}(t)$ e $u_{\cdot}(t)$ são desconhecidos e em geral diferentes de $x_r(t)$ -trajetória ideal determinística ou trajetória de referência (da maneira como o problema em questão foi definido $x_r \equiv 0$) e $u_r(t)$ -entrada ideal para rastreamento da trajetória (da maneira como o problema em questão foi definido $u_r \equiv 0$).

Assim, utilizar o índice de performance linear-quadrático pode ser justificado como tendo o objetivo de validar o modelo linearizado tornando-o tão "honesto" quanto possível, uma vez que é selecionado um $u(t)$ que minimiza este termo de alta ordem. Por este ponto de vista, aponta-se que o tamanho de $Q(t)$ deva ser proporcional a $\partial^2 f_i / \partial x^2(t)$ e $R(t)$ proporcional a $\partial^2 f_i / \partial u^2(t)$, onde estimativas destas derivadas podem ser frequentemente obtidas desenvolvendo-as para valores nominais $x_r(t)$ e $u_r(t)$. É importante notar, também,

que encontrar o $u(t)$ que torne mínima $\int_{t_0}^T \|k(x(t), u(t))\| dt$ não

garante necessariamente que o modelo linearizado adotado seja suficientemente preciso para os seus propósitos; mais ainda, que a parcela $k(x(t), u(t))$ da equação de estado do modelo não-linear seja pequena.

vi. Outra avaliação para as matrizes de ponderação pode ser

obtida estudando-se as vizinhanças do controle ótimo, admitindo-se que o controle e estado reais são ligeiramente diferentes dos ótimos e obtendo o aumento que isto causa no índice de performance J , o que pode ser aproximadamente medido através de sua segunda variação ($\delta^2 J$). Desta forma, chega-se a expressões para F, Q e R mas que, também, implicam numa série de restrições, tais como: a não garantia de existência e unicidade destas matrizes, bem como a não consideração de termos de ordem superiores à segunda variação do índice J .

3. Alguns conceitos importantes

3.1 Considerações gerais

Será pesquisada a solução para o problema definido no capítulo 2 utilizando-se a teoria de jogos. Para tanto, o problema será formalizado adequadamente no capítulo 4, através dos três elementos básicos de um jogo: a definição das funções critério, dos jogadores e a informação disponível a estes. Todavia, antes de fazer esta abordagem é conveniente introduzir alguns conceitos.

É do fim do século passado, PARETO (1896) apud BRANCO (1983) ref[15], a descrição inicial de um problema de otimização envolvendo mais do que uma simples função objetivo. Outros trabalhos, também da área de Economia, foram pioneiros na utilização prática da teoria de jogos em problemas de otimização envolvendo indivíduos com diferentes interesses. Como exemplo, os chamados problemas de "barganha", NASH (1950) ref[16], onde alguns conceitos importantes foram estabelecidos.

Pode-se conceituar de jogo o enfoque sob o ponto de vista matemático do problema envolvendo dois ou mais indivíduos que tenham interesses conflitantes.

É chamado de jogo cooperativo aquele em que os interesses não são completamente opostos e os indivíduos são supostamente capazes de discutir e de maneira racional chegar a um acordo. O caso em que os interesses são diametralmente opostos, não existindo a possibilidade de cooperação, é chamado de jogo não cooperativo ou jogo de

soma zero.

Com a evolução dos estudos para tratar os problemas de otimização (tanto estáticos como dinâmicos), dentre eles a Teoria de Jogos, surgiu a necessidade de classificá-los para que fosse possível estabelecer relações entre eles.

Assim, no trabalho apresentado por HO (1970) ref[17] foi proposto que se agrupassem estes problemas segundo seus três elementos básicos, como já mencionado acima: a função-critério, o controlador (jogador) e a informação disponível aos jogadores.

Para a função-critério, tem-se a seguinte sub-divisão:

- 1a. apenas uma função-critério J_1 .
- 1b. duas funções-critério com $J_1 = -J_2$.
- 1c. múltiplas funções-critério $J_i; i=1, \dots, n$.

Para o controlador,

- 2a. um controlador.
- 2b. dois controladores.
- 2c. múltiplos controladores.

E quanto ao conjunto de informações,

- 3a. um conjunto de informações perfeito,
- 3b. um conjunto de informações imperfeito (com ruído).
- 3c. múltiplos ou incompletos conjuntos de informações.

Esta classificação, chamada de "Generalized Control Theory" (G.C.T.), tinha por objetivo englobar a Teoria de Jogos Diferenciais (iniciada em 1954 por R. Isaacs como extensão da Teoria de Jogos para o caso dinâmico) e a Teoria de Controle Ótimo numa teoria mais abrangente, que considerasse, inclusive, problemas estáticos de otimização. Por esta proposta, o problema de jogos diferenciais de soma zero, por

exemplo, teria um título mais descritivo: 2C/2J/1I.

O que se pode constatar, na literatura mais recente, é que esta terminologia não é usada e aparentemente não houve ainda grande repercussão à tese defendida. Na verdade, é extremamente importante englobar os problemas de otimização através de uma teoria geral, todavia, a falta de uma solução geral faz com que os problemas continuem sendo tratados de forma personalizada e as diversas teorias sejam complementares umas das outras.

É preciso fazer uma diferenciação entre múltiplo critério, múltiplo objetivo e múltiplo atributo, termos freqüentemente usados na literatura e que têm significados específicos.

Múltiplo critério é usado de forma genérica englobando os termos múltiplo objetivo e múltiplo atributo.

Múltiplo atributo é usado para designar problemas cujo número de alternativas é limitado e pré determinado. Trata-se de um processo de seleção, escolha, bastante distinto do que ocorre num processo de projeto.

Múltiplo objetivo é empregado para os problemas com infinitas alternativas de solução, onde a melhor pode ser encontrada dentro de um domínio factível para o problema em questão. É o caso do problema aqui abordado, bem como da grande maioria dos problemas de engenharia de projeto que tem um conjunto de objetivos quantificáveis, um conjunto bem definido de vínculos e um processo para a obtenção do intercâmbio de informações.

Nos problemas de multi-critérios ou multi-objetivos o conceito de não-inferioridade ou não-dominação ou soluções Pareto-ótimas, substitui as noções de otimalidade dos

problemas com um único objetivo.

3.2 Definição de soluções em problemas de multi-critério e conceituação de exclusividade na relação jogador/critério

Considere o problema com dois critérios (objetivos) e dois controladores, sendo u_1 e u_2 duas variáveis escalares de controle. Além disso, considere que a cada objetivo está associado um jogador; o primeiro procurando encontrar u_1 que minimize sua função objetivo associada, por exemplo J_1 , e o segundo procurando u_2 que torne J_2 mínimo. Assim, $J_1=J_1(u_1, u_2)$ e $J_2=J_2(u_1, u_2)$.

Assumindo serem lisos os contornos $J_1=K_1$ e $J_2=K_2$ (K_1 e K_2 constantes) do espaço $u_1 u_2$, pode-se, conforme mostra a figura (3.1), identificar as seguintes linhas:

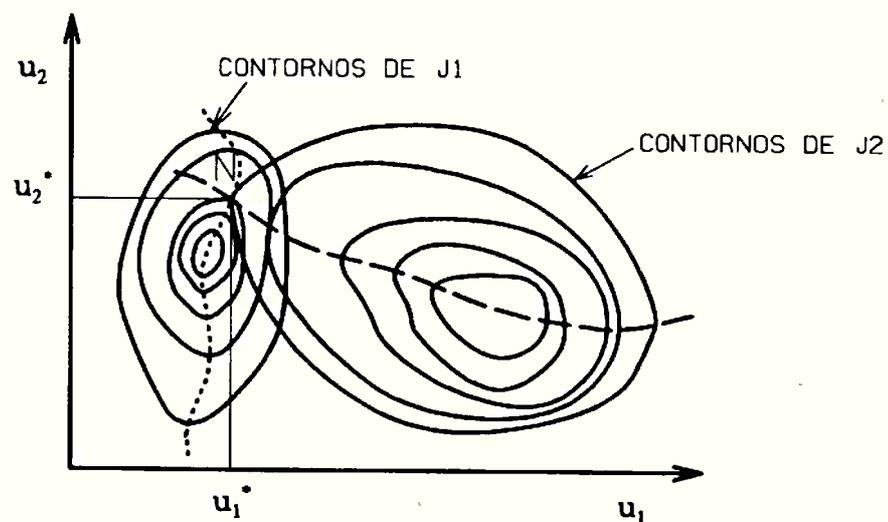


FIGURA 3.1: Linhas de contorno de J_1 e J_2 .

1- A linha pontilhada corresponde ao local de escolha

racional (mínimo J_1) de u_1 , para cada valor de u_2 fixado.

2- A linha tracejada corresponde ao local de escolha racional (mínimo J_2) de u_2 , para cada valor de u_1 fixado.

A intersecção destas duas linhas, se existir, é candidata à solução do problema de minimização onde não existe cooperação. É um ponto de equilíbrio estável no sentido que nenhum jogador, sendo racional, pode afastar-se dele unilateralmente.

Este ponto é conhecido como solução de equilíbrio NASH para o jogo de soma não-zero (caso o jogo seja não-cooperativo, ele coincide com a solução de ponto de sela).

Para um espaço de dimensão n , a solução NASH u_i^* , $i=1,2,\dots,n$; é definida por:

$$J_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_i^*, \dots, u_n^*) \leq J_i(u_i^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_n^*) \\ \forall u_i, i=1,2,\dots,n. \quad (3.1)$$

Como pode ser visto, o ponto N atende as condições desta definição, ou seja,

$$J_1(u_1^*, u_2^*) \leq J_1(u_1, u_2^*) \text{ e } J_2(u_1^*, u_2^*) \leq J_2(u_1^*, u_2).$$

Considerando-se, agora, o jogo em que não existe uma relação de exclusividade entre a variável de controle e o jogador, ou seja, o jogador 1 utiliza tanto u_1 como u_2 para minimizar seu custo (função objetivo). Neste caso, pode-se ter mais que uma solução NASH não implicando que J_1 e J_2 sejam os mesmos para os diferentes pontos NASH (o jogo que será definido no capítulo 4, terá esta característica).

A figura (3.2) mostra as seguintes linhas de interesse:

l_1 , linha de melhor escolha de u_1 em relação à J_1 .

l_2 , linha de melhor escolha de u_2 em relação à J_1 .

l_3 , linha de melhor escolha de u_1 em relação à J_2 .

l_4 , linha de melhor escolha de u_2 em relação à J_2 .

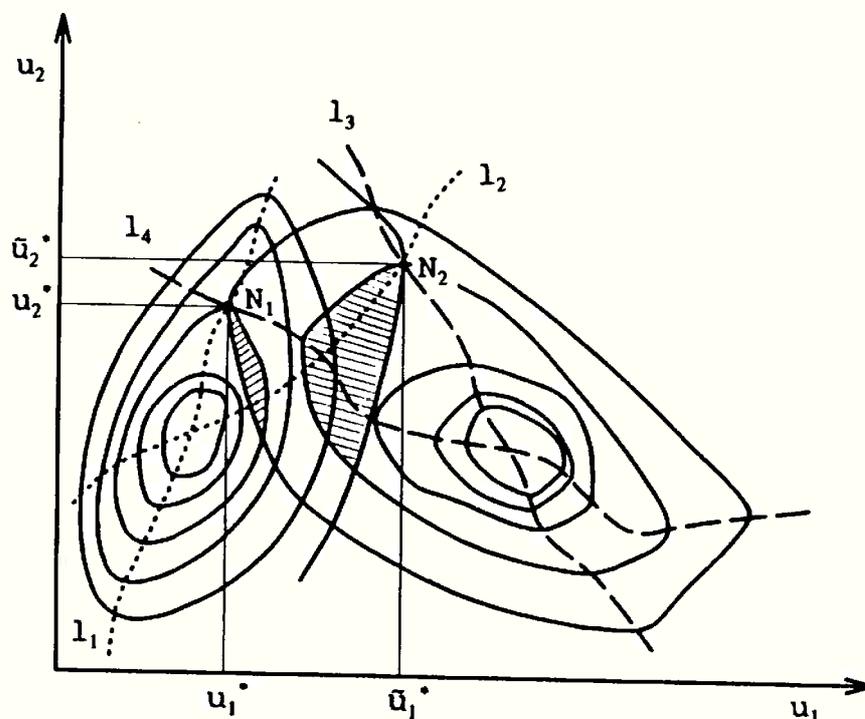


FIGURA 3.2: Identificação dos pontos NASH.

Das intersecções de l_1 com l_4 , ocorre N_1 e de l_3 com l_2 , N_2 .

$$N_1: J_1(u_1^*, u_2^*) \leq J_1(u_1, u_2^*)$$

$$J_2(u_1^*, u_2^*) \leq J_2(u_1^*, u_2)$$

$$N_2: J_1(\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*) \leq J_1(\bar{u}_1^*, u_2)$$

$$J_2(\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*) \leq J_2(u_1, \bar{u}_2^*)$$

Pela figura (3.2) nota-se que (J_1, J_2) relacionado com N_1 é diferente de (J_1', J_2') relacionado com N_2 , podendo eventualmente serem iguais, no caso particular dos contornos de J_1 e J_2 serem circunferências.

A idéia por trás disto reside na possibilidade de um dos jogadores ter prioridade ou privilégio de opção para direcionar o jogo ao ponto de equilíbrio NASH que melhor lhe

convém.

Ainda com relação ao gráfico (3.2), pode-se observar a existência de duas áreas sombreadas que correspondem às regiões onde se obtêm melhores soluções para ambos critérios em relação aos valores dos seus respectivos pontos NASH. Trata-se das regiões onde encontram-se as soluções factíveis para um jogo cooperativo.

Definição: Uma solução factível para o problema de otimização com multi-critério é chamada Pareto-ótima se não existir outra solução factível capaz de melhorar o valor de uma função objetivo sem piorar o valor de pelo menos uma das outras funções.

A linha O_1O_2 , representada na figura (3.3), é definida pelo lugar geométrico dos pontos tangentes entre os contornos de J_1 e J_2 .

Note que qualquer desvio de um ponto situado sobre esta linha não resulta na melhoria simultânea para os valores de J_1 e J_2 ; assim, estes pontos constituem o conjunto Pareto-ótimo para o problema (Λ).

Matematicamente escreve-se:

$u_i^*(i=1, \dots, n) \in \Lambda$ se e somente se, para qualquer outro $u=[u_1, \dots, u_n]$,

$$J_i(u) \leq J_i(u^*) \quad (i=1, n) \Rightarrow J_i(u) = J_i(u^*) \quad (3.2)$$

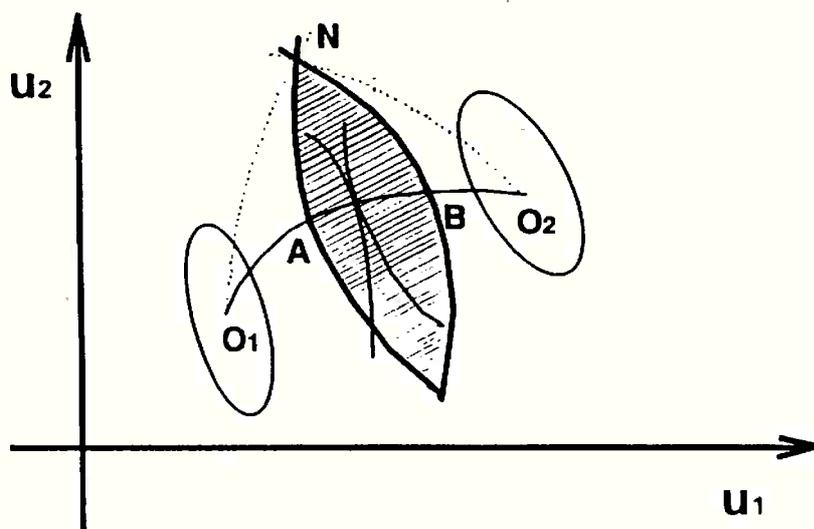


FIGURA 3.3: Conjunto Pareto-ótimo.

Nota: A diferença entre o valor **NASH** e o valor **minimax** é que no primeiro a estratégia é adotada partindo-se do princípio que os demais jogadores tomarão decisões racionais, isto é, tentarão minimizar suas funções-custo. Já no segundo caso, a estratégia de um jogador prevê um jogo em que os adversários atuem de forma irracional, em outras palavras, não se tem certeza de como os rivais selecionarão suas estratégias, devendo-se, então, assumir que adotarão o pior conjunto possível de estratégias, ou seja, ao invés de tentarem minimizar seus próprios custos, tentarão maximizar os custos dos outros.

Os conceitos acima não se limitam ao caso estático, podem ser aplicados diretamente ao caso dinâmico.

Dado o sistema dinâmico $dx/dt=f(x,u,t)$ e chamando de $u^o=[\psi_1(x,t), \psi_2(x,t), \dots, \psi_n(x,t)]$ a estratégia com realimentação Nash para todos os jogadores; então, usando a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman e a definição (3.1),

pode-se escrever a variação temporal do i -ésimo custo ótimo J_i^o :

$$-\partial J_i / \partial t = \min_{u_i} [H_i(x, \partial J^o / \partial x, \psi_1, \dots, u_i, \dots, \psi_n, t)] \quad (3.3)$$

onde H_i é a Hamiltoniana definida para o i ésimo jogador, ou seja, a solução Nash u^o é também a solução Nash para $H = (H_1, H_2, \dots, H_n)$ para todo t .

3.3 Determinação do conjunto Pareto-ótimo

A parte do conjunto Pareto-ótimo contida dentro da área hachurada da figura (3.3), isto é, o arco AB, é o sub-conjunto Pareto-ótimo que realmente interessa para a solução do problema.

Representando no plano $J_1 J_2$ todos os possíveis valores de $J_1(u)$ e $J_2(u)$ limitados pela área hachurada mencionada acima, pode-se obter uma região limitada convexa ou não. Determinar nessa região o sub-conjunto Pareto-ótimo significa encontrar o mínimo $J_1(u)$ sujeito à restrição $J_2(u) - p \leq 0$ ou, de maneira equivalente, o mínimo $J_2(u)$ sujeito à restrição $J_1(u) - q \leq 0$ (p e q maiores que zero).

Na figura (3.4), onde está representada uma região não-convexa (caso mais geral) de $J_1 J_2$, o conjunto Λ está identificado pela linha pontilhada.

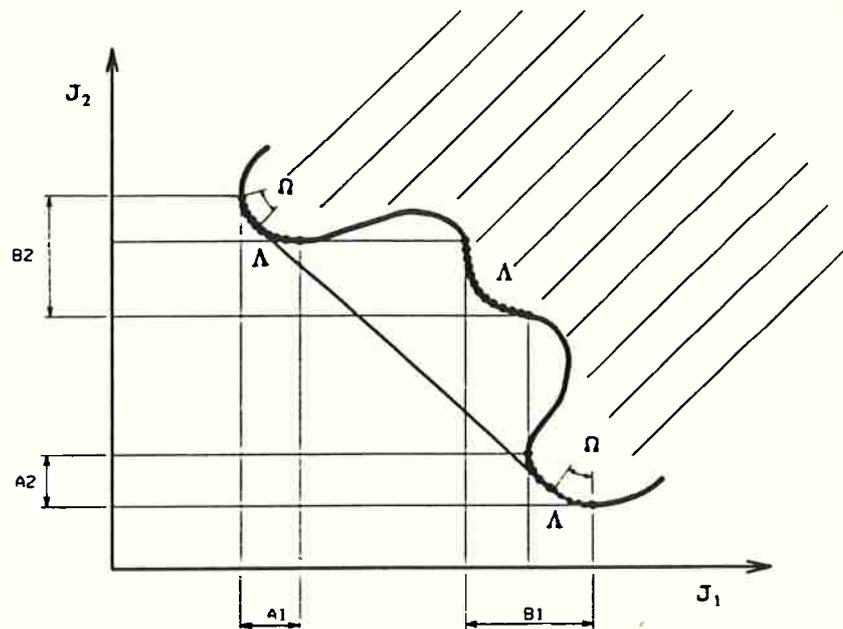


FIGURA 3.4: Conjunto Λ representado no plano $J_1 \times J_2$.

Observe que apenas os intervalos a_1, b_1 de J_1 e a_2, b_2 de J_2 determinam o conjunto Λ .

Dos algoritmos desenvolvidos para se determinar o conjunto Λ , destacam-se três: Método das ponderações, Estimação do conjunto não-inferior e Método das restrições.

O Método das ponderações, a exemplo dos demais, transforma o problema de multi-critério em um problema escalar de otimização com um único critério no qual a função-objetivo é definida pela soma ponderada das outras.

Assim, o problema se resume em encontrar:

$$\text{Min}_u \sum_{i=1}^n w_i J_i \quad (3.4)$$

com $w_i \geq 0$; $i=1, \dots, n$ e $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

No caso de duas funções-objetivo:

$$\text{Min}_u [w_1 J_1(u) + w_2 J_2(u)]; \quad w_1, w_2 \geq 0 \quad \text{e} \quad w_1 + w_2 = 1$$

Este método, quando aplicado a uma região delimitada por uma relação $J_1 \times J_2$, não convexa, não fornece necessariamente todos os pontos de Λ . Isto porque, cada par (w_1, w_2) fornece o ponto tangente da reta com inclinação $(-w_1/w_2)$ com a curva $J_1 J_2$. Desta forma, apenas parte de Λ (aquela que está contida no invólucro convexo de $J_1 J_2$) é selecionada. Na figura (3.4), por exemplo, obtém-se apenas os pontos do conjunto Ω (subconjunto de Λ) indicados pela linha tracejada.

Para o caso particular em que um ou mais pesos forem nulos, se existirem alternativas ótimas, então, algumas podem não ser soluções Pareto-ótimas, exigindo, portanto, que as soluções sejam checadas. Por outro lado, quando todos os pesos são estritamente positivos a solução será Pareto-ótima.

O método de estimação do conjunto não-inferior é um algoritmo que permite encontrar uma boa aproximação do conjunto Pareto-ótimo de maneira rápida e eficiente, tendo como principal desvantagem a impossibilidade de gerar um conjunto Pareto não convexo. A principal característica do método é que a precisão da aproximação pode ser controlada através do chamado critério do erro.

Em linhas gerais, o método consiste em se partir de duas soluções individuais (que podem ser obtidas através do uso do método de ponderações) e em seguida limitar o espaço que as soluções intermediárias podem ocupar, segundo uma porcentagem máxima de desvio (ou erro) em relação a um valor pré-determinado que seria o erro máximo possível de

acontecer (como referência para este método, pode-se indicar BALACHANDRAN; GERO (1984) ref[18]).

O método das restrições, ao contrário dos demais citados, consegue obter todo perfil de um conjunto Pareto-ótimo, mesmo sendo o conjunto delimitado por uma relação $J_1 \times J_2$, não-convexa.

O método consiste em tomar uma função-objetivo como principal e tratar as demais (n-1) como vínculos.

Assim, o problema transforma-se na determinação de:

$\text{Min}_u J_j(u)$; com $u \in U$; $J_i(u) \leq b_i$; $i=1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,n$;

onde o j-ésimo objetivo foi arbitrariamente escolhido para a minimização e os b_i são os limites superiores dos restantes n-1 objetivos. A figura (3.5) exemplifica para o caso em que há duas funções-objetivo.

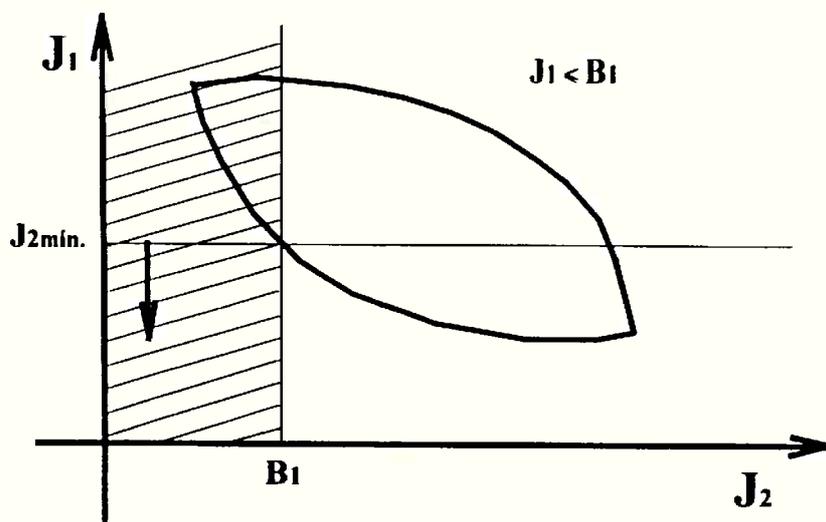


FIGURA 3.5: Método das restrições.

Com o aumento do espaço dimensional, este método torna-se excessivamente ineficiente para gerar a hiper-superfície Pareto-ótima.

4. Formalização da solução do regulador, via Teoria dos Jogos

4.1 Considerações iniciais

Tomando-se o índice de desempenho dado pela equação (2.5) observa-se que o integrando é formado por uma soma de dois termos, onde o primeiro termo, a quantidade $x^T(t) * Q * x(t)$, é proporcional ao desvio, afastamento ou erro do estado, num instante t , em relação à referência (estado zero).

Assim, a integral desta parcela ao longo do intervalo $[t_0, t_f]$ apresenta um valor acumulativo deste desvio, traduzindo uma medida relativa da precisão da trajetória.

Por outro lado, a segunda parcela $u^T(t) * R * u(t)$ está associada à potência exigida do atuador num determinado instante t que, quando integrada no intervalo $[t_0, t_f]$, fornece um valor proporcional à energia gasta pelo controlador KATOPIS; LIN (1974) ref.[4].

Assim, em princípio, por ser uma maneira natural e intuitiva de se definir o jogo, estas duas parcelas serão adotadas como funções-critério I_x e I_u , respectivamente. Todavia, como será visto, estas funções levarão a resultados inconsistentes com relação ao comportamento antagônico dos jogadores, requerendo uma redefinição do jogo (ítem 4.2).

É intuitivo que para um maior gasto de energia de controle consegue-se maior precisão na trajetória de estado, o que equivale dizer que, quando a segunda parcela aumenta, a primeira diminui e vice-versa. Como é de interesse do projetista obter o menor J possível, o ideal seria poder

minimizar simultaneamente as duas parcelas, não sendo possível, fica caracterizado um conflito e deve-se estabelecer um compromisso entre estas duas quantidades. Assim, tal situação pode ser descrita através do seguinte jogo: considere dois jogadores com índices de desempenho I_x e I_u dados por:

$$I_x = \int_0^{\infty} x^T(t) * Q * x(t) dt \quad (4.1)$$

e

$$I_u = \int_0^{\infty} u^T(t) * R * u(t) dt \quad (4.2);$$

podendo manipular, respectivamente, as matrizes Q e R para minimizar os seus índices, ou seja, $I_x = I_x(x, Q)$ (4.3) e $I_u = I_u(u, R)$ (4.4). Procura-se, então, a solução de:

$$\min_{(R, Q)} [I_x = \int_0^{\infty} x^T(t) * Q * x(t) dt] \quad (4.5)$$

$$\min_{(R, Q)} [I_u = \int_0^{\infty} u^T(t) * R * u(t) dt] \quad (4.6)$$

Sujeitos ao vínculo dinâmico dado por (2.6) e à condição inicial dada por (2.3).

Do vínculo dinâmico pode-se reescrever (4.3) e (4.4) para uma dada condição inicial como:

$$I_x = I_x(u, Q) \quad (4.7) \quad \text{e} \quad I_u = I_u(u, R) \quad (4.8).$$

Além disso, considerando-se uma realimentação linear de estado ($u = -K \cdot x(t)$), onde a equação de Riccati é satisfeita,

ou seja, o ganho $K=f(Q,R)$; pode-se reescrever (4.7) e (4.8) como: $I_x=I_x(Q,R)$ (4.9) e $I_u=I_u(Q,R)$ (4.10). Vale lembrar que satisfazer a equação de Riccati é condição necessária para garantir a otimalidade de $u(t)$ fixado um par (Q,R) .

Definindo o vetor $\gamma=(\gamma_1, \gamma_2) \triangleq (I_x, I_u)$ e chamando de Γ o conjunto de todos os vetores $\gamma=(I_x, I_u)$ correspondentes aos possíveis valores que os pares (R,Q) podem assumir, em geral não existe um vetor mínimo γ ($=\gamma_m$) onde $\gamma_m \leq \gamma, \gamma \in \Gamma$; contudo, existe pelo menos uma solução não-inferior, ou seja, não existe $\gamma \in \Gamma | \gamma \leq \gamma^*$ e $\gamma \neq \gamma^*$ (γ^* = solução não-inferior). Note que está excluído o vetor $\gamma=(0,0)$ uma vez que $R>0$ e $Q>0$.

Para resolver o problema proposto, inicialmente fixa-se um valor de $I_u=I_u^*$ e procura-se a curva de menor valor de I_x que a tangencie (conforme figura 3.1), ou seja:

$$I_x^* \triangleq \min_{(R,Q)} [I_x = \int_0^{\infty} x^T(t) * Q * x(t) dt] \rightarrow I_u = I_u^* \quad (4.11)$$

satisfazendo o vínculo dinâmico, terminal e a equação de Riccati.

Existem três possibilidades para o par (I_x^*, I_u^*) :

Ser uma solução não-inferior do problema, ser a solução de mínimo ou simplesmente não ser uma solução. Para classificá-la é necessário variar o valor de I_u^* fazendo uma varredura no domínio desejado, a fim de que se possa determinar o subconjunto Λ de todo o conjunto (I_x^*, I_u^*) no plano $I_x \times I_u$, ou, se for o caso, a solução de mínimo.

Para determinar o valor de I_x^* , dado um $R=R^{\square}$, encontra-se o Q^{\square} que provoca o menor I_x ($=I_x^{\square}$). O par $(Q^{\square}, R^{\square})$ fornece, então, a seguinte lei de realimentação:

$u^\square(t) = -R^{\square-1} \cdot B^T \cdot S^\square \cdot x(t)$, onde S^\square é a solução da equação de Riccati associada à (Q^\square, R^\square) .

Por estas matrizes pode-se escrever a expressão de I_u^\star como:

$$I_u^\star = \int_0^\infty [(R^{\square-1} \cdot B^T \cdot S^\square \cdot x)^T \cdot B^T \cdot S^\square \cdot x] dt \quad (4.12)$$

Para eliminar o vetor de estado na equação (4.12) utiliza-se a equação de vínculo dinâmico integrada ao longo do tempo, chegando-se à seguinte expressão:

$$x(t) = e^{\phi(S^\square) \cdot t} \cdot x(0) \quad (4.13), \text{ onde: } \phi(S^\square) = A - B \cdot R^{\square-1} \cdot B^T S^\square \quad (4.14)$$

Desta forma, pode-se reescrever I_u^\star :

$$I_u^\star = \int_0^\infty [(R^{\square-1} \cdot B^T \cdot S^\square \cdot e^{\phi(S^\square)t} \cdot x(0))^T \cdot B^T \cdot S^\square \cdot e^{\phi(S^\square)t} \cdot x(0)] dt \quad (4.15)$$

É possível, então, encontrar S^\square que satisfaça a equação acima e com o auxílio da equação de Riccati, que relaciona Q^\square, R^\square e S^\square , obtém-se o valor de Q^\square e consequentemente I_x^\square .

$$Q^\square = -(S^\square + S^\square \cdot A + A^T S^\square - S^\square \cdot B \cdot R^{\square-1} \cdot B^T \cdot S^\square), \quad (S^\square = 0, \text{ reg. permanente}) \quad (4.16)$$

Chamando de Q^\star e R^\star as matrizes de ponderação que provocam I_x^\star , pode-se escrever:

$$I_x^\star = \int_0^\infty (x^T \cdot Q^\star \cdot x) dt \quad (4.17)$$

Pode-se, então, estudar a variação de I_x com relação aos elementos de R : $\partial I_x / \partial r_{ij}$ ($i=1, n; j=1, n$).

Assim, simbolicamente será indicada nas expressões seguintes df/dR a variação de f com relação a todos elementos de R , onde: $f \equiv I_x, I_u, x, Q^*, S^*$ (4.18)

Assim, a condição necessária de mínimo implica em:

$$dI_x/dR = 0 \quad (R=R^*, I_u=I_u^* \text{ e } I_x=I_x^*) \quad (4.19)$$

Desenvolvendo a equação (4.19) tem-se:

$$\int_0^{\bar{t}} \left(\frac{dx^T}{dR} \cdot Q^* \cdot x + x^T \cdot \frac{dQ^*}{dR} \cdot x + x^T \cdot Q^* \cdot \frac{dx}{dR} \right) dt = 0 \quad (4.20)$$

onde:

$$\frac{dx}{dR} = e^{\phi(s^*)t} \cdot x(0) \cdot (B \cdot R^{\star-2} \cdot B^T \cdot S^* - B \cdot R^{\star-1} \cdot B^T \cdot \frac{dS^*}{dR}) \cdot t \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ^*}{dR} = & - \left(\frac{dS^*}{dR} \cdot A + A^T \cdot \frac{dS^*}{dR} - \frac{dS^*}{dR} \cdot B \cdot R^{\star-1} \cdot B^T \cdot S^* + \right. \\ & \left. + S^* \cdot B \cdot R^{\star-2} \cdot B^T \cdot S^* - S^* \cdot B \cdot R^{\star-1} \cdot B^T \cdot \frac{dS^*}{dR} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Por outro lado, como I_u^* é um valor fixo, caminhando sobre esta curva pode-se escrever, $dI_u/dR = 0$ ($I_u=I_u^*$) (4.23)

Assim, da equação (4.23) resulta:

$$\int_0^{\bar{t}} \frac{d}{dR} [(R^{\star-1} \cdot B^T \cdot S^* \cdot x)^T \cdot B^T \cdot S^* \cdot x] \cdot dt = 0 \quad (4.24)$$

Desenvolvendo (4.24) tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{t}} \left[\frac{dx^T}{dR} \cdot S^{\star T} \cdot S^* \cdot x + x^T \cdot \frac{dS^{\star T}}{dR} \cdot S^* \cdot x - x^T \cdot S^{\star T} \cdot (R^{\star-1})^T \cdot S^* \cdot x + \right. \\ \left. + x^T \cdot S^{\star T} \cdot \frac{dS^*}{dR} \cdot x + x^T \cdot S^{\star T} \cdot S^* \cdot \frac{dx}{dR} \right] \cdot dt = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

As equações (4.15), (4.14) e (4.16) obviamente podem ser reescritas para as variáveis Q^*, R^* e S^* apenas pela mudança

de índices, gerando respectivamente as equações (4.26), (4.27) e (4.28).

Assim, com as sete incógnitas: $R^*, Q^*, S^*, x, dS^*/dR, dx/dR, dQ^*/dR$ e as sete equações: (4.25), (4.21), (4.22), (4.20), (4.26), (4.27) e (4.28) é possível determinar o par (Q^*, R^*) que gera (I_x^*, I_u^*) .

Quando se aplica este sistema ao caso SISO, representado pela equação $dx(t)/dt = a \cdot x(t) + b \cdot u(t)^{(*)}$, onde a matriz R passa a ser o escalar r , não há inconveniência de se derivar o índice I_x associado (i_x) , em relação a r , o que irá transformar as equações acima no seguinte sistema:

De (4.21):

$$\frac{dx}{dr} = b^2 \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot x_0 \cdot \left(\frac{s}{r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{ds}{dr} \right) \cdot t \quad (4.29)$$

De (4.25) e (4.29):

$$\frac{ds}{dr} = \frac{r \cdot \alpha \cdot s + 4 \cdot s^2 \cdot b^2}{2 \cdot r^2 \cdot \alpha + 4 \cdot s \cdot r \cdot b^2} \quad (4.30)$$

De (4.22):

$$\frac{dq}{dr} = - \left[\left(2 \cdot a - \frac{2 \cdot b^2 \cdot s}{r} \right) \cdot \frac{ds}{dr} + \frac{b^2 \cdot s^2}{r^2} \right] \quad (4.31)$$

De (4.20), (4.29) e (4.31):

$$\frac{2 \cdot q \cdot b^2}{\alpha^2} \cdot \left[\frac{s}{r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{ds}{dr} \right] + \frac{1}{\alpha} \cdot \left[\left(2 \cdot a - \frac{2 \cdot b^2 \cdot s}{r} \right) \cdot \frac{ds}{dr} + \frac{b^2 \cdot s^2}{r^2} \right] = 0 \quad (4.32)$$

(*) No restante do texto, sempre que o caso SISO for mencionado, estará sendo referenciado este caso particular onde a é um escalar.

De (4.26) e (4.27):

$$i_u = \frac{b^2 \cdot s^2 \cdot x_0^2}{2 \cdot r \cdot \alpha} \quad (4.33)$$

De (4.28):

$$q = -(2 \cdot a \cdot s - \frac{s^2 \cdot b^2}{r}) \quad (4.34)$$

onde, $\alpha = a - b^2 \cdot s/r$ (4.35) e R^*, Q^*, S^* e I_u^* têm os seus respectivos correspondentes r^*, q^*, s^* e i_u^* , que nas equações acima estão representados, simplesmente, por: r, q, s e i_u . Utilizando-se as equações: (4.32) e (4.30), obtém-se a seguinte expressão:

$$q \cdot \left[\frac{2 \cdot b^2 \cdot s}{\alpha \cdot r^2} - \frac{2 \cdot b^2 \cdot s}{\alpha \cdot r} \cdot \zeta + \zeta \right] = -\frac{b^2 \cdot s}{r^2} \quad (4.36)$$

com

$$\zeta = \frac{r \cdot s + 4 \cdot b^2 \cdot s}{2 \cdot \alpha \cdot r^2 + 4 \cdot b^2 \cdot s \cdot r} \quad (4.37)$$

A condição de estabilidade assintótica do sistema $\Rightarrow \alpha < 0$. Assim, $s/r > a/b^2$ (4.38). Levando-se em conta que: $s > 0$, $r > 0$ e $q > 0$; é fácil ver que a equação (4.36) nunca é satisfeita, pois o lado esquerdo é sempre positivo e o lado direito é sempre negativo.

Observe que na equação (4.36) para que a expressão entre parênteses seja sempre positiva, basta que $r \cdot \zeta > 1$, o que é verdade, pois de (4.38) $a \cdot r < s \cdot b^2$ e isto implica em que

$$r \cdot \zeta = \frac{\alpha \cdot r + 4 \cdot b^2 \cdot s}{2 \cdot \alpha \cdot r + 4 \cdot b^2 \cdot s} = \frac{r \cdot a + 3 \cdot b^2 \cdot s}{2 \cdot r \cdot a + 2 \cdot b^2 \cdot s} > 1$$

Tendo em vista este fato, é importante, agora, para compreensão do problema, obter as curvas de i_x e i_u constantes, desenvolvidas no plano $r \times q$.

i. curvas de i_x constantes:

Através da definição de I_x dada por (4.1) e das equações (4.13) e (4.14) chega-se à seguinte expressão:

$$r = \frac{2 \cdot b^2 \cdot s \cdot i_x - b^2 \cdot s^2 \cdot x_0^2}{2 \cdot a \cdot i_x - 2 \cdot a \cdot s \cdot x_0^2} \quad (4.39)$$

Assim, com as equações (4.34) e (4.39), para diversos valores de i_x fixados, fazendo-se a varredura de s , de tal forma a não violar a condição de estabilidade, equação (4.38), pode-se obter a relação de r x q conforme mostra o gráfico (4.1) para um caso específico onde: $a=2$, $b=1$ e $x_0=3$.

ii. curvas de i_u constantes:

Através da definição de I_u dada por (4.2) e a realimentação de estado dada por $u = -(b \cdot s / r) \cdot x$ chega-se à seguinte expressão:

$$r = \frac{2 \cdot b^2 \cdot s \cdot i_u - b^2 \cdot s^2 \cdot x_0^2}{2 \cdot a \cdot i_u} \quad (4.40)$$

A exemplo do procedimento anterior, com as equações (4.34) e (4.40), para diversos valores de i_u fixados, fazendo-se a varredura de s , de tal forma a não violar a condição de estabilidade, equação (4.38), pode-se obter a relação de r x q conforme mostra o gráfico (4.2) para um caso específico onde: $a=2$, $b=1$ e $x_0=3$.

Observando os gráficos (4.1) e (4.2) nota-se que toda curva i_u é capaz de aproximar-se do eixo das ordenadas, tanto quanto se queira, fazendo $q \approx 0$ o que implica num $i_x \approx 0$, ou seja, para um determinado i_u é sempre possível ter como menor

i_x um valor tendendo a zero. Obviamente, esta solução não é satisfatória pois, ponderar com $q \approx 0$, significa impor que a precisão na trajetória não é relevante.

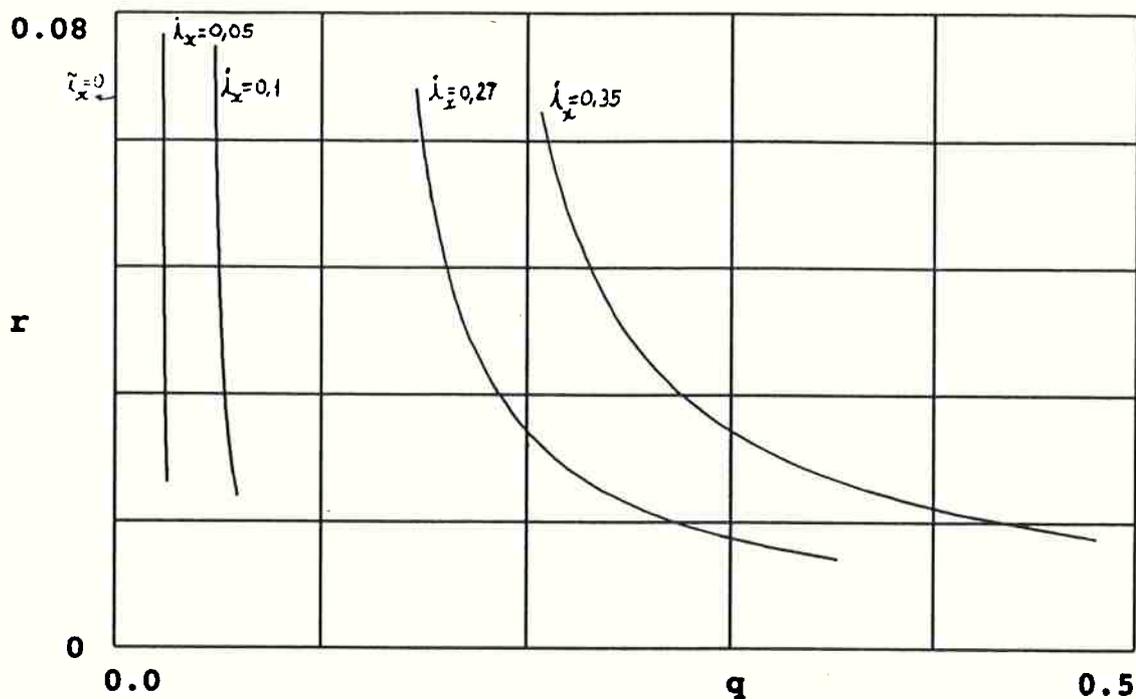


GRÁFICO 4.1: Curvas de i_x constantes.

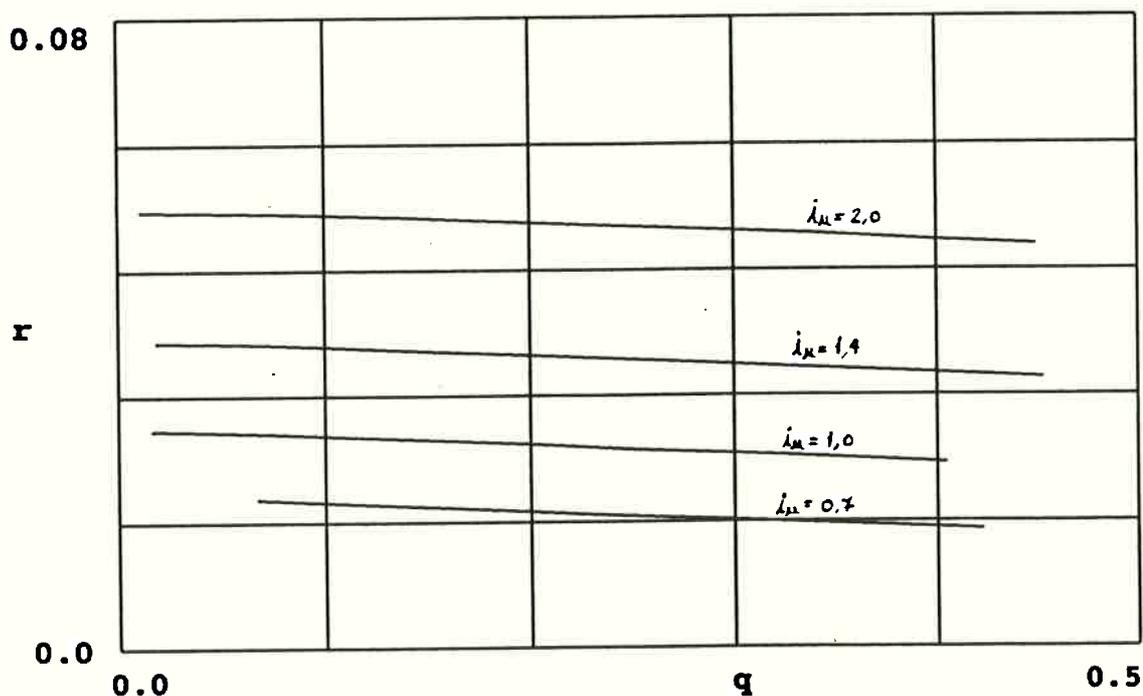


GRÁFICO 4.2: Curvas de i_u constantes.

Portanto, pode-se concluir que a definição das funções-critério destes dois jogadores não parece adequada para se obter parâmetros de projeto otimizados, uma vez que, nem i_x , nem i_u estão fisicamente representando, de forma efetiva, precisão de trajetória e energia de controle gasta, ou seja, $i_x \approx 0$ não significa necessariamente que não existe erro na trajetória, pois pode-se ter $x \neq 0$ e $q \approx 0$.

Observe também, gráficos (4.1) e (4.2) que, quando é fixado um valor de i_x , não é possível obter como mínimo i_u o valor nulo; estudando graficamente este caso limite, chega-se a um valor de $i_u > 0$ para um $q < \infty$, lembrando sempre que as soluções de interesse pertencem ao sub-espço em que: $s > 0$, $r > 0$ e $q > 0$. Além disso, fixado i_x , quando $q \rightarrow \infty \Rightarrow i_u \rightarrow \infty$ pois $u \rightarrow \infty$ (u é proporcional à q/r , $q \rightarrow \infty$, $r \rightarrow r_{\text{limite}}$ e portanto $q/r \rightarrow \infty$).

Uma outra forma mais direta de mostrar inconsistência na definição do jogo através daqueles índices de desempenho é pensar que uma função $u'(t)$, solução do problema do regulador para um par (q', r') adotado, é também, solução para sub-múltiplos deste par, ou seja, $(k.q', k.r')$ com $k < 1$. Assim, $i_x \rightarrow 0$ e $i_u \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow 0$ e $q \rightarrow 0$, tratando-se de uma solução trivial sem interesse prático.

4.2 Definição do Jogo

Considerando a inconsistência dos resultados obtidos no ítem 4.1, referentes às definições estabelecidas por (4.5) e (4.6), faz-se necessário a redefinição do jogo, agora, não mais através de índices proporcionais à precisão e gasto de energia de controle, mas através de índices que representem

medidas absolutas destes dois valores.

Uma forma conveniente para a definição dos objetivos dos jogadores é a seguinte:

$$\min_{(R, Q)} \bar{I}_x; \quad \bar{I}_x \triangleq \int_0^{\infty} x^T \cdot x \, dt \quad (4.41)$$

$$\text{e } \min_{(R, Q)} \bar{I}_u; \quad \bar{I}_u \triangleq \int_0^{\infty} u^T \cdot u \, dt \quad (4.42)$$

sujeitos ao vínculo dinâmico dado por (2.6), ao vínculo terminal dado por (2.3) com realimentação linear de estado e equação algébrica de Riccati sendo satisfeita.

Para estes novos índices tem-se efetivamente o erro de trajetória e a energia gasta com o controle. Podendo-se definir como potência de controle Σu_i^2 ($i=1, n$).

Aplicando-se estas definições ao caso SISO pode-se obter curvas de r x q em que \bar{I}_x e \bar{I}_u são constantes.

i. curvas de \bar{I}_x constantes:

Da definição (4.41), utilizando (4.13) e (4.14):

$$r = \frac{2 \cdot b^2 \cdot s \cdot \bar{I}_x}{x_0^2 + 2 \cdot a \cdot \bar{I}_x} \quad (4.43)$$

Assim, com as equações (4.34) e (4.43), para diversos valores de \bar{I}_x fixados, fazendo-se a varredura de \underline{s} , de tal forma a não violar a condição de estabilidade, equação (4.38), pode-se obter a relação r x q conforme mostra o gráfico (4.3), para o caso específico onde: $a=2$, $b=1$ e $x_0=3$.

ii. curvas de \tilde{I}_u constantes:

Da definição (4.42), considerando a realimentação linear de estado $u = -(b.s/r).x$, a relação que fornece valores positivos de r , q e s é dada por:

$$r = \frac{2.b^2.s.\tilde{I}_u - \sqrt{4.b^4.s^2\tilde{I}_u^2 - 8.a.b^2.s^2.x_0^2.\tilde{I}_u}}{4.a.\tilde{I}_u} \quad (4.44)$$

Novamente com o auxílio da equação (4.34) e a rotina de cálculo já mencionada, chega-se às curvas mostradas no gráfico (4.4) para o caso específico em que: $a=2$, $b=1$ e $x_0=3$.

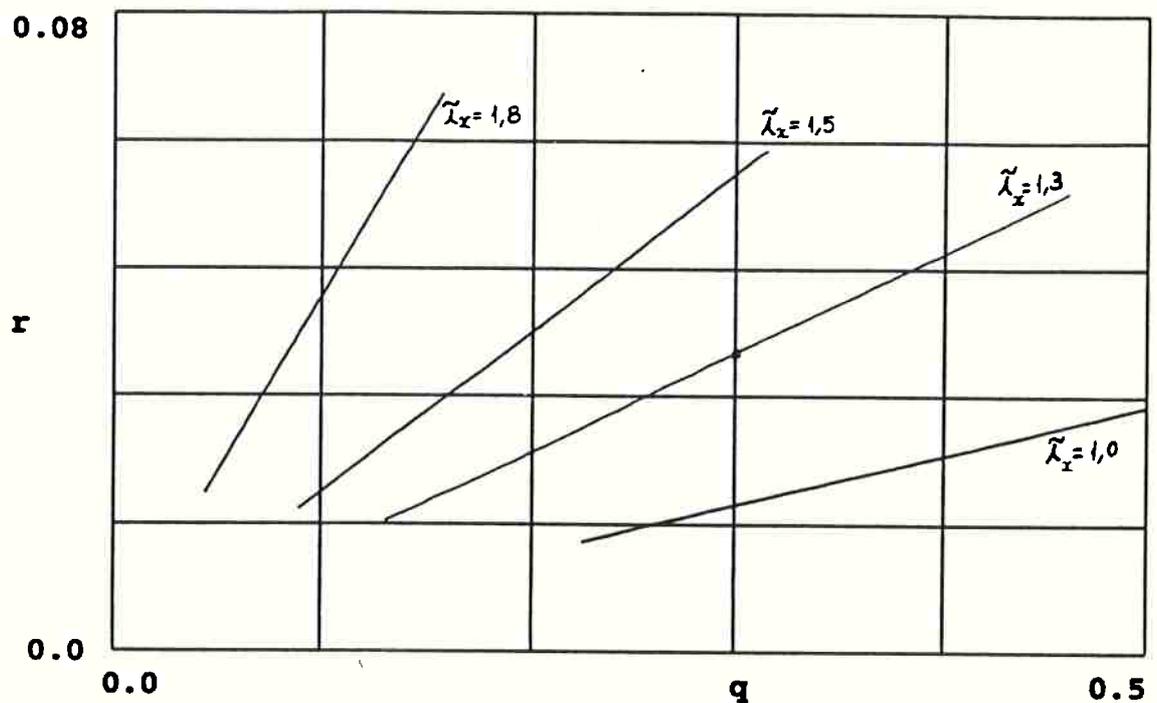


GRÁFICO 4.3: Curvas de \tilde{I}_x constantes.

Observando as equações (4.43) e (4.44) verifica-se que ambas podem ser reescritas da seguinte forma: $r_i = C_1.s$ ($i=1,2$), onde $i=1$ está associado às curvas de \tilde{I}_x constantes e $i=2$ às de \tilde{I}_u constantes. Assim, tanto uma quanto outra, quando substituídas em (4.34), levam a uma relação linear entre r e q , resultando os gráficos (4.4) e (4.5).

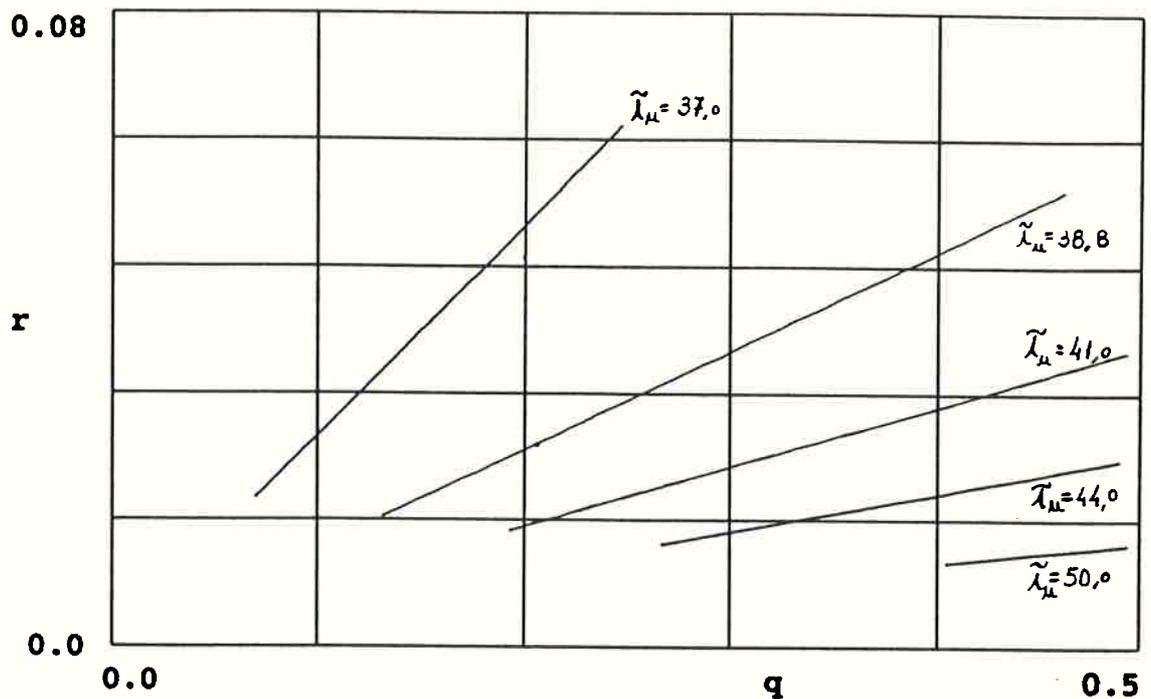


GRÁFICO 4.4: Curvas de \bar{i}_u constantes.

As curvas de \bar{i}_x e \bar{i}_u constantes são retas que interceptam a origem dos eixos coordenados, o que equivale dizer que existe uma relação bi-unívoca entre \bar{i}_x e \bar{i}_u . Dividindo-se tanto \bar{i}_x quanto \bar{i}_u por x_0^2 o comportamento das retas não é alterado e pode-se obter valores dos custos pelo quadrado do desvio inicial.

Chamando de K o ganho de realimentação linear de estado, $u(t) = -K \cdot x(t)$ (4.45), ou seja, $K = (b \cdot s) / r$ (4.46) e reescrevendo as expressões de \bar{i}_x e \bar{i}_u com esta nova variável chega-se a:

$$\bar{i}_x = -\frac{x_0^2}{2 \cdot (a - b \cdot k)} \quad (4.47)$$

$$e \quad \bar{i}_u = -\frac{K^2 \cdot x_0^2}{2 \cdot (a - b \cdot K)} \quad (4.48)$$

Com isto, pode-se dizer que definido um ganho de realimentação K , estão definidos os custos \bar{i}_x e \bar{i}_u .

A equação de Riccati faz relacionar os valores de q e r com K através da expressão,

$$K = \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2 + q}{b^2 r}} \quad (4.49),$$

de tal forma a minimizar a soma $i_x + i_u$ para um dado par (q, r) pré-estabelecido.

Na realidade, se K define o desempenho do sistema, não faz muito sentido pré-estabelecer dois valores, q e r , sem ter uma idéia quantitativa a respeito da precisão desejada e energia disponível, e através da equação de Riccati determinar o ganho de realimentação, mesmo que este minimize o funcional $i = i_x + i_u$; pois este ganho pode não satisfazer os objetivos e restrições envolvidos.

Os gráficos (4.3) e (4.4) mostram que quando a relação r/q aumenta, aumenta o custo \bar{i}_x e diminui o custo \bar{i}_u , sempre, em outras palavras, o aumento na precisão da trajetória implica necessariamente num maior gasto de energia.

Dividindo (4.47) por (4.48) chega-se a uma relação de \bar{i}_x/\bar{i}_u independente da condição inicial e que varia monotonicamente com K , ou seja, q/r .

$$\frac{\bar{i}_x}{\bar{i}_u} = \frac{1}{K^2} \quad (4.50)$$

É importante notar que, pré-estabelecer um valor de K significa pré-estabelecer uma relação entre precisão da trajetória de estado e energia que será gasta no controle,

e uma das formas de se fazer isto é pré-estabelecer um valor para q e r e vinculá-los, por exemplo, através da equação de Riccati.

Em termos de classificação, uma vez que melhorar um índice implica necessariamente em piorar o outro, está caracterizado um jogo de soma zero. Dentro deste enfoque, minimizar a soma $i_x + i_u$ através da equação de Riccati passa a ser secundário, uma vez que qualquer melhora na precisão de uma trajetória, por exemplo, será às custas de um maior gasto de energia.

Estabelecendo-se, então, uma relação entre K , r e q diferente daquela obtida através da equação de Riccati, pode-se fazer uma análise que ajude a entender estes fatos. Fixando, por definição, que $K = q^2/r$ (4.51), chega-se às seguintes expressões para i_x , \bar{i}_x , i_u e \bar{i}_u e respectivas expressões para r :

$$i_x = -\frac{x_0^2 \cdot q}{2 \cdot \left(a - \frac{b \cdot q^2}{r}\right)} \Rightarrow r = \frac{2 \cdot b \cdot i_x \cdot q^2}{x_0^2 \cdot q + 2 \cdot a \cdot i_x} \quad (4.52)$$

$$\bar{i}_x = -\frac{x_0^2}{2 \cdot \left(a - \frac{b \cdot q^2}{r}\right)} \Rightarrow r = \frac{2 \cdot b \cdot \bar{i}_x \cdot q^2}{x_0^2 + 2 \cdot a \cdot \bar{i}_x} \quad (4.53)$$

$$i_u = -\frac{x_0^2 \cdot q^4}{2 \cdot (a \cdot r - b \cdot q^2)} \Rightarrow r = -\frac{x_0^2 \cdot q^4 + 2 \cdot b \cdot i_u \cdot q^2}{2 \cdot a \cdot i_u} \quad (4.54)$$

$$\bar{i}_u = -\frac{x_0^2 \cdot q^4}{2 \cdot (a \cdot r^2 - b \cdot r \cdot q^2)} \Rightarrow r = \frac{(b \cdot \bar{i}_u - \sqrt{b^2 \cdot \bar{i}_u^2 - 2 \cdot a \cdot \bar{i}_u \cdot x_0^2}) \cdot q^2}{2 \cdot a \cdot \bar{i}_u} \quad (4.55)$$

As equações (4.52) e (4.54) dão origem, respectivamente, aos

gráficos (4.5) e (4.6), para o caso específico em que: $a=2$, $b=1$ e $x_0=3$.

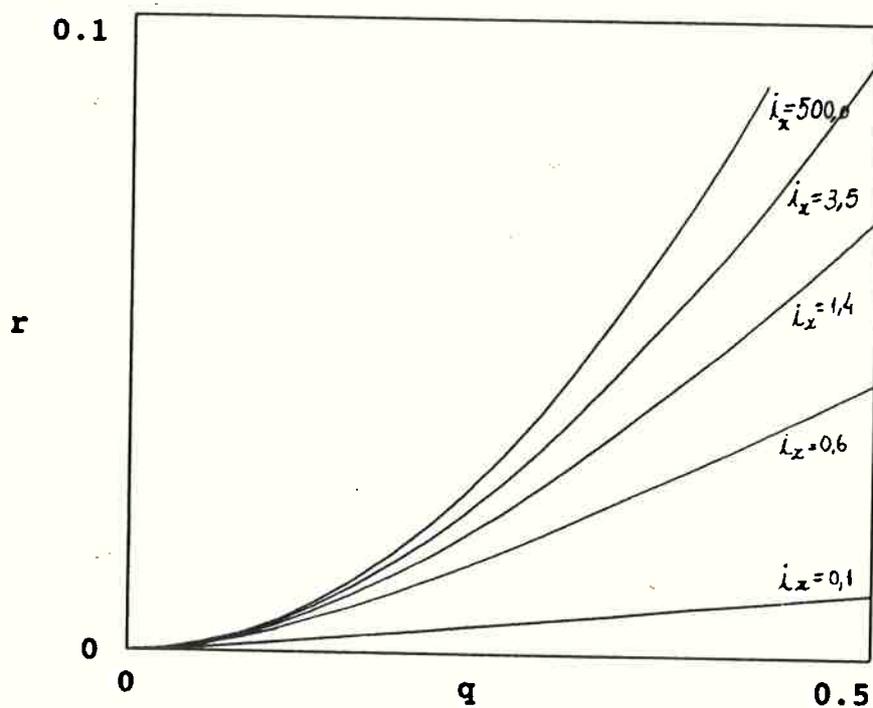


GRÁFICO 4.5: Curvas de i_x constantes.

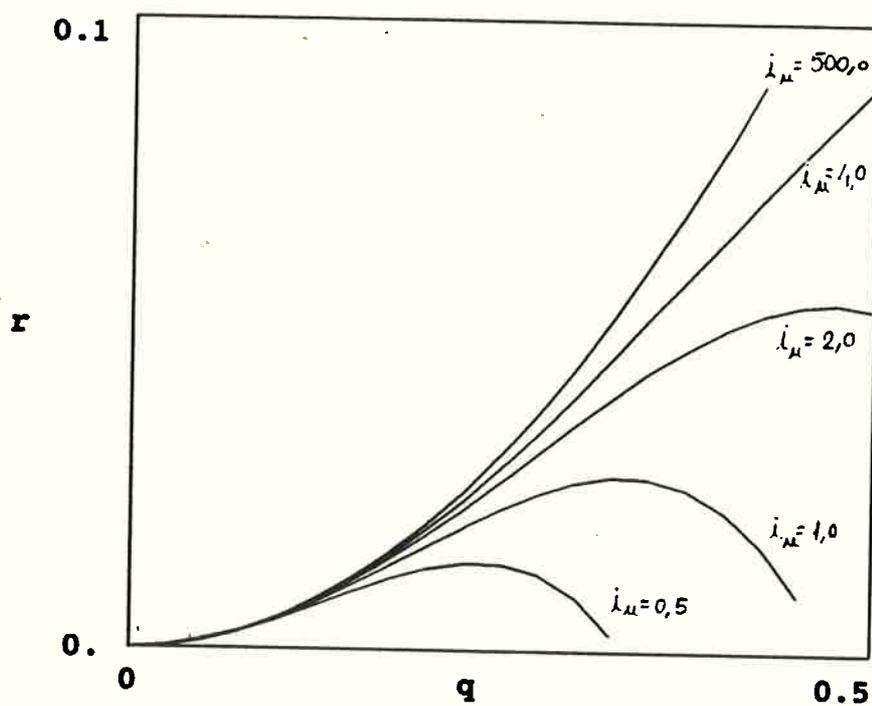


GRÁFICO 4.6: Curvas de i_u constantes.

Os gráficos (4.5) e (4.6) apresentam diferenças de comportamento em relação aos gráficos (4.1) e (4.2), porém, a exemplo daquela situação, novamente i_x e i_u mostram-se inconvenientes como índices de desempenho para os jogadores, pois, como mostra o gráfico (4.6), toda curva de i_u (constante) é capaz de aproximar-se tanto quanto se queira do eixo das abscissas onde $r=0$ e $i_x=0$, situação em que o ganho de realimentação deve tender a infinito ($i_u \neq 0$), ou seja, requer potência de controle infinita. Assim, é fácil ver que o jogo tem como solução o vetor $(i_x, i_u) \approx (0, 0)$, o que não tem valor na prática.

Observe também que, para uma curva i_x constante, o valor mínimo possível para i_u é diferente de zero.

Através das equações (4.53) e (4.55) chega-se aos gráficos (4.7) e (4.8), respectivamente.

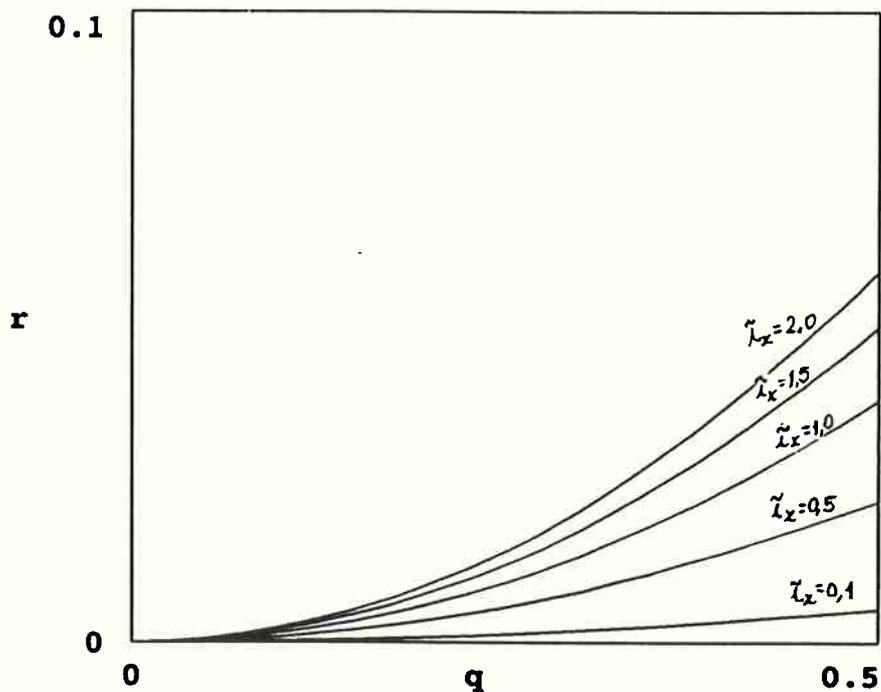


GRÁFICO 4.7: Curvas de i_x constantes.

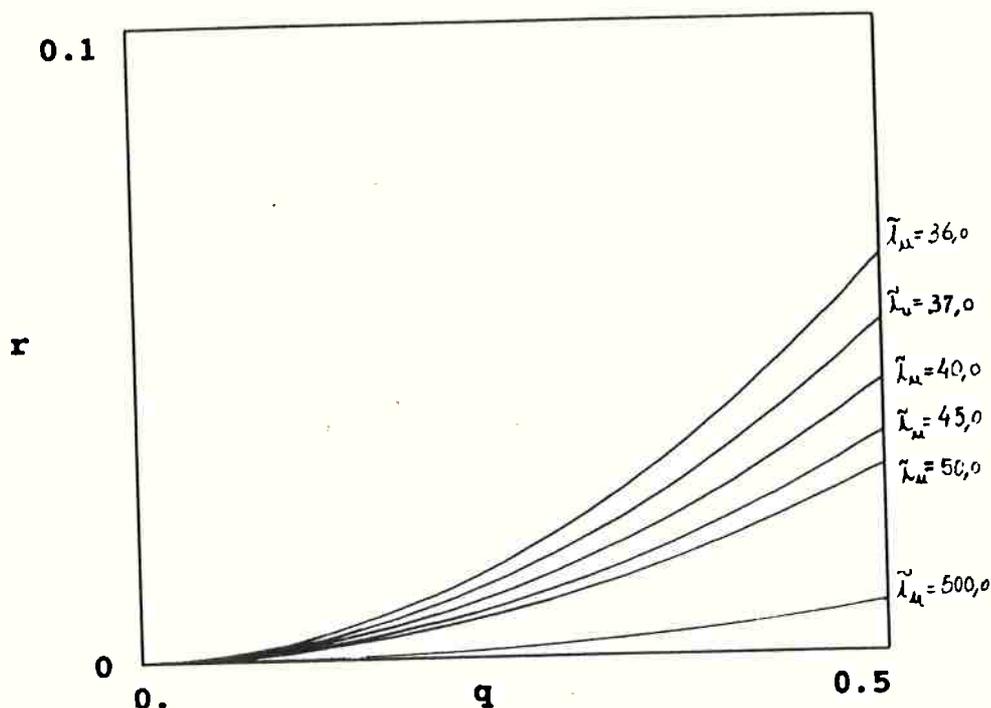


GRÁFICO 4.8: Curvas de i_u constantes.

É possível mostrar que, para qualquer curva (i_x) do feixe apresentado no gráfico (4.7), existe uma correspondente (i_u) no gráfico (4.8), estabelecendo-se assim, novamente, uma relação bi-unívoca. Resultado óbvio, uma vez que a precisão e energia, como já mostrado, são definidas pelo K e como este se relaciona com r e q pouco importa. A única diferença, agora, é que se for tomada uma determinada curva i_x do plano rxq (gráfico (4.8)), pode-se encontrar sua intersecção com uma curva i_u do plano rxq (gráfico (4.6)). Por esta intersecção passa uma única curva i_x do conjunto de curvas obtidas no gráfico (4.5). A este valor de i_x está associado um i_u do gráfico (4.6), definindo assim, uma soma $i = i_x + i_u$ que é maior à obtida anteriormente, correspondente aos valores de i_x e i_u que satisfazem a equação de Riccati.

4.3 Conclusão do capítulo

Conclui-se, então, que a forma natural de se definir o jogo através da simples separação das parcelas que compõem o índice J , equação (2.5), gerando I_x e I_u , não leva a resultados que possam medir a melhoria do comportamento do regulador quanto a seus objetivos básicos de precisão de trajetória mediante satisfatório emprego de energia de controle, necessitando serem substituídos.

O mesmo não ocorre com relação às definições (4.41) e (4.42) atreladas aos vínculos mencionados no item 4.2 que, satisfazendo a equação de Riccati, minimizam J para um dado par (R, Q) e permitem estudar para todos os outros possíveis pares (R', Q') as efetivas relações entre precisão de trajetória e gasto de energia de controle que, como demonstrado para o caso SISO, caracterizam um jogo de soma-zero.

Assim, os índices (\bar{I}_x, \bar{I}_u) e (\bar{I}_x, \bar{I}_u) serão os de interesse para os demais capítulos com eventuais alterações da definição quanto ao tempo de controle, como é o caso do capítulo 5 que estuda o problema para um tempo finito de exposição.

5. Considerações a respeito do tempo final finito ($t_f=T$)

Neste capítulo discute-se a situação em que o controle atua durante um intervalo de tempo finito para os casos em que a realimentação linear é dada por $u(t)=-K.x(t)$ (condição sub-ótima em que o ganho é invariante no tempo) e para $u(t)=-k(t).x(t)$, onde a equação diferencial de Riccati é satisfeita.

Será focado analiticamente o caso SISO de primeira ordem, analisando também, a situação em que as variáveis de decisão são: K (ganho de realimentação) e t_f (tempo de atuação do controle) e incorporando o vínculo terminal dado por (2.4b).

5.1 Considerações a respeito da realimentação linear invariante no tempo

Com relação às definições de \tilde{I}_x e \tilde{I}_u dadas pelas expressões (4.41) e (4.42), é necessário alterar os extremos superiores das integrais, para $t_f=T$.

$$\tilde{I}_x \triangleq \int_0^T x^T . x \, dt \quad (5.1)$$

$$\tilde{I}_u \triangleq \int_0^T u^T . u \, dt \quad (5.2)$$

A minimização dos índices acima estará sujeita aos vínculos (2.6) e (2.3) e à realimentação linear invariante no tempo. Aplicando (5.1) e (5.2) ao caso SISO, com auxílio de (4.13) e (4.14), chega-se às seguintes expressões para \tilde{I}_x e \tilde{I}_u ,

respectivamente:

$$\bar{i}_x = \frac{x_0^2}{2 \cdot (a-b \cdot K)} [e^{2 \cdot (a-b \cdot K) \cdot T} - 1] \quad (5.3)$$

$$\bar{i}_u = \frac{x_0^2 \cdot K^2}{2 \cdot (a-b \cdot K)} [e^{2 \cdot (a-b \cdot K) \cdot T} - 1] \quad (5.4)$$

Reescrevendo a equação (5.3) como $f_1(K) = f_2(K)$ (5.5), onde:

$$f_1(K) = \frac{2 \cdot \bar{i}_x}{x_0^2} \cdot (a-b \cdot K) \quad (5.6)$$

$$f_2(K) = e^{2 \cdot (a-b \cdot K) \cdot T} - 1 \quad (5.7)$$

ou seja, $f_1(K)$ é uma função linear e $f_2(K)$ exponencial, fica claro que a equação (5.5) é satisfeita no máximo para dois valores distintos de K . Considerando que $K=a/b$ é uma solução trivial que não tem interesse, pode-se dizer, portanto, que existe, também neste caso, uma relação bi-unívoca entre K e \bar{i}_x .

O gráfico (5.1) é ilustrativo para o caso em que: $a=2$, $b=1$, $x_0=3$, $T=1$ e $\bar{i}_x=1$.

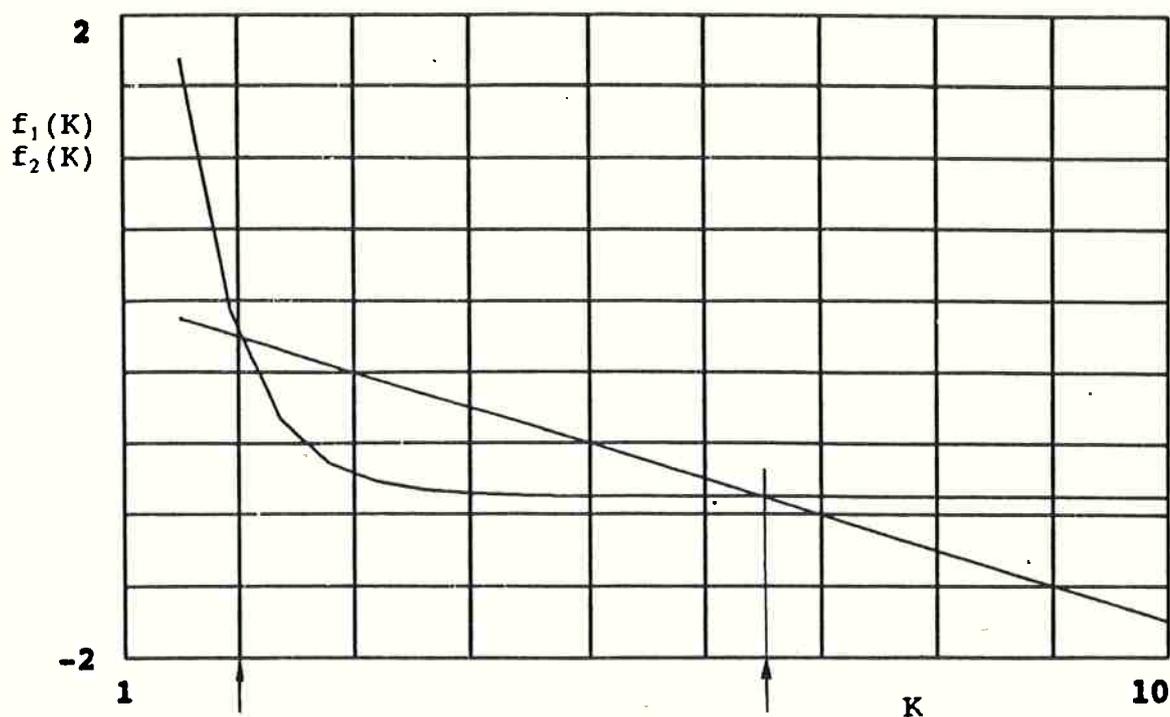


GRÁFICO 5.1: Curvas de $f_1(K)$ e $f_2(K)$ x K .
Soluções: $K=2$ e $K=6.499$

Da mesma forma, reescrevendo a equação (5.4), como:

$$f_3(K) = f_2(K) \quad (5.8), \text{ onde:}$$

$$f_3(K) = \frac{2 \cdot \bar{I}_u}{x_0^2} \cdot \left(\frac{a}{k^2} - \frac{b}{K} \right) \quad (5.9),$$

é fácil ver que, neste caso, também, só existem dois K 's distintos que satisfazem (5.8).

Observe que $K \rightarrow 0 \Rightarrow f_3 \rightarrow 0$. Além disso $df_3(K)/dK = (c_1 + c_2 \cdot K)/K^3 = 0$ (c_1 e c_2 constantes e $K > 0$), indica que $f_3(K)$ só tem um ponto de máximo ou mínimo; assim, só podem haver duas intersecções com $f_2(K)$, que é monotônica. Como uma delas é dada por $K=a/b$ e não interessa, novamente existe uma relação bi-unívoca entre K e \bar{I}_u .

O gráfico (5.2) é ilustrativo para o caso em que: $a=2$, $b=1$,

$x_0=3$, $T=1$ e $\bar{i}_u=39$.

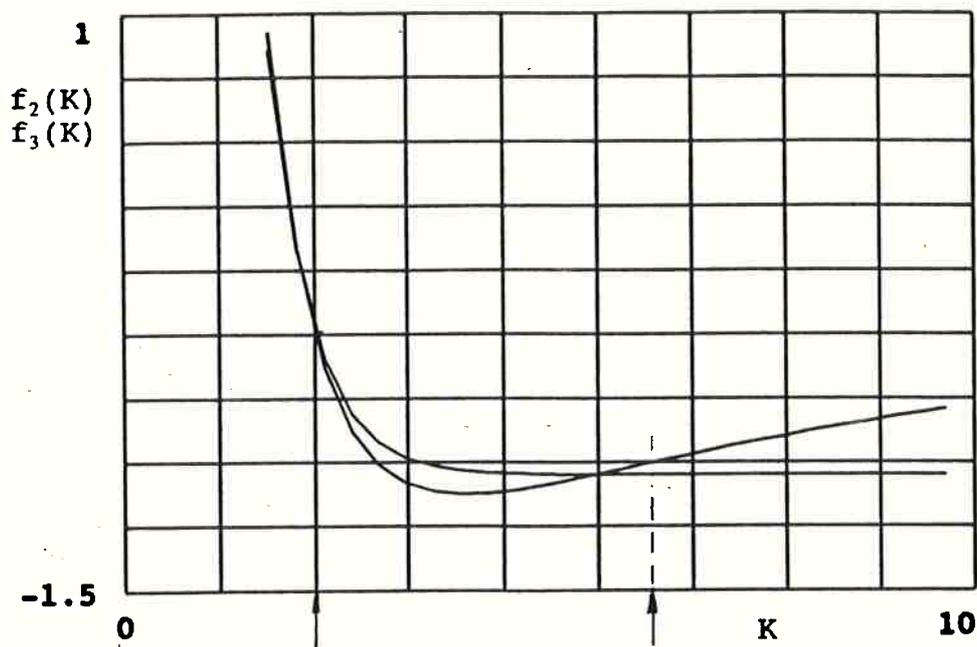


GRÁFICO 5.2: Curvas de $f_2(K)$ e $f_3(K)$ x K .
Soluções: $K=2$ e $K=5.546$

Assim, para um instante final $t_f = T < \infty$, sendo \underline{u} dado por $u=-K.x$ e atendido os demais vínculos, pode-se escrever:

$$\bar{i}_x(K', t') \Leftrightarrow \bar{i}_u(K', t')$$

Novamente está caracterizado um jogo de soma zero.

Desta forma, num espaço tridimensional representado na figura (5.1) em que os eixos coordenados são: r , q e t_f ; para cada plano t_f constante, existe um feixe de retas passando pela origem, que representam \bar{i}_x e \bar{i}_u constantes.

Tendo em vista os resultados anteriores, para uma análise mais completa a respeito da influência do tempo $t_f < \infty$, é necessário modificar a definição do jogo, utilizando-se, agora, como variáveis de decisão, K e t_f .

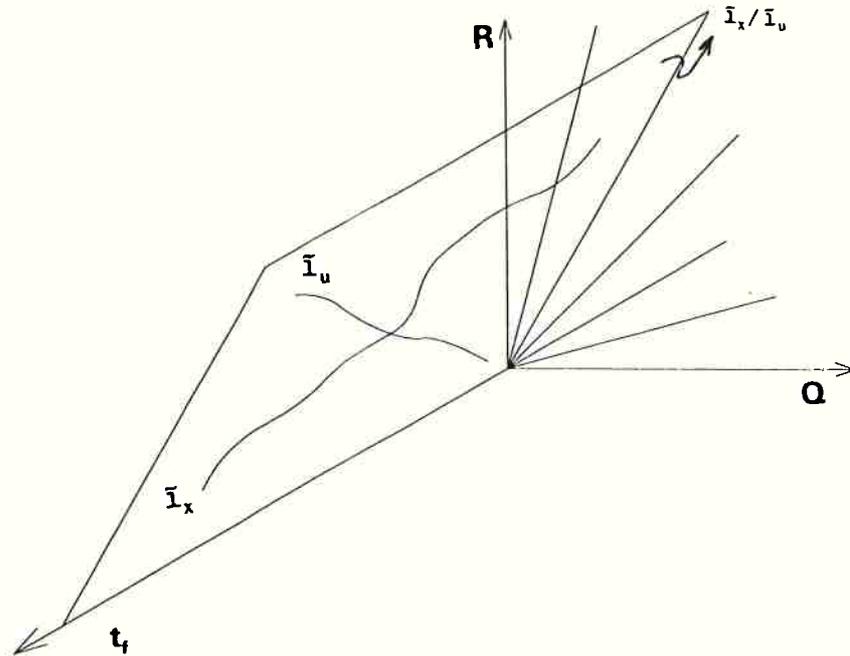


FIGURA 5.1: Representação tridimensional de \bar{i}_x e \bar{i}_u no espaço $r \times q \times t_f$.

Da equação (5.3), isolando-se o T escreve-se a $T(K)$ para obter o feixe de curvas de mesmo \bar{i}_x .

$$T = \frac{1}{2 \cdot (a-b \cdot K)} \cdot \ln \left[\frac{2 \cdot (a-b \cdot K) \cdot \bar{i}_x}{x_0^2} + 1 \right] \quad (5.10)$$

As seguintes condições devem ser satisfeitas:

i. $a - b \cdot K < 0 \Rightarrow K > a/b$ (5.11)

ii. Uma vez ocorrido i., para garantir $T > 0$ deve-se ter,

$$0 < \frac{2 \cdot (a-b \cdot K) \cdot \bar{i}_x}{x_0^2} + 1 < 1$$

ii.a.

$$\frac{2 \cdot (a-b \cdot K) \cdot \bar{i}_x}{x_0^2} + 1 > 0 \Rightarrow K < \frac{x_0^2}{2 \cdot b \cdot \bar{i}_x} + \frac{a}{b} \quad (5.12)$$

ii.b.

$$\frac{2 \cdot (a-b \cdot K) \cdot \tilde{I}_x}{x_0^2} + 1 < 1 \Rightarrow (5.11)$$

Da equação (5.4), analogamente chega-se a:

$$T = \frac{1}{2 \cdot (a-b \cdot K)} \cdot \ln \left[\frac{2 \cdot \tilde{I}_u}{x_0^2} \cdot \left(\frac{a}{K^2} - \frac{b}{K} \right) + 1 \right] \quad (5.13)$$

As seguintes condições devem ser satisfeitas; além daquela dada pela inequação (5.11):

i. ocorrido (5.11), para garantir $T > 0$, deve-se ter,

$$0 < \frac{2 \cdot \tilde{I}_u}{x_0^2} \cdot \left(\frac{a}{K^2} - \frac{b}{K} \right) + 1 < 1$$

i.a.

$$\frac{2 \cdot \tilde{I}_u}{x_0^2} \cdot \left(\frac{a}{K^2} - \frac{b}{K} \right) + 1 > 0 \Rightarrow K > \frac{\tilde{I}_u \cdot b + \sqrt{\Delta}}{x_0^2} \quad (5.14)$$

$$\text{ou } K < \frac{\tilde{I}_u \cdot b - \sqrt{\Delta}}{x_0^2} \quad (5.15)$$

$$\text{onde } \Delta = b^2 \cdot \tilde{I}_u^2 - 2 \cdot a \cdot x_0^2 \cdot \tilde{I}_u \quad (5.16)$$

i.b.

$$\frac{2 \cdot \tilde{I}_u}{x_0^2} \cdot \left(\frac{a}{K^2} - \frac{b}{K} \right) + 1 < 1 \Rightarrow (5.11)$$

Observe que se $\Delta > 0 \Rightarrow \tilde{I}_u > (2 \cdot a \cdot x_0^2) / b^2$; assim, é fácil ver

que quando a inequação (5.14) é satisfeita, automaticamente a inequação (5.11) também o é. Por outro lado, não é possível satisfazer simultaneamente (5.15) e (5.11). Desta forma, a restrição que deverá ser imposta é dada pela inequação (5.14).

Os gráficos (5.3) e (5.4) mostram, para o caso em que: $a=2$, $b=1$ e $x_0=3$; curvas de \bar{i}_x e \bar{i}_u constantes representadas no plano $t_f \times K$.

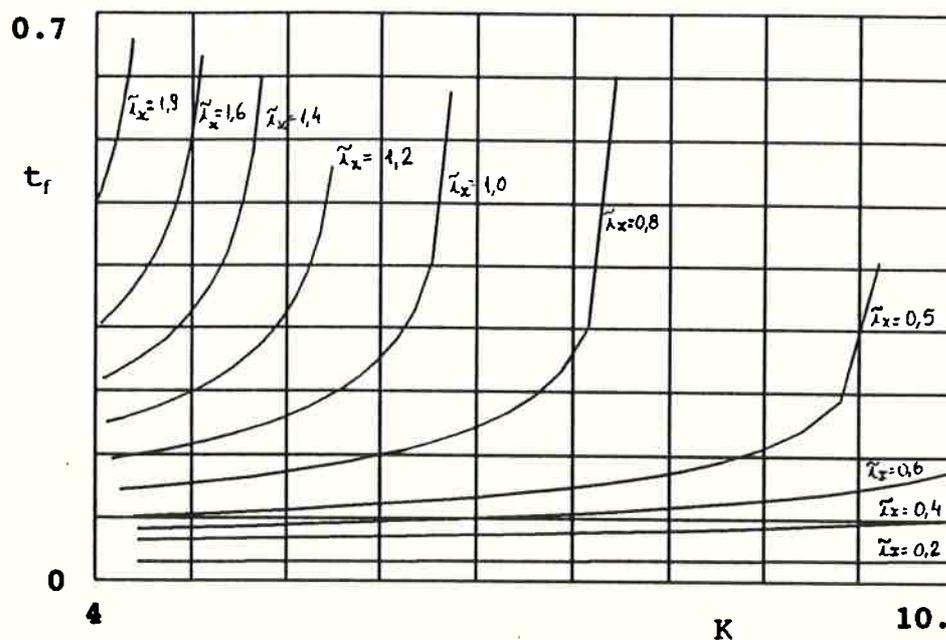


GRÁFICO 5.3: Curvas de \bar{i}_x constantes no plano $t_f \times K$.

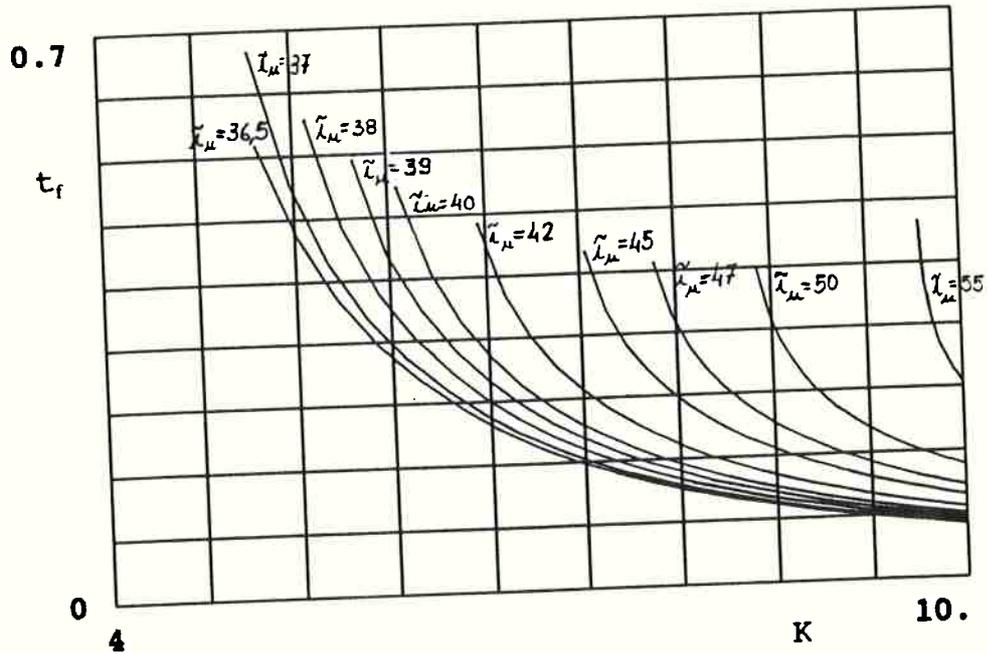


GRÁFICO 5.4: Curvas de \bar{i}_u constantes no plano t_f x K .

O gráfico (5.5) reúne as curvas de (5.3) e (5.4) e identifica as linhas l_1 , l_2 , l_3 e l_4 conforme definidas abaixo.

l_1 = linha de melhor escolha de K em relação à \bar{i}_x .

l_2 = linha de melhor escolha de t_f em relação à \bar{i}_x .

l_3 = linha de melhor escolha de K em relação à \bar{i}_u .

l_4 = linha de melhor escolha de t_f em relação à \bar{i}_u .

O gráfico (5.5) mostra que:

$$l_3 \equiv l_4 ,$$

$$l_1 \cap l_4 \Rightarrow N_1 \text{ (solução NASH)}$$

$l_2 \cap l_3$ não existe, portanto, só

há uma solução NASH.

→ \bar{i}_x diminui (melhora a precisão)

← \bar{i}_u diminui (diminui o gasto de energia)

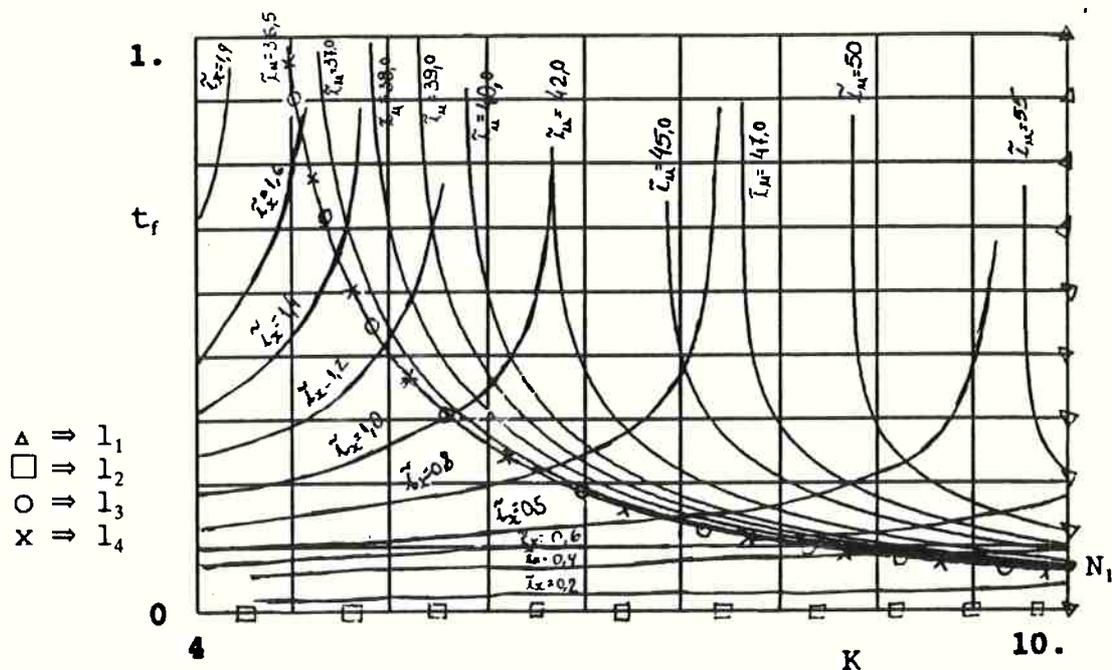


GRÁFICO 5.5: Curvas de \bar{i}_x e \bar{i}_u constantes no plano $t_f \times K$.

Definindo O_1 como o ponto de menor \bar{i}_x e O_2 como o ponto de menor \bar{i}_u , pelo gráfico (5.5) toda linha l_2 tem $\bar{i}_x \rightarrow 0$; portanto, não existe um único ponto onde \bar{i}_x é mínimo, mas toda uma linha e o mesmo acontece com O_2 , pois todos os pontos de l_3 e l_4 correspondem ao mínimo \bar{i}_u .

Observe que o problema definido desta forma possui solução e ela é única, dada pelo ponto NASH N_1 , onde a linha de menor \bar{i}_u possível ($\bar{i}_{u\min.}$) é interceptada pela curva \bar{i}_x' , que é a curva de menor custo de precisão de trajetória que consegue interceptar $\bar{i}_{u\min.}$ dentro da área limitada por $K < K_{\max.}$ e t_f . Assim, o menor custo de precisão possível de ser obtido é atingido com o menor custo possível de energia gasta.

Observe que as curvas \bar{i}_x e \bar{i}_u constantes tendem ao paralelismo com o aumento de t_f , confirmando os resultados

do capítulo anterior.

É evidente que pensando na física do problema "alguém" está sendo penalizado. No caso, trata-se do estado final $x(t_f)$. Para se ter uma situação mais realista com relação aos problemas de engenharia, deve-se limitar o $x(t_f)$, ou seja, $x(t_f) = x_f \leq x^*$; onde x^* é uma superfície fechada em torno da origem $x=0$.

Assim, para $x_f \leq x^* \Rightarrow t_f$ tempo de controle $\geq t_{\min}$. dado por:

$$t_{\min} = \frac{1}{(a-b.K)} \cdot \ln\left(\frac{x_f}{x_0}\right) \quad (5.16)$$

O gráfico (5.6) exemplifica a inclusão desta restrição. Foi imposto ao caso anterior que $x_f \leq 2\% x_0 \Rightarrow t_f \geq t_{\min}$.

→ \bar{I}_x diminui (melhor precisão)

← \bar{I}_u diminui (diminui o gasto de energia)

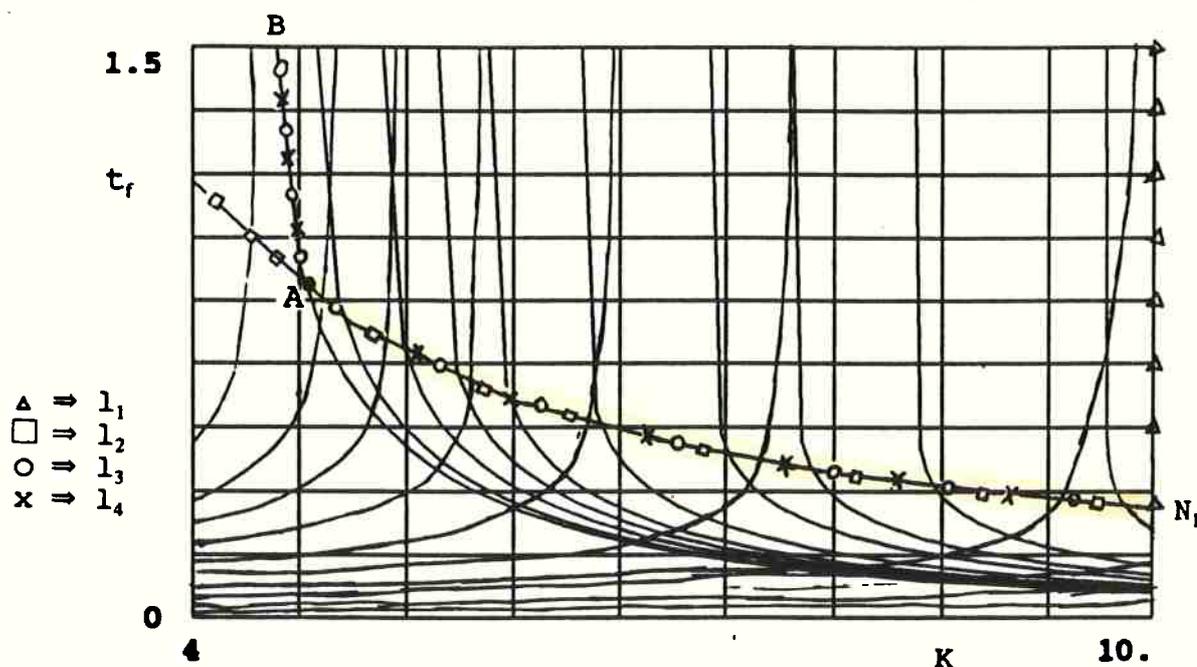


GRÁFICO 5.6: Inclusão da restrição $t_f \geq t_{\min}$ para (5.5).

O gráfico (5.6) mostra que:

$$l_2 \equiv l_3 \text{ no trecho } \bar{A}\bar{N}_1$$

$$l_1 \cap l_4 \Rightarrow N_1$$

$$l_2 \cap l_3 \Rightarrow N_2 \text{ (todos os pontos do segmento } \bar{A}\bar{N}_1\text{)}.$$

Tomando-se um ponto P da linha $\bar{A}\bar{N}_1$, como mostrado na figura (5.2) abaixo, pode-se verificar que as regiões delimitadas pelas linhas de mesmo índice caracterizam-se pelo seguinte comportamento:

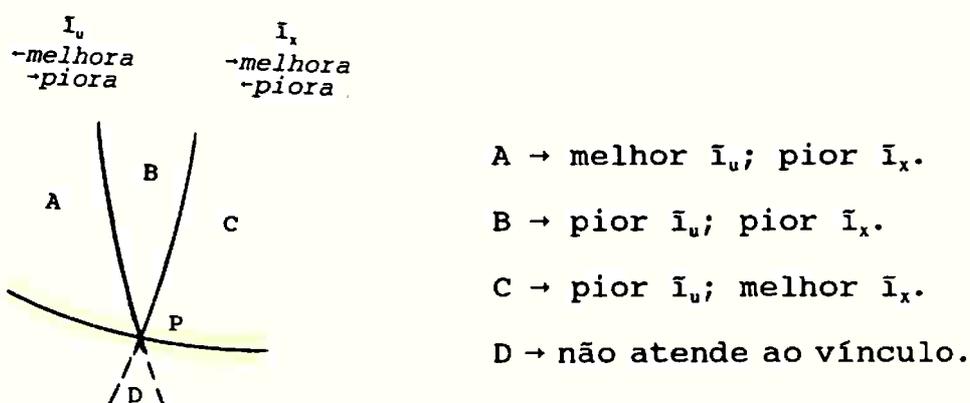


FIGURA 5.2: Comportamento ao redor de um ponto P de $\bar{A}\bar{N}_1$.

Assim, partindo-se de P , para qualquer direção que se caminhe não é possível melhorar os índices I_x e I_u simultaneamente; portanto, pode-se concluir que os pontos residentes na linha $\bar{A}\bar{N}_1$ formam um conjunto Pareto-ótimo. Observe também que o ponto A possui uma melhor "performance" em relação a qualquer ponto pertencente ao segmento $\bar{B}\bar{A}$.

5.2 Considerações a respeito da realimentação linear gerada pela equação de Riccati

Para o caso de se considerar um $t_f < \infty$, a equação de Riccati dada por (4.16) não pode ser considerada na forma algébrica.

Em outras palavras, a lei de realimentação ótima deve ser escrita como:

$$u(t) = -R^{-1} \cdot B^T \cdot S(t) \cdot x(t) \quad (5.17);$$

onde S passa a ser uma função do tempo.

Aplicado ao caso SISO, a expressão (4.34) torna-se,

$$q = -\left(s + 2 \cdot a \cdot s - \frac{b^2 \cdot s^2}{r}\right) \quad (5.18)$$

$$\text{ou } \frac{ds}{\left(\frac{b^2 \cdot s^2}{r} - 2 \cdot a \cdot s - q\right)} = dt \quad (5.19)$$

Integrando (5.19) de t a $t_f = T$,

$$\int_s^{s_f} \frac{ds}{\left(\frac{b^2 \cdot s^2}{r} - 2 \cdot a \cdot s - q\right)} = \int_t^T dt \quad (5.20),$$

onde $s_f = s(t_f)$. É fácil ver que, para o índice de desempenho adotado (2.5), $s_f = 0$.

Tendo em vista que, $-4 \cdot (b^2 \cdot q/r + a^2) < 0$, sempre; as integrais da equação (5.20) quando resolvidas geram a seguinte equação:

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{a^2 + \frac{b^2 \cdot q}{r}}} \cdot \ln \left| \frac{b^2 \cdot s - a \cdot r - \sqrt{a^2 \cdot r^2 + b^2 \cdot r \cdot q}}{b^2 \cdot s - a \cdot r + \sqrt{a^2 \cdot r^2 + b^2 \cdot r \cdot q}} \right| \Big|_{s^{t=0}}^{s_f} = t \Big|_t^T \quad (5.21)$$

Chamando de:

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a^2 + \frac{b^2 \cdot q}{r}}} \quad (5.22)$$

$$\beta = -a.r - \sqrt{a^2.r^2 + b^2.r.q}; \quad \beta < 0 \quad (5.23)$$

$$\gamma = -a.r + \sqrt{a^2.r^2 + b^2.r.q}; \quad \gamma > 0 \quad (5.24)$$

Da equação (5.21), chega-se à seguinte relação:

$$e^{\frac{(T-t)}{\alpha}} = \left| \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{s+\gamma}{s+\beta} \right| = \nu \quad (5.25)$$

Para $\nu > 0$:

$$s = \frac{\gamma \cdot (1 - e^{\frac{(T-t)}{\alpha}})}{\frac{\gamma}{\beta} \cdot e^{\frac{(T-t)}{\alpha}} - 1} \quad (5.26)$$

Para $\nu < 0$:

$$s = \frac{-\gamma \cdot (e^{\frac{(T-t)}{\alpha}} + 1)}{\frac{\gamma}{\beta} \cdot e^{\frac{(T-t)}{\alpha}} + 1} \quad (5.27)$$

Em princípio, tanto (5.26) quanto (5.27) são possíveis de acontecer dependendo dos parâmetros do sistema. Como a diferença é apenas de sinal, para efeito de equacionamento será considerado o caso em que $\nu > 0$. Assim, pode-se escrever a expressão de $u(t)$ como,

$$u(t) = -\frac{\gamma \cdot b}{r} \cdot \left[\frac{1 - e^{\frac{(T-t)}{\alpha}}}{\frac{\gamma}{\beta} \cdot e^{\frac{(T-t)}{\alpha}} - 1} \right] \cdot x(t) = f(t) \cdot x(t) \quad (5.28)$$

Do vínculo dinâmico, pode-se escrever:

$$\int_{x_0}^{x_f} \frac{dx}{x} = \int_0^T (a + f) \cdot dt \quad (5.29)$$

Desenvolvendo (5.29), chega-se à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = a \cdot t - \frac{\gamma \cdot b}{r} \cdot \left[\int_0^t \frac{1}{(\gamma/\beta) \cdot e^{\frac{(T-t)}{\alpha}} - 1} \cdot dt + \right. \\ \left. - \int_0^t \frac{e^{\frac{(T-t)}{\alpha}}}{(\gamma/\beta) \cdot e^{\frac{(T-t)}{\alpha}} - 1} \cdot dt \right] \quad (5.30) \end{aligned}$$

Resolvendo as integrais chega-se a:

i.

$$\int_0^t \frac{1}{(\gamma/\beta) \cdot e^{\frac{(T-t)}{\alpha}} - 1} \cdot dt = -t + \alpha \cdot \ln \left| \frac{-1+k_1}{-1+k_1 \cdot e^{-\frac{t}{\alpha}}} \right| \quad (5.31)$$

$$\text{onde } K_1 = \frac{\gamma}{\beta} \cdot e^{\frac{T}{\alpha}} \quad (5.32)$$

ii.

$$e^{\frac{T}{\alpha}} \cdot \int_0^t \frac{e^{-\frac{t}{\alpha}}}{k_1 \cdot e^{-\frac{t}{\alpha}} - 1} \cdot dt = -\frac{\alpha \cdot e^{\frac{T}{\alpha}}}{k_1} \cdot \ln \left| \frac{-1+k_1 \cdot e^{-\frac{t}{\alpha}}}{-1+k_1} \right| \quad (5.33)$$

Com (5.30), (5.31) e (5.32) pode-se escrever,

$x(t) = x_0 \cdot e^B$ (5.34), onde:

$$B = a \cdot t - \frac{\gamma \cdot b}{r} \left[-t + \alpha \cdot \ln \left| \frac{-1+k_1}{-1+k_1 \cdot e^{-\frac{t}{\alpha}}} \right| - \frac{\alpha \cdot e^{\frac{T}{\alpha}}}{k_1} \ln \left| \frac{-1+k_1 \cdot e^{-\frac{t}{\alpha}}}{-1+k_1} \right| \right] \quad (5.35)$$

Tendo a equação do estado, é fácil obter \bar{i}_x e \bar{i}_u conforme já definidos. Assim, chega-se às seguintes expressões:

$$\bar{i}_x = \frac{x_0^2}{|-1+k_1|^{k_2}} \cdot \int_0^T \left| -e^{\frac{k_3}{k_2} \cdot t} + k_1 \cdot e^{\left(\frac{\alpha \cdot k_3 - k_2}{\alpha \cdot k_2}\right) \cdot t} \right|^{k_2} \cdot dt \quad (5.36)$$

$$\text{onde } k_2 = \frac{2 \cdot \alpha \cdot \gamma}{r} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{T}{\alpha}}}{k_1} \right) \quad (5.37)$$

$$k_3 = 2 \cdot \left(a + \frac{b \cdot \gamma}{r} \right) \quad (5.38)$$

e

$$\tilde{I}_u = \frac{b^2 \cdot \gamma^2 \cdot x_0^2}{r^2 \cdot |-1 + k_1|^{k_3}} \cdot \int_0^T \frac{(1 - 2 \cdot e^{-\frac{T-t}{\alpha}} + e^{-\frac{2 \cdot (T-t)}{\alpha}})}{(k_1 \cdot e^{-\frac{t}{\alpha}} - 1)} \cdot \left| -e^{\frac{k_3}{k_2} \cdot t} + k_1 \cdot e^{\left(\frac{\alpha \cdot k_3 - k_2}{\alpha \cdot k_2}\right) \cdot t} \right|^{k_2} dt \quad (5.39)$$

Como, $\left(-e^{\frac{k_3}{k_2} \cdot t} + K_1 \cdot e^{\left(\frac{\alpha \cdot k_3 - k_2}{\alpha \cdot k_2}\right) \cdot t} \right)$ é sempre negativo, pode-se

substituir o módulo deste termo, que aparece em (5.36) e

(5.39), por $\left(e^{\frac{k_3}{k_2} \cdot t} - k_1 \cdot e^{\left(\frac{\alpha \cdot k_3 - k_2}{\alpha \cdot k_2}\right) \cdot t} \right)$.

Nota: Com o intuito de explorar a solução analítica destas integrais, observa-se que sempre haverá um $T' > 0$, tal que se possa ter $k_2 = 1$, desde que $r / (2 \cdot \alpha \cdot \gamma) > 1$.

Considerando, então, o caso particular de se ter o extremo de integração igual a T' , (5.36) e (5.39) podem ser desmembradas em soma de integrais, onde todas são do tipo:

$$\int_0^{T'} \frac{e^{\delta \cdot t}}{(\delta \cdot e^{\omega \cdot t} - 1)^2} \cdot dt \quad (5.40)$$

Fazendo uma série de manipulações envolvendo mudanças de

variáveis, chega-se à seguinte expressão:

$$= \frac{1}{\varphi \cdot \xi} \cdot \left[\frac{y^{\lambda+1}}{\delta \cdot (\delta \cdot y - 1)} \Big|_1^{e^{\xi \cdot \varphi \cdot T'}} - \frac{\lambda}{\delta} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} \cdot \frac{y^{\lambda-n+1}}{\lambda-n+1} \Big|_1^{e^{\xi \cdot \varphi \cdot T'}} \right) \right] \quad (5.41)$$

$$\text{onde: } \varphi = \frac{\omega}{\xi} \quad (5.42)$$

$$y = e^{\xi \cdot \varphi \cdot t} \quad (5.43)$$

$$\lambda = \frac{1 - \varphi}{\varphi} \quad (5.44)$$

Substituindo os extremos obtém-se:

$$= \frac{1}{\varphi \cdot \xi} \cdot \left[\left(\frac{e^{\xi \cdot \varphi \cdot T' \cdot (\lambda+1)}}{\delta \cdot (e^{\xi \cdot \varphi \cdot T'} - 1)} - \frac{1}{\delta^2 - \delta} \right) - \frac{\lambda}{\delta} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} \cdot \frac{e^{\lambda-n+1}}{\lambda-n+1} \right) \right] \quad (5.45)$$

Pode-se, agora, aplicar a expressão (5.45) nas expressões (5.37) e (5.39) quantas vezes forem necessárias identificando os correspondentes coeficientes: ξ , φ , λ , δ e ω , em cada uma delas. Mas nota-se que, apesar de resolver a integral, o aparecimento de uma série infinita impede que se chegue a uma relação do tipo $r = f(q, \bar{i}_x \text{ ou } \bar{i}_u)$, além disso, o inevitável truncamento da série implica em erro. Tendo em vista estes fatos, a geração dos resultados, que serão apresentados a seguir, foram fruto da integração numérica das equações (5.36) e (5.39).

A exemplo do que foi feito anteriormente, pode-se representar as curvas de níveis para \bar{i}_x e \bar{i}_u em função de r e q , gráficos (5.7) e (5.8) respectivamente, para o caso particular de $t_r=1$ e novamente com os mesmos valores de a ,

b e x_0 .

Pode-se ver que, definindo a relação q/r , fica estabelecida a relação bi-unívoca entre \bar{i}_x e \bar{i}_u .

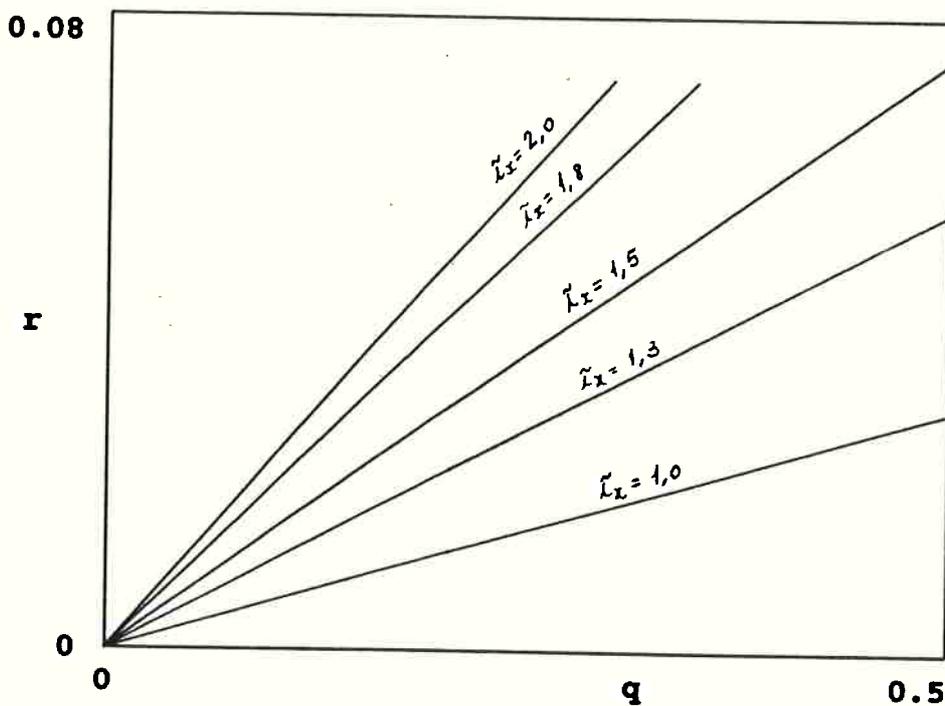


GRÁFICO 5.7: Curvas de \bar{i}_x const., no plano $r \times q$ para $t_f=1$.

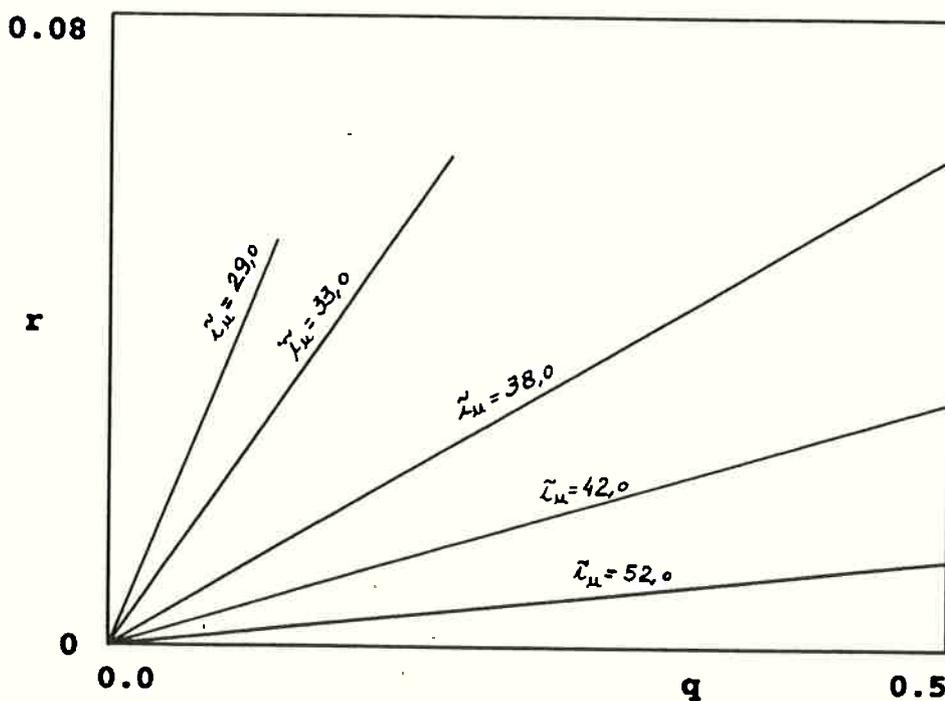


GRÁFICO 5.8: Curvas de \bar{i}_u const., no plano $r \times q$ para $t_f=1$.

OBS.: Comparando a relação \bar{i}_u/\bar{i}_x obtida quando se aplica ao sistema uma lei de controle do tipo $u(t)=f(t).x(t)$, onde $f(t)$ satisfaz a equação de Riccati, verifica-se, como era de se esperar, que a primeira apresenta valor superior à segunda. Os valores abaixo são referentes ao sistema que serve de exemplo.

$$\begin{array}{l} \text{i. } u(t)=-k.x(t) \quad \rightarrow \quad \bar{i}_x = 1.0 \\ (t_r=0.5) \\ \bar{i}_u = 41.566 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{i. } u(t)=-k.x(t) \\ (t_r=0.5) \\ \bar{i}_u = 41.566 \end{array}} \right\} \Rightarrow \bar{i}_u / \bar{i}_x = 41.566.$$

$$\begin{array}{l} \text{ii. } u(t)=f(t).x(t) \quad \rightarrow \quad \bar{i}_x = 1.0 \\ (t_r=0.5) \\ \bar{i}_u = 40.625 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{ii. } u(t)=f(t).x(t) \\ (t_r=0.5) \\ \bar{i}_u = 40.625 \end{array}} \right\} \Rightarrow \bar{i}_u / \bar{i}_x = 40.625.$$

Em outras palavras, para o caso **ii.**, gasta-se menos energia para se obter a mesma precisão de trajetória do caso **i.** Os gráficos (5.9) e (5.10) mostram, respectivamente, as curvas de níveis \bar{i}_x e \bar{i}_u representadas no plano $q/r \times t_r$.

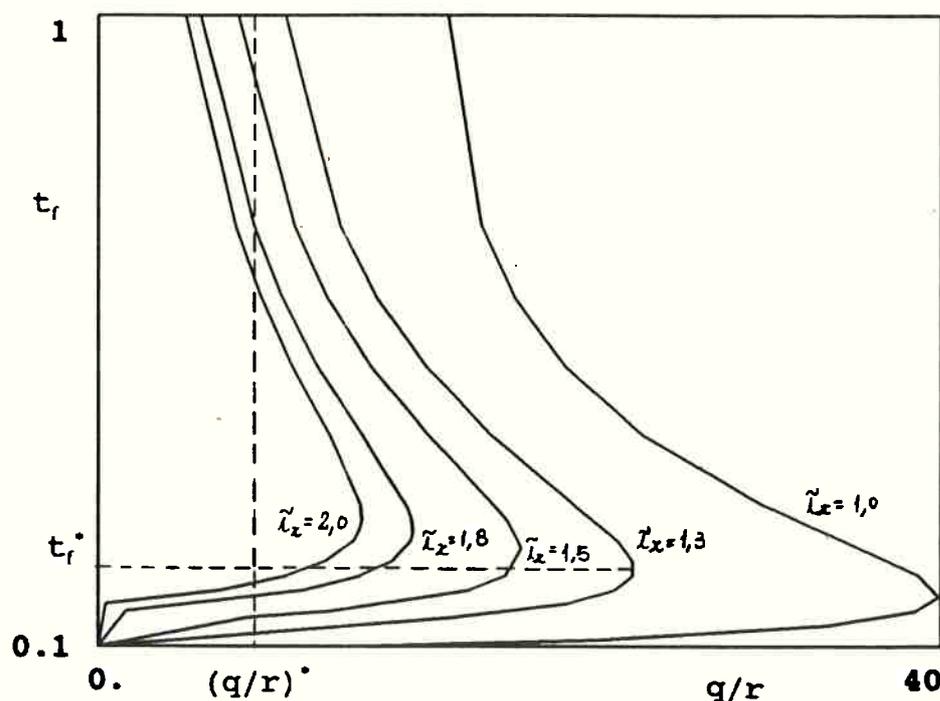


GRÁFICO 5.9: Curvas de \bar{i}_x const., no plano $t_r \times q/r$.

Manter \bar{i}_x constante aumentando-se o valor de t_f , implica em uma diminuição de x ao longo do tempo. O gráfico (5.9) mostra que até um certo t_f^* consegue-se esta diminuição, aumentando-se a relação q/r . Para valores maiores que t_f^* a diminuição do erro de trajetória é obtida às custas da diminuição de q/r até um valor assintótico $(q/r)^*$ quando t_f tende a infinito, pois como mostrado no capítulo 4, para $t_f \rightarrow \infty$, existe uma relação bi-unívoca entre q/r e \bar{i}_x .

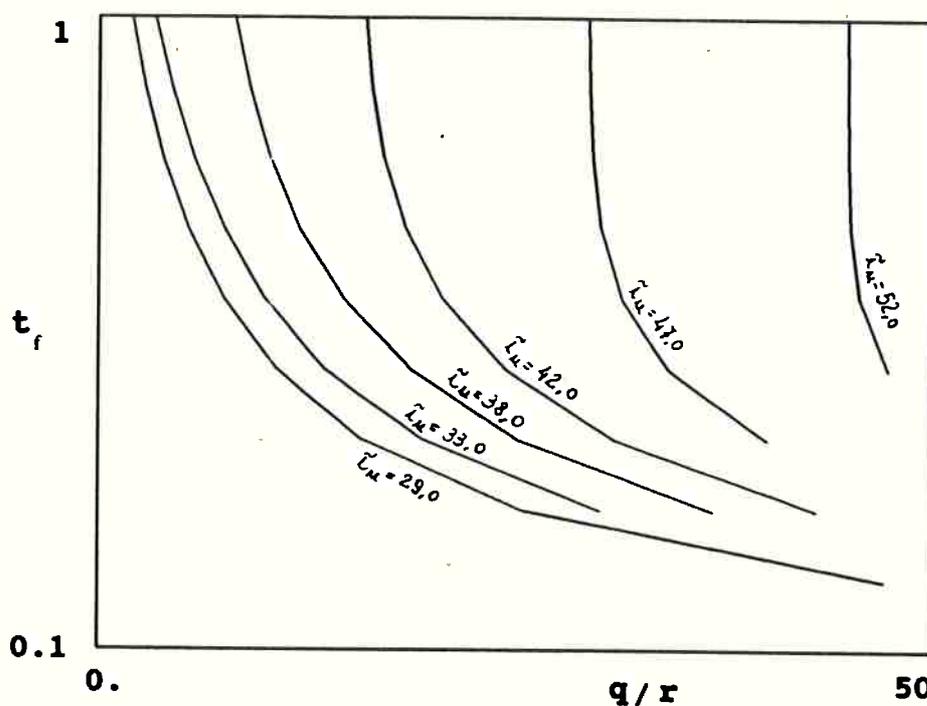


GRÁFICO 5.10: Curvas de \bar{i}_u const., no plano t_f x q/r .

O gráfico (5.11) reúne as curvas de (5.9) e (5.10) e identifica as linhas l_1 , l_2 , l_3 e l_4 , conforme definidas abaixo.

l_1 = linha de melhor escolha de q/r em relação a \bar{i}_x .

l_2 = linha de melhor escolha de t_f em relação a \bar{i}_x .

l_3 = linha de melhor escolha de q/r em relação a \bar{i}_u .

l_4 = linha de melhor escolha de t_f em relação a \bar{i}_u .

OBS: l_3 mostra uma situação limite.

O gráfico (5.11) mostra que:

$$l_2 \equiv l_4 ,$$

$$l_1 \cap l_4 \Rightarrow N_1 \text{ (primeira solução NASH)}$$

$$l_2 \cap l_3 \Rightarrow N_2 \text{ (segunda solução NASH)}$$

→ \bar{i}_x diminui (melhora a precisão)

← \bar{i}_u diminui (diminui o gasto de energia)

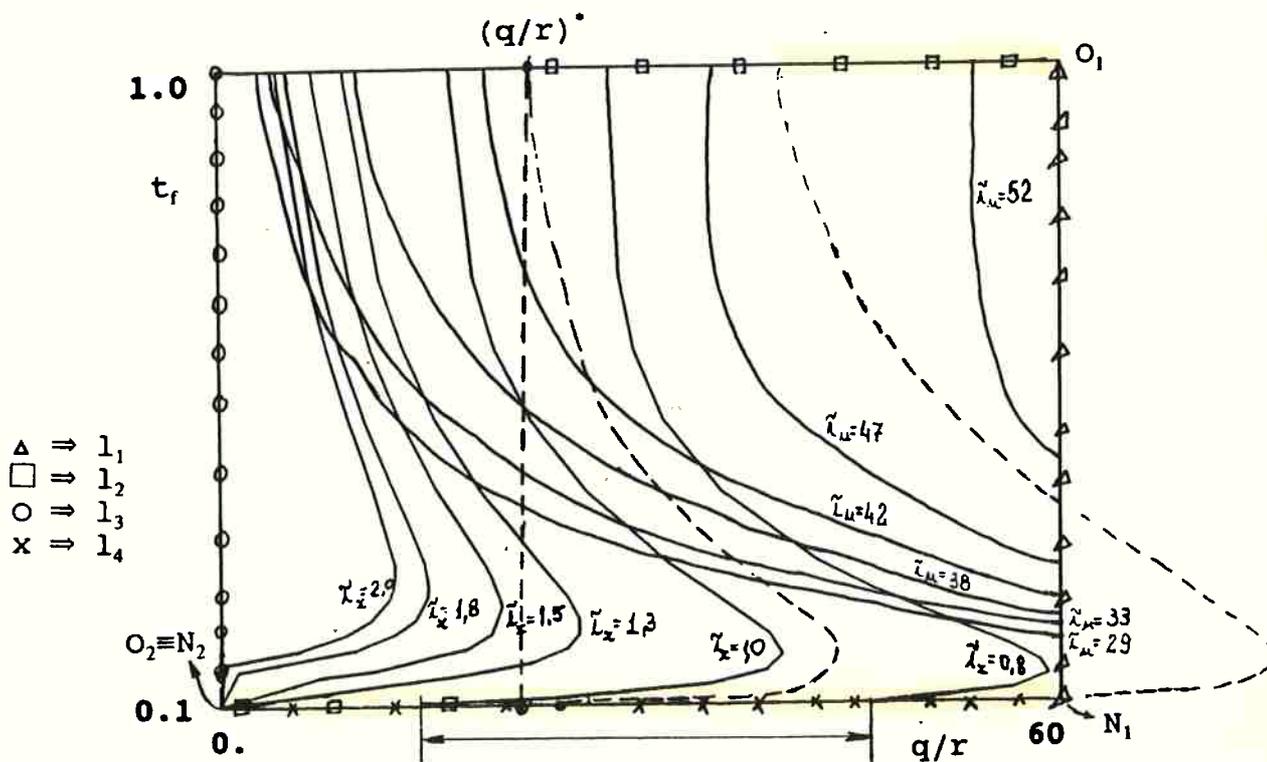


GRÁFICO 5.11: Curvas de \bar{i}_x e \bar{i}_u const., no plano t_f x q/r .

Sendo O_1 o ponto de menor \bar{i}_x e O_2 o de menor \bar{i}_u , pelo gráfico acima nota-se que o menor \bar{i}_x possível corresponde ao ponto onde q/r e t_f possuem valores máximos possíveis (60;1.0) e o menor \bar{i}_u possível tende a zero quando $q/r \rightarrow 0$, ou seja, $N_2 \equiv O_2$.

Nota-se que a linha l_2 possui um trecho no eixo das abscissas que vai de $q/r = 0$ até $(q/r)^* \in \bar{i}_x^*$; $1 < \bar{i}_x^* < 0.8$; onde $P_1 = ((q/r)^*, 0.1) \in \bar{i}_x^*$ e $P_2 = ((q/r)^*, 1.0) \in \bar{i}_x^*$; e outro na linha $t=1.0$

que vai de $(q/r)^*$ até $q/r=60$.

À esquerda de $(q/r)^*$ todas as linhas de \bar{i}_x que partem do eixo das abscissas, atingem a linha $t=1.0$, com valores de q/r maiores que $(q/r)^*$. Por outro lado, à direita de $(q/r)^*$, as linhas de \bar{i}_x que partem do eixo das abscissas, atingem a linha $t=1.0$, com valores de q/r menores que $(q/r)^*$; daí o fato de l_2 não ser contínua. Quanto ao conjunto Pareto-ótimo, também existe particularidade semelhante.

É fácil ver que o eixo das abscissas constitui uma parte deste conjunto, pois não é possível encontrar pares (\bar{i}_x, \bar{i}_u) menores, ambos, que qualquer par $(\bar{i}_x^*, \bar{i}_u^*)$ pertencente ao eixo das abscissas.

Além disso, existe uma parte do conjunto Pareto-ótimo situada na linha $t=1.0$, correspondente às curvas de \bar{i}_x que não atingem o eixo das abscissas no intervalo $[0,60]$ e, portanto, o menor \bar{i}_u interceptado por elas está sob a linha $t=1.0$.

Novamente, para se ter uma situação de maior valor prático, deve-se colocar o vínculo: $x(t_f) = x_f \leq x^* \Rightarrow t_{\min.}$

O $t_{\min.}$ como função de q/r pode ser obtido de (5.35) fazendo-se $t=T=t_{\min.}$. No gráfico (5.12) esta restrição foi colocada.

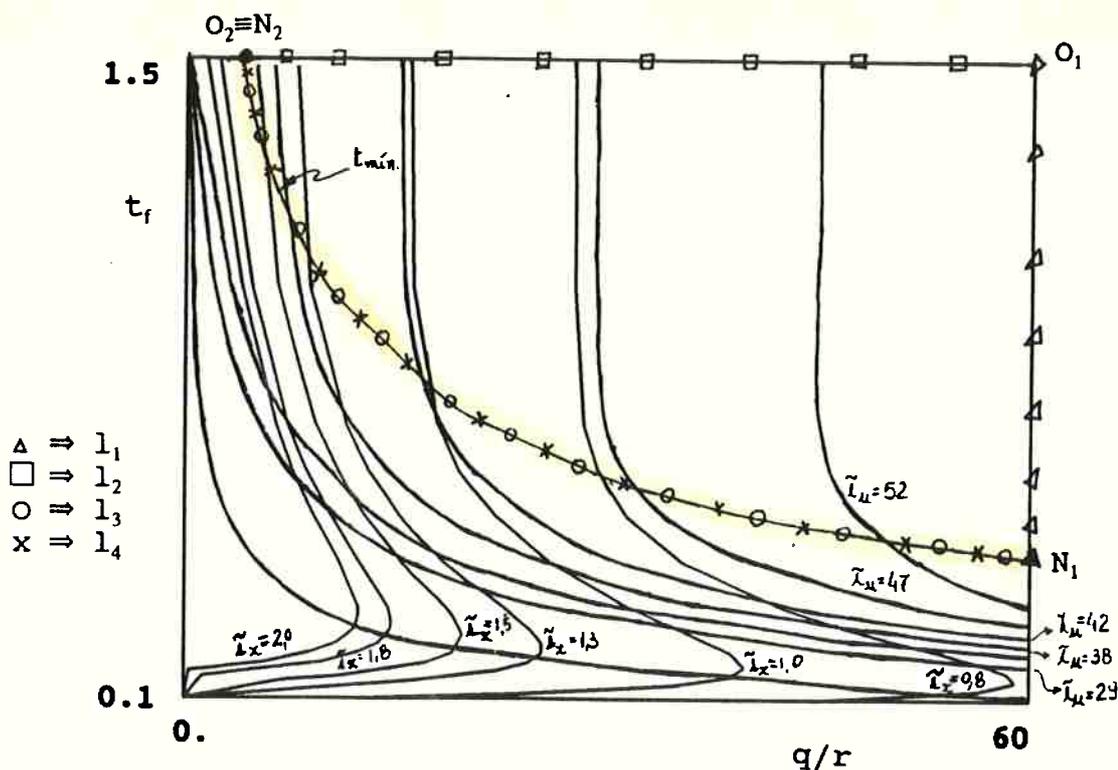


GRÁFICO 5.12: Inclusão da restrição $t_f \geq t_{mín.}$ para (5.11).

Pode-se ver que:

$$l_1 \cap l_4 \Rightarrow N_1 \text{ (primeira solução NASH)}$$

$$l_2 \cap l_3 \Rightarrow N_2 \text{ (segunda solução NASH)}$$

Além disso tem-se:

$$O_1 \text{ menor } \tilde{I}_x$$

$$O_2 \text{ menor } \tilde{I}_u \equiv N_2$$

Tomando-se um ponto P da linha $t_{mín.}$ tem-se a seguinte situação ao seu redor:

(+) índice "melhor"

(-) índice "pior"

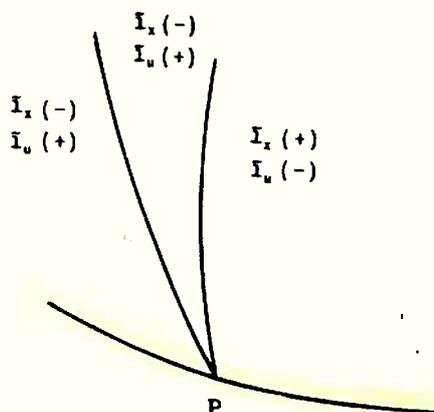


FIGURA 5.3: Comportamento ao redor de um ponto P de $\tilde{N}_1 \tilde{N}_2$.

Pela figura (5.3) pode-se observar que não existe, partindo-se de P , uma direção em que se consiga melhorar simultaneamente \bar{i}_x e \bar{i}_u . Logo, o segmento $\bar{N}_1\bar{N}_2$ define o conjunto Pareto-ótimo.

5.3 Conclusão do capítulo

Tomando-se como variáveis de decisão r e q , independente de se utilizar realimentação linear invariante no tempo ou aquela que satisfaz a equação diferencial de Riccati, o jogo será de soma-zero ou não cooperativo. Todavia, quando o jogo passa a ser comandado pelos jogadores t_i e K , a solução muda de característica, ou seja, o jogo passa a ser cooperativo apresentando um conjunto de soluções Pareto-ótimas, também independente do tipo de realimentação. Situação especulativa uma vez que o objetivo principal do texto é estudar as matrizes ou escalares de ponderação como variáveis de decisão.

O capítulo seguinte dedica-se à análise de como relacionar a característica de robustez ao conjunto solução.

6. Considerações a respeito da robustez

Este capítulo introduz o aspecto de robustez ao problema definido no ítem 4.2, que será tratado como mais um vínculo a ser satisfeito.

Entenda-se, aqui, robustez como sendo a capacidade do sistema de atenuar os efeitos de distúrbios e variações paramétricas da planta na variável controlada do sistema.

Assim, será objetivo do capítulo, derivar uma expressão que relacione R com Q, inequação (6.30), fornecendo o limite para o qual a variável controlada possua garantia de receber total proteção contra distúrbios e variações paramétricas.

Não será do escopo deste trabalho quantificar se um sistema é mais ou menos robusto que outro. A robustez será tratada como um limite, como uma condição de contorno; assim, terá sentido dizer, simplesmente, se o sistema é robusto ou não. Será frequente neste capítulo a utilização de expressões no domínio da frequência, sendo que as diversas variáveis serão relacionadas através de funções de transferência.

Para facilitar o entendimento, é necessário introduzir, inicialmente, alguns conceitos importantes já conhecidos.

A análise de distúrbios e variações paramétricas da planta leva à necessidade de se adaptar o índice de desempenho (2.5).

Assim, para a condição em que as variáveis de estado e controle são estocásticas, reescreve-se J da seguinte forma:

$$\bar{J} = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f - t_0} E \left\{ \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) * Q * x(t) + u^T(t) * R * u(t)] dt \right\} \quad (6.1)$$

Levando-se em conta que a atenuação dos efeitos de distúrbios e variações paramétricas da planta referem-se à variável controlada $z(t)$, onde $z(t)=D.x(t)$ (6.2), é conveniente reescrever (6.1) para esta variável:

$$\overline{J} = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f - t_0} E \left\{ \int_{t_0}^{t_f} [z^T(t) * Q' * z(t) + u^T(t) * R * u(t)] dt \right\} \quad (6.3)$$

onde:
$$Q' = (D^T)^{-1} * Q * D^T \quad (6.4)$$

Para o problema do regulador estocástico invariante no tempo e uma lei de controle invariante no tempo e assintoticamente estável (6.3) é igual a:

$$\overline{J} = \lim_{t \rightarrow \infty} E \{ z^T(t) * Q' * z(t) + u^T(t) * R * u(t) \} \quad (6.5)$$

Pode-se, ainda, escrever (6.5) como:

$$\overline{J} = Ce_{\infty} + Cu_{\infty} \quad (6.6)$$

onde:

$$Ce_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} E \{ z^T(x) * Q' * z(t) \} \quad (6.7)$$

$$Cu_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} E \{ u^T(t) * R * u(t) \} \quad (6.8)$$

Ce_{∞} e Cu_{∞} são chamados, respectivamente, de erro quadrático médio em regime permanente e controle quadrático médio em regime permanente.

Encontram-se na literatura, KWAKERNAAK; SIVAN (1972), ref.[2], condições que, quando satisfeitas, garantem ao sistema de controle com realimentação melhor desempenho em relação a efeitos de distúrbios e variações paramétricas da

planta que o sistema em malha aberta equivalente para condições de regime permanente.

6.1 Sistema em malha aberta equivalente para regime permanente

Denominando-se de $N(s)$ a matriz de transferência do sistema em malha fechada da variável de referência r para a entrada da planta u , sempre é possível construir um sistema de controle em malha aberta que tenha a mesma matriz de transferência $N(s)$.

Esquematizando, abaixo, os dois sistemas, tem-se:

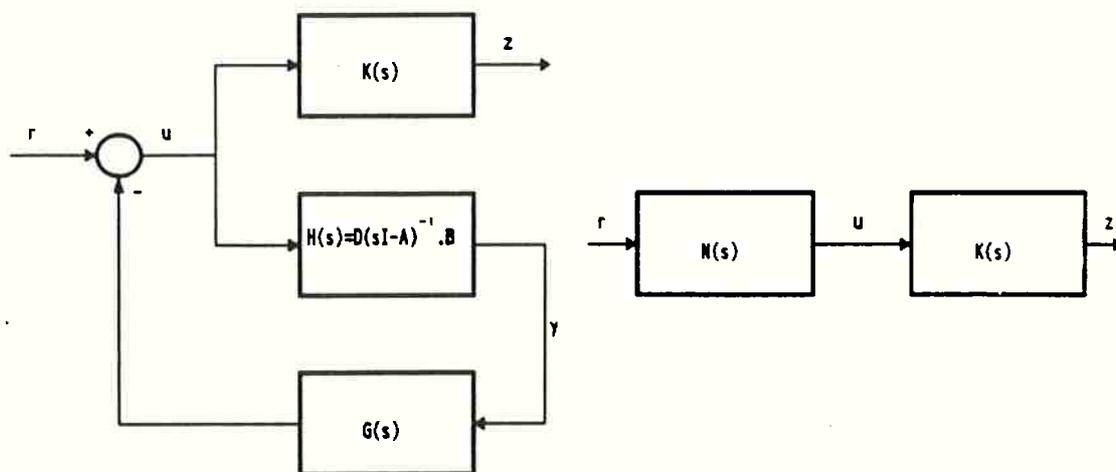


FIGURA 6.1: (a) Sistema de controle em malha fechada;
(b) Sistema de controle equivalente em malha aberta para regime permanente.

Para os dois casos (a e b), a transmissão do sistema (matriz de transferência da variável de referência r para a variável controlada z), dada por $T(s) = K(s) \cdot N(s)$ (6.9), é a mesma. Assim, como os dois sistemas possuem $T(s)$ e $N(s)$ iguais

(onde $N(s)=[I+G(s).H(s)]^{-1}$), terão os mesmos valores para Ce_{∞} e Cu_{∞} , o que justifica o nome: equivalente em regime permanente.

Quando estes dois sistemas são comparados com relação às suas características (estabilidade, Ce_{∞} , Cu_{∞} , comportamento transitório, efeito de distúrbios na planta, efeito do ruído de observação e sensibilidade quanto à variação de parâmetros da planta), ocorrem as três possibilidades: superioridade, inferioridade e igualdade de comportamento de um em relação ao outro. Neste trabalho, é de interesse comparar em que condições o sistema em malha fechada é superior ao seu equivalente com relação às características de sensibilidade.

6.2 Efeito de distúrbios na planta

Para o sistema mostrado na figura (6.1a), para o caso em que $H(s)=K(s)$, ou seja $C=D$, será introduzido o distúrbio $V_p(s)$, conforme figura (6.2), onde $V_p(s)$ é a transformada de Laplace de $v_p(t)$, representado pela soma v_{p0} , que é uma parte constante do distúrbio dada por um vetor estocástico, com $v_{pv}(t)$, que é um processo estocástico com média nula, estacionário com relação à magnitude da amplitude e tendo $\Sigma_{vp}(w)$ como matriz de densidade do espectro de potência. As contribuições da variável de distúrbio na variável controlada, para o sistema em malha fechada e aberta, valem respectivamente:

$$Z(s) = [I+H(s).G(s)]^{-1}.D.(sI-A)^{-1}.V_p(s) \quad (6.10)$$

$$Z(s) = D.(sI-A)^{-1}.V_p(s) \quad (6.11)$$

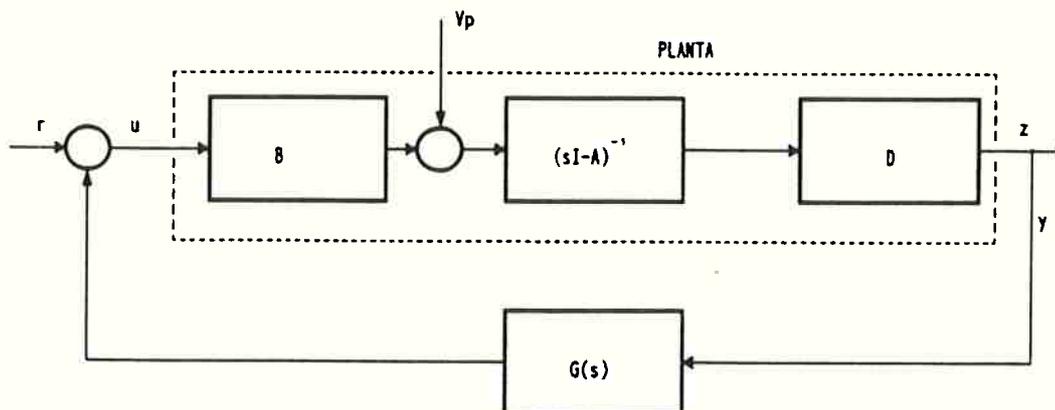


FIGURA 6.2: Sist. de controle com distúrbio na planta V_p .

A contribuição da variável de distúrbio no Ce_∞ é dada por:

Para o sistema em malha fechada:

$$\xi_1 = Ce_\infty(\text{com distúrbio}) - Ce_\infty(\text{sem distúrbio}) = \quad (6.12)$$

$$= \text{tr} \left\{ Se^T(0) \cdot Q' \cdot Se(0) \cdot V_o + \int_{-\infty}^{+\infty} Se^T(-j\omega) \cdot Q' \cdot Se(j\omega) \cdot \Sigma_{v_o}(\omega) \cdot d\omega \right\}$$

$$\text{onde:} \quad Se(s) = [I + H(s) \cdot G(s)]^{-1} \quad (6.13),$$

é chamada de matriz de sensibilidade do sistema.

$$\Sigma_{v_o}(\omega) = D \cdot (j\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot \Sigma_{v_p}(\omega) \cdot (-j\omega \cdot I - A^T)^{-1} \cdot D^T \quad (6.14)$$

$$V_o = D \cdot (-A)^{-1} \cdot E \{ v_{p0} \cdot v_{p0}^T \} \quad (6.15)$$

Para o sistema em malha aberta, a variação de Ce_∞ é dada por:

$$\xi_2 = \text{tr} \left\{ Q' \cdot V_o + \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma_{v_o}(\omega) \cdot Q' \cdot d\omega \right\} \quad (6.16)$$

Nota-se que ξ_2 independe do controlador, portanto sua redução é impossível.

Comparando ξ_1 com ξ_2 , verifica-se que o sistema de controle em malha fechada apresentará um acréscimo no cálculo de Ce_∞ devido aos distúrbios na planta, menor ou igual que o

acréscimo causado no sistema de controle equivalente em malha aberta para regime permanente, se e somente se:

$$Se^T(-jw).Q'.Se(jw) \leq Q', \text{ para todo real } w \quad (6.17)$$

Chamando $Rd(s)=Se^{-1}(s)$, pode-se reescrever (6.17) como:

$$Rd^T(-jw).Q'.Rd(jw) \geq Q' \quad (6.18)$$

6.3 Efeito das variações paramétricas da planta

Com relação aos efeitos de variações paramétricas da planta, novamente, fazendo-se a comparação entre o sistema em malha fechada e seu equivalente em malha aberta para regime permanente, para que haja superioridade do primeiro em relação ao segundo (onde não há possibilidade de atenuação do efeito), a seguinte relação deve ser atendida:

$$Se_o^T(-jw).Q'.Se_o(jw) \leq Q', \text{ para todo } w \quad (6.19)$$

onde $Se_o(s)$ é a função nominal de sensibilidade do sistema de controle, dada por: $Se_o(s)=[I+H_o(s).G(s)]^{-1}$ (6.20) e obviamente $H_o(s)$ é a função de transferência nominal da planta. Relação essencialmente igual a (6.17).

6.4 Robustez do regulador com realimentação ótima de estado

Derivando a expressão de $Rd(s)$ para o caso do regulador com realimentação ótima de estado, chega-se a:

$$Rd(s)=I+(sI-A)^{-1}.B.R^{-1}.B^T.S \quad (6.21)$$

onde S é, para o regime permanente, a solução da equação algébrica de Riccati:

$$D^T.Q'.D - S.B.R^{-1}.B^T.S + A^T.S + S.A = 0 \quad (6.22)$$

Para $K=R^{-1}.B^T.S$, de (6.21) e (6.22), chega-se a:

$$Rd^T(-s) \cdot (K^T \cdot R \cdot K) \cdot Rd(s) = K^T \cdot R \cdot K + K^T \cdot H^T(-s) \cdot Q' \cdot H(s) \cdot K \quad (6.23)$$

Substituindo $s=j\omega$, tem-se que o segundo termo do lado direito de (6.23) é uma matriz Hermitiana não-negativa definida, o que significa que:

$$Rd^T(-j\omega) \cdot (K^T \cdot R \cdot K) \cdot Rd(j\omega) \geq K^T \cdot R \cdot K \quad (6.24)$$

Para $\dim(z)=\dim(u)$ e sendo a matriz de transferência em malha aberta, $H(s)=D \cdot (sI-A)^{-1} \cdot B$, sem qualquer zero no semi-plano direito do plano complexo, a solução S da equação algébrica de Riccati, tende à matriz nula quando a matriz de ponderação $R \rightarrow 0$. Assim, tendo em vista que S é simétrica, é fácil ver, da equação (6.22), que:

$$S \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S = K^T \cdot R \cdot K \rightarrow D^T \cdot Q' \cdot D = Q \quad (6.25)$$

De (6.25) conclui-se que, no limite em que $R \rightarrow 0$, a proteção contra distúrbios e variações paramétricas é garantida para um sistema de controle em malha fechada com um índice de desempenho tal como definido em (6.1). Considerando que $x^T(t) \cdot Q \cdot x(t) = x^T(t) \cdot D^T \cdot Q' \cdot D \cdot x(t) = z^T(t) \cdot Q' \cdot z(t)$, pode-se dizer que a variável controlada também conta com esta característica.

Da equação (6.12) é fácil ver que a atenuação dos distúrbios a variações paramétricas é tanto maior quanto menor for o valor da função de sensibilidade e esta diminui quando o ganho de realimentação aumenta. Assim, diminuindo-se o valor de R , isto é, aumentando-se o ganho de realimentação, melhora-se a característica de robustez. Portanto, no limite de $R \rightarrow 0$ a variável controlada está recebendo o máximo de proteção contra distúrbios.

Para o caso em que $R \neq 0$, através das equações (6.22), (6.25) e (6.24), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \text{Rd}^T(-j\omega) \cdot (D^T \cdot Q' \cdot D + A^T \cdot S + S \cdot A) \cdot \text{Rd}(j\omega) = \\ K^T \cdot R \cdot K + K^T \cdot H^T(-j\omega) \cdot Q' \cdot H(j\omega) \cdot K \end{aligned} \quad (6.26)$$

ou

$$\begin{aligned} \text{Rd}^T(-j\omega) \cdot (D^T \cdot Q' \cdot D) \cdot \text{Rd}(j\omega) = D^T \cdot Q' \cdot D + A^T \cdot S + S \cdot A + \\ -\text{Rd}^T(-j\omega) \cdot (A^T \cdot S + S \cdot A) \cdot \text{Rd}(j\omega) + K^T \cdot H^T(-j\omega) \cdot Q' \cdot H(j\omega) \cdot K \end{aligned} \quad (6.27)$$

Observe que para se extrair de (6.27) uma relação do tipo: $\text{Rd}^T(-j\omega) \cdot (D^T \cdot Q' \cdot D) \cdot \text{Rd}(j\omega) \geq D^T \cdot Q' \cdot D$ (6.28) que garanta total proteção da variável controlada contra distúrbios e variações paramétricas, deve ocorrer:

$$\text{Rd}^T(-j\omega) \cdot (A^T \cdot S + S \cdot A) \cdot \text{Rd}(j\omega) - A^T \cdot S - S \cdot A \leq K^T \cdot H^T(-j\omega) \cdot Q' \cdot H(j\omega) \cdot K \quad (6.29)$$

É conveniente escrever a inequação (6.29) de tal forma que o lado direito não dependa de R; assim, chamando de $M = (K^T)^{-1}$ e $N = K^{-1}$, chega-se a:

$$\begin{aligned} M \cdot \text{Rd}^T(-j\omega) \cdot (A^T \cdot S + S \cdot A) \cdot \text{Rd}(j\omega) \cdot N - M \cdot A^T \cdot S \cdot N - M \cdot S \cdot A \cdot N \leq \\ H^T(-j\omega) \cdot Q' \cdot H(j\omega) \end{aligned} \quad (6.30)$$

Como foi dito anteriormente, obedecidas certas hipóteses, quando $R \rightarrow 0$, S também tende a zero. Por outro lado, aumentando-se o valor de R, S também aumenta. Assim, baseado nas expressões (6.21) e (6.30), é fácil ver que o aumento de R implica no aumento, em módulo, de todos os termos do lado esquerdo de (6.30). Observe que os dois termos negativos $(-M \cdot A^T \cdot S \cdot N)$ e $(-M \cdot S \cdot A \cdot N)$ são cancelados, uma vez que na equação de Rd (equação 6.21) aparece a matriz identidade somada a um outro termo, a parcela referente à matriz identidade gera os termos positivos que irão cancelar $(-M \cdot A^T \cdot S \cdot N)$ e $(-M \cdot S \cdot A \cdot N)$. Assim, do lado esquerdo de (6.30) tem-se, com certeza, uma soma de termos que aumenta quando

R aumenta e que tem que ser menor que o lado direito da expressão, que independe de R.

Logo, haverá um R máximo para a qual a inequação (6.30) é válida.

6.5 Aplicação ao caso SISO

Como na discussão acima foi considerado pré-fixado Q ou Q' nas expressões desenvolvidas, com relação ao caso SISO o limite de robustez irá existir para r/q ou r/q'.

Concluindo, a robustez do sistema em malha fechada é garantida para:

$$r/q' \leq \beta'_{\text{máx.}} \quad (6.31)$$

ou

$$r/q \leq \beta_{\text{máx.}} \quad (6.32)$$

onde $\beta'_{\text{máx.}}$ e $\beta_{\text{máx.}}$ são limites apontados pela equação (6.30).

Aplicando-se a equação (6.30) ao caso SISO, tem-se:

$$2.a.s. \left[\frac{r}{b.s} + \frac{b}{(-jw-a)} \right] \left[\frac{r}{b.s} + \frac{b}{(jw-a)} \right] - \frac{2.a.r^2}{b^2.s} \leq \frac{b^2.d^2.q'}{w^2+a^2} \quad (6.33)$$

Chamando $r/q' = \beta'$, após algumas manipulações, chega-se a:

$$-2.a^2\beta' + 2.a^2.\beta' \cdot \sqrt{1 + \frac{b^2}{\beta'.a^2}} \leq d^2.b^2 \quad (6.34)$$

Portanto,

$$\beta' \leq \frac{-\psi + \sqrt{\psi^2 + 8.a^4.d^4.b^2}}{4.a^4} \quad (6.35)$$

onde,

$$\psi = 4.a^2.b^2.(1-d^2) \quad (6.36)$$

Para exemplificar, utilizando-se o sistema estudado

anteriormente, onde $a=2$ e $b=1$, considerando-se $d=1$, tem-se:

$$\beta'_{\text{máx.}} = \beta_{\text{máx.}} = 0.1768 \quad (6.37)$$

ou seja,
$$r/q' = r/q \leq 0.1768 \quad (6.38)$$

O gráfico (6.1) mostra a inclusão desta restrição às curvas de $\tilde{\lambda}_x$ constantes no plano $r \times q$, representadas no gráfico (4.3).

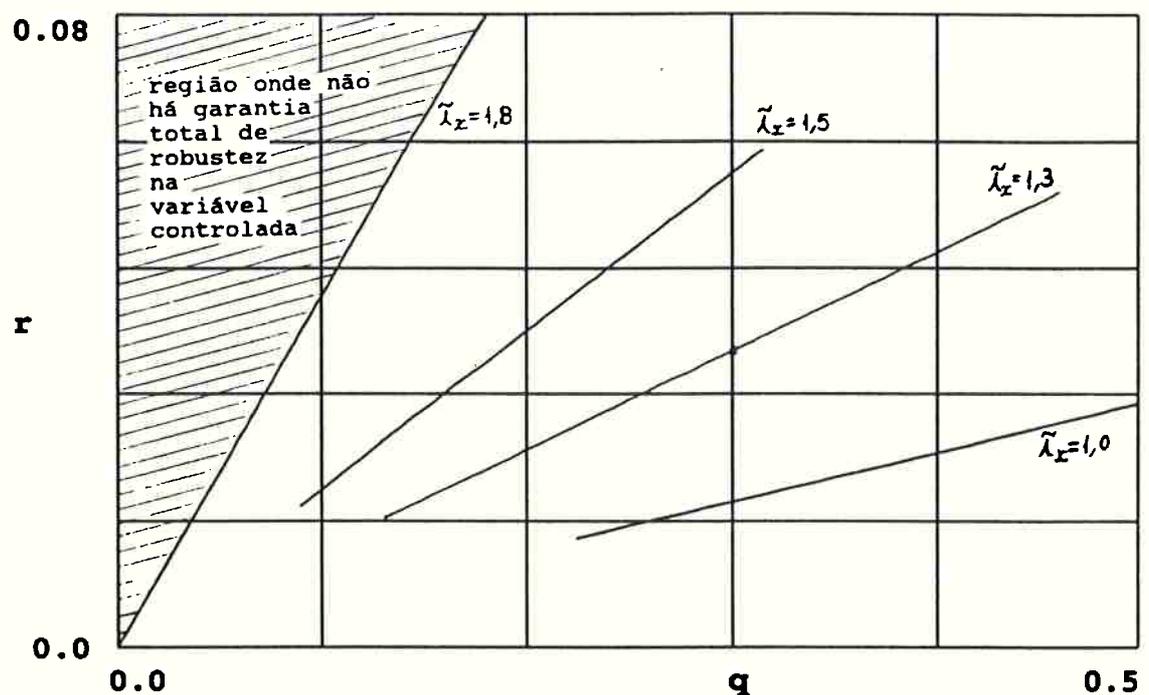


GRÁFICO 6.1: Inclusão da restrição $\beta_{\text{máx.}}$ referente à garantia de robustez.

Impor um limite máximo à relação r/q , para garantir robustez, é equivalente a estabelecer um limite mínimo para K . Assim, da equação (4.49), pode-se escrever:

$$K_{\text{mín.}} = \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{\beta_{\text{máx.}}}} \quad (6.39),$$

que para o exemplo em estudo vale: $K_{\text{mín.}}=5.107$, ou seja, $K \geq 5.107$.

O gráfico (6.2) mostra a inclusão desta restrição às curvas de \bar{l}_x e \bar{l}_u constantes, no plano $t \times K$, representadas no gráfico (5.6).

É importante observar que o gráfico (6.2) refere-se à condição de tempo final finito, o que a rigor não corresponde ao desenvolvimento que gerou a inequação (6.30). Todavia é intuitivo que ao menos como aproximação é válido introduzir este limite.

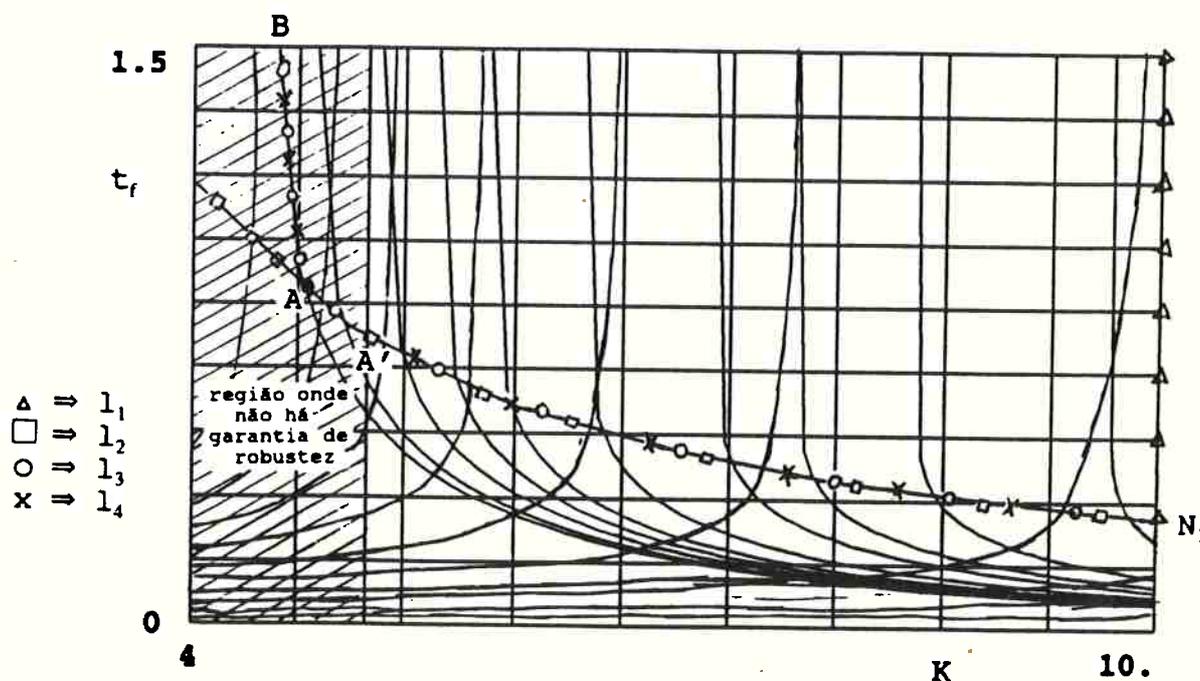


GRÁFICO 6.2: Inclusão da restrição K_{\min} referente à garantia de robustez.

Como pode ser visto pelo gráfico (6.2), a inclusão desta restrição leva a uma redução do conjunto Pareto-ótimo, que agora passa a ser definido, não mais pela linha $\bar{A}\bar{N}_1$, mas apenas pelo trecho $\bar{A}'\bar{N}_1$.

OBS: De um modo geral, para uma análise no domínio da frequência em que a planta só possui zeros no semi-plano

esquerdo do plano complexo, pode-se dizer que existe uma frequência de corte que será o limite entre haver ou não a proteção contra distúrbios e variações paramétricas. Esta frequência será determinada pelos pólos de malha fechada mais afastados da origem do plano complexo e esta distância aumenta quando R diminui.

6.6 Robustez do regulador com realimentação ótima da variável observada

Para o caso de se relaxar a hipótese de disponibilidade de medir todo o vetor de estado, para a realimentação, e trabalhar com um modelo mais realista em que,

$$y(t) = C \cdot x(t) \quad (6.40),$$

só é possível obter uma relação do tipo (6.17) para o caso assintótico em que R tende a zero. Para a configuração esquematizada na figura (6.3), as seguintes equações serão consideradas para descrever o sistema:

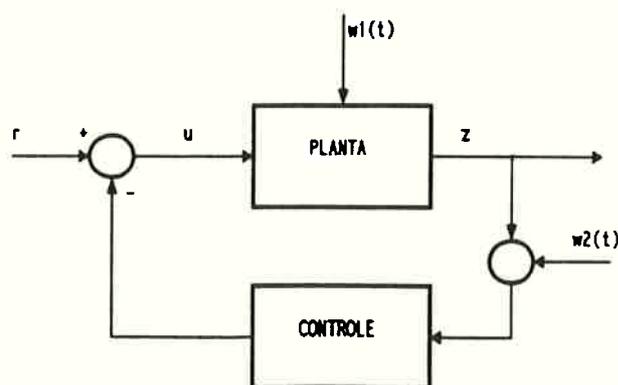


FIGURA 6.3: Configuração do sistema de controle com realimentação através de um observador com distúrbios na planta e na medição.

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + w_1(t) \quad (6.41),$$

onde w_1 é um ruído branco com intensidade constante V_1 .

$$y(t) = C \cdot x(t) + w_2(t) \quad (6.42),$$

onde w_2 é um ruído branco com intensidade V_2 não correlacionado com w_1 .

$$z(t) = D \cdot x(t) \quad (6.43),$$

para simplificar será considerado $C=D$.

Chamando de $\hat{x}(t)$ o vetor de observação e K a matriz de ganho do observador, no regime permanente, tem-se:

$$d\hat{x}(t)/dt = A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + K \cdot [y(t) - D \cdot \hat{x}(t)] \quad (6.44)$$

A matriz de sensibilidade deste sistema é dada por:

$$Se(s) = [I + H(s) \cdot G(s)]^{-1} \quad (6.45)$$

onde: $H(s) = D \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B \quad (6.46)$

e $G(s) = [I + K(sI - A + K \cdot D)^{-1} \cdot B]^{-1} \cdot B \cdot K \cdot (sI - A + K \cdot D)^{-1} \cdot K \quad (6.47)$

Para a matriz $Se(s)$, assim definida, não existe uma matriz de ponderação não-negativa definida que satisfaça uma inequação do tipo (6.17) para todas as frequências.

Em geral, haverá um intervalo de frequências, adaptado à banda de frequências dos distúrbios que agem sobre a planta, para o qual estes distúrbios são atenuados.

Por outro lado, para o caso limite em que $R \rightarrow 0$, pode-se obter uma expressão limite para $Se(s)$ ($Se^0(s)$) ou $Rd(s)$ ($Rd^0(s)$):

$$Rd^0(s) = I + D \cdot (sI - A)^{-1} \cdot K \quad (6.48)$$

Válida para o caso em que $\dim(z) = \dim(u)$ e a matriz de transferência $H(s)$ possui somente zeros com parte real não positiva.

Chamando de erro de estimativa: $\check{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ (6.49)

e definindo a matriz de variância $P(t)$ como sendo,

$$P(t) \triangleq E[\check{x} \cdot \check{x}^T] = E[(\hat{x} - x) \cdot (\hat{x} - x)^T] \quad (6.50),$$

sabe-se que a matriz $P_r(t)$ que leva a um \hat{x} ótimo, em regime permanente, satisfaz a seguinte equação algébrica de Riccati:

$$0 = V_1 - P_r \cdot D^T \cdot V_2^{-1} \cdot D \cdot P_r + A \cdot P_r + P_r \cdot A^T \quad (6.51)$$

Levando-se em conta (6.48) e (6.51), através de algumas manipulações (ver KWAKERNAAK; SIVAN (1972) ref.[2]), chega-se à relação pretendida:

$$Rd^0(jw) \cdot V_2 \cdot (Rd^0)^T(-jw) \geq V_2, \text{ para toda frequência } w \quad (6.52)$$

Assim, a expressão (6.52) mostra que, para o caso assintótico de $R \rightarrow 0$, haverá redução causada pelos efeitos dos distúrbios e variações paramétricas da planta, dentro do critério de comparação já mencionado. Para valores praticáveis de R , isto é $R > 0$, haverá, para certo intervalo de frequências, a violação deste resultado. Segundo KWAKERNAAK; SIVAN (1972) ref.[2], existem exemplos que mostram que esta violação ocorre na região de alta frequência; além disso, é dito que a atenuação não será muito prejudicada, desde que R seja pequeno o suficiente para que os pólos do regulador sejam "muito mais afastados" da origem que os pólos do observador.

Observe que a matriz de ponderação V_2^{-1} que surge na expressão (6.52) tem uma íntima relação com a matriz R , que pondera a expressão (6.24). Considerando que quanto menor $\|V_2\|$, maior a precisão com que os componentes de y são medidos. Isto permite a utilização de maior ganho de realimentação do sistema e, conseqüentemente, melhor atenuação dos efeitos

dos distúrbios e variações paramétricas são conseguidas.

Resumindo, quando $V_2^{-1} \rightarrow 0$ implica que R poderá tender a zero também (ou diminuir) e haverá o aumento da atenuação das perturbações.

Assim, a garantia de atenuação é obtida somente para os casos limites. Aplicado ao caso SISO:

$$r/q' \rightarrow 0 \quad (6.53)$$

ou $r/q \rightarrow 0 \quad (6.54)$

ou $K \rightarrow \infty \quad (6.55)$

6.7 Conclusão do capítulo

Em resumo, o capítulo mostra que para a medição completa do estado é possível obter uma expressão relacionando R com Q, que estipula o limite de garantia total de robustez à sensibilidade, ao contrário do que acontece quando se introduz um observador, situação em que tal garantia só acontece para casos limites e, portanto, de valor prático diminuído.

7. Solução do problema para o caso MIMO

7.1 Tempo final tendendo a infinito

Para o caso MIMO, em princípio, nada se pode afirmar sobre a existência ou não de um conjunto Pareto-ótimo para o jogo conforme definido no ítem 4.2.

Como poderá ser visto neste capítulo, para o caso MIMO este jogo passa a ser de soma não-zero, ou seja, é possível encontrar um par de matrizes (R', Q') que leva a uma solução em que tanto \bar{I}_x quanto \bar{I}_u apresentam valores melhores que os obtidos por um par qualquer $(R, Q) \notin \Lambda$.

Para o cálculo computacional de \bar{I}_x e \bar{I}_u é necessário fazer a integração no tempo das expressões (4.41) e (4.42).

Para R e Q quaisquer, as expressões (4.13) e (4.14) podem ser reescritas como:

$$x(t) = e^{\phi(s) \cdot t} \cdot x(0) \quad (7.1) \quad \phi(s) = A - B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S \quad (7.2)$$

Assim, substituindo (7.1) em (4.41) chega-se a:

$$\bar{I}_x = x^T(0) \cdot \int_0^{\infty} (\Phi^T \cdot \Phi) \cdot dt \cdot x(0) \quad (7.3),$$

pelo Teorema da expansão de Sylvester, considerando que $\phi(n \times n)$ tenha n auto-valores distintos, pode-se calcular Φ através das seguintes expressões:

$$\Phi = e^{\phi \cdot t} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i \cdot t} \cdot F_i \quad (7.4)$$

$$F_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\phi - \lambda_j \cdot I}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (7.5)$$

sendo λ , um dos n distintos auto-valores da matriz ϕ .

É fácil ver que a integração de (7.3) é bastante simples, pois fica reduzida à integral de uma somatória de $e^{\alpha t}$, onde o escalar $\alpha = f(\lambda_i)$.

Para o cálculo de \tilde{I}_u , substituindo em (4.42) a expressão da realimentação de estado, que satisfaz a equação de Riccati ($u = -R^{-1} \cdot B^T \cdot S \cdot x(t) = -K \cdot x(t)$), chega-se à seguinte expressão:

$$\tilde{I}_u = \int_0^{\infty} (K \cdot e^{\phi(s) \cdot t} \cdot x(0))^T \cdot (K \cdot e^{\phi(s) \cdot t} \cdot x(0)) \cdot dt \quad (7.6)$$

$$\text{ou } \tilde{I}_u = x^T(0) \cdot \int_0^{\infty} (\Phi^T \cdot P \cdot \Phi) \cdot dt \cdot x(0) \quad (7.7)$$

$$\text{onde,} \quad P = K^T \cdot K \quad (7.8)$$

A integral de (7.7) leva a uma matriz N ($n \times n$), onde o termo genérico $n(l, c)$ é dado pela expressão:

$$n(l, c) = \sum_{kk=1}^n \sum_{k=1}^n -p(k, kk) \cdot \int_0^{\infty} \Phi(k, l) \cdot \Phi(kk, c) \cdot dt \quad (7.9)$$

onde, p é elemento de P .

A exemplo do cálculo de \tilde{I}_x , a integral de (7.7) ou (7.9) é simples de ser resolvida, pois, trata-se de uma somatória de termos similares ao caso anterior.

Portanto o valor de \tilde{I}_u será dado por:

$$\tilde{I}_u = x^T(0) \cdot N \cdot x(0) \quad (7.10)$$

7.1.1 Programa Computacional

O programa desenvolvido manipula os elementos de R e Q (pré-fixados) para atingir a solução Pareto-ótima.

Cada rotina de manipulação de elementos promove alteração simultânea de um sub-conjunto do conjunto total a ser pesquisado. Por exemplo, para um sistema de $n=2$, o conjunto total de variáveis a serem pesquisadas é de 6 (R e Q são simétricos); assim, os sub-conjuntos de elementos manipulados simultaneamente serão de: 1 variável (6 sub-conjuntos), 2 variáveis ($C_{6,2} = 15$ sub-conjuntos), 3 variáveis ($C_{6,3} = 20$ sub-conjuntos), 4 variáveis ($C_{6,4} = 15$ sub-conjuntos), 5 variáveis ($C_{6,5} = 6$ sub-conjuntos) e 6 variáveis (sub-conjunto = conjunto total). Além disso, a pesquisa de cada sub-conjunto envolve o teste de todas as possibilidades de aumentar ou diminuir uma variável em relação às outras, conforme mostra a tabela abaixo:

n° de vars.	Rotina: VAR1 (1 var.)		Rotina:VAR2 (2 vars.)				Rotina:VAR3 (3 vars.)							
	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-	-	+	+
A	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-	-	+	+
B			+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	-	+
C							+	-	-	-	+	+	+	-

onde: (+) indica o aumento do valor da variável-
(-) indica a diminuição do valor da variável.

Tabela 7.1: Possíveis variações dos elementos das matrizes.

Para a rotina de 4 variáveis haverá o dobro de alternativas que há para a rotina de três variáveis. As alternativas são obtidas através do acréscimo de mais uma variável "D", com

possibilidades de aumento (+) ou diminuição (-) nos subconjuntos de 3 variáveis que aparecem no quadro acima, portanto um total de 16 alternativas. Pela mesma razão, a rotina com 5 variáveis terá 32 alternativas e a rotina com 6 variáveis, 64 alternativas.

Cada vez que uma alternativa testada promover a redução simultânea de \bar{I}_x e \bar{I}_u , haverá a atualização das matrizes R e Q. O processo de pesquisa envolvendo as rotinas de manipulação será repetido até que sucessivamente nenhuma delas promova qualquer alteração de R e Q, o que significa que a solução Pareto-ótima foi atingida.

É importante notar que no processo de busca da solução Pareto-ótima, invertendo-se a ordem com que as rotinas de pesquisa são aplicadas, pode-se obter soluções Pareto-ótimas distintas. Por exemplo, se for aplicada, primeiramente, a rotina que manipula 3 variáveis simultaneamente, poder-se-á chegar a uma solução diferente daquela em que o processo de busca inicia-se com a rotina que manipula apenas 1 variável. Este fato será exemplificado numericamente.

A repetição imediata de uma determinada rotina de busca, em geral, ainda é capaz de promover atualização de R e Q, uma vez que enquanto estiver havendo atualização destas matrizes, cada vez que o processo se reinicia, uma nova situação estará sendo testada. Apenas quando não houver qualquer atualização é que não terá sentido repetir determinada rotina, entretanto ela deverá ser aplicada novamente antes do término do processo, caso qualquer uma das outras rotinas de busca promova alguma atualização.

As rotinas de manipulação utilizadas foram:

VAR1 - manipulação de apenas um elemento.

VAR2 - manipulação de dois elementos simultaneamente.

VAR3 - manipulação de três elementos simultaneamente.

VAR4 - manipulação de quatro elementos simultaneamente.

VAR5 - manipulação de cinco elementos simultaneamente.

VAR6 - manipulação de seis elementos simultaneamente.

Para o caso de um sistema em que $n=3$, tem-se 12 incógnitas sendo necessário acrescentar rotinas que manipulem simultaneamente até as 12 incógnitas. Esta tarefa não é difícil, apenas trabalhosa, uma vez que a lógica das rotinas é sempre a mesma. Por outro lado, para sistemas de ordem elevada, além de tornar os programas bastante longos, o problema maior certamente será quanto ao tempo de processamento.

É possível que uma solução satisfatória para este problema esteja na investigação destas matrizes de ordem elevada manipulando-se apenas um número reduzido de variáveis. Obviamente que o conjunto encontrado não será o conjunto Pareto-ótimo pretendido e sim um conjunto sub-ótimo. O que leva a esta "suspeita" é o fato de que um conjunto sub-ótimo, muito próximo do conjunto Pareto-ótimo encontrado para $n=2$, foi obtido utilizando-se somente as rotinas: VAR1, VAR2 e VAR3. Este tópico por si só é bastante útil para problemas práticos e vasto para futuras investigações.

Cabe ainda ressaltar que as rotinas foram desenvolvidas para o ambiente MATLAB de onde vários recursos foram utilizados, tais como: operações matriciais, cálculo de auto-valores e auto-vetores, cálculo da solução da equação algébrica de

Riccati, etc.

O diagrama de blocos do programa para busca de solução Pareto-ótima pode ser visto no anexo B.

7.1.2 Exemplo de Aplicação

Para o caso em que $n=2$ as expressões (7.3) e (7.7) podem ser simplificadas:

$$\bar{I}_x = x^T(0) \cdot B \cdot x(0) \quad (7.11)$$

$$\text{onde } B = - \left[\frac{F_1^T \cdot F_1}{2 \cdot \lambda_1} + \frac{(F_2^T \cdot F_1 + F_1^T \cdot F_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{F_2^T \cdot F_2}{2 \cdot \lambda_2} \right] \quad (7.12)$$

$$F_1 = (\phi - \lambda_2 \cdot I) / (\lambda_1 - \lambda_2) \quad (7.13)$$

$$F_2 = -(\phi - \lambda_1 \cdot I) / (\lambda_1 - \lambda_2) \quad (7.14)$$

Para o cálculo de \bar{I}_u , a matriz N da expressão (7.10) pode ser obtida a partir de (7.9) onde cada elemento de N é dado por:

$$n(l, c) = \sum_{kk=1}^2 \sum_{k=1}^2 -p(k, kk) \cdot \left[\frac{F_1(k, l) \cdot F_1(kk, c)}{2 \cdot \lambda_1} + \frac{F_2(k, l) \cdot F_1(kk, c)}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \right. \\ \left. + \frac{F_1(k, l) \cdot F_2(kk, c)}{(\lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{F_2(k, l) \cdot F_2(kk, c)}{2 \cdot \lambda_2} \right], \quad \begin{matrix} [l=1, 2 \\ [c=1, 2 \end{matrix} \quad (7.15)$$

ou diretamente de (7.7) (mais simples no caso de se utilizar o programa MATLAB):

$$N = - \left[\frac{F_1^T \cdot P \cdot F_1}{2 \cdot \lambda_1} + \frac{F_2^T \cdot P \cdot F_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{F_1^T \cdot P \cdot F_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{F_2^T \cdot P \cdot F_2}{2 \cdot \lambda_2} \right] \quad (7.16)$$

Como exemplo numérico utilizou-se o sistema definido pelas seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A seguir será dado um exemplo da sequência de respostas obtidas pelas rotinas de busca.

Partindo-se das matrizes de ponderações dadas por:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

que fornecem os índices de performance:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_x &= 0.1938 \\ \tilde{I}_u &= 2.2374 \end{aligned} \quad , \quad \text{obtém-se:}$$

1° Etapa: VAR1

$$R = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.600 \\ -0.600 & 2.4000 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 3.0000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \tilde{I}_x &= 0.1411 \\ \tilde{I}_u &= 1.6427 \end{aligned}$$

2° Etapa: VAR1 → não atualizou.

3° Etapa: VAR2

$$R = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.600 \\ -0.600 & 2.1600 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 2.7000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 3.0000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \tilde{I}_x &= 0.1397 \\ \tilde{I}_u &= 1.6380 \end{aligned}$$

4° Etapa: VAR2

$$R = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.420 \\ -0.420 & 1.5120 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3.2400 & 1.0000 \\ 1.0000 & 2.4000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \tilde{I}_x &= 0.1382 \\ \tilde{I}_u &= 1.6156 \end{aligned}$$

5° Etapa: VAR2 → não atualizou.

6° Etapa: VAR3

$$R = \begin{bmatrix} 1.2000 & -0.462 \\ -0.462 & 1.3608 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3.5640 & 1.0000 \\ 1.0000 & 2.4000 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1372 \\ \tilde{I}_u = 1.6118 \end{cases}$$

7° Etapa: VAR3 → não atualizou.

8° Etapa: VAR4 → não atualizou.

9° Etapa: VAR5 → não atualizou.

10° Etapa: VAR6 → não atualizou.

11° Etapa: VAR1 → não atualizou.

12° Etapa: VAR2 → não atualizou.

Portanto, o resultado final apresenta um valor de \tilde{I}_x que é 71% do valor original e um valor de \tilde{I}_u que é 72% do valor original de partida.

Partindo-se de outras matrizes R e Q chega-se a outras soluções Pareto-ótimas, podendo-se, assim, estabelecer um gráfico destas soluções no plano $\tilde{I}_x \times \tilde{I}_u$.

O gráfico (7.1) que mostra o conjunto Pareto-ótimo para o exemplo estudado foi construído com os índices alcançados pelas seguintes matrizes R e Q encontradas pelo programa.

$$R = \begin{bmatrix} 6.6000 & 3.3000 \\ 3.3000 & 3.8500 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2.2000 & 1.7600 \\ 1.7600 & 2.2000 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.2818 \\ \tilde{I}_u = 1.3381 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2.0000 & 0.9900 \\ 0.9900 & 1.4580 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2.7000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 3.0000 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.2166 \\ \tilde{I}_u = 1.3931 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.6500 & -0.035 \\ -0.035 & 1.7107 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3.8610 & 1.7325 \\ 1.7325 & 2.9250 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1644 \\ \tilde{I}_u = 1.5047 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 3.3000 & 1.2100 \\ 1.2100 & 3.6300 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 18.150 & 1.1000 \\ 1.1000 & 8.7120 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1640 \\ \tilde{I}_u = 1.5060 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 7.9200 & -4.950 \\ -4.950 & 8.8000 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 4.2350 & 3.3000 \\ 3.3000 & 3.8500 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1874 \\ \tilde{I}_u = 1.4448 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2.6400 & 1.0800 \\ 1.0800 & 2.1600 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 4.8000 & 1.2000 \\ 1.2000 & 4.8000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.2034 \\ \tilde{I}_u = 1.4134 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 4.5000 & -3.000 \\ -3.000 & 7.0000 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 7.2000 & -2.000 \\ -2.000 & 1.1000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.2414 \\ \tilde{I}_u = 1.3648 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2.5000 & -0.500 \\ -0.500 & 2.5000 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 12.000 & 11.000 \\ 11.000 & 12.000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.0943 \\ \tilde{I}_u = 1.9378 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2.5000 & -0.500 \\ -0.500 & 2.5000 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 12.000 & 6.0000 \\ 6.0000 & 8.0000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1111 \\ \tilde{I}_u = 1.7774 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 8.8000 & 6.0000 \\ 6.0000 & 5.5000 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 9.9000 & -1.800 \\ -1.800 & 3.0000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.2889 \\ \tilde{I}_u = 1.3364 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.7600 & -0.010 \\ -0.010 & 1.5876 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2.4000 & 2.0000 \\ 2.0000 & 3.0000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1710 \\ \tilde{I}_u = 1.4854 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 3.0000 & -0.400 \\ -0.400 & 3.0000 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 5.0000 & 4.0000 \\ 4.0000 & 5.0000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1615 \\ \tilde{I}_u = 1.5142 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.550 \\ -0.550 & 1.1000 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.9000 & 0.8000 \\ 0.8000 & 1.1000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1554 \\ \tilde{I}_u = 1.5352 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.4300 & -0.6655 \\ -0.6655 & 1.7280 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 4.4000 & 0.9504 \\ 0.9504 & 1.1000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1473 \\ \tilde{I}_u = 1.5664 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.1000 & -0.3630 \\ -0.3630 & 1.4580 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 7.0000 & 0.8000 \\ 0.8000 & 1.1000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1315 \\ \tilde{I}_u = 1.6415 \end{cases}$$

OBS: Mudando-se a sequência com que as rotinas de manipulação são aplicadas chega-se a soluções Pareto-ótimas distintas.

Por exemplo, partindo-se de:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e seguindo a sequência: VAR6, VAR6, VAR6, VAR5, VAR4, VAR4, VAR3, VAR2, VAR1, VAR5 e VAR6, chega-se a:

$$R_f = \begin{bmatrix} 10.648 & -4.950 \\ -4.950 & 11.520 \end{bmatrix}, Q_f = \begin{bmatrix} 28.314 & 7.7220 \\ 7.7220 & 23.100 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1311 \\ \tilde{I}_u = 1.6437 \end{cases}$$

Trata-se, também, de uma solução Pareto-ótima, porém distinta da que foi encontrada através da sequência mostrada anteriormente.

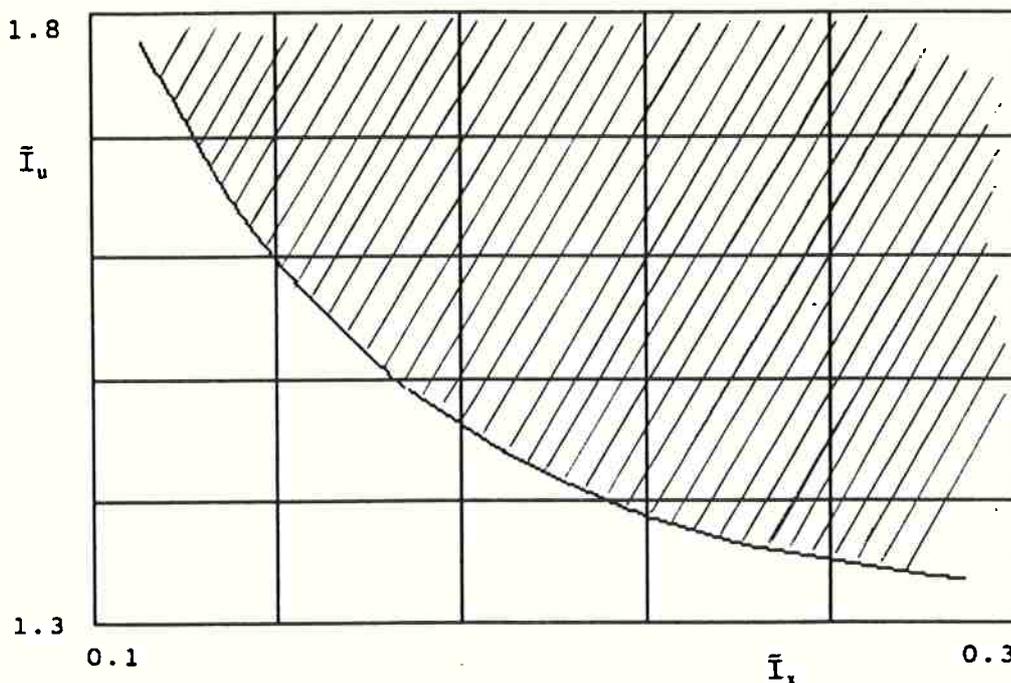


GRÁFICO 7.1: Conjunto Pareto-ótimo, caso MIMO, $t_f \rightarrow \infty$.

A existência de conjunto Pareto-ótimo para o caso MIMO, caracterizando um jogo cooperativo, ao contrário do que foi demonstrado para o caso SISO, pode ser atribuída ao fato que, em geral, um sistema dinâmico é regido por um sistema de equações diferenciais acopladas, influência mútua dos graus de liberdade; desta forma é de se esperar que as massas de ponderação, que irão minimizar os índices de desempenho, também devam estar acopladas para que a energia gasta no controle de um determinado grau de liberdade seja compatível com aquela empregada no controle dos demais.

7.1.3 Geração do Conjunto Pareto-ótimo

O gráfico (7.1) foi construído através de um processo exaustivo de procura de matrizes de ponderação que cubram

uma faixa de interesse de valores de desempenho. Para uma maior eficiência do processo de determinação deste conjunto, pode-se utilizar métodos de geração que estipulam um critério de precisão para valores interpolados ou extrapolados. No anexo A foi colocada uma descrição do método NISE ("Noninferior Set Estimation"), sendo que neste ítem será mostrada a sua aplicação.

Antes, porém, de se procurar aplicar o método NISE, é conveniente que se faça algumas considerações.

A figura (7.1) representa no plano \tilde{I}_x x \tilde{I}_u algumas soluções encontradas anteriormente.

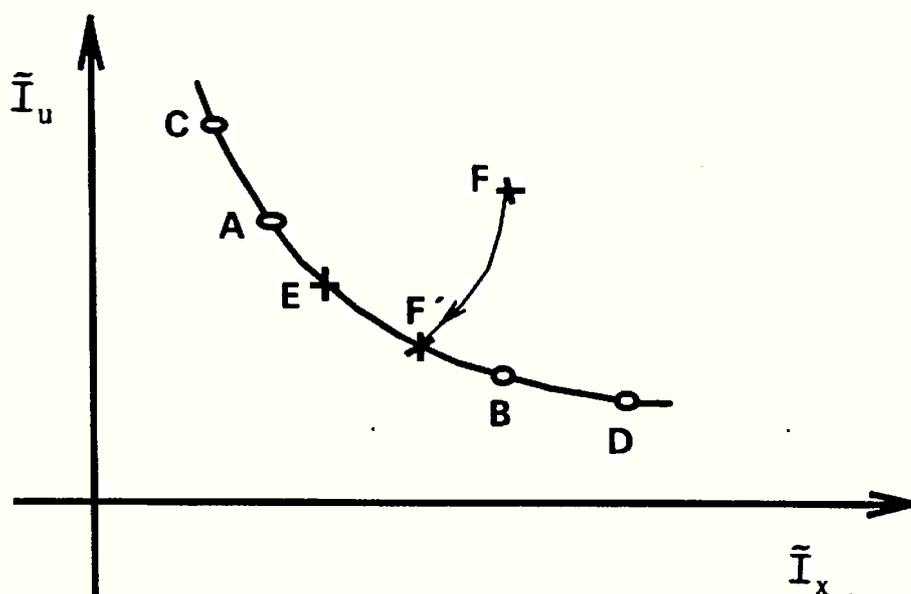


FIGURA 7.1: Conjunto Pareto-ótimo Λ .

$$\text{Ponto A} \rightarrow R_A = \begin{bmatrix} 3.00 & -0.4 \\ -0.4 & 3.00 \end{bmatrix}, Q_A = \begin{bmatrix} 5.00 & 4.00 \\ 4.00 & 5.00 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_{xA} = 0.1615 \\ \tilde{I}_{uA} = 1.5142 \end{cases}$$

$$\text{Ponto B} \rightarrow R_B = \begin{bmatrix} 2.64 & 1.08 \\ 1.08 & 2.16 \end{bmatrix}, Q_B = \begin{bmatrix} 4.80 & 1.20 \\ 1.20 & 4.80 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_{xB} = 0.2034 \\ \tilde{I}_{uB} = 1.4134 \end{cases}$$

1º Caso de interpolação: Definindo-se os elementos de R_E e Q_E como as médias dos elementos de R_A com R_B e Q_A com Q_B , respectivamente, tem-se:

$$R_E = \begin{bmatrix} 2.82 & 0.34 \\ 0.34 & 2.58 \end{bmatrix}, \quad Q_E = \begin{bmatrix} 4.90 & 2.60 \\ 2.60 & 4.90 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_{xE}=0.1797 \\ \tilde{I}_{uE}=1.4624 \end{cases}$$

Utilizando-se as seis rotinas de busca para (R_E, Q_E) nenhuma atualização foi executada. Portanto, (R_E, Q_E) leva a um ponto $E \in \Lambda$.

$$\text{Ponto C} \rightarrow R_C = \begin{bmatrix} 2.50 & -0.5 \\ -0.5 & 2.50 \end{bmatrix}, \quad Q_C = \begin{bmatrix} 12.0 & 6.00 \\ 6.00 & 8.00 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_{xC}=0.1111 \\ \tilde{I}_{uC}=1.7774 \end{cases}$$

$$\text{Ponto D} \rightarrow R_D = \begin{bmatrix} 6.60 & 3.30 \\ 3.30 & 3.85 \end{bmatrix}, \quad Q_D = \begin{bmatrix} 2.20 & 1.76 \\ 1.76 & 2.20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_{xD}=0.2818 \\ \tilde{I}_{uD}=1.3381 \end{cases}$$

2º Caso de interpolação: A exemplo do caso anterior, definem-se os elementos de R_F e Q_F a partir das médias dos elementos de (R_C, Q_C) e (R_D, Q_D) .

$$R_F = \begin{bmatrix} 4.5500 & 1.4000 \\ 1.4000 & 3.1750 \end{bmatrix}, \quad Q_F = \begin{bmatrix} 7.1000 & 3.8800 \\ 3.8800 & 5.1000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_{xF}=0.1945 \\ \tilde{I}_{uF}=1.4404 \end{cases}$$

Porém, para este caso, a utilização do programa de busca consegue atualizar estas matrizes fornecendo índices melhorados.

$$R'_F = \begin{bmatrix} 4.0541 & 1.5400 \\ 1.5400 & 3.8418 \end{bmatrix}, \quad Q'_F = \begin{bmatrix} 8.5910 & 4.2680 \\ 4.2680 & 5.0490 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_{xF'}=0.1923 \\ \tilde{I}_{uF'}=1.4341 \end{cases}$$

Portanto, a interpolação linear leva a um valor de 1.14%

maior em relação a \bar{I}_x Pareto (\bar{I}_{xP}) e 0.44% em relação a \bar{I}_u Pareto (\bar{I}_{uP}). Em outras palavras, o par ($\bar{I}_{xP}, \bar{I}_{uP}$) é aceitável para limites de erros superiores às porcentagens mencionadas.

Como era de se esperar, à medida que aumenta a distância entre os pontos extremos da interpolação, aumenta o erro em relação à solução Pareto-ótima (segmento $\overline{AB} < \overline{CD}$).

Desta forma, o que o método NISE estipula, no fundo, é a distância máxima entre os extremos de interpolação (ou extrapolação) para que o erro máximo possível esteja abaixo de um erro máximo permitido pré-fixado.

Cabe ainda observar que o processo de extrapolação é absolutamente análogo, basta que, dados dois pontos da curva Pareto: E e D (à direita de E), um deles seja tomado como valor médio com relação a um terceiro ponto T a ser extrapolado. Para o caso de se caminhar para a direita, o ponto D será tomado como médio. Assim, cada elemento das matrizes R_T e Q_T que fornecem T, será calculado seguindo a orientação de $E \rightarrow D$.

Para aplicar o método NISE, inicialmente, define-se o erro máximo permitido como uma porcentagem do erro máximo possível dados dois pontos da curva Pareto-ótima.

Para exemplificar, tomando-se o segmento \overline{CD} como segmento primário, pode-se definir o erro máximo permitido a partir da altura do triângulo mostrado na figura (7.2).

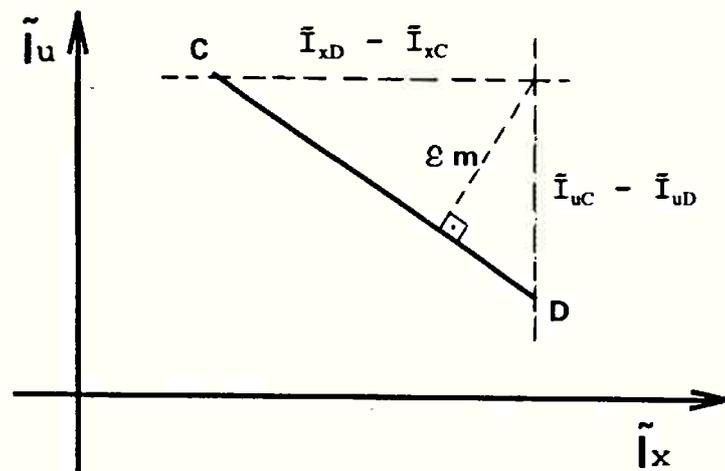


FIGURA 7.2: Erro máximo possível.

Portanto, o erro máximo permitido (MEP) será:

$$MEP = c * \sqrt{\frac{(\tilde{I}_{xD} - \tilde{I}_{xC})^2 * (\tilde{I}_{uC} - \tilde{I}_{uD})^2}{(\tilde{I}_{xD} - \tilde{I}_{xC})^2 + (\tilde{I}_{uC} - \tilde{I}_{uD})^2}} \quad (7.17)$$

Para $c = 1\% \Rightarrow MEP = 0.001591$.

A validação da interpolação linear é feita comparando-se o máximo erro possível MEPO com o MEP. O valor do MEPO corresponde à altura do triângulo mostrado na figura (7.3), que é dado por:

$$h = \frac{\overline{PQ} \cdot \operatorname{tg} \hat{A} \cdot \operatorname{tg} \hat{B}}{\operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{A}} \quad (7.18)$$

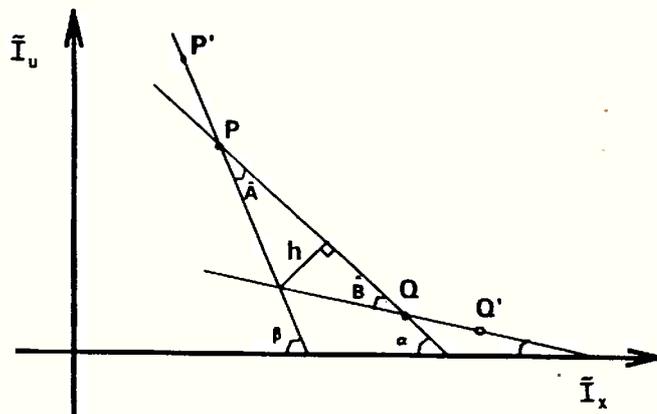


FIGURA 7.3: Erro máximo possível.

onde:

$$\hat{A} = \beta - \alpha \quad (7.19)$$

$$\hat{B} = \alpha - \gamma \quad (7.20)$$

$$\alpha = \arctg \left(\frac{Y_{P'} - Y_Q}{X_Q - X_{P'}} \right) \quad (7.21)$$

$$\beta = \arctg \left(\frac{Y_{P'} - Y_P}{X_P - X_{P'}} \right) \quad (7.22)$$

$$\gamma = \arctg \left(\frac{Y_Q - Y_{Q'}}{X_{Q'} - X_Q} \right) \quad (7.23)$$

$$x \equiv \tilde{I}_x \quad (7.24)$$

$$y \equiv \tilde{I}_u \quad (7.25)$$

Tomando-se no gráfico (7.1) os pontos Q' e P' adjacentes a Q e P, respectivamente, cujos índices são:

$$\begin{aligned} [\tilde{I}_{xQ'}] &= 0.2889 \\ [\tilde{I}_{uQ'}] &= 1.3364 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\tilde{I}_{xP'}] &= 0.0943 \\ [\tilde{I}_{uP'}] &= 1.9378 \end{aligned}$$

chega-se ao valor de $h = 0.1081 = \text{MEPO} > \text{MEP}$.

Por outro lado, tomando-se como valores de P e Q os pontos:

$$P \rightarrow \begin{aligned} [\tilde{I}_x] &= 0.1554 \\ [\tilde{I}_u] &= 1.5352 \end{aligned}$$

$$e \quad Q \rightarrow \begin{aligned} [\tilde{I}_x] &= 0.1615 \\ [\tilde{I}_u] &= 1.5142 \end{aligned}$$

e os respectivos pontos adjacentes, chega-se a um valor de $h = 0.0001965 = \text{MEPO} < \text{MEP}$. O que significa que a interpolação linear neste intervalo garante a precisão pré-fixada.

7.2 Considerações a respeito da robustez à sensibilidade para o caso MIMO

Para o caso MIMO, a inequação (6.30) estabelece uma relação de "tamanho" entre matrizes; assim, é preciso lembrar que esta relação é gerada do desenvolvimento da condição dada pela inequação (6.24), que é fruto da comparação entre o erro quadrático médio de um sistema em malha fechada e seu equivalente em malha aberta em regime permanente. Esta comparação entre $C_{e_{\infty}}$ dos dois sistemas dá origem a um teorema (KWAKERNAAK; SIVAN (1972), ref.[2]) cuja prova baseia-se no fato que, dado duas matrizes Hermitianas não-negativas quaisquer (M_1 e M_2), então,

$$M_1 \geq M_2 \Leftrightarrow \text{tr}(M_1 \cdot N) \geq \text{tr}(M_2 \cdot N) \quad (7.26)$$

onde N é uma matriz Hermitiana não-negativa qualquer.

Lembrando que os elementos da diagonal principal de uma matriz Hermitiana são números reais e que os elementos simétricos em relação a esta diagonal são complexos conjugados, é fácil ver que o $\text{tr}(M_1 \cdot N)$ é um número real. Além disso, se a relação deve valer para qualquer N , significa que cada elemento da diagonal principal de M_1 deve ser maior que seu correspondente em M_2 .

O fato acima pode ser empregado para tratar a inequação (6.30) que também possui em ambos os lados matrizes

Hermitianas não-negativas. Pode não ser imediata esta constatação quanto ao lado esquerdo da expressão, todavia, basta observar que o primeiro membro, que sabidamente é uma matriz Hermitiana, está sendo somado a uma matriz real e simétrica $(-M.A^T.S.N - M.S.A.N)$, o que garante a condição da matriz do lado esquerdo de (6.30) ser Hermitiana. Para certificar-se de que é uma matriz não-negativa basta desenvolver a expressão substituindo $Rd(jw)$ dado por (6.21).

7.2.1 Exemplo de Aplicação

Com relação ao exemplo em estudo, onde $n=2$, tem-se as seguintes matrizes:

$$C_1 = Rd^T(-jw) \cdot F \cdot Rd(jw) =$$

$$= \begin{bmatrix} f(1,1) \cdot \left(\frac{g(1,1)}{jw-2} + 1\right) \left(1 - \frac{g(1,1)}{jw+2}\right) & 0 & \\ 0 & f(2,2) \cdot \left(\frac{g(2,2)}{jw-3} + 1\right) \left(1 - \frac{g(2,2)}{jw-3}\right) & \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

onde: os $f(i,j)$ são elementos de $F=(A^T.S+S.A)$ e $g(i,j)$ são elementos de $G=B.R^{-1}.B^T.S$.

$$C_2 = H^T(-jw) \cdot Q' \cdot H(jw) = \begin{bmatrix} \frac{-q'(1,1)}{(jw-2)(jw+2)} & 0 & \\ 0 & \frac{-q'(2,2)}{(jw-3)(jw+3)} & \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

onde $q'(i,j)$ são elementos de Q' .

Reescrevendo C_1 e C_2 tem-se:

$$C_1 = \begin{bmatrix} f(1,1) \cdot \left(\frac{g(1,1)^2 - 4 \cdot g(1,1) + w^2 + 4}{w^2 + 4}\right) & 0 & \\ 0 & f(2,2) \cdot \left(\frac{g(2,2)^2 - 6 \cdot g(2,2) + w^2 + 9}{w^2 + 9}\right) & \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} \frac{q'(1,1)}{w^2+4} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{q'(2,2)}{w^2+9} & 1 \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

Substituindo em (6.30), chega-se às seguintes condições:

i.

$$m(1,1)^2 \cdot \left(\frac{k_1 + f(1,1) \cdot w^2}{w^2+4} \right) + m(1,2)^2 \cdot \left(\frac{k_2 + f(2,2) \cdot w^2}{w^2+9} \right) - l(1,1) \leq \frac{q'(1,1)}{w^2+4} \quad (7.31)$$

ii.

$$m(2,1)^2 \cdot \left(\frac{k_1 + f(1,1) \cdot w^2}{w^2+4} \right) + m(2,2)^2 \cdot \left(\frac{k_2 + f(2,2) \cdot w^2}{w^2+9} \right) - l(2,2) \leq \frac{q'(2,2)}{w^2+9} \quad (7.32)$$

onde:

$m(i,j)$ é elemento de M ,

$l(i,j)$ é elemento de $(-M \cdot A^T \cdot S \cdot N - M \cdot S \cdot A \cdot N)$,

$$k_1 = g(1,1)^2 \cdot f(1,1) - 4 \cdot g(1,1) \cdot f(1,1) + 4 \cdot f(1,1) \quad (7.33)$$

$$e \quad k_2 = g(2,2)^2 \cdot f(2,2) - 6 \cdot g(2,2) \cdot f(2,2) + 9 \cdot f(2,2) \quad (7.34)$$

Assim, para garantia de robustez é necessário que tanto (7.31) quanto (7.32) sejam satisfeitas.

Observe que, para um dado par (R,Q) , o lado esquerdo de (7.31) e (7.32) aumenta em relação ao lado direito quando w aumenta, indicando que haverá uma frequência de corte w_c , acima da qual não se verificam as condições de robustez.

Observe também que o lado direito de (7.31) e (7.32) depende apenas de q' ou q e, a exemplo do que ocorre para o caso SISO, foi constatado que com o aumento de $\|R\|$ em relação a $\|Q\|$ fica mais difícil de se comprovar as desigualdades exigidas. Em termos de frequência, isto significa que, dado um certo Q , para R_1 e R_2 onde $\|R_1\| > \|R_2\|$ implica em $w_{c1} < w_{c2}$,

onde $\|\cdot\|$ designa a norma de Frobenius $(\|c\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk}^2})$.

Através do exemplo numérico em estudo, onde o sistema é definido pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}' \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}' \quad \text{e fazendo-se } D = \begin{bmatrix} 0.1 & 1.0 \\ 1.0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Assim, tem-se:

$$\text{Para: } Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e } R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (|R| = \sqrt{10}) \rightarrow w_c = 51$$

$$\text{Para: } Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e } R = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (|R| = \sqrt{40}) \rightarrow w_c = 29$$

7.2.2 Implementação Computacional

Tendo em vista o programa de busca de matrizes R e Q que fornece as soluções Pareto-ótimas, descrito no item 7.1, a implementação da condição de robustez relacionada à sensibilidade, dada pelas inequações (7.31) e (7.32), pode ser colocada como uma condição adicional a ser atendida. Assim, caso o par (R,Q), previamente selecionado, não atenda tal exigência, deve ser excluído do conjunto de soluções Pareto-ótimas robustas, sub-conjunto do conjunto Pareto-ótimo obtido no item 7.1.

7.3 Considerações a respeito da robustez relacionada à estabilidade do sistema

Além da robustez relacionada à sensibilidade do sistema de controle, outro aspecto fundamental é garantir condições de robustez relacionadas à sua estabilidade.

No trabalho de DOYLE; STEIN (1981) ref.[19] é feita a

formalização para o caso MIMO desta condição considerando-se um modelo com incertezas não-estruturadas. É interesse deste ítem apenas indicar, baseado na literatura mencionada acima, como esta condição se insere no contexto até aqui apresentado.

Como mostrado naquele trabalho, para o caso de incertezas na saída da planta, tem-se:

$$l_m(w) < \frac{1}{\sigma [HG (I+HG)^{-1}]} = \alpha [I+HG(jw)^{-1}] \quad (7.35)$$

para todo w , $0 \leq w \leq \infty$.

onde: $l_m(w)$ é uma função escalar positiva e

$\alpha [A]$ representa o mínimo valor singular da matriz A ,

definido por:

$$\alpha [A] \triangleq \text{Min } |A \cdot x| \equiv \sqrt{\lambda_{\min} [A^*A]}; \quad |x|=1 \quad (7.36)$$

onde, $\| \cdot \|$ indica a norma Euclidiana.

Chamando de H' a matriz de transferência real da planta, pode-se escrever $H'=H+\Delta H$, onde ΔH é a variação de H causada por mudanças de parâmetros, falhas de modelagens que não consideram dinâmicas secundárias ou outros efeitos. Assim, $l_m(w)$ representa o limite onde se pretende confinar H' numa vizinhança normalizada de H .

Com relação às incertezas na entrada da planta, conforme ref.[19], basta trocar na expressão (7.35), a matriz de transferência (HG) por (GH). Para este caso, ainda conforme ref.[19], é possível provar que, para o regulador linear-quadrático com medição completa do estado, a seguinte relação é válida:

$$\underline{\sigma}[I+T^{-1}(jw)] \geq 0.5; \quad \forall \quad 0 \leq w \leq \infty \quad (7.37)$$

onde: $T(s) = K_c \cdot \Phi(s) \cdot B \quad (7.38)$

$$K_c = R^{-1} \cdot B^T \cdot S \cdot D \quad (7.39)$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (7.40)$$

O que significa que a condição de estabilidade para incertezas não-estruturadas (na entrada da planta) é garantida para $l_m < 0.5$. Se, por um lado, existe um intervalo de l_m ($0 < l_m' < 0.5$), para o qual todo ganho de realimentação ótimo é capaz de produzir um valor singular mínimo de $(I+T^{-1}(jw))$ maior que l_m' ; por outro, o valor $l_m < 0.5$ é claramente inadequado para os requisitos da condição de robustez à estabilidade para valores realísticos de l_m .

7.3.1 Exemplo de Aplicação

Com relação ao exemplo em estudo, com as matrizes A, B e D como definidas anteriormente, a matriz $\Phi(jw)$ é dada por:

$$\Phi(jw) = \begin{bmatrix} \frac{-(3K+5w^2) + (kw-15w)j}{k^2+25w^2} & \frac{k+5wj}{k^2+25w^2} \\ 0 & \frac{-(2k+5w^2) + (kw-10w)j}{k^2+25w^2} \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

onde, $K = 6-w^2 \quad (7.42)$.

Assim, com (7.41), (7.42), (7.39) e (7.38) é possível calcular o lado direito de (7.37).

$$\text{Para: } Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \underline{\sigma}(w=1) = 0.638 \\ \underline{\sigma}(w=10) = 1.350 \\ \underline{\sigma}(w=100) = 11.87 \end{array}$$

$$\text{Para: } Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha(w=1) = 0.599 \\ \alpha(w=10) = 1.443 \\ \alpha(w=100) = 13.04 \end{array}$$

Os valores acima indicam que para frequências baixas o primeiro par (R,Q) possui propriedade referente à robustez de estabilidade melhor que o segundo e que para frequências altas, o desempenho é inverso, ou seja, o segundo par (R,Q) é capaz de fornecer α maiores e, portanto, estabelecer limites maiores, para os quais a robustez é garantida.

7.3.2 Implementação Computacional

A implementação computacional é similar àquela relacionada a robustez à sensibilidade, ou seja, o lado direito da expressão (7.37) deve ser calculado e comparado com a $l_m(w)$ fornecida (critério). Caso esta condição adicional seja satisfeita, o par (R,Q) Pareto-ótimo previamente selecionado estará confirmado como solução procurada.

Tanto a condição de robustez à sensibilidade quanto a relacionada à estabilidade representam superfícies, nos espaços dimensionais de R e Q (de ordem $[n(n+1)]/2$), que impõem fronteiras que restringem o conjunto de soluções (R,Q) factíveis de serem adotadas.

7.4 Considerações a respeito da alocação de pólos

As matrizes de ponderações R e Q definem os auto-valores do sistema em malha fechada. A proposta deste ítem é a de

estudar as implicações de se querer encontrar o conjunto de soluções Pareto-ótimas para um sistema cujos auto-valores sejam pré-fixados; ou seja, colocando-os como um vínculo de projeto. Tudo se passa como se o projetista soubesse previamente quais auto-valores seu sistema deve possuir para ter um comportamento adequado às suas funções e quisesse impô-los como condição de projeto. Longe de ser uma condição normal de projeto, o ítem tem basicamente um caráter investigativo.

Assim, foi desenvolvido um programa de busca de matrizes que minimizem \bar{I}_x e \bar{I}_u com a restrição de fornecerem auto-valores para o sistema em malha fechada previamente fixados.

O trabalho de SOLHEIM (1972) ref.[20], apresenta um método geral e de fácil implementação computacional para encontrar matrizes de ponderação que correspondam a auto-valores dados. Desta forma, uma das rotinas de cálculo desenvolvida no programa de busca de soluções Pareto-ótimas utiliza o algoritmo apresentado naquele trabalho. O algoritmo de SOLHEIM parte de uma matriz R fixa para encontrar a matriz Q que fornece os auto-valores requeridos.

Os auto-valores (λ_i) são trasladados um a um para valores pré-fixados (s_i) , sendo possível, se necessário, trasladar todos ou apenas aqueles que assumam valores próximos do eixo imaginário. O método baseia-se na diagonalização do sistema. Para o caso em que a matriz A tem auto-valores (λ_i) reais e distintos, o algoritmo pode ser resumido da seguinte forma:

1º PASSO: Inicializar com $Q=Q_0$, $K=K_0$ (ganho de realimentação),

$i=0$;

2º PASSO: $A_i = A + B.K$;

3° PASSO: Calcular Λ_i , M_i e $H_i = M_i^{-1} \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot M_i^T$;

onde, Λ_i é a matriz diagonal de auto-valores e

M_i é a matriz de auto-vetores, ambas

associadas à matriz A_i .

4° PASSO: $i = i+1$;

5° PASSO: Para trasladar λ_j para s_j , calcular:

$$(\tilde{q}_{jj})_i = \frac{s_j^2 - \lambda_j^2}{(h_{jj})_{i-1}};$$

Obs.: O til faz referência ao sistema diagonalizado.

6° PASSO: Com $\tilde{Q}_i = \{(\tilde{q}_{jj})_i\}$, calcular o ganho de realimentação

ótimo, \tilde{K}_i através das expressões:

$$\frac{d\tilde{S}}{dt} = -\tilde{S} \cdot \Lambda - \Lambda \cdot \tilde{S} + \tilde{S} \cdot M^{-1} \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot M^{-T} \cdot \tilde{S} - \tilde{Q} = 0$$

$$\tilde{K} = -R^{-1} \cdot B^T \cdot M^{-T} \cdot \tilde{S}$$

7° PASSO:

$$K_i = \tilde{K}_i \cdot M_{i-1}^{-1}, \quad K = K + K_i;$$

8° PASSO:

$$Q_i = M_{i-1}^{-T} \cdot \tilde{Q}_i \cdot M_{i-1}^{-1}, \quad Q = Q + Q_i;$$

9° PASSO: Se o número de auto-valores trasladados for menor que k (n° desejado de auto-valores a serem trasladados): trocar j e voltar para o segundo passo.

O algoritmo apoia-se no fato de que os diferentes ganhos de realimentação K_i e as diferentes matrizes de ponderação Q_i podem ser adicionadas para dar o resultado final; fato este

que, embora não sendo óbvio, é verdadeiro.

É importante comentar que a sequência em que os auto-valores são trasladados pode ser arbitrária; porém, partindo-se de uma determinada matriz R , diferentes matrizes Q serão obtidas mudando-se esta sequência ou mudando a associação de λ_i com s_i .

Como será visto nos resultados do exemplo numérico, alterando-se a sequência chega-se a soluções Pareto-ótimas distintas.

7.4.1 Programa Computacional

O programa computacional desenvolvido possui uma rotina que, a partir de uma matriz R , encontra a matriz Q capaz de levar o sistema em malha fechada, através do algoritmo descrito acima, aos auto-valores pré-fixados. Assim, manipulando-se os elementos de R seleciona-se a matriz R_r e a correspondente matriz resultante Q_r , que implicam nos menores índices.

Para o caso em que $n=2$ haverá apenas os três elementos de R a serem associados em grupos de 1, 2 e 3 elementos, em número de: $C_{3,1}=3$, $C_{3,2}=3$ e $C_{3,3}=1$ respectivamente, e cada grupo sendo testado em todas as possíveis variações, conforme mostrado na tabela 7.1, a fim de ser selecionado o par que fornecerá a solução Pareto-ótima para o problema acrescido desta condição de projeto adicional.

A lógica envolvida no programa é semelhante à apresentada no item 7.1.1, com a diferença que, agora, a matriz Q é consequência da matriz R candidata, diminuindo-se pela metade o número total de elementos a serem manipulados.

7.4.2 Exemplo de Aplicação

Como exemplo de aplicação numérica foi adotado o mesmo sistema do item 7.1.2 com o objetivo de se estabelecer comparação entre os resultados obtidos.

Assim, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

além disso, será pré-fixado como auto-valores a serem atingidos: $s_1 = -5$ e $s_2 = -8$.

Adotando como partida, a matriz de ponderação $R = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ e

segundo a sequência $(-5; -8)$, chega-se a:

$$Q_r = \begin{bmatrix} 68.9028 & -84.8015 \\ -84.8015 & 107.4583 \end{bmatrix},$$

fornecendo os índices: $\begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1425 \\ \tilde{I}_u = 1.6931 \end{cases}$

Aplicando as rotinas de seleção chega-se a:

$$R_f = \begin{bmatrix} 10.560 & 5.5000 \\ 5.5000 & 4.4000 \end{bmatrix}' Q_r = \begin{bmatrix} 15.6333 & 4.3354 \\ 4.3354 & 134.1031 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1322 \\ \tilde{I}_u = 1.6484 \end{cases}$$

Para o caso de se mudar a sequência para $(-8; -5)$, tem-se:

$$R = \begin{bmatrix} 8.0000 & 5.0000 \\ 5.0000 & 4.0000 \end{bmatrix}' Q_r = \begin{bmatrix} 20.4000 & -12.7006 \\ -12.7006 & 43.6295 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.2125 \\ \tilde{I}_u = 1.4197 \end{cases}$$

Aplicando as rotinas de seleção chega-se a:

$$R_f = \begin{bmatrix} 9.6800 & 5.0000 \\ 5.0000 & 3.6000 \end{bmatrix}' \quad Q_r = \begin{bmatrix} 25.7820 & -21.7117 \\ -21.7117 & 59.0035 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.2061 \\ \tilde{I}_u = 1.4103 \end{cases}$$

Portanto, mudando-se a sequência ($s_1=-5$, $s_2=-8$) para ($s_1=-8$, $s_2=-5$) chegou-se a duas soluções Pareto-ótimas distintas.

As matrizes apresentadas abaixo forneceram os índices que compõem o gráfico (7.2).

$$\text{Matriz de partida: } R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a.) Sequência (-5;-8):

$$R_f = \begin{bmatrix} 2.0000 & 0.4000 \\ 0.4000 & 2.0000 \end{bmatrix}' \quad Q_r = \begin{bmatrix} 22.4000 & -9.6000 \\ -9.6000 & 26.0571 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1257 \\ \tilde{I}_u = 1.6763 \end{cases}$$

b.) Sequência (-5;-8):

$$R_f = \begin{bmatrix} 1.8000 & 0.7200 \\ 0.7200 & 1.8000 \end{bmatrix}' \quad Q_r = \begin{bmatrix} 34.2473 & -30.1833 \\ -30.1833 & 35.0601 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.2006 \\ \tilde{I}_u = 1.4191 \end{cases}$$

É interessante notar que partindo-se da matriz R_f apresentada em b.) e mudando-se a sequência para (-5;-8), chega-se a:

$$R_{ff} = \begin{bmatrix} 1.8000 & 0.3600 \\ 0.3600 & 1.8000 \end{bmatrix}' \quad Q_r = \begin{bmatrix} 20.1600 & -8.6400 \\ -8.6400 & 23.4514 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1257 \\ \tilde{I}_u = 1.6763 \end{cases}$$

Portanto, a mesma solução alcançada em a.). Por outro lado, partindo-se da matriz R_f apresentada em a.) e seguindo a sequência (-8;-5), chega-se à uma terceira solução Pareto-ótima distinta:

$$R_f = \begin{bmatrix} 2.0000 & 0.4000 \\ 0.4000 & 2.0000 \end{bmatrix}, Q_r = \begin{bmatrix} 49.7607 & -45.8872 \\ -45.8872 & 50.5354 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.2004 \\ \tilde{I}_u = 1.4196 \end{cases}$$

Matriz de partida: $R = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

a.) Sequência (-5;-8):

$$R_f = \begin{bmatrix} 2.7000 & 0.5400 \\ 0.5400 & 2.7000 \end{bmatrix}, Q_r = \begin{bmatrix} 30.2400 & -12.9600 \\ -12.9600 & 35.1771 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1257 \\ \tilde{I}_u = 1.6763 \end{cases}$$

b.) Sequência (-8;-5):

$$R_f = \begin{bmatrix} 3.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 5.0000 \end{bmatrix}, Q_r = \begin{bmatrix} 62.9331 & -56.4803 \\ -56.4803 & 64.2236 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.2005 \\ \tilde{I}_u = 1.4192 \end{cases}$$

(não houve atualização de R)

Outros resultados:

Matriz R de partida	Matriz R _f final seq. (-5;-8)	Matriz resultante Q _r	Índices
$\begin{bmatrix} 10.0 & 5.25 \\ 5.25 & 4.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10.00 & 5.250 \\ 5.250 & 4.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12.6749 & 4.6780 \\ 4.6780 & 127.4709 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1329 \\ \tilde{I}_u = 1.6465 \end{cases}$
$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.70 \\ 0.70 & 0.60 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.1969 & 0.6237 \\ 0.6237 & 0.5346 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.1542 & 0.4934 \\ 0.4934 & 15.0324 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1317 \\ \tilde{I}_u = 1.6506 \end{cases}$
$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.60 \\ 0.60 & 0.40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.0128 & 0.5346 \\ 0.5346 & 0.3564 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.7528 & 0.5008 \\ 0.5008 & 13.1289 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1354 \\ \tilde{I}_u = 1.6408 \end{cases}$

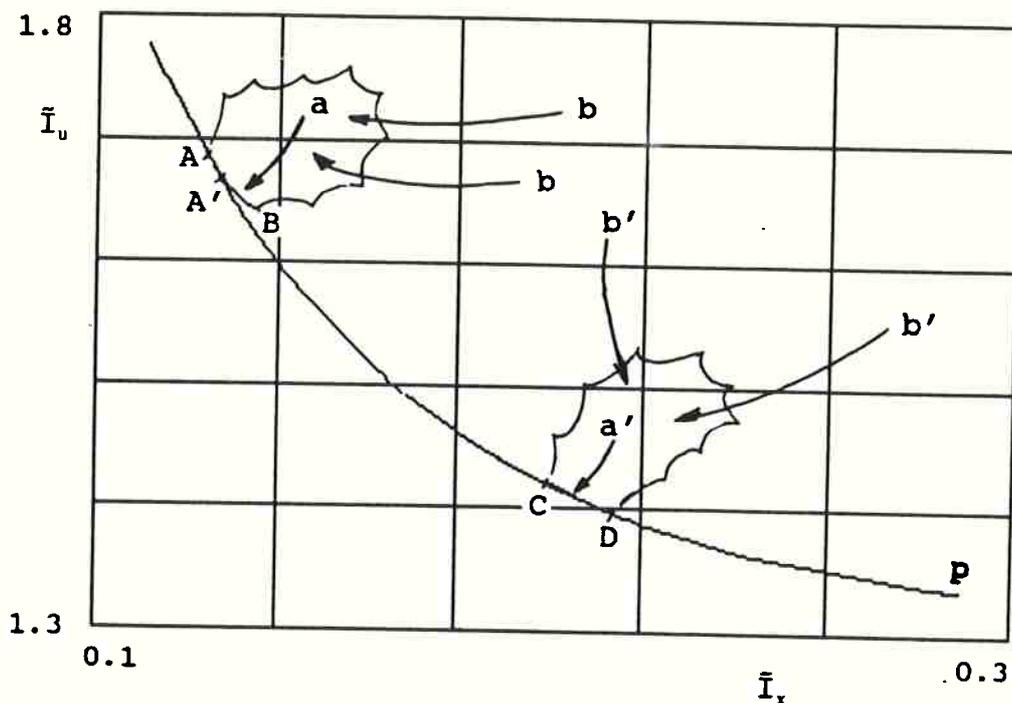


GRÁFICO 7.2: Conjunto Pareto-ótimo com a condição adicional de pólos pré-fixados.

O gráfico (7.2) mostra o conjunto Pareto-ótimo, dado pelos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , sobreposto ao gráfico (7.1) do item anterior (será chamado de curva p).

Como pode ser observado, existem pontos destes segmentos que pertencem à curva anteriormente obtida, ou seja, foi possível encontrar pontos Pareto-ótimos que satisfazem a alocação de pólos imposta e possuem relação \bar{I}_x/\bar{I}_u tão boas quanto as obtidas anteriormente.

Existe também, tanto para \overline{AB} quanto \overline{CD} , uma região interna à curva p . No caso do segmento \overline{AB} , esta região interna é mais nítida e está limitada entre os pontos A' e B , indicando assim, que há uma "penalização" da relação \bar{I}_x/\bar{I}_u

para que seja satisfeito o vínculo dos pólos.

Outro fato importante a ser comentado é o da região localizada para onde migram as soluções. Independentemente das rotinas de seleção que dirigem as soluções na direção descendente para esquerda (flechas a e a' do gráfico (7.2)), a rotina que determina a matriz Q com auto-valores fixados empurra as soluções para regiões ao redor de \overline{AB} ou \overline{CD} ,

conforme a sequência de translação de auto-valores adotada (flechas b e b' do gráfico (7.2)), causando a descontinuidade deste conjunto Pareto-ótimo.

Os pontos A, B, C e D foram os extremos encontrados dentre as matrizes de partida R pesquisadas, que apesar de terem sido muitas, nada impede que algum ponto à direita de B ou D ou à esquerda de A ou C possa ainda ser encontrado.

Cabe ainda ressaltar que, para esta nova condição imposta, o conjunto Pareto-ótimo encontrado Λ_1 não é um sub-conjunto do anterior Λ (curva p), ou seja, $\Lambda \not\subset \Lambda_1$. Ao contrário do que ocorre nos itens 7.2 e 7.3, quando as condições de robustez impõem, como conjuntos Pareto-ótimos, sub-conjuntos do caso genérico sem restrição.

Outra restrição de projeto bastante comum de acontecer, e que também provoca um conjunto Pareto-ótimo que é sub-conjunto do caso geral, é o limite de potência dos atuadores de controle.

Este caso pode ser tratado através do programa de busca desenvolvido, introduzindo uma condição de aceitação para os pares (R, Q) calculados, de forma a não provocarem ganhos de realimentação que superem limites estabelecidos em função do

equipamento físico de que se dispõe. É fácil perceber que este tipo de condição limitará o conjunto Pareto-ótimo obtido sem tal restrição.

7.5 Tempo Final Finito

Para o caso de se ter como tempo final (t_f) um valor finito, é necessária a solução da equação diferencial matricial de Riccati:

$$\dot{S}(t) = -A^T.S(t) - S(t).A + S(t).B.R^{-1}.B^T.S(t) - Q \quad (7.43)$$

com a condição terminal: $S(t_f) = S_f = 0$ (7.44)

Como analiticamente não se conhece a solução deste sistema de n^2 equações diferenciais não-lineares de primeira ordem acopladas, deverá ser feita sua integração numericamente. Para esta integração "backward" a partir de t_f , o programa desenvolvido utiliza o método de Euler que é o mais simples, sendo feita a seguinte simplificação:

$$S(t-\Delta t) = S(t) - \dot{S}(t).\Delta t \quad (7.45)$$

A desvantagem deste método é a necessidade de se ter um passo de integração pequeno para se conseguir uma boa precisão, o que implica em tempo de processamento.

Para evitar que a simetria de S seja destruída, devido ao acúmulo de erros numéricos ao longo de um grande número de passos de integração, a cada passo foi feita a substituição de $S(t)$ por $1/2.(S(t)+S^T(t))$.

Apesar de ser inconveniente a armazenagem da matriz S ao longo do tempo, para posterior cálculo de \bar{I}_x e \bar{I}_u dados por

(5.1) e (5.2), respectivamente, ela é necessária, pois a idéia atrativa de se obter o histórico de $S(t)$, a partir do cálculo prévio de $S(t_0)$ e da equação (7.43), à medida em que é feita a integração de \bar{I}_x e \bar{I}_v , sem a necessidade de armazenamento, deve ser evitada por ser um cálculo instável, uma vez que a integração "backward" normalmente irá levar a um valor de $S(t)$ constante nas redondezas de t_0 .

Uma vez obtido o histórico de S é possível calcular os integrandos de \bar{I}_x e \bar{I}_v a cada instante e fazer a integração numérica.

O programa desenvolvido utiliza para esta integração o método de quadratura de Gauss-Legendre por ser de alta precisão e fácil implementação.

Além disso, tomou-se o cuidado de controlar a precisão dos valores calculados através da sub-divisão de $T=(t_f-t_0)$ em intervalos adequados.

7.5.1 Programa Computacional

O programa computacional desenvolvido tem a mesma estrutura do program descrito no ítem 7.1. A única alteração é quanto aos cálculos de \bar{I}_x e \bar{I}_v que utilizam as integrações numéricas comentadas acima, e que por isso demandam muito mais tempo de processamento. Assim, o processo de busca de soluções Pareto-ótimas é exatamente o mesmo descrito no ítem 7.1.

7.5.2 Exemplo de aplicação

Como exemplo de aplicação foi adotado o sistema estável em

malha aberta dado por:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

considerar-se a integração para $t_f=1$.

O conjunto Pareto-ótimo obtido será mostrado no gráfico (7.3) sendo que seus pontos foram atingidos pelas matrizes R e Q abaixo relacionadas.

$$R = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.2000 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 4.8000 & 0.9000 \\ 0.9000 & 2.8000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1764 \\ \tilde{I}_u = 0.4905 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.1000 & -0.055 \\ -0.055 & 1.0716 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1.7010 & 0.9000 \\ 0.9000 & 2.9700 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.1934 \\ \tilde{I}_u = 0.4350 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.1800 & 0.3000 \\ 0.3000 & 1.1500 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2.0000 & 0.9500 \\ 0.9500 & 2.7000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.2342 \\ \tilde{I}_u = 0.3395 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.2600 & 0.6000 \\ 0.6000 & 1.2000 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2.4000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 2.4000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.2671 \\ \tilde{I}_u = 0.2850 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2.2000 & 0.9000 \\ 0.9000 & 2.2000 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3.0000 & 1.2100 \\ 1.2100 & 3.0000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.3158 \\ \tilde{I}_u = 0.2243 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2.7000 & -0.900 \\ -0.900 & 2.7000 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2.7000 & -0.900 \\ -0.900 & 2.7000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_x = 0.3506 \\ \tilde{I}_u = 0.1985 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 4.0824 & -0.6050 \\ -0.6050 & 4.9896 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 6.5885 & -0.4356 \\ -0.4356 & 2.8285 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \bar{I}_x = 0.3895 \\ \bar{I}_u = 0.1605 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2.7000 & 0.9000 \\ 0.9000 & 2.7000 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1.8000 & 0.9000 \\ 0.9000 & 1.8000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \bar{I}_x = 0.4341 \\ \bar{I}_u = 0.1300 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 3.9600 & 0.7290 \\ 0.7290 & 6.0588 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 4.1310 & 1.6830 \\ 1.6830 & 0.7290 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \bar{I}_x = 0.4966 \\ \bar{I}_u = 0.0913 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 4.0000 & 3.0000 \\ 3.0000 & 3.6000 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 2.0000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \bar{I}_x = 0.5522 \\ \bar{I}_u = 0.0732 \end{cases}$$

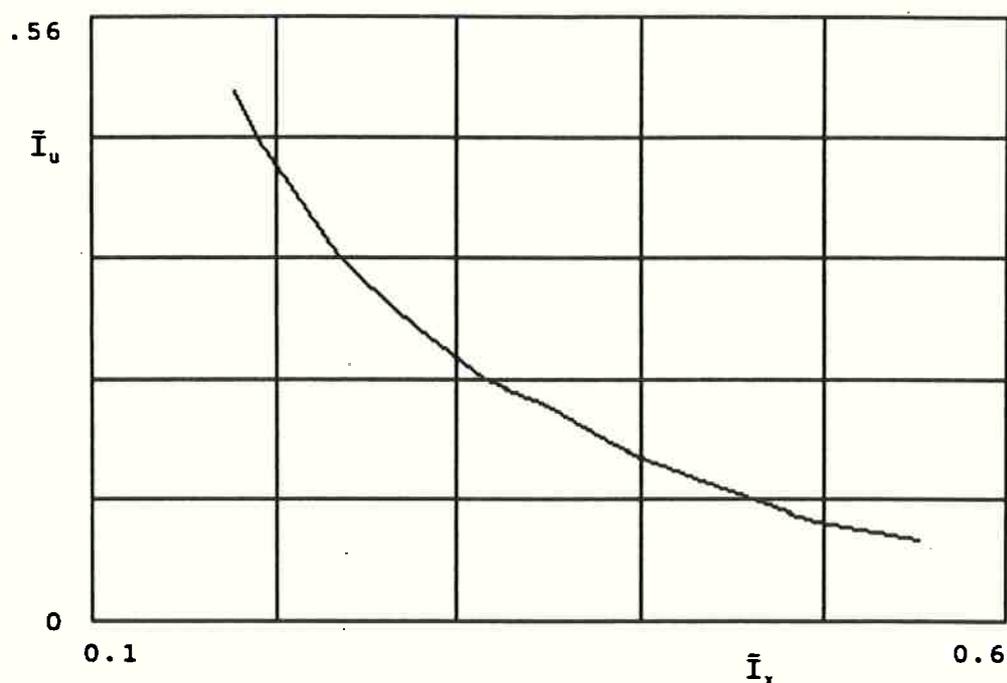


GRÁFICO 7.3: Conjunto Pareto-ótimo para o caso MIMO com tempo final finito.

7.6 Conclusão do capítulo

A principal conclusão do capítulo é a existência de conjunto Pareto-ótimo para o caso MIMO. Fato este que pode ser explicado por dois aspectos característicos dos sistemas dinâmicos:

Primeiro pelo acoplamento entre os graus de liberdade, conforme mencionado e, segundo, porque em geral, considerando separadamente a precisão de trajetória obtida para cada grau de liberdade, mediante uma quantidade fixa de energia de controle gasta, chega-se a valores diferentes.

Esta "anisotropia" entre os diversos coeficientes: precisão obtida / energia de controle gasta com relação a cada grau de liberdade, implica que para um mesmo nível global de energia empregada, dependendo da "maneira" como esta energia é distribuída para o controle dos vários graus de liberdade, atinge-se valores de \bar{I}_x distintos. Ou seja, para um certo \bar{I}_u empregado, fazendo-se a sua distribuição de forma a aplicar maiores parcelas aos graus de liberdade cujas atenuações de desvios são maiores, será possível obter menor índice \bar{I}_x .

Em outras palavras, chamando estes coeficientes de "eficiência do controle associada a cada grau de liberdade", com relação a um valor fixo de energia gasta, nota-se que: Quando o controle $u=f(R,Q)$ atua mais nos graus de liberdade mais "eficientes", certamente obtém-se relações globais \bar{I}_x/\bar{I}_u melhores e, portanto, mais próximas de uma solução Pareto-ótima. Isto ocorre porque \bar{I}_x e \bar{I}_u são somatórias do que acontece com todos os graus de liberdade. Observe que, segundo este argumento, inclusive sistemas desacoplados

estão sujeitos à existência de soluções Pareto-ótimas.

Dentro deste enfoque é possível imaginar a definição do problema, cuja solução Pareto-ótima deve, também, satisfazer a um mínimo de precisão para cada grau de liberdade.

Outro fato importante a se comentar é com relação aos gráficos (7.1) e (7.3) que apresentam as curvas, cujos pares (\bar{I}_x, \bar{I}_u) definem os conjuntos não-inferiores.

É preciso salientar que, em geral, nada impede que um ponto destas curvas corresponda a mais de um par (R_i, Q_i) , pois é possível que trajetórias distintas tenham, para um dado gasto de energia de controle (\bar{I}_u) , o mesmo valor de \bar{I}_x . Para tanto é necessário que as somatórias dos desvios associados a todos os graus de liberdade, referentes aos controladores definidos por (R_i, Q_i) sejam iguais. Ou seja, quando comparadas as trajetórias geradas por dois controladores distintos é preciso que a maior precisão associada a um determinado grau de liberdade de uma delas seja "compensada" pela sua pior performance com relação a um outro grau de liberdade qualquer, de tal forma que, na contabilização geral dos desvios das duas trajetórias, atinja-se o mesmo valor de \bar{I}_x , evidentemente com relação ao mesmo \bar{I}_u empregado.

8. Comentários e conclusões

Os resultados apresentados neste trabalho, embora não tenham produzido curvas tão "didáticas" como as apresentadas nas figuras (3.1) e (3.2), nem de longe impossibilitaram que se fizesse uma análise clara a respeito dos jogos tais como foram definidos.

É característica da abordagem através de jogos diferenciais esta "performance" da análise, e o caso aqui estudado não se constituiu uma exceção.

Mais do que confirmar a importância das matrizes de ponderação adotadas num projeto de regulador, apontada por ATHANS (1971) ref.[1], foi possível descrever o que se ganha, o que se perde, quando se faz estas escolhas e constatar, principalmente, que garantir um determinado $u^o(t)$ capaz de minimizar um funcional, tal como definido pela equação (2.5), não é suficiente para que se obtenha êxito no projeto.

Para o caso SISO particular, tal como referido no capítulo 4, onde a matriz da planta A torna-se o escalar a , definindo o gasto de energia e a precisão da trajetória como funções-objetivo e tendo r e q como variáveis de decisão, foi possível mostrar que tal jogo é de soma-zero ou não cooperativo, isto é, só se aumenta a precisão da trajetória com um gasto adicional de energia. Como o gasto de energia e a precisão da trajetória ficam definidos quando se estabelece um ganho de realimentação K , este sim passa a ter fundamental importância para o desempenho do projeto. Se ele for gerado sem levar em conta a precisão da trajetória e ou

o dispêndio de energia a que o sistema estará submetido, somente por "sorte" o projeto obterá êxito.

Em outras palavras, quando se parte de um índice de desempenho linear quadrático onde se tem pré-estabelecidos r e q , embora tendo um ganho de realimentação que garanta a minimização deste funcional, pelo fato de satisfazer a equação algébrica de Riccati, nenhum compromisso com precisão ou energia está sendo assumido ou assegurado, tornando esta solução bastante "frágil" com relação a estes aspectos. Fato este que se estende às matrizes R e Q , referentes ao caso MIMO.

Uma evidência deste descompromisso pode ser notada quando o jogo foi definido através das funções-objetivo (4.1) e (4.2), fruto do desmembramento do funcional dado por (2.5), o que resultou num jogo inconsistente.

Além disso, quando foi proposta uma relação qualquer entre r e q para se definir K , equação (4.51), diferente daquela gerada pela equação de Riccati, obteve-se curvas de \bar{I}_x e \bar{I}_u constantes, gráficos (4.7) e (4.8), revelando novamente uma relação bi-unívoca entre \bar{I}_x e \bar{I}_u em que o mesmo par (\bar{I}_x, \bar{I}_u) pode ser obtido por diferentes pares (r_i, q_i) .

Ainda outra forma de encarar o problema pode ser através da seguinte afirmação: considerando que a equação algébrica de Riccati, quando satisfeita, leva a uma relação fixa entre Q e R que irá definir o ganho de realimentação, definir as matrizes de ponderação do índice linear quadrático para um controle ótimo significa definir a precisão da trajetória que o sistema terá, bem como o seu gasto de energia, mesmo que isto seja feito sem qualquer referência.

Por fim, cabe ressaltar um teorema apresentado por KALMAN, R.E. (1964) ref.[21], no seu estudo sobre o chamado "problema inverso da teoria do controle linear ótimo". O teorema, aplicável ao caso SISO, garante que para qualquer lei de controle estável K , invariante no tempo, sempre existe uma função de penalização $L=L(x,u)$ para a qual um funcional do tipo

$$V(x_0, t_1; u) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_0^{t_1} L(x_u(t; x_0), u(t)) . dt$$

é otimizado; onde $x_u(t; x_0)$ é a única solução da equação (2.2) correspondente a uma função contínua $u(t)$ fixada e ao estado inicial $x_0 = x_u(0; x_0)$. Portanto, é válido dizer, satisfeitas as restrições mencionadas, que para um dado K , qualquer e constante, existirá um par (r, q) que define um índice linear quadrático $L=L(r, q)$ otimizado.

A análise prossegue com o estudo do caso em que $t_f < \infty$, considerando-se duas situações: Primeiro, impondo um ganho de realimentação constante, sub-ótimo, e, posteriormente, considerando-se a equação diferencial de Riccati, ou seja, $K=K(R, Q, t)$. Para ambos os casos persistiu o comportamento de um jogo não cooperativo ou de soma-zero, com a única diferença que o segundo caso apresentou, como era de se esperar, uma relação \bar{i}_x/\bar{i}_u melhor que o primeiro. Fato que pode ser entendido, inclusive, tendo em vista o teorema apresentado por KALMAN, mencionado acima, válido para K constante. Basta imaginar que um $K(t)$ é capaz de otimizar um funcional $V' = V(x_0, t_1; u) + V(x'_0, t_1; u)$ onde $x_0 < x'_0 < x_f$. A mudança qualitativa do conjunto-solução só ocorreu quando

definiram-se outras variáveis de decisão (jogadores), ou seja, quando passou a ser variável de decisão o ganho de realimentação e o tempo final de atuação do controle (t_f). Para o jogo definido sem qualquer restrição do estado final, chega-se a uma solução única, apontada por um ponto NASH, onde é possível a curva de menor custo de precisão ser interceptada pela curva que envolve o menor gasto de energia dentro de um retângulo do plano $t_f \times K$ cuja área é definida pelas inequações: $K < K_{m\acute{a}x.}$ e $t_f < t_{m\acute{a}x.}$. Obviamente, trata-se de uma situação apenas de valor teórico, uma vez que todo o "prejuízo" cairá sobre o estado final. Para uma condição mais realista, com relação aos problemas de engenharia, deve-se ter o estado final, $x(t_f) \leq x_f$, onde x_f é uma superfície fechada em torno do zero. A inclusão desta restrição leva a uma condição de tempo mínimo de exposição ao controle (equação 5.16). O efeito sobre o conjunto-solução é importante. O jogo passa a ser de soma não-zero ou cooperativo, e fica estabelecido, agora, um conjunto Pareto-ótimo onde existe não mais apenas uma, mas um conjunto de possíveis soluções, como mostrou o gráfico (5.6). Observe, ainda neste gráfico, que quando $t_f \rightarrow \infty$ as curvas de \bar{I}_x e \bar{I}_u constantes tendem ao paralelismo, resgatando o resultado anteriormente obtido.

Para o caso de se ter um ganho de realimentação que satisfaça a equação diferencial de Riccati, chega-se a um conjunto Pareto-ótimo com ou sem restrição do estado final. Vale notar que para o caso em que não há esta restrição, o conjunto Pareto-ótimo é descontínuo, isto devido ao limite de potência do controle que é imposto, ou seja,

$$q/r \leq (q/r)_{\text{máx.}}$$

No capítulo 6 foi possível derivar uma expressão capaz de fornecer o limite para o qual é possível garantir que a variável controlada receba toda proteção contra os efeitos de distúrbios e variações paramétricas da planta (inequação (6.30)), aplicável ao caso em que há disponibilidade de se medir todo o vetor de estado para a realimentação.

Através deste resultado, foi possível observar que este limite implica num valor máximo de $\beta (=r/q) = \beta_{\text{máx.}}$, o que fisicamente significa que é necessário um mínimo de energia empregada para se conseguir o efeito de atenuação ou, em termos de ganho de realimentação K , pode-se dizer que existe um mínimo de magnitude de potência, necessária para se obter robustez.

Por outro lado, para o caso de se ter que adotar um $y(t)=C.x(t)$, só foi possível garantir a robustez para o caso limite em que $R \rightarrow 0$.

Para o caso MIMO, foi possível mostrar no capítulo 7 a existência de soluções Pareto-ótimas para o jogo, tal como definido no capítulo 4.

Trata-se, agora, de um jogo cooperativo, onde através do ajuste dos elementos de R e Q é possível melhorar a "performance" do sistema tanto no que se refere ao gasto de energia, quanto à precisão da trajetória obtida. Este fato, como explicado no capítulo 7, tem origem na diferença que existe entre os diversos graus de liberdade com relação ao coeficiente: precisão obtida associada ao grau de liberdade/gasto de energia de controle. Assim, para uma dada quantidade global de energia gasta, consegue-se um \bar{I}_1 menor

quando o controle $u=f(R,Q)$ atuar mais nos graus de liberdade que possuam melhores "retornos" em precisão. Além disso, devido ao acoplamento entre os graus de liberdade, é de se esperar que a melhor relação possível entre \bar{I}_x e \bar{I}_u surja de matrizes de ponderação, cujos elementos também guardem valores relativos. Embora não mencionado e exemplificado no texto, cabe aqui ressaltar que, para o caso SISO em que a planta é caracterizada não por um escalar, mas por uma matriz, a exemplo do caso MIMO, trata-se de um jogo com soluções Pareto-ótimas.

Dada a dificuldade de se representar curvas de níveis equiponderantes no espaço dimensional de $R \times Q$, foi feita a apresentação do conjunto Pareto ótimo no plano $\bar{I}_x \times \bar{I}_u$.

Além da análise considerando-se tempo final de controle tendendo a infinito, verificou-se que a qualidade do jogo não muda para o caso em que este tempo é finito, isto é, quando se tem realimentação de estado variante no tempo. Cabe apenas comentar que a integração numérica da equação diferencial matricial de Riccati demanda consideravelmente mais tempo que o cálculo anterior, comprometendo sua viabilidade para casos em que n (número de graus de liberdade do sistema) atinja valores significativos. Para futuros trabalhos, sugere-se a pesquisa de algoritmos mais otimizados para este cálculo.

No capítulo 7 foram feitas, também, considerações a respeito da robustez quanto à sensibilidade e estabilidade. Estes dois aspectos constituem importantes condições de projeto, pois restringem o conjunto Pareto-ótimo e, como foi mostrado, o critério de aprovação de uma determinada solução

(R', Q') depende da faixa de frequência de trabalho.

Dentro de um contexto de projeto, objeto pretendido por este trabalho, restrições ao conjunto Pareto-ótimo, tais como as impostas pelas condições de robustez, são absolutamente necessárias de serem consideradas dada a sua importância prática.

Ainda neste capítulo, foi apresentada uma análise de como tratar do problema em que se pré-estabelecem os pólos do sistema.

Foi utilizado o algoritmo de SOLHEIM ref.[20], para se fazer a alocação dos pólos, assim, por esta rotina de cálculo, a partir de um par (R, Q_i) , chega-se ao par (R, Q_f) que impinge ao sistema os pólos desejados. Foi, então, desenvolvido o programa de busca que, manipulando-se os elementos de R , seleciona o par, formado pelo Q_f resultante, que é solução não-inferior do problema.

É importante salientar que, ao contrário da análise pertinente à robustez, que leva a um conjunto Pareto-ótimo Λ_1 que é sub-conjunto de Λ , correspondente ao problema que despreza tal restrição, para este caso, o conjunto Pareto-ótimo atingido possui pontos cujas relações \bar{I}_x/\bar{I}_u não são tão boas quanto as apresentadas na solução do problema em que não existe exigência quanto a alocação dos pólos.

Tendo em vista o estudo exposto, aponta-se como contribuição do texto a apresentação de uma metodologia para seleção das matrizes de ponderação do critério linear-quadrático de um regulador, tal como definido no capítulo 2, dispensando a necessidade de simulações para análise do comportamento dinâmico e posterior ajuste dos elementos destas matrizes,

prática utilizada nos chamados processos de "tentativa e erro", solução sugerida em diversos trabalhos, como exemplo: Levine; Athans (1966) ref.[22]; Hoberock; Rouse (1972) ref.[23]; etc.

Aponta-se como extensão natural da pesquisa a aplicação desta metodologia para o projeto geral de sistema de controle. Outro ponto importante a ser estudado é quanto aos sistemas que possuem ordem muito elevada, pois o tempo de processamento necessário pode inviabilizar o cálculo, sendo imperativo que se investigue algoritmos que, embora forneçam soluções sub-ótimas, consigam boas aproximações do conjunto Pareto-ótimo. Esta continuidade da pesquisa é de suma importância, caso contrário a metodologia aqui apresentada ficará restrita ao estudo do controle para sistemas com poucos graus de liberdade.

Como conclusão final, pode-se afirmar que a análise do controle linear quadrático, através da teoria de jogos diferenciais, enfocando as matrizes de ponderação, mostra-se bastante clara com respeito à interpretação de resultados e isto se deve ao grande apelo físico com que o problema é tratado.

ANEXO A: Algoritmo para determinação do conjunto Pareto- ótimo

A.1 Introdução

Para a determinação do conjunto Pareto-ótimo, ou pelo menos parte dele, sem a necessidade de um mapeamento completo como feito anteriormente, pode-se lançar mão dos algoritmos existentes, tais como aqueles citados no item 3.3.

Qualquer um dos três métodos apontados pode ser utilizado sem problemas. O método de estimação do conjunto não-inferior, também chamado de NISE ("noninferior set estimation"), permite a geração direta deste conjunto, sendo possível controlar a precisão da aproximação (critério do erro). É um método seguro porém incapaz de gerar um conjunto não convexo.

Para o início do método é preciso obter dois elementos particulares do conjunto Pareto-ótimo, o que pode ser feito através do método das ponderações. Na verdade, como será mostrado no item A.3, aplicam-se os dois métodos alternadamente até se obter o perfil do conjunto desejado.

A.2 Método das Ponderações

Pelo método das ponderações, o problema de múltiplos critérios é convertido num problema escalar de otimização no qual a função-objetivo será a soma ponderada das funções-objetivo do modelo de múltiplos-objetivos. Para o caso de se ter apenas duas funções-objetivo, o problema passa a ser o

de encontrar:

$$\text{Min}_u \sum_{i=1}^2 w_i \cdot J_i(u); w_1, w_2 \geq 0 \text{ e } w_1 + w_2 = 1 \quad (\text{A.1})$$

Para o caso especial de se adotar um dos pesos como sendo nulo, a Pareto-otimalidade da solução encontrada deverá ser checada. Por outro lado, quando todos os pesos são estritamente positivos, então a alternativa ótima do problema de ponderações será, com certeza, Pareto-ótima.

A interpretação geométrica do método é mostrada na figura A.1, onde cada solução Pareto-ótima encontrada é o ponto tangente da reta de inclinação $-w_1/w_2$ com a região factível no "espaço-critério" definido por $J_1 \times J_2$.

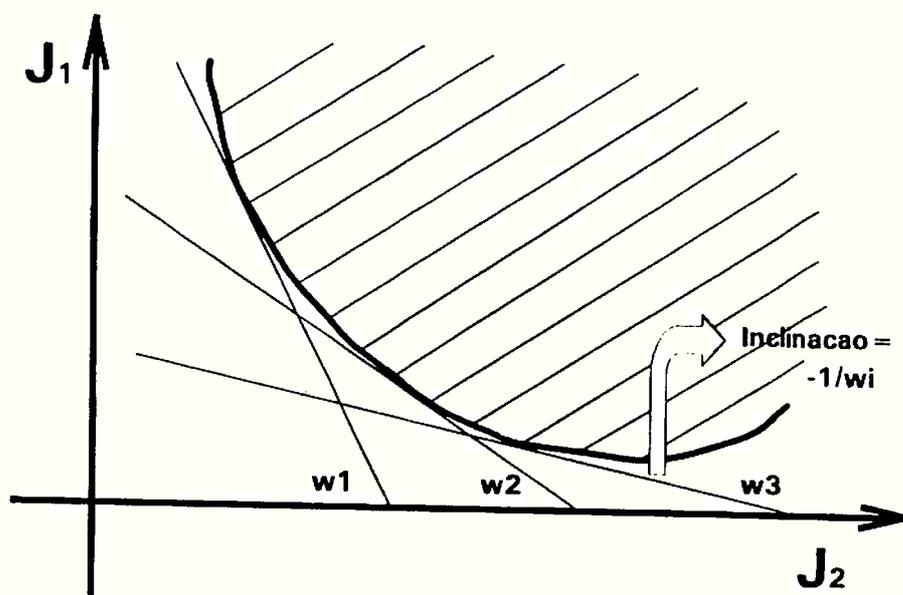


Figura A.1: A solução ótima do problema ponderado varia com os pesos w_i .

A.3 Método de Estimação do Conjunto Não-Inferior

Para explicar o método, será utilizado o caso particular em

que existem apenas duas funções-objetivo.

O método NISE permite interpolar soluções partindo-se de duas soluções pré-calculadas. Assim, sendo A e B duas soluções Pareto-ótimas no plano em que as coordenadas são dadas pelas funções-objetivo J_1 e J_2 ("criteria space"), o segmento que os une pode ser ou não parte do conjunto solução. Se o segmento AB é não Pareto, então encontram-se soluções caminhando na direção externa ao polígono $A'ABB'$, mostrado na figura (A.2).

Os pesos usados para gerar A e B definem a inclinação dos segmentos $A'AC$ e $B'BD$, respectivamente.

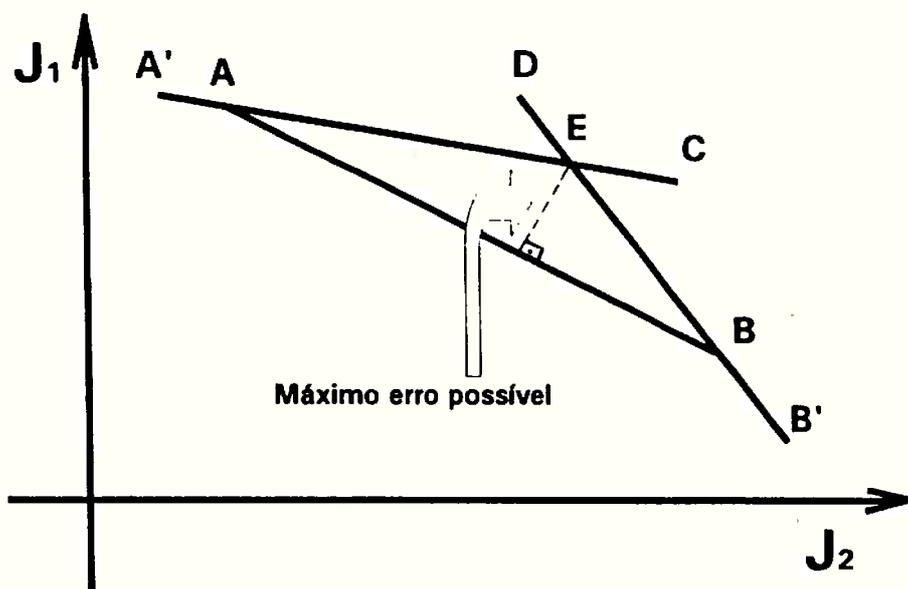


FIGURA A.2: Máximo erro possível associado a um dado segmento do espaço-critério.

Os segmentos $A'AC$ e $B'BD$ representam os limites superiores para o conjunto Pareto-ótimo, ou seja, nenhuma solução reside do lado externo a estas linhas, conseqüentemente a região de busca está definida pelo triângulo AEB .

Assim, tomar o segmento AB como uma aproximação do conjunto

Pareto significa admitir um erro máximo possível dado pela perpendicular ao segmento AB passando por E. O valor para o erro máximo permitido deve ser selecionado antes de iniciar o algoritmo.

O plano representado pelos eixos coordenados J_1 e J_2 , que têm dimensões diferentes, possui distâncias sem significado físico; assim, é usual designar como erro máximo permitido uma porcentagem do erro máximo possível associado com a chamada linha "primária", conforme mostra a figura (A.3).

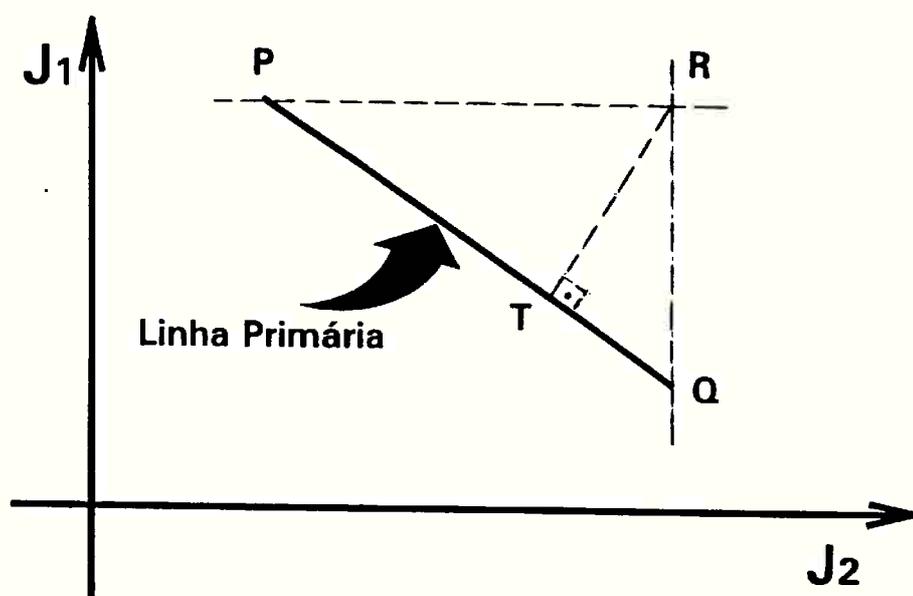


FIGURA A.3: Máximo erro possível RT associado à linha primária.

Para duas soluções particulares P e Q, é chamado de erro máximo possível associado ao segmento PQ à distância RT e o erro máximo permitido será uma porcentagem de RT, fixado no início do algoritmo.

Se o erro máximo referente a um segmento AB exceder ao erro máximo permitido, então a inclinação da linha AB é usada para calcular os pesos para serem usados com o método de

ponderações na determinação de uma solução intermediária X. Observe que os pesos w_1 e w_2 são escolhidos para satisfazer:

$$-w_1/w_2 = \text{inclinação de AB.}$$

A nova solução obtida, resolvendo o problema ponderado, é colocada no plano $J_1 \times J_2$. Se esta nova solução residir acima da linha AB, dois novos segmentos são gerados pela junção de X com A e B, respectivamente. O caso no qual a nova solução reside sobre AB, indica que não existe nenhuma outra solução acima deste segmento.

O processo acima é repetido com cada segmento produzido, até que os máximos erros possíveis em todas as partes do conjunto Pareto-ótimo forem iguais ou menores ao máximo erro permitido.

A.4 Algoritmo

A aplicação do NISE para os casos tratados nos itens 5.1 e 5.2 compreende as seguintes etapas:

i. Realimentação de estado constante

Será usada a seguinte nomenclatura:

S_i = Ponto Pareto-ótimo tendo o i -ésimo valor mais alto de J_1 , no estágio.

MEP = Máximo erro permitido.

MEPO_{jk} = Máximo erro possível associado com o segmento de linha $S_j S_k$.

N = Número de pontos Pareto-ótimos gerados no estágio.

A figura (A.4) mostra a evolução de um estágio a outro pelo método.

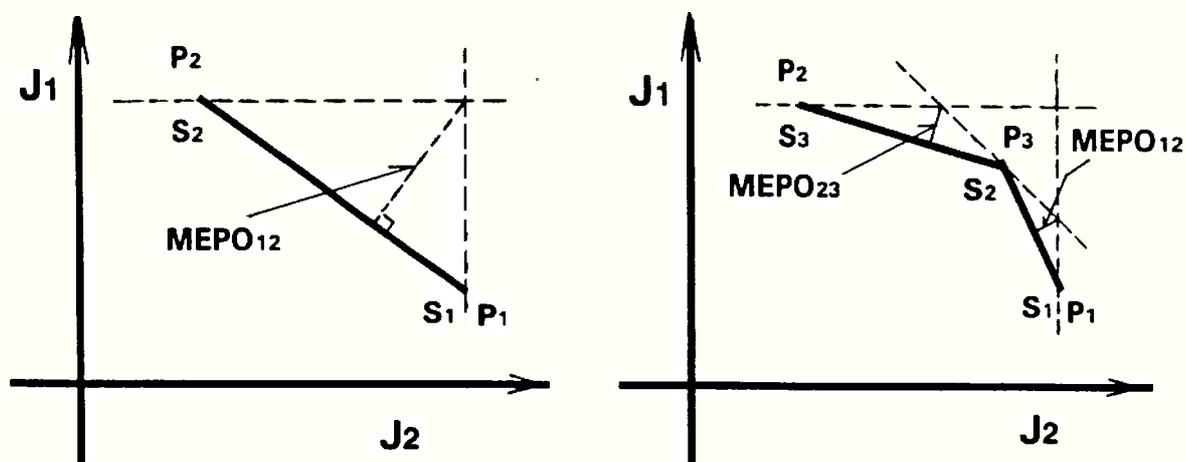


FIGURA A.4: Primeiros dois estágios do algoritmo NISE para um problema com duas funções-critério.

PASSO 1: Através do método de ponderações encontram-se duas soluções Pareto-ótimas particulares. Para tanto, deve-se estabelecer w_1 e w_2 e encontrar,

$$\text{Min}_u [w_1 \cdot \bar{I}_x(u) + w_2 \cdot \bar{I}_u(u)] \quad (\text{A.2})$$

Observe que para o caso de se ter

$w_1=q$ e $w_2=r$ (A.3); pode-se escrever:

$$\text{Min}_u [q \cdot \bar{I}_x(u) + r \cdot \bar{I}_u(u)] = \text{Min}_u [\bar{I}_x(u) + \bar{I}_u(u)] \quad (\text{A.4})$$

Tendo em vista que $\bar{I}_u = K^2 \cdot \bar{I}_x$ (5.3 e 5.4) e

$\bar{I}_x = f(K, T)$, pode-se reescrever (A.4) da seguinte forma:

$$\text{Min}_u [(q+r \cdot K^2) \cdot \bar{I}_x(K, T)] \quad (\text{A.5})$$

Assim, para um $K=K_1$ tal que (5.11), (5.12), (5.14) e (5.15) sejam respeitadas, pode-se encontrar o T_1 que minimize (A.5). Caso este T_1 satisfaça a inequação (5.16), poderá ser usado como uma

solução particular (P_1). Repete-se o processo para um K_2 , obtendo-se outro ponto do conjunto (P_2).

Faça S_i igual ao P_i associado ao maior J_i ; $N=2$.

PASSO 2: Calcule o valor de $MEPO_{1,2}$ e fixe o valor para MEP.

PASSO 3: Se $MEPO_{i,i+1} \leq MEP$ para $i=1,2,\dots,(N-1)$, então PARE. Senão, continue com o PASSO 4.

PASSO 4: Encontre o valor de i para o máximo de todos $MEPO_{i,i+1}$.

Resolva o problema ponderado usando o segmento de linha $S_i S_{i+1}$. Se a nova solução reside acima do segmento $S_i S_{i+1}$, chame a nova solução de P_{N+1} e proceda com o PASSO 5. Caso contrário, faça $MEPO_{i,i+1}=0$ e retorne ao PASSO 3.

PASSO 5: Reordene os pontos P_t , $t=1,2,\dots,(N+1)$.

$$S'_t = S_i; \quad t=1,2,\dots,i$$

$$S'_{i+1} = P_{N+1}$$

$$S'_{t+1} = S_t; \quad t=(i+1),\dots,N$$

Os termos referente aos erros também devem ser renomeados.

$$MEPO'_{t,t+1} = MEPO_{t,t+1}; \quad t=1,2,\dots,(i-1) \quad (i > 1)$$

$$MEPO'_{t+1,t+2} = MEPO_{t,t+1}; \quad t=(i+1),\dots,N \quad (i < N-2)$$

Calcule $MEPO_{i,i+1}$ e $MEPO_{i+1,i+2}$.

Faça $N = N+1$ e retorne ao PASSO 3.

ii. Realimentação gerada pela equação de Riccati

A única diferença está em obter as soluções pelo método das ponderações que, para este caso, pode ser feito da seguinte forma: É estabelecido um valor de q/r pertencente a um intervalo em estudo. Varia-se o t final, dentro do intervalo

de interesse, que minimize (A.4), onde \bar{I}_x e \bar{I}_u são dados, respectivamente, por (5.36) e (5.39).

Verifica-se se o t encontrado satisfaz a condição de $t_{\min.}$, ou melhor, de $x(t_f) \leq x_f$.

**ANEXO B: Diagrama de blocos do programa de busca de matrizes
Pareto-ótimas**

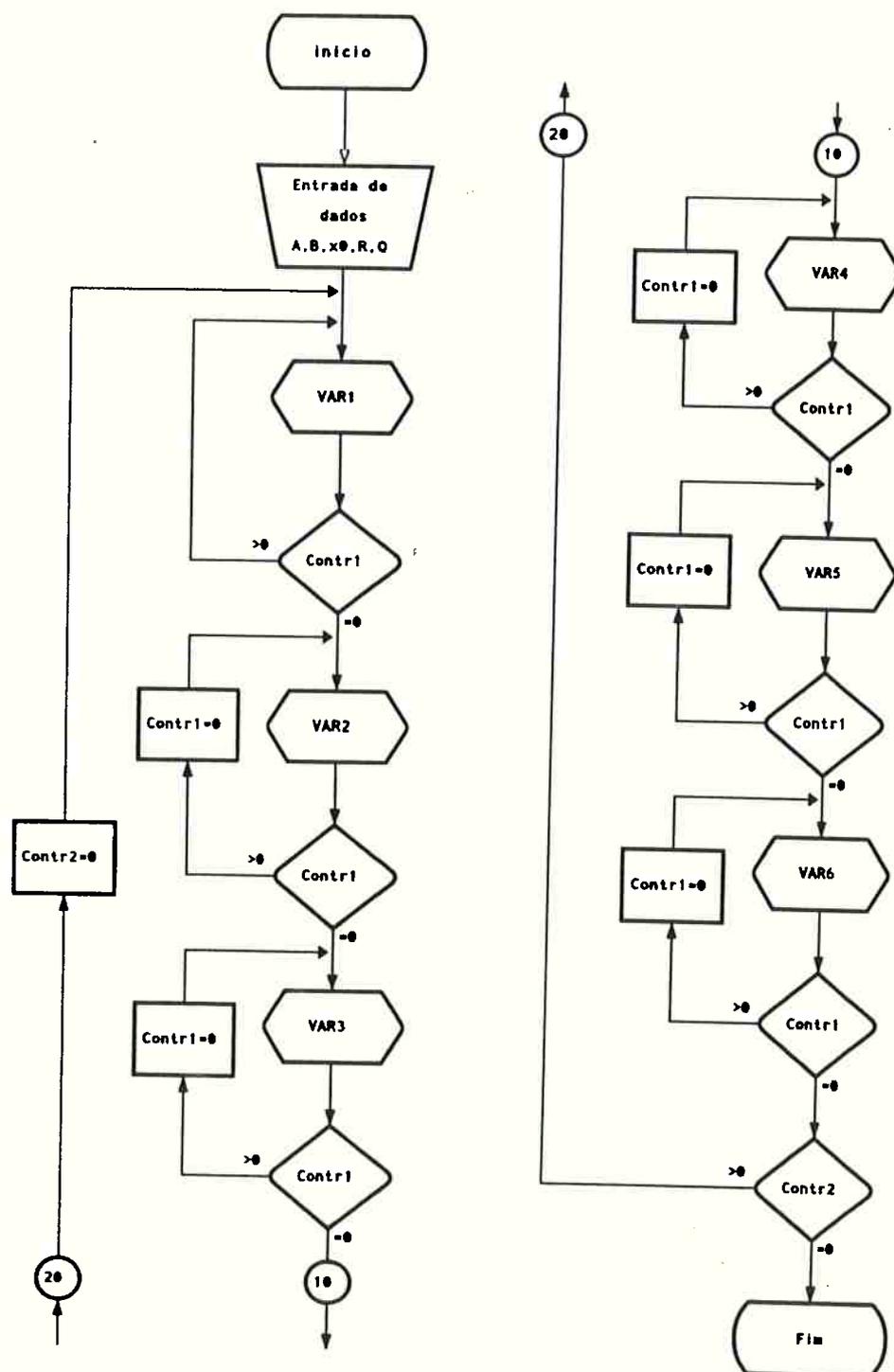
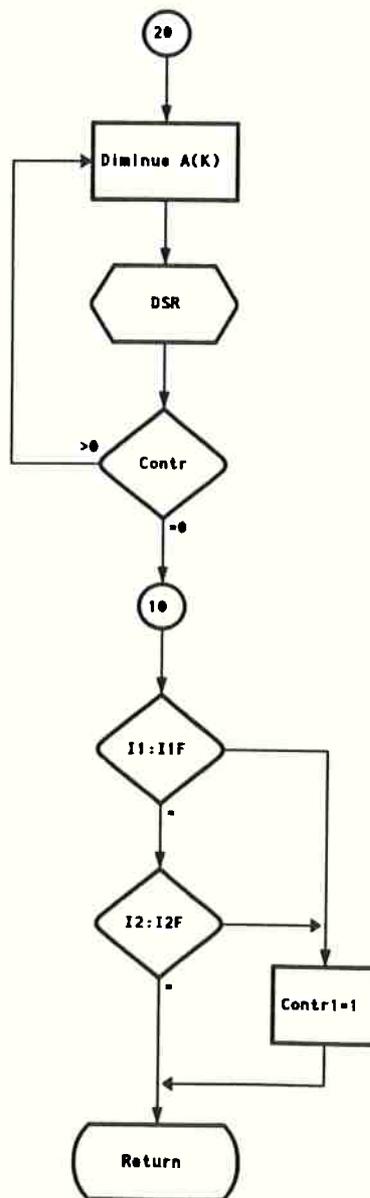
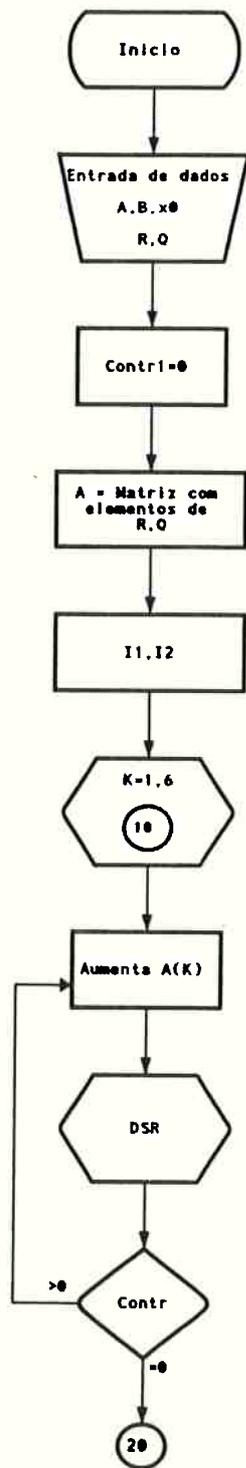


FIGURA B.1: Programa principal com as rotinas de manipulação para $n=2$.

ROTINA: VARI.M



ROTINA: DSR.M

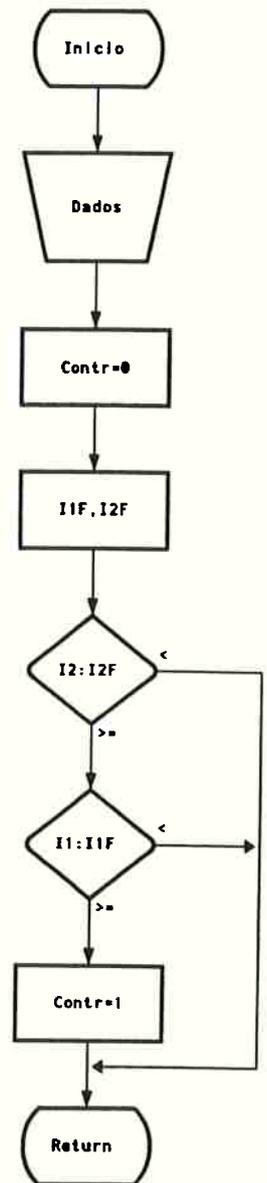


FIGURA B.2: Rotina para manipulação de uma variável.

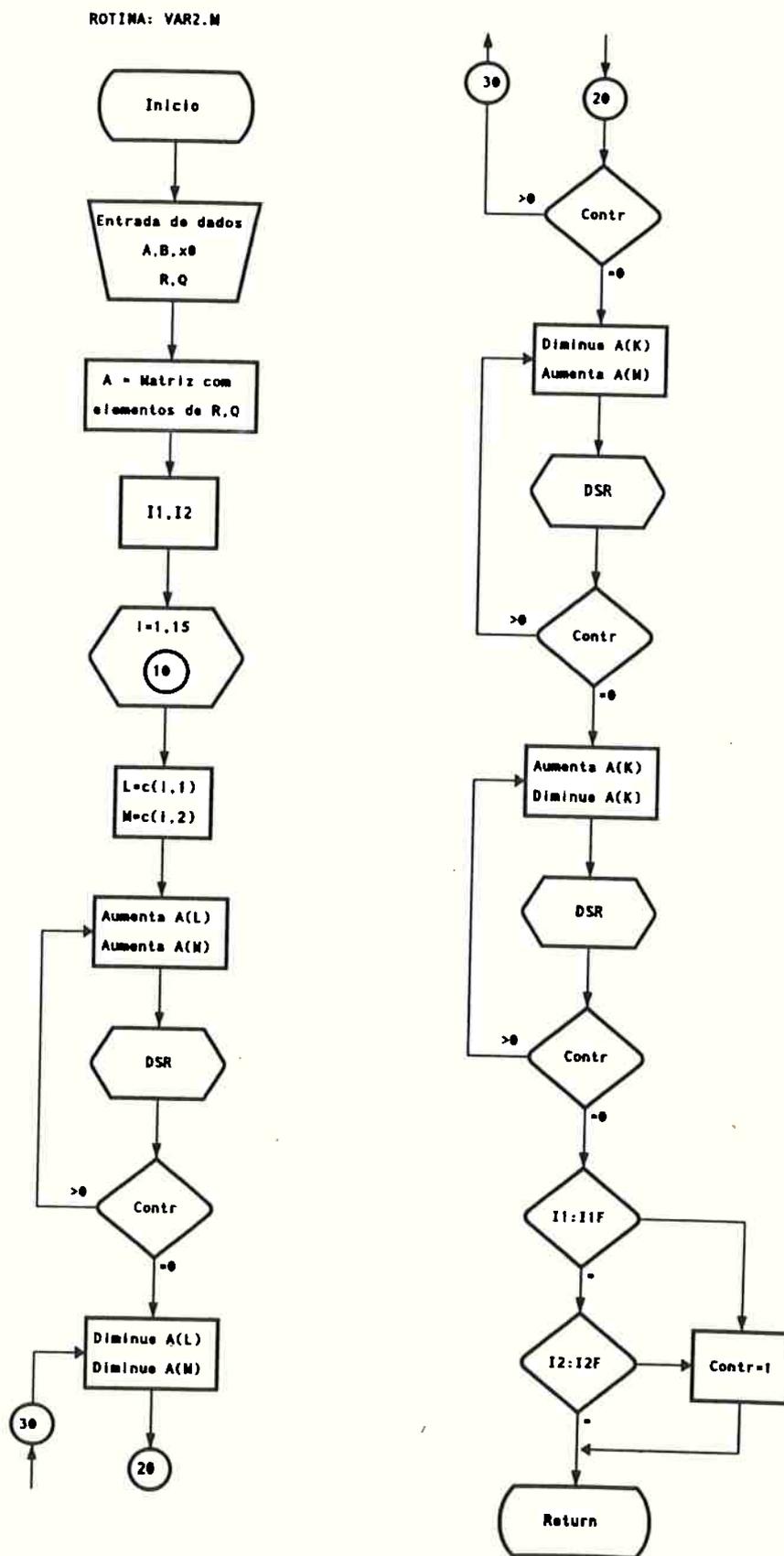
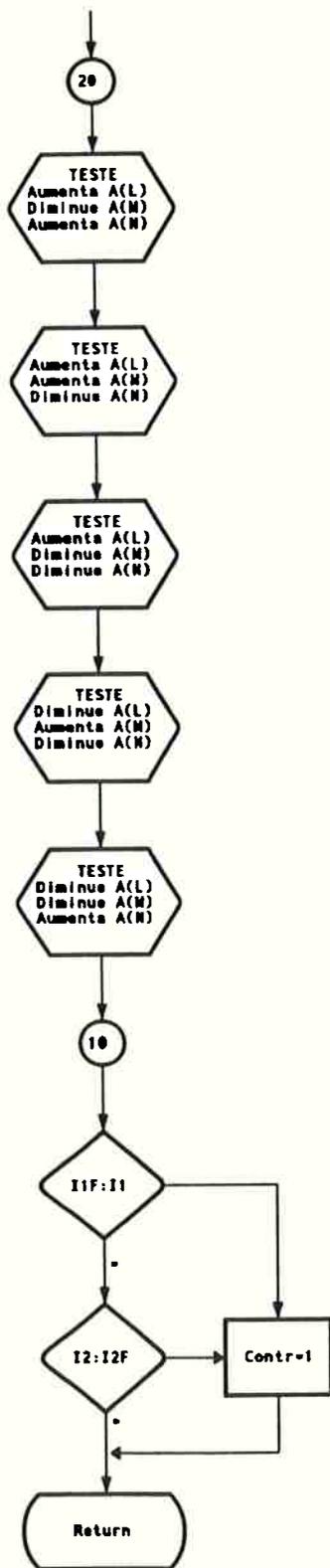
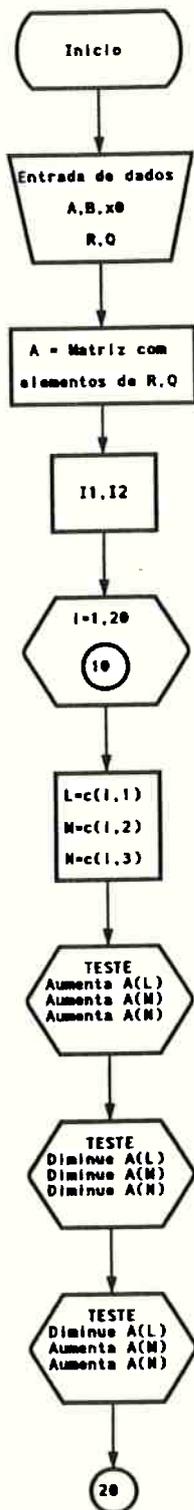


FIGURA B.3: Rotina para manipulação de duas variáveis simultaneamente.

ROTINA: VAR3.M



ROTINA: TESTE.M

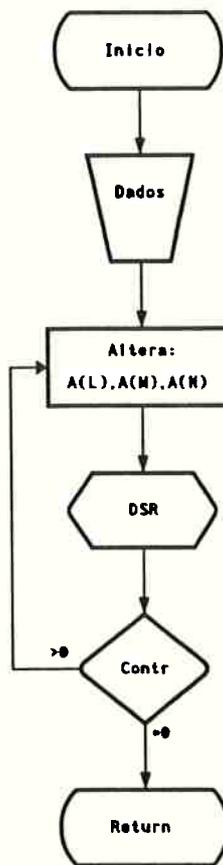


FIGURA B.4: Rotina para manipulação de três variáveis simultaneamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ATHANS, M. The role and use of the stochastic linear quadratic-gaussian problem in control system design. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.AC-16, n.6, p.529-52, 1971.

- [2] KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. **Linear Optimal Control Systems**. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1972.

- [3] KRIKELIS, N.J.; REKASIUS, Z.V. On the solution of the optimal linear control problems under conflict of interest. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.AC-16, n.2, p.140-46, 1971.

- [4] KATOPIS, G.A.; LIN, J.G. Non-inferiority of controls under double performance objectives: minimal time and minimal energy. **Proceedings of the Seventh Hawaii International Conference on Systems Science**, Honolulu, Hawaii, 1974.

- [5] HO, Y.C.; BRYSON JR., A.E.; BARON, S. Differential games and optimal pursuit-evasion strategies. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.AC-10, n.4, p.385-89, Oct. 1965.

- [6] BEHN, R.D.; HO, Y.C. On a class of linear stochastic differential games. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.AC-13, n.3, p.227-40, June 1968.

- [7] MEIER III, L. A new technique for solving pursuit-evasion differential games. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.AC- 14, n.4, p.352-59, Aug. 1969.
- [8] RHODES, I.B; LUENBERGER, D.G. Stochastic differential games with constrained state estimators. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.AC-14, n.5, p.476-81, Oct. 1969.
- [9] LEONDES, C.T.; STUART Jr., D.M. Stochastic differential games with complexity-constrained strategies. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Short paper, p.121-24, Feb. 1972.
- [10] MEDANIC, J.; ANDJELIC, M. Minimax solution of the multiple-target problem. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.AC-17, n.5, p.597-604, Oct. 1972.
- [11] FOLEY, M.H.; SCHMITENDORF, W.E. A class of differential games with two pursuers versus one evader. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Short paper, June 1974.
- [12] SCHMITENDORF, W.E. Minimax control of systems with uncertainty in the initial state and in the state equations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Short paper, p.439-43, June 1977.

- [13] TABAK, D.; SCHY, A.A.; GIESY, D.P.; JOHNSON, K.G.
Application of multiobjective optimization in
aircraft control systems design. **Automatica IFAC**,
v.15, n.5, p.595-600, 1979.
- [14] RAO, S.S.; VENKAYYA, V.B.; KHOT, N.S. Game theory
approach for the integrated design of structures and
controls. **AIAA Journal**, v.26, n.4, p.463-69, Apr.
1988.
- [15] BRANCO, T.M.M. Representative bibliography on
multiobjective optimization. **IV Encontro Nacional de
Automática**, Sociedade brasileira de automática.
Belém, Pará, Julho 1983.
- [16] NASH, J. The bargaining problem. **Econometrica**, v.18,
p.155-62, 1950.
- [17] HO, Y.C. Differential games, dynamic optimization, and
generalized control theory. **Journal of Optimization
Theory and Applications**, v.6, n.3, p.179-209, 1970.
- [18] BALACHANDRAN, M.; GERO, J.S. A comparison of three
methods for generating the Pareto optimal set.
Engineering Optimization, v.7, p.319-36, 1984.
- [19] DOYLE, J.C; STEIN G. Multivariable feedback design:
concepts for a classical/modern synthesis. **IEEE
Transactions on Automatic Control**, v.AC-26, n.1, p.4-

16, Feb.1981.

- [20] SOLHEIM, O.A. Design of optimal control systems with prescribed eigenvalues. **International Journal of Control**, v.15, n.1, p.143-160, 1972.
- [21] KALMAN, R.E. When is a linear control system optimal? **Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME, Série D**, v.86, p.51-60, Mar.1964.
- [22] LEVINE, W.S.; ATHANS, M. On the optimal error regulation of a string of moving vehicles. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.AC-11, n.3, p.355-361, July 1966.
- [23] HOBEROCK, L.L.; ROUSE, R.J. A study of quadratic cost functions for vehicle headway control. **Journal of The Franklin Institute**, v.299, n.2, Feb.1975.

BIBLIOGRAFIA

NASH, J. Two-person cooperative games. *Econometrica*, v.18, p.155-62, 1950.

BRYSON, A.E.; HO, Y.C. **Applied Optimal Control: optimization, estimation, and control.** Ed. revisada, Washington, D.C., Hemisphere Publishing Corporation, 1975.

REKASIUS, Z.V.; SCHMITENDORF, W.E. On the noninferiority of Nash equilibrium solutions. *IEEE Transaction on Automatic Control*, v.AC-16, n.2, p.170-73, Apr.1971.

ATHANS, M; GEERING, H.P. Necessary and sufficient conditions for differentiable nonscalar-valued functions to attain extrema. *IEEE Transaction on Automatic Control*, v.AC-18, n.2, p.132-38, Apr.1973.

ZADEH, L. Optimality and non-scalar valued performance criteria. *IEEE Transaction on Automatic Control*, v.AC-8, p.59-60, Jan.1963.

CITRON, S.J. **Elements of Optimal Control.** New York, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.

SCHMITENDORF, W.E. Differential games with open-loop saddle point conditions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.AC-15, n.3, p.320-25, June 1970.

- KOSKI, J.; SILVENNOINEN, R. Pareto optima of isostatic trusses. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.31, p.265-79, 1982.
- ROSENMAN, M.A.; GERO, J.S. Pareto optimal serial dynamic programming. **Engineering Optimization**, v.6, p.177-83, 1983.
- DLESK, D.C.; LIEBMAN, J.S. Multiple objective engineering design. **Engineering Optimization**, v.6, p.161-75, 1983.
- REID, R.W.; CITRON, S.J. On noninferior performance index vectors. **Journal of optimization theory and applications**, v.7, n.1, p.11- 28, 1971.
- LIN, J.G. Multiple-objective problems: Pareto-optimal solutions by method of proper equality constraints. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.AC-21, n.5, p.641-50, Oct. 1976.
- LIN, J.G. Maximal vectors and multi-objective optimization. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v.18, n.1, p.41-64, Jan. 1976.
- CORLEY, H.W. A new scalar equivalence for Pareto optimization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.AC-25, p.829-30, Aug. 1980.
- Da CUNHA, N.O.; POLAK, E. Constrained minimization under

vector-valued criteria in finite dimensional spaces.

Journal of Mathematical Analysis and Applications, v.19,
p.103-24, 1967.

WILLEMS, J.C. Least squares stationary optimal control and
the algebraic Riccati equation. **IEEE Transactions on
Automatic Control**, v.AC-16, n.6, p.621-34, Dec. 1971.

STARR, A.W.; HO, Y.C. Nonzero-sum differential games.
Journal of Optimization Theory and Applications, v.3, n.3,
p.184-206, 1969.

MEDANIC, J.; ANDJELIC, M. On a class of differential games
without saddle-point solutions. **Journal of optimization
Theory and Applications**, v.8, n.6, 1971.

CARMICHAEL, D.G. Computation of Pareto optima in structural
design. **International Journal for Numerical Methods in
Engineering**, v.15, p.925-29, 1980.

SALUKVADZE, M. On the existence of solutions in problems of
optimization under vector-valued criteria. **Journal of
Optimization Theory and Application**, v.13, n.2, p.203-17,
1974.

CHU, K.C. On the noninferior set for the systems with
vector-valued objective function. **IEEE Transaction on
Automatic Control**, v.AC-15, n.5, p.591-93. Oct.1970.

CARVALHO, J.R.H.; FERREIRA, P.A.V. Uma abordagem para o problema de controle multicritério de sistemas dinâmicos. 9º CBA-UFES, Vitória, 1992. **Anais. Espírito Santo**, p.568-73, 1992.

RHODES, I.B; LUENBERGER, D.G. Differential games with imperfect state information. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.AC-14, n.1, p.29-38, Feb. 1969.

SCHULTZ, D.G; MELSA, J.L. **State functions and linear control systems**. Mc.Graw-Hill, Inc., 1967.

WAKELAND, W.R. A study of weighting factors of the quadratic performance index. **Journal of The Franklin Institute**, v.287, n.2, Feb.1969.