

**FÁBIO SALTARA**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO AO REDOR  
DE CILINDROS**

**Tese apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade  
de São Paulo para obtenção  
do título de Doutor em  
Engenharia**

**SÃO PAULO**

**1999**

**FÁBIO SALTARA**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO AO REDOR  
DE CILINDROS**

**Tese apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade  
de São Paulo para obtenção  
do título de Doutor em  
Engenharia**

**Área de Concentração:  
Engenharia Mecânica**

**Orientadores:  
Julio Romano Meneghini  
Jayme Pinto Ortiz**

**SÃO PAULO**

**1999**

## AGRADECIMENTOS

À FAPESP, que viabilizou financeiramente esta pesquisa através de um Projeto Temático e de um Projeto de Auxílio à Pesquisa, coordenados pelos Profs. Drs. José A. P. Aranha e Julio R. Meneghini. Tais projetos possibilitaram a compra dos computadores e equipamentos sem os quais não seriam possíveis as simulações desta tese.

À PETROBRÁS, que patrocinou esta pesquisa através do projeto CFD, coordenado pelo Prof. Dr. Julio R. Meneghini (USP) e pelo Dr. José A. Ferrari Jr. (PETROBRÁS).

Ao Laboratório de Computação Científica Avançada (LCCA) da USP, por ter disponibilizado seus equipamentos e o *software* ENSIGHT6 para a realização de muitas das visualizações desta pesquisa.

Aos meus orientadores Prof. Dr. Julio R. Meneghini e Prof. Dr. Jayme P. Ortiz, cujas idéias foram fundamentais para a resolução de muitos dos problemas que surgiram no decorrer da pesquisa.

Ao meu caro colega Cesareo R. Siqueira, com quem foi possível um valioso intercâmbio de experiências. Graças a tal trabalho conjunto, muito tempo e esforço foram poupados.

Aos estagiários Arthur Leotta e Cássio Takeshi Yamamoto, que, utilizando o *software* ANSYS, geraram todas as malhas usadas nas simulações deste trabalho.

# SUMÁRIO

<b>Lista de Figuras</b>	
<b>Lista de Tabelas</b>	
<b>Lista de Símbolos</b>	
<b>Resumo</b>	
<b>Abstract</b>	
<b>Formato da Tese</b>	
<b>1 Objetivos e Justificativa</b>	<b>1</b>
<b>2 Metodologia</b>	<b>3</b>
<b>3 Revisão Bibliográfica</b>	<b>4</b>
3.1 O Fenômeno de emissão de vórtices e a vibração Induzida pelo escoamento	4
3.2 Métodos de resolução das equações de Navier-Stokes	7
3.3 Método dos Volumes Finitos	10
3.4 Modelagem de Turbulência	12
<b>4 O fenômeno da vibração induzida pelo escoamento</b>	<b>14</b>
4.1 Introdução	14

4.2	O fenômeno de emissão de vórtices	15
4.3	Vibração induzida pelo escoamento em um cilindro livre para oscilar	19
4.4	Principais observações experimentais a respeito da vibração induzida pelo escoamento	23
4.5	Agrupamentos de Cilindros	30
4.5.1	Par de cilindros lado a lado	31
4.5.2	Par de cilindros em <i>tandem</i>	32
<b>5</b>	<b>O método dos volumes finitos</b>	<b>34</b>
5.1	Introdução	35
5.2	O Método dos Volumes Finitos aplicado às malhas não estruturadas de elementos triangulares para problemas difusivos	35
5.2.1	Resolução de problemas difusivos através de volumes formados pelas mediatrizes (volumes de Voronoi)	36
5.2.2	Resolução de problemas difusivos através de volumes formados pelas medianas	40
5.2.3	Resolução de problemas convectivo-difusivos através de volumes formados pelas medianas	45
<b>6</b>	<b>O método dos vórtices discretos</b>	<b>49</b>
6.1	Considerações iniciais	49
6.2	A técnica “ <i>Vortex in cell</i> ”	50
6.3	Condições de contorno para a equação de Poisson da Função de Corrente	54
6.4	Condições de contorno da equação de difusão da vorticidade	54

6.5	Cálculo das Velocidades	56
6.6	Cálculo da vorticidade dos nós da malha a partir dos vórtices pontuais	57
6.7	Cálculo das forças sobre o cilindro	59
6.8	Mecanismos de localização dos vórtices na malha não-estruturada	61
6.9	Limitações da formulação Função de corrente - Vorticidade	63
6.10	Formulação Velocidade-Vorticidade	64
<b>7</b>	<b>Resultados preliminares - método dos vórtices discretos</b>	<b>68</b>
<b>8</b>	<b>O método da resolução por partes da equação de Navier-Stokes</b>	<b>81</b>
8.1	Considerações iniciais	81
8.2	O algoritmo do método da resolução por partes	82
<b>9</b>	<b>Resultados preliminares - método da resolução por partes</b>	<b>91</b>
<b>10</b>	<b>Turbulência</b>	<b>96</b>
10.1	Simulação dos Grandes Vórtices (LES)	97
10.2	Resultados	103
<b>11</b>	<b>A simulação do escoamento ao redor de um cilindro livre para oscilar na direção transversal à direção da corrente</b>	<b>104</b>
<b>12</b>	<b>Resultados obtidos para arranjos de cilindros lado a lado usando o Método da Resolução por Partes</b>	<b>118</b>

<b>13 Resultados obtidos para arranjos de cilindros em <i>tandem</i> usando o Método da Resolução por Partes</b>	<b>132</b>
<b>14 Conclusões</b>	<b>145</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>151</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura</b>	<b>Página</b>
4.1) O modelo de Gerrard (1966) para a emissão de vórtices.	15
4.2) Relação entre o número de Strouhal $S$ e o número de Reynolds $Re$ .	18
4.3) Relação entre o coeficiente de arrasto $C_d$ e o número de Reynolds $Re$ .	18
4.4) Resultados obtidos por FENG (1968) relativos à vibração induzida pelo escoamento em um cilindro livre para oscilar.	24
4.5) Resultados obtidos por BRIKA e LANEVILLE [(1993) e (1997)] para a amplitude de vibração de um cilindro flexível.	27
4.6) Modos 2S e 2P de emissão de vórtices.	27
4.7) Resultados obtidos por KHALAK e WILLIAMSON (1996) para a amplitude de vibração de um cilindro livre para oscilar na direção transversal à direção do escoamento.	29
4.8) Arranjos básicos para pares de cilindros.	30
4.9) Esteiras em fase e anti-fase no arranjo lado a lado.	31
4.10) Regimes observados quando temos escoamento em <i>tandem</i> .	33
5.1) Circuncentro de um triângulo.	36
5.2) Volume de Voronoi correspondente a um ponto $P$ .	37
5.3) Cálculo do fluxo difusivo através de um lado de um volume de Voronoi : principais medidas.	38
5.4) Baricentro de um triângulo, formado pelo encontro das medianas.	40
5.5) Volume formado pelo método das medianas.	42
5.6) Face para o cálculo do fluxo difusivo para fora do volume de integração.	43



6.1) Volume formado junto à parede.	55
6.2) Obtenção da vorticidade dos nós a partir da circulação de um vórtice pontual.	58
6.3) Nó Q externo a um triângulo.	62
7.1) Malha usada para simulações para $Re=100$ e $Re=200$ .	68
7.2) Detalhe da malha na proximidade do cilindro.	69
7.3) Resultados para $Re=100$ usando a formulação $\psi-\omega$ .	72
7.4) Esteira para $Re=100$ , formulação $\psi-\omega$ .	72
7.5) Resultados para $Re=200$ usando a formulação $\psi-\omega$ .	73
7.6) Esteira para $Re=200$ , formulação $\psi-\omega$ .	73
7.7) Resultados para $Re=100$ usando a formulação $v-\omega$ .	74
7.8) Esteira para $Re=100$ , formulação $v-\omega$ .	75
7.9) Resultados para $Re=200$ usando a formulação $v-\omega$ .	75
7.10) Esteira para $Re=200$ , formulação $v-\omega$ .	76
7.11) Malha usada para simulações para $Re=10000$ .	77
7.12) Detalhe da malha na proximidade do cilindro.	77
7.13) Resultados para $Re=10000$ usando a formulação $v-\omega$ .	79
7.14) Esteira para $Re=10000$ , formulação $v-\omega$ .	79
8.1) Exemplo de arranjo de nós para malha estruturada cartesiana.	86
8.2) Arranjo para interpolação parabólica em malha não estruturada, com fluxo de “P” para “E”.	88
8.3) Arranjo para interpolação parabólica em malha não estruturada, com fluxo de “E” para “P”.	89
9.1) Resultados para $Re=100$ usando o processo da resolução por partes.	92

9.2) Esteira para $Re=100$ , método da resolução por partes.	92
9.3) Resultados para $Re=200$ usando o processo da resolução por partes.	93
9.4) Esteira para $Re=200$ , método da resolução por partes.	93
9.5) Resultados para $Re=10000$ usando o método da resolução por partes.	94
9.6) Esteira para $Re=10000$ , método da resolução por partes.	95
10.1) Sinal do escoamento turbulento.	97
10.2) Filtro espacial usado para obter as equações de transporte em LES.	98
10.3) Resultados para $Re = 10000$ usando o método da resolução por partes e simulação de turbulência com o modelo de Smagorinsky.	105
10.4) Esteira para $Re = 10000$ , com o modelo de Smagorinsky .	105
10.5) Contornos de viscosidade turbulenta $\nu_t/\nu$ , $Re = 10000$ .	106
10.6) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $Re = 10000$ .	107
11.1) Amplitude de vibração do cilindro como função da velocidade reduzida para cilindro submetido a uma corrente com uma dada velocidade reduzida fixa.	110
11.2) Coef. de sustentação e deslocamento adimensional do cilindro para $V_r = 3.0$ .	111
11.3) Coef. de sustentação e deslocamento adimensional do cilindro para $V_r = 5.0$ .	112
11.4) Coef. de sustentação e deslocamento adimensional do cilindro para $V_r = 7.0$ .	112
11.5) Esteira para $V_r=3.0$ .	113
11.6) Esteira para $V_r=5.0$ .	113
11.7) Esteira para $V_r=7.0$ .	114

11.8) Amplitude de vibração do cilindro como função da velocidade reduzida para cilindro submetido a uma corrente com velocidade reduzida variável.	115
11.9) Amplitude de vibração adimensional para $V_r$ crescente ao longo do tempo.	116
12.1) Malha usada para $T/D = 1.5$ .	119
12.2) Forças para $T/D = 1.5$ .	121
12.3) Esteira para $T/D = 1.5$ .	121
12.4) Contornos de Pressão na proximidade dos cilindros.	122
12.5) Forças para $T/D = 2.0$ .	123
12.6) Esteira para $T/D = 2.0$ .	123
12.7) Forças para $T/D = 3.0$ .	124
12.8) Esteira para $T/D = 3.0$ .	124
12.9) Forças para $T/D = 4.0$ .	125
12.10) Esteira para $T/D = 4.0$ .	125
12.11) Forças para $T/D = 5.0$ .	126
12.12) Esteira para $T/D = 5.0$ .	126
12.13) Gráfico da relação entre $C_{d_{agrupamento}}/C_{d_{isolado}}$ .	128
12.14a) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $T/D=2.0$ .	130
12.14b) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $T/D=2.0$ .	130
12.14c) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $T/D=2.0$ .	130
12.14d) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $T/D=2.0$ .	130
12.14e) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $T/D=2.0$ .	130

12.14f) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $T/D=2.0$ .	130
12.14g) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $T/D=2.0$ .	130
12.14h) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $T/D=2.0$ .	130
12.15a) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $T/D=3.0$ .	131
12.15b) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $T/D=3.0$ .	131
12.15c) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $T/D=3.0$ .	131
12.15d) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $T/D=3.0$ .	131
12.15e) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $T/D=3.0$ .	131
12.15f) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $T/D=3.0$ .	131
12.15g) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $T/D=3.0$ .	131
12.15h) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $T/D=3.0$ .	131
13.1) Malha usada para $L/D = 1.5$ .	133
13.2) Forças para $L/D = 1.5$ .	134
13.3) Esteira para $L/D = 1.5$ .	134
13.4) Forças para $L/D = 2.0$ .	135
13.5) Esteira para $L/D = 2.0$ .	135
13.6) Forças para $L/D = 3.0$ .	136
13.7) Esteira para $L/D = 3.0$ .	136
13.8) Forças para $L/D = 4.0$ .	137
13.9) Esteira para $L/D = 4.0$ .	137
13.10) Forças para $L/D = 5.0$ .	138
13.11) Esteira para $L/D = 5.0$ .	139

13.12) Contornos de pressão $\frac{p}{\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2}$ para $L/D = 3.0$ .	140
13.13) Número de Strouhal $S$ como uma função de $L/D$ .	140
13.14a) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $L/D=3.0$ .	143
13.14b) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $L/D=3.0$ .	143
13.14c) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $L/D=3.0$ .	143
13.14d) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $L/D=3.0$ .	143
13.14e) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $L/D=3.0$ .	143
13.14f) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $L/D=3.0$ .	143
13.14g) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $L/D=3.0$ .	143
13.14h) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $L/D=3.0$ .	143
13.15a) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $L/D=4.0$ .	144
13.15b) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $L/D=4.0$ .	144
13.15c) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $L/D=4.0$ .	144
13.15d) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $L/D=4.0$ .	144
13.15e) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $L/D=4.0$ .	144
13.15f) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $L/D=4.0$ .	144
13.15g) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $L/D=4.0$ .	144
13.15h) Contornos de vorticidade $\omega D/U_0$ , $L/D=4.0$ .	144

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela</b>	<b>Página</b>
7.1) Resultados experimentais e numéricos obtidos por outros autores.	70
7.2) Resultados obtidos em nossas simulações.	71
9.1) Resultados obtidos em nossas simulações.	91
12.1) Relação entre $Cd_{\text{agrupamento}}/Cd_{\text{isolado}}$ .	127
13.1) Características do escoamento ao redor de dois cilindros em <i>tandem</i> .	139

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_i$	coeficiente de equação algébrica
$A$	amplitude de vibração
$c$	amortecimento
$C_1, C_2, C_\mu$	constantes do modelo k- $\epsilon$
$C_d$	coeficiente de arrasto
$C_l$	coeficiente de sustentação
$C_s$	constante do modelo de Smagorinsky
$l$	comprimento do cilindro
$D$	diâmetro
$f_s$	frequência de emissão de vórtices
$f_n$	frequência natural
$f_2, f_\mu$	funções de correção para efeitos de parede em modelos de turbulência
$F_x$	força de arrasto
$F_y$	força de sustentação
$k$	energia cinética da turbulência
$K$	rigidez de mola
$m$	massa do sistema
$m_d$	massa de fluido deslocado
$m^*$	parâmetro de massa
$\bar{n}$	vetor normal unitário
$n$	distância na direção normal à parede
$n^+$	distância adimensional da parede
$p$	pressão
$P_k$	produção de turbulência
$Re$	n° de Reynolds
$Re_t$	n° de Reynolds da turbulência
$S$	n° de Strouhal ; superfície
$S_\phi$	termo fonte em equação de transporte
$S_{ij}$	tensor da taxa de deformação
$t$	tempo
$T_n$	período natural
$U_0$	velocidade da corrente
$u$	velocidade na direção x
$u_\tau$	velocidade de atrito
$\bar{u}_\phi$	vetor da velocidade do escoamento potencial
$\bar{u}_\omega$	vetor da velocidade do escoamento induzido pela vorticidade
$v$	velocidade na direção y
$v_s$	velocidade tangencial
$v_n$	velocidade normal
$\bar{v}$	vetor da velocidade
$V$	volume
$V_r$	velocidade reduzida
$y$	deslocamento do cilindro
$Y$	deslocamento adimensional do cilindro

$\alpha$	coeficiente de difusão em equação de transporte
$\Delta$	escala de comprimento usada em Simulação dos Grandes Vórtices
$\varepsilon$	taxa de dissipação da energia cinética da turbulência
$\varphi$	potencial
$\phi$	grandeza física
$\Gamma$	circulação
$\zeta$	fração de amortecimento crítico
$\nu$	viscosidade cinemática
$\mu$	viscosidade dinâmica
$\psi$	função de corrente
$\rho$	massa específica
$\tau$	tensão de cisalhamento ; tempo adimensional
$\tau_0, \tau_w$	tensão na parede
$\omega$	vorticidade
$\omega_0, \omega_w$	vorticidade na parede
$\omega_n$	frequência angular natural



## RESUMO

O método dos vórtices discretos na formulação híbrida euleriana-lagrangeana e o método da resolução por partes das equações de Navier-Stokes ( "*Fractional Step Method*" ) são analisados quanto a sua capacidade para simular computacionalmente o escoamento ao redor de corpos submersos com emissão de vórtices. Ambos os métodos são implementados através de um esquema de volumes finitos para malhas não estruturadas bidimensionais com elementos triangulares. Uma nova forma de interpolação para o termo convectivo das equações de transporte, derivada do esquema QUICK e adaptada para malhas não estruturadas, é proposta para diminuir a difusão numérica do *Fractional Step Method*.

Os algoritmos computacionais desenvolvidos são usados para estudar a vibração induzida pelo escoamento em cilindros livres para oscilar em alto  $Re$  e as características do escoamento ao redor de pares de cilindros fixos em tandem e lado a lado em baixo  $Re$ . Observa-se que para o problema da vibração induzida são obtidas amplitudes de vibração abaixo dos valores observados experimentalmente. Tal resultado parece ser devido às simulações serem bidimensionais. No caso dos arranjos com pares de cilindros, são apresentados contornos de vorticidade que permitem a visualização das interações dos vórtices desprendidos para diferentes valores de espaçamento entre os corpos.

## ABSTRACT

The discrete vortex method in a hybrid eulerian-lagrangian implementation and the Fractional Step Method are analysed. Their capacity to simulate flows around submerged bodies with vortex shedding is investigated. Both methods are applied through a finite volume method using an unstructured 2-D triangular mesh. A new interpolation for the convective term of the transport equations, derived from the QUICK scheme and adapted to be used with an unstructured mesh is proposed in order to reduce the numerical diffusion of the Fractional Step Method.

The developed computational algorithms are used to study the vortex induced vibration in circular cylinders free to oscillate transversally for high Re numbers, and the characteristics of the flow around pairs of fixed cylinders in tandem and side-by-side arrangement for low Re numbers. It can be seen that for the vortex induced vibration lower amplitudes of vibration are obtained than the ones observed experimentally. Such a result seems to be due to the two-dimensional nature of the simulations. In the case of the pairs of cylinders, vorticity contours that allow the visualization of the interactions of the shed vortices are presented for different values of distance between the bodies.

## FORMATO DESTA TESE

Decidimos , ao escrever esta tese, seguir um encadeamento que refletisse os rumos tomados pela pesquisa ao longo do tempo. Assim, os capítulos 1 e 2 são dedicados a descrever os objetivos e a metodologia que foram seguidos. O capítulo 3 é dedicado à revisão bibliográfica. No capítulo 4 abordamos de forma sucinta os fenômenos físicos que pretendemos estudar, referentes à emissão de vórtices e vibração induzida pelo escoamento. Como pretendíamos usar o método dos volumes finitos, junto com o método dos vórtices discretos, para resolver as equações da dinâmica dos fluidos que são importantes para tais fenômenos, os capítulos 5 e 6 são dedicados a descrever tais métodos. No capítulo 7 mostramos alguns resultados preliminares do método dos vórtices discretos. Como tal método demonstrou resultados insatisfatórios para altos números de Reynolds, e era nossa intenção resolver escoamentos turbulentos, decidimos utilizar outro método, o método da resolução por partes das equações de Navier-Stokes ( *Fractional Step Method* ). Assim, o capítulo 8 traz uma introdução de tal método, e o capítulo 9 apresenta resultados preliminares com sua utilização, demonstrando sua capacidade para resolver os escoamentos em que estávamos interessados. Assim, os capítulos 5 a 9 refletem claramente o processo de amadurecimento do trabalho.

No capítulo 10 apresentamos a técnica de simulação dos grandes vórtices (LES) utilizada para modelar a turbulência no nosso trabalho. Os capítulos 11, 12 e 13 são dedicados aos resultados obtidos para os fenômenos de vibração induzida pelo escoamento em cilindros livres para oscilar , emissão de vórtices em cilindros lado a lado e em arranjo *tandem*. Finalmente, o capítulo 14 é dedicado às conclusões.

## 1 Objetivos e Justificativa

De forma resumida, podemos dizer que os objetivos do trabalho são os seguintes:

- a) Desenvolver uma ferramenta computacional para estudar os efeitos do escoamento externo ao redor de um ou mais corpos de qualquer formato, em regime variado e capturando o fenômeno de emissão de vórtices, para altos números de Reynolds, e levando em consideração efeitos de turbulência;
- b) Utilizar tal ferramenta para estudar basicamente dois problemas distintos relacionados à questão da emissão de vórtices: a vibração induzida pelo escoamento em um cilindro livre para oscilar na direção transversal à direção da corrente incidente; e a influência, nos coeficientes de arrasto e sustentação de um cilindro, da existência de outros cilindros próximos a este.

A justificativa para o trabalho está em sua importância para o desenvolvimento de novas tecnologias para a fabricação de cabos e *risers* para a indústria petrolífera. Um dos parâmetros fundamentais para o dimensionamento de *risers* é sua resistência à fadiga, e a vibração induzida pela emissão de vórtices é muito importante para determinar tal parâmetro.

Os *risers* são também normalmente dispostos em agrupamentos onde podem ocorrer interações entre os vários componentes. Pouco se conhece sobre os efeitos de um cilindro imerso em uma corrente quando este é colocado próximo a outros. Assim, uma ferramenta computacional que permita estudar tais interações é de fundamental importância para pesquisas na área. É importante lembrar que a PETROBRÁS é líder mundial em tecnologia para a extração de petróleo de águas profundas ( mais de 1000 m

de profundidade ) , e a manutenção de tal liderança depende de um trabalho contínuo de pesquisa e desenvolvimento.

Tal ferramenta computacional pode encontrar aplicações também no projeto de emissários submarinos, cujo rompimento causa danos ambientais consideráveis, no estudo de cabos elétricos e, de maneira geral, no estudo de todo tipo de estrutura que pode sofrer danos devido à vibração induzida por vórtices.

## 2 Metodologia

Para tentar alcançar nossos objetivos vamos desenvolver um programa de computador, utilizando o método dos volumes finitos para malhas não estruturadas, com modelagem da turbulência.

A escolha do método dos volumes finitos com malhas não estruturadas está associada ao desejo de conseguir uma simulação adequada da esteira para altos valores do número de Reynolds. Os métodos tradicionais para simular o escoamento ao redor de um cilindro empregam malhas polares. Tais métodos tem como desvantagem a sua limitação no que diz respeito à possibilidade de serem usados em outras geometrias como os agrupamentos de cilindros. Além disso, a malha polar é inadequada para simular as características do escoamento na esteira, pois, embora seja possível um bom refinamento na região da camada limite, o mesmo não ocorre longe do corpo.

### **3 Revisão Bibliográfica**

Para uma melhor apresentação da literatura que serve como base para este trabalho, decidimos dividi-la em quatro categorias básicas: Vibração Induzida pelo escoamento, Métodos de Resolução das Equações de Navier-Stokes, Método dos Volumes Finitos e Modelagem de Turbulência.

#### **3.1 O Fenômeno de emissão de vórtices e a vibração Induzida pelo escoamento**

O livro de BLEVINS (1990) é sempre uma referência obrigatória no estudo da vibração induzida pelo escoamento. Nesta referência é analisada a vibração induzida pelo escoamento subsônico e sua importância na prática da engenharia. SARPKAIA (1979) produziu uma extensa revisão sobre o tema, descrevendo os principais modelos usados para estudar o problema. FENG (1968) foi um dos primeiros a estudar experimentalmente a vibração induzida pelo escoamento em um cilindro livre para oscilar em ar, observando as características da faixa de sincronização e os efeitos de histerese observados no fenômeno. BRIKA e LANEVILLE (1993) obtiveram grande quantidade de dados experimentais relativos a um cilindro flexível em uma corrente de ar, e muitos dos resultados observados parecem ser válidos também para cilindros rígidos livres para oscilar apenas na direção transversal ao escoamento incidente, como demonstram os resultados de KHALAK e WILLIAMSON (1996), que obtiveram curvas semelhantes em experimentos realizados em água, observando, porém, que a amplitude da vibração induzida é maior que em ar na faixa de sincronização. PARRA (1996)

obteve resultados, também em água, que parecem corroborar os resultados de KHALAK e WILLIAMSON .

FUJARRA (1997) realizou também importantes experimentos com um cilindro flexível longo e engastado em uma extremidade, obtendo resultados interessantes quanto à verificação do fenômeno de histerese na vibração induzida pelo escoamento.

A maior parte dos trabalhos referentes ao fenômeno da emissão de vórtices enfocam o escoamento ao redor de um único corpo submerso. Poucos trabalhos estudam os efeitos que ocorrem quando temos agrupamentos de cilindros.

ZDRAVKOVICH [(1977) e (1987)] é um dos pesquisadores que mais tem se dedicado a pesquisar o problema do escoamento sobre agrupamentos de cilindros. Em seu trabalho de 1977, que é uma revisão de trabalhos anteriores, os efeitos do escoamento sobre dois cilindros em *tandem* , lado a lado e dispostos em direção oblíqua à direção da corrente incidente ( "*staggered arrangement*" ) são discutidos. São apresentados Coeficientes de força obtidos para ambos os cilindros como uma função do espaçamento entre estes , observando-se, para os cilindros em *tandem* e lado a lado, sensíveis diferenças de comportamento quando os cilindros estão próximos e quando estão distantes. No trabalho de 1987 mais ênfase é dada no estudo de pares de cilindros em arranjo oblíquo e em agrupamentos com mais de dois cilindros.

BEARMAN e WADCOCK (1973) pesquisaram os efeitos do escoamento sobre um par de cilindros dispostos lado a lado, medindo as distribuições de pressão sobre ambos os corpos. Verificou-se a existência de uma força de repulsão entre os cilindros, e o surgimento de instabilidades quando os cilindros aproximam-se um do outro.

WILLIAMSON (1985) realizou visualizações de escoamento para o caso do par de cilindros lado a lado, estudando o efeito que a distância entre estes tem no tipo de



esteira formada. Verificou-se que, para distâncias entre os centros dos cilindros superiores a dois diâmetros, ocorre predominantemente a formação de duas esteiras em anti-fase. Para distâncias entre os centros inferiores a dois diâmetros, verifica-se uma assimetria das esteiras.

KIM e DURBIN (1988) também estudaram experimentalmente o caso do par de cilindros lado a lado, concentrando-se no estudo do escoamento para distâncias entre centros inferiores a dois diâmetros, utilizando anemometria de fio quente.

ARIE et al (1983) mediram a distribuição de pressões sobre dois cilindros em tandem, verificando que, para distâncias entre centros superiores a dez diâmetros, a variância do coeficiente de pressão de ambos tornava-se praticamente igual à obtida para um único cilindro submetido à corrente.

SUMNER et al (1998) estudaram o arranjo lado a lado de dois e três cilindros através de visualização de escoamento ( PIV ), corroborando os resultados obtidos por WILLIAMSON (1985) e KIM e DURBIN (1988).

MITTAL et al (1997) realizaram simulações numéricas para estudar o par de cilindros em arranjo *tandem* ( dois cilindros alinhados com a direção da corrente ) e em arranjo oblíquo. Para ambos os arranjos o espaçamento entre os cilindros na direção da corrente era o mesmo. O objetivo do trabalho era observar se um pequeno espaçamento na direção normal à direção da corrente (correspondente ao arranjo oblíquo) produzia diferenças muito acentuadas em relação ao arranjo tandem. O principal efeito observado foi um aumento no coeficiente de arrasto do cilindro posterior.

NG e KO (1995) também tentaram estudar o problema através de simulações numéricas, estudando o arranjo de cilindros lado a lado. O aspecto mais interessante do trabalho está no método dos vórtices discretos por eles utilizado, na sua forma

puramente lagrangeana, e com a emissão de apenas dois vórtices por cilindro para cada intervalo de tempo. Tais vórtices eram emitidos dos pontos de separação, localizados utilizando-se o método de Thwaites. Através de amalgamamento, o número de vórtices foi mantido abaixo de 2000. Apesar da simplicidade do método utilizado, os resultados obtidos são muito bons, principalmente no que se refere às esteiras obtidas.

### 3.2 Métodos de resolução das equações de Navier-Stokes

Dois métodos são em geral considerados como eficientes para a resolução de problemas de vibração induzida pelo escoamento: o Método dos Vórtices Discretos e o Método da Resolução por Partes das equações da quantidade de movimento, em que estas são inicialmente resolvidas sem levar em conta o gradiente de pressão. Esta é determinada a partir de uma equação de Poisson obtida a partir da equação da continuidade. As velocidades são então corrigidas levando em conta as pressões (*"Fractional Step Method"*).

CLEMENTS (1973) utilizou o Método dos Vórtices Discretos para estudar o escoamento ao redor de um corpo semi-infinito de seção quadrada. O fluido foi considerado invíscido, e a velocidade de um dado vórtice foi calculada pela superposição da velocidade do escoamento ao longe e das velocidades induzidas pelos outros vórtices.

CHORIN (1973) foi um dos primeiros a usar o método dos vórtices discretos, usando a técnica chamada *"random walk"* para levar em conta os efeitos difusivos. Tal técnica ainda hoje é muito usada, pois dispensa o uso de malhas.

O trabalho de SPALART e LEONARD (1981) detalha um modelo relativamente simples de método dos vórtices discretos aplicável a fluidos invíscidos. O corpo sólido imerso no escoamento é circundado por pontos onde, para cada intervalo de tempo, são produzidos vórtices pontuais. Tais vórtices têm suas circulações calculadas de forma que a superposição da velocidade do escoamento ao longe, das velocidades induzidas pelos vórtices livres no escoamento, e dos vórtices que são produzidos, tenha componente normal nula sobre a superfície sólida. Como não há difusão de vorticidade, e as velocidades induzidas pelos vórtices em um dado ponto do domínio são calculadas pela lei de Biot-Savart, o método dispensa o uso de uma malha. Essa é a característica que faz com que o Método dos Vórtices Discretos, em sua forma puramente lagrangeana, seja muito apreciado. Porém, a medida que o número de vórtices aumenta, o trabalho computacional necessário para avaliar as velocidades induzidas em cada vórtice por todos os outros passa a ser muito elevado. Como solução para tal problema, os autores indicam o amalgamamento de vórtices de pequena circulação, ou que se encontrem a grande distância do corpo sólido. NAGANO et al. (1982) apud PARK e HIGUCHI (1989) propuseram, para modelar a difusão viscosa, um método pelo qual o vórtice, ao invés de ser pontual, possui um raio que aumenta com o tempo, devido à difusão viscosa da vorticidade. Deve ser lembrado, porém, que GREENGARD (1985) demonstrou que tal técnica não produz uma solução correta para a equação de Navier-Stokes.

PARK e HIGUCHI (1989) utilizaram o mesmo algoritmo desenvolvido por Spalart e Leonard para estudar o escoamento sobre corpos rombudos de diferentes formatos, e verificaram que, quando o corpo tem uma altura (dimensão na direção perpendicular à direção da corrente livre) pequena se comparada com o comprimento

(dimensão na direção paralela à direção da corrente livre), o coeficiente de arrasto obtido estava de acordo com valores obtidos experimentalmente. Para corpos com alturas grandes se comparadas com o comprimento, os coeficientes de arrasto obtidos eram elevados em relação aos resultados esperados.

SARPKAYA (1989) publicou um artigo em que comparava as diferentes técnicas ligadas ao Método dos Vórtices Discretos, e apontava as possibilidades práticas que este tinha dentro da Dinâmica dos Fluidos Computacional.

CHRISTIANSEN (1973) e GRAHAM (1988) apud MENEGHINI (1993) utilizaram uma técnica híbrida, em que a convecção de vorticidade é realizada de forma lagrangeana, mas a difusão é realizada de forma euleriana. Para tanto, deve ser utilizada uma malha, onde a parte difusiva da equação de transporte da vorticidade deve ser resolvida por métodos numéricos convencionais. Também é necessária a resolução da função de corrente sobre a malha, para se obter o campo de velocidades. Tal técnica, denominada “*vortex in cell*”, elimina uma das vantagens normalmente atribuídas aos Métodos dos Vórtices Discretos, que é justamente a falta da necessidade de geração de malhas. Por outro lado, a obtenção do campo de velocidades a partir da função de corrente elimina o grande número de cálculos necessários para obter as velocidades pela lei de Biot-Savart.

MENEGHINI (1993) utilizou a técnica proposta por Graham para simular o escoamento ao redor de cilindros fixos e com oscilações forçadas. No caso de oscilações senoidais, a faixa de sincronização ( usualmente chamada “*lock-in*” ), onde a frequência de emissão de vórtices ( “*vortex-shedding*” ) é capturada pela frequência da oscilação, foi obtida com boa concordância em relação aos resultados da literatura.

A grande maioria dos trabalhos bem sucedidos sobre aplicação de Dinâmica dos Fluidos Computacional para o estudo da vibração induzida pelo escoamento e emissão de vórtices utiliza o “*Fractional Step Method*”. Uma descrição do método pode ser achada no livro de FERZIGER E PERIC (1996). ESFAHANI (1998) e SELVAM (1997) utilizaram o método , junto com simulação dos grandes vórtices (LES), para estudar o escoamento ao redor de corpos rombudos. Esfahani simulou o escoamento ao redor de cilindros de seção retangular , com número de Reynolds ao redor de 40000, e Selvam estudou o problema em cilindros de seção circular, com número de Reynolds igual a 10000. LU et al. (1997) usaram o “*fractional step method*”, junto com LES, para estudar o escoamento tridimensional ao redor de um cilindro para  $Re = 20000$  e  $Re = 44200$ , usando uma malha polar.

### 3.3 Método dos Volumes Finitos

O método dos volumes finitos é um dos métodos numéricos mais extensivamente usados na simulação numérica de fenômenos relacionados ao escoamento de Fluidos. A explicação para isso reside no fato que as principais equações da Dinâmica dos Fluidos são normalmente expressas na forma de balanços de propriedades como massa, energia e quantidade de movimento, aplicados a volumes de controle, através do Teorema do Transporte de Reynolds. Assim, um método baseado justamente numa discretização da região do escoamento em pequenos volumes torna-se aparentemente mais simples e fisicamente interessante.

Uma das referências mais importantes sobre tal assunto é o trabalho de PATANKAR (1980). O Método dos Volumes Finitos é explicado com simplicidade e

riqueza de detalhes. Trata-se de uma leitura básica para entender o método, apresentado para malhas estruturadas e cartesianas.

BALIGA e PATANKAR (1983) estenderam o método para malhas não estruturadas, através de malhas triangulares onde os volumes são formados ligando-se os centróides (ponto de encontro das medianas) de todos os triângulos que tem um dado nó como um de seus vértices. Tal variação do método introduz algumas dificuldades quando temos transporte convectivo e acoplamento pressão-velocidade, mas continua sendo extremamente simples quando temos problemas puramente difusivos, ou quando o transporte convectivo é realizado de forma lagrangeana, como no Método dos Vórtices Discretos. São utilizadas, para a formulação dos fluxos difusivos, funções de forma semelhantes às usadas no Método dos Elementos Finitos. O trabalho de Baliga e Patankar é as vezes considerado um método híbrido (denominado Método dos Elementos Finitos baseado em Volumes de Controle).

MALISKA (1995) sintetizou os dois trabalhos anteriores e também buscou novas formulações para calcular os fluxos convectivos, com o intuito de reduzir a difusão numérica. Além disso, também se preocupou com a questão da velocidade de processamento quando são usadas malhas não estruturadas. Apesar de melhores para discretizar domínios com fronteiras irregulares, tais malhas normalmente perdem em velocidade de resolução do problema para as malhas estruturadas, se não for utilizado um processo conveniente de resolução do sistema de equações gerado.

MARTINS (1996) usou o método desenvolvido por Baliga para simular problemas de convecção de calor usando malhas estruturadas, comparando seus resultados com aqueles obtidos utilizando o programa comercial FLOTRAN.

PERAIRE et al. (1990) estudaram de forma mais profunda a aplicação dos Métodos de Elementos Finitos e Volumes Finitos para malhas não estruturadas e adaptativas, preocupando-se basicamente com a geração de malhas, e em conseguir algoritmos com maior velocidade de processamento. Seu objetivo era resolver a equação de Euler para obter a solução do escoamento ao redor de geometrias tridimensionais de aeronaves.

### 3.4 Modelagem de Turbulência

Poucos casos de simulação de escoamentos turbulentos ao redor de corpos rombudos podem ser encontrados na literatura. ARKELL (1995) utilizou o modelo k- $\epsilon$ , junto com o método dos vórtices discretos, para simular o escoamento ao redor de cilindros para  $Re \approx 10000$ . OKAJIMA (1995) usou LES para simular o escoamento tridimensional ao redor de um corpo de seção quadrada fixo e com oscilações forçadas para  $Re = 22000$  e  $Re = 71400$ , obtendo bons resultados em termos de coeficientes de arrasto e sustentação, além de concordância quanto à faixa de sincronização, em relação aos resultados experimentais. MOCHIDA et al. (1992) apud OKAJIMA (1995) usaram tanto o modelo k- $\epsilon$  quanto LES com o modelo de Smagorinsky para simular o escoamento bidimensional ao redor de corpos de seção quadrada. ZHANG e DALTON (1996) também usaram o modelo de Smagorinsky para o escoamento bidimensional ao redor de um cilindro livre para oscilar com  $Re=13000$ , obtendo resultados apenas razoáveis, não conseguindo definir muito bem a região de sincronização. Além disso, obtiveram um número de Strouhal muito elevado para o cilindro fixo (0.26, contra 0.21 observado experimentalmente).

ESFAHANI (1998) e SELVAM (1997) utilizaram a simulação dos grandes vórtices (LES) para estudar o escoamento ao redor de cilindro de seção retangular e circular, com bons resultados para altos números de Reynolds (acima de 10000).

RODI (1996) realizou inúmeras comparações entre modelos do tipo k- $\epsilon$  e LES e chegou a conclusão que a simulação dos grandes vórtices produz resultados mais próximos daqueles obtidos experimentalmente para escoamentos com emissão de vórtices. Mesmo simulações com modelos dotados de equações de transporte para as tensões turbulentas demonstraram deficiências nesse tipo de escoamento.



## 4 O fenômeno da vibração induzida pelo escoamento

### 4.1 Introdução

O fenômeno da vibração induzida pelo escoamento representa um importante desafio para a pesquisa na área de Mecânica dos Fluidos. Sua importância está relacionada ao fato que o escoamento de um fluido pode causar vibrações potencialmente destrutivas para as estruturas e corpos sólidos com os quais este está em contato. Essa questão sempre foi muito importante, principalmente, nos campos das Engenharias Naval e Aeronáutica.

Boa parte dos problemas ligados à vibração induzida pelo escoamento estão relacionados com o fenômeno da emissão de vórtices ( *vortex shedding* ). Tal fenômeno ocorre frequentemente quando temos regiões de separação do escoamento ao redor de corpos ou estruturas imersas em um meio fluido. Quando ocorre sincronização entre a frequência de emissão de vórtices e a frequência natural da estrutura podemos ter vibrações de grande amplitude, capazes de causar grandes danos a esta.

## 4.2 O fenômeno de emissão de vórtices

A explicação de GERRARD (1966) apud MENEGHINI (1993) para o fenômeno da emissão de vórtices se baseia na idéia que uma das camadas cisalhantes que se separa do cilindro alimenta com circulação um vórtice formando-se no mesmo lado do corpo. À medida que este vórtice torna-se mais intenso, ele induz uma velocidade que faz com que a camada cisalhante oposta se aproxime daquela que o alimenta, atraindo assim partículas com circulação de sinal contrário. Segundo Gerrard, tais partículas fluidas tendem a (fig. 4.1): (a) ser engolfadas pelo vórtice, diminuindo sua circulação; (b) cortar a ligação do vórtice com a sua camada de origem ; (c) formar um novo vórtice, com vorticidade de sinal contrário ao anterior.

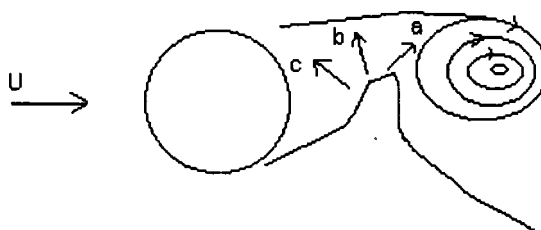


Fig. 4.1) O modelo de Gerrard (1966) para a emissão de vórtices.

Verifica-se experimentalmente que a frequência de emissão de vórtices pode ser relacionada, através de um parâmetro adimensional chamado número de Strouhal, com o número de Reynolds, onde o número de Strouhal é dado por:

$$S = \frac{f_s D}{U_0} \quad (4.1)$$

e o número de Reynolds é dado por:

$$Re = \frac{U_0 D}{\nu} \quad (4.2)$$

onde  $U_0$  é a velocidade do escoamento incidente,  $D$  é o diâmetro do cilindro,  $f_s$  é a frequência de emissão de vórtices e  $\nu$  é a viscosidade cinemática. A fig. 4.2, retirada de BLEVINS (1990), representa a relação observada entre  $S$  e  $Re$ . A fig. 4.3, retirada de PANTON (1996), mostra a relação entre o coeficiente de arrasto  $C_d$  e  $Re$ .

O fenômeno de emissão de vórtices em cilindros circulares é extremamente dependente do número de Reynolds. Verifica-se que, para  $Re < 40$ , formam-se dois vórtices que permanecem colados ao corpo. O desprendimento alternado de vórtices começa aproximadamente para tal valor de  $Re$ . Para  $40 < Re < 180$ , temos a separação da camada limite para um ângulo  $\theta$  de aproximadamente  $80^\circ$  a partir do ponto de estagnação frontal do cilindro, com o desprendimento alternado de vórtices. O escoamento é laminar e bidimensional.

A partir de  $Re=180$ , verifica-se o aparecimento de tridimensionalidades na esteira. Para  $Re = 350$ , verifica-se o aparecimento de turbulência na esteira de vórtices.

A camada limite continua sendo laminar e separando-se em  $\theta = 80^\circ$ , mas os vórtices que se desprendem são turbulentos. Tal regime se mantém até  $Re = 3 \times 10^5$ .

A partir de  $Re = 3 \times 10^5$  nova modificação ocorre. A camada limite continua sendo laminar e separando-se em  $\theta = 80^\circ$ , mas a camada cisalhante, que se torna turbulenta logo depois da separação, sofre “recolamento” (*reattachment*) na superfície do cilindro, formando uma camada limite turbulenta que volta a se separar para  $\theta = 120^\circ$ . O número de Reynolds crítico  $Re = 3 \times 10^5$  marca a chamada “crise do arrasto”, visível na fig. 4.3, com a queda brusca do coeficiente de arrasto. Também verifica-se, na fig. 4.2, um aumento brusco do número de Strouhal. Tal regime, dito crítico, se mantém até aproximadamente  $Re = 3 \times 10^6$ .

A partir de  $Re = 3 \times 10^6$  temos o chamado regime pós-crítico, com a transição para a camada limite turbulenta acontecendo antes da separação. Esta ocorre para  $\theta$  entre  $100^\circ$  e  $110^\circ$ . Quando o regime pós-crítico é atingido, temos uma queda no valor do número de Strouhal.

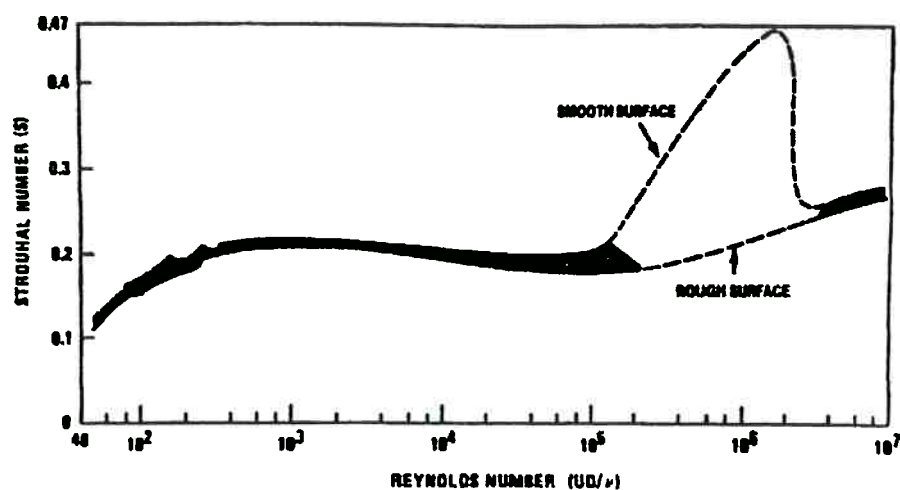


Fig. 4.2) Relação entre o número de Strouhal  $S$  e o número de Reynolds  $Re$ . De BLEVINS (1990).

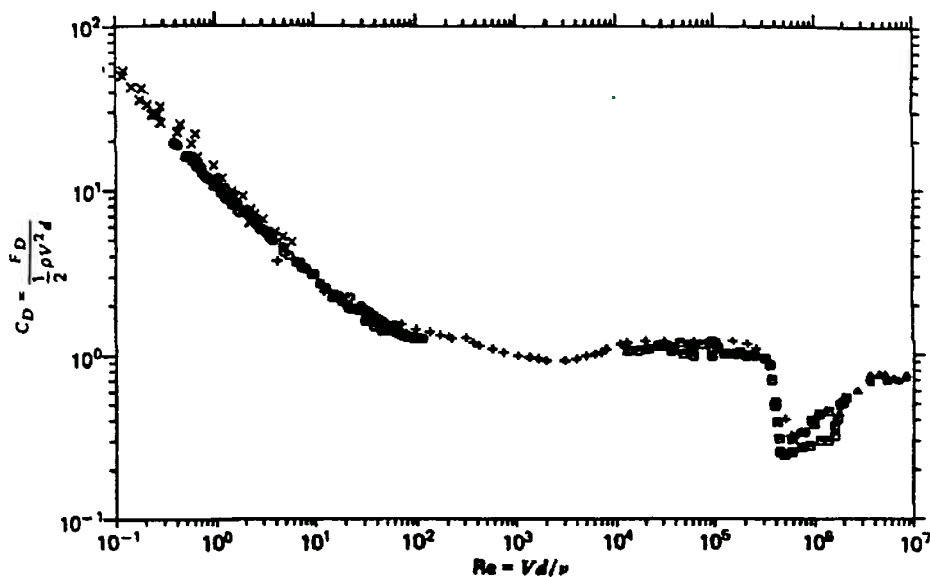


Fig. 4.3) Relação entre o coeficiente de arrasto  $C_d$  e o número de Reynolds  $Re$ . De PANTON (1996).

### 4.3 Vibração induzida pelo escoamento em um cilindro livre para oscilar

A amplitude da vibração induzida pelo escoamento em um cilindro livre para oscilar pode ser descrita como uma relação entre os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\frac{A}{D} = \frac{A}{D} \left( \frac{l}{D}, \frac{U_0 D}{v}, \frac{U_0 T_n}{D}, m^*, \zeta, \frac{\sqrt{k}}{U_0} \right) \quad (4.3)$$

onde  $A$  seria a amplitude da vibração,  $T_n$  seria o período natural de vibração da estrutura,  $l$  seria o comprimento do cilindro,  $m^*$  seria a relação entre a massa da estrutura e a massa de fluido deslocado,  $\zeta$  seria a fração de amortecimento crítico e  $k$  a energia cinética da turbulência. Chamamos de velocidade reduzida  $V_r$  ao grupo adimensional  $\frac{U_0 T_n}{D}$ , e parâmetro de massa a  $m^*$ . O parâmetro de massa  $m^*$ , e período natural  $T_n$  e a fração de amortecimento crítico  $\zeta$  seriam então dados, no caso de um cilindro, segundo KHALAK e WILLIAMSON (1996), por:

$$m^* = \frac{m}{m_d} = \frac{4m}{\rho \pi D^2} \quad (4.4)$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m+m_d}}} \quad (4.5)$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{Km}} \quad (4.6)$$

Nestas expressões,  $m$  é a massa do sistema por unidade de comprimento do cilindro,  $m_d$  é a massa de fluido deslocado,  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $\omega_n$  é a frequência natural do sistema,  $c$  é o fator de amortecimento e  $K$  é a rigidez. Também é importante lembrar que, nos estudos relativos à vibração induzida pelo escoamento, a frequência e período naturais são definidos com a soma da massa do sistema e da massa de fluido deslocado, segundo a eq. (4.5).

Segundo BLEVINS (1990), grandes amplitudes de vibração aumentam a correlação da esteira na direção da envergadura do cilindro. É por esse motivo que simulações bidimensionais, em teoria, deveriam ser capazes de fornecer dados realistas para o fenômeno da vibração induzida pelo escoamento. O nosso problema, assim, se o cilindro pode vibrar na direção transversal à direção da corrente incidente, se reduz a resolver a equação diferencial:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = F_y \quad (4.7)$$

onde  $F_y$  é a força de sustentação por unidade de comprimento do cilindro. A força de sustentação, no nosso caso, deve ser fornecida pela integração das tensões de cisalhamento e pressões sobre a parede do cilindro, para cada instante de tempo. É, assim, o resultado da simulação do escoamento ao redor do cilindro. A equação (4.7), sendo dividida por  $m + m_d$ , pode ser re-escrita como:

$$\frac{m}{m+m_d} \ddot{y} + 2\zeta \frac{\sqrt{Km}}{m+m_d} \dot{y} + \frac{K}{m+m_d} y = \frac{C_l \frac{1}{2} \rho U_0^2 D}{m+m_d} \quad (4.8)$$

onde  $C_l$  é o coeficiente de sustentação. Introduzindo a frequência natural e a massa deslocada, temos ainda:

$$\frac{m}{m+m_d} \ddot{y} + 2\zeta \omega_n \sqrt{\frac{m}{m+m_d}} \dot{y} + \omega_n^2 y = \frac{C_l \frac{2}{\pi D} U_0^2 m_d}{m+m_d} \quad (4.9)$$

Multiplicando os dois lados da equação por  $(m + m_d) / m$  e introduzindo o parâmetro de massa  $m^*$ , temos:

$$\ddot{y} + 2\zeta \omega_n \sqrt{1 + \frac{1}{m^*}} \dot{y} + \omega_n^2 \left(1 + \frac{1}{m^*}\right) y = C_l \frac{2}{\pi D} U_0^2 \frac{1}{m^*} \quad (4.10)$$

Vamos agora introduzir o deslocamento adimensional  $Y = y/D$  e o tempo adimensional  $\tau = t / T_n$ . Teremos, assim:

$$\frac{d^2 Y}{d\tau^2} = \ddot{Y} = \frac{T_n^2}{D} \ddot{y} \quad (4.11)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = \dot{Y} = \frac{T_n}{D} \dot{y} \quad (4.12)$$



A equação (4.10) pode agora ser re-escrita como:

$$\frac{D}{T_n^2} \ddot{Y} + 2\zeta \omega_n \sqrt{1 + \frac{1}{m^*}} \frac{D}{T_n} \dot{Y} + \omega_n^2 \left(1 + \frac{1}{m^*}\right) DY = C_l \frac{2}{\pi D} U_0^2 \frac{1}{m^*} \quad (4.13)$$

Lembrando que a frequência angular natural  $\omega_n = 2\pi / T_n$  :

$$\frac{D}{T_n^2} \ddot{Y} + 4\pi\zeta \sqrt{1 + \frac{1}{m^*}} \frac{D}{T_n} \dot{Y} + 4\pi^2 \frac{D}{T_n^2} \left(1 + \frac{1}{m^*}\right) Y = C_l \frac{2}{\pi D} U_0^2 \frac{1}{m^*} \quad (4.14)$$

E, finalmente, lembrando que a velocidade reduzida  $V_r$  é dada por  $U_0 T_n / D$ , temos:

$$\ddot{Y} + 4\pi\zeta \sqrt{1 + \frac{1}{m^*}} \dot{Y} + 4\pi^2 \left(1 + \frac{1}{m^*}\right) Y = C_l \frac{2}{\pi} \frac{V_r^2}{m^*} \quad (4.15)$$

Assim, dados os valores de  $m^*$ ,  $\zeta$  e  $V_r$ , podemos resolver a equação (4.15) a cada instante com o valor de  $C_l$  resultante da solução do escoamento ao redor do cilindro, usando um método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

#### 4.4 Principais observações experimentais a respeito da vibração induzida pelo escoamento

Verifica-se que, quando um cilindro livre para oscilar é submetido a uma corrente, ocorre uma captura da frequência de emissão de vórtices pela frequência natural de vibração do cilindro. Tal captura ocorre para uma faixa de velocidades reduzidas  $V_r = \frac{U_0 T_n}{D}$ . Essa faixa é conhecida como faixa de sincronização ( em inglês, *lock-in*), e temos a ocorrência de vibrações de grande amplitude. Tal fenômeno é ilustrado perfeitamente na fig. 4.4, retirada do livro de BLEVINS (1990), que mostra os resultados obtidos por FENG (1968) em seus experimentos, realizados em ar e , consequentemente, com altos valores do parâmetro de massa  $m^*$ . O cilindro está livre para oscilar apenas na direção transversal. A frequência de emissão de vórtices é dada por  $f_s$ . O parâmetro de massa de Feng é dado por  $\frac{\rho D^2}{m} = 0.00514$ , o que equivale a  $m^*=247.71$  , e foram utilizadas frações de amortecimento crítico  $\zeta$  equivalentes a 0.00145 e 0.00181. Na parte superior da figura temos plotada a relação  $f_s/f_n$  , e na parte inferior a amplitude de vibração  $A_y/D$ .

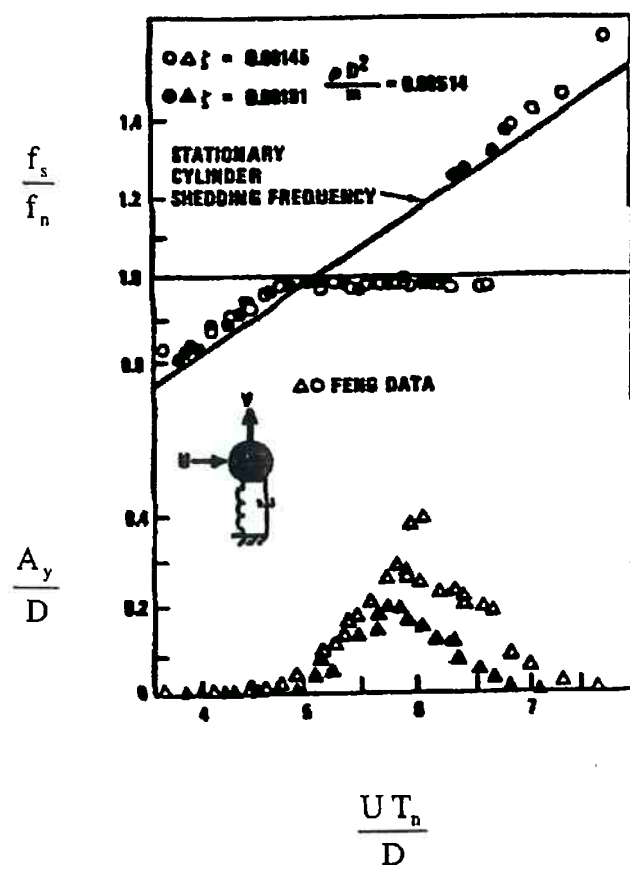


fig. 4.4) Resultados obtidos por FENG (1968) apud BLEVINS (1990), relativos à vibração induzida pelo escoamento em um cilindro livre para oscilar.

Vemos claramente que a frequência de emissão de vórtices se mantém muito próxima da frequência válida para um cilindro estacionário até um valor de velocidade reduzida próximo de 5. A partir de tal valor, ocorre a sincronização da frequência de emissão de vórtices com a frequência natural, e temos, que para uma velocidade reduzida entre 5 e 7,  $f_s/f_n \cong 1.0$ . Para velocidades reduzidas acima de 7, a frequência de emissão de vórtices volta a ser próxima da frequência válida para um cilindro estacionário. Verifica-se que para valores menores de  $m^*$  ( $1 < m^* < 10$ ) a faixa de sincronização é ampliada para velocidades reduzidas entre 4 e 10.

Percebe-se, observando a fig. 4.4, que as maiores amplitudes de vibração ocorrem na faixa de sincronização, chegando a valores de  $A_y/D$  até 0.4 para velocidade reduzida 6 e amortecimento  $\zeta = 0.00145$ . Na faixa de sincronização a vibração ocorre numa frequência muito próxima da frequência natural, grandes amplitudes podem ocorrer e danos físicos podem ser causados à estrutura.

Mais recentemente, BRIKA e LANEVILLE [(1993) e (1997)] realizaram experimentos extensos, para valor elevado de  $m^*$  ( $m^* = 820$ ), com cilindros flexíveis. Seus resultados devem ser encarados com cuidado, pois nesse caso o cilindro pode oscilar também na direção do escoamento principal. Além disso, não se deve esperar efeitos tridimensionais, pois o cilindro flexível, fixo em ambas as extremidades, deve desenvolver amplitudes diferentes de vibração ao longo de sua envergadura. Porém, Brika e Laneville observaram efeitos de histerese que coincidem com aqueles observados em cilindros rígidos livres para oscilar apenas na direção transversal.

Observando a fig. 4.5, retirada de seu trabalho, observa-se que, se a velocidade do escoamento incidente é aumentada de pequenos incrementos (portanto, aumentando-se a velocidade reduzida de pequenos incrementos), a partir de um valor correspondente

a  $V_r = 4.0$ , a amplitude da vibração induzida segue uma linha ( dada por quadrados, na figura ) em que ocorre o desenvolvimento de vibração de grande amplitude. O modo de emissão de vórtices observado é o 2S ( dois vórtices emitidos por ciclo de emissão de vórtices) , segundo a notação usada por WILLIAMSON e ROSHKO (1988) . Logo após a obtenção do pico, com amplitude  $A/D$  acima de 0.5, novos incrementos de velocidade reduzida produzem uma queda na amplitude da vibração ( $V_r$  ao redor de 6.4) . A partir desse ponto a amplitude de vibração passa a ser dada por uma outra linha contínua caracterizada por um modo de emissão de vórtices conhecido como 2P ( dois pares de vórtices emitidos por ciclo de emissão). Brika e Laneville chamaram a primeira linha de ramo superior e a segunda de ramo inferior, e verificaram que, se a velocidade do escoamento era aumentada em grandes incrementos ( pequenos losangos), a partir de um certo valor de velocidade reduzida, a vibração induzida “saltava” de um valor menor de amplitude , no ramo superior, para um valor maior de amplitude, no ramo inferior, sem desenvolver o pico de amplitude. Também observaram que, se a velocidade do escoamento era diminuída de pequenos ou grandes decrementos, (cruzes na figura) a vibração seguia o ramo inferior, “saltando” repentinamente para uma vibração de menor amplitude no ramo superior, também sem desenvolver o pico. Os modos de vortex shedding 2S (de “two single vortices”) e 2P ( de “two pairs of vortices”) são ilustrados pela fig. 4.6 .

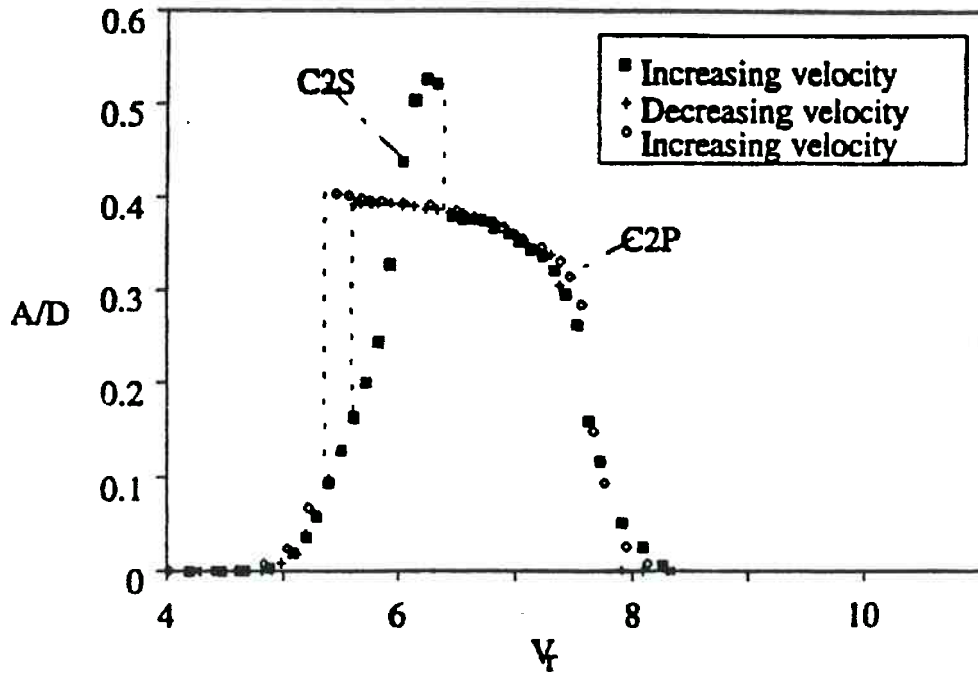


Fig. 4.5) Resultados obtidos por BRIKA e LANEVILLE [(1993) e (1997)] para a amplitude de vibração de um cilindro flexível.

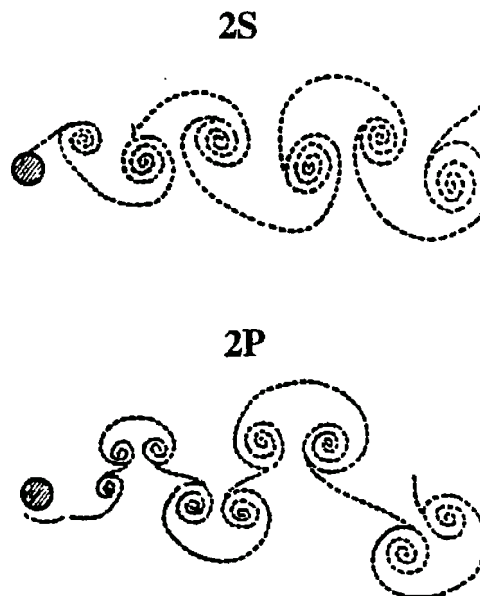


Fig. 4.6) Modos 2S e 2P de emissão de vórtices. Figuras retiradas de BRIKA e LANEVILLE (1993).

KHALAK e WILLIAMSON (1996) realizaram experimentos com um cilindro livre para oscilar na direção transversal, para valores de  $m^*=2.2$  e  $m^*=9.8$ , com  $m^*\zeta=0.013$ , e obtiveram claramente os dois ramos de histerese observados por Brika e Laneville ( Fig. 4.7, retirada de seu trabalho ). É interessante notar que o pico de amplitude,  $A/D$  acima de 1.0 , corresponde a praticamente o dobro daqueles obtidos por Feng e Brika e Laneville , o que pode configurar uma influência do parâmetro  $m^*$ . De fato, o pico obtido para  $m^*=9.8$  está um pouco abaixo daquele obtido para  $m^*=2.2$  .

Khalak e Williamson não fizeram qualquer visualização do escoamento, e aparentemente não se preocuparam em estudar efeitos de histerese. Seus resultados foram corroborados por PARRA (1996), que também realizou seus experimentos com baixo valor de  $m^*$  (  $m^* = 1.83$  ) , obtendo curvas muito similares.

Também é importante lembrar FUJARRA (1997) que realizou experimentos com um cilindro flexível engastado em uma de suas extremidades e verificou claramente a existência de efeitos de histerese, registrando em séries temporais os saltos entre um ramo e o outro, causados por pequenas perturbações. Além disso, obteve os maiores valores de amplitude de oscilação para velocidades reduzidas mais altas que as verificadas para cilindros rígidos montados em suportes elásticos.

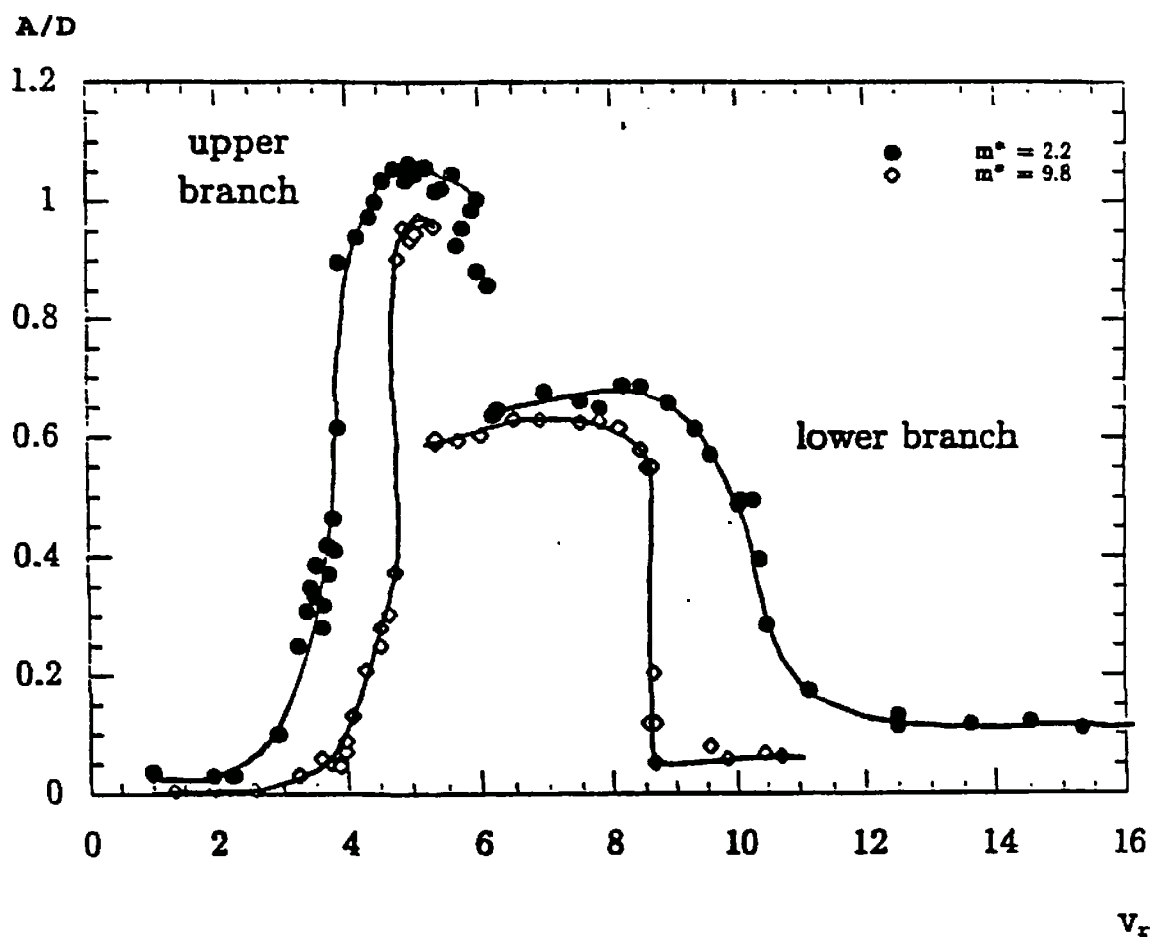


Fig. 4.7) Resultados obtidos por KHALAK e WILLIAMSON (1996) para a amplitude de vibração de um cilindro livre para oscilar na direção transversal à direção do escoamento.



## 4.5 Agrupamentos de Cilindros

Muitos trabalhos tem se dedicado a estudar a emissão de vórtices e a vibração resultante em cilindros isolados submetidos a uma corrente. Pouco se sabe sobre as múltiplas interações que devem ocorrer em agrupamentos de cilindros. Esse tipo de problema é importante para a engenharia porque é muito comum em trocadores de calor, linhas de transmissão de energia elétrica, estruturas metálicas, pilares de sustentação de pontes e agrupamentos de *risers* de plataformas de extração de petróleo.

Os trabalhos sobre agrupamentos de cilindros tem sido realizados, na sua maioria, estudando-se apenas as interações entre dois cilindros arranjados em *tandem* (um exatamente atrás do outro), lado a lado e em arranjo oblíquo ( "*staggered*" ) (fig 4.8).

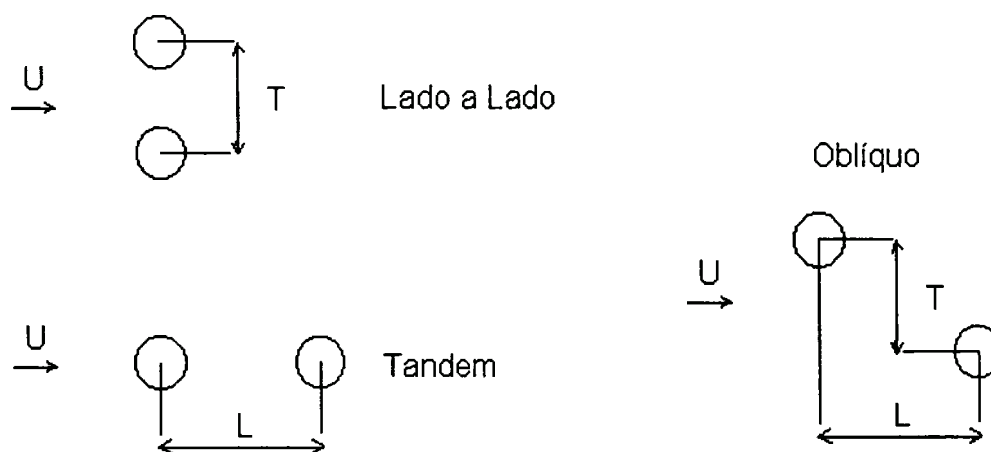


Fig. 4.8) Arranjos básicos para pares de cilindros.

Efeitos interessantes podem ser observados, como uma função do espaçamento entre os cilindros, tanto para o arranjo *tandem* quanto para o arranjo lado a lado.

#### 4.5.1 Par de cilindros lado a lado

Quando dois cilindros de mesmo diâmetro  $D$  estão colocados lado a lado, percebe-se que, segundo as observações experimentais de BEARMAN e WADCOCK (1973), WILLIAMSON (1985) e KIM e DURBIN (1988), para uma distância  $T/D$  inferior a 2.2, ocorre a formação de uma esteira de vórtices praticamente única, que vai sendo defletida na direção de um dos dois cilindros de forma alternada, com uma escala de tempo muito superior ao período de emissão de vórtices ( mais de mil vezes maior ). Tal fenômeno é conhecido como "*flopping*" ou "*flip - flopping*".

Quando a distância entre centros  $T/D$  é maior que 2.2, verifica-se a formação de duas esteiras de vórtices que, segundo WILLIAMSON (1985), ficam preponderantemente em anti-fase (fig. 4.9). Tais resultados foram corroborados pelo trabalho de SUMNER et al (1998).

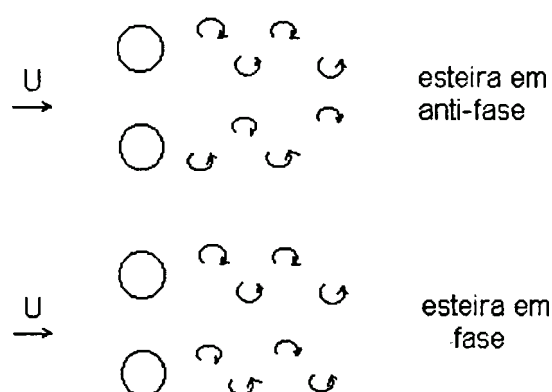


Fig. 4.9) Esteiras em fase e anti-fase no arranjo lado a lado.

Segundo BEARMAN e WADCOCK (1973), tal comportamento pode ser observado até uma distância  $T/D = 5.0$ , a partir da qual os cilindros passam a se comportar como isolados. Também segundo os mesmos autores, ocorre o aparecimento de uma força média de repulsão entre os cilindros, para qualquer espaçamento  $T/D$ .

#### 4.5.2 Par de cilindros em *tandem*

Segundo ZDRAVKOVICH [(1977) e (1987)] três possíveis regimes de escoamento são observados quando temos dois cilindros arranjados em *tandem* (fig. 4.10).

No primeiro, que é observado quando a distância  $L/D$  é menor que 1.2 a 1.8 (dependendo do valor de  $Re$ ), o escoamento que se separa do cilindro frontal não é capturado pela parede do cilindro traseiro. Assim, temos a formação de uma única esteira, formada devido à separação do escoamento no cilindro da frente.

No segundo regime, observado para  $1.2 < L/D < 3.4$  a  $3.8$  (dependendo do valor de  $Re$ ), observa-se que a bolha de separação que ocorre no cilindro da frente é capturada pela parede do cilindro posterior. Temos a formação de uma esteira de vórtices atrás deste, devido a uma nova separação que ocorre sobre sua parede.

Finalmente, no terceiro regime, ocorre emissão de vórtices tanto no cilindro frontal quanto no cilindro posterior. A esteira de vórtices que se forma atrás do cilindro posterior é chamada binária, pois cada vórtice na realidade foi formado pela combinação de um vórtice emitido pelo cilindro da frente com um vórtice emitido pelo cilindro de trás.

Observa-se também que , nos dois primeiros regimes, o cilindro posterior , por estar imerso na esteira do cilindro da frente, sofre uma força de arrasto bem inferior à força sobre este, chegando mesmo, em muitos casos, a ser uma força de arrasto negativa, ou seja, ambos os cilindros sofrem uma força de atração.

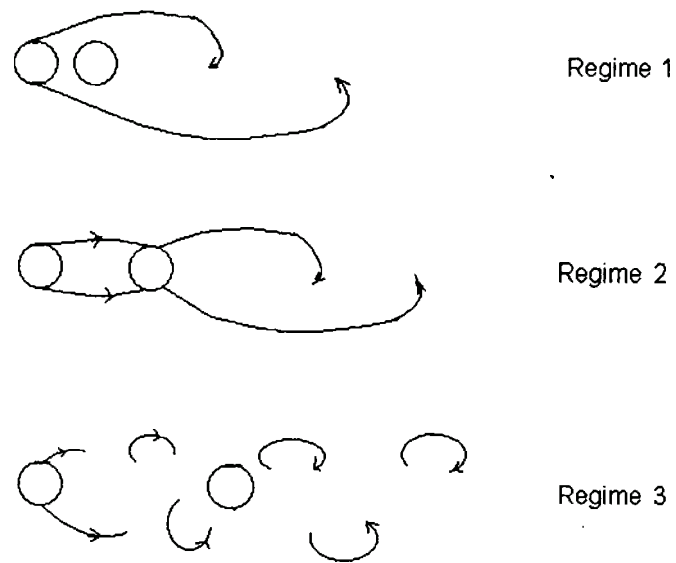


Fig. 4.10) Regimes observados quando temos escoamento em *tandem*.

## 5 O Método dos Volumes Finitos

### 5.1 Introdução

O método utilizado neste trabalho para a resolução das equações diferenciais do escoamento é o Método dos Volumes Finitos (PATANKAR, 1980). Tal método baseia-se na integração dessas equações sobre pequenos volumes materiais. Para problemas puramente difusivos, as equações são do tipo:

$$\text{div}(\alpha \text{ grad } \phi) + S_\phi = 0 \quad (5.1)$$

onde  $\phi$  é a grandeza cujo campo deve ser calculado,  $\alpha$  é o coeficiente de difusão, e  $S_\phi$  é um termo que representa a taxa líquida de criação ou destruição dessa grandeza. Integrando-se esta equação sobre um volume material:

$$\int_V \text{div}(\alpha \text{ grad } \phi) dV + \int_V S_\phi dV = 0 \quad (5.2)$$

considerando-se  $S_\phi$  constante sobre o volume  $V$  de integração e aplicando-se o teorema de Gauss à primeira integral:

$$\int_S \alpha \operatorname{grad} \phi \cdot \vec{n} \, dS + S_\phi V = 0 \quad (5.3)$$

onde S representa a superfície do volume de integração.

## 5.2 O Método dos Volumes Finitos aplicado às malhas não estruturadas de elementos triangulares para problemas difusivos

Decidimos utilizar malhas não estruturadas para obter uma maior flexibilidade na representação de geometrias complexas. Além disso, malhas não estruturadas permitem uma melhor discretização da região da esteira e camada limite de corpos rombudos.

Quando usamos malhas não estruturadas formadas por triângulos, os volumes são construídos ao redor de cada um de seus vértices. Para tanto, os lados dos volumes são definidos pela junção de pontos internos aos triângulos, que podem ser dados pelo encontro das mediatrizes (volumes de Voronoi) ou das medianas. As mediatrizes são retas que passam pelos pontos médios dos lados de um triângulo e são perpendiculares a estes. O encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo define o circuncentro desse triângulo. Uma mediana é uma reta que une o ponto médio de um lado de um triângulo ao vértice oposto a este. O encontro das medianas de um triângulo define seu baricentro (ou centróide).

### 5.2.1 Resolução de problemas difusivos através de volumes formados pelas mediatrizes ( volumes de Voronoi)

No caso dos volumes de Voronoi, os lados de um volume correspondente a um ponto P da malha são formados, como já dito no parágrafo anterior, pelos circuncentros (fig. 5.1) dos triângulos que tem tal ponto como um de seus vértices (fig. 5.2).

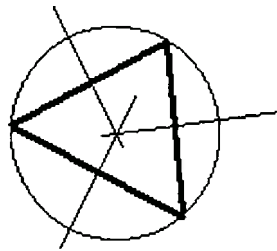


Fig. 5.1) Circuncentro de um triângulo, definido pelo ponto de encontro das mediatrizes de cada lado.

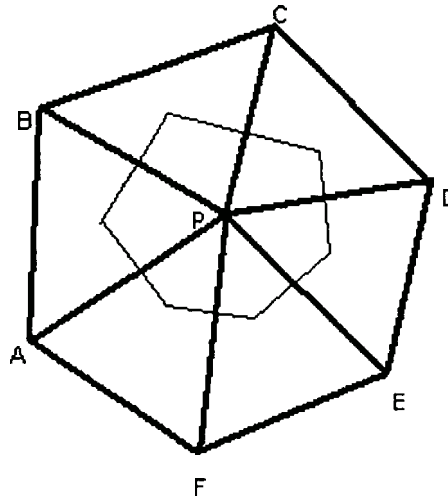


Fig. 5.2) Volume de Voronoi correspondente a um ponto  $P$ , formado pela união dos circuncentros dos triângulos que tem tal ponto como um de seus vértices.

A malha de Voronoi tem uma vantagem muito importante em relação à outras formas de se obter os volumes a partir de malhas não estruturadas: as linhas que unem o ponto  $P$  aos pontos da malha que são seus vizinhos são ortogonais aos lados do volume. Isto torna extremamente fácil avaliar o termo  $\text{grad } \phi \cdot \vec{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n}$ , como veremos a seguir. Porém, as malhas de Voronoi possuem uma grande desvantagem: Para que o circuncentro seja um ponto interno ao triângulo, tal triângulo não pode ter nenhum ângulo maior que  $90^\circ$ .



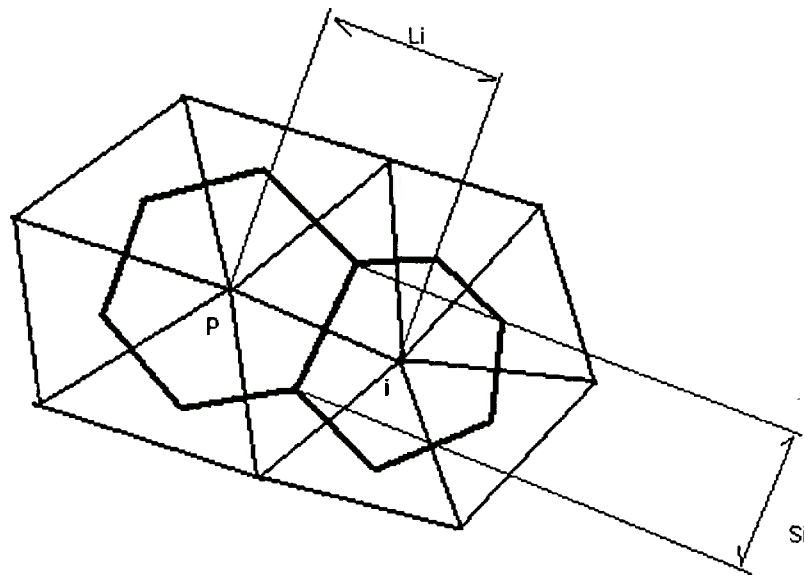


Fig. 5.3) Cálculo do fluxo difusivo através de um lado de um volume de Voronoi :  
principais medidas.

Segundo MALISKA (1995) , teremos então, de acordo com a fig. 5.3:

$$\int_s \alpha \text{grad } \phi \cdot \vec{n} \, dS + S_\phi V = \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{\phi_i - \phi_P}{L_i} S_i + S_\phi V = 0 \quad (5.4)$$

onde  $N$  é o número de pontos  $i$  que são vizinhos ao ponto  $P$ . Chegamos, assim, a aquela fórmula já bem conhecida usada para calcular o valor de  $\phi$  no ponto  $P$  a partir de  $\phi$  em seus vizinhos, encontrada em PATANKAR (1980) e MALISKA (1995):

$$\phi_P = \frac{\sum_{i=1}^N a_i \phi_i + \bar{S}_\phi}{a_P} \quad (5.5)$$

Na fórmula acima,  $\bar{S}_\phi = S_\phi V$ , e  $a_i$  são os coeficientes da matriz de um sistema linear que pode ser resolvido por técnicas já bem conhecidas. Podemos escrever (5.5) de forma matricial:

$$A \Phi = -\bar{S}_\phi \quad (5.6)$$

Tal sistema pode ser resolvido, no caso de malhas não estruturados, pelo método do gradiente conjugado, pois a matriz  $A$  é simétrica.

## 5.2.2 Resolução de problemas difusivos através de volumes formados pelas medianas

O encontro das medianas define o baricentro de um triângulo (fig. 5.4). A integração da equação (5.3) sobre volumes formados a partir das medianas é um pouco mais complicada que a formulação apresentada para malhas de Voronoi, mas elimina a obrigação de termos apenas triângulos com ângulos menores que  $90^\circ$ . Essa é uma vantagem importante quando temos problemas com camada limite, onde necessitamos triângulos muito achatados para concentrar nós nas proximidades da parede sólida.

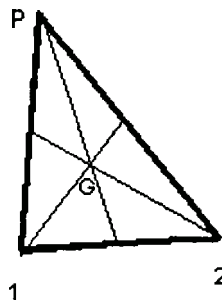


Fig. 5.4) Baricentro de um triângulo, formado pelo encontro das medianas.

Segundo BALIGA e PATANKAR (1980) e MALISKA (1995), para fazer o cálculo do gradiente de  $\phi$ , temos a seguinte função interpoladora, válida quando os vértices de um triângulo estão numerados em sentido anti-horário:

$$\phi = Ax + By + C \quad (5.7)$$

onde temos A, B e C dados por:

$$A = \frac{(y_2 - y_P)\phi_1 + (y_P - y_1)\phi_2 + (y_1 - y_2)\phi_P}{D} \quad (5.8)$$

$$B = \frac{(x_P - x_2)\phi_1 + (x_1 - x_P)\phi_2 + (x_2 - x_1)\phi_P}{D} \quad (5.9)$$

$$C = \frac{(x_2 y_P - x_P y_2)\phi_1 + (x_P y_1 - x_1 y_P)\phi_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\phi_P}{D} \quad (5.10)$$

e D é dado por:

$$D = x_1 y_2 + x_2 y_P + x_P y_1 - y_1 x_2 - y_2 x_P - y_P x_1 \quad (5.11)$$

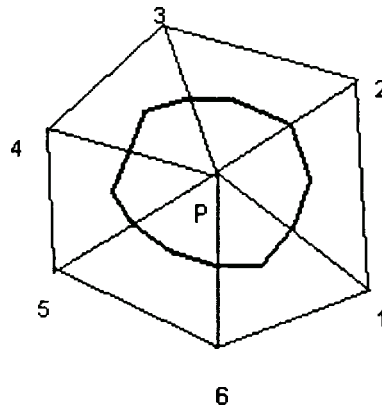


Fig. 5.5) Volume formado pelo método das medianas.

A integração da equação (5.3) sobre o volume formado pelas medianas, será:

$$\sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_S \alpha \text{grad } \phi \cdot \vec{n} \, dS + \bar{S}_\phi = 0 \quad (5.12)$$

onde  $N_{tri}$  é o número de triângulos que tem P como um de seus vértices. Tomando um desses triângulos (fig. 5.6), teremos que o fluxo difusivo para fora do volume de integração será dado por:

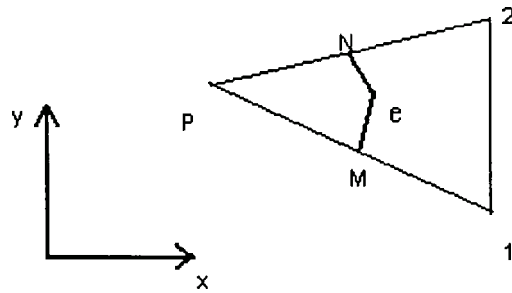


Fig. 5.6) Face para o cálculo do fluxo difusivo para fora do volume de integração.

$$\int_{MN} \alpha \text{grad } \phi \cdot \bar{n} dS = \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} (y_N - y_M) + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial y} (x_M - x_N) = \alpha A (y_N - y_M) + \alpha B (x_M - x_N) \quad (5.13)$$

A importância de numerar os vértices do triângulo em sentido anti-horário está em perceber que, sendo  $y_N$  maior que  $y_M$ , e  $x_M$  maior que  $x_N$ , o sentido do fluxo (se para fora ou para dentro do volume de integração) será dado pelos sinais de A e B.

Substituindo agora as expressões para A e B dadas por (5.8) e (5.9):

$$\int_{MN} \alpha \text{grad } \phi \cdot \bar{n} dS = C_P \phi_P + C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2 \quad (5.14)$$

com  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_P$  dados por:

$$C_P = \frac{\alpha}{D} (y_N - y_M)(y_1 - y_2) + (x_M - x_N)(x_2 - x_1) \quad (5.15)$$

$$C_1 = \frac{\alpha}{D} (y_N - y_M)(y_2 - y_P) + (x_M - x_N)(x_P - x_2) \quad (5.16)$$

$$C_2 = \frac{\alpha}{D} (y_N - y_M)(y_P - y_1) + (x_M - x_N)(x_1 - x_P) \quad (5.17)$$

e  $D$  dado por (5.11). Como  $C_P = -(C_1 + C_2)$ , fica claro que, ao realizarmos essas integrações em todos os triângulos que tem  $P$  como vértice, chegaremos na expressão (5.5) que já tínhamos obtido para a malha de Voronoi.

A formação de volumes de integração pelo método das medianas foi inicialmente proposta por BALIGA e PATANKAR (1980). É muito conhecida por “*Control Volume Finite Element Method*” ou método dos elementos finitos baseado em volumes de controle, por usar funções de interpolação semelhantes ao método dos elementos finitos. No entanto, no espírito, pode ser considerada como mais uma técnica de volumes finitos. Foi escolhida porque é mais flexível, permitindo o uso de triângulos com ângulos maiores que  $90^\circ$ , o que pode ser crucial para problemas envolvendo camada limite como o escoamento ao redor de um cilindro.

### 5.2.3 Resolução de problemas convectivo-difusivos através de volumes formados pelas medianas

As equações de transporte para problemas convectivo-difusivos em regime variado, para fluidos incompressíveis, podem ser escritas como:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} \phi) = \text{div}(\alpha \text{grad} \phi) + S_\phi \quad (5.18)$$

A integração dessa equação sobre um volume resulta:

$$\rho \frac{\Delta \phi}{\Delta t} V = \int_s (\alpha \text{grad} \phi - \rho \phi \vec{v}) \cdot \vec{n} dS + \bar{S}_\phi \quad (5.19)$$

Para o volume da figura 5.5, formado por triângulos como o da fig. 5.6, teríamos:

$$\rho \frac{\phi_P^1 - \phi_P^0}{\Delta t} V = \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int \alpha \text{grad} \phi \cdot \vec{n} dS - \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int \phi_e \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \bar{S}_\phi \quad (5.20)$$

Nesta equação, o sobrescrito 1 se refere ao valor de  $\Phi$  no fim do intervalo de tempo  $\Delta t$  e o sobrescrito 0 ao valor no início. A parte difusiva é tratada da mesma forma que no ítem anterior. A parte convectiva da equação recebe um tratamento mais complicado. Levando em conta que a integral dos fluxos de massa é nula sobre a superfície do volume (pela



continuidade, considerando o fluido incompressível), adiciona-se ao lado direito da equação (5.20) o valor de  $\phi_P$  multiplicado por tal integral:

$$\rho \frac{\phi_P^1 - \phi_P^0}{\Delta t} V = \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} \alpha \text{grad} \phi \cdot \bar{n} dS - \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} \phi_e \rho \bar{v} \cdot \bar{n} dS + \phi_P \sum_{j=1}^{N_{tri}} \rho \bar{v} \cdot \bar{n} dS + \bar{S}_\phi \quad (5.21)$$

Tal equação resulta:

$$\rho \frac{\phi_P^1 - \phi_P^0}{\Delta t} V = \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} \alpha \text{grad} \phi \cdot \bar{n} dS - \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} (\phi_e - \phi_P) \rho \bar{v} \cdot \bar{n} dS + \bar{S}_\phi \quad (5.22)$$

O fluxo convectivo através da face MN do triângulo da fig 5.6 é dado por:

$$\int_{MN} (\phi_e - \phi_P) \rho \bar{v} \cdot \bar{n} dS = (\phi_e - \phi_P) \rho \left[ v_{x_e} (y_N - y_M) + v_{y_e} (x_M - x_N) \right] \quad (5.23)$$

O valor de  $\phi_e$  é escrito em função dos valores de  $\phi$  em P e nos nós que circundam o volume através de uma função de interpolação (diferenças centradas, upwind, Quick, etc...) de forma a gerar um sistema de equações algébricas como o da equação (5.5), só que agora os coeficientes terão também uma parcela convectiva em seu valor.

Um dos aspectos importantes na resolução de problemas em regime variado é relativo à variação temporal da grandeza  $\phi$  no intervalo de tempo  $\Delta t$ , para efeito do cálculo dos fluxos difusivos e convectivos pelas faces dos volumes de controle. Levando em conta tal variação, a equação (5.22) pode ser re-escrita como:

$$\rho \frac{\phi_P^1 - \phi_P^0}{\Delta t} V = f \left[ \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int \alpha \text{grad } \phi^1 \cdot \vec{n} dS - \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int (\phi_e^1 - \phi_P^1) \rho \vec{v}^1 \cdot \vec{n} dS \right] + (1-f) \left[ \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int \alpha \text{grad } \phi^0 \cdot \vec{n} dS - \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int (\phi_e^0 - \phi_P^0) \rho \vec{v}^0 \cdot \vec{n} dS \right] + \bar{S}_\phi \quad (5.24)$$

Onde para  $f = 0$  temos o esquema explícito,  $f = 0.5$  temos o esquema semi-implícito e para  $f=1$  temos o esquema implícito. Os esquemas implícito e semi-implícito são preferíveis devido à estabilidade do processo de solução. Apenas o esquema semi-implícito tem precisão temporal de 2ª ordem, sendo os esquemas implícito e explícito esquemas de 1ª ordem.

É importante lembrar que, na solução de problemas convectivos utilizando o esquema semi-implícito (também conhecido como esquema de Crank-Nicholson), ou o esquema implícito, a matriz dos coeficientes gerados pela discretização das equações de transporte não é mais simétrica como nos problemas puramente difusivos. Assim, o método do gradiente conjugado não pode mais ser usado. Nesse caso, deve-se adotar outro processo de solução como o método do gradiente biconjugado. Outro aspecto importante é que a velocidade varia durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , o que significa que, em tese, os coeficientes das equações algébricas precisam ser corrigidos para a parte da equação (5.23)

que é multiplicada por  $f$ . Caímos, assim, num problema iterativo. Uma escapatória pode ser fazer  $\bar{v}^1 = \bar{v}^0$  na equação (5.23). Isso, porém, provoca o surgimento de um erro de 1ª ordem na avaliação dos fluxos convectivos. A solução mais comumente adotada para garantir que o método de resolução tenha precisão temporal de 2ª ordem é utilizar o esquema de Crank-Nicholson apenas na parte difusiva, e usar o esquema de Adams-Bashforth para a parte convectiva. Tal esquema determina o valor de uma variável em um dado instante a partir dos valores dessa variável em dois instantes anteriores, e tem precisão de 2ª ordem (ROACHE, 1982). Assim, a equação (5.22) de transporte de  $\Phi$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\phi_p^1 - \phi_p^0}{\Delta t} V = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} \alpha \text{grad} \phi^1 \cdot \bar{n} dS + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} \alpha \text{grad} \phi^0 \cdot \bar{n} dS - \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} (\phi_e^0 - \phi_p^0) \rho \bar{v}^0 \cdot \bar{n} dS \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} (\phi_e^{-1} - \phi_p^{-1}) \rho \bar{v}^{-1} \cdot \bar{n} dS + \bar{S}_\phi \end{aligned} \quad (5.25)$$

Nesta equação usamos o método de Crank-Nicholson para a parte difusiva e o método de Adams-Bashforth para a parte convectiva. O sobrescrito 1 refere-se ao valor de  $\Phi$  no instante  $t_0 + \Delta t$ , o sobrescrito 0 refere-se ao valor de  $\Phi$  no instante  $t_0$ , e o sobrescrito -1 refere-se ao valor de  $\Phi$  no instante  $t_0 - \Delta t$ .

Uma vantagem adicional da utilização do esquema de Adams-Bashforth é que não temos mais uma contribuição dos fluxos convectivos nos coeficientes das equações algébricas. Assim, obtemos um sistema de equações com matriz simétrica, o que possibilita a utilização do método do gradiente conjugado.

## 6 O Método dos Vórtices Discretos

### 6.1 Considerações iniciais

Para resolver a equação 4.15 e determinar o deslocamento, para cada instante, do cilindro livre para oscilar, é preciso conhecer o coeficiente de sustentação. Tal coeficiente é obtido integrando-se as pressões e tensões de cisalhamento na superfície do cilindro. Assim, é preciso obter uma solução, para cada instante, do escoamento ao redor do corpo. Tal solução pode ser obtida através do método dos vórtices discretos.

O método dos vórtices discretos é uma técnica de simulação de escoamentos, proposta inicialmente por CHORIN (1973) e CLEMENTS (1973) para escoamentos externos, que estuda de forma lagrangeana o movimento de vórtices pontuais que carregam uma dada circulação. Inicialmente, não se utilizavam malhas, pois ou o fluido era considerado invíscido, ou o processo de difusão era simulado através de técnicas como o aumento do tamanho do raio do vórtice, proposto por NAGANO (1982), ou o deslocamento aleatório (“*random walk*”) proposto por CHORIN (1973). As velocidades para determinar o deslocamento de um dado vórtice eram calculadas pela lei de Biot-Savart, considerando-se as influências de todos os outros vórtices, somadas à velocidade do escoamento ao longe. Posteriormente, GRAHAM (1988) propôs uma técnica híbrida, euleriana-lagrangeana, em que a difusão seria modelada sobre uma malha, de forma euleriana, e a convecção continuaria sendo lagrangeana. Tal técnica é conhecida como “*vortex in cell*”, e é utilizada neste trabalho.

## 6.2 A técnica "Vortex in Cell"

As equações da continuidade e de Navier-Stokes, para o escoamento bidimensional de um fluido incompressível, podem ser escritas através da formulação vorticidade-função de corrente da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (6.2)$$

onde as velocidades na direção x (u) e na direção y (v) são dadas por:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad e \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.3)$$

Os efeitos difusivos e convectivos são considerados em separado de tal forma que:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} \right]_{\text{convectivo}} + \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} \right]_{\text{difusivo}} \quad (6.4)$$

onde:

$$\left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} \right]_{\text{difusivo}} = \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \quad (6.5)$$

$$\left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} \right]_{\text{convectivo}} = -u \frac{\partial \omega}{\partial x} - v \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\vec{v} \cdot \text{grad } \omega \quad (6.6)$$

O processo de resolução do escoamento pode ser visto da seguinte maneira: um campo intermediário de vorticidade  $\omega^*$  é obtido através da equação (6.5), que representa o processo de difusão, resolvida pelo método dos volumes finitos :

$$\frac{\omega^* - \omega^0}{\Delta t} = \text{dif} [(1-f) \omega^0 + f \omega^*] \quad (6.7)$$

onde temos a utilização do esquema explícito se  $f = 0$ , semi-implícito se  $f=0.5$  e implícito se  $f=1$ . O esquema semi-implícito foi utilizado em todas as simulações realizadas para esta tese. A expressão “*dif*” é usada para representar a discretização da equação por um processo conveniente (no caso, o método dos volumes finitos ; pode-se usar outros métodos). Para o transporte convectivo, temos:

$$\frac{\omega^{**} - \omega^*}{\Delta t} = \text{conv}[\omega^*] \quad (6.8)$$

Somando as expressões (6.7) e (6.8) obtemos a forma discretizada da equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\omega^{**} - \omega^0}{\Delta t} = \text{conv}[\omega^*] + \text{dif}[(1-f)\omega^0 + f\omega^*] \quad (6.9)$$

A equação (6.6) pode ser relacionada com a convecção lagrangeana imaginando dois pontos do espaço,  $i$  e  $i-1$ , separados por uma distância  $\Delta p$ . No instante inicial  $t_0$ , uma partícula dotada de uma certa grandeza física  $\phi$  se encontra no ponto  $i$ , e outra se encontra no ponto  $i-1$ . Supondo que, durante um intervalo  $\Delta t$ , a partícula que estava no ponto  $i-1$  em  $t_0$  chegue ao ponto  $i$ , teremos:

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{\phi_i^{t_0 + \Delta t} - \phi_i^{t_0}}{\Delta t} = \frac{\phi_{i-1}^{t_0} - \phi_i^{t_0}}{\Delta t} \quad (6.10)$$

Dividindo e multiplicando por  $\Delta p$ , obtemos:

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta t} = - \frac{\phi_i^{t_0} - \phi_{i-1}^{t_0}}{\Delta p} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad (6.11)$$

Observando o lado direito da equação (6.11), percebemos que, para  $\Delta t \rightarrow 0$ , ele é igual a menos o produto escalar do gradiente de  $\phi$  pelo vetor da velocidade. Para  $\phi = \omega$ , obtemos a equação (6.6).

O processo de resolução do escoamento, para cada intervalo de tempo, consiste nos seguintes passos:

a) a equação de Poisson (6.2) para  $\psi$  é resolvida, na malha, utilizando-se o Método dos Volumes Finitos.

- b) com os valores de  $\psi$  obtidos no passo anterior, valores de  $\omega$  são calculados sobre as fronteiras sólidas para servir como condição de contorno de Dirichlet para a equação de difusão da vorticidade, ou velocidades tangenciais são avaliadas para fornecer uma condição de contorno de Neumann.
- c) Novamente usando o Método dos Volumes Finitos, a equação (6.5), da difusão de  $\omega$ , é resolvida para os nós da malha. Obtemos, assim, o valor da variação  $\Delta\omega$ , para o intervalo  $\Delta t$ , em cada nó.
- d) Velocidades nos nós da malha são calculadas através de (6.3).
- e) É calculada uma circulação  $\Delta\Gamma = \text{Volume} \cdot \Delta\omega$  para cada nó, com o volume correspondente. Se existem vórtices pontuais próximos de um nó, essa circulação  $\Delta\Gamma$  é distribuída entre eles, sendo somada à circulação que esses vórtices já possuem. Se não há nenhum vórtice próximo do nó, um novo vórtice é criado nas suas coordenadas, com a circulação  $\Delta\Gamma$ .
- f) As velocidades dos vórtices são calculadas a partir das velocidades nos nós.
- g) Os vórtices são deslocados para novas posições, e as vorticidades nos nós são calculadas a partir das circulações dos vórtices através de uma interpolação baseada em áreas. O processo retorna ao item (a).



### 6.3 Condições de contorno para a equação de Poisson da Função de Corrente

A equação (6.2) é resolvida pelo método dos volumes finitos com as seguintes condições de contorno:

$\psi = 0$  sobre a superfície do cilindro

$\psi = U_0 (y - y_c) - V_0 (x - x_c)$  sobre a fronteira localizada na região de escoamento livre, onde  $U_0$  e  $V_0$  são as componentes da velocidade da corrente livre,  $x$  e  $y$  são as coordenadas dos nós, e  $x_c$  e  $y_c$  são as coordenadas do centro do cilindro.

### 6.4 Condições de contorno da equação de difusão da Vorticidade

Consideramos  $\omega = 0$  na fronteira de escoamento livre. Sobre o cilindro, a vorticidade deve ser calculada a partir da solução da função de corrente ( condição de contorno de Dirichlet) ou um fluxo de vorticidade deve ser especificado ( condição de contorno de Neumann ).

a) Condição de contorno de Dirichlet:

Usando o método dos volumes finitos, temos um volume de controle, sobre a parede, com o formato visto na fig. 6.1 . Ao aplicarmos a forma discretizada da equação (6.2) a esse volume, temos:

$$-\omega_0 \cdot V = \sum_{i=1}^N a_i (\psi_i - \psi_0) + \left. \frac{\partial \psi}{\partial n'} \right|_{\text{parede}} \cdot A_{\text{parede}} \quad (6.12)$$

onde  $\omega_0$  é a vorticidade na parede,  $V$  é o volume,  $\psi_0$  é o valor da função de corrente na parede,  $\psi_i$  corresponde ao valor da função de corrente nos nós vizinhos,  $N$  é o número de nós vizinhos,  $a_i$  corresponde ao coeficiente do método dos volumes finitos e  $A_{\text{parede}}$  é o valor da área do volume sobre a parede. Como  $\psi_0 = 0$ , e a derivada de  $\psi$  na direção normal à parede corresponde à velocidade tangencial sobre a parede, que é nula pelo princípio da aderência completa, temos que :

$$\omega_0 = - \frac{\sum_{i=1}^N a_i \psi_i}{V} \quad (6.13)$$

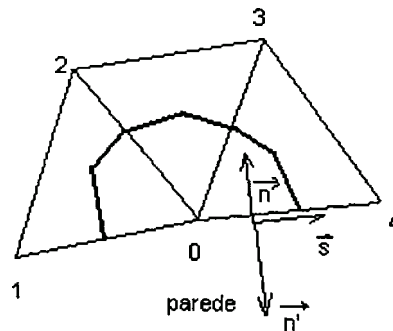


Fig. 6.1) Volume formado junto à parede.

b) condição de Neumann:

Para a utilização de uma condição de Neumann, calculamos, através da distribuição da função de corrente, velocidades tangenciais sobre a parede. Devemos, pois, em cada nó, somar à vorticidade uma variação  $\Delta\omega$  que anule a circulação causada por essa velocidade tangencial. Tal valor de  $\Delta\omega$  é dado por:

$$\Delta\omega = \frac{-u_s A_{parede}}{V} \quad (6.14)$$

Devemos lembrar que, em duas dimensões, um volume corresponde a uma área, e uma área corresponde a uma linha. Assim,  $\Delta\omega \cdot V = \Delta\Gamma = -v_s \cdot A_{parede}$ . Isso corresponde a adotar, como condição de contorno de Neumann para a resolução da equação (6.5) pelo método dos volumes finitos:

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial n'} \right|_{parede} = \frac{-u_s}{v \Delta t} \quad (6.15)$$

Tal condição de contorno somará ao valor inicial da vorticidade na parede, em um intervalo  $\Delta t$ , a vorticidade exata para cancelar a velocidade tangencial  $u_s$ .

## 6.5 Cálculo das Velocidades

Temos que, após a solução da equação (6.2), os valores da função de corrente são conhecidos nos vértices de todos os triângulos. Assim podemos aproximar  $\psi$  por uma função do tipo:

$$\psi = ax + by + c \quad (6.16)$$

logo,  $u$  e  $v$  podem ser calculadas, para a centróide do triângulo, por:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = b \quad e \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -a \quad (6.17)$$

As velocidades em cada nó podem ser calculadas ponderando as velocidades das centróides dos triângulos que formam o volume que circunda um dado nó, usando como fator de ponderação os volumes dos triângulos que fazem parte do volume do nó, divididos por esse mesmo volume.

## 6.6 Cálculo da vorticidade dos nós da malha a partir dos vórtices pontuais

Vamos supor que um vórtice ocupa uma posição  $Q$  qualquer dentro de um triângulo (fig 6.2). Podemos subdividir a área do triângulo em três áreas  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  de tal forma que a vorticidade que esse vórtice carrega para cada nó pode ser dada por:

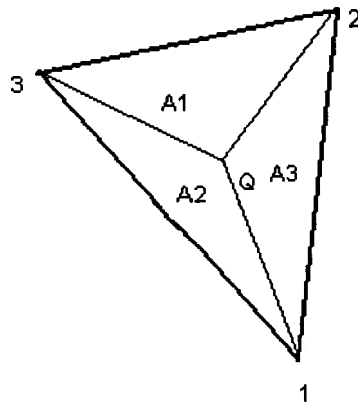


Fig. 6.2) Obtenção da vorticidade dos nós a partir da circulação de um vórtice pontual.

$$\omega_i = \frac{A_i \Gamma}{V_i \cdot \sum_{i=1}^3 A_i} \quad (6.18)$$

onde  $V_i$  é o volume (bidimensional) associado a cada nó.

Note que, quando a posição do vórtice coincide com a posição de um nó, a área associada a esse nó se torna igual a área do triângulo e as áreas associadas aos outros nós se tornam nulas. Assim, como seria de se esperar, a circulação do vórtice é totalmente descarregada sobre esse nó.

## 6.7 Cálculo das forças sobre o cilindro

As forças podem ser calculadas de duas maneiras: avaliando a distribuição de pressões sobre o cilindro através do gradiente de vorticidade na parede, ou através da equação de Poisson para a pressão.

Para a utilização do gradiente de vorticidade na parede, temos que, através da equação da quantidade de movimento para a componente tangencial da velocidade sobre a parede:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\mu \frac{\partial \omega}{\partial n} \quad (6.19)$$

A expressão (6.19) pode ser usada para determinar a distribuição de pressões sobre a parede do cilindro. Por outro lado, se tomarmos a equação da Quantidade de Movimento (Navier-Stokes) na direção  $x$  e a derivarmos em relação a  $x$ , tomarmos a equação da Quantidade de Movimento na direção  $y$  e a derivarmos em relação a  $y$ , e somarmos os dois resultados, vamos obter, para um fluido incompressível, uma equação de Poisson para a pressão, dada, em duas dimensões, por:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -2\rho \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (6.20)$$

Essa equação pode ser resolvida pelo método dos volumes finitos para que seja obtida a distribuição de pressões sobre a parede do cilindro. Como condição de contorno, temos:

Na fronteira do escoamento livre:  $p = 0$

$$\text{Sobre o cilindro: } \frac{\partial p}{\partial n} = \mu \frac{\partial \omega}{\partial s}$$

Esta última condição pode ser obtida escrevendo a equação de Navier-Stokes para a componente normal da velocidade sobre a parede do cilindro. Como a velocidade é nula (princípio da aderência completa), usando o sistema de referência da fig. 6.1 :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \mu \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial u_n}{\partial n} \quad (6.21)$$

da equação da continuidade:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\mu \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial u_s}{\partial s} \quad (6.22)$$

lembrando a que a vorticidade na parede, adotando-se o referencial da fig. 6.1, é dada por:

$$\omega = -\frac{\partial u_s}{\partial n} \quad (6.23)$$

Alterando a ordem da derivação, teremos a condição de contorno dada anteriormente:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial n'} = \mu \frac{\partial \omega}{\partial s} \quad (6.24)$$

Convém lembrar, aqui, que na fig. 6.1 temos dois vetores normais à parede, com  $\bar{n} = -\bar{n}'$ .

A contribuição das tensões viscosas é dada por:

$$\tau_0 = -\mu \omega_0 \quad (6.25)$$

Assim, integrando as pressões e tensões viscosas sobre a parede, é possível calcular as forças sobre o cilindro. Os coeficientes de arrasto e sustentação são dados por:

$$C_d = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 D} \quad \text{e} \quad C_l = \frac{F_y}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 D} \quad (6.26)$$

## 6.8 Mecanismo de localização dos vórtices na malha não-estruturada

A área de um triângulo (fig. 6.2) pode ser calculada através do determinante:



$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (6.27)$$

Se os nós estiverem dispostos em sentido de giro anti-horário ao redor dos lados do triângulo, tal área será positiva. Assim, a área  $A_1$  da figura 6.2 pode ser calculada através de:

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_Q & y_Q \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (6.28)$$

As áreas  $A_2$  e  $A_3$  podem ser calculadas da mesma forma. Porém, se o ponto  $Q$  for externo ao triângulo, essas áreas podem se tornar negativas. Por exemplo, na fig. 6.3, a área  $A_1$ , ao ser calculada pela expressão (6.27), será negativa.

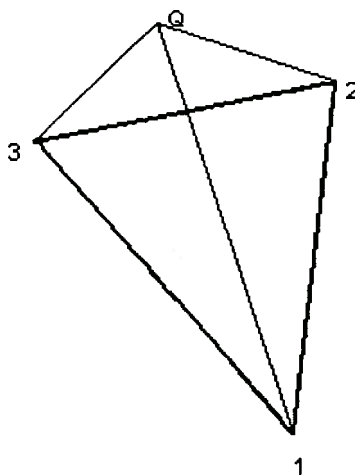


Fig. 6.3) Nó  $Q$  externo a um triângulo.

Isso acontece porque os nós Q, 2 e 3 não estão mais dispostos em sentido anti-horário. As áreas calculadas para os triângulos Q12 e Q31 continuam sendo positivas. Assim, a área negativa permite dizer que o nó Q moveu-se, da posição que ocupava na fig. 6.2 para a posição que ocupa na fig. 6.3, na direção do lado oposto ao nó 1.

Se movemos um vórtice para um ponto  $(x,y)$  e sabemos em qual elemento triangular a partícula estava localizado antes de sofrer a convecção, através das áreas formadas por esse ponto com os vértices ( nós ) podemos dizer em qual direção ocorreu o movimento. A área mais negativa indicará que o vórtice se moveu na direção do lado do triângulo que é oposto a um determinado vértice. Se soubermos qual o outro triângulo que também tem esse lado, poderemos repetir o procedimento de cálculo das áreas, traçando o caminho do vórtice na malha até chegarmos a um triângulo com as três áreas positivas, determinando assim para dentro de qual elemento se moveu a partícula.

## 6.9 Limitações da formulação Função de corrente - Vorticidade

A formulação  $\psi$ - $\omega$  possui duas limitações básicas: não pode ser utilizada para três dimensões, uma vez que a função de corrente só é definida em duas dimensões, e é de difícil implementação para escoamentos ao redor de múltiplos corpos, pois, embora se saiba que  $\psi$  deve ser constante sobre cada um deles, é difícil saber qual o valor que a função de corrente deve ter sobre cada corpo. Como solução para isso, desenvolvemos uma formulação velocidade-vorticidade que não deve ser passível de tais limitações.

## 6.10 Formulação Velocidade - Vorticidade

Segundo BATCHELOR (1967) A velocidade do escoamento de um fluido pode ser definida como a soma de uma parcela devida à influência dos vórtices, que vamos chamar  $\vec{u}_\omega$ , e uma parcela devida a um escoamento irrotacional, que vamos chamar  $\vec{u}_\varphi$ .

Assim:

$$\vec{u} = \vec{u}_\omega + \vec{u}_\varphi \quad (6.29)$$

Se temos um domínio limitado no qual toda a vorticidade próxima está concentrada, podemos calcular a velocidade induzida pelos vórtices em qualquer ponto desse domínio através da lei de Biot-Savart, que, em duas dimensões, pode ser escrita como:

$$\vec{u}_\omega = -\frac{1}{2\pi} \int_V \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^2} dV \quad (6.30)$$

Onde  $\times$  representa produto vetorial, e  $\vec{r}$  é o vetor ( P-O ), onde P é o ponto onde queremos calcular a velocidade e O é o ponto onde se encontra o vórtice.

A velocidade do escoamento irrotacional pode ser calculada através de um Potencial de Velocidades  $\varphi$ , dado por:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (6.31)$$

Com as velocidades dadas por:

$$u_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ e } v_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (6.32)$$

Se o campo de vorticidade é conhecido em todos os nós de uma malha, as velocidades nos nós podem ser calculadas através das eqs. (6.30), (6.31) e (6.32). Porém, tal procedimento envolve um trabalho computacional muito elevado, uma vez que, para cada nó da malha, é necessário calcular as contribuições, pela lei de Biot-Savart, de N-1 outros nós. A solução para isso é calcular as velocidades induzidas pelos vórtices apenas nos nós sobre os contornos sólidos. Como sobre os contornos sólidos a velocidade normal deve ser nula, o potencial de velocidade deve ser resolvido com uma condição de contorno, sobre as paredes, dada por:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\vec{u}_\omega \cdot \vec{n} \quad (6.33)$$

Ou seja, a componente normal da velocidade do escoamento potencial deve cancelar a componente normal do escoamento induzido pelo campo de vorticidade sobre as paredes.

Temos, assim, que calcular as velocidades induzidas pela vorticidade apenas sobre os N nós que se encontram sobre fronteiras sólidas. Tais velocidades, somadas com as velocidades obtidas através do potencial de velocidades, fornecem as

velocidades finais sobre as paredes, que devem ter componentes normais nulas, e, provavelmente, componentes tangenciais não nulas, que servem como condições de Neumann, em cada ponto das paredes, para a equação de difusão de vorticidade, através da expressão (6.15).

Uma vez que a vorticidade tenha sido resolvida com a condição dada pela expressão (6.15), que visa assegurar o princípio da aderência, as velocidades podem ser calculadas através de equações de Poisson, dadas por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (6.34)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (6.35)$$

Tais equações são obtidas derivando a equação da continuidade e a equação que define a vorticidade e somando ambas. Uma vez que a vorticidade tenha sido resolvida com a condição de Neumann que gera um fluxo de vorticidade que cancela a circulação da velocidade tangencial em cada nó da parede, tais equações podem ser resolvidas considerando condição de aderência. Uma vez que os vórtices sejam deslocados, obtendo-se um novo campo de vorticidades, o procedimento de cálculo pode ser refeito para um novo intervalo de tempo.

É importante lembrar que, ao calcular os fluxos de vorticidade na parede, uma condição, derivada da eq. (6.19), deve ser imposta para garantir a continuidade da pressão ao longo de um contorno sólido:

$$\oint \frac{\partial p}{\partial s} ds = -\mu \oint \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = 0 \quad (6.36)$$

Isto leva a:

$$\oint u_s ds = 0 \quad (6.37)$$

As vantagens da formulação velocidade-vorticidade são óbvias: o potencial de velocidades existe em três dimensões, ao contrário da função de corrente, e a lei de Biot-Savart também pode ser escrita em três dimensões, e as condições de contorno, para o caso de múltiplos corpos imersos no escoamento, não trazem maiores dificuldades. Porém, o uso da Lei de Biot-Savart sempre implica em excesso de trabalho computacional, mesmo quando nos restringimos a poucos nós sobre as paredes sólidas. Além disso, temos que resolver as equações suplementares (6.34) e (6.35) para a determinação do campo de velocidades. Assim, tal formulação, em duas dimensões, só é realmente atraente quando temos múltiplos corpos imersos no escoamento. Caso contrário, a formulação  $\psi-\omega$ , por ser mais simples e proporcionar uma solução menos custosa computacionalmente, é mais atraente.

## 7 Resultados preliminares - Método dos Vórtices Discretos

Neste capítulo apresentamos resultados de simulações realizadas com o método dos vórtices discretos, para  $Re=100$  e  $Re=200$ , usando uma malha com 21554 elementos, 10891 nós, 128 nós sobre a parede do cilindro e 100 nós na fronteira externa. O centro do cilindro de raio  $R = 1$  corresponde ao ponto de coordenadas  $(0,0)$ , e a malha se estende por  $50 R$  à jusante e  $21.3 R$  à montante do cilindro. Na direção vertical, a malha se estende por  $21.3 R$  acima e abaixo do cilindro. Um intervalo de tempo adimensional  $U_0 \Delta t / D = 0.005$  foi usado. A velocidade  $U_0$  é igual a  $1.0$ . A malha pode ser vista nas figuras 7.1 e 7.2.

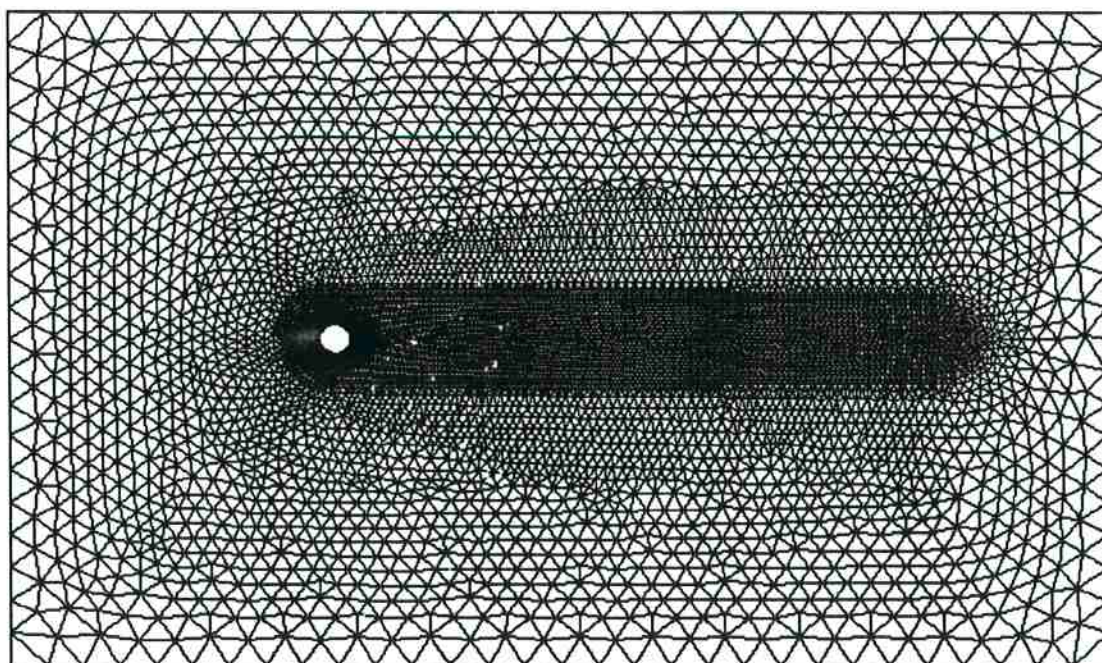


Fig. 7.1) Malha usada para simulações para  $Re=100$  e  $Re=200$ .

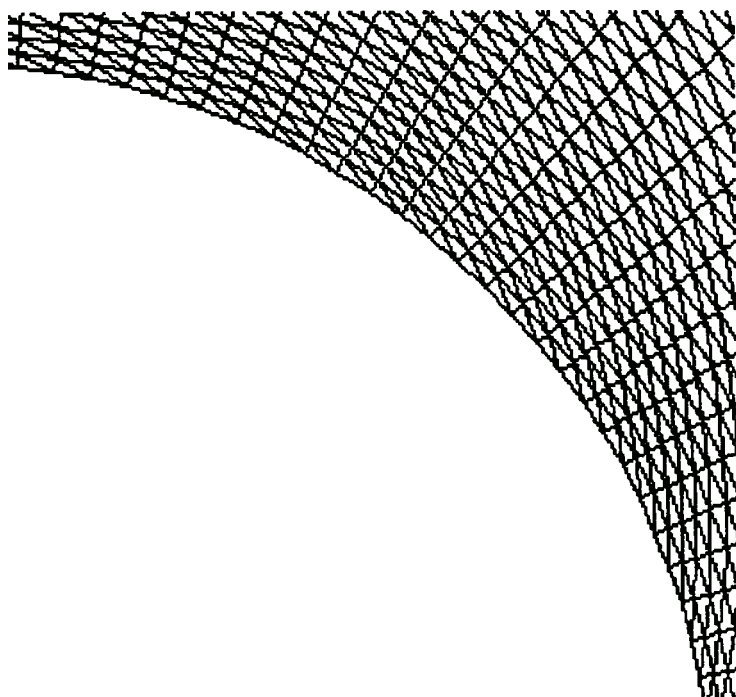


Fig.7.2) Detalhe da malha na proximidade do cilindro.

Pelo detalhe da fig. 7.2, é possível perceber que o ponto mais próximo da parede se encontra a aproximadamente  $0.02 R$  desta. Os resultados obtidos foram comparados com resultados obtidos , tanto experimentalmente quanto através de simulações , por outros pesquisadores. Tais resultados podem ser vistos na tabela 7.1 . Nossos resultados, tanto usando a formulação  $\psi-\omega$  , quanto usando a formulação  $v-\omega$ , podem ser vistos na tabela 7.2.



Tabela 7.1) Resultados experimentais e numéricos obtidos por outros autores para número de Strouhal e Coeficiente de Arrasto no escoamento ao redor de um cilindro de seção circular.

<b>Re</b>	<b>Autor</b>	<b>S</b>	<b>Cd</b>
100	BRAZA et al. (1986) (numérico)	0.16	1.37
100	BORTHWICK (1986) (numérico)		1.21
100	SA e CHANG (1991) (numérico)	0.155	1.23
100	MENEGHINI (1993) (numérico)	0.162	1.52
100	TRITTON (1959) (experimental)		1.25
100	WILLIAMSON (1991) (experimental)	0.164	
200	BRAZA et al. (1986) (numérico)	0.20	1.35
200	BORTHWICK (1986) (numérico)	0.188	1.02
200	SA e CHANG (1991) (numérico)	0.186	1.13
200	MENEGHINI (1993) (numérico)	0.195	1.395
200	WILLIAMSON (1991) (experimental)	0.196	
200	NORBERG (1993) apud MENEGHINI (1993)(exp.)		1.30
10000	WIESELSBERGER (1921) apud ROSHKO (1961) (exp.)		1.1
10000	RIBNER e ETKIN (1958) apud ROSHKO (1961) (exp.)	0.20	

Tabela 7.2) Resultados obtidos em nossas simulações com o método dos vórtices discretos, para número de Strouhal e Coeficiente de Arrasto no escoamento ao redor de um cilindro de seção circular.

Re	Formulação	S	Cd
100	$\psi-\omega$	0.16	1.50
200	$\psi-\omega$	0.19	1.30
100	$v-\omega$	0.17	1.30
200	$v-\omega$	0.19	1.25

Inicialmente, as simulações foram feitas usando a formulação  $\psi-\omega$ , com as forças calculadas usando o gradiente de vorticidade na parede para avaliar a distribuição de pressões. Os resultados de forças e a esteira para  $Re=100$  podem ser vistos nas figs. 7.3 e 7.4. Os resultados para  $Re=200$ , usando o mesmo método, podem ser vistos nas figs. 7.5 e 7.6.

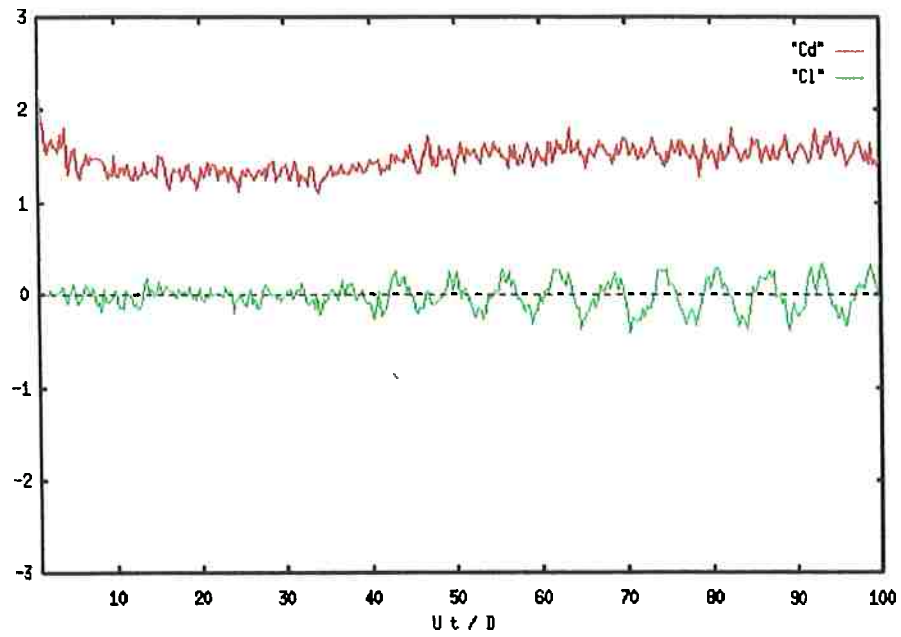


Fig.7.3) Resultados para  $Re=100$  usando a formulação  $\psi-\omega$  e realizando a avaliação da distribuição de pressões pelo gradiente de vorticidade na parede.  $St=0.16$ ,  $C_{d,média}=1.5$ .

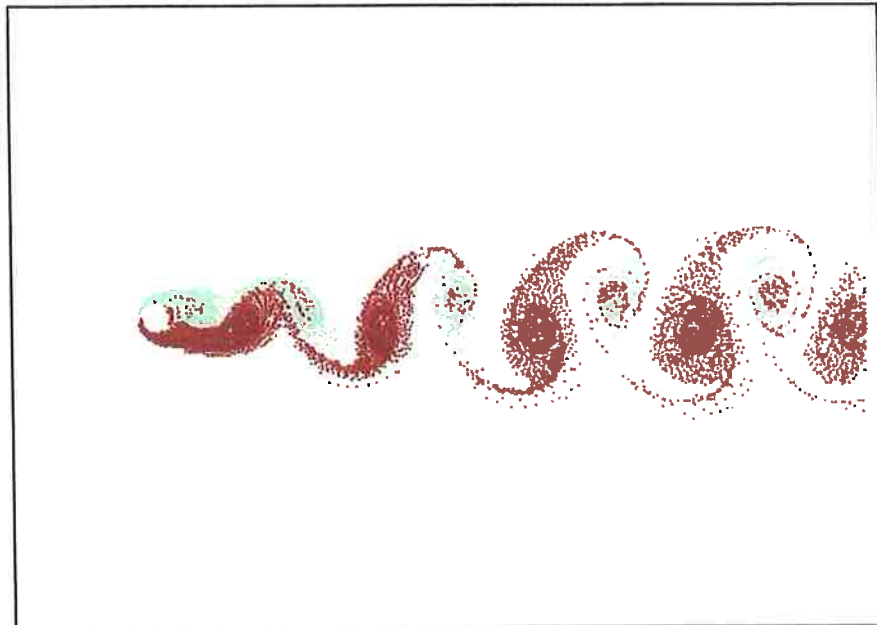


Fig. 7.4) Esteira para  $Re=100$ , formulação  $\psi-\omega$ .

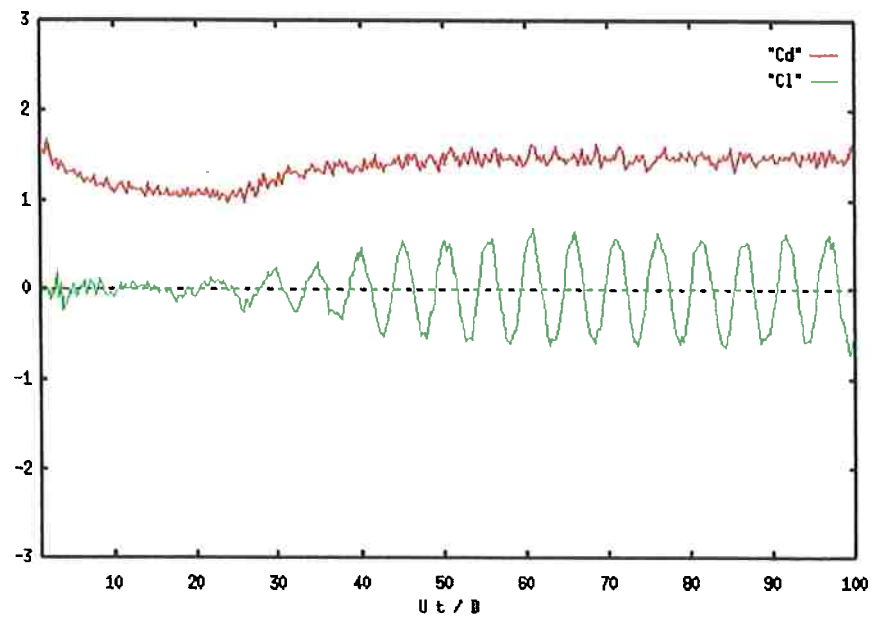


Fig. 7.5) Resultados para  $Re=200$  usando a formulação  $\psi-\omega$  e realizando a avaliação da distribuição de pressões pelo gradiente de vorticidade na parede.  $St=0.19$ ,  $Cd_{\text{médio}}=1.3$ .



Fig. 7.6) Esteira para  $Re=200$ , formulação  $\psi-\omega$ .

Verifica-se que os resultados obtidos avaliando a distribuição de pressões sobre o cilindro pelo gradiente de vorticidade na parede apresentam muito ruído. Os resultados das simulações usando a formulação velocidade-vorticidade podem ser vistos nas figs. 7.7, 7.8 7.9 e 7.10. A mesma malha foi usada. A avaliação das pressões foi realizada através da resolução da equação de Poisson.

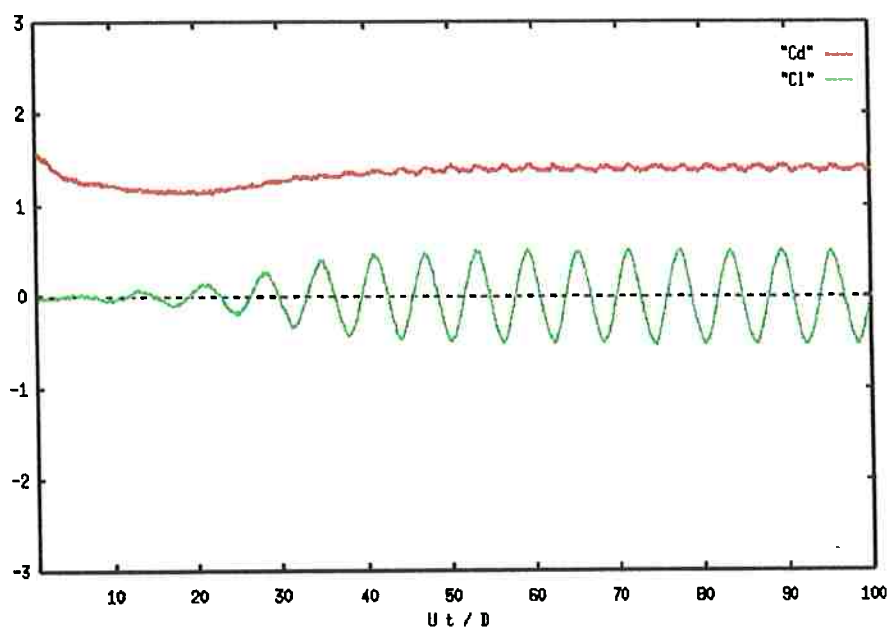


Fig. 7.7) Resultados para  $Re=100$  usando a formulação  $v-\omega$  e realizando a avaliação da distribuição de pressões pela equação de Poisson.  $St=0.17$ ,  $Cd_{\text{méd}}=1.3$ .

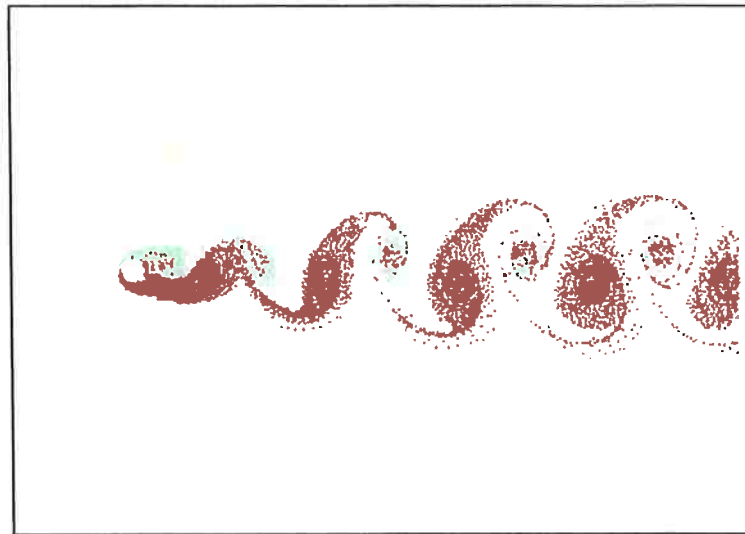


Fig. 7.8) Esteira para  $Re=100$ , formulação  $v-\omega$ .

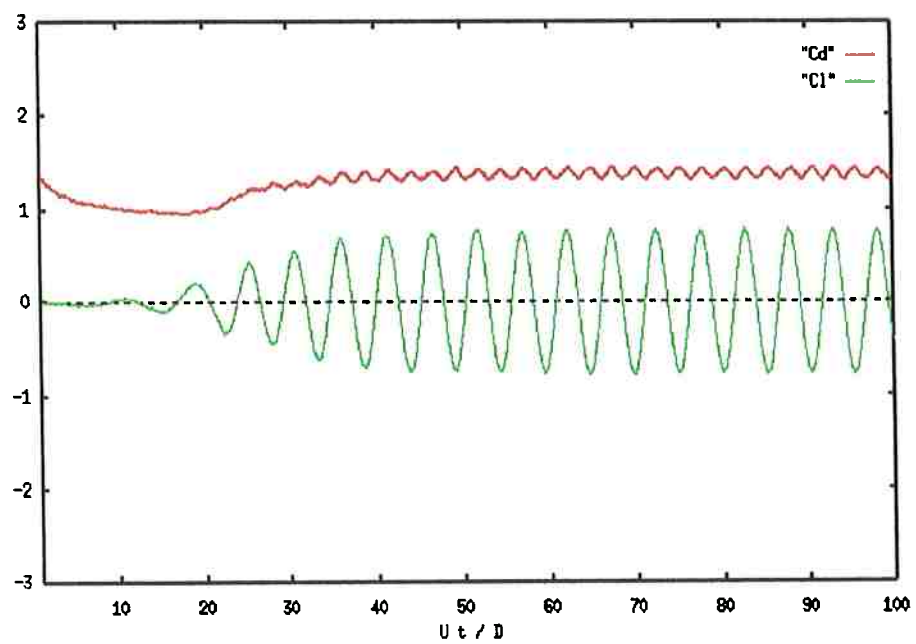


Fig. 7.9) Resultados para  $Re=200$  usando a formulação  $v-\omega$  e realizando a avaliação da distribuição de pressões através da equação de Poisson.  $St=0.19$ ,  $Cd_{\text{méd}}=1.25$ .

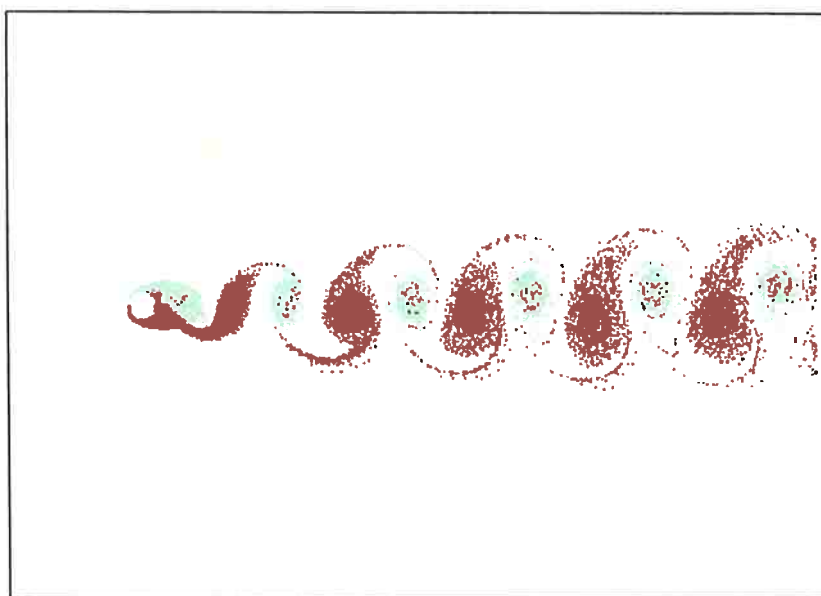


Fig. 7.10) Esteira para  $Re=200$ , formulação  $v-\omega$ .

Os resultados obtidos com a formulação  $v-\omega$  são muito próximos dos obtidos com a formulação  $\psi-\omega$ . Observa-se que o valor médio dos coeficientes de arrasto é um pouco inferior. Como um geral, obtivemos boa concordância com os resultados obtidos por outros autores ( tab. 7.1).

Para exemplificar os resultados obtidos com o método dos vórtices discretos híbrido com a formulação velocidade-vorticidade para altos números de Reynolds , podemos observar os resultados obtidos para  $Re = 10000$  ( sem modelagem de turbulência) . Uma nova malha foi usada, com 17900 elementos, 9158 nós, 256 nós sobre a parede do cilindro e 160 nós na fronteira externa para a simulação com  $Re=10000$ . Apesar do número de nós ser menor que na malha anterior, a região da camada limite foi muito refinada, e o nó mais próximo da parede está a uma distância de  $0.002 D$  desta, onde  $D$  é o diâmetro do cilindro. A malha para  $Re=10000$  pode ser vista nas figs. 7.11 e 7.12 .



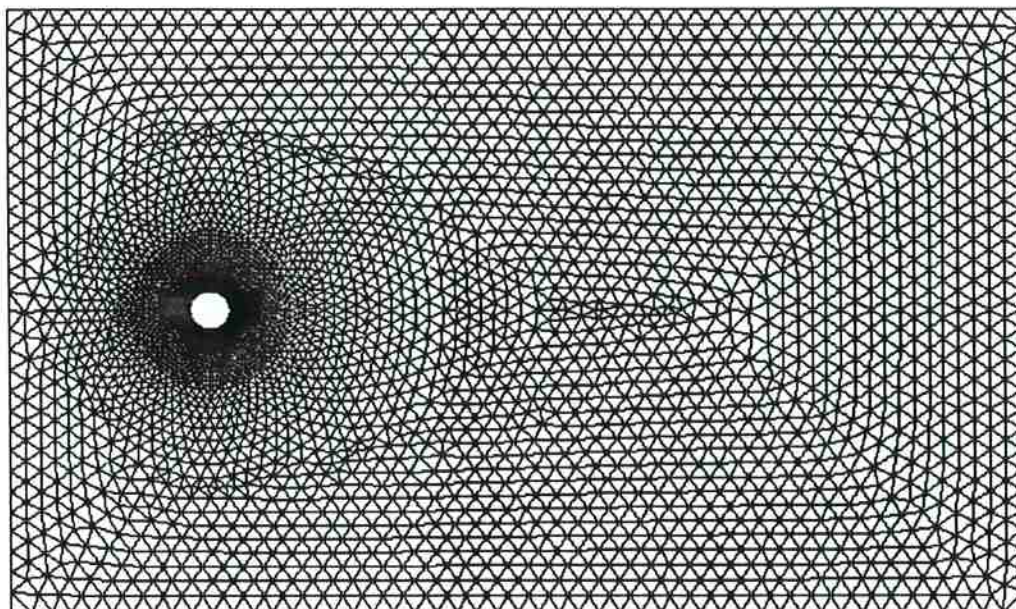


Fig. 7.11) Malha usada para simulações para  $Re=10000$ .

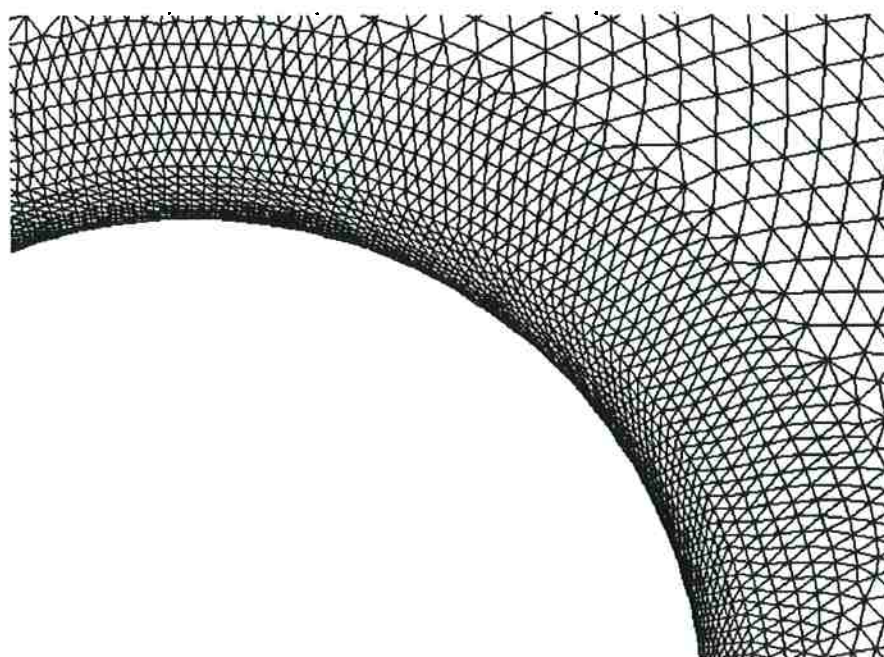


Fig. 7.12) Detalhe da malha na proximidade do cilindro.



O centro do cilindro de raio  $R = 1$  corresponde ao ponto de coordenadas  $(0,0)$ , e a malha se estende por  $40 R$  à jusante e  $10 R$  à montante do cilindro. Na direção vertical, a malha se estende por  $15 R$  acima e abaixo do cilindro. Um intervalo de tempo adimensional  $U_0 \Delta t / D = 0.00125$  foi usado para  $Re=10000$ . A velocidade  $U_0$  é igual a  $1.0$ .

Apesar dos bons resultados obtidos para baixos  $Re$ , o método dos vórtices com a formulação híbrida lagrangeana-euleriana não possibilitou a realização de cálculos para  $Re$  da ordem de  $10000$ . Podemos ver claramente nas figs. 7.13 e 7.14 que as forças e, principalmente, a esteira não apresentam o comportamento normalmente observado experimentalmente. Tal fato parece ser devido à ponderação pelas áreas para distribuir a circulação dos vórtices para os nós, que aparentemente causa grande difusão numérica. Assim, o método dos vórtices parece realmente ser mais eficaz numa formulação puramente lagrangeana, que é muito custosa do ponto de vista computacional devido à utilização da lei de Biot-Savart.

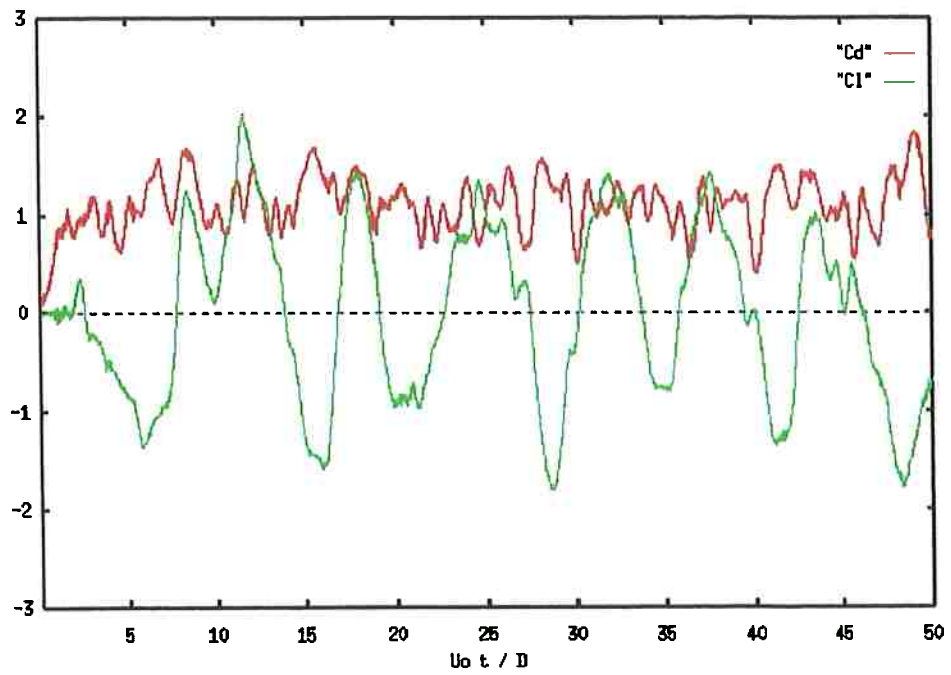


Fig. 7.13) Resultados para  $Re=10000$  usando a formulação  $v-\omega$  e realizando a avaliação da distribuição de pressões através da equação de Poisson da pressão.



Fig. 7.14) Esteira para  $Re=10000$ , formulação  $v-\omega$ .

Para obter simulações para  $Re$  mais altos, decidimos desenvolver um método puramente euleriano , com a resolução das equações de Navier Stokes na sua forma convencional ( Fractional Step Method ). Este é o assunto do próximo capítulo.

## 8 O Método da resolução por partes das equações de Navier-Stokes ( *Fractional Step Method* )

### 8.1 Considerações iniciais

O método da resolução por partes da equação de Navier-Stokes tem sido muito utilizado para a resolução de problemas relacionados à emissão de vórtices. Trata-se de um método desenvolvido especialmente para problemas em regime variado. Guarda grande semelhança com o método SIMPLE (PATANKAR, 1980), e principalmente, com o método PRIME (MALISKA, 1995).

Em geral, para a simulação de problemas de emissão de vórtices, surge a questão da interpolação para o termo convectivo. A interpolação *upwind* causa uma difusão falsa que inviabiliza o método. São usualmente usadas as interpolações do tipo diferenças centradas ou parabólica ( *Quick* ). A interpolação do tipo diferenças centradas, no caso de malhas não estruturadas de triângulos, equivaleria a determinar o valor da variável  $\Phi_e$  da equação (5.25), na face de um volume (fig. 5.6), através da interpolação bilinear da equação (5.7). Tal interpolação para o termo convectivo provoca instabilidades, especialmente em altos números de Reynolds, e torna necessário um grande refinamento da malha, além de gerar em certos casos soluções fisicamente irreais, segundo MALISKA (1995) e FERZIGER E PERIC (1996).

Por esse motivo a interpolação parabólica tipo *Quick* tem sido mais utilizada. Tal interpolação consiste em passar uma parábola por um ponto à jusante e dois pontos à montante do ponto da face do volume onde queremos avaliar  $\Phi_e$ . MOCHIDA et al.

(1992), ESFAHANI (1998), MURAKAMI e MOCHIDA (1995), MURAKAMI et al (1997) e RODI (1996) utilizam esse tipo de procedimento, sempre em malhas estruturadas. Neste capítulo, veremos como uma interpolação mista parabólica-bilinear foi desenvolvida para malhas não estruturadas de triângulos.

## 8.2 O algoritmo do método da resolução por partes

As equações da Quantidade de Movimento para as direções x e y, para um fluido incompressível, podem ser escritas na forma conservativa como:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v} u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad } u) \quad (8.1)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v} v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad } v) \quad (8.2)$$

Tais equações de convecção-difusão podem ser resolvidas pelo método dos volumes finitos, conforme visto no capítulo 5. A aplicação da eq. (5.25), substituindo  $\Phi$  por u e v e  $\alpha$  por  $\mu$ , resulta:

$$\begin{aligned} \rho \frac{u_p^1 - u_p^0}{\Delta t} V = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} \mu \text{grad } u^1 \cdot \bar{n} dS + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} \mu \text{grad } u^0 \cdot \bar{n} dS - \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} (u_e^0 - u_p^0) \rho \bar{v}^0 \cdot \bar{n} dS \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} (u_e^{-1} - u_p^{-1}) \rho \bar{v}^{-1} \cdot \bar{n} dS - \frac{\partial p}{\partial x} V \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{v_p^1 - v_p^0}{\Delta t} V = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} \mu \text{grad } v^1 \cdot \bar{n} dS + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} \mu \text{grad } v^0 \cdot \bar{n} dS - \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} (v_e^0 - v_p^0) \rho \bar{v}^0 \cdot \bar{n} dS \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} (v_e^{-1} - v_p^{-1}) \rho \bar{v}^{-1} \cdot \bar{n} dS - \frac{\partial p}{\partial y} V \end{aligned} \quad (8.4)$$

onde, como já visto, o esquema de Crank-Nicholson é usado para a parte difusiva e o esquema de Adams-Bashforth é usado para a parte convectiva.

No método da resolução por partes, tais equações são resolvidas, numa primeira etapa, sem levar em consideração o gradiente de pressão e a parte implícita do termo difusivo:

$$\begin{aligned} \rho \frac{u_p^* - u_p^0}{\Delta t} V = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} \mu \text{grad } u^0 \cdot \bar{n} dS - \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} (u_e^0 - u_p^0) \rho \bar{v}^0 \cdot \bar{n} dS \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} (u_e^{-1} - u_p^{-1}) \rho \bar{v}^{-1} \cdot \bar{n} dS \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{v_p^* - v_p^0}{\Delta t} V = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} \mu \text{grad } v^0 \cdot \bar{n} dS - \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} (v_e^0 - v_p^0) \rho \bar{v}^0 \cdot \bar{n} dS \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} (v_e^{-1} - v_p^{-1}) \rho \bar{v}^{-1} \cdot \bar{n} dS \end{aligned} \quad (8.6)$$

O campo de velocidades dado por  $u^*$  e  $v^*$  tem que ser corrigido para a obtenção do campo de velocidades final, através de :

$$\rho \frac{u_p^1 - u_p^*}{\Delta t} V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} \mu \text{grad } u^1 \cdot \bar{n} dS - \frac{\partial p}{\partial x} V \quad (8.7)$$

$$\rho \frac{v_P^1 - v_P^*}{\Delta t} V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \int_{MN} \mu \text{grad } v^1 \cdot \vec{n} dS - \frac{\partial p}{\partial y} V \quad (8.8)$$

Mas o campo de velocidades final dado por  $u^1$  e  $v^1$  deve satisfazer a equação da continuidade para um fluido incompressível, dada por  $\text{div } \vec{v} = 0$ . Assim, se derivarmos a eq. (8.7) em relação a  $x$ , derivarmos a eq. (8.8) em relação a  $y$  e somarmos as duas, obtemos, para uma viscosidade molecular  $\mu$  constante :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) = 0 \quad (8.9)$$

Assim, chegamos a uma equação de Poisson para a pressão em que o termo fonte corresponde ao próprio erro na conservação da massa devido ao campo de velocidades intermediário dado por  $u^*$  e  $v^*$ . Tal equação também pode ser resolvida pelo método dos volumes finitos. Assim, o algoritmo da resolução por partes pode ser resumido nos seguintes passos:

- para um campo de velocidades inicial, resolver as equações (8.5) e (8.6);
- calcular os erros na conservação da massa para cada volume e resolver a equação de Poisson da pressão (8.9);
- obter o campo de velocidades final corrigido através das equações (8.7) e (8.8);
- avançar para um novo intervalo de tempo, passando novamente para o passo inicial.

As condições de contorno são :

a) Sobre a parede do cilindro:  $u = 0, v = 0, \frac{\partial p}{\partial n} = 0$  ;

b) Na fronteira ao longe, à frente, acima e abaixo do cilindro:  $u = U_0, v = 0, \frac{\partial p}{\partial n} = 0$ ;

c) Na fronteira ao longe, atrás do cilindro, onde o escoamento deixa o domínio de

cálculo:  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \frac{\partial v}{\partial n} = 0, p = 0$ .

Como o gradiente de pressões é totalmente retirado da resolução das equações da quantidade de movimento no 1º passo do algoritmo, uma malha com arranjo colocalizado ( pressões e velocidades calculadas nos mesmos nós ) pode ser usada sem que haja o risco do aparecimento de um campo de pressões ondulatório como descrito por PATANKAR (1980). As velocidades nas faces dos volumes, usadas para calcular o erro na conservação da massa e os fluxos convectivos, podem ser obtidas por simples interpolação bilinear a partir das velocidades nos nós. Outras versões do algoritmo descritas por FERZIGER e PERIC (1996) incluem o gradiente de pressões nas equações da quantidade de movimento, e uma equação de correção de pressão similar a usada no método SIMPLE é derivada. Em tal caso, para o uso de malha com arranjo colocalizado, a função de interpolação de RHIE e CHOW (1983), apud MAJUNDAR et al (1992), deve ser usada para o cálculo das velocidades nas faces dos volumes de controle.

Resta agora analisar a questão da interpolação parabólica aplicada a uma malha não estruturada. Em uma malha estruturada cartesiana (fig. 8.1), temos, numa



aproximação com erro de 3ª ordem ( parabólica ), quando o fluxo na face “e” é do nó “P” para o nó “E”:

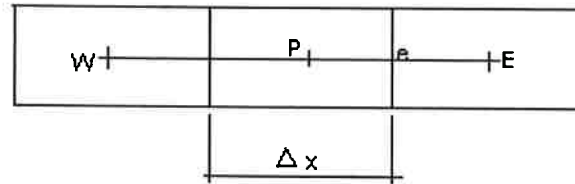


Fig.8.1) Exemplo de arranjo de nós para malha estruturada cartesiana.

$$\phi_e = \phi_P + \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_P \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_P \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \quad (8.10)$$

lembrando que:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_P = \frac{\phi_E - \phi_W}{2\Delta x} \quad (8.11)$$

e que:

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_P = \frac{\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\phi_E - 2\phi_P + \phi_W}{\Delta x^2} \quad (8.12)$$

obtemos então, segundo FERZIGER e PERIC (1996):

$$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W \quad (8.13)$$

Essa é a interpolação quadrática de 3ª ordem *Quick* proposta por LEONARD (1979), apud FERZIGER e PERIC (1996). Tal interpolação diminui sensivelmente o problema de difusão falsa observado quando é usada a interpolação *upwind* de 1ª ordem, em que  $\Phi_e$  é simplesmente considerado igual a  $\Phi_P$ . A interpolação tipo *Quick* tem sido muito usada para malhas estruturadas na simulação de problemas de emissão de vórtices. Seu uso em malhas não estruturadas é complicado pela questão de que nestas malhas os nós não estão alinhados. Assim, como achar o 2º nó à montante da face, “W”?

O procedimento que propomos nesta tese corresponde a, sabendo a distância existente entre o nó “P” e o nó “E” da fig. 8.2, e sendo o escoamento sobre a face “e” de “P” para “E”, calcular as coordenadas de um ponto “W” localizado a igual distância à montante de “P”.

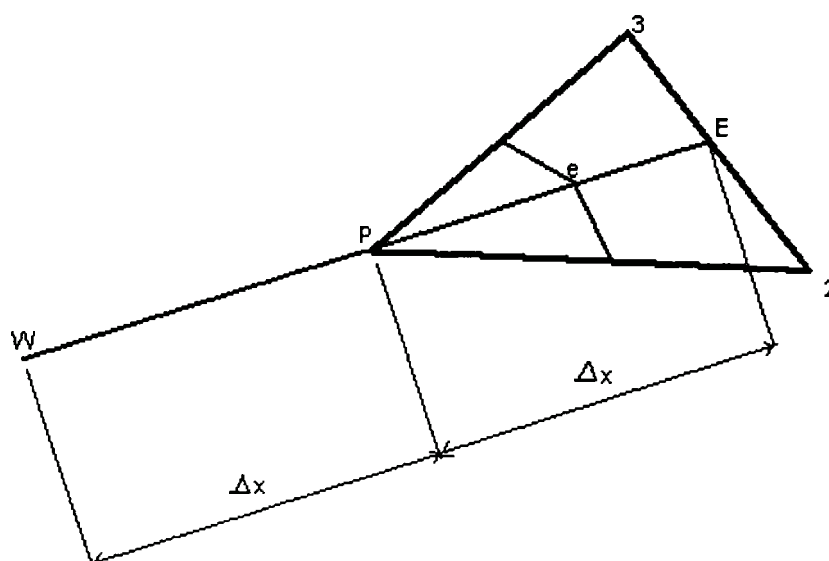


Fig. 8.2) Arranjo para interpolação parabólica em malha não estruturada, com fluxo de “P” para “E”.

Lembrando que o centróide “e” do triângulo está a uma distância de  $2/3$  de  $\Delta x$  do nó “P”, teremos, aplicando uma interpolação parabólica:

$$\phi_e = \frac{5}{9}\phi_P + \frac{5}{9}\phi_E - \frac{1}{9}\phi_W \quad (8.14)$$

Como o nó “E” fica a meio caminho entre os vértices “2” e “3” do triângulo, o valor de  $\Phi_E$  pode ser calculado como a média dos valores de  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$ . Já a determinação de  $\Phi_W$  é um pouco mais complicada: como conhecemos as coordenadas do ponto “W”, sua localização na malha, ou seja, dentro de qual triângulo tal ponto está localizado, pode ser determinada pela mesma forma utilizada para determinar a localização de um vórtice discreto no método dos vórtices. Assim, utiliza-se um

algoritmo de busca para determinar a localização do ponto “W”. Uma vez que o triângulo onde tal ponto esteja localizado tenha sido determinado, o valor de  $\Phi_W$  pode ser escrito, através da interpolação bilinear, como uma função dos valores de  $\Phi$  nos seus vértices.

É importante ressaltar que, caso o fluxo de massa seja de “E” para “P”, o ponto “W” deverá estar à montante de “E” (fig. 8.3). Nesse caso, a distância entre “e” e “E” equivale a  $1/3$  de  $\Delta x$ , e obtemos:

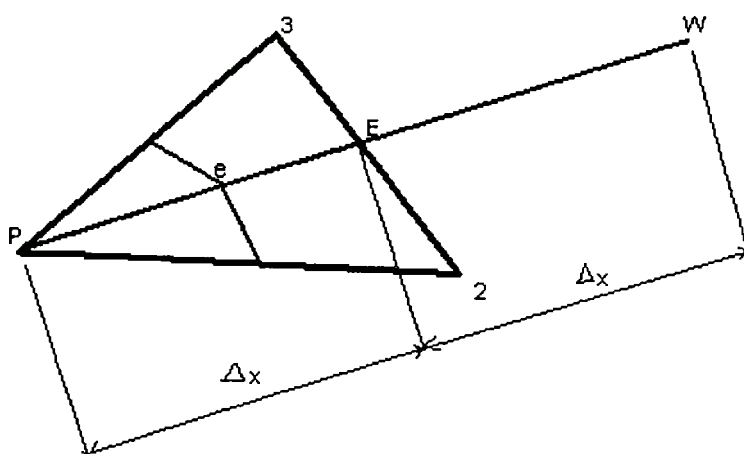


Fig.8.3) Arranjo para interpolação parabólica em malha não estruturada, com fluxo de “E” para “P”.

$$\phi_e = \frac{2}{9}\phi_P + \frac{8}{9}\phi_E - \frac{1}{9}\phi_W \quad (8.15)$$

Como os valores de  $\Phi_E$  e  $\Phi_W$  são obtidos através da interpolação bilinear, decidimos chamar tal método de interpolação mista parabólica-bilinear. Como a

interpolação bilinear é uma interpolação com erro de 2ª ordem, tal é a precisão do método.

Com tal tipo de interpolação, o método da resolução por partes demonstrou ser bem sucedido para a resolução de escoamentos com emissão de vórtices em malhas não estruturadas, inclusive para números de Reynolds acima de 10000, para os quais o método dos vórtices discretos na formulação mista lagrangeana-euleriana não se mostrou adequado.

Porém, a principal vantagem do método da resolução por partes sobre o método dos vórtices discretos reside no tempo gasto para a resolução computacional. No método dos vórtices usando a formulação velocidade-vorticidade temos a utilização da lei de Biot-Savart, a resolução de três equações de Poisson para as duas componentes da velocidade e a pressão, uma equação de Laplace para o potencial de velocidades e uma equação de difusão para a vorticidade. Já no método da resolução por partes temos apenas a resolução de duas equações de convecção-difusão para as velocidades e uma única equação de Poisson para a Pressão.

Um detalhe importante do Método da Resolução por Partes que deve ser lembrado é que a utilização do método de Adams-Bashforth para a parte convectiva e do Método de Crank-Nicholson para a parte difusiva garante precisão temporal de 2ª ordem. A utilização da interpolação mista parabólica-bilinear para a parte convectiva, junto com a interpolação bilinear para a parte difusiva, garante precisão espacial também de 2ª ordem. Isso torna a utilização desse método interessante para a técnica de Simulação dos Grandes Vórtices, na qual exigem-se métodos com precisão de tal ordem (PIOMELLI, 1997).

## 9 Resultados preliminares - Método da Resolução por Partes

Neste capítulo apresentamos resultados de simulações realizadas com o método da resolução por partes para  $Re=100$ ,  $Re=200$  e  $Re=10000$  ( sem o uso de modelagem de turbulência) , usando as mesma malhas descritas no capítulo 7 para as simulações com  $Re = 100$  e  $200$  (fig. 7.1 e 7.2 ) e  $Re = 10000$  (figs. 7.11 e 7.12) . Um intervalo de tempo adimensional  $U_0 \Delta t / D = 0.005$  foi usado para a simulação com  $Re =100$  e  $200$ , e  $U_0 \Delta t / D = 0.00125$  para  $Re = 10000$ . A velocidade  $U_0$  é igual a  $1.0$  . Os coeficientes de arrasto e números de Strouhal obtidos podem ser vistos na tabela 9.1.

Tabela 9.1) Resultados obtidos em nossas simulações com o Método da Resolução por Partes, para número de Strouhal e Coeficiente de Arrasto no escoamento ao redor de um cilindro de seção circular.

<b>Re</b>	<b>S</b>	<b>Cd</b>
<b>100</b>	0.16	1.33
<b>200</b>	0.19	1.25
<b>10000</b>	0.24	1.71

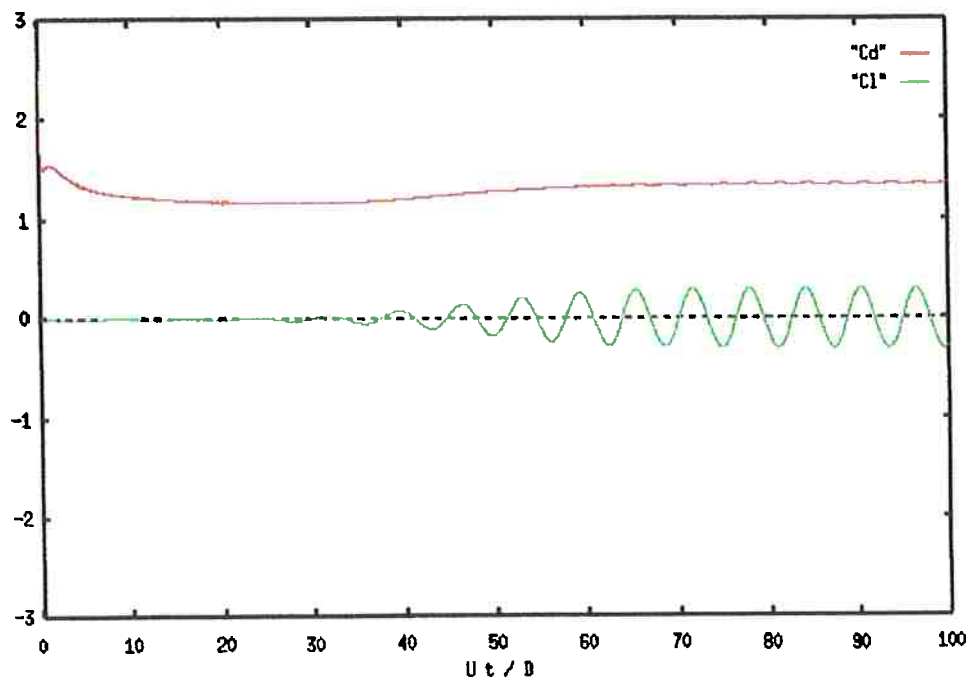


Fig. 9.1) Resultados para  $Re=100$  usando o processo da resolução por partes.  $St=0.16$ ,

$$C_{d\text{média}}=1.33 .$$

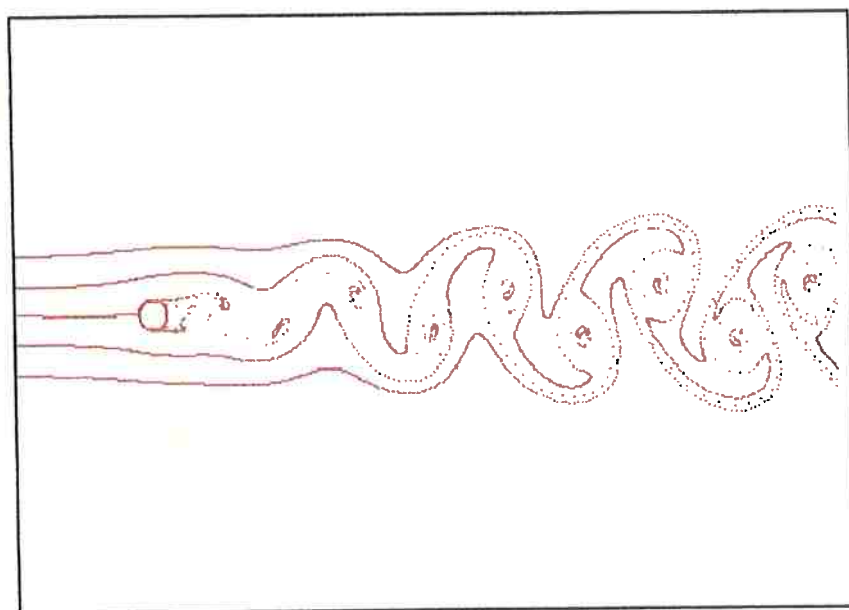


Fig. 9.2) Esteira para  $Re=100$ , método da resolução por partes.

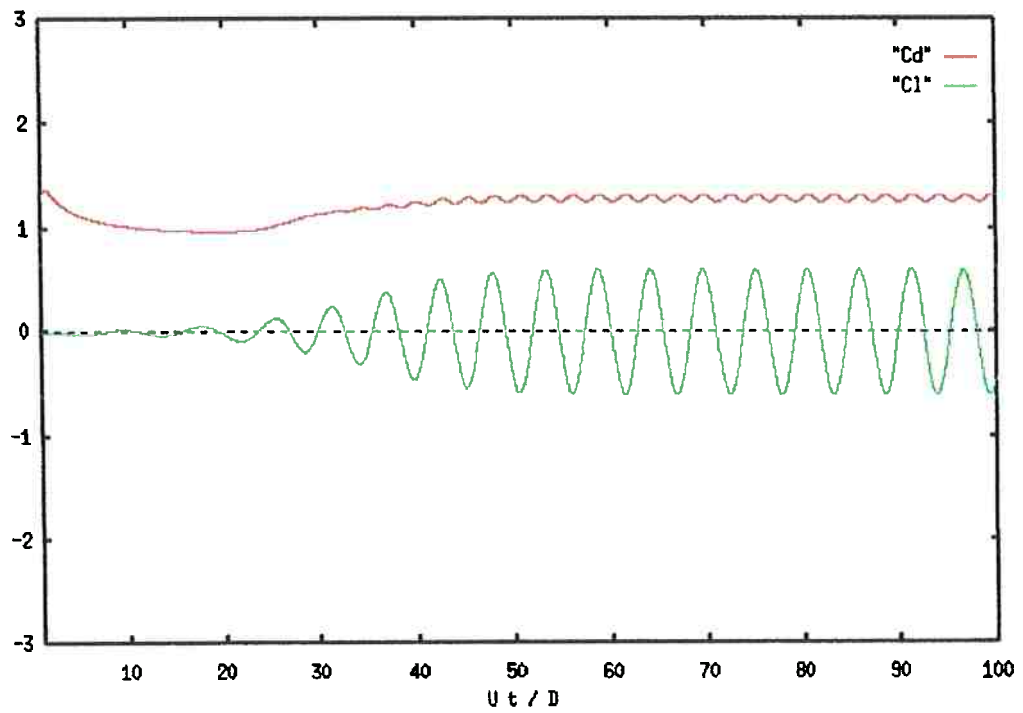


Fig. 9.3) Resultados para  $Re=200$  usando o processo da resolução por partes.  $St=0.19$ ,

$$C_{d\text{méd}}=1.25.$$

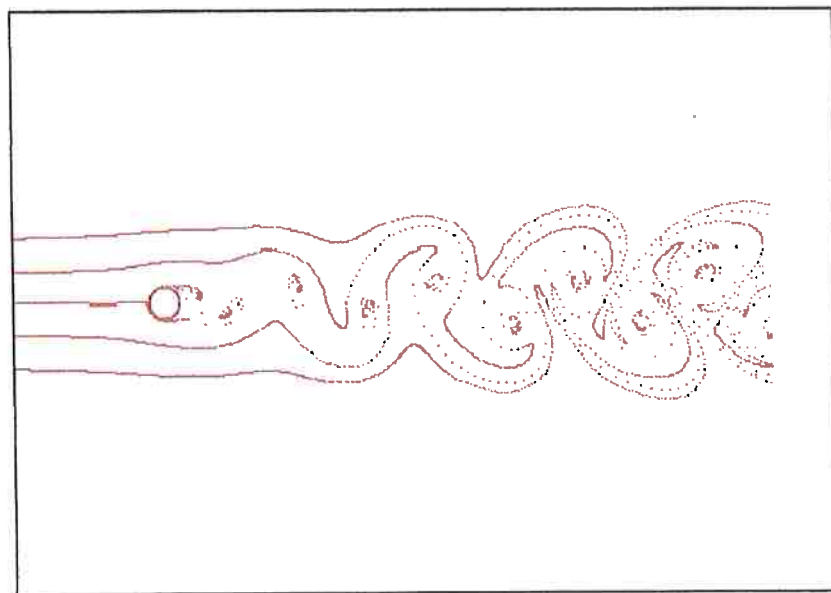


Fig. 9.4) Esteira para  $Re=200$ , método da resolução por partes.



Os resultados para  $Re=100$  , usando o método da resolução por partes, podem ser vistos nas figs. 9.1 e 9.2 , e os resultados para  $Re=200$  , nas figs. 9.3 e 9.4 . As esteiras foram obtidas inserindo-se traçadores na parte frontal da malha. Os resultados dos coeficientes de arrasto e número de Strouhal são bastante próximos dos obtidos por outros pesquisadores ( ver tabela 7.1) . Nas figuras 9.5 e 9.6, podemos ver os resultados obtidos para  $Re = 10000$ .

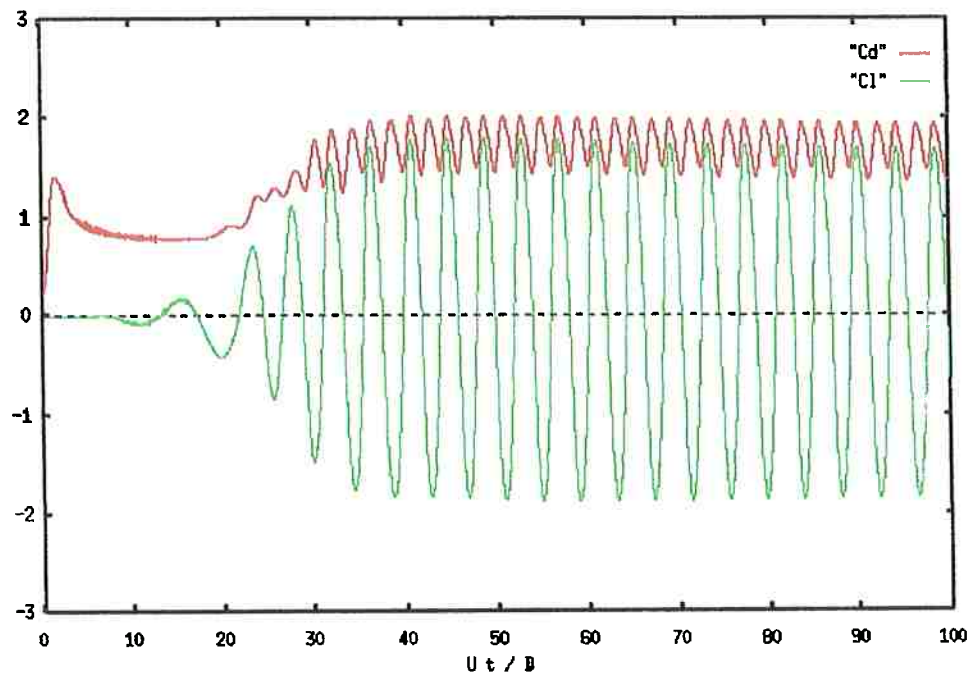


Fig. 9.5) Resultados para  $Re=10000$  usando o método da resolução por partes.  $St=0.24$ ,

$$C_{d\text{méd}}=1.71 .$$

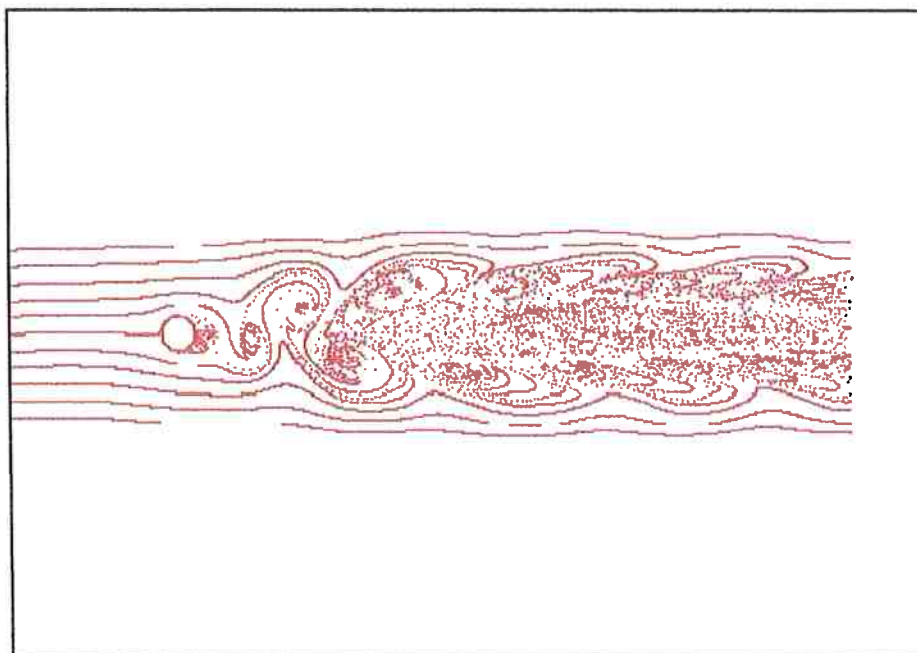


Fig. 9.6) Esteira para  $Re=10000$ , método da resolução por partes.

Os resultados para  $Re=10000$  apresentam um valor de  $C_d$  alto. Obtivemos  $C_d = 1.71$ , quando tal valor deveria estar mais próximo de 1.1 ( ver tabela 7.1 ). A explicação pode estar no fato de que a simulação bidimensional não captura efeitos devidos à tridimensionalidade do escoamento. O número de Strouhal obtido,  $St = 0.24$ , também está alto em relação ao esperado (  $St = 0.20$  ) . No entanto, existe uma melhora nos resultados, do ponto de vista qualitativo, em relação aos obtidos com o Método dos Vórtices Discretos, com a obtenção de uma esteira que se assemelha à observada experimentalmente.

A simulação para  $Re = 10000$  foi realizada sem a inclusão de modelagem de turbulência. Assim, o próximo passo será a discussão de como incluir os efeitos da turbulência em nossos algoritmos .

## 10 Turbulência

A maior parte dos experimentos referentes a vibração induzida pela emissão de vórtices em cilindros livres para oscilar são realizados para  $10000 < Re < 50000$ . Nesta faixa de  $Re$ , verifica-se que, embora a camada limite seja laminar, ocorre turbulência na esteira. Para que uma simulação numérica reproduza fielmente as condições encontradas nos experimentos, algum tipo de modelagem de turbulência tem que ser introduzido. Se a simulação for realizada para números de Reynolds muito baixos ( $Re < 200$ ), com o objetivo de evitar tal modelagem, efeitos viscosos elevados poderão tornar questionável uma comparação dos resultados.

Dois abordagens parecem mais viáveis: utilizar modelos com duas equações de transporte para as variáveis que caracterizam a turbulência, ou utilizar a técnica de simulação dos grandes vórtices (Large Eddy Simulation, ou LES). Os modelos com equações de transporte, como o  $k-\epsilon$ , tem como desvantagem a necessidade da resolução de duas equações a mais, o que aumenta o custo computacional. Uma alternativa mais simples é usar a simulação dos grandes vórtices (LES). Tal técnica, quando usado o modelo de Smagorinsky, não envolve a resolução de qualquer outra equação de transporte, e, devido a sua simplicidade, foi utilizada neste trabalho.

## 10.1 Simulação dos Grandes Vórtices (LES)

A técnica de simulação dos grandes vórtices (*Large Eddy Simulation*, ou LES), aplicável apenas quando o escoamento é considerado em regime variado, exige a utilização de uma malha suficientemente fina e um intervalo de tempo suficientemente pequeno para que as maiores escalas do escoamento turbulento sejam capturadas (linha mais espessa na fig. 10.1). As menores escalas devem ser simuladas através de algum tipo de modelo (PIOMELLI, 1997).

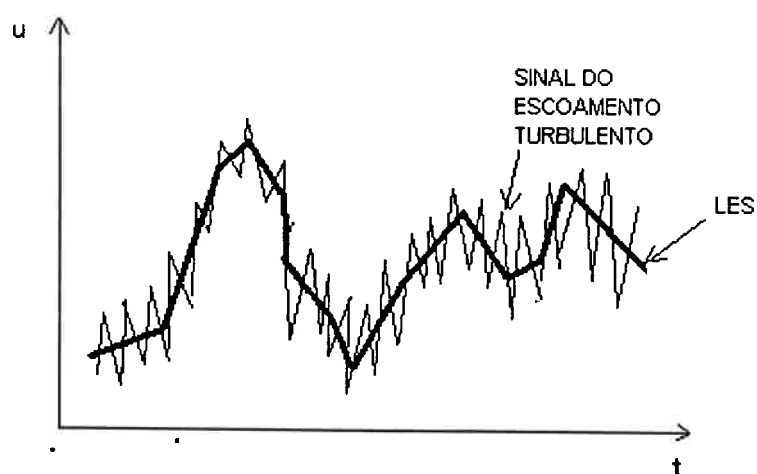


Fig. 10.1) Sinal do escoamento turbulento. A linha mais espessa indica a flutuação que deve ser capturado pela simulação dos grandes vórtices.

A idéia de obter uma discretização espacial e temporal capaz de capturar as maiores escalas da turbulência e modelar apenas as menores justifica-se pela observação que as maiores escalas são grandemente influenciadas por fatores geométricos e

condições de contorno, sendo anisotrópicas, ao passo que as menores escalas são muito mais uniformes, podendo assim ser modeladas com maior facilidade. Para obter as equações que regem o escoamento, usa-se um filtro espacial do tipo:

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') G(x, x') dx' \quad (10.1)$$

onde  $f$  é uma grandeza física ( velocidade, pressão, temperatura ) e  $G$  é dado por:

$$G(x, x') = 1 \text{ se } |x' - x| \leq \Delta/2 \quad ; \quad \text{caso contrário, } G(x, x') = 0$$

Nestas expressões  $\Delta$  corresponde ao espaçamento do filtro (fig. 10.2). Geralmente, utiliza-se a própria resolução local da malha usada nos cálculos como espaçamento.

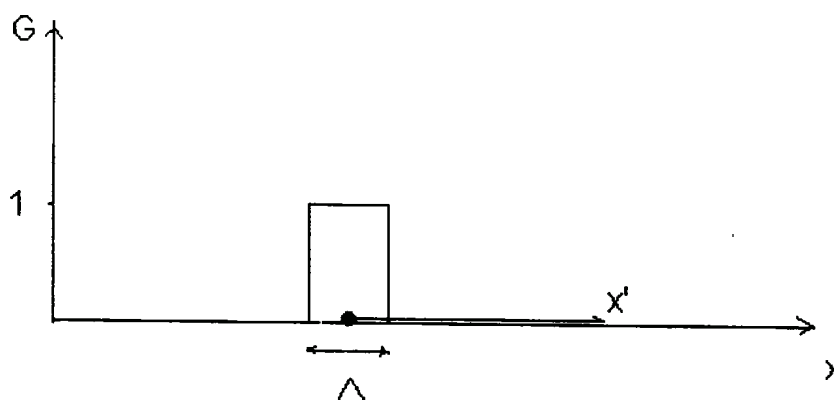


Fig. 10.2) Filtro espacial usado para obter as equações de transporte em LES.

Aplicando o filtro à equação da continuidade (8.7), obtemos:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (10.2)$$

Aplicando a operação de filtragem à equação (8.1) da Quantidade de Movimento na direção x, para escoamento bidimensional, obtemos:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{uu}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{uv}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad (10.3)$$

Tal equação pode ser re-escrita como:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{uu}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{uv}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'u} - \bar{u}\bar{u}) - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v} - \bar{u}\bar{v}) \quad (10.4)$$

Segundo PIOMELLI (1997), chamamos de “tensões de sub-malha” aos termos:

$$\tau_{xx}^{SGS} = \overline{u'u} - \bar{u}\bar{u} \quad (10.5)$$

$$\tau_{xy}^{SGS} = \overline{u'v} - \bar{u}\bar{v} \quad (10.6)$$

Onde o sobrescrito “SGS” vêm do inglês “Sub-Grid Scale”. Tais tensões são modeladas de uma forma similar ao modelo de Boussinesq usado para as tensões de Reynolds obtidas pela média temporal das equações de Navier-Stokes :

$$\tau_{ij}^{SGS} = \frac{2}{3} \delta_{ij} k_{SGS} - \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (10.7)$$

Onde  $k_{SGS}$  é a energia cinética das menores escalas da turbulência,  $\nu_t$  é a viscosidade cinemática turbilhonar e  $\delta_{ij}$  é a função Delta de Kronecker. Usando a expressão (10.7) para substituir os termos das tensões de sub-malha na equação (10.4) da Quantidade de Movimento na direção x, obtemos finalmente:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}\bar{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad (10.8)$$

Onde  $P = \bar{p} + \frac{2}{3} \rho k_{SGS}$ . Aplicando o mesmo raciocínio para a equação da Quantidade de Movimento na direção y, obtemos:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}\bar{v}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \quad (10.9)$$

As equações (10.2), (10.8) e (10.9) correspondem ao sistema de equações que devem ser resolvidas através do *Fractional - Step Method* para a resolução do

escoamento. Sobre o problema de modelar a viscosidade turbilhonar  $\nu_t$ . Um dos modelos mais simples para tanto é o modelo de Smagorinsky. Tal modelo guarda certa semelhança com os modelos de comprimento de mistura: o “comprimento de mistura” é dado pela dimensão  $\Delta$  que corresponde ao espaçamento médio da malha.

Usando o modelo de Smagorinsky, temos uma viscosidade turbulenta  $\nu_t$  dada por:

$$\nu_t = f_\mu (C_s \Delta)^2 \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}} \quad (10.10)$$

onde  $C_s$  é uma constante com valores entre 0.10 e 0.25, e  $\Delta$ , como já dito, é uma dimensão típica da malha. Para o nosso caso, em que usamos o método dos volumes finitos e temos volumes bidimensionais, escolhemos fazer  $\Delta = \sqrt{V}$ , onde  $V$  é o volume usado para a integração das equações de transporte. O produto  $S_{ij} S_{ij}$  é dado por:

$$S_{ij} S_{ij} = \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \quad (10.11)$$

E  $f_\mu$  é uma função que visa introduzir efeitos de parede para anular a viscosidade turbulenta nas proximidades de um contorno sólido:

$$f_\mu = \left( 1.0 - e^{-\frac{n+}{25}} \right)^2 \quad (10.12)$$



Na expressão para  $f_\mu$ ,  $n^+$  representa uma distância adimensional da parede, dada por:

$$n^+ = \frac{u_\tau n}{\nu} \quad (10.13)$$

onde  $n$  é a distância na direção normal à parede e  $u_\tau$  é a chamada velocidade de atrito, dada por:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (10.14)$$

A energia cinética  $k_{SGS}$  pode ser obtida a partir da viscosidade cinemática turbilhonar através de:

$$k_{SGS} = \frac{v_i^2}{(C_k \Delta)^2} \quad (10.15)$$

Onde  $C_k$  é uma constante cujo valor é considerado próximo de 0.094 (PIOMELLI, 1997).

O uso do modelo de Smagorinsky simplifica enormemente a tarefa de calcular a viscosidade turbulenta, mas a constante  $C_s$  não tem qualquer universalidade. Modelos mais complexos utilizam metodologias para calcular  $C_s$  (que, neste caso, deixa de ser uma constante) em cada ponto da malha para cada instante, mas teríamos então um tempo de processamento muito elevado. A dificuldade para computar o valor de  $C_s$  em cada nó, para cada instante de tempo, pode não ser compensada por uma melhoria

significativa nos resultados obtidos. Segundo RODI (1996), para a simulação tridimensional de escoamentos externos a corpos rombudos,  $C_s = 0.10$  propicia resultados satisfatórios. SELVAN (1997) utilizou, para simulações bidimensionais,  $C_s = 0.15$ , argumentando que um valor maior da constante deve ser usado para compensar a falta de efeitos tridimensionais.

A principal objeção ao uso de simulação dos grandes vórtices está no fato que tal técnica, em teoria, só pode ser utilizada quando a simulação é tridimensional. Ao usar LES numa simulação bidimensional, estamos aceitando a hipótese que as grandes escalas são bidimensionais, e que toda a tridimensionalidade está contida nas menores escalas. No caso da vibração induzida pelo escoamento, fenômeno que pretendemos estudar, resultados experimentais indicam que as grandes escalas, isto é, os vórtices desprendidos, são bidimensionais.

Além dessa objeção, verifica-se que o custo computacional da simulação dos grandes vórtices, mesmo evitando a solução de equações suplementares de transporte, é muito elevado, devido à necessidade de usar malha mais refinada e intervalos de tempo menores.

## 10.2 Resultados

Utilizamos a Simulação dos Grandes Vórtices (LES) para simular o escoamento ao redor de cilindros para  $Re = 10000$ . Consideramos que tal número de Reynolds é baixo o bastante para que mesmo uma malha relativamente grosseira permita a utilização do modelo de Smagorinsky para o cálculo da viscosidade turbilhonar. A malha utilizada é a mesma das figs. 7.11 e 7.12. Usamos para a parte convectiva das

equações de transporte o esquema Adams-Bashforth, para a parte difusiva laminar o esquema Crank-Nicholson e para a parte difusiva turbulenta também usamos o esquema Adams-Bashforth. Isso equivale a substituir as equações (8.5) e (8.6), usadas no método da resolução por partes, pelas equações:

$$\begin{aligned} \rho \frac{u_p^* - u_p^0}{\Delta t} V = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{Nri} \int_{MN} \mu \text{grad} u^0 \cdot \vec{n} dS - \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{Nri} \int_{MN} (u_e^0 - u_p^0) \rho \vec{v}^0 \cdot \vec{n} dS \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{Nri} \int_{MN} (u_e^{-1} - u_p^{-1}) \rho \vec{v}^{-1} \cdot \vec{n} dS + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{Nri} \int_{MN} \mu_i^0 \text{grad} u^0 \cdot \vec{n} dS - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{Nri} \int_{MN} \mu_i^{-1} \text{grad} u^{-1} \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (10.16)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{v_p^* - v_p^0}{\Delta t} V = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{Nri} \int_{MN} \mu \text{grad} v^0 \cdot \vec{n} dS - \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{Nri} \int_{MN} (v_e^0 - v_p^0) \rho \vec{v}^0 \cdot \vec{n} dS \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{Nri} \int_{MN} (v_e^{-1} - v_p^{-1}) \rho \vec{v}^{-1} \cdot \vec{n} dS + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{Nri} \int_{MN} \mu_i^0 \text{grad} v^0 \cdot \vec{n} dS - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{Nri} \int_{MN} \mu_i^{-1} \text{grad} v^{-1} \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (10.17)$$

Utilizamos  $C_s = 0.015$  e um intervalo de tempo adimensional  $U_0 \Delta t / D = 0.00125$ . Os resultados das forças sobre o cilindro e a esteira podem ser vistos nas figs. 10.3 e 10.4 .

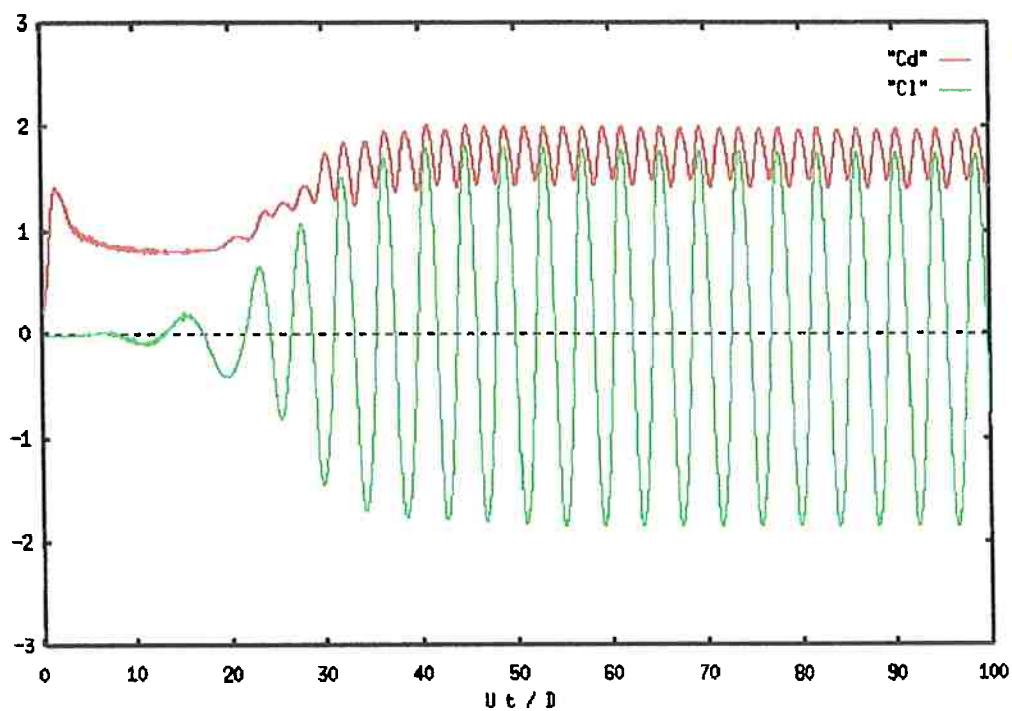


Fig. 10.3 ) Resultados para  $Re = 10000$  usando o método da resolução por partes e simulação de turbulência com o modelo de Smagorinsky.  $St = 0.24$  ,  $Cd_{\text{médio}} = 1.73$  .

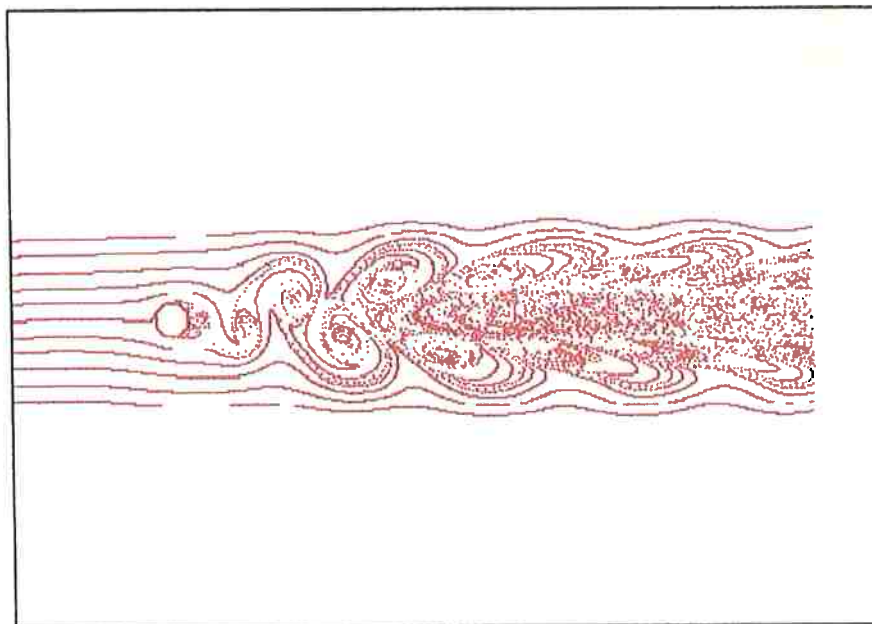


Fig. 10.4 ) Esteira para  $Re = 10000$  , com o modelo de Smagorinsky .

Os resultados são praticamente idênticos aos obtidos no capítulo 9, sem a utilização de modelo de turbulência, para o mesmo valor de  $Re$ . Os contornos da relação entre a viscosidade turbulenta e a viscosidade molecular,  $\nu_t/\nu$ , pode ser visto na fig. 10.5 . Contornos de vorticidade  $\omega D/U_0$  podem ser vistos na fig. 10.6 .

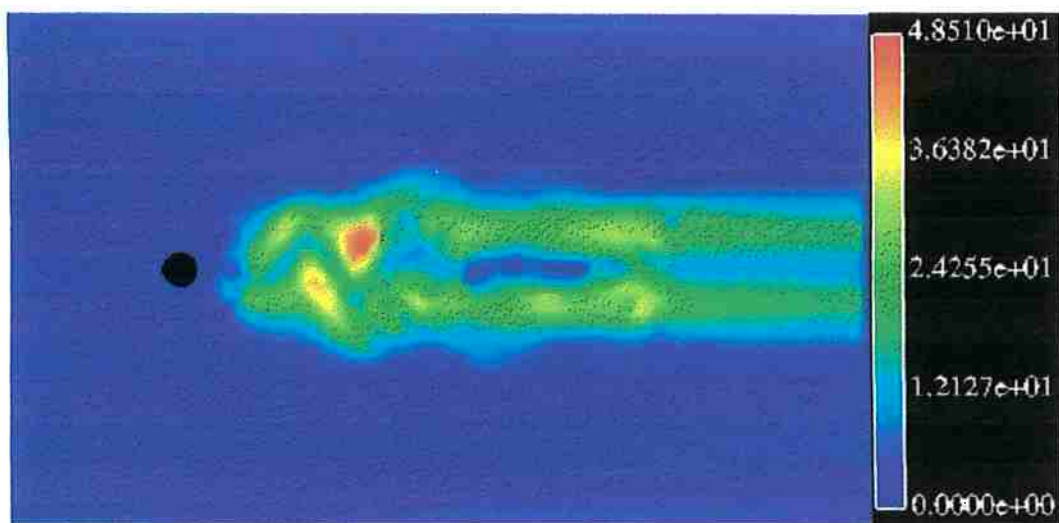


Fig. 10.5) Contornos de viscosidade turbulenta  $\nu_t/\nu$ ,  $Re = 10000$ .

No contornos da fig. 10.5 pode-se ver que realmente a função de amortecimento da equação (10.12) evitou o surgimento de turbulência na proximidade da parede. A viscosidade turbulenta máxima corresponde a quarenta e oito vezes a viscosidade molecular, valor um pouco superior ao obtido por ARKELL (1995) com o modelo  $k-\epsilon$  ( em seu trabalho o valor máximo obtido da viscosidade turbulenta é por volta de trinta vezes o valor da viscosidade molecular ) . Também nota-se que os pontos de alta turbulência correspondem aos centros dos vórtices emitidos na esteira.

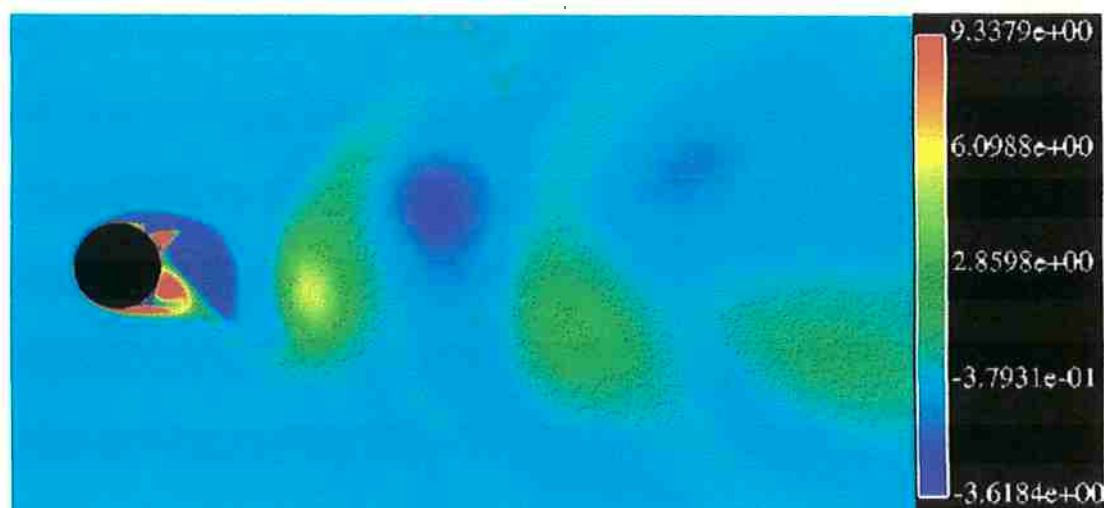


Fig. 10.6) Contornos de vorticidade  $\omega D/U_0$ ,  $Re = 10000$ .

Os resultados evidenciam que a inclusão de modelagem de turbulência não é a questão crucial para realizar simulações para números de Reynolds ao redor de  $10^4$ , e sim a realização de simulações tridimensionais. O uso do modelo de Smagorinsky não melhorou os resultados obtidos sem modelagem de turbulência. Os coeficientes de arrasto e número de Strouhal continuam muito altos em relação aos valores esperados.

## 11 A simulação do escoamento ao redor de um cilindro livre para oscilar na direção transversal à direção da corrente

Como exposto no capítulo 4, para a determinação do movimento do cilindro é necessário resolver o campo de escoamento e , a partir do cálculo do coeficiente de sustentação  $C_l$ , para cada instante de tempo resolver a equação (4.15) através de um método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Considerando que a malha está em movimento com o cilindro, surgem pequenas modificações nas equações de Navier-Stokes e nas condições de contorno do problema. Se o cilindro tem uma velocidade, na direção  $y$ , dada por  $v_B$ , as equações de Navier-Stokes, para um escoamento turbulento, são dadas por:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}[(\bar{v}-v_B)\bar{u}] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( (v+v_i) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( (v+v_i) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}[(\bar{v}-v_B)\bar{v}] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( (v+v_i) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( (v+v_i) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \quad (11.2)$$

As condições de contorno são :

a) Sobre a parede do cilindro:  $\bar{u} = 0$ ,  $\bar{v} = v_B$ ,  $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$  ;

b) Na fronteira ao longe, à frente, acima e abaixo do cilindro:  $\bar{u} = U_0$ ,  $\bar{v} = 0$ ,  $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$ ;

c) Na fronteira ao longe, atrás do cilindro, onde o escoamento deixa o domínio de

$$\text{cálculo: } \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0, \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} = 0, P = 0.$$

Uma diferença sutil deve ser considerada ao realizar o cálculo das forças. A tensão de cisalhamento na parede é dada por:

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{\partial v_n}{\partial s} \right) \quad (11.3)$$

Onde  $v_s$  e  $v_n$  são as velocidade tangencial e normal à parede. No caso do cilindro estacionário, a velocidade normal à parede é constantemente nula sobre esta, portanto apenas a derivada da velocidade tangencial com respeito à direção normal à parede é diferente de zero na expressão (11.3). Assim, temos que  $\tau_0 = -\mu \omega_0$ . Porém, se o cilindro for móvel, a velocidade normal irá variar sobre a parede, e o segundo termo entre parênteses na expressão (11.3) não será nulo, de modo que:

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{\partial v_s}{\partial n} - \frac{\partial v_n}{\partial s} + 2 \frac{\partial v_n}{\partial s} \right) = \mu \left( 2 \frac{\partial v_n}{\partial s} - \omega_0 \right) \quad (11.4)$$

Assim, é preciso calcular a componente normal da velocidade sobre a parede e avaliar sua derivada na direção tangencial para poder obter a tensão de cisalhamento. Combinando as tensões de cisalhamento com as pressões obtidas pela equação de Poisson as forças podem ser calculadas.

As simulações foram feitas, inicialmente, considerando que o escoamento ao redor do cilindro é dotado de uma certa velocidade reduzida fixa. Para realizar



comparações com os resultados de KHALAK e WILLIAMSON (1996) optamos por considerar  $m^* = 3.3$  e  $\zeta = 0.0039$ . O intervalo de tempo adimensional usado foi  $U_0 \Delta t / D = 0.00125$ . O número de Reynolds  $Re$  das simulações é 10000, e o modelo de Smagorinsky foi usado. A malha utilizada é a mesma das figs. 7.11 e 7.12. Os resultados da amplitude de vibração como uma função da velocidade reduzida podem ser vistos na fig. 11.1.

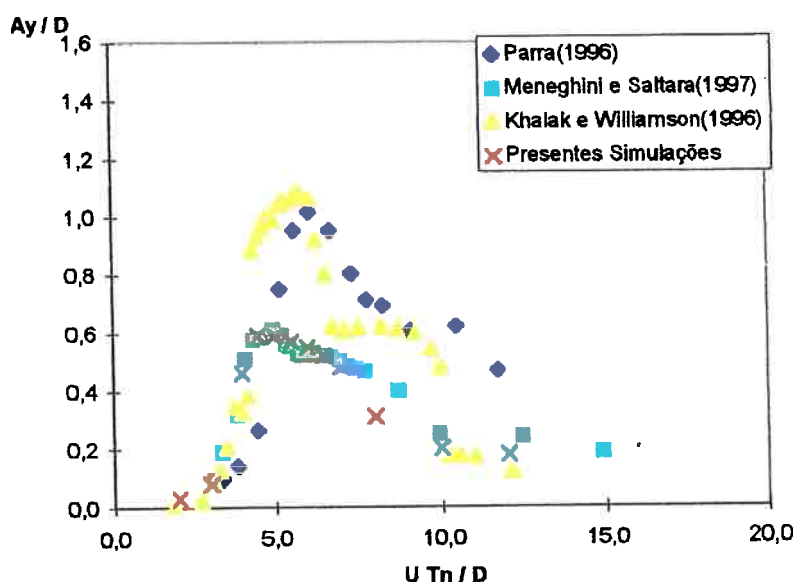


Fig. 11.1) Amplitude de vibração do cilindro como função da velocidade reduzida para cilindro submetido a uma corrente com uma dada velocidade reduzida fixa.

Os resultados de MENEGHINI e SALTARA (1997) plotados na fig. 11.1 referem-se a simulações usando o método dos vórtices discretos, com uma malha polar, para  $Re = 200$ . Podemos ver que tais resultados são praticamente idênticos aos resultados das nossas simulações.

Nas figs. 11.2 , 11.3 e 11.4 podemos ver os resultados do coeficiente de sustentação e deslocamento adimensional  $Y_b = y/D$  como função do tempo para as simulações com  $V_r = 3.0$  ,  $V_r = 5.0$  e  $V_r = 7.0$  . Nas figs. 11.5 , 11.6 e 11.7 podemos ver as esteiras obtidas.

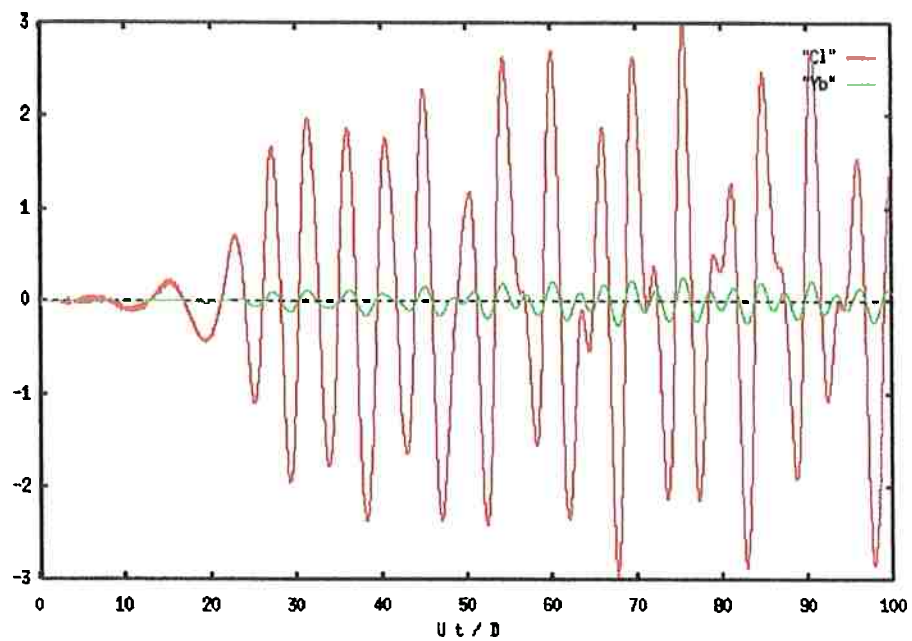


Fig. 11.2) Coef. de sustentação e deslocamento adimensional do cilindro para  $V_r = 3.0$  .

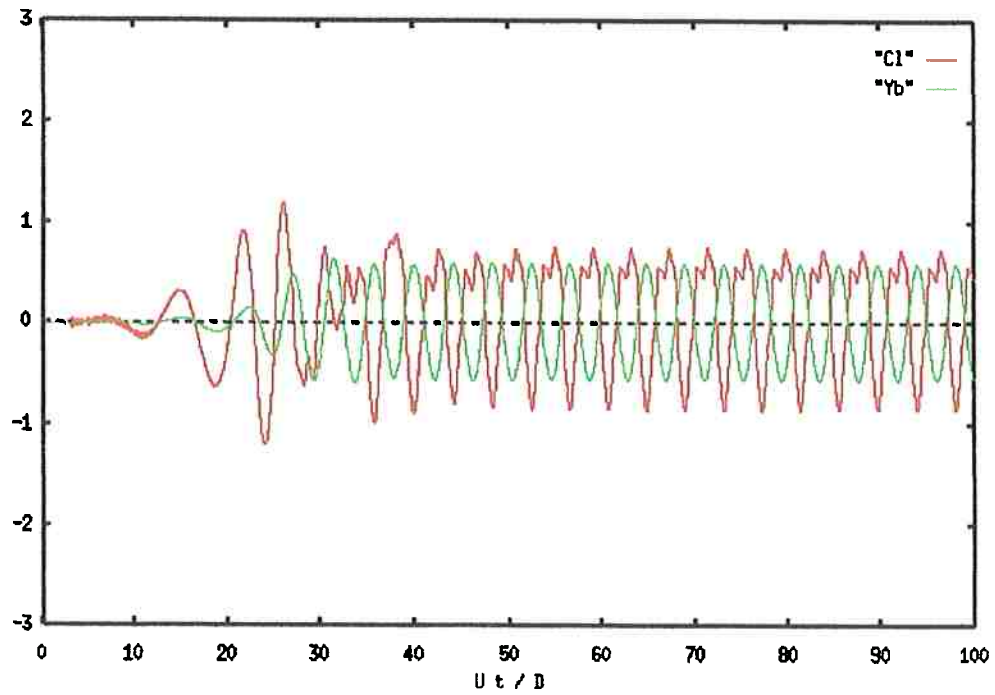


Fig 11.3) Coef. de sustentação e deslocamento adimensional do cilindro para  $V_r = 5.0$ .

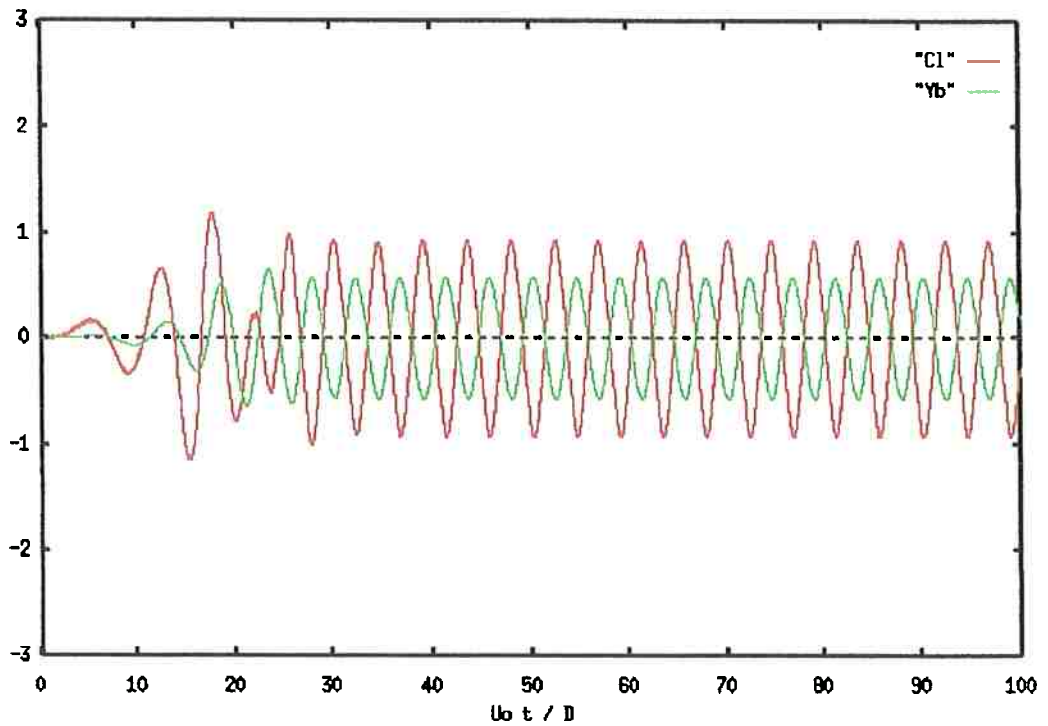


Fig. 11.4) Coef. de sustentação e deslocamento adimensional do cilindro para  $V_r = 7.0$ .

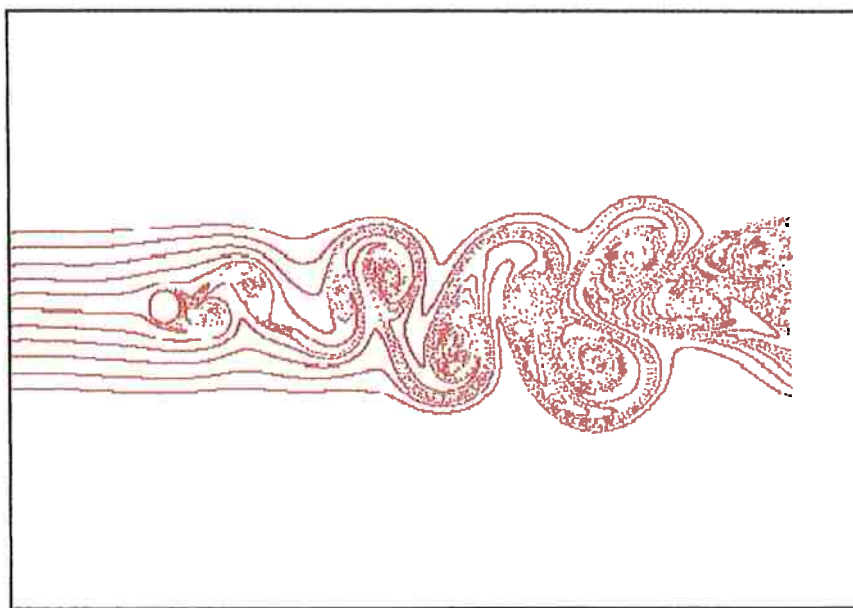


Fig. 11.5) Esteira para  $Vr=3.0$  .

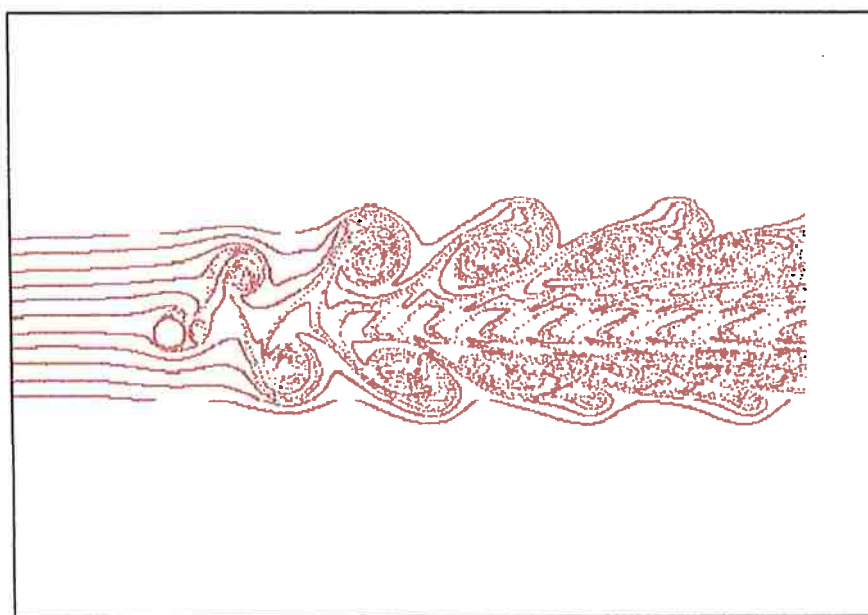


Fig. 11.6) Esteira para  $Vr=5.0$  .

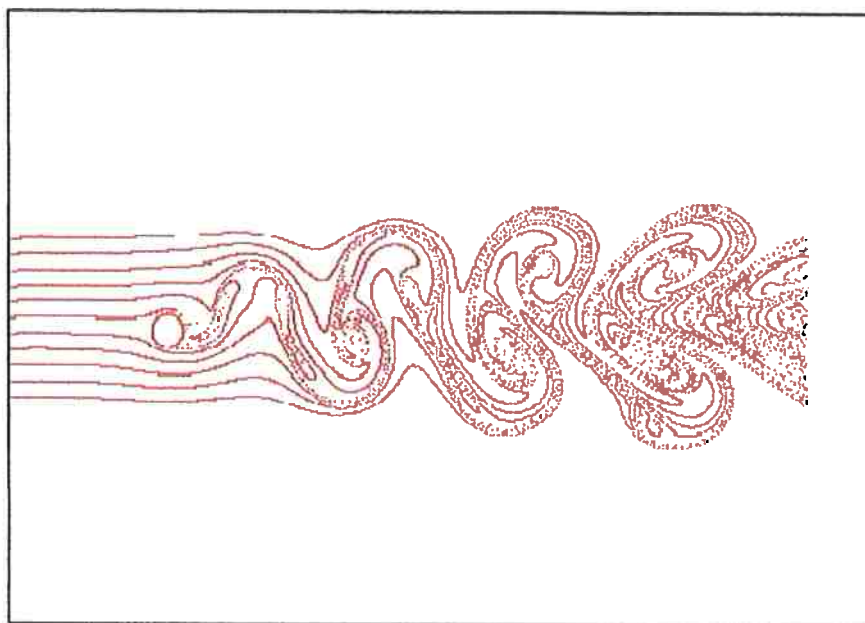


Fig. 11.7) Esteira para  $V_r=7.0$  .

Verifica-se que a máxima amplitude de oscilação obtida, dividida pelo diâmetro do cilindro, é igual a 0.59 , para uma velocidade reduzida  $V_r = 5.0$  . Nos experimentos de KHALAK e WILLIAMSON (1996), tal amplitude máxima é bem maior, próxima de 1.1, e ocorre para  $V_r = 6.0$ .

Para verificar se nossos resultados iniciais eram devidos à velocidade reduzida fixa, realizamos uma simulação em que temos uma velocidade reduzida inicial  $V_r = 3.0$  que é incrementada, a cada 10000 passos de tempo , de 0.1, até atingir o valor  $V_r = 5.0$  . O intervalo de tempo adimensional usado foi  $U_0 \Delta t / D = 0.0025$ . Quisemos, com tal simulação, verificar se reproduzíamos o efeito verificado por Brika e Laneville. Em seu artigo afirma-se que o pico de amplitude observado no ramo superior de histerese só é obtido aumentando-se lentamente a velocidade reduzida a partir de um valor baixo. Os

nossos resultados, com a velocidade reduzida sendo aumentada lentamente, podem ser vistos na fig. 11.8 .

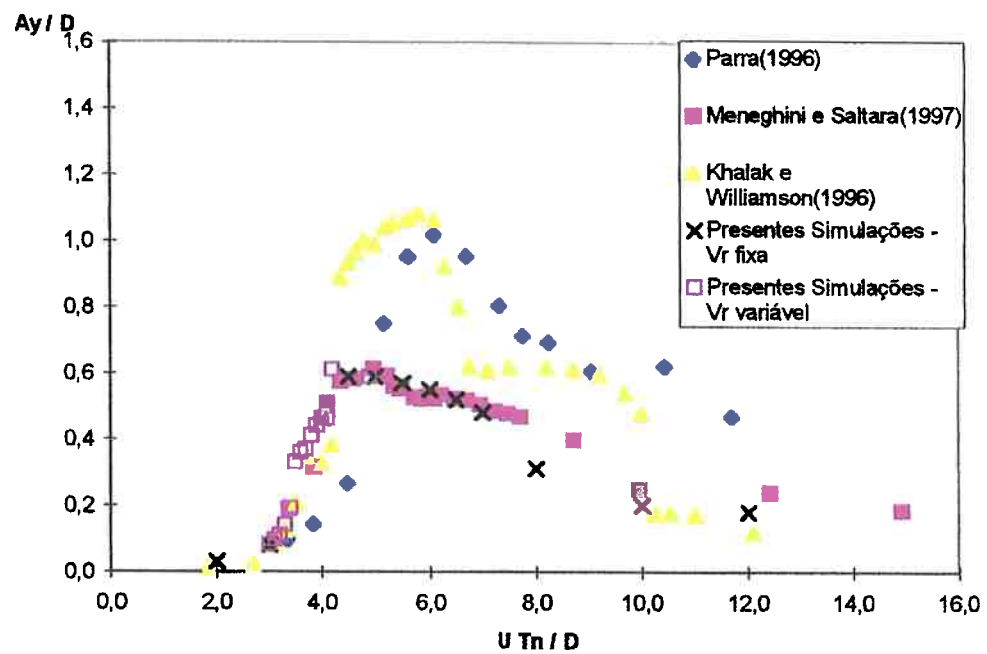


Fig. 11.8) Amplitude de vibração do cilindro como função da velocidade reduzida para cilindro submetido a uma corrente com velocidade reduzida variável.

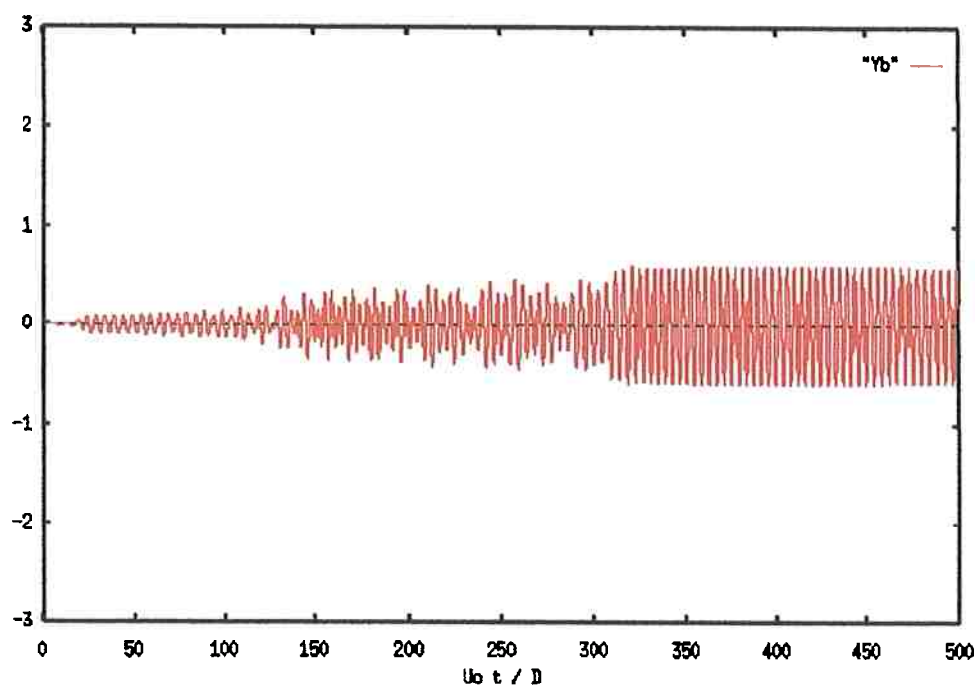


Fig. 11.9) Amplitude de vibração adimensional para  $V_r$  crescente ao longo do tempo.

Embora a velocidade reduzida tenha sido aumentada lentamente, também não foi possível obter o pico de amplitude verificado por KHALAK e WILLIAMSON (1996) e também por PARRA (1996). Os resultados, tanto para velocidade reduzida fixa quanto para velocidade reduzida variável, se aproximam mais daqueles obtidos por MENEGHINI e SALTARA (1997) usando o método dos vórtices discretos, para  $Re = 200$ . Os resultados referentes à variação da amplitude adimensional de vibração como uma função do tempo à medida que a velocidade reduzida vai sendo aumentada podem ser vistos na fig. 11.9 .

A discrepância entre nossos resultados e os resultados experimentais parece estar ligada ao fato da simulação ser bidimensional. Inicialmente, a hipótese de bidimensionalidade parecia razoável, tendo em vista que grandes amplitudes de vibração parecem eliminar as tridimensionalidades observadas na esteira para  $Re$  acima de 200 [

BLEVINS (1990)]. Mas resultados referentes a simulações realizadas por NEWMAN e KARNIADAKIS (1997) com um cabo livre para oscilar, em três dimensões, com parâmetro de massa  $m^* = 1$  e  $Re = 200$ , em que obteve-se uma amplitude máxima de vibração acima de 1.0, parecem sugerir que apenas desenvolvendo um simulador que resolva o escoamento tridimensional será possível obter resultados mais próximos daqueles observados experimentalmente.



## 12 Resultados obtidos para arranjos de cilindros lado a lado usando o Método da Resolução por Partes

Neste capítulo apresentamos resultados de simulações realizadas com o método da resolução por partes, para  $Re=200$ , relativas a pares de cilindros lado a lado. O número de  $Re$  das simulações foi mantido baixo para que um número menor de nós e um intervalo de tempo maior pudessem ser utilizados. Quando temos agrupamentos de cilindros a questão do refinamento da malha torna-se delicada, porque cada cilindro possui uma região de camada limite que tem que ser refinada. Além disso, os resultados obtidos com  $Re = 10000$ , tanto para o cilindro fixo quanto para o cilindro livre para oscilar, parecem indicar que não podemos desprezar as tridimensionalidades presentes em tais escoamentos.

Os cilindros tem o mesmo raio  $R = 1$ . O ponto de coordenadas  $(0,0)$  está localizado exatamente no ponto médio da reta que une os centros dos dois cilindros. A malha se estende por  $50 R$  à jusante e  $21.3 R$  à montante do ponto  $(0,0)$ . Na direção vertical, a malha se estende por  $21.3 R$  acima e abaixo desse ponto. Levando-se em conta o baixo  $Re$  das simulações optou-se por um intervalo de tempo adimensional  $U_0 \Delta t / D = 0.005$ . A velocidade  $U_0$  é igual a  $1.0$ . O nó mais próximo da parede do cilindro está a uma distância  $0.02 R$  desta. Temos 128 nós sobre a parede de cada cilindro e 100 nós na fronteira externa. Foram realizadas simulações para um espaçamento  $T/D$  entre os cilindros correspondente a  $1.5$ ,  $2.0$ ,  $3.0$ ,  $4.0$  e  $5.0$ . A malha utilizada para a simulação com  $T/D = 1.5$  pode ser vista na figs. 12.1. Tal malha tem 13819 nós e 27284 triângulos. Nas proximidades do cilindro, a malha tem uma

distribuição de nós idêntica à mostrada na fig. 7.2 . O número de nós e triângulos usados para as simulações com outros espaçamentos  $T/D$  é um pouco diferente, mas as características gerais das malhas são sempre as mesmas.

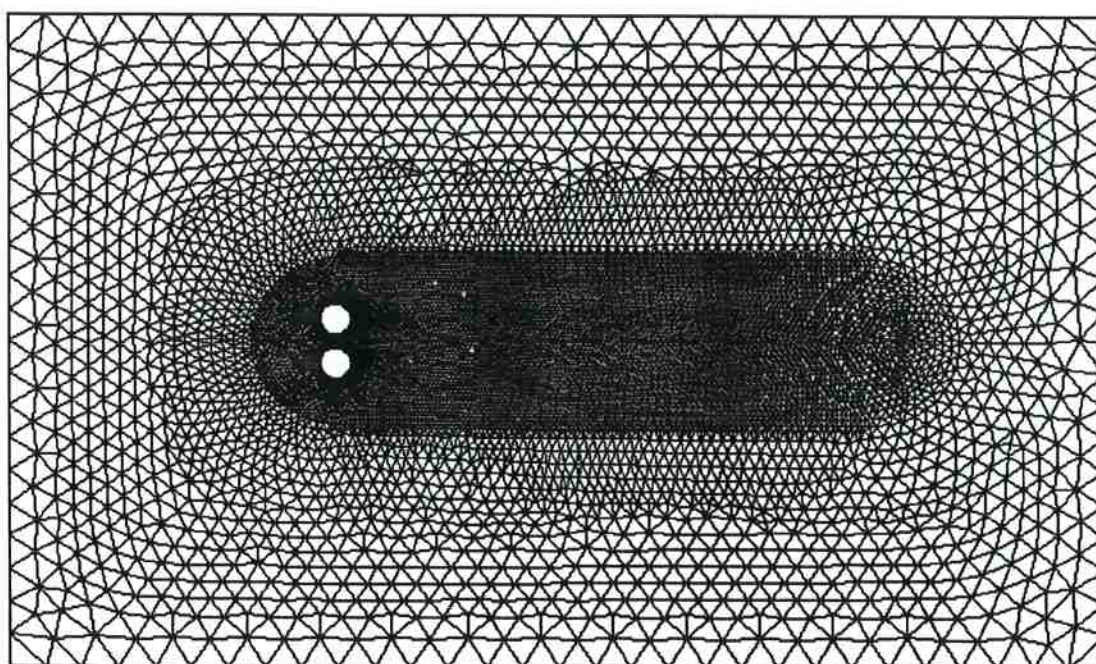


Fig. 12.1) Malha usada para  $T/D = 1.5$  .

Os resultados das forças e a esteira para  $T/D = 1.5$  podem ser vistos nas figs. 12.2 e 12.3 . Contornos de pressão para tal caso podem ser vistos na fig. 12.4 . Para tal caso, observamos primeiramente que obtemos uma força de repulsão entre os cilindros, como sugerido por BEARMAN e WADCOCK (1973) através de medições de coeficiente de pressão . Na fig. 12.2 podemos ver que a força de sustentação média do cilindro superior ( em azul ) é positiva e a força de sustentação média do cilindro inferior

( em violeta ) é negativa . A explicação para tal fenômeno pode ser vista nos contornos de pressão da fig. 12.4 . Na legenda, podemos ver que pressões mais altas correspondem à cor vermelha, e as pressões mais baixas à cor azul. Forma-se uma região de alta pressão na frente da passagem entre os cilindros ( em vermelho ). Ocorre uma queda de pressão ao longo da passagem, devido à formação de um jato, mas a pressão na passagem ( indo do amarelo ao azul claro ) continua maior que a pressão que age sobre os lados dos cilindros opostos à passagem ( azul mais escuro). Nota-se, assim, que , em relação ao cilindro isolado, os pontos de estagnação frontais se movem na direção da brecha entre os cilindros. As posições dos pontos de separação se movem na direção horária no cilindro inferior e anti-horária no cilindro superior, em relação as posições da separação em um cilindro isolado. O resultado líquido desse fenômeno é a formação de uma força de repulsão entre os cilindros.

O sinal do coeficiente de arrastos da fig. 12.2 evidencia a existência do fenômeno de “*flopping*”, com a esteira sendo defletida hora para trás do cilindro de cima e hora para o cilindro de baixo, causando a diferença no sinal do coeficiente dos dois cilindros. A esteira visualizada na fig. 12.3 tem a aparência de uma esteira única para os dois cilindros. No entanto, o fenômeno de “*flopping*” observado experimentalmente por KIM e DURBIN (1988) apresentava uma escala de tempo consideravelmente maior. A explicação para esta diferença pode, novamente, residir no fato das simulações serem bidimensionais.

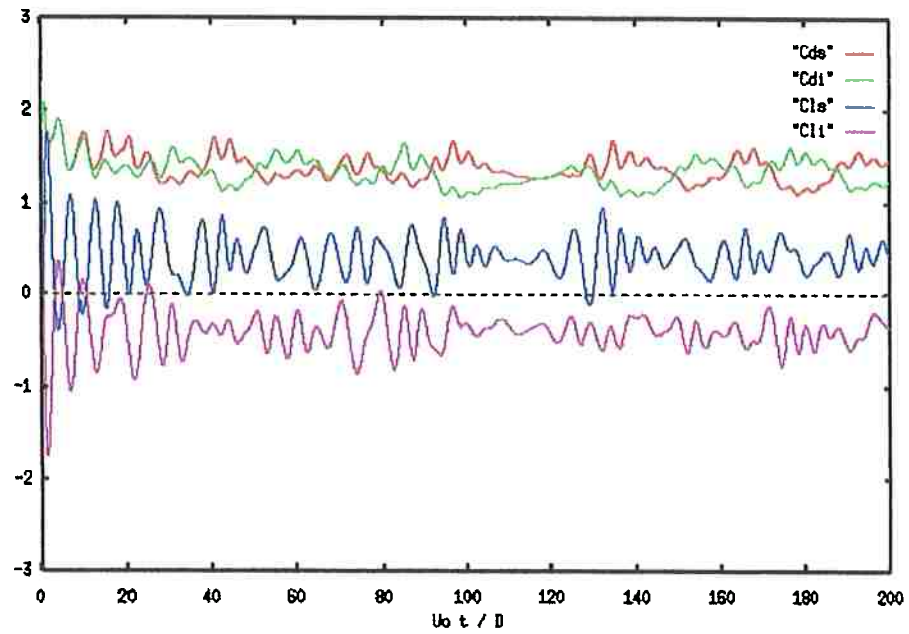


Fig. 12.2 ) Forças para  $T/D = 1.5$  . Subscrito “s” para o cilindro superior, subscrito “i” para o cilindro inferior.  $Cds_{\text{médio}} = Cdi_{\text{médio}} = 1.33$  ,  $Cls_{\text{médio}} = 0.40$  ,  $Cli_{\text{médio}} = -0.40$ .

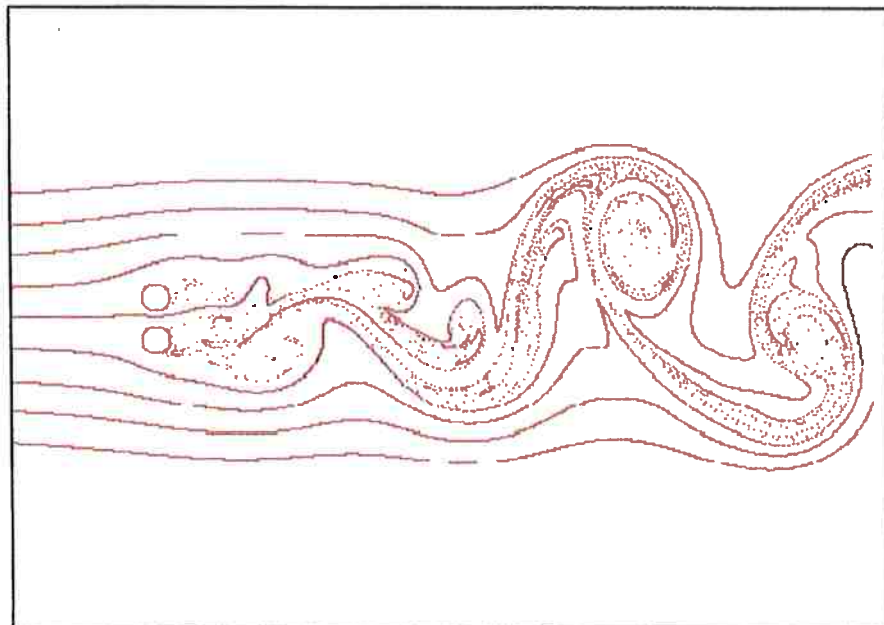


Fig. 12.3 ) Esteira para  $T/D = 1.5$  .

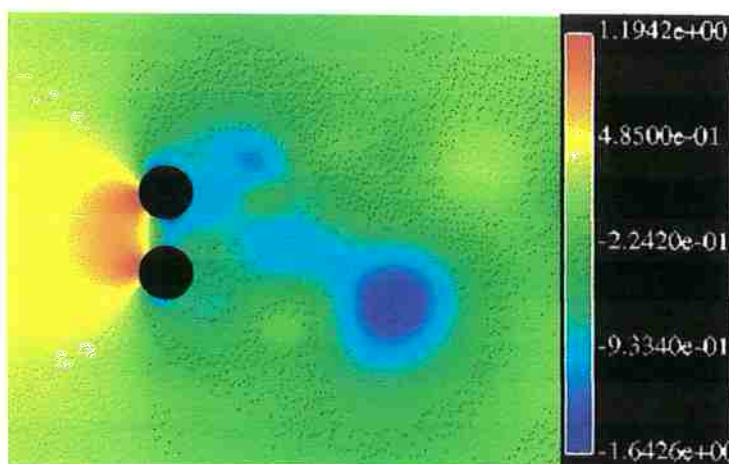


Fig. 12.4 ) Contornos de Pressão na proximidade dos cilindros.

Os resultados para  $T/D = 2.0$  podem ser observados nas figs. 12.5 e 12.6 . O fenômeno de “*flopping*” ainda é visível no sinal dos coeficientes de arrasto. Ocorreu também uma diminuição da força de repulsão entre os cilindros. Segundo SUMNER et al (1998) o “*flopping*” se mantém até  $T/D = 2.2$  . A aparência de esteira única para os dois cilindros se mantém ( fig. 12.6 ).

Quando aumentamos  $T/D$  para 3.0, observamos que o “*flopping*” desaparece, como observado por SUMNER et al (1998). Na fig. 12.7 podemos observar que os coeficientes de arrasto são idênticos para ambos os cilindros e que os coeficientes de sustentação estão em anti-fase. Na fig. 12.8 podemos observar que temos uma esteira em anti-fase ( fig. 4.9 ) como a observada experimentalmente por WILLIAMSON (1985) . A aparência da esteira de vórtices lembra a formação de duas esteiras simétricas, uma atrás de cada cilindro. Tal comportamento se repete para  $T/D = 4.0$  (figs. 12.9 e 12.10 ) e  $T/D = 5.0$  (figs. 12.11 e 12.12) . O que se nota é que, a medida que aumentamos  $T/D$ , a força média de repulsão entre os cilindros tende a diminuir. Para  $T/D = 5.0$  é difícil notar que ainda existe uma interferência entre os cilindros.



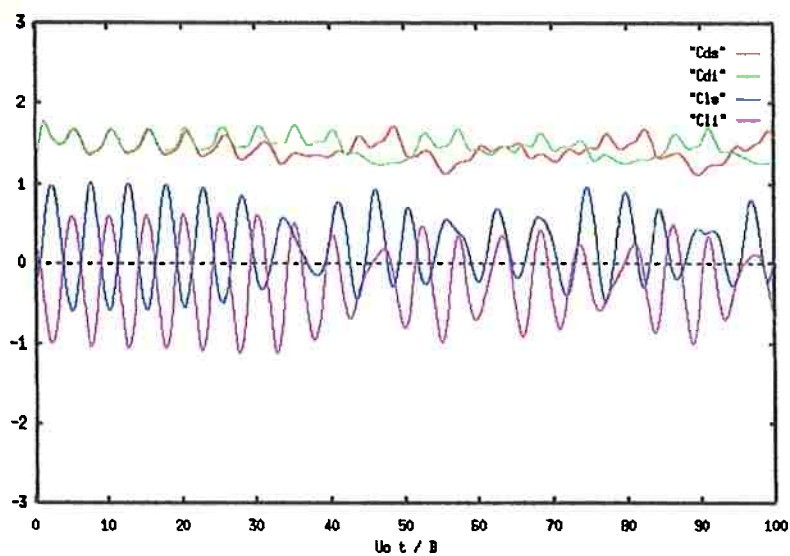


Fig. 12.5 ) Forças para  $T/D = 2.0$  . Subscrito "s" para o cilindro superior, subscrito "i" para o cilindro inferior.  $Cds_{\text{médio}} = Cdi_{\text{médio}} = 1.41$  ,  $CIs_{\text{médio}} = 0.22$  ,  $CII_{\text{médio}} = - 0.22$ .



Fig. 12.6 ) Esteira para  $T/D = 2.0$  .

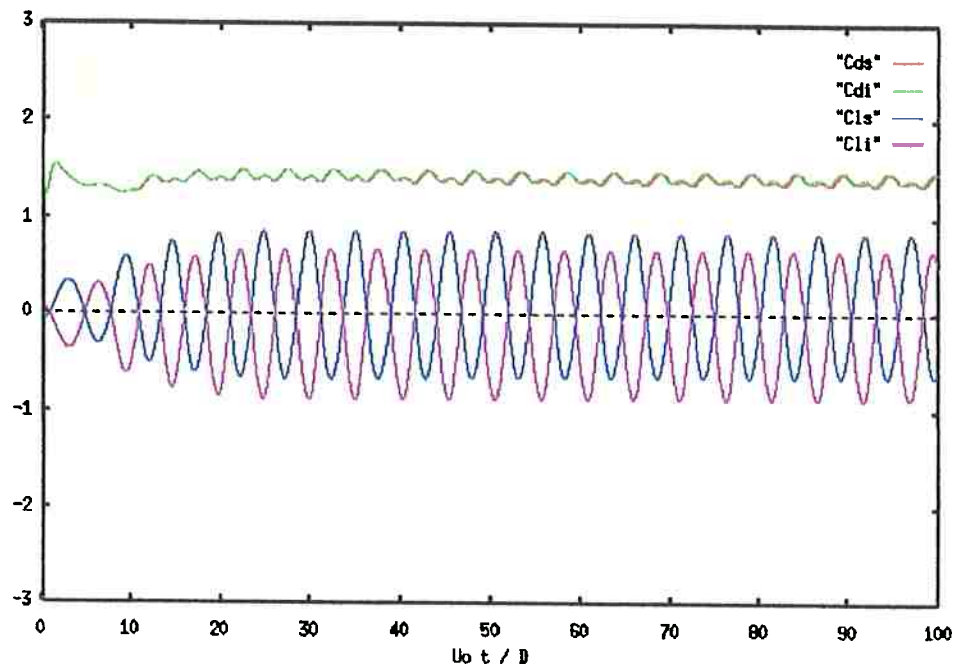


Fig. 12.7 ) Forças para  $T/D = 3.0$  . Subscrito “s” para o cilindro superior, subscrito “i” para o cilindro inferior.  $Cds_{\text{médio}} = Cdi_{\text{médio}} = 1.41$  ,  $Cis_{\text{médio}} = 0.09$ ,  $Cli_{\text{médio}} = -0.09$ .

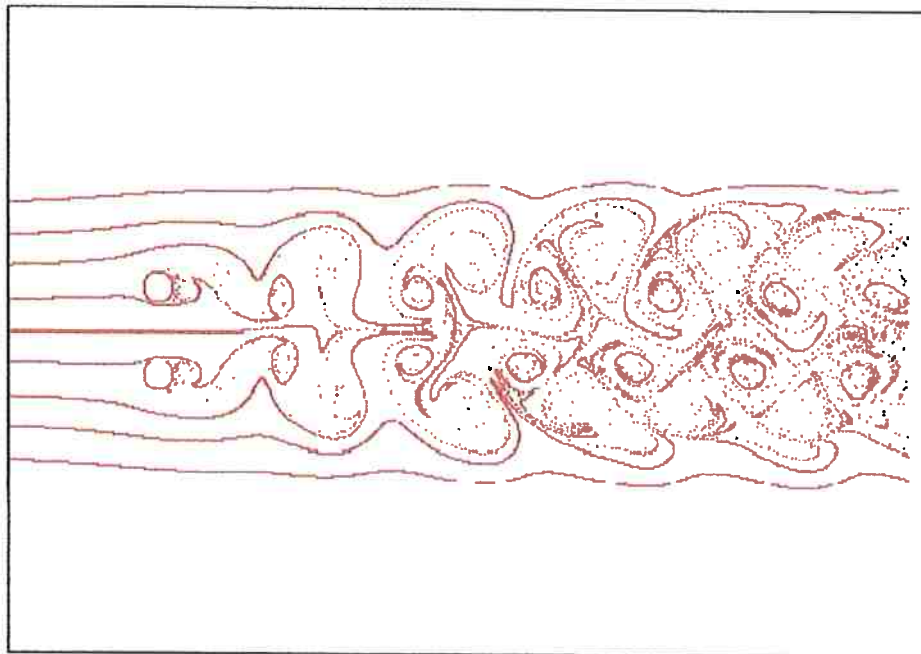


Fig. 12.8 ) Esteira para  $T/D = 3.0$  .

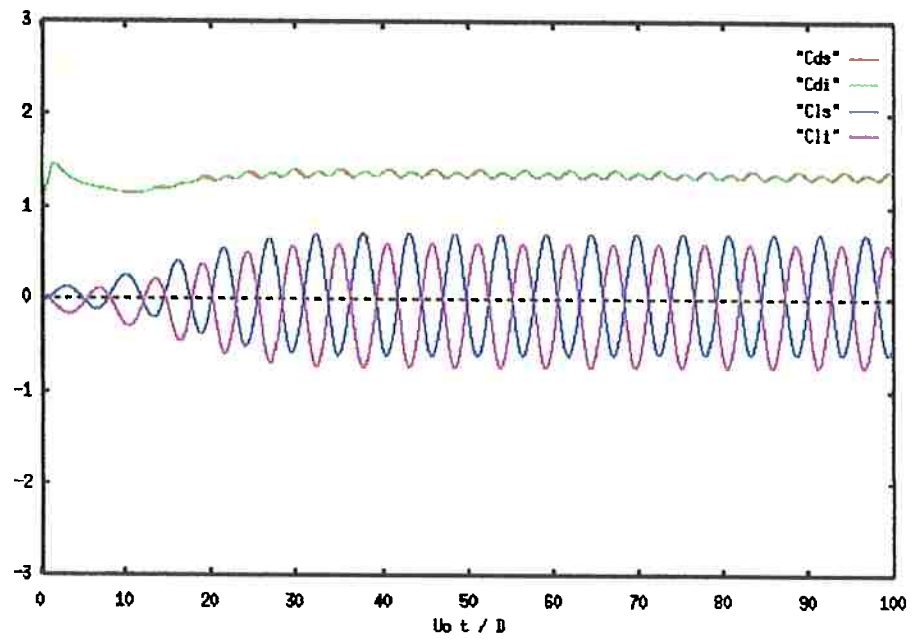


Fig. 12.9 ) Forças para  $T/D = 4.0$  . Subscrito “s” para o cilindro superior, subscrito “i” para o cilindro inferior.  $C_{ds_{\text{médio}}} = C_{di_{\text{médio}}} = 1.35$  ,  $C_{is_{\text{médio}}} = 0.04$  ,  $C_{ii_{\text{médio}}} = -0.04$  .

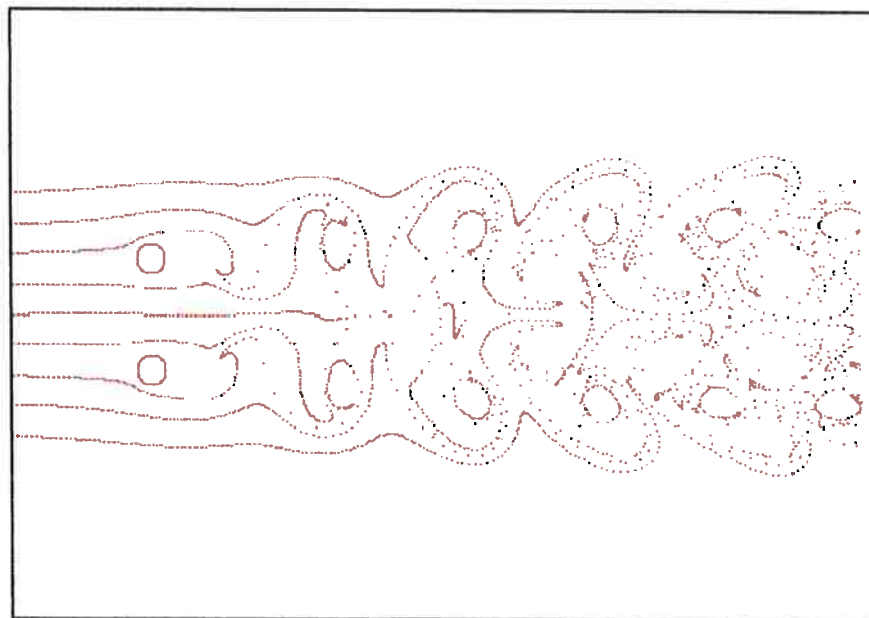


Fig. 12.10 ) Esteira para  $T/D = 4.0$  .



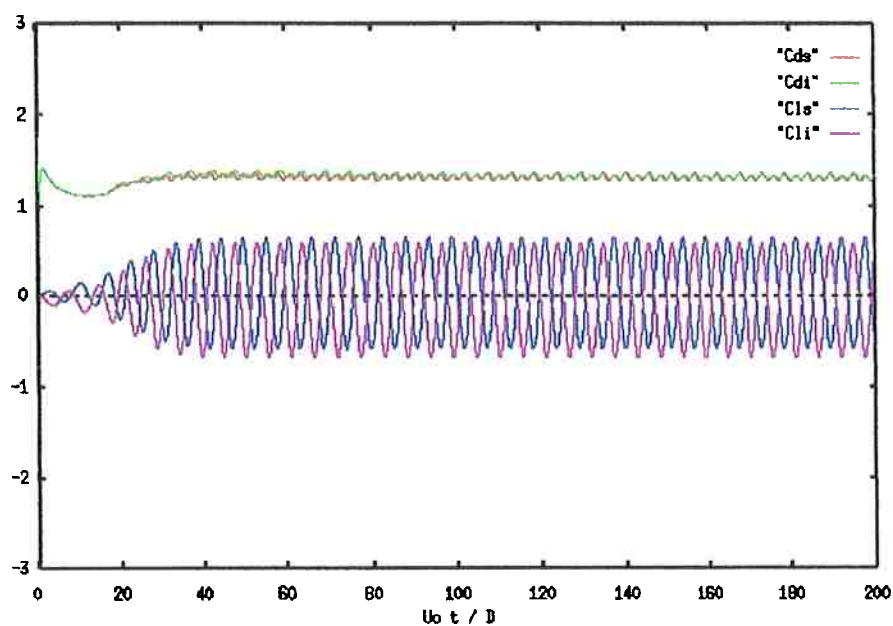


Fig. 12.11 ) Forças para  $T/D = 5.0$  . Subscrito “s” para o cilindro superior, subscrito “i” para o cilindro inferior.  $Cds_{\text{médio}} = Cdi_{\text{médio}} = 1.32$  ,  $Cls_{\text{médio}} = 0.03$  ,  $Cli_{\text{médio}} = -0.03$  .

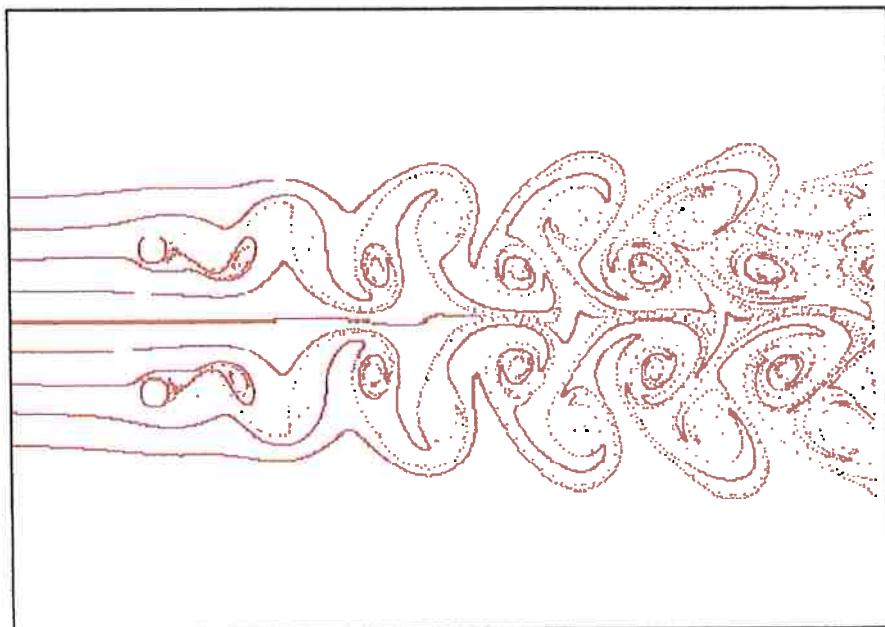


Fig. 12.12 ) Esteira para  $T/D = 5.0$  .

Na tabela 12.1 podemos ver a relação entre os coeficientes de arrasto médios obtidos para os cilindros lado a lado e o coeficiente de arrasto médio obtido para o cilindro isolado. Tais resultados são mostrados no gráfico da fig. 12.13 . Podemos ver que, a medida que a distância  $T/D$  aumenta, a relação entre os coeficientes tende a um . Os maiores valores de amplificação do coeficiente de arrasto foram obtidos para  $T/D=2.0$  e  $T/D = 3.0$  . Conforme pode ser observado na tab. 12.1, o arrasto de cada cilindro sofreu uma amplificação de aproximadamente 13% para ambos os casos.

Tab. 12.1) Relação entre  $C_{d_{agrupamento}}/C_{d_{isolado}}$  .

$T/D$	$C_{d_{agrupamento}}/C_{d_{isolado}}$
1.5	1.06
2.0	1.13
3.0	1.13
4.0	1.08
5.0	1.06

As séries temporais dos coeficientes de sustentação mostradas nas figs. 12.5, 12.7 e 12.9 indicam que à medida que o espaçamento  $T/D$  aumenta há uma sincronização das forças de sustentação com uma fase de aproximadamente  $180^\circ$  . Esta sincronização, associada a uma geração de vórtices em anti-fase, conforme discutido anteriormente e observado em experimentos por WILLIAMSON (1985), nos leva a

conjecturar sobre uma possível sincronização ao longo da envergadura dos cilindros, similar à que ocorre quando temos oscilações transversais de grande amplitude. Logicamente, com simulações bidimensionais não podemos investigar a fundo esta questão, mas esse é um ponto a ser pesquisado futuramente.

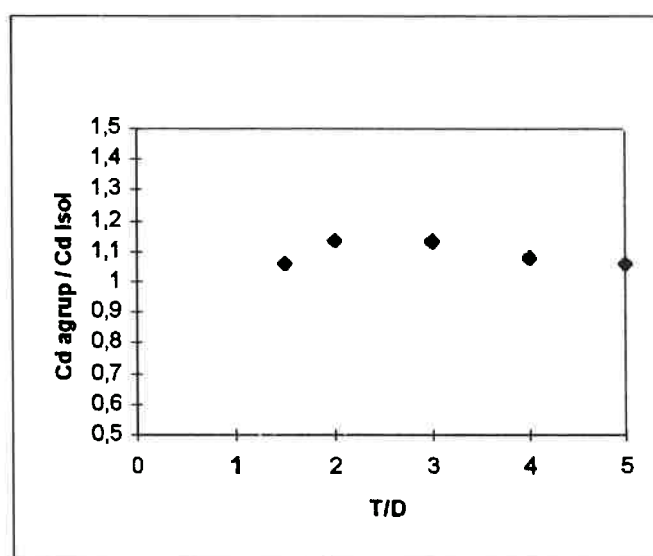


fig. 12.13) Gráfico da relação entre  $Cd_{\text{agrupamento}}/Cd_{\text{isolado}}$

Nas figs. 12.14a a 12.14h podemos ver contornos de vorticidade ao longo do tempo para  $T/D=2.0$ , e nas figs. 12.15a a 12.15h podemos ver contornos de vorticidade para  $T/D=3.0$ . Para o menor espaçamento, a esteira é claramente desorganizada (figs. 12.14a a 12.14h). As séries temporais dos coeficientes de força (fig. 12.5) indicam apenas o efeito de repulsão, já citado, não havendo nenhuma sincronização. Com o aumento do espaçamento para  $T/D=3.0$ , passa a haver sincronização e a formação de duas esteiras em anti-fase (figs. 12.15a a 12.15h). Nessas figuras são mostrados oito quadros, com intervalos de  $1/8$  do período de emissão

de vórtices. No primeiro quadro da série, fig. 12.15a , temos os contornos de vorticidade no instante em que o coeficiente de sustentação do cilindro inferior cruzou o zero a partir de um valor negativo. No quadro da fig. 12.15c, o valor do coeficiente de sustentação é máximo no cilindro inferior, sendo este instante justamente aquele em que o vórtice com circulação horária (azul) está praticamente formado e sendo emitido pelo cilindro inferior.

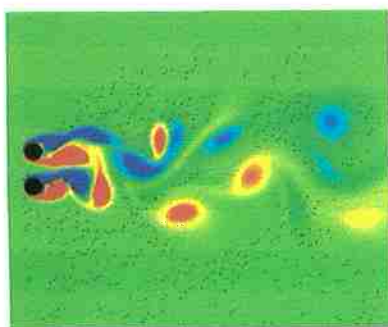


Fig. 12.14a) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $T/D=2.0$ ,  $U_t/D = 66.50$ .

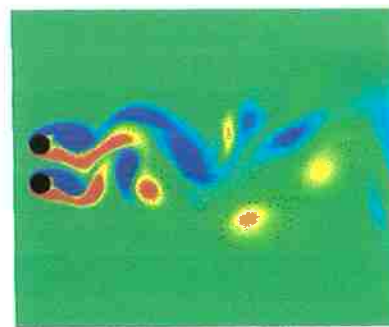


Fig. 12.14b) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $T/D=2.0$ ,  $U_t/D = 69.00$ .

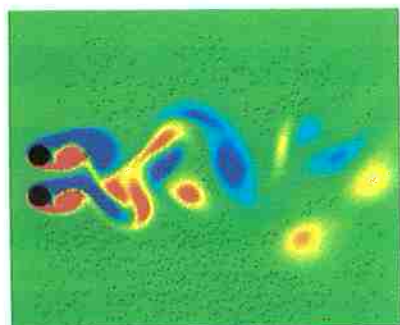


Fig. 12.14c) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $T/D=2.0$ ,  $U_t/D = 71.50$ .

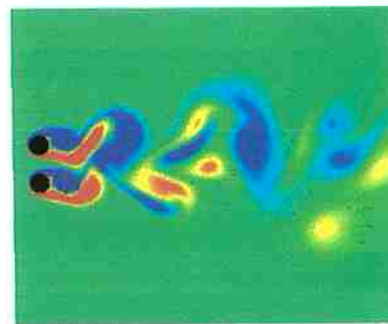


Fig. 12.14d) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $T/D=2.0$ ,  $U_t/D = 74.00$ .

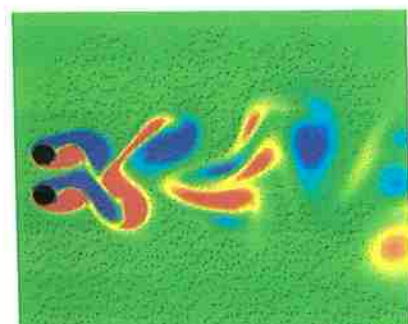


Fig. 12.14e) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $T/D=2.0$ ,  $U_t/D = 76.50$ .

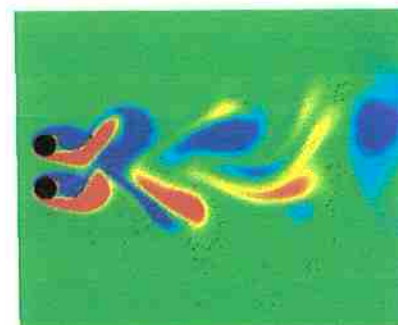


Fig. 12.14f) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $T/D=2.0$ ,  $U_t/D = 79.00$ .

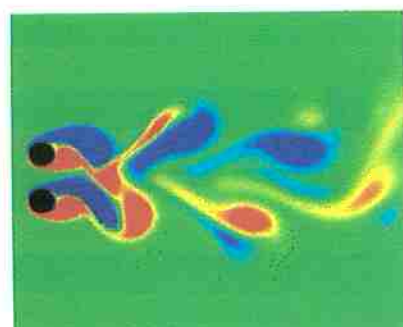


Fig. 12.14g) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $T/D=2.0$ ,  $U_t/D = 81.50$ .

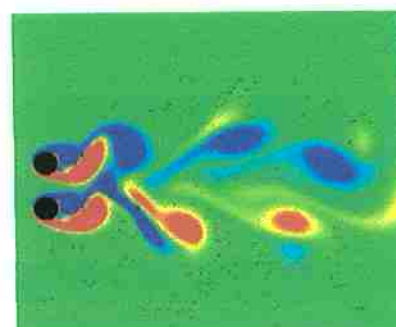


Fig. 12.14h) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $T/D=2.0$ ,  $U_t/D = 84.00$ .

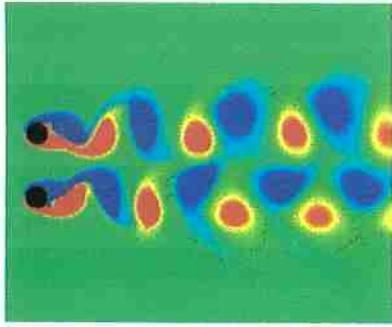


Fig. 12.15a) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $T/D=3.0$ ,  $Ut/D = 186.10$ .

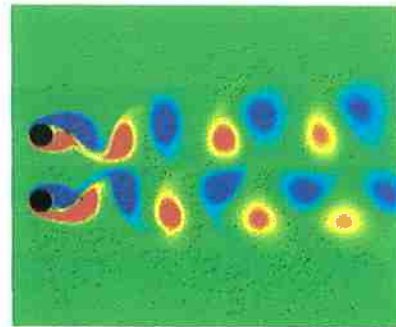


Fig. 12.15b) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $T/D=3.0$ ,  $Ut/D = 186.85$ .

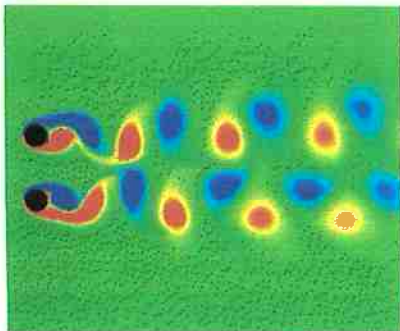


Fig. 12.15c) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $T/D=3.0$ ,  $Ut/D = 187.60$ .

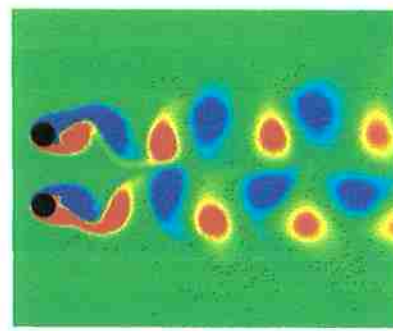


Fig. 12.15d) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $T/D=3.0$ ,  $Ut/D = 188.35$ .

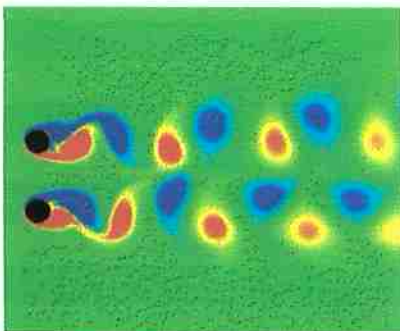


Fig. 12.15e) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $T/D=3.0$ ,  $Ut/D = 189.10$ .

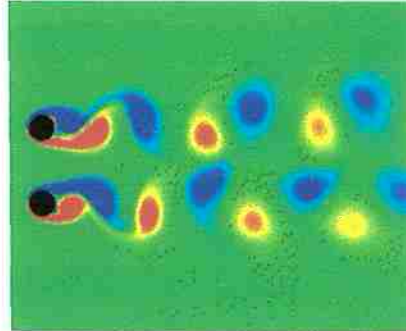


Fig. 12.15f) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $T/D=3.0$ ,  $Ut/D = 189.85$ .

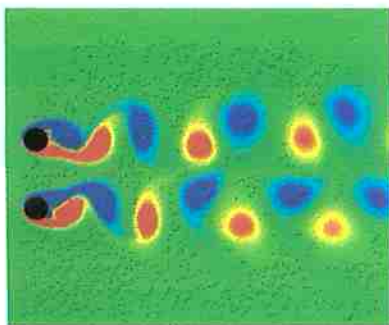


Fig. 12.15g) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $T/D=3.0$ ,  $Ut/D = 190.60$ .

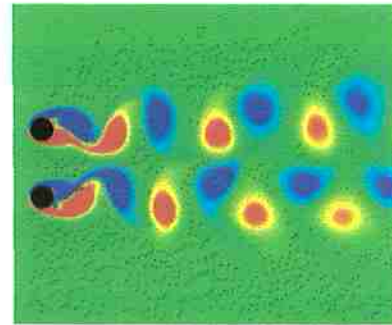


Fig. 12.15h) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $T/D=3.0$ ,  $Ut/D = 191.30$ .



### 13 Resultados obtidos para arranjos de cilindros em *tandem* usando o Método da Resolução por Partes

Neste capítulo apresentamos resultados de simulações realizadas com o método da resolução por partes, para  $Re=200$ , relativas a pares de cilindros em *tandem*. A exemplo daquilo que foi feito no caso dos cilindros lado a lado, o número de  $Re$  das simulações foi mantido baixo para que menos nós e um intervalo de tempo maior pudessem ser usados. Os cilindros tem o mesmo raio  $R = 1$ . O ponto de coordenadas  $(0,0)$  está localizado exatamente no ponto médio da reta que une os centros dos dois cilindros. A malha se estende por  $50 R$  à jusante e  $21.3 R$  à montante do ponto  $(0,0)$ . Na direção vertical, a malha se estende por  $21.3 R$  acima e abaixo desse ponto. Um intervalo de tempo adimensional  $U_0 \Delta t / D = 0.005$  foi usado. A velocidade  $U_0$  é igual a  $1.0$ . O nó mais próximo da parede do cilindro está a uma distância  $0.02 R$  desta. Temos 128 nós sobre a parede de cada cilindro e 100 nós na fronteira externa. Foram realizadas simulações para um espaçamento  $L/D$  entre os cilindros correspondente a  $1.5$ ,  $2.0$ ,  $3.0$ ,  $4.0$  e  $5.0$ . A malha utilizada para a simulação com  $L/D = 1.5$  pode ser vista na fig. 13.1. Tal malha tem 12562 nós e 24770 triângulos. Nas proximidades do cilindro, a malha tem uma distribuição de nós idêntica à mostrada na fig. 7.2. O número de nós e triângulos usados para as simulações com outros espaçamentos  $L/D$  é um pouco diferente, mas as características gerais das malhas são sempre as mesmas.

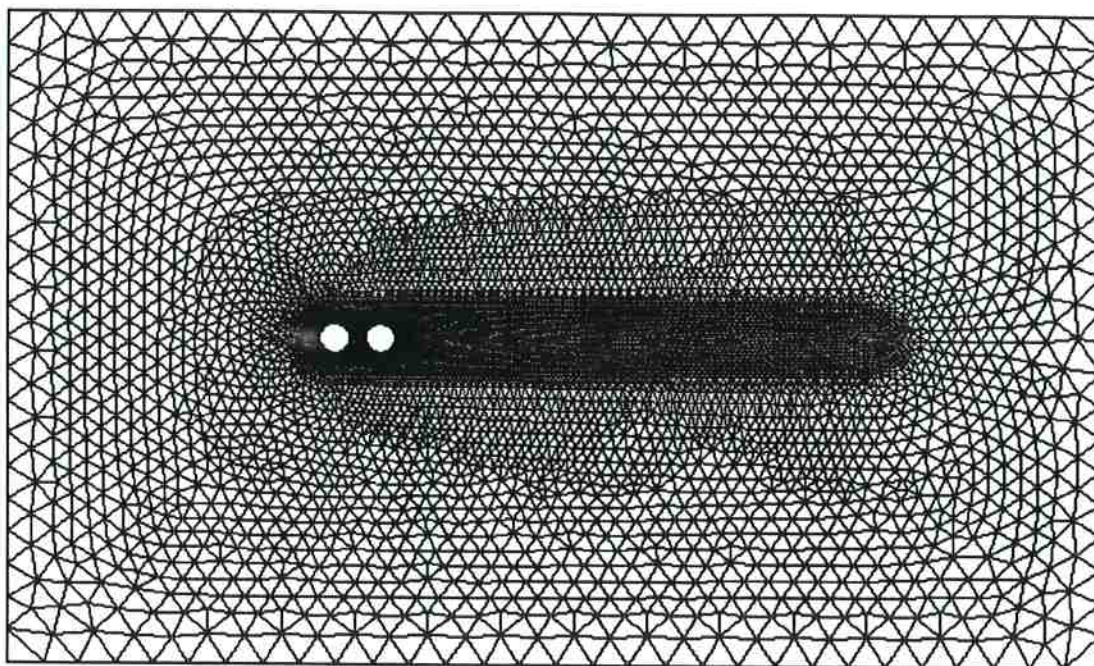


Fig. 13.1) Malha usada para  $L/D = 1.5$ .

Para  $L/D = 1.5$ , 2.0 e 3.0 temos os dois cilindros comportando-se como um único corpo, com a formação de uma esteira de vórtices atrás apenas do cilindro posterior. O coeficiente de arrasto é positivo para o cilindro frontal e negativo para o cilindro posterior, evidenciando a existência de uma força média de atração entre ambos. O arrasto do cilindro posterior tende a ficar menos negativo e a amplitude da oscilação da sustentação tende a aumentar a medida que aumentamos o espaçamento  $L/D$ . Tais resultados estão de acordo com as observações de ZDRAVKOVICH (1987).

Quando aumentamos o espaçamento  $L/D$  de 3.0 para 4.0 ocorre uma sensível alteração no escoamento. Passamos a ter emissão de vórtices a partir também do cilindro frontal. Assim, ambos os cilindros apresentam oscilação na força de sustentação ( com amplitude maior no cilindro posterior ) e o arrasto no cilindro posterior torna-se positivo ( mas , ainda assim, bem menor que no cilindro frontal ). O arrasto no cilindro frontal



também aumenta, de aproximadamente 1.0 para aproximadamente 1.2 . Aumentando a distância  $L/D$  para 5.0 ocorre um aumento do coeficiente de arrasto para ambos os cilindros, sugerindo que maiores aumentos de distância  $L/D$  devem conduzir a um comportamento de cilindro isolado.

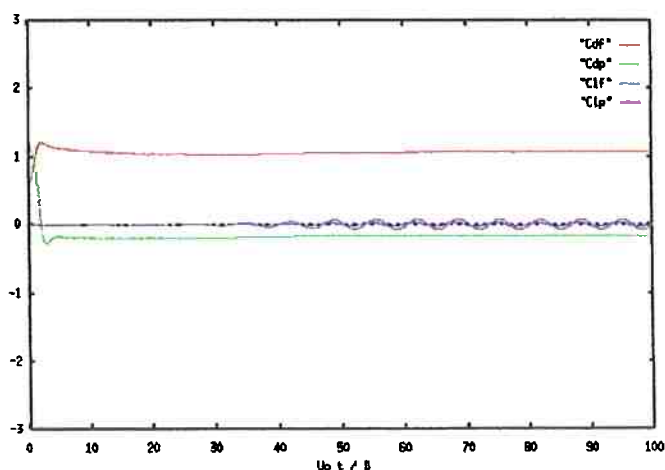


Fig. 13.2 ) Forças para  $L/D = 1.5$  . Subscrito “P” para o cilindro frontal, subscrito “p” para o cilindro posterior.  $Cdf_{\text{m\u00e9dio}} = 1.06$ ,  $Cdp_{\text{m\u00e9dio}} = -0.17$ ,  $Clf_{\text{m\u00e9dio}} = Clp_{\text{m\u00e9dio}} \cong 0$ .

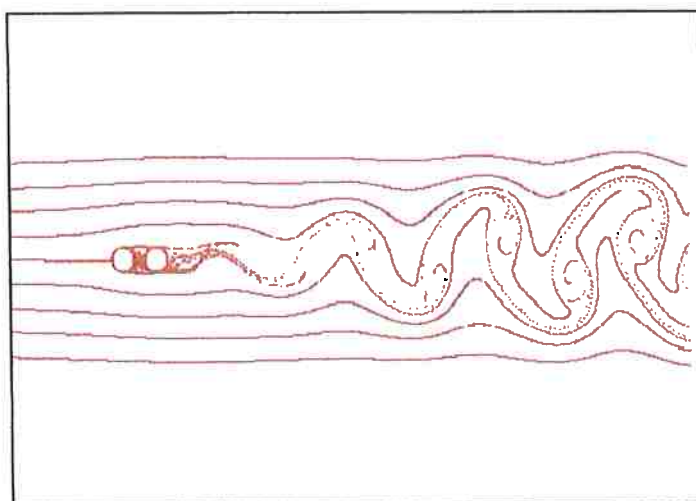


Fig. 13.3 ) Esteira para  $L/D = 1.5$  .

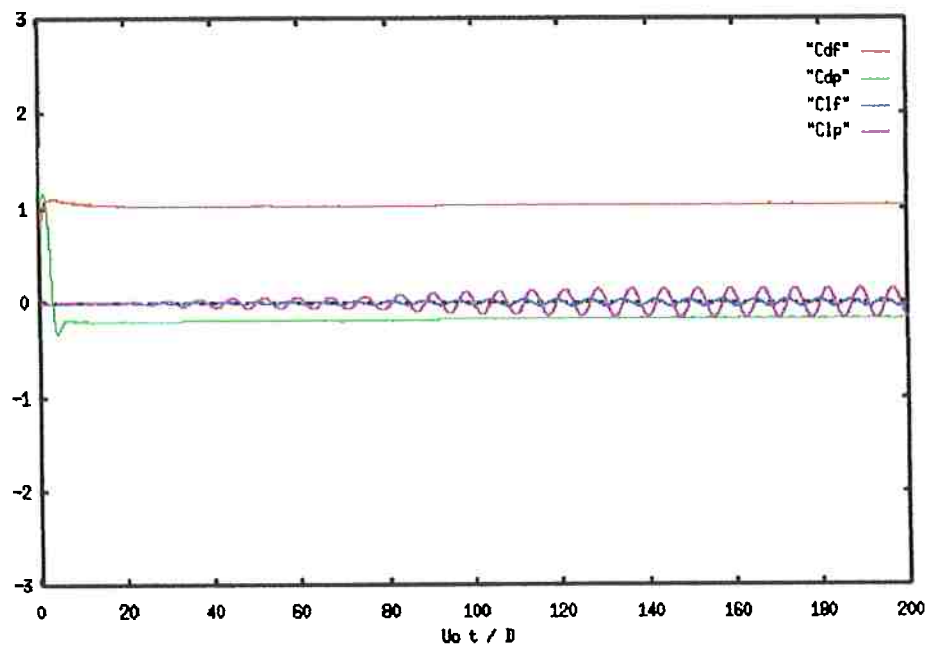


Fig. 13.4 ) Forças para  $L/D = 2.0$  . Subscrito “f” para o cilindro frontal, subscrito “p” para o cilindro posterior.  $Cdf_{\text{médio}} = 1.04$ ,  $Cdp_{\text{médio}} = -0.16$ ,  $Clf_{\text{médio}} = Clp_{\text{médio}} \cong 0$ .

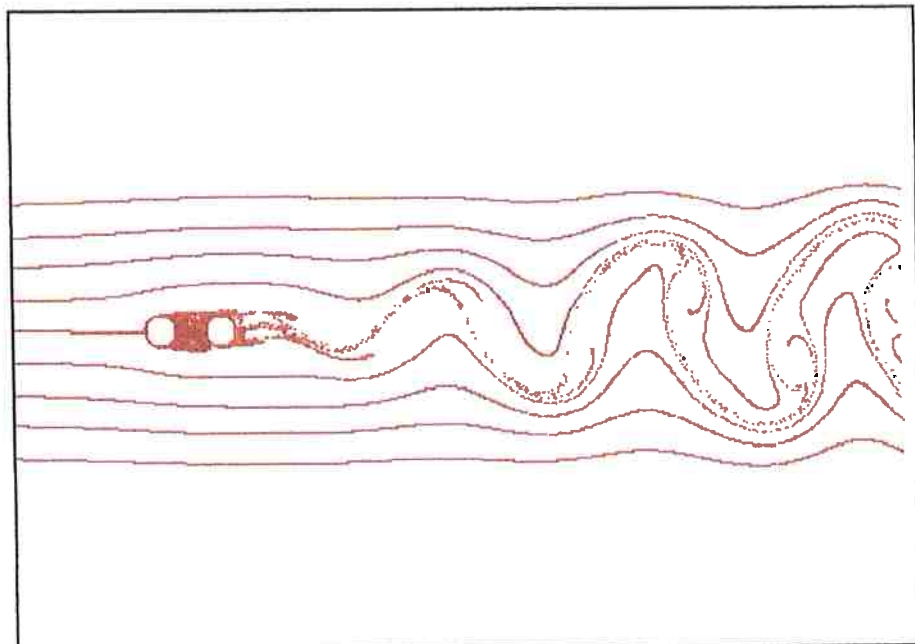


Fig. 13.5 ) Esteira para  $L/D = 2.0$  .

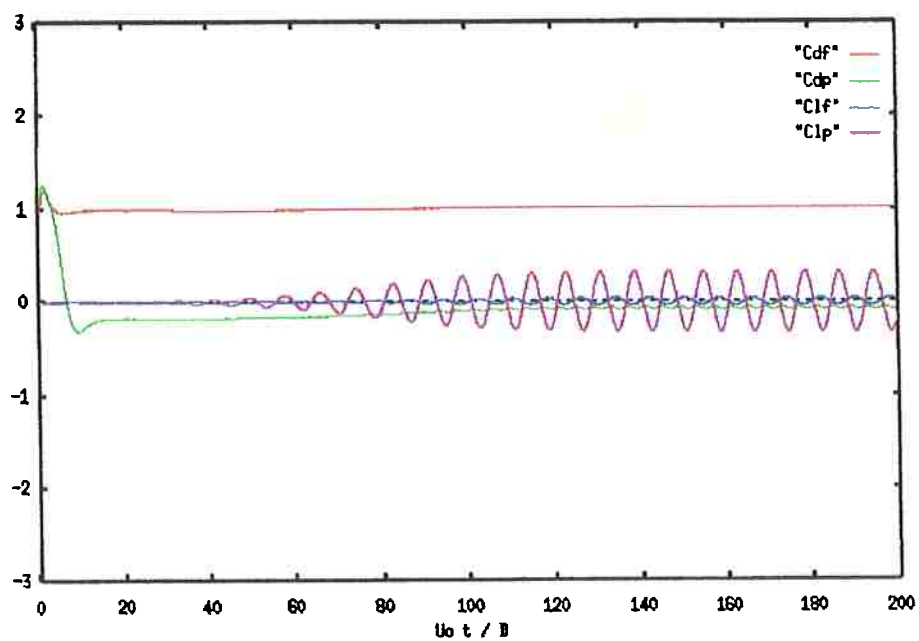


Fig. 13.6 ) Forças para  $L/D = 3.0$  . Subscrito “f” para o cilindro frontal, subscrito “p” para o cilindro posterior.  $C_{df_{\text{médio}}} = 1.01$ ,  $C_{dp_{\text{médio}}} = -0.07$ ,  $Cl_{f_{\text{médio}}} = Cl_{p_{\text{médio}}} \cong 0$ .

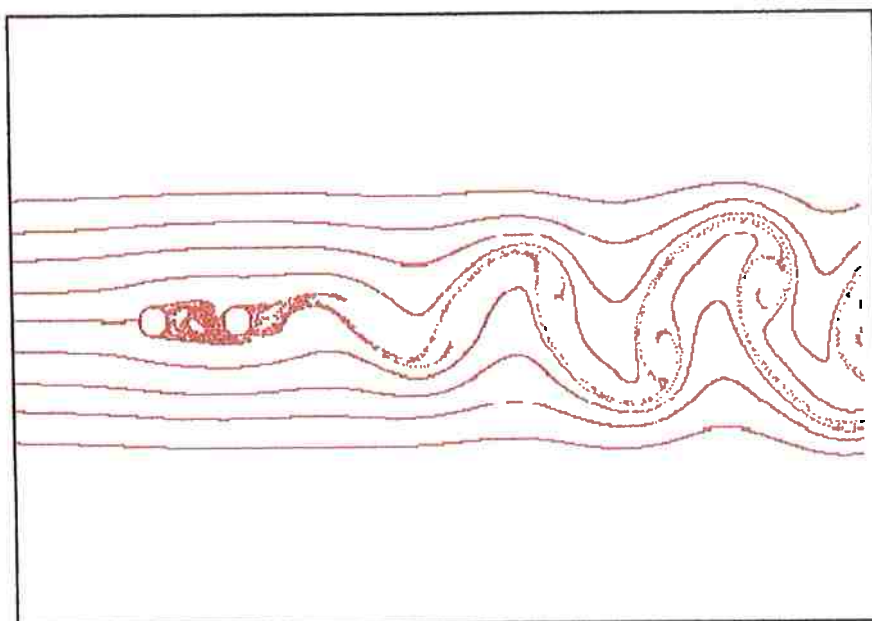


Fig. 13.7 ) Esteira para  $L/D = 3.0$  .

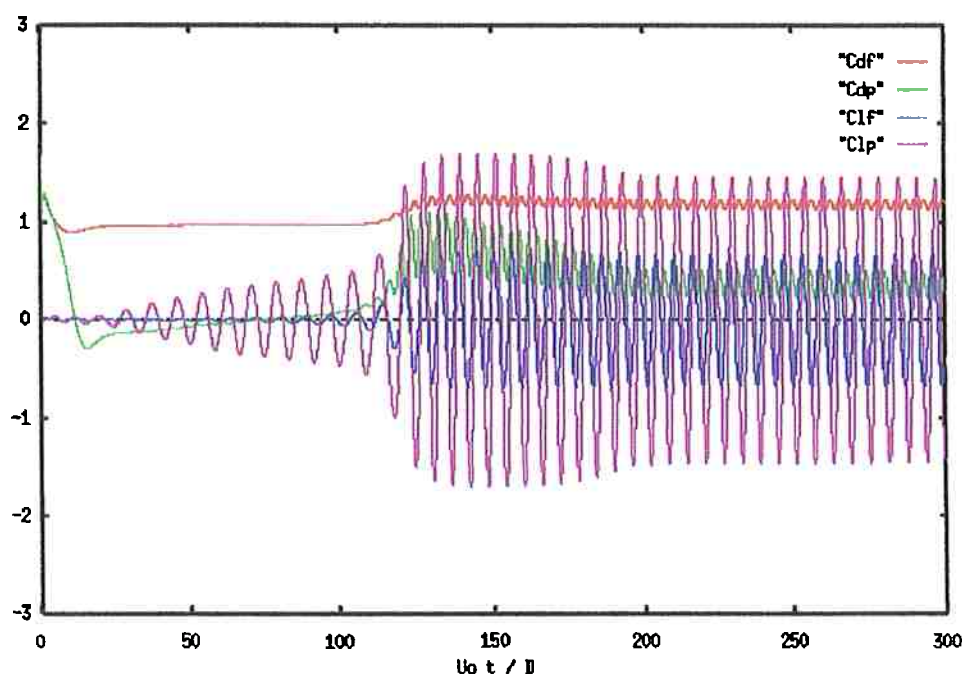


Fig. 13.8 ) Forças para  $L/D = 4.0$  . Subscrito “f” para o cilindro frontal, subscrito “p” para o cilindro posterior.  $Cdf_{\text{médio}} = 1.18$ ,  $Cdp_{\text{médio}} = 0.37$ ,  $Clf_{\text{médio}} = Clp_{\text{médio}} \cong 0$ .

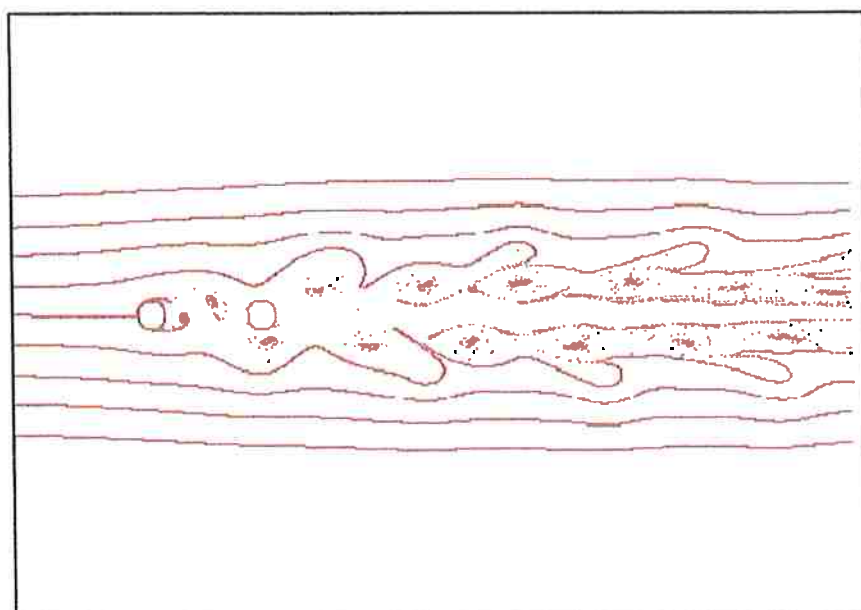


Fig. 13.9) Esteira para  $L/D = 4.0$  .

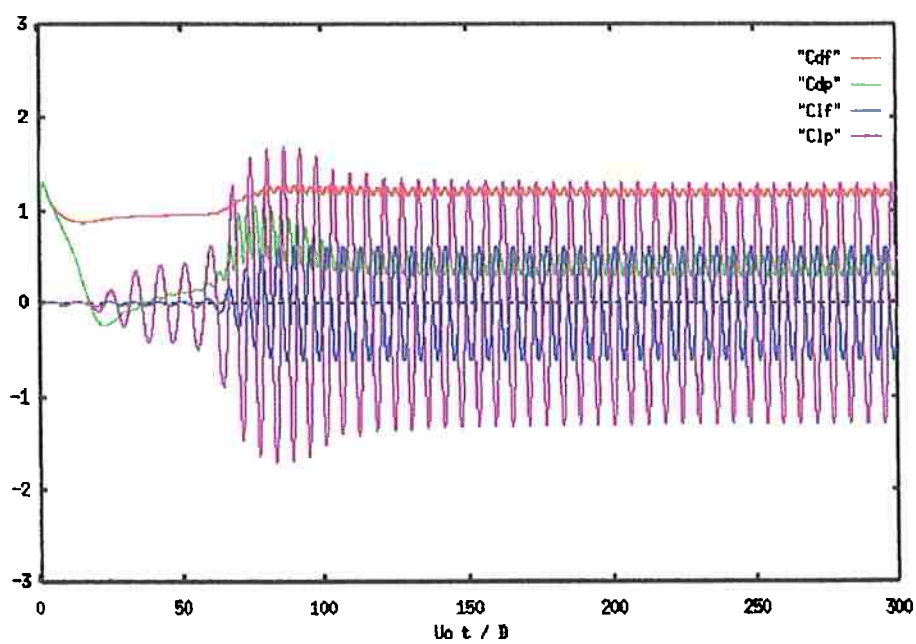


Fig. 13.10 ) Forças para  $L/D = 5.0$  . Subscrito “f” para o cilindro frontal, subscrito “p” para o cilindro posterior.  $Cdf_{\text{médio}} = 1.19$ ,  $Cdp_{\text{médio}} = 0.40$ ,  $Clf_{\text{médio}} = Clp_{\text{médio}} \cong 0$ .

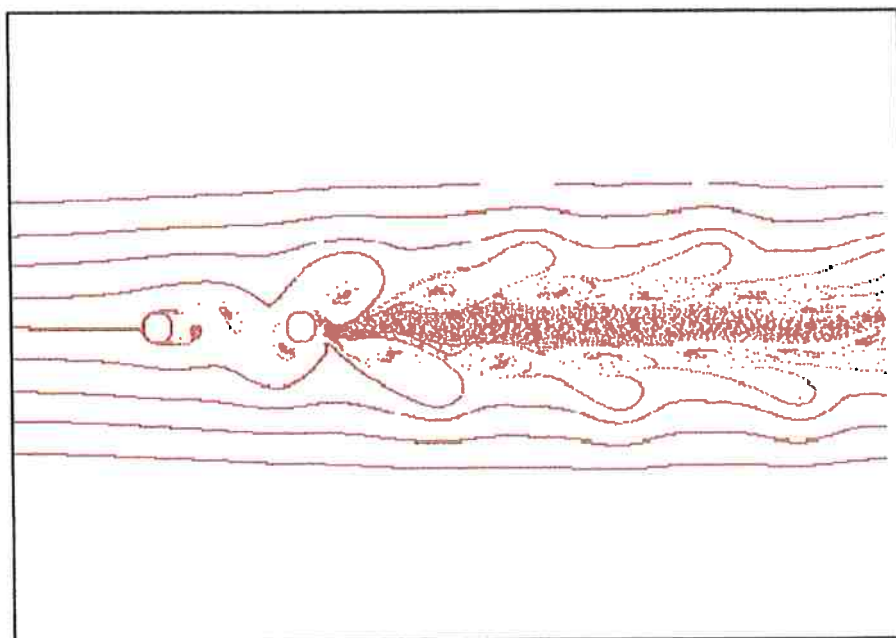


Fig. 13.11 ) Esteira para  $L/D = 5.0$  .

Com os resultados obtidos, estudando-se a relação entre os coeficientes de arrasto dos cilindros e o valor encontrado para um cilindro isolado, o ângulo de fase do coeficientes de sustentação do cilindro posterior em relação ao cilindro frontal e o número de Strouhal, obtivemos os resultados da tabela 13.1:

Tab. 13.1) Características do escoamento ao redor de dois cilindros em *tandem* como uma função de  $L/D$ .

$L/D$	$Cd_p/Cd_{isolado}$	$Cd_p/Cd_{isolado}$	S	$\phi$ (°)
1.5	0.85	-0.14	0.15	-33
2.0	0.83	-0.13	0.13	-90
3.0	0.81	-0.06	0.12	-189
4.0	0.94	0.30	0.16	-59
5.0	0.95	0.32	0.17	-146

Obtivemos para o cilindro posterior coeficientes de arrasto negativos para os casos em que  $L/D = 1.5$ ,  $L/D = 2.0$  e  $L/D = 3.0$ . Através dos contornos de pressão para o caso  $L/D = 3.0$ , verificamos que efetivamente o cilindro posterior, por estar imerso na esteira do cilindro frontal, sofre pressões inferiores na sua frente ( fig. 13.12 ).

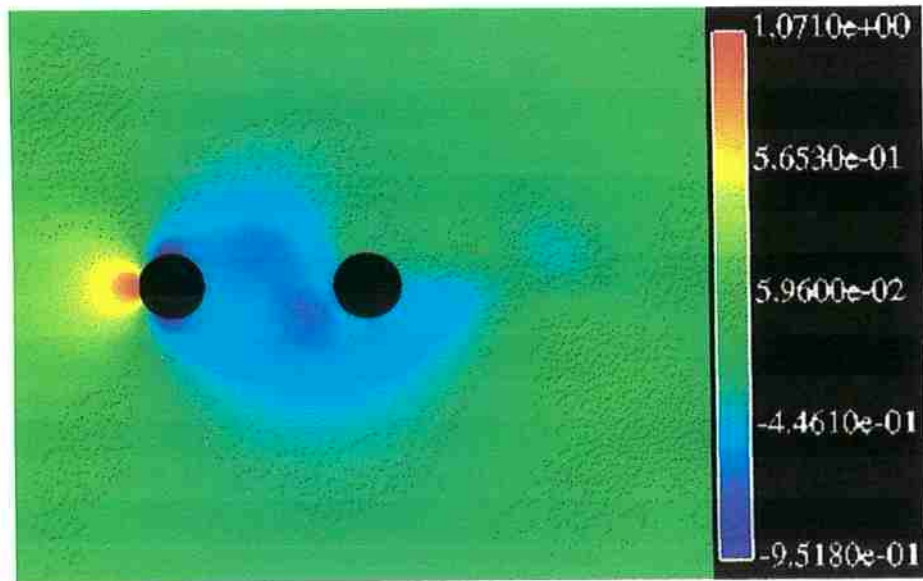


Fig. 13.12) Contornos de pressão  $\frac{P}{\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2}$  para  $L/D = 3.0$ .

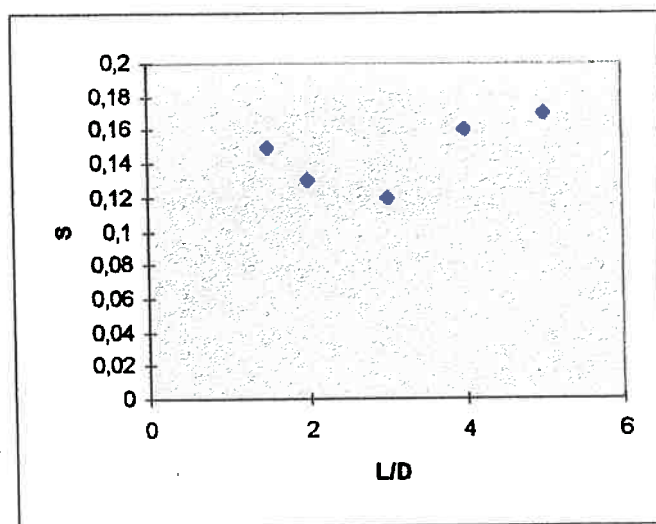


Fig. 13.13) Número de Strouhal  $S$  como uma função de  $L/D$ .

Na fig. 13.13 podemos ver a relação entre o número de Strouhal  $S$  e  $L/D$ . Observamos que, para a escoamento caracterizado por emissão de vórtices apenas do cilindro posterior, o número de Strouhal é decrescente com o valor de  $L/D$ . Quando

temos a transição para o escoamento com emissão de vórtices por ambos os cilindros, ocorre um salto no valor de  $S$ , de 0.12 para 0.16. Observamos também que existe uma sincronização entre os dois cilindros; ambos os coeficientes de sustentação oscilam com a mesma frequência. Porém, nota-se uma diferença de fase do cilindro posterior em relação ao frontal.

Podemos ver, nas figs. 13.14a a 13.14h, contornos de vorticidade para  $L/D=3.0$ , e, nas figs. 13.15a a 13.15h, contornos de vorticidade para  $L/D = 4.0$ . Através desses contornos podemos visualizar as diferenças entre as características dos dois escoamentos. Nas figs. 13.14a a 13.14h podemos ver claramente que o cilindro posterior está imerso na esteira do cilindro frontal. As duas camadas cisalhantes que se separam do frontal interagem de maneira completa apenas após ultrapassarem o posterior. Na fig. 13.14a é possível notar que a camada cisalhante com circulação anti-horária (cor vermelha), na região entre os cilindros, inicia um processo de enrolamento para formar um vórtice. No entanto, na sequência das figuras, verifica-se que essa formação é impedida pela presença do cilindro posterior. De maneira análoga, a fig. 13.14e mostra o mesmo processo ocorrendo para uma camada cisalhante horária (cor azul).

É interessante notar que, para esse espaçamento ( $L/D = 3.0$ ), o enrolamento da camada cisalhante superior ocorre no instante em que um vórtice com circulação anti-horária (cor vermelha) está praticamente formado após o cilindro posterior. Esta análise explica a diferença de fase de aproximadamente  $180^\circ$  entre os coeficientes de sustentação dos dois cilindros, conforme pode ser visto na tab. 13.1.

Aumentando-se o espaçamento entre os cilindros para  $L/D = 4.0$ , ocorre uma mudança total nas características do escoamento. Esta mudança é clara verificando a



queda brusca que ocorre na diferença de fase entre os coeficientes de sustentação ( tab. 13.1 ) . As duas camadas cisalhantes que eram impedidas de interagir e gerar vórtices entre os dois cilindros, passam a fazê-lo ( figs. 13.15a a 13.15h ) . Na fig. 13.15a , podemos observar um vórtice com circulação anti-horária ( cor vermelha ) formado entre os cilindros. No quadro seguinte, após ter sido transcorrido 1/8 do período de emissão de vórtices ( fig. 13.15b ), aquele vórtice choca-se com a parede do cilindro posterior, ocorrendo uma combinação da sua circulação com a circulação da camada limite inferior do corpo (fig. 13.15c ) para formar um novo vórtice com circulação anti-horária elevada, que é emitido a seguir (figs. 13.15e e 13.15f ).Podemos ver que o processo se repete para um vórtice de circulação horária ( cor azul ) .

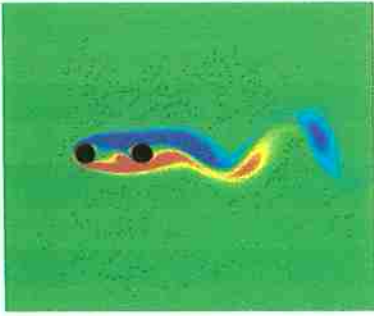


Fig. 13.14a) Contornos de vorticidade  $\omega D/U_0$ ,  $L/D=3.0$ ,  $Ut/D = 180.60$ .

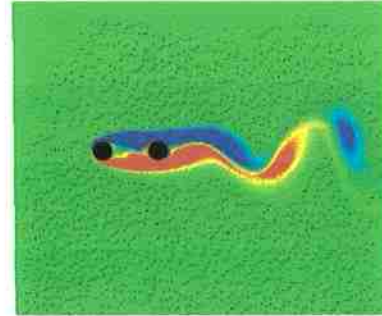


Fig. 13.14b) Contornos de vorticidade  $\omega D/U_0$ ,  $L/D=3.0$ ,  $Ut/D = 181.75$ .

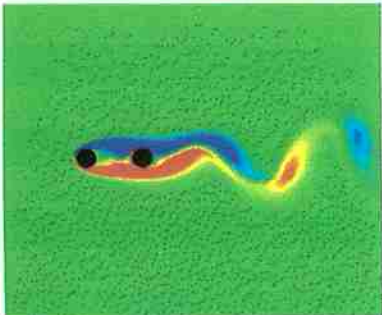


Fig. 13.14c) Contornos de vorticidade  $\omega D/U_0$ ,  $L/D=3.0$ ,  $Ut/D = 182.90$ .

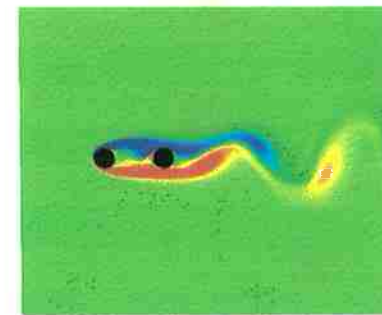


Fig. 13.14d) Contornos de vorticidade  $\omega D/U_0$ ,  $L/D=3.0$ ,  $Ut/D = 183.55$ .

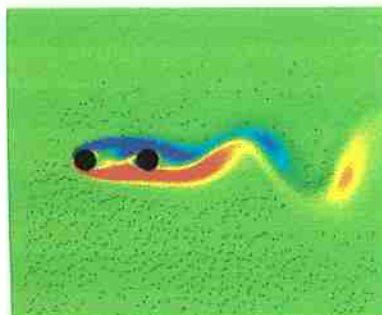


Fig. 13.14e) Contornos de vorticidade  $\omega D/U_0$ ,  $L/D=3.0$ ,  $Ut/D = 184.70$ .

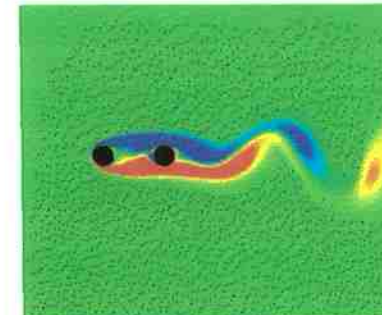


Fig. 13.14f) Contornos de vorticidade  $\omega D/U_0$ ,  $L/D=3.0$ ,  $Ut/D = 185.85$ .

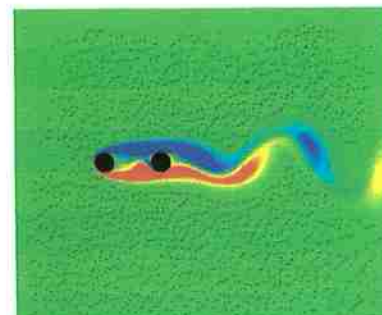


Fig. 13.14g) Contornos de vorticidade  $\omega D/U_0$ ,  $L/D=3.0$ ,  $Ut/D = 187.00$ .

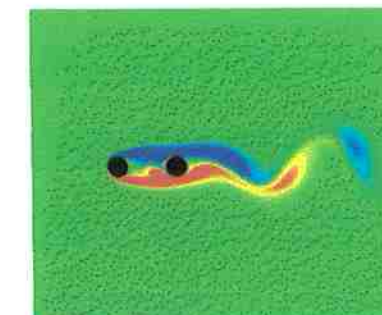


Fig. 13.14h) Contornos de vorticidade  $\omega D/U_0$ ,  $L/D=3.0$ ,  $Ut/D = 188.60$ .

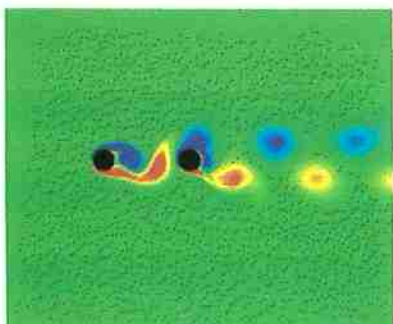


Fig. 13.15a) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $L/D=4.0$ ,  $Ut/D = 267.90$ .

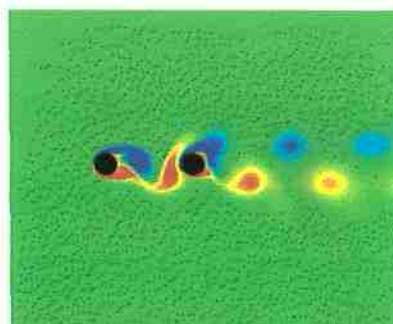


Fig. 13.15b) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $L/D=4.0$ ,  $Ut/D = 268.79$ .

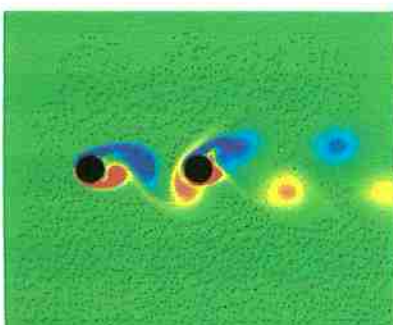


Fig. 13.15c) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $L/D=4.0$ ,  $Ut/D = 269.67$ .

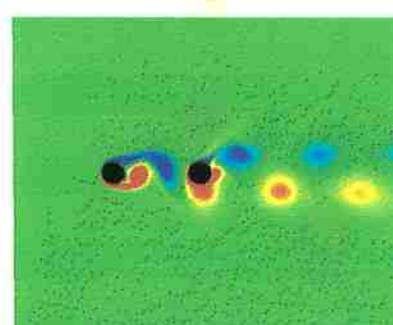


Fig. 13.15d) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $L/D=4.0$ ,  $Ut/D = 270.56$ .

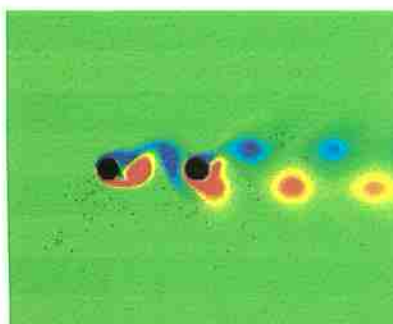


Fig. 13.15e) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $L/D=4.0$ ,  $Ut/D = 271.44$ .

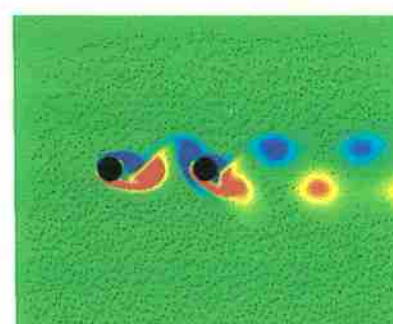


Fig. 13.15f) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $L/D=4.0$ ,  $Ut/D = 272.33$ .

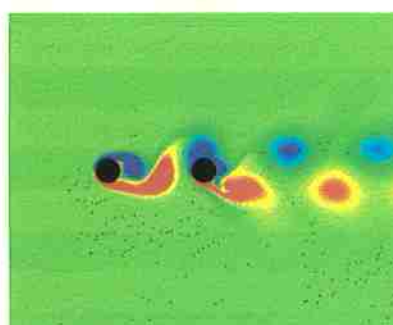


Fig. 13.15g) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $L/D=4.0$ ,  $Ut/D = 273.21$ .

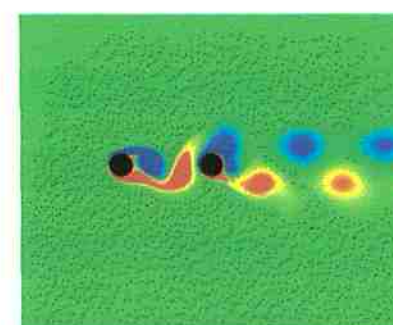


Fig. 13.15h) Contornos de vorticidade  
 $\omega D/U_0$ ,  $L/D=4.0$ ,  $Ut/D = 274.10$ .

## 14 Conclusões

Neste trabalho, procuramos desenvolver uma ferramenta computacional para estudar o escoamento bidimensional ao redor de cilindros, considerando vários casos diferentes: cilindros estacionários em baixo  $N^{\circ}$  de Reynolds , cilindros estacionários em alto  $N^{\circ}$  de Reynolds, cilindros livres para oscilar em alto  $N^{\circ}$  de Reynolds e pares de cilindros em arranjo lado a lado e em *tandem* para baixo  $N^{\circ}$  de Reynolds.

Inicialmente, pensou-se em usar o método dos vórtices discretos na forma híbrida lagrangeana-euleriana proposta por GRAHAM (1988) . Verificou-se , porém, que tal método apresenta duas dificuldades básicas: não conseguimos obter resultados para  $N^{\circ}$ s de Reynolds mais elevados, da ordem de 10000 , e verificamos que a extensão de tal método para três dimensões é complexa.

Parece que a forma como a vorticidade é distribuída dos vórtices discretos para a malha provoca, em altos  $Re$ , algum tipo de difusão numérica que prejudica o cálculo da função de corrente ou das velocidades. Para solucionar tal problema, seria necessário realizar o cálculo das velocidades pela lei de Biot-Savart ou refinar exaustivamente a malha, com óbvios prejuízos em termos de tempo computacional.

A hipotética extensão do método para três dimensões também não seria simples. Em comparação com métodos tradicionais que resolvem o escoamento através do acoplamento pressão-velocidade, o método dos vórtices discretos representa um óbvio desperdício computacional. Enquanto no método da resolução por partes (“*Fractional Step Method*”) resolvem-se, em três dimensões , a cada intervalo de tempo, três equações de convecção-difusão ( uma para cada componente da velocidade ) e uma equação de Poisson para a pressão, no método dos vórtices discretos teríamos que

resolver quatro equações de Poisson ( uma para cada componente da velocidade e uma para a pressão ) , três equações de difusão ( uma para cada componente do vetor vorticidade ) e uma equação de Laplace para o Potencial de Velocidades. Ainda seria preciso realizar a convecção e busca dos vórtices na malha tridimensional, e usar a lei de Biot-Savart ( sempre custosa, do ponto de vista computacional ) para avaliar as velocidades tangenciais nos pontos sobre superfícies sólidas que precisam ser canceladas pelos fluxos de vorticidade. É fácil ver que a implementação do método dos vórtices discretos em 3D seria muito mais custosa e complicada que os métodos mais tradicionais. Além disso, não existe nenhuma forma simples de forçar , em 3D, a condição de divergente nulo do vetor da vorticidade.

O método da resolução por partes das equações de Navier-Stokes mostrou ser muito mais simples que o método dos vórtices discretos híbrido. Retirando totalmente o gradiente de pressão da equação de transporte evitamos a risco da ocorrência, com o arranjo co-localizado , dos campos de pressão oscilatórios descritos por PATANKAR (1980) e MALISKA (1995). A interpolação híbrida bilinear-parabólica desenvolvida neste trabalho mostrou ser capaz de minimizar a difusão numérica e mostrou-se estável para altos  $Re$  .

Para as simulações realizadas para  $Re = 10000$  , o método da Resolução por Partes forneceu resultados que qualitativamente são muito superiores aos obtidos com o método dos vórtices discretos. Porém, obtivemos um coeficiente de arrasto muito elevado. Aparentemente as tridimensionalidades são muito importantes para que uma simulação bidimensional produza resultados quantitativamente corretos.

Quanto a simulação de turbulência, verifica-se que a utilização de Simulação dos Grandes Vórtices ( "*Large Eddy Simulation*", ou LES ) é mais simples que a

implementação de modelos com equações de transporte como o k- $\epsilon$ . Porém, LES tem um custo computacional elevado, o que só viabiliza sua utilização, no presente momento, para Re da ordem de  $10^4$  a  $10^5$ . A utilização do modelo de Smagorinsky, com o uso da função de Van Driest, permitiu a reprodução das principais características do escoamento que eram esperadas para Re=10000, embora o coeficiente de arrasto obtido tenha sido alto (na realidade, não observamos diferenças sensíveis em relação à simulação realizada sem modelagem de turbulência). A máxima viscosidade turbilhonar obtida na esteira foi da ordem de quarenta e oito vezes a viscosidade molecular. Porém, uma melhor avaliação das possibilidades do uso de LES na simulação de escoamentos turbulentos só será possível com a implementação de algoritmos capazes de fazer a simulação em três dimensões.

Para o caso do cilindro livre para oscilar em alto Re esperava-se que simulações bidimensionais produzissem bons resultados, pois observa-se experimentalmente que altas amplitudes de oscilação aumentam a correlação da esteira ao longo do comprimento do cilindro. Assim, decidimos realizar simulações para Re = 10000 usando LES. No entanto, obtivemos amplitudes de oscilação bem abaixo dos valores esperados na faixa de sincronização. Também não observamos nenhum fenômeno ligado à histerese. Resultados recentes, obtidos por NEWMAN e KARNIADAKIS (1997) parecem indicar que as tridimensionalidades do escoamento são importantes. Para simulações bidimensionais esses autores obtiveram uma amplitude máxima de oscilação  $y/D = 0.6$ , semelhante aos nossos resultados, enquanto para simulações 3D obtiveram uma amplitude máxima  $y/D = 1.0$ .

Assim, decidimos, em função da tridimensionalidade do escoamento para Re altos, realizar as simulações dos pares de cilindros em arranjos lado a lado e *tandem*



para  $Re = 200$ . Para o arranjo lado a lado, observamos sempre o aparecimento de uma força de repulsão entre os cilindros. Para  $T/D$  acima de 2.0 observamos o aparecimento de esteiras em anti-fase, e para  $T/D$  igual ou abaixo de 2.0 observamos o aparecimento do fenômeno de "flopping". Porém, observamos que tal fenômeno, em nossas simulações, ocorreu com uma escala de tempo muito baixa, quando, na realidade, sua escala de tempo é da ordem de mil vezes a escala de tempo de emissão de vórtices. Assim, deveríamos ter observado apenas o aparecimento de uma esteira defletida na direção de um dos dois cilindros. É provável que, se a simulação continuasse por um longo tempo, observássemos tal comportamento. Porém, em termos de tempo real de simulação, seria preciso realizar cálculos ininterruptos por meses, o que seria inviável. O estudo do fenômeno de "flopping" é algo que não está ao alcance dos métodos computacionais no presente.

Para o arranjo *tandem* obtivemos resultados que corroboram as observações experimentais. Observamos o aparecimento de uma força de arrasto negativa no cilindro posterior para  $L/D$  abaixo de 4.0 e de uma força de arrasto positiva para  $L/D$  igual ou superior a 4.0. Para  $L/D$  abaixo de 4.0, verificamos que ocorre emissão de vórtices apenas a partir do cilindro posterior, ao passo que para  $L/D$  acima de 4.0, vórtices emitidos pelo cilindro frontal chocam-se com o cilindro posterior e ajudam a formar os vórtices que se destacam deste. Observa-se também que ocorre um salto no valor do  $N^{\circ}$  de Strouhal, de 0.12 para 0.16, quando passamos de  $L/D=3.0$  para  $L/D=4.0$ .

Devemos destacar que, através de simulações computacionais, foi possível estudar em detalhes as características dos vários escoamentos analisados, obtendo informações sobre campos de pressão e vorticidade e traçando contornos de tais grandezas. Segundo PATANKAR (1980), essa é uma das principais vantagens (e

justificativas ) da utilização de técnicas computacionais . A obtenção de informações detalhadas sobre o campo de escoamento é muito difícil de ser realizada através de métodos experimentais. Visualizações mais detalhadas do escoamento só são possíveis, através de métodos experimentais, usando técnicas muito sofisticadas e , atualmente, ainda extremamente caras , como PIV (*Particle Image Velocimetry*), usada por SUMNER et al (1998) para estudar o caso dos pares de cilindros arranjados lado a lado.

Os resultados obtidos neste trabalho indicam que mais esforço deve ser despendido no sentido de desenvolver softwares para Dinâmica dos Fluidos Computacional com o objetivo de fazer a simulação do escoamento ao redor de corpos submersos. Aparentemente, apenas com programas capazes de fazer a simulação 3D do escoamento resultados mais conclusivos serão obtidos. No entanto, é preciso considerar que simulações tridimensionais para altos  $Re$  tornarão necessárias malhas muito finas e com um número elevadíssimo de nós. A maior parte das simulações desta tese foi realizada em máquinas DIGITAL AlphaStation modelos 4 e 5, de 266 MHz e por volta de 500 Mbytes de RAM. O tempo real para as diferentes simulações bidimensionais realizadas, para obter por volta de vinte ciclos de emissão de vórtices, variou de oito horas, no caso do escoamento com  $Re = 200$  ao redor de um único cilindro, até por volta de quarenta horas, no caso do escoamento com  $Re = 10000$  ao redor de um único cilindro, ou mesmo por volta de cinquenta horas para alguns casos de pares de cilindros com  $Re=200$  . É fácil ver que simulações 3D serão extremamente demoradas, a não ser que máquinas muito mais poderosas sejam usadas.

Como sugestão para futuras pesquisas, verificamos que , acima de tudo, é necessário desenvolver programas para a resolução de escoamentos tridimensionais. Tais programas devem ser muito úteis para realizar simulações 3D de cilindros livres



para oscilar, e também para verificar se, em agrupamentos de cilindros, ocorre sincronização do escoamento ao longo da envergadura dos corpos, com o escoamento deixando de ser tridimensional. Outra área interessante para o desenvolvimento de futuras pesquisas é a modelagem de turbulência, uma vez que tal fenômeno deve ser importante para altos números de Reynolds ( $Re > 10^5$ ). Valores de  $Re$  nesta faixa são normalmente encontrados em casos práticos de escoamento ao redor de elementos cilíndricos de plataformas de extração de petróleo.

## Referências Bibliográficas

- ANAGNOSTOPOULOS, P. Numerical solution for laminar two-dimensional flow about a fixed and transversely oscillating cylinder in a uniform stream. **Journal of Computational Physics**, vol. 85, N° 2, December 1989.
- ANAGNOSTOPOULOS, P.; BEARMAN, P.W. Response characteristics of a vortex-excited cylinder at low Reynolds numbers. **Journal of Fluids and Structures**, N° 6, pp. 39-50, 1992.
- ARIE, M.; KIYA, M.; MORIYA, M.; MORI, H. Pressure fluctuations on the surface of two circular cylinders in tandem arrangement. **ASME Journal of Fluids Engineering**, vol. 105, pp. 161-167, June 1983.
- ARKELL, R.H. **Wake Dynamics of Cylinders Encountering Free Surface Gravity Waves.** PhD thesis, Department of Aeronautics, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, 1995.
- BALIGA, B.R.; PATANKAR, S.V. A Control Volume Finite-Element Method for Two-Dimensional Fluid Flow and Heat Transfer. **Numerical Heat Transfer**, vol.6, pp. 245-261, 1983.
- BATCHELOR, G.K. **An Introduction to Fluid Dynamics.** Cambridge University Press, 1967.
- BEARMAN, P.W. ; WADCOCK, A.J. The interaction between a pair of circular cylinders normal to a stream. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 61, pp 499-511, 1973.
- BLEVINS, R.D. **Flow-Induced Vibration.** Van Nostrand Reinhold, New York, second edition, 1990.
- BORTHWICK, A. Comparison between two finite-difference schemes for computing the flow around a cylinder. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 6, pp. 275, 1986.
- BRAZA, M.; CHASSAING, P.; HA MINH Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 165, pp 79-130 , 1986.
- BRIKA, D.; LANEVILLE, A. Vortex-induced vibrations of a long flexible circular cylinder. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 250, pp.481-508, 1993.

- BRIKA, D.; LANEVILLE, A. Wake interference between two circular cylinders. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 72, pp. 61-70, 1997.
- CLEMENTS, R.R. An Inviscid Model of Two-dimensional Vortex Shedding. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 57, part 2, pp 321-336, 1973.
- CHORIN, A.J. Numerical Study of slightly viscous flow. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 57, pp 785-796, 1973.
- CHRISTIANSEN, J.P. Numerical simulation of hydromechanics by the method of point vortices. **Journal of Computational Physics**, 13, pp. 363-379, 1973.
- ESFAHANI, A.S. **Numerical Study of laminar, transitional and turbulent flow past rectangular cylinders.** PhD Thesis, Chalmers University of technology, Goteborg, Sweden, 1998.
- FENG, C.C. **The measurement of vortex-induced effects in flow past stationary and oscillating circular and D-section cylinders.** M.A.Sc. Thesis, University of British Columbia, 1968.
- FERZIGER, J.H.; PERIC, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**, Springer, Berlin 1996.
- FUJARRA, A.C. **Estudo em modelo reduzido de tubo, flexível e liso, submetido ao fenômeno de vibração induzida pela emissão de vórtices.** Dissertação apresentada à Escola Politécnica da USP para obtenção do título de mestre em Engenharia. São Paulo, 1997.
- GERRARD, J.H. The mechanics of the formation region of vortices behind bluff-bodies. **Journal of Fluid Mechanics**, vol.25, part 2, pp 401-413.
- GRAHAM, J.M.R. Computation of Viscous Separated Flow Using a Particle Method. **Numerical Methods in Fluid Mechanics**, vol. 3, Oxford University Press, pp 310-317, 1988.
- GREENGARD, C.A. The Core Spreading Vortex Method Approximates the Wrong Equation. **Journal of Computational Physics**, vol.61, pp 345-348, 1985.
- KHALAK, A.; WILLIAMSON, C.H.K. **Dynamics of a Hydroelastic Cylinder with Very Low Mass and Damping.** Artigo submetido ao Journal of Fluids & Structures ( ainda não publicado ), 1996.
- KIM, H.J.; DURBIN, P.A. Investigation of the flow between a pair of circular cylinders in the flopping regime. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 196, pp. 431-448, 1988.

- LAM, K.; LO, S.C. A visualization study of cross-flow around four cylinders in a square configuration. **Journal of Fluids and Structures**, N° 6, pp. 109-131, 1992.
- LIGHTHILL, J. Fundamentals concerning wave loading on offshore structures. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 173, pp. 667-681, 1986.
- LEONARD, B.P. A stable and accurate convection modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. **Comp. Methods in Applied Mechanical Engineering**, vol. 19, pp. 59-98, 1979.
- LU, X.; DALTON, C.; ZHANG, J. Application of large eddy simulation to flow past a circular cylinder. **ASME journal of offshore mechanics and arctic engineering**, vol. 119, pp. 219-225, November 1997.
- MAJUNDAR, S.; RODI, W.; ZHU, J. Three-dimensional finite-volume method for incompressible flows with complex boundaries. **ASME journal of fluids engineering**, vol. 114, pp. 496-503, December, 1992.
- MALISKA, C.R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1995.
- MARTINS, R.S. **Simulação Numérica de escoamentos Através do Método de Elementos Finitos Baseado em Volumes de Controle**. Rio de Janeiro, 1996. Dissertação ( Mestrado ), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- MELING, T.S.; DALHEIM, J. Numerical prediction of the response of a vortex-excited cylinder at low Reynolds numbers, **Proc. of the 7th International Offshore and Polar Engineering Conference**, Honolulu, USA, 1997.
- MENEGHINI, J.R. **Numerical Simulation of Bluff Body Flow Control Using a Discrete Vortex Method**. PhD thesis, Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, 1993.
- MITTAL, S.; KUMAR, V.; RAGHUVANSHI, A. Unsteady incompressible flows past two cylinders in tandem and staggered arrangements. **International Journal for Numerical Methods in fluids**, vol 25, pp 1315-1344, 1997.
- MOCHIDA, A; MURAKAMI, S.; RODI, W.; SAKAMOTO, S. Comparison between two dimensional LES, DSM, k- $\epsilon$  and experimental results on vortex shedding from a rectangular cylinder. **Proc. 6th Symp. On Numerical Fluid Mechanics**, pp 277-280 ( em japonês ), 1992.
- MURAKAMI, S.; MOCHIDA, A. On turbulent vortex shedding past 2D square cylinder predicted by CFD. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 54/55, pp. 191-211, 1995.

- MURAKAMI, S.; MOCHIDA, A.; SAKAMOTO, S. CFD analysis of wind-structure interaction for oscillating square cylinders, . **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 72, pp. 33-46, 1997.
- NAGANO, S.; NAITO, M.; TANAKA, H. A Numerical Analysis of Two-dimensional Flow past a Rectangular Prism by a Discrete Vortex Model. **Computers and Fluids**, vol. 10 , N° 4, pp 243-259, 1982.
- NEWMAN, D.J.; KARNIADAKIS, G.E. A direct numerical simulation study of flow past a freely vibrating cable. **Journal of Fluid Mechanics**, vol.344, pp.95-136, 1997.
- NG, C.W.; KO, N.W.M. Flow interaction behind two circular cylinders of equal diameter - a numerical study. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 54/55, pp. 277-287, 1995.
- OKAJIMA, A. Numerical analysis of the flow around na oscillating cylinder. **Flow Induced Vibration**, edited by P.W. Bearman, Balkema, Rotterdam, 1995.
- PANTON, R.L. **Incompressible Flow**, John Wiley & Sons, second edition, 1996.
- PARK, W.C.; HIGUCHI, H. **Computation of Flow past Single and Multiple Bluff Bodies by a Vortex Tracing Method**. Report, St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory , University of Minnesota, March 1989.
- PARRA, P.H.C.C. **Modelo semi-empírico de vibrações induzidas por vortex shedding - análise teórica e experimental**. Dissertação apresentada à Escola Politécnica da USP para obtenção do título de mestre em Engenharia. São Paulo, 1996.
- PATANKAR, S.V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- PERAIRE, J.; MORGAN, K.; PEIRO, J. **Unstructured Mesh Methods for CFD**. I.C. Aero Report 90-04, Imperial College of Science , Technology & Medicine, Department of Aeronautics, June 1990.
- PIOMELLI, U. Large-Eddy and direct simulation of turbulent flows, **Introduction to the modelling of turbulence**, Lecture Series 1997-03, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, March 17-21 , 1997.
- PUCKETT, E.G. The random vortex method with vorticity creation: introduction and guide to parameter selection. **Lectures in Applied Mathematics**. V. 28, pp 567 -584, American Mathematical Society, 1991.
- RHIE, C.M.; CHOW, W.L. A numerical study of the turbulent flowpast an isolated airfoil with trailing edge separation. **AIAA journal**, vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.

- ROACHE, P.J. **Computational Fluid Dynamics**. Hermosa Publishers, 1982.
- RODI, W. Comparison of LES and RANS calculations of the flow around bluff bodies, **Progress in Bluff Body Aerodynamics**, Proc. of the 3rd Int. Colloquium on Bluff Body Aerodynamics and Applications, Blacksburg, VA, USA, 1996.
- ROSHKO, A. Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds numbers. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 10, pp. 354, 1961.
- SA, J.Y.; CHANG, K.S. Shedding patterns of the near-wake vortices behind a circular cylinder. **Int. Journal for Num. Methods in Fluids**, vol. 12, pp. 463-474.
- SARPKAYA, T. Computational Methods with Vortices - The 1988 Freeman Scholar Lecture. **ASME Journal of Fluids Engineering**, vol. 111, pp 5-52, March 1989.
- SCHLICHTING, H. **Boundary-layer theory**, 7th edition, McGraw-Hill Books Company, 1978.
- SCHMIDT, F.W.; HENDERSON, R.E.; WOLGEMUTH, C.H. **Introdução às Ciências Térmicas**. Tradução de 2ª edição americana, Editora Edgard Blucher LTDA. , 1996.
- SELVAM, R.P. Finite element modelling of flow around a circular cylinder using LES. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 67/68, pp. 129-139, 1997.
- STAUBLI, T. Calculation of the vibration of na elastically mounted cylinder using experimental data from forced oscillation. **ASME Journal of Fluids Engineering**, vol. 105, pp. 225-229, June 1983.
- SPALART, P.R.; LEONARD, A. **Computation of Separated Flows by a Vortex Algorithm**. AIAA Paper 81-1246, 1981.
- SUMNER, D.; PRICE, S.J.; PAÏDOUSSIS, M.P. Investigation of side-by-side circular cylinders in steady cross-flow by Particle Image Velocimetry, **Proc. of the 1998 ASME Fluids Eng. Division Summer Meeting (FEDSM 98)**, 1998.
- TAMURA, T.; ITOH, Y.; WADA, A.; KUWAHARA, K. Numerical study of pressure fluctuations on a rectangular cylinder in aerodynamic oscillation, **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 54/55, pp. 239-250, 1995.
- TOME, M.F.; McKEE, S. GENSMAC: A computational marker and cell method for free surface flows in general domains. **Journal of Computational Physics**, N° 110, pp. 171-186, 1994.

TRITTON, D.J. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 6, pp. 547-567, 1959.

WEAVER, D.S.; FITZPATRICK, J.A. A review of cross-flow induced vibrations in heat exchanger tube arrays. **Journal of Fluids and Structures**, N° 2, pp. 73-93, 1988.

WILLIAMSON, C.H.K. Evolution of a single wake behind a pair of bluff bodies. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 159, pp. 1-18, 1985.

WILLIAMSON, C.H.K.; ROSHKO, A. Vortex Formation in the wake of an oscillating cylinder. **Journal of Fluids and Structures**, N° 2, pp. 355-381, 1988.

WILLIAMSON, C.H.K. 2-D and 3-D aspects of the wake of a cylinder, and their relation to wake computations, **Vortex Dynamics and Vortex method**, Proc. AMS-SIAM Conference, pp.719-751, 1991.

WU, J.C. Theory for aerodynamic force and moment in viscous flows. **AIAA Journal** vol. 19, N° 4, 1980.

ZDRAVKOVICH, M.M. Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangements. **ASME Journal of Fluids Engineering**, vol. 99, pp. 618-633, December, 1977.

ZDRAVKOVICH, M.M. The effects of interference between circular cylinders in cross flow. **Journal of Fluids and Structures**, N° 1, pp. 239-261, 1987.

ZHANG, J.; DALTON, C. Interactions of vortex-induced vibrations of a circular cylinder and a steady approach flow at a Reynolds number of 13,000. **Computers and Fluids**, vol. 25, n° 3, pp 283-294, 1996.