

FLÁVIO CELSO TRIGO

**ESTIMAÇÃO NÃO LINEAR DE PARÂMETROS ATRAVÉS  
DOS FILTROS DE KALMAN NA TOMOGRAFIA POR  
IMPEDÂNCIA ELÉTRICA**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção do  
título de Doutor em Engenharia

Área de Concentração:  
Engenharia Mecânica

Orientador:  
Prof. Dr. Raul Gonzalez Lima

São Paulo  
2005

*Dedico este trabalho a meus pais, Jair e Neide,  
que jamais mediram esforços para proporcionar  
o melhor a seus filhos.*

## Agradecimentos

A conclusão de um trabalho é motivo de gáudio não somente para o seu autor, mas também para todos os envolvidos na sua realização. Por este motivo, o momento é propício para agradecer às seguintes pessoas, que, de maneiras diversas, tornaram o desfecho possível:

à Andrea, minha esposa, cujo incentivo, encorajamento e paciência extrema nunca permitiram que eu capitulasse ante as dificuldades;

ao Prof. Dr. Raul Gonzalez Lima, um dos engenheiros mais brilhantes com quem tive o prazer de conviver e trabalhar;

ao Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury, por todas as críticas, sugestões, comentários e apoio logístico (as referências bibliográficas disponíveis somente "na gaveta da escrivaninha") que, muitas vezes, ajudaram a retificar um caminho tortuoso;

ao Prof. Dr. Décio Crisol Donha, pelas valiosas e imprescindíveis orientações por ocasião das Bancas de avaliação;

ao Prof. Dr. Atair Rios Neto e ao Prof. Dr. Marcelo Britto Passos Amato, que aceitaram dispor de seu valioso tempo e participar da presente Banca;

aos amigos da Poli e da IMS Engenharia, Fernando Freitas, Rogério Carvalho e José Augusto Lopes, pelo companheirismo e apoio constante.

# Resumo

A Tomografia por Impedância Elétrica (TIE) procura estimar as propriedades dielétricas de um meio em que, através de eletrodos metálicos distribuídos ao redor de seu contorno, injetam-se correntes e medem-se tensões ou vice-versa. As estimativas de condutividade/resistividade são convertidas em imagens que mostram sua distribuição no interior deste meio. Atualmente, pesquisam-se aplicações da TIE na medicina e em processos industriais.

As condutividades/resistividades são parâmetros de um modelo do objeto em estudo e resultam da solução da equação diferencial a derivadas parciais de Laplace em que se conhece o potencial e as condições de contorno, mas não a distribuição da característica dielétrica responsável por originá-lo. Problemas deste tipo são denominados *inversos*.

A solução de problemas inversos é geralmente obtida por meio de procedimentos numéricos. O presente trabalho avalia o desempenho de um destes procedimentos, o filtro de Kalman, como estimador da distribuição de condutividade/resistividade na TIE. A aplicação do filtro de Kalman requer um modelo dinâmico para o sistema na forma de espaço de estados. Discretiza-se o meio em elementos finitos triangulares com distribuição de condutividade/resistividade uniforme. As variáveis de estado correspondem à condutividade/resistividade de cada um dos elementos do domínio discretizado. Para a evolução temporal do estado admite-se o passeio aleatório. A linearização do modelo de elementos finitos fornece a equação de observações. Implementam-se três versões do filtro: estendido (FEK), estendido iterado (FEIK) e estendido iterado adaptativo (FEIAK), os dois últimos de aplicação inédita neste problema. Aborda-se, também, o paradigma do processamento seqüencial de dados através do filtro estendido (FEKS). O desempenho destes métodos é avaliado com base em simulações numéricas e com dados provenientes de uma bancada experimental.

Uma das contribuições aqui apresentadas é a obtenção de estimativas para os parâmetros de contato meio-eletrodos com o auxílio do FEK, a partir dos dados da bancada experimental. Posteriormente, tais valores, tomados como informação *a priori*, auxiliam na determinação da presença e localização de um objeto colocado no interior da bancada, simulando um degrau de perturbação no meio, através do FEK e do FEIK. A investigação conclui que a qualidade das estimativas com o filtro iterado é 70% superior às obtidas com as versões estendida e seqüencial, que apresentam desempenho equivalente entre si. Além disso, avalia-se quantitativamente a influência de procedimentos de regularização sobre as estimativas do estado.

Visando a identificação conjunta dos parâmetros do meio e do contato meio-eletrodo, propõe-se uma nova abordagem, denominada *Estimação em duas Fases*. Utilizando dados medidos na bancada, o método em duas fases mostra-se capaz de determinar as impedâncias no contato meio-eletrodos, bem como a presença da perturbação, quando utilizado em conjunto com o FEIK ou com o FEIAK. Este procedimento fornece estimativas do estado com resíduos normalizados de observação cuja estatística é consistente com a esperada, assegurando a convergência do processo.

# Abstract

Electrical Impedance Tomography (EIT) attempts to estimate dielectrical properties of a medium in which currents are injected and voltages measured (or vice-versa) through lead electrodes attached around its border. Reconstructed images from the estimated conductivities/resistivities show the distribution of those parameters inside the medium. Research towards applications of EIT in medicine and industrial processes has currently been carried out.

The conductivities/resistivities are parameters of a model of the phantom under evaluation. Those parameters result from the solution of the Laplace partial derivatives differential equation with known potential and proper boundary conditions. However, the dielectric properties of the medium that generated the above mentioned potential are unknown. Mathematical problems of that kind are called *inverse problems*.

Solutions for an inverse problem are often obtained through numerical procedures. This work evaluates the performance of one of those procedures, the Kalman filter, as an estimator for the conductivity/resistivity distribution in EIT. In order to accomplish the task, the problem is described in a state-space form. The medium is discretized in triangle finite elements with uniform conductivity/resistivity distribution. The conductivity/resistivity of each finite element is assigned to a state variable. The observation equation is directly obtained from linearization of the finite element model, whereas for the time evolution of the system a random-walk model is assumed. Three versions of the Kalman filter are implemented: the extended (EKF), the iterated extended (IEKF), and the adaptive iterated extended (AIEKF); the IEKF and the AIEKF are new in this kind of application. In addition, the paradigm of sequential data processing through the EKF (SEKF), is approached. The performance of each method is evaluated through numerical simulations and experimental data from a test rig.

One of the novelties presented in this Thesis is the estimation of medium-electrode contact parameters with the help of FEK using data from the test rig. Subsequently, using the medium-electrode contact impedances as prior information, the presence and localization of an object inserted in the phantom, acting as a step function perturbation on the previously homogeneous medium, is estimated by the EKF and by the IEKF. The estimates obtained through the IEKF are 70% more accurate than those from the EKF and SEKF, whose performance is equivalent. Furthermore, the influence of regularization procedures is quantitatively investigated.

Aiming at simultaneously identifying medium and contact parameters, a new approach called *Two-phase identification* is proposed. Using data from the phantom, the two-phase identification method is effective in determining both electrode contact impedances and medium resistivity distribution with the perturbation, when used in association with the IEKF or the AIEKF. The state estimates present normalized observation residuals whose statistics is consistent with the expected values, thus ensuring convergence of the estimation process.

## Sumário

<b>Sumário</b>	<b>i</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Abreviações</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>ix</b>
<b>I Considerações iniciais</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução e objetivos</b>	<b>2</b>
<b>2 Revisão da Literatura</b>	<b>7</b>
<b>II Formulação Teórica</b>	<b>34</b>
<b>3 Modelos do domínio e dos eletrodos</b>	<b>35</b>
3.1 Modelo do domínio . . . . .	35
3.2 Modelo do eletrodo . . . . .	37
3.3 Problemas direto e inverso . . . . .	39
<b>4 Método dos Elementos Finitos aplicado à TIE</b>	<b>40</b>
4.1 Discretização do domínio . . . . .	40
4.2 Discretização dos eletrodos . . . . .	42
4.3 Solução do problema direto . . . . .	44
<b>5 Solução do problema inverso através do filtro de Kalman</b>	<b>47</b>
5.1 Filtro estendido . . . . .	47
5.1.1 Modelo dinâmico para o filtro estendido de Kalman . . . . .	50
5.2 Filtro estendido seqüencial . . . . .	54
5.3 Filtro estendido iterado . . . . .	57
5.4 Ruído adaptativo e filtro adaptativo . . . . .	59

<b>6</b>	<b>Procedimentos de regularização</b>	<b>65</b>
6.1	Construção de regiões de interesse . . . . .	66
6.2	Filtragem das altas condutividades e regularização de Tikhonov . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Estimação parcial do estado</b>	<b>70</b>
<b>III</b>	<b>Materiais e Métodos</b>	<b>73</b>
<b>8</b>	<b>Malhas de Elementos Finitos</b>	<b>74</b>
8.1	Malha de 269 elementos . . . . .	75
8.2	Malhas de 182 e 272 elementos . . . . .	76
<b>9</b>	<b>Metodologia</b>	<b>78</b>
9.1	Simulações numéricas . . . . .	78
9.2	Validação experimental . . . . .	79
9.2.1	Malha de 182 elementos . . . . .	82
9.2.1.1	Ensaio 1 (eletrodos) . . . . .	82
9.2.1.2	Ensaio 2 (meio, eletrodos conhecidos) . . . . .	83
9.2.1.3	Ensaio 4 (lote x seqüencial, RDI) . . . . .	84
9.2.1.4	Ensaio 3 e 5 (lote x seqüencial, sem RDI) . . . . .	84
9.2.2	Malha de 272 elementos . . . . .	85
9.2.2.1	Ensaio 6 (2 fases, RDI) . . . . .	85
9.2.2.2	Ensaio 7 e 8 (meio, regularização de Tikhonov) . . . . .	86
9.2.2.3	Ensaio 9 (2 fases, adaptativo) . . . . .	86
<b>IV</b>	<b>Resultados, discussão e conclusão</b>	<b>87</b>
<b>10</b>	<b>Simulações numéricas</b>	<b>88</b>
<b>11</b>	<b>Validação experimental: malha de 182 elementos</b>	<b>98</b>
11.1	Ensaio 1 - FEK, identificação de eletrodos . . . . .	98
11.2	Ensaio 2 - FEK e FEIK, identificação do meio . . . . .	107
11.2.1	Identificação do meio com o auxílio do FEK . . . . .	108
11.2.2	Identificação do objeto com o auxílio do FEIK . . . . .	114
11.3	Matrizes de covariância e estimativas . . . . .	119
11.4	Ensaio 4 - FEKS, identificação do meio . . . . .	125
11.5	Ensaio 3 e 5 - comparação FEK/FEKS . . . . .	128
11.5.1	Comparação entre os ensaios 3 (lote) e 5 (seqüencial) . . . . .	128
11.5.2	Comparação entre os ensaios 2-4 e 3-5 . . . . .	131
<b>12</b>	<b>Validação experimental: malha de 272 elementos</b>	<b>136</b>
12.1	Ensaio 6 - FEK, estimação em 2 fases . . . . .	136
12.2	Ensaio 7 - FEK, sem RDI . . . . .	155
12.3	Ensaio 8 - FEK e regularização de Tikhonov . . . . .	158

12.4 Ensaio 9 - FEIAK . . . . .	167
<b>13 Conclusões e Sugestões de Desenvolvimento</b>	<b>178</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>183</b>
<b>Apêndices</b>	<b>I</b>
<b>A Ensaio 6 - evolução do estado</b>	<b>I</b>
<b>B Ensaio 9 - FEIAK - estado e resíduos</b>	<b>V</b>

# Lista de Figuras

2.1	Método dos padrões vizinhos. . . . .	11
2.2	Método dos padrões cruzados. . . . .	12
2.3	Método dos padrões opostos. . . . .	12
2.4	Método dos padrões trigonométricos . . . . .	21
3.1	Domínio bidimensional genérico . . . . .	35
4.1	Elemento triangular genérico . . . . .	40
4.2	Discretização da interface meio-eletrodo . . . . .	43
8.1	Malha de elementos finitos utilizada em simulações numéricas . . . . .	75
8.2	Malhas de elementos finitos utilizadas com dados experimentais. . . . .	77
9.1	Representação da bancada experimental . . . . .	80
9.2	Quadro esquemático dos ensaios com dados de bancada. . . . .	81
9.3	Malha com 182 elementos e RDI para avaliação com dados experimentais	83
9.4	Regiões de interesse para a malha com 272 elementos. . . . .	85
10.1	Simulação 1 (pulmão normal): evolução do estado . . . . .	91
10.2	Simulação 2 (pulmão normal): evolução do estado . . . . .	92
10.3	Simulação 1: resíduo normalizado . . . . .	93
10.4	Simulação 2: resíduo normalizado . . . . .	93
10.5	Simulação 3 (PDI com atelectasia leve): evolução do estado . . . . .	94
10.6	Simulação 4 (PDI com atelectasia densa): evolução do estado . . . . .	95
10.7	Simulação 4 (PDI com atelectasia densa): distribuição de condutividade .	96
11.1	Seqüência 1: evolução temporal do estado (a) meio; (b) eletrodos. . . .	100
11.2	Seqüência 1: resíduo normalizado. . . . .	101
11.3	Seqüência 2: evolução temporal do estado (a) meio; (b) eletrodos. . . .	102
11.4	Seqüência 2: resíduo normalizado. . . . .	103
11.5	Seqüência 11: evolução temporal do estado (a) meio; (b) eletrodos. . . .	104
11.6	Seqüência 11: resíduo normalizado. . . . .	105
11.7	Seqüências 1 a 11: evolução temporal do estado para os eletrodos (a) e resíduos normalizados (b). . . . .	106
11.8	Identificação de um copo através do FEK: (a) evolução temporal do estado; (b) resíduo normalizado. . . . .	109

11.9	Resíduo normalizado: ampliação da evolução temporal para as iterações finais. . . . .	110
11.10	Posição do copo obtida com o FEK . . . . .	111
11.11	Identificação de um copo — FEK com $\text{tr}(Q)$ aumentado: (a) evolução temporal do estado; (b) resíduo normalizado . . . . .	112
11.12	FEIK e FEK: desempenho comparativo . . . . .	116
11.13	FEIK e FEK: comportamento dos resíduos normalizados . . . . .	117
11.14	Norma espectral do ganho de Kalman: comparação FEIK/FEK . . . . .	118
11.15	FEK em lote: estado após 1280 iterações . . . . .	119
11.16	FEK: normas espectrais da covariância do erro e do ganho de Kalman no processamento em lote . . . . .	120
11.17	FEK: valores singulares de $P_k^{(+)}$ no processamento em lote . . . . .	121
11.18	FEK: estado — processamento em lote . . . . .	122
11.19	FEK: resíduo normalizado . . . . .	124
11.20	FEK: comparação seqüencial/lote com RDI — estado . . . . .	126
11.21	FEK: comparação seqüencial/lote com RDI — resíduo . . . . .	127
11.22	FEK: comparação seqüencial/lote sem RDI . . . . .	130
11.23	FEK: estado após 1280 iterações . . . . .	131
11.24	Norma espectral e número de condição de $\mathbb{P}_k$ : comparação entre os processamentos com/sem RDI . . . . .	133
11.25	Valores singulares máximos e mínimos de $\mathbb{P}_k$ : comparação entre os processamentos com/sem RDI . . . . .	134
12.1	Fase 1, seqüência 1: identificação de eletrodos. . . . .	139
12.2	Fase 2, seqüência 2: identificação do meio salino com a perturbação . . . . .	140
12.3	Fase 1, seqüência 3: identificação de eletrodos. . . . .	141
12.4	Fase 1, seqüência 5: identificação de eletrodos. . . . .	143
12.5	Seqüências 6 e 7: identificação do meio salino e de eletrodos. . . . .	144
12.6	Seqüências 6 e 7: norma espectral da matriz $P_k^{(+)}$ . . . . .	145
12.7	Seqüências 6 e 7: resistividades no meio salino e norma espectral de $G_k$ . . . . .	145
12.8	Seqüências 8 e 9: resistividades no meio salino e identificação de eletrodos. . . . .	147
12.9	Fase 1, seqüência 13: identificação de eletrodos . . . . .	148
12.10	Fase 1, seqüência 13: identificação de eletrodos . . . . .	149
12.11	Seqüências 14a até 14e: identificação do meio salino com o objeto . . . . .	150
12.12	Seqüência 14e: estado final e resíduos normalizados . . . . .	152
12.13	Fase 2, seqüência 14e: identificação do meio salino . . . . .	152
12.14	FEK com eletrodos identificados nos ensaios 1 e 6: avaliação comparativa . . . . .	154
12.15	FEK com eletrodos identificados no procedimento em duas fases . . . . .	157
12.16	Ensaio 8: distribuição de resistividade após 480 iterações em função de $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	160
12.17	Ensaio 8: distribuição de resistividade após 480 iterações em função de $\alpha$ e $\beta$ — continuação da Fig. 12.16 . . . . .	161
12.18	Evolução do estado estimado nos ensaios 8.1, 8.4, 8.7 e 8.10 . . . . .	162
12.19	Normas espectrais de $P_k$ e resíduos normalizados para os ensaios 8.1, 8.4, 8.7 e 8.10 . . . . .	163

12.20	Normas Euclidianas de $\mathcal{M}\hat{\rho}_k$ e $\mathcal{Z}^\circ - \mathbb{H}_k^\circ(\hat{\rho}_k)$ em função de $\alpha$ . . . . .	164
12.21	Evolução do estado para o ensaio 8.16 e resíduos normalizados para os ensaios 8.13 a 8.16 . . . . .	166
12.22	Ensaio 9, seqüência 1: evolução do estado, resíduo e normas. . . . .	169
12.23	Ensaio 9, seqüência 2: evolução do estado, resíduo e normas. . . . .	170
12.24	Ensaio 9, seqüência 3: evolução do estado, resíduo e normas. . . . .	171
12.25	Ensaio 9, seqüência 4: evolução do estado, resíduo e normas. . . . .	172
12.26	Ensaio 9, seqüência 4a: evolução do estado, resíduo e normas. . . . .	173
12.27	Ensaio 9, seqüência 5: evolução do estado, resíduo e normas. . . . .	174
12.28	Ensaio 9, seqüência 6: evolução do estado, resíduo e normas. . . . .	175
12.29	Ensaio 9, seqüência 6a: evolução do estado, resíduo e normas. . . . .	176
12.30	Ensaio 9: distribuição de resistividade após as seqüências 4a e 6a . . . . .	177
B.1	Ensaio 9: evolução do estado . . . . .	VI
B.2	Ensaio 9: resíduos . . . . .	VII
B.3	Ensaio 9: distribuições finais de resistividades . . . . .	VIII

# Lista de Tabelas

10.1	Parâmetros utilizados nas simulações numéricas . . . . .	89
10.2	Resultados das simulações numéricas . . . . .	95
11.1	Impedâncias de contato dos eletrodos ( $\Omega m^2$ ) . . . . .	105
12.1	Ensaio 6: parâmetros iniciais para as fases 1 e 2 . . . . .	137
12.2	Impedâncias de contato dos eletrodos ( $\Omega m^2$ ) . . . . .	153
12.3	Parâmetros de regularização e filtragem . . . . .	158
12.4	Ensaio 9: parâmetros iniciais para as fases 1 e 2 . . . . .	168
12.5	Impedâncias de contato dos eletrodos ( $\Omega m^2$ ) . . . . .	174

## Lista de Abreviações

C	Coluna
Co	Coração
ECG	Eletrocardiografia
EDR	Resposta Eletrodérmica
FEK	Filtro estendido de Kalman
FEIK	Filtro estendido iterado de Kalman
FEIAK	Filtro estendido iterado adaptativo de Kalman
FEIARK	Filtro estendido iterado adaptativo regularizado de Kalman
FEKS	Filtro estendido de Kalman com processamento seqüencial
JARK	Filtro adaptativo de Jazwinsky-Rios Neto-Kuga
OT	Outros tecidos
PDI	Pulmão direito inferior
PDM	Pulmão direito médio
PDS	Pulmão direito superior
PEI	Pulmão esquerdo inferior
PES	Pulmão esquerdo superior
RDI	Região(ões) de Interesse
TIE	Tomografia por Impedância Elétrica
TRM	Tomografia por Ressonância Magnética

# Lista de Símbolos

$A_i$	Operador genérico
$x, x_i, \mathbf{x}_i$	Propriedades intrínsecas a determinar
$y, y_i, \mathbf{y}_i$	Dados medidos
$Z$	Impedância de um meio contínuo
$\sigma, \boldsymbol{\sigma}$	Condutividade, distribuição de condutividade
$\epsilon, \boldsymbol{\epsilon}$	Permitividade, distribuição de permitividade
$\rho, \boldsymbol{\rho}$	Resistividade, distribuição de resistividade
$\omega$	Frequência
$\gamma$	Precisão na medida de distinguibilidade
$J, J_i$	Densidade de corrente, Jacobiano de uma transformação
$V, \mathbf{v}$	Matriz de tensões medidas, tensões medidas
$\theta$	Posição angular dos eletrodos
$\phi, \mathbb{J}$	Funcionais
$\alpha$	Parâmetro de regularização
$\mathbf{e}_i, \tilde{\mathbf{x}}$	Vetores de erros
$N, q$	Eletrodos principal e auxiliar em um dipolo
$\ell$	número de eletrodos, $\ell$ -ésimo eletrodo
$\alpha_{\mathbb{F}}, \beta_{\mathbb{F}}$	Funções de forma
$z_{e_i}$	Impedância de contato em um eletrodo genérico
$\Psi, U$	Potencial elétrico (função), potencial elétrico (medida)
$\Gamma$	Domínio bidimensional genérico
$\mathbf{E}, \mathbf{B}$	Campo elétrico, indutância magnética
$c$	Velocidade da luz
$p$	Padrão de correntes
$C, c_\ell$	Matriz de correntes injetadas, corrente no $\ell$ -ésimo eletrodo
$C_{a,d}$	Matriz de padrões de correntes adjacentes, diametrais
$Y$	Matriz de condutividade
$\Phi$	Matriz de transição de estados
$\mathbb{H}$	Matriz de sensibilidade

$\nu, R$	Seqüência de ruído branco Gaussiano na medida e respectiva covariância
$\omega, Q$	Seqüência de ruído branco Gaussiano no estado e respectiva covariância
$\varsigma, Q_d^p$	Seqüência de ruído branco Gaussiano no pseudo-estado e respectiva covariância
$z$	Vetor de medidas no modelo linearizado de observações
$\delta$	Tolerância no erro do FEIK
$\eta_f$	Número de elementos finitos no $f$ -ésimo grupo
$B, \beta$	Matriz do filtro passa-baixa, parâmetro de filtragem
$A, M$	Matriz passa-alta, matriz de filtragem
$\sigma^*, \rho^*$	Estimativas iniciais para $\sigma, \rho$
$\diamond$	Indicativo de matrizes/vetores "aumentados"
$\mathbb{S}, \mathbb{C}$	Espaço métrico, transformação de contração
$r_\nu$	Resíduo normalizado das observações
$\zeta_\nu$	Desvio-padrão dos ruídos nas medidas
$\kappa$	Número de condição de uma matriz
$\lambda$	Parâmetro de correção da matriz de covariância do ruído no estado
$\varkappa$	Fator de esquecimento

# **Parte I**

## **Considerações iniciais**

# Capítulo 1

## Introdução e objetivos

A necessidade de visualizar o interior de objetos cujo acesso a dispositivos como micro-câmeras é difícil, inviável, ou mesmo impossível, levou ao desenvolvimento de métodos de estimação de imagens baseados nas variações de propriedades elétricas e magnéticas do material (ou materiais) que compõem o meio a ser observado. Tais métodos são atualmente utilizados em uma gama de situações que envolvem desde o monitoramento de processos industriais até o auxílio em diagnósticos médicos. Neste trabalho, serão discutidos aspectos relacionados a um destes métodos, a Tomografia por Impedância Elétrica (TIE), com ênfase em aplicações na medicina, porém sem perder de vista que a metodologia empregada é genérica e, portanto, passível de utilização em outros ramos.

Deve-se notar que a expressão “tomografia por impedância elétrica” é utilizada de forma inexata, pois estimam-se tanto as distribuições de condutividade ou resistividade, que são propriedades características do *material*, quanto impedâncias, que resultam da integral da distribuição de uma propriedade específica sobre a área de interesse. No entanto, a nomenclatura foi consagrada pelos principais pesquisadores no assunto como Brown (2001), Barber & Brown (1984), Yorkey, Webster & Tompkins (1987), Murai & Kagawa (1985), Cheney, Isaacson & Newell (1999), entre outros.

A impedância é expressa em termos das grandezas fundamentais do Sistema Internacional de Unidades como  $[M][L]^4[A]^{-2}[T]^{-3}$ , onde  $M$ ,  $L$ ,  $A$  e  $T$  representam, respectivamente, massa (*quilograma* [ $kg$ ]), comprimento (*metro* [ $m$ ]), corrente (*Ampère* [ $A$ ]) e tempo (*segundo* [ $s$ ]). Em termos de unidades mais utilizadas, a impedância é

descrita por  $\frac{[V \cdot m^2]}{[A]}$ , com  $V \triangleq$  tensão em Volt; além disso, como  $\frac{V}{A} \triangleq$  *resistência elétrica* (cuja unidade fundamental é o Ohm  $[\Omega]$ ), exprime-se a impedância em  $[\Omega \cdot m^2]$ . A inversa da impedância é denominada *condutância*. Verifica-se que a divisão da impedância pela área da superfície atravessada pela corrente é a resistência elétrica. A *resistividade*, por sua vez, é uma grandeza específica cuja unidade é  $[\Omega \cdot m]$ . Sua inversa é a *condutividade*.

Inicialmente, cabe situar a TIE no âmbito da ciência médica. A interação entre a Medicina e a Engenharia é genericamente denominada *Bioengenharia*. Malmivuo & Plonsey (1995) propõem uma nomenclatura para expressar as relações existentes entre a Medicina, a Física, a Biologia e a Engenharia em que o termo *Bioeletromagnetismo* seria o mais apropriado para definir a área do conhecimento que associa fenômenos eletromagnéticos, cuja base são as equações de Maxwell, às variações nas características de tecidos vivos quando submetidos a campos elétricos ou magnéticos variáveis

Dispositivos eletrônicos capazes de induzir campos elétricos ou magnéticos, externamente acoplados aos tecidos vivos sob análise, permitem a medição de grandezas cuja amplitude, frequência, fase ou a combinação de tais efeitos é proporcional às variações nas propriedades dielétricas do tecido. Diversas técnicas não invasivas de visualização de órgãos internos atualmente empregadas na Medicina aproveitam-se deste comportamento. Dentre estas técnicas, podem ser citadas a Tomografia por Ressonância Magnética (TRM), a Resposta Eletrodérmica (EDR), a Pletismografia de Susceptibilidade Magnética e a Tomografia por Impedância Elétrica.

A TIE procura determinar as alterações no campo de condutividade ou resistividade interno em órgãos utilizando eletrodos metálicos para a injeção de correntes elétricas de baixa amplitude e leitura de tensões ou para a aplicação de tensões e leitura de correntes. Nesta tese, utiliza-se o segundo procedimento, por razões que serão posteriormente discutidas.

No presente estágio de desenvolvimento, procuram-se aperfeiçoar maneiras de utilizar a TIE visando a obtenção de imagens com maior resolução espacial, acuidade e rapidez. Na Medicina, uma das aplicações nas quais é necessário otimizar o método é no auxílio ao diagnóstico precoce de anomalias pulmonares como atelectasia, colapso alveolar ou pneumotórax, presentes em pacientes mantidos em Unidades de Terapia Intensiva.

A tomografia de processo, por sua vez, recorre à TIE para avaliar as condições do escoamento no interior de tubos ou a concentração/distribuição de substâncias em tanques utilizados nos processos industriais. Atualmente, a TIE é utilizada para a obtenção de imagens em reatores de agitação, misturadores e separadores, incluindo também o processamento de alimentos e a biotecnologia (*What is Process Tomography* 2005).

Sob o ponto de vista de Engenharia, a TIE é um problema inverso, mal condicionado e não-linear que, para sua solução, exige a implementação de métodos numéricos.<sup>[i]</sup>

Quando as variações nas propriedades dos parâmetros a serem determinados são muito rápidas, técnicas de estimação dinâmica se fazem necessárias. No presente trabalho, o *Filtro de Kalman*, em suas variantes *estendido*, *estendido com processamento seqüencial dos dados*, *estendido iterado* e *estendido iterado adaptativo* é utilizado para a obtenção de estimativas absolutas do campo de condutividade ou resistividade. As abordagens através do filtro estendido iterado, do filtro com processamento seqüencial de dados e do filtro iterado adaptativo são inéditas na TIE. Outra contribuição é a proposta de um método para estimar conjuntamente os parâmetros do meio (interior do objeto a ser observado) e dos eletrodos para injeção de correntes e leitura de tensões.

O trabalho insere-se no âmbito do Projeto Temático FAPESP 01/05304-4, em que outros métodos de estimação de imagens na TIE estão sendo desenvolvidos e, como tal, pretende servir de base para uma avaliação comparativa. Alguns aspectos aqui abordados representam a continuidade de desenvolvimentos que haviam sido tema de publicações anteriores (Trigo 2001, Gonzalez Lima, Trigo & Amato 2002, Gonzalez Lima & Trigo 2003, Trigo, Gonzalez Lima & Amato 2004, Trigo & Gonzalez Lima 2005).

## Objetivos e escopo da Tese

A aplicação eficaz de procedimentos de estimação de parâmetros é um pré-requisito para que aparelhos de visualização baseados em impedância elétrica capazes de fornecer imagens em tempo real tornem-se tecnicamente viáveis, o que não foi possível até

---

<sup>[i]</sup>Deve-se ressaltar que a solução numérica de um problema inverso contínuo freqüentemente requer sua discretização. Se o problema inverso contínuo for mal posto, a discretização pode causar instabilidade numérica na solução, devido à precisão finita utilizada nos cálculos. Este tema será discutido no capítulo 10.

o momento. A presente tese visa avaliar o impacto representado pela implementação de procedimentos de estimação dinâmica fundamentados em três versões do filtro de Kalman sobre a qualidade das imagens na TIE e investigar a viabilidade de sua utilização na prática, eventualmente em um equipamento comercial. Para tanto, efetuam-se simulações numéricas e validam-se os métodos através do processamento de dados obtidos em uma bancada experimental. Além disso, almeja-se obter um procedimento de estimação que permita identificar características dielétricas do meio e da interface meio-eletrodo.

A tese está dividida em quatro partes. Na primeira parte, após a exposição do escopo e objetivos no Capítulo 1, o Capítulo 2 apresenta uma revisão da literatura com ênfase em trabalhos que utilizem técnicas de estimação dinâmicas na solução do problema da TIE.

A Parte II engloba a formulação teórica que será empregada ao longo do trabalho. O Capítulo 3 apresenta os modelos para o meio salino a ser investigado, doravante denominado *domínio* e para os eletrodos, obtidos com base nas equações de Maxwell, ao passo que, no Capítulo 4, mostra-se que a discretização em elementos finitos bidimensionais é o passo inicial para a solução da equação diferencial de Laplace através de métodos numéricos.

No Capítulo 5, descreve-se a obtenção dos modelos de sistema e observação a partir da discretização em elementos finitos e sua incorporação ao modelo de estimação dinâmica através do Filtro de Kalman. Neste capítulo, as abordagens por meio do filtro estendido iterado, filtro estendido com processamento seqüencial e filtro estendido iterado adaptativo são parte das contribuições que o trabalho apresenta.

A semelhança entre as imagens estimadas e a condição real do meio observado é função da qualidade das informações *a priori* disponíveis. Por exemplo, sabe-se que as resistividades de tecidos ósseos possuem pequenas variações e podem, sob certas circunstâncias, ser consideradas constantes. Genericamente, técnicas que permitem a inclusão de tais informações são denominadas *técnicas de regularização*. O Capítulo 6 mostra como duas técnicas de regularização, o agrupamento de regiões com características semelhantes e a regularização generalizada de Tikhonov, incluindo filtragem

de altas frequências, podem ser incorporadas ao filtro de Kalman.

Na seqüência, o Capítulo 7 apresenta outra novidade que o trabalho propõe, qual seja, um método baseado no Teorema do Ponto Fixo, que permite a estimação conjunta dos parâmetros do meio e do contato meio-eletrodos.

A Parte III é dedicada à metodologia empregada nos ensaios. O Capítulo 8 descreve as malhas de elementos finitos e o Capítulo 9 refere-se à explanação dos procedimentos para a obtenção de estimativas com dados simulados e experimentais.

A Parte IV finaliza a tese. No Capítulo 10, os resultados obtidos em simulações numéricas são expostos e discutidos. Analisa-se como a característica do problema mal condicionado da TIE interfere nas estimativas do estado. Os capítulos 11 e 12 apresentam os parâmetros identificados por três versões do filtro de Kalman, incluindo um método para estimação dos parâmetros na interface meio-eletrodo, inédito até então, a partir de dados medidos em uma bancada experimental. A discussão subsequente visa analisar tais resultados. O Capítulo 13 ocupa-se em apresentar as conclusões do trabalho e propor sugestões de desenvolvimento.

# Capítulo 2

## Revisão da Literatura

Este capítulo visa fornecer ao leitor um panorama geral acerca da estimação de parâmetros na Tomografia por Impedância Elétrica (TIE), com ênfase para os procedimentos de estimação dinâmica e, particularmente, aqueles que utilizam o filtro de Kalman como estimador de estados. Portanto, cabe inicialmente definir "procedimentos de estimação dinâmica" no âmbito da TIE.

A Tomografia por Impedância Elétrica é uma ciência multidisciplinar que integra a modelagem de fenômenos eletromagnéticos a métodos de solução de problemas inversos. O problema inverso da TIE resulta da necessidade de se estimar o campo de resistividade ou condutividade no interior de um objeto tendo como dados apenas medidas de tensões ou correntes através de eletrodos acoplados à superfície externa de tal objeto. Existem, basicamente, dois grandes grupos de métodos para a solução do problema inverso: os estáticos e os dinâmicos (Vauhkonen, Karjalainen & Kaipio 1998).

Os métodos estáticos têm como premissa que as propriedades dielétricas do meio permaneçam constantes durante o tempo necessário para a injeção de um determinado número de padrões de correntes e leituras de tensões <sup>[1]</sup> (ou aplicação de tensões e leitura de correntes) e o processamento destes dados até a obtenção de imagens. Métodos dinâmicos, em contrapartida, são teoricamente capazes de gerar imagens processando dados relativos à aplicação de apenas um padrão de corrente ou tensão, permitindo assim

---

<sup>[1]</sup>O número de padrões depende do número de parâmetros a serem estimados, como será discutido adiante.

a visualização em tempo real do meio em questão. Schmitt & Louis (2002) definem métodos estáticos ou dinâmicos da seguinte forma: determinado problema dinâmico é descrito por um conjunto de operadores  $A_i$

$$A_i : x \rightarrow y_i | A_i x = y_i \quad (2.1)$$

ou

$$A_i : x_i \rightarrow y_i | A_i x_i = y_i, \quad (2.2)$$

onde  $i$  representa intervalos de tempo  $t_i$  entre os quais medidas  $y_i$  são efetuadas com o intuito de, após a solução do problema inverso, determinar as propriedades intrínsecas,  $x$  ou  $x_i$ , do objeto em estudo. As formulações dadas por (2.1) e (2.2) são respectivamente denominadas *estática* e *dinâmica*.

Durante os últimos anos, as pesquisas em Tomografia por Impedância Elétrica têm priorizado suas aplicações na Medicina e no monitoramento de processos industriais. Em ambas, os objetivos principais são a melhoria na qualidade e na fidelidade das imagens obtidas, sem esquecer a rapidez.

As aplicações em Pneumologia são prioritárias na área médica pois o diagnóstico precoce e correto de anomalias como atelectasia, ou pneumotórax <sup>[ii]</sup> em pacientes com danos pulmonares severos depende da visualização de diversas imagens do pulmão durante o ciclo cardíaco, mais curto que o respiratório, para que o ajuste dos parâmetros de ventilação possa ser efetuado a contento. A dinâmica dos processos cardíaco e respiratório é tal que a condição pulmonar pode sofrer, em poucos ciclos, alterações drásticas, as quais devem ser detectadas a tempo de adequar a operação do equipamento às condições do paciente. Neste tipo de aplicação, a TIE é particularmente interessante uma vez que, potencialmente, é capaz de fornecer resultados em tempo real e sem a necessidade de remover o paciente de seu leito (Trigo et al. 2004) para, por exemplo, submetê-lo a exames de tomografia computadorizada que permitam determinar a necessidade de manutenção ou modificação no protocolo de tratamento.

---

<sup>[ii]</sup>Segundo Guyton (1992), *atelectasia* é o colapso dos alvéolos de parte ou mesmo de todo o pulmão. O *pneumotórax*, de acordo com Baumann & Strange (1997), caracteriza-se pela presença de ar no espaço pleural (região existente entre a cavidade torácica e os pulmões).

A Pneumologia, entretanto, não é a única especialidade a utilizar-se da TIE. Dispositivos baseados neste método podem ser empregados, por exemplo, na detecção e localização de regiões cerebrais afetadas por derrame agudo (Clay & Ferree 2002) e no diagnóstico precoce de danos cerebrais decorrentes de asfixia durante o parto (Gibson, Bayford & Holder 2000). O ponto comum a todas as aplicações citadas até aqui é a existência de gradientes elevados de resistividades entre os diferentes tipos de tecidos, decorrentes da concentração iônica presente, o que gera contraste entre eles e permite a estimação de imagens clinicamente úteis.

Em seu artigo *Medical impedance tomography and process impedance tomography: a brief review*, Brown (2001), um dos primeiros a utilizar a TIE em aplicações médicas, discorre sobre o atual estágio de desenvolvimento da técnica. O autor enfatiza as vantagens da utilização da TIE na Medicina (baixo custo, inofensiva ao paciente, simplicidade de aplicação, possibilidade de caracterização de propriedades de tecidos/materiais), o que justifica a continuação das pesquisas por diversos grupos. Brown afirma a necessidade, principalmente em aplicações médicas, de se trabalhar com padrões de correntes ou tensões de múltipla frequência, pois tecidos diferentes reagem de maneira diferente dependendo da frequência de excitação. Isto ocorre pois a impedância de um tecido é dada por  $Z = \sigma + j\omega\epsilon$ , onde  $\sigma$  e  $\epsilon$  são respectivamente a condutividade e a permissividade do meio,  $j = \sqrt{-1}$  é a unidade imaginária e  $\omega$  é a frequência de excitação.

A utilização de sinais de múltipla frequência, segundo Brown, diminui os efeitos não modelados do formato do objeto, variável quando se trata do corpo humano, pois a capacidade que as correntes possuem em atravessar tecidos varia proporcionalmente ao aumento da frequência do sinal injetado. Assim, dependendo da excitação, seria possível obter imagens do contorno e do interior de cada estrutura ou órgão.

Outra tendência, prossegue Brown, é a de se empregar modelos tridimensionais para o domínio. As variações na impedância são proporcionais à integral da distribuição de resistividade (inversa da condutividade) estendida a todo o volume, e a densidade de corrente é função da distribuição de resistividade. Nos modelos bidimensionais considera-se a densidade de corrente uniforme na direção ortogonal ao plano em análise; na prática, entretanto, isto não ocorre, pois cargas elétricas de mesma polaridade se repelem, efeito

que pode ser incluído nos modelos tridimensionais. A generalização dos procedimentos de estimação em duas dimensões para o caso tridimensional é uma das linhas de pesquisa em andamento, segundo o autor supracitado.

Um dos problemas inerentes à TIE é a existência de uma impedância de contato na interface meio-eletrodo. Esta impedância, em aplicações médicas, não pode ser negligenciada, a menos que fosse possível construir geradores de corrente com impedância de saída infinita e sistemas de medição com impedância de entrada infinita. A situação ideal, ou seja, ausência de eletrodos, levou às pesquisas em tomografia por indução magnética, técnica pela qual submete-se o meio condutivo a campos magnéticos variáveis sem contato direto. Pelo princípio da reciprocidade, decorrente das equações de Maxwell, as correntes induzidas no meio condutivo também geram campos magnéticos que, por sua vez, podem ser externamente detectados. Brown ressalta, entretanto, que há necessidade de aperfeiçoar a instrumentação existente para sua efetiva utilização. Brown observa ainda que uma das limitações da TIE é a baixa resolução espacial das imagens, motivada pelo pequeno número de medidas independentes de corrente ou tensão.

O número de medidas independentes possíveis na TIE está ligado ao número de eletrodos distribuídos ao redor do objeto a ser observado e à forma como injetam-se correntes e medem-se tensões. Diversos trabalhos apresentam métodos para a injeção de correntes e medição de tensões. Malmivuo & Plonsey (1995), no livro *Bioelectromagnetism - Principles and Applications of Bioelectric and Biomagnetic Fields*, descrevem brevemente 4 procedimentos com esta finalidade.

No método dos padrões vizinhos, proposto por Brown & Segar (1987) *apud* Malmivuo & Plonsey (1995), aplicam-se correntes através de eletrodos adjacentes e medem-se tensões sucessivamente através de pares de eletrodos vizinhos. Inicialmente, escolhe-se um par de eletrodos para a injeção de correntes, por exemplo, utilizando os eletrodos 1 e 2. Efetuam-se medidas de tensões a partir do próximo par, no caso 3-4, com um dos eletrodos de 3-4 mantido como referência, por exemplo 3, como mostra a Fig. 2.1(a), e assim sucessivamente, deslocando sempre em uma unidade o par utilizado para a medição de tensões, até atingir o conjunto formado pelos eletrodos (N-1) e (N), conforme Fig. 2.1(b). Em seguida, muda-se o par de injeção de correntes para 2-3 e repete-se o

procedimento acima. Com este método, é possível efetuar um total de  $N.(N-3)$  medidas de tensões, das quais  $N.(N-3)/2$  são independentes, uma vez que, devido à reciprocidade, medidas de tensões em pares de eletrodos que já haviam sido utilizados para a injeção de correntes conduzem a resultados idênticos (Malmivuo & Plonsey 1995).

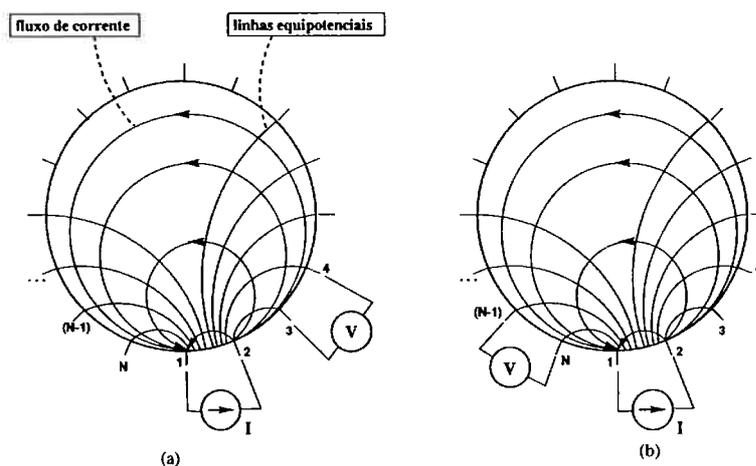


Figura 2.1: Método dos padrões vizinhos.

O método dos padrões cruzados, proposto por Hua, Webster & Tompkins (1987) *apud* Malmivuo & Plonsey (1995), utiliza dois eletrodos adjacentes, por exemplo o eletrodo N e o eletrodo 1, como referência para a injeção de correntes e medição de tensões. O próximo eletrodo na seqüência, nº 2, fecha o circuito de excitação; as tensões são medidas nos demais  $(N-3)$  eletrodos em relação ao eletrodo de referência, no caso o nº 1, vide Fig. 2.2(a). Encerradas estas  $(N-3)$  medições, mantêm-se os eletrodos N e 2 respectivamente como referências para a injeção de correntes e medição de tensões, porém fecha-se o circuito de excitação através do eletrodo nº 4 e medem-se tensões entre os eletrodos 1 e 2, 1 e 3, 1 e 5 ... 1 e  $(N-1)$ . Repetindo-se o procedimento com os eletrodos N e 6, 8, ...,  $(N-2)$  para a injeção de correntes,  $(N-9).(N-3)$  tensões são medidas. Quando a seqüência completa de operações acima é aplicada tomando-se os eletrodos 2 e 3 respectivamente como referências para correntes e tensões, vide Fig. 2.2(b), mais  $(N-9).(N-3)$  tensões são medidas. Porém, como essencialmente empregam-se dois pares de eletrodos no processo, o número de medidas independentes é idêntico ao obtido no método dos padrões vizinhos.

Outro método que permite igual número de medidas independentes, por utilizar

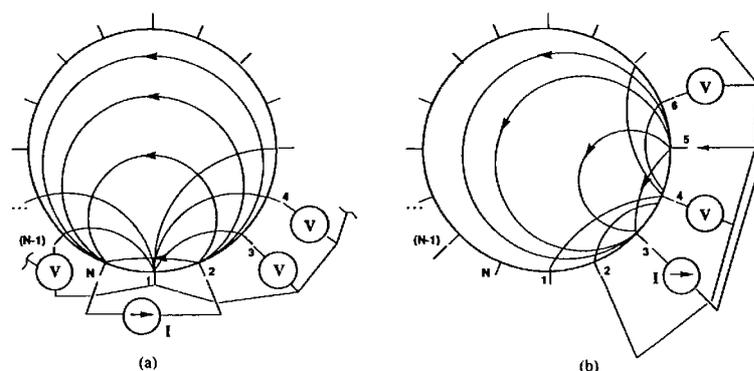


Figura 2.2: Método dos padrões cruzados.

dois pares de eletrodos para a excitação e medição de tensões, é o dos padrões opostos, também creditado a Hua et al. (1987) *apud* Malmivuo & Plonsey (1995). Observando a Fig. 2.3(a) verifica-se que a corrente é injetada através de dois eletrodos diametralmente opostos. As tensões são medidas entre o eletrodo adjacente àquele pelo qual a corrente é injetada e os  $(N-3)$  restantes. O processo continua com o próximo par de eletrodos opostos, adjacente ao primeiro, conforme mostra a Fig. 2.3(b).

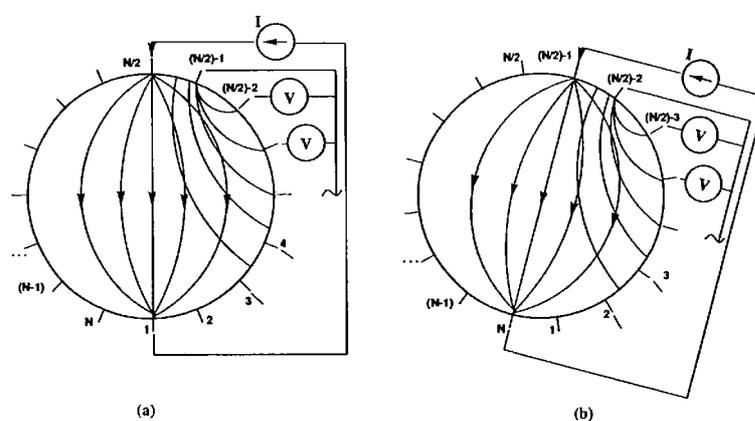


Figura 2.3: Método dos padrões opostos.

O quarto método, denominado adaptativo, da autoria de Gisser, Isaacson & Newell (1987) *apud* Malmivuo & Plonsey (1995), propõe a utilização de  $(N/2)-1$  pares de eletrodos para a injeção de correntes, e a medição de tensões entre um eletrodo livre como referência e os demais que, com a rotação dos padrões, proporcionam  $(N/2).(N-1)$  medidas independentes. Este modelo apresenta como desvantagem a necessidade de diversas fontes independentes de correntes; por outro lado, permite adaptar cada padrão

de corrente às características geométricas da fronteira do domínio a ser observado, aumentando assim a distinguibilidade (conceito que será discutido mais adiante) de regiões no seu interior.

Os três primeiros métodos possuem, em comum, a utilização de pares distintos de eletrodos para a injeção de correntes e medição de tensões, com o intuito de evitar o efeito da impedância de contato meio-eletrodo. A modelagem deste efeito permite que um único par de eletrodos seja responsável pelas duas tarefas, com conseqüente aumento no número de medidas independentes. Cheng, Isaacson, Newell & Gisser (1989), no artigo *Electrode Models for Electric Current Computed Tomography*, formulam quatro modelos para descrever os fenômenos que ocorrem devido à utilização de eletrodos na TIE, dentre eles a impedância de contato.

O modelo ideal de excitação, denominado *contínuo*, admite que a corrente seja injetada ao longo de toda a fronteira do domínio, sem a presença de eletrodos. Porém, dada a condição de continuidade, isto é, admite-se que a carga total no interior do domínio permaneça constante, a distribuição de condutividade do meio é superestimada, pois não há impedância de contato. Um modelo mais fidedigno considera a existência de eletrodos finitos e separados por um espaço entre eles, o que dá origem ao chamado *gap model*. Cálculos efetuados com o *gap model* também superestimam a condutividade no interior do domínio.

Devido à elevada condutividade do metal dos eletrodos, pode-se considerar que não exista queda de tensão entre a face livre e aquela em contato com a fronteira do meio, o que caracteriza o *shunt model*. Finalmente, quando incorpora-se ao modelo de eletrodo a impedância no contato meio-eletrodo, obtém-se o *modelo completo*, para o qual a discrepância entre resultados calculados e medidos é da ordem de 1% para a impedância dos eletrodos, contra até 25% com o modelo contínuo e valores intermediários para os outros dois. Cheng et al. (1989), no entanto, não mencionam a maneira como as equações diferenciais do modelo foram resolvidas para a obtenção dos dados simulados.

Posteriormente, Hua, Woo, Webster & Tompkins (1993a), em *Finite Element Modeling of Electrode-Skin Contact Impedance in Electrical Impedance Tomography*, desenvolvem um modelo simplificado dos efeitos no contato pele-eletrodos com o auxílio

do método dos elementos finitos. Embora a abordagem adotada tenha como foco as aplicações médicas, o modelo apresentado, pela sua generalidade, adequa-se também à tomografia de processo. O presente trabalho utiliza-se deste modelo, o que justifica sua descrição com mais pormenores no Capítulo 3.

Convém retornar à distinguibilidade. Proposta por Isaacson (1986), em *Distinguishability of Conductivities by Electric Current Computed Tomography*, a distinguibilidade é definida como a capacidade de distinção entre duas condutividades  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  com precisão  $\gamma$  se, para determinado padrão de correntes com densidade  $J$  tal que a norma Euclidiana  $\|\cdot\|_2$  de  $J$ ,  $\|J\|_2 = 1$ , a norma da diferença de potencial  $\|\Delta V = V_a - V_b\|_2$  entre as regiões com condutividades  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  é tal que  $\|\Delta V\|_2 > \gamma$ . Com esta definição, Isaacson demonstra que, para um domínio com seção transversal circular e distribuição homogênea de condutividade  $\sigma_a$ , padrões de corrente denominados *trigonométricos* na forma  $J(\theta) = \frac{\cos \theta}{\sqrt{\pi}}$  ou  $J(\theta) = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\pi}}$  ( $\theta$  é a posição angular dos eletrodos) são os que melhor permitem distinguir um objeto cilíndrico de condutividade  $\sigma_b$  posicionado no centro do domínio circular anteriormente homogêneo. O tipo de norma utilizado para a avaliação da distinguibilidade e sua influência nos resultados, não abordado em Isaacson (1986), é posteriormente discutido no artigo *Distinguishability in Impedance Imaging*, de Cheney & Isaacson (1992), onde os autores apresentam estudos comparativos de distinguibilidade nos quais procura-se detectar, para 4 tipos de padrões de correntes aplicados a um domínio circular com distribuição homogênea de condutividade  $\sigma_a$ , a presença de um objeto circular de condutividade  $\sigma_b$  na região central do domínio. Os pesquisadores mostram que, se a potência elétrica das correntes injetadas em cada par de eletrodos for finita, padrões trigonométricos são os capazes de identificar os menores objetos circulares de condutividade  $\sigma_b$  e concluem que a norma Euclidiana é a escolha adequada para o cálculo da distinguibilidade.

A idéia de manter constante e limitada a potência elétrica por par de eletrodos surgiu devido a um paradoxo. Em Isaacson (1986), demonstrava-se que padrões trigonométricos apresentavam melhores resultados com relação à distinguibilidade. No entanto, em Cheney & Isaacson (1992), quando limitou-se a amplitude da corrente em  $1 \text{ mA}$ , a conclusão sobre o caráter ótimo dos padrões trigonométricos não se confirmou.

A necessidade de solução deste paradoxo deu origem à restrição na potência do sinal injetado. Eyüboğlu & Pilkington (1993) retornam ao assunto no artigo *Comments on Distinguishability in Electrical Impedance Imaging*, analisando tal restrição sob a ótica das normas de segurança para equipamentos médicos, que prescrevem o valor de  $5\text{ mA}$  (rms) a  $50\text{ kHz}$  como a corrente total a ser injetada no corpo humano em exames de pletismografia. Os pesquisadores mostram que, mantida apenas a restrição relativa à potência, a corrente total injetada é superior ao limite para todos os tipos de padrões de correntes pesquisados por Cheney & Isaacson (1992). Por outro lado, apenas os padrões vizinhos e opostos atendem às restrições quanto à corrente e, neste caso, o menor objeto circular é detectável utilizando padrões opostos.

Eyüboğlu & Pilkington (1993) observam ainda que, mesmo em aplicações industriais, embora a corrente máxima não seja, em princípio, uma restrição, a potência máxima do sinal injetado deve ser considerada, dada sua influência sobre as características de projeto dos equipamentos.

Outros trabalhos abordam a distinguibilidade na TIE. Por exemplo, Jain, Isaacson, Edic & Newell (1993) analisam casos em que se procura identificar objetos circulares imersos em um meio homogêneo em 5 situações: um objeto no centro de um domínio circular, um objeto fora do centro, também no domínio circular, um objeto circular concêntrico a um domínio elipsoidal, um objeto circular excêntrico a um domínio elipsoidal e dois objetos circulares excêntricos a um domínio elipsoidal. Entre as contribuições do estudo, destacam-se a presença da permitividade  $\epsilon$  do meio na composição da impedância e a introdução de uma geometria elíptica, visando simular o formato e as dimensões de um tórax humano. Tal geometria é mais adequada às aplicações médicas [iii]. Os autores concluem que a inclusão da permitividade e a correta modelagem do formato do domínio contribuem para a melhoria da distinguibilidade de objetos concêntricos ou não.

Eyüboğlu, Köksal & Demirbilek (2000) analisam o posicionamento das bobinas de indução que proporcionam melhor distinguibilidade para um objeto circular (descontinuidade) no centro de um domínio circular homogêneo. O estudo conclui serem os padrões

---

[iii] As dimensões dos eixos da elipse podem ser estimadas em função de outras dimensões do corpo humano, de acordo com o modelo de Hanavan (1964) *apud* Kwon (1998).

trigonométricos novamente a solução mais adequada, quando há restrições quanto à potência total, e padrões opostos os melhores quando limita-se a corrente nas bobinas.

Saka & Yilmaz (2004) apresentam soluções analíticas para a distinguibilidade de objetos elípticos posicionados de maneira concêntrica em um domínio cuja fronteira é também elíptica e comparam os resultados com os obtidos se o objeto a ser identificado for circular, calculando o erro que se comete com tal simplificação.

Com base nos trabalhos comentados, conclui-se que a distinguibilidade, da maneira abordada até o momento, deve ser entendida como um parâmetro a mais na avaliação da capacidade de identificação que cada método de solução do problema da TIE possui uma vez que, dada a complexidade matemática do problema, apenas resultados correspondentes a casos particulares estão disponíveis. Em aplicações médicas, por exemplo, dependendo do escopo da análise clínica, pode-se admitir que a fronteira do domínio seja circular ou elíptica; no entanto, é difícil conceber órgãos internos com formatos bem definidos. Já em tomografia de processo, a distinguibilidade pode ser considerada uma ferramenta importante na avaliação da resolução das imagens obtidas, pois dispõe-se de informações geométricas fidedignas.

O primeiro método estático a ser utilizado na solução do problema da TIE foi o chamado *Backprojection*, desenvolvido por Barber & Brown (1984) e apresentado no artigo *Applied potential tomography*. Em linhas gerais, o método emprega dois pares de eletrodos, sendo um para a aplicação de correntes e o outro para a medição de tensões, conforme mostra a Fig. 2.1 (padrões vizinhos). A resistividade do meio é obtida após a somatória dos efeitos produzidos pela aplicação de todos os padrões de correntes, e respectivas medidas de tensões, ponderadas de acordo com o par de eletrodos em que a corrente é injetada. Embora o procedimento seja capaz de estimar imagens praticamente em tempo real (taxa de 20 quadros por segundo), não pode ser classificado como *dinâmico*, de acordo com a definição inicial, pois admite que as propriedades do objeto a ser observado sejam constantes ao menos durante o procedimento de aquisição e processamento de dados.

Na verdade, o fator limitante para a obtenção de imagens em tempo real é a eficiência do algoritmo de solução do problema inverso, uma vez que podem-se efetuar medições de

tensões a taxas de amostragem entre 20 e 100  $kHz$  (Barber & Brown 1984). Assim, se por um lado a grande virtude do "backprojection" é a rapidez na obtenção das imagens, por outro sacrifica-se sua acuidade. Isto ocorre, em primeiro lugar, pois o método é dependente de medidas exatas que, por sua vez, são função do correto posicionamento dos eletrodos e, em segundo lugar, por admitir que a fronteira do domínio é circular. As duas restrições não são necessariamente satisfeitas, principalmente em aplicações médicas, o que torna o método inadequado para a geração de imagens *absolutas*. Para superar tais dificuldades, na prática utiliza-se um conjunto de medidas iniciais como dados de referência, efetuam-se novas medidas em relação a esta referência e, com o auxílio do "backprojection," estimam-se imagens que representam as *variações* ocorridas nas propriedades dielétricas do meio. Neste particular, o "backprojection" é robusto aos fenômenos de borda (erros tanto na forma assumida para a fronteira do domínio quanto na posição dos eletrodos), uma vez que tais erros não possuem influência significativa sobre as imagens de objetos localizados em posições internas do domínio.

Diversos trabalhos apresentam aplicações de variantes do método de Newton-Raphson na solução do problema da TIE, sendo este provavelmente o procedimento estático mais pesquisado. O método procura obter uma distribuição da propriedade interna  $\mathbf{x}^*$ , que minimize o quadrado da diferença entre as tensões calculadas através do modelo de sistema adotado e as tensões efetivamente medidas nos eletrodos. O funcional a minimizar seria do tipo

$$\phi = \frac{1}{2} \|J_i - \mathbf{y}_i(\mathbf{x})\|_2^2, \quad (2.3)$$

onde

$$J_i = \frac{\partial A_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x} \quad (2.4)$$

é o jacobiano da transformação presente na eq. (2.1). Quando o funcional acima é minimizado em relação a  $\mathbf{x}$ , obtém-se um algoritmo iterativo (Press, Vetterling, Teukolsky & Flannery 1992) na forma

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \Delta \mathbf{x}_i, \quad i = 1 \dots N, \quad (2.5)$$

o chamado Método de Newton-Raphson.

No artigo *Electrical Impedance Computed Tomography Based on a Finite Element Model*, Murai & Kagawa (1985) mostram como obter a transformação da eq. (2.1) a partir da discretização de um domínio bidimensional utilizando o Método dos Elementos Finitos e solucionam o problema inverso utilizando um procedimento iterativo semelhante ao método de Newton-Raphson. Os pesquisadores constatam que o mau condicionamento do problema é agravado à medida que se aumenta o número de elementos finitos em que o domínio é discretizado, visando melhorar a resolução espacial das imagens estimadas.

No artigo *Comparing Reconstruction Algorithms for Electrical Impedance Tomography*, Yorkey et al. (1987) mostram como obter o jacobiano da transformação da eq. (2.1) diretamente a partir de uma discretização do domínio em elementos finitos triangulares, à maneira proposta por Murai & Kagawa (1985). Emprega-se o método de Gauss-Newton ou de Newton-Raphson modificado, cuja diferença em relação à versão convencional é a incorporação de um termo de regularização para atenuar os efeitos do mau condicionamento do problema, para a estimação da distribuição de resistividade no domínio. Ressaltam os autores que a característica do problema mal condicionado fica explícita durante a minimização do funcional descrito pela eq. (2.3) que, devido à não linearidade da primeira diferenciação, demanda a expansão de  $\phi'$  em série de Taylor, na qual os termos de ordem superior são aproximados pelo produto  $[J'_i]^T J'_i$ , que apresenta número de condição da ordem de  $10^6$ . Para diminuir os efeitos do mau condicionamento deste produto matricial, introduz-se um termo de regularização de Marquardt, fazendo com que, na eq. (2.5),

$$\Delta \mathbf{x}_i = -([J'_i]^T J'_i + \lambda I)^{-1} J'_i (A \mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i), \quad (2.6)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro de regularização e  $I$  é uma matriz identidade de ordem compatível com a dimensão do problema. A contribuição destes autores é significativa à medida que demonstram como utilizar o modelo de elementos finitos proposto por Murai & Kagawa (1985) na linearização do problema inverso e introduzem a regularização como ferramenta para tratar o mau condicionamento deste problema. Com relação a este artigo, pode-se tecer dois comentários: em primeiro lugar, com o aumento na capacidade de processamento, o número de condição de  $10^6$  não deve mais ser considerado um

entreve à solução do problema inverso, desde que se trabalhe com precisão dupla de 16 bits em ponto flutuante, que não era disponível na época em que o artigo foi publicado, embora o tipo de equipamento não tenha sido mencionado. Em segundo lugar, afirma-se que as matrizes  $[J'_i]^T J'_i$  e  $(Ax_i - y_i)$  são *normalizadas*, porém não se explica com pormenores de que maneira. O método aqui desenvolvido serve como base para trabalhos nos quais variantes do método de Newton-Raphson são aplicadas à solução do problema e cuja discussão foge ao escopo desta tese. <sup>[iv]</sup>

Sobre os métodos de estimação estáticos pode-se afirmar que, em aplicações médicas ou no monitoramento de processos cuja dinâmica seja “lenta”, podem fornecer resultados satisfatórios, como demonstram os trabalhos citados acima. As limitações quanto à resolução espacial não são exclusivas destes métodos e podem ser minimizadas através de procedimentos de regularização; porém, quando procuram-se estimar distribuições de parâmetros cuja dinâmica exige o processamento de cada dado medido separadamente como, por exemplo, no monitoramento da função cardio-pulmonar, deve-se recorrer a métodos dinâmicos, discutidos na seqüência.

Vauhkonen, Karjalainen & Kaipio (1998), no artigo *A Kalman Filter Approach to Track Fast Impedance Changes in Electrical Impedance Tomography*, foram os primeiros a solucionar o problema da TIE considerando variações temporais na distribuição de resistividade de um domínio circular que simula uma seção transversal de um tórax humano. O problema é descrito na forma de espaço de estados, em que o modelo adotado para a dinâmica do estado a ser estimado, no caso a distribuição do parâmetro impedância (trata-se, verdadeiramente, da resistividade), é o passeio aleatório. A adoção do modelo de passeio aleatório não é justificada pelos autores; porém explica-se por dois motivos: o primeiro é a quase absoluta falta de modelos matemáticos para descrever o processo da respiração como um todo, levando em consideração a frequência dos batimentos cardíacos e sua relação com a circulação sanguínea nos pulmões e com o mecanismo de difusão, responsável pelas trocas gasosas; o segundo motivo são as elevadas taxas de amostragem nas leituras das tensões que servem como dados de entrada

---

<sup>[iv]</sup>Miranda (2003) apresenta uma discussão resumida sobre variantes do método de Newton-Raphson nesta aplicação.

nos algoritmos de solução do problema inverso. <sup>[v]</sup>

O tratamento estatístico dado ao sistema é estendido ao modelo de observações onde, por hipótese, as medidas e o erro  $e_i$  que se comete na aproximação de  $y_i$  por  $Ax_i$  na eq. (2.2) são variáveis aleatórias. Vauhkonen, Karjalainen & Kaipio (1998) discretizam o domínio em 496 elementos finitos quadrangulares e calculam o jacobiano da transformação dada pela eq. 2.2 conforme mostrado por Yorkey et al. (1987) para obter a equação procurada,

$$y_i = J_i x_i + e_i, \quad (2.7)$$

na qual  $J_i$  é o jacobiano da transformação na eq. (2.2). As equações de estado e de observações são recursivamente resolvidas para o estado (a distribuição de resistividades na malha) através do filtro Linearizado de Kalman. Foi simulado o ciclo cardíaco humano admitindo-se frequência cardíaca de 180 batidas por minuto, valor considerado típico durante atividade física. Uma série de aspectos abordados neste artigo merecem comentários.

O problema inverso da TIE é mal condicionado. Quando o número de elementos da malha discretizada (496) é idêntico à dimensão do problema de estimação, os autores constataam a existência de "instabilidade" (Vauhkonen, Karjalainen & Kaipio 1998) na solução, decorrente das operações de inversões de matrizes de ordem elevada durante o estágio de atualização do filtro, mas não a definem de maneira quantitativa, que seria através do número de condição de tais matrizes. Ainda assim, propõem a idéia de estimar parâmetros por *regiões* com características semelhantes, as chamadas *Regiões de Interesse* (RDI). A vantagem trazida por esta inovação é a diminuição no número de parâmetros a serem estimados, resultando em maior "estabilidade" (novamente não definida quantitativamente). O trabalho estima as resistividades de 5 RDI, correspondentes aos ventrículos direito e esquerdo do coração, pulmões e outros tecidos, denominados genericamente "background."

O filtro linearizado de Kalman atualiza o estado com base na linearização do modelo de observações em torno de um estado de referência, o que pode ser considerado

---

<sup>[v]</sup>Outras aplicações nas quais o conhecimento sobre as características do sistema físico é insuficiente empregam o mesmo modelo e serão posteriormente discutidas.

informação espacial *a priori*. Na implementação em estudo, são utilizados padrões trigonométricos bipolares de correntes (Fig. 2.4) na forma:

$$I_N = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi Nq}{32}\right) & N = 1, \dots, 32 \quad q = 1, \dots, 16 \\ \sin\left(\frac{2\pi N(q-16)}{32}\right) & N = 1, \dots, 32 \quad q = 17, \dots, 31 \end{cases}$$

e provocadas variações limitadas de resistividade em torno desta distribuição de re-

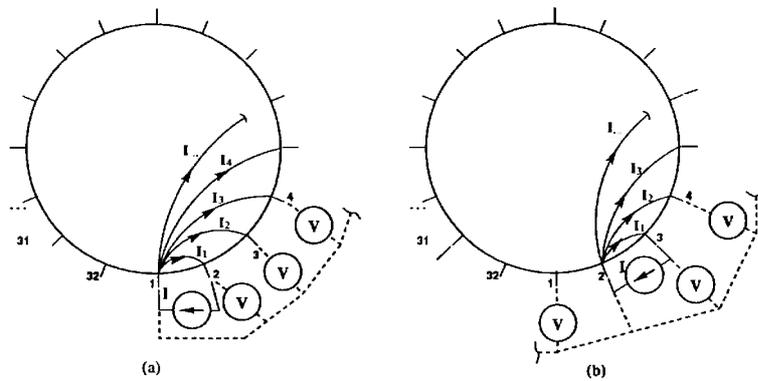


Figura 2.4: Método dos padrões trigonométricos, onde  $N$  é o eletrodo principal do dipolo e  $q$  é o auxiliar.

ferência, cabendo ao filtro rastrear as mudanças. Os resultados gráficos indicam a presença de discrepâncias de até 14% com relação ao valor esperado, mesmo quando apenas 5 parâmetros são estimados; isto significa que a linearização em torno de um mesmo estado impõe restrições à faixa de valores passíveis de identificação. Como efetuam-se medidas de tensões entre um eletrodo do dipolo de injeção de corrente e os demais, os autores consideram as impedâncias de contato meio-eletrodos conhecidas, porém os valores não são mencionados.

Corroborando resultados anteriores (Isaacson 1986, Cheney & Isaacson 1992), Vauhkonen, Karjalainen & Kaipio (1998) constatam que medidas de tensões referentes à aplicação de padrões de corrente de baixa frequência ( $q$  pequeno) são mais sensíveis às variações nas resistividades de regiões internas do domínio, ocorrendo o efeito inverso para padrões de excitação de frequências mais elevadas. Com isso, concluem os autores, poder-se-ia melhorar a distinguibilidade de áreas específicas.

O artigo *State Estimation in Time-varying Electrical Impedance Tomography* (Kaipio, Karjalainen, Somersalo & Vauhkonen 1999) descreve a implementação, em simulações

numéricas, do filtro de Kalman com alisamento na solução do problema da TIE. Da mesma forma que Vauhkonen, Karjalainen & Kaipio (1998), adota-se para o estado o modelo de passeio aleatório e, para as observações, um modelo idêntico ao da equação (2.7), obtido diretamente a partir da discretização do domínio em elementos finitos planos. Os pesquisadores argumentam que, quando as estimativas do estado não são utilizadas para efeito de *controle* em tempo real, pode-se adquirir todos os dados de tensões e estimar a distribuição da propriedade procurada no domínio com base nestas medidas, com duas vantagens teóricas sobre o filtro de Kalman: evitar o atraso, inerente ao filtro de Kalman, a que as estimativas estão sujeitas por este considerar apenas dados do passado; poder efetuar os cálculos necessários separadamente.

Kaipio et al. (1999) afirmam ainda que quando o vetor de estado (distribuição de condutividade/resistividade) possui dimensão equivalente à discretização do domínio, visando melhorar a resolução das imagens estimadas, o filtro de Kalman apresenta problemas de estabilidade. Este efeito pode ser atenuado com a incorporação de informações *a priori* acerca da distribuição geométrica dos parâmetros no domínio, procedimento denominado *regularização espacial* pelos autores. No caso em questão, é implementada a regularização de Tikhonov. Na prática, a regularização de Tikhonov implica em aumentar a dimensão do vetor de observações incluindo "medidas virtuais" (Kaipio et al. 1999), valores que possuem tais informações. O artigo não discute procedimentos para ajustar os parâmetros de regularização. Embora procedimentos de regularização propriamente ditos fujam ao escopo desta tese, sua implementação é necessária em alguns tópicos abordados e, por isto, são discutidos em um capítulo específico.

O critério para a escolha das matrizes de covariância do modelo de espaço de estados não é apresentado, mas seus efeitos são qualitativamente mencionados. Por exemplo, acerca da matriz de covariância do ruído no estado, afirmam que a capacidade que o filtro possui em rastrear alterações bruscas no estado é maior quanto maior a norma [vi] desta matriz; no entanto, prosseguem, um aumento excessivo na norma provoca estimativas instáveis.

Trabalhos posteriores, por exemplo (Trigo 2001, Trigo et al. 2004) apresentam es-

---

[vi] Os autores não definem uma norma específica.

tudos quantitativos do efeito provocado pelo aumento nos valores das variâncias do ruído no estado, elementos da diagonal da respectiva matriz de covariância, que corroboram as afirmações acima. Na presente tese, a instabilidade é discutida com base no espaço-solução do problema da TIE e na norma da matriz de covariância do erro de estimação.

Kaipio et al. (1999) concluem que não há diferenças significativas entre as estimativas produzidas pelo filtro linearizado e pelo filtro com alisamento sem efetuar a regularização quando o vetor de estado completo é estimado (neste caso, a dimensão é 100). Com isso, postulam que a regularização é necessária quando se deseja obter imagens mais fidedignas.

A acuidade das estimativas do filtro linearizado de Kalman pode ser prejudicada pela escolha de uma distribuição de referência cujo desvio quadrático em relação à real seja muito pronunciado. No artigo *Image reconstruction in time-varying electrical impedance tomography based on the extended Kalman filter* (Kim, Kim, Kim, Lee & Vauhkonen 2001), o filtro estendido de Kalman é apresentado como alternativa capaz de superar a dificuldade acima pois, nesta variante, a atualização do estado é feita linearizando-se os modelos de sistema e observação em torno do último estado estimado pelo filtro. O domínio é discretizado em elementos finitos bidimensionais. Emprega-se para o sistema o modelo de passeio aleatório e para as observações o modelo da equação (2.7), modificado para a inclusão de um termo de regularização de Tikhonov como forma de evitar reduzir a dimensão do problema através de RDI e suplantar os efeitos do mau condicionamento. O modelo completo (Cheng et al. 1989) é o adotado para os eletrodos.

Os autores efetuam simulações numéricas e ensaios aplicando padrões trigonométricos bipolares de correntes por meio de 32 eletrodos a uma malha com 776 elementos e 453 nós na tentativa de rastrear a localização de um e dois objetos cilíndricos movimentados a intervalos regulares no interior de uma solução salina. Os objetos cilíndricos e a solução possuem resistividades distintas e conhecidas.

Os resultados de simulações numéricas denotam a superioridade do filtro estendido sobre o linearizado na localização de um objeto imerso no meio salino; o mesmo ocorre no caso de dois objetos. Kim et al. (2001) observam que as resistividades (graficamente,

as máximas) são similares para as duas abordagens, mas a definição é melhor no filtro estendido.

Nos ensaios, o filtro estendido também apresenta melhores resultados que o linearizado no que diz respeito à localização dos objetos. Afirmam ainda os pesquisadores que a resistividade estimada para o *background* é "próxima" da real para ambas as versões, embora não mencionem o desvio efetivo. Para que isto fosse possível, prosseguem, o parâmetro de regularização e a matriz de covariância do estado tiveram que ser aumentados.

A discussão sobre os parâmetros de regularização é breve e merece comentários. Kim et al. (2001) obtêm as equações do filtro estendido a partir de um funcional a ser minimizado como o da equação (2.3), ao qual é incorporado um termo que envolve o erro de estimação ponderado pela respectiva matriz de covariância e um termo de regularização que depende de dois parâmetros: o de regularização ( $\alpha$ ) propriamente dito e uma matriz,  $\mathfrak{R}$ , à qual os autores denominam *matriz de regularização*. A função destes parâmetros é ponderar a influência das informações espaciais *a priori* sobre o comportamento do algoritmo. Ocorre que, sobre o procedimento para a escolha de  $\alpha$  diz-se apenas que é feita empiricamente (Kim et al. 2001); quanto à matriz  $\mathfrak{R}$ , utiliza-se um critério de suavização (Kim et al. 2001). Por fim, o termo de regularização mede o desvio quadrático entre o estado estimado e um estado de referência, que também pode ser escolhido arbitrariamente. Nas simulações e ensaios, Kim et al. (2001) utilizam como estado de referência a própria resistividade do *background*, que ocupa mais de 93% da área do domínio, sendo o restante preenchido pelos objetos cilíndricos.

Quando o parâmetro de regularização é aumentado na realização dos ensaios, isto significa que um fator maior de ponderação está sendo aplicado às informações *a priori* (no caso, a distribuição de resistividade no domínio); ao mesmo tempo, o critério de suavização empregado na construção da matriz  $\mathfrak{R}$  faz com que gradientes elevados de resistividades entre elementos adjacentes sejam minorados. A somatória destes dois procedimentos explica a obtenção de estimativas muito próximas ao valor real para o *background* e imagens difusas para os objetos a serem identificados, deixando claro o viés a que as estimativas são submetidas. A intensidade do viés poderia ser melhor mensurada

se os autores realizassem uma análise de sensibilidade à variação nos parâmetros  $\alpha$  e  $\mathfrak{R}$ , tema que esta tese aborda.

Outro ponto a comentar é a falta de menção aos valores utilizados como impedâncias de contato para os eletrodos, que não foram estimados, mas admitidos conhecidos.

Para tentar melhorar a qualidade das estimativas, procura-se incorporar mais informação *a priori* na solução do problema inverso, conforme descrevem Kim, Kang, Kim, Lee & Vauhkonen (2002) no artigo *Dynamic Image Reconstruction in Electrical Impedance Tomography With Known Internal Structures*. O trabalho utiliza o filtro estendido de Kalman como estimador de estados para um modelo de passeio aleatório para o sistema. A equação de observações provém da discretização de um domínio bidimensional em 453 elementos finitos e é baseada na eq. (2.7) porém inclui, além da regularização de Tikhonov, um termo de ponderação que leva em conta o conhecimento de resistividades de regiões específicas no interior do domínio. Os autores justificam a presença deste termo, que eleva a dimensão das matrizes utilizadas nas equações de atualização do estado pelo filtro, alegando que a existência de regiões próximas nas quais os gradientes de condutividade/resistividade sejam elevados podem afetar negativamente os valores estimados.

Os pesquisadores efetuam avaliações numéricas e experimentais em que um objeto cilíndrico é posicionado no centro do domínio circular e, em seguida, dois corpos cilíndricos são movimentados a intervalos regulares no meio salino. Os diâmetros e resistividades dos objetos cilíndricos e do meio salino são conhecidos. A posição e a resistividade do objeto cilíndrico no centro do domínio são incorporadas ao cálculo das estimativas através de um vetor de pseudo-medidas em que as componentes que possuem tais informações são corrigidas por um fator de intensidade. A exemplo do descrito anteriormente (Kim et al. 2001), o critério para a seleção dos parâmetros de regularização de Tikhonov e do fator que controla a intensidade do termo de ponderação é empírico mas não é discutido. Em relação às impedâncias de contato, pressupõe-se o conhecimento prévio.

Tanto para as avaliações numéricas quanto para as experimentais, os resultados mostram que, nas simulações e ensaios em que efetivamente a localização e a resistividade

do objeto central foram utilizadas, os resultados foram superiores aos obtidos sem tais informações, embora nenhum dado quantitativo tenha sido apresentado, apenas imagens do campo de resistividades.

A descrição do processo pelo qual pode-se incorporar termos de regularização ao filtro estendido de Kalman nestes dois últimos artigos (Kim et al. 2001, Kim et al. 2002) traz, como consequência direta, a possibilidade de melhorar a resolução espacial das imagens, uma vez que a regularização, teoricamente, permite superar as limitações numéricas impostas pelo problema mal condicionado, agravado quando o número de parâmetros a serem estimados aumenta. Outro ponto positivo que o trabalho apresenta é que, dada a generalidade da abordagem, a metodologia é extensível a outras versões do filtro de Kalman.

Nos trabalhos discutidos até aqui verifica-se que, sempre que algum tipo de modelo para o eletrodo é necessário, admite-se conhecida a impedância no contato meio-eletrodo. Esta hipótese é plausível apenas em aplicações da TIE nas quais seja possível determinar experimentalmente tal grandeza, como em bancadas construídas a fim de avaliar procedimentos de estimação. Em problemas práticos como os enfrentados na medicina, no entanto, a medição direta da impedância de contato é impossível; <sup>[vii]</sup> é, portanto, necessário incluí-la no conjunto de parâmetros a serem estimados.

Vilhunen, Kaipio, Vauhkonen, Savolainen & Vauhkonen (2002), no artigo *Simultaneous reconstruction of electrode contact impedances and internal electrical properties: I. Theory*, propõem a identificação em conjunto das resistividades de um meio e das impedâncias de contato nas interfaces entre os eletrodos e este meio. Emprega-se o modelo completo de eletrodo (Cheng et al. 1989) considerando as contribuições da condutividade (parte real) e da permitividade (parte imaginária) para a impedância de contato

$$z_N = \sigma + j\omega\epsilon, \quad (2.8)$$

onde  $z_N$  é impedância de contato em um eletrodo genérico  $N$ . A distribuição da im-

---

<sup>[vii]</sup>A medição desta grandeza é possível sob condições controladas (aplicação de gel em áreas delimitadas; tensões medidas com osciloscópio; raspagem da pele; variação na frequência de excitação), conforme relatam Rosell, Colominas, Pallas-Areny & Webster (1988).

pedância ao longo do volume ocupado pelo eletrodo obedece à equação de Laplace

$$\nabla \cdot (z_N \nabla \Psi) = 0, \quad (2.9)$$

onde  $\Psi$  é o potencial elétrico. Introduzindo-se as condições de contorno (Cheng et al. 1989) e impondo-se a conservação das cargas elétricas, a equação de Laplace pode ser resolvida por métodos numéricos. Vilhunen et al. (2002) discretizam o modelo do eletrodo e do meio, suposto homogêneo, através de elementos finitos bidimensionais, para uma avaliação experimental, e tridimensionais, para simulações numéricas. Padrões bipolares linearmente independentes de correntes são aplicados ao domínio em ambos os casos.

Através da discretização do modelo de elementos finitos, o jacobiano, eq. (2.4), é calculado e o método de Newton-Raphson soluciona o problema inverso para a resistividade do domínio e para as impedâncias de contato dos eletrodos. Resultados obtidos simulando-se uma célula de teste experimental contendo solução salina de resistividade  $0,6 \Omega m$  e dois eletrodos idênticos são comparados a medições de resistividade da solução efetuadas na célula real. Conclui-se que os valores medidos e os calculados pelo método de Newton-Raphson considerando o modelo de eletrodo são equivalentes. Por outro lado, verifica-se também que, para cálculos em que o modelo de eletrodo não é considerado, a discrepância é de aproximadamente 25% a  $10 kHz$ , aumentando com a diminuição da frequência do sinal injetado e vice-versa (Vilhunen et al. 2002). Quanto às impedâncias de contato, os valores determinados pela solução do problema inverso, segundo os autores, são praticamente idênticos aos obtidos experimentalmente com base em medições de impedância da solução quando supõe a presença dois eletrodos iguais.

O estudo com um modelo tridimensional contendo 16 eletrodos, sendo um de referência (terra fixo) e 828 elementos tetraédricos, para frequências entre  $500 Hz$  e  $1 MHz$ , admitiu como hipóteses: homogeneidade da solução salina; impedância de contato igual para todos os eletrodos; ruído entre 0,5% e 1% do máximo valor das tensões calculadas pela solução do problema direto, que simulam medidas efetivas.

Os resultados de Vilhunen et al. (2002) demonstram que, com dados simulados, é possível estimar a resistividade da solução e as impedâncias de contato dos eletrodos, quando as "medidas" são afetadas por ruído, com discrepância máxima de  $\cong 2\%$  para

a resistividade e  $\cong 23,5\%$  e  $50\%$ , respectivamente, para as partes real e imaginária da impedância de contato. Concluem os autores que é potencialmente viável estimar os dois parâmetros em conjunto; salientam ainda que a presença de regiões heterogêneas e de impedâncias de contato diferentes não representam problemas, pois o método de solução proposto é genérico.

Um ponto que deixa de ser comentado pelos pesquisadores é o motivo para a elevada discrepância nas estimativas de impedância de contato, provavelmente decorrente de erros numéricos no cálculo do jacobiano, uma vez que não se utilizam procedimentos de regularização. Ainda assim, os dados apresentados denotam que, a elevadas frequências, dada sua ordem de grandeza, poder-se-ia negligenciar a parte imaginária da impedância de contato, conforme afirmam Barber & Brown (1984); não por acaso, a maior discrepância neste parâmetro ocorreu justamente a  $1\text{ Mhz}$ .

Com o objetivo de corroborar os resultados de Vilhunen et al. (2002), o artigo *Simultaneous reconstruction of electrode contact impedances and internal electrical properties: II. Laboratory experiments*, de Heikkinen, Vilhunen, West & Vauhkonen (2002), propõe-se a avaliar o procedimento de estimação conjunta dos parâmetros do meio e dos eletrodos através de ensaios em uma bancada experimental cilíndrica preenchida com solução salina, com e sem a presença de um objeto imerso, à qual acoplam-se 16 eletrodos igualmente distribuídos ao longo do perímetro.

A bancada experimental e as interfaces entre os eletrodos e o meio são discretizadas em elementos finitos tetraédricos; posteriormente, este modelo é diretamente utilizado no cálculo do jacobiano, eq. (2.4). O problema inverso é resolvido por meio do método de Newton-Raphson, eq. (2.5), considerando cada tensão medida como a soma do potencial elétrico, dependente da distribuição de condutividade do meio e da impedância de contato nos eletrodos, com um termo de ruído branco gaussiano de média nula na forma

$$V_N = U(\sigma, z_N) + \nu, \quad (2.10)$$

com  $N$  = número de eletrodos,  $\nu = \mathbb{N}(0, \Gamma_\nu)$ ,  $\Gamma_\nu = I_N$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  e  $z_N \in \mathbb{R}^N$  ou seja, despreza-se o efeito da permitividade em ambos os parâmetros. Com este modelo, os pesquisadores efetuam dois grupos de testes: no primeiro grupo, medem-se as tensões

através dos 16 eletrodos, mantendo um deles como referência, sem que qualquer objeto seja inserido na cuba e admitindo que a impedância de contato de todos os eletrodos seja idêntica. Com isso, apenas dois parâmetros, a condutividade do meio e a impedância de contato nos eletrodos, são estimados, com  $\Delta x$  na eq. (2.5) calculado com base na máxima verossimilhança. Estes experimentos mostram que, mantendo-se um valor fixo como estimativa inicial para a impedância dos eletrodos e variando-se a estimativa inicial para a distribuição homogênea de condutividade para a solução, há convergência para um mesmo valor em 3 iterações.

No segundo grupo de testes, utiliza-se uma bancada semelhante à descrita, porém com dimensões diferentes. Em primeiro lugar, determina-se a condutividade da solução homogênea e a impedância de contato dos eletrodos que, por hipótese, é idêntica para todos eles. A seguir, um objeto cilíndrico plástico de diâmetro 5 vezes inferior ao do tanque é imerso no meio em região próxima à borda. Através dos eletrodos, injetam-se padrões vizinhos de correntes e medem-se tensões. Utiliza-se o método de Newton-Raphson para estimar impedâncias de contato em cada eletrodo e as condutividades do meio, agora heterogêneo. O aumento no número de incógnitas do problema inverso demanda, segundo os pesquisadores, o emprego de parâmetros de regularização de Tikhonov, empiricamente escolhidos, e a utilização de estimativas iniciais para os parâmetros desconhecidos. Os resultados experimentais obtidos demonstram que o objeto imerso e as impedâncias nos eletrodos são identificados desde que as impedâncias previamente calculadas tenham sido fornecidas como informação *a priori* para o procedimento iterativo. Com isso, Heikkinen et al. (2002) sugerem que, caso não seja possível efetuar medições de tensões em um meio homogêneo para que se obtenham estimativas para as impedâncias de contato dos eletrodos, sua identificação, bem como das condutividades de um meio heterogêneo, é inviável. Na medicina, por exemplo, em que é impossível efetuar medições com um meio homogêneo, as impedâncias de contato na interface eletrodo-pele não poderiam ser estimadas.

Sobre o artigo de Heikkinen et al. (2002) cabe observar que o objeto foi considerado identificado por inspeção visual, pois nenhuma técnica de verificação sobre a convergência do método é mencionada. Por exemplo, a norma euclidiana da diferença entre as tensões

medidas e as calculadas,  $\|V_N - U(\sigma, z_N)\|_2$ , poderia ter sido considerada como critério de avaliação. Por outro lado, conforme outros trabalhos demonstram (Schmitt & Louis 2002, Kim et al. 2001, Kim et al. 2002), a presença de termos de regularização tende a melhorar a qualidade das estimativas independentemente do método empregado na solução do problema inverso, por se tratar de um fator *ad hoc* que minimiza as discrepâncias a cada iteração.

Um método para a identificação das impedâncias no contato meio-eletrodos e da presença de uma perturbação em um meio homogêneo, denominado *estimação em duas fases*, é apresentado por Trigo et al. (2004) no artigo *Electrical Impedance Tomography Using the Extended Kalman Filter*. O problema inverso da TIE é modelado na forma de espaço de estados. O estado a ser estimado é a distribuição de resistividade em um domínio circular discretizado em 150 elementos finitos triangulares, cuja evolução temporal é supostamente do tipo passeio aleatório. A equação de observações é obtida diretamente a partir da linearização do modelo de elementos finitos calculando-se o jacobiano da eq. (2.4) a cada iteração do filtro. A incerteza no modelo de observação é denotada pela adição de um termo de ruído branco gaussiano de média nula. À seqüência de ruídos no estado e nas medidas associam-se matrizes de covariância diagonais e constantes. Assim como para o domínio, utiliza-se o método dos elementos finitos para discretizar o efeito da impedância no contato meio-eletrodos, à maneira de Cheng et al. (1989). A cada impedância de contato corresponde um elemento quadrangular de resistividade uniforme.

Para a identificação dos parâmetros de contato emprega-se uma bancada cilíndrica em cujo perímetro acoplam-se 32 eletrodos retangulares de bronze igualmente espaçados, pelos quais padrões bipolares linearmente independentes de correntes são injetados e tensões são medidas.

O procedimento de estimação em duas fases consiste em, a partir de medidas de tensões resultantes da passagem de correntes pelo meio, utilizar o filtro estendido de Kalman para obter sucessivas estimativas para as impedâncias de contato, identificando assim os eletrodos. Na segunda fase, um objeto cilíndrico é imerso na solução, cuidando-se para não alterar a altura do líquido. Isto representa uma perturbação na forma de uma

função degrau. Sob tais condições, o algoritmo deve ser capaz de estimar as mudanças nas resistividades dos elementos finitos cuja posição coincida com a do objeto. Para esta fase, padrões diametrais de correntes são injetados.

Na fase 1, os elementos são agrupados em 34 RDI, sendo duas correspondentes ao meio e 32 representando os parâmetros de cada eletrodo. Na fase 2, excluem-se as impedâncias de contato do problema de estimação e agrupam-se os 150 elementos internos em 16 RDI. Os autores justificam a separação entre os problemas de estimação das impedâncias de contato e da distribuição de resistividade no domínio com base no Teorema do Ponto Fixo. Segundo este teorema (Holtzman 1970), a sucessiva alternância entre os procedimentos de estimação das fases 1 e 2 conduz a um mesmo resultado; no artigo em discussão, a alternância não foi efetuada pois, supostamente, a introdução do objeto sem causar alteração na altura do líquido não deve causar modificações na impedância de contato. Trigo et al. (2004) apresentam resultados para as impedâncias de cada eletrodo e determinam a presença do objeto cilíndrico imerso no meio salino. Como critério de convergência, recorrem ao resíduo normalizado de observação.

O trabalho de Trigo et al. (2004) difere dos demais artigos em que procura-se identificar os parâmetros de contato sob os seguintes aspectos: em primeiro lugar, ao contrário de Vilhunen et al. (2002) e Heikkinen et al. (2002), emprega-se o filtro de Kalman em vez do método de Newton-Raphson. Além disso, nenhum procedimento de regularização, a não ser o agrupamento em RDI, ou informação geométrica *a priori*, foram incorporados ao problema de estimação. Deve-se ressaltar que, como afirmam Heikkinen et al. (2002), as impedâncias de contato foram estimadas com base em medições de tensões após a passagem de correntes pelo meio homogêneo, o que representa uma limitação em determinadas aplicações. No entanto, há evidências de que esta restrição pode ser contornada (Trigo & Gonzalez Lima 2005).

Com relação à abordagem do problema da TIE por meio do filtro estendido de Kalman (Kim et al. 2001, Kim et al. 2002), o artigo em questão difere por estimar as impedâncias e utilizá-las na identificação do objeto imerso no meio, ao passo que, para Kim et al. (2001) e Kim et al. (2002), tais impedâncias são admitidas conhecidas e, portanto, excluídas do problema inverso. A presença de termos de regularização espacial

de Tikhonov incorporados ao filtro é outra particularidade destes trabalhos (Kim et al. 2001, Kim et al. 2002).

Mesmo apresentando as contribuições descritas, Trigo et al. (2004) não discutem aspectos relativos à possibilidade ou não de utilizar o procedimento em duas fases para efetuar a estimação *conjunta* de parâmetros de contato e do meio não-homogêneo, o que Heikkinen et al. (2002) sugerem ser impossível. Este aspecto é posteriormente abordado na tese, onde os procedimentos e resultados de Trigo et al. (2004) são rediscutidos e reavaliados.

Na tese, são aplicadas na solução do problema da TIE técnicas baseadas em variantes do filtro de Kalman, cujos conceitos são conhecidos desde a década de 1960, quando da publicação de dois artigos de Rudolf Emil Kalman (Kalman 1960, Kalman & Bucy 1961). A lista de publicações sobre a técnica é ampla; como exemplo, podem ser citados Jazwinski (1970) e Sorenson (1992), entre outros. Por este motivo, a apresentação do filtro de Kalman propriamente dito é deixada para os capítulos em que é utilizado. No entanto, a questão da estabilidade do filtro para sistemas não estacionários, não lineares ou ambos permaneceu em aberto até 1990, quando Guo (1990) publicou *Estimating Time-Varying Parameters by Kalman Filter Based Algorithm: Stability and Convergence*.

Neste artigo, Guo argumenta que não se havia demonstrado até então alguma condição que garantisse que o erro de estimação do estado  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  fosse limitado quando o sistema fosse não estacionário ou ainda, se a não estacionariedade incluísse, de alguma forma, variáveis aleatórias. Em linhas gerais, partindo de um sistema na forma

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \boldsymbol{\omega}_k \quad (2.11)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbb{H}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\nu}_k, \quad (2.12)$$

e utilizando como hipóteses apenas que (i)  $\boldsymbol{\omega}_k$  e  $\boldsymbol{\nu}_k$  são seqüências determinísticas ou aleatórias *limitadas* de acordo com a norma euclidiana

$$\sup_k E[\|\boldsymbol{\omega}_k\|_2^p + \|\boldsymbol{\nu}_k\|_2^p] < \infty,$$

$p \geq 2$  e (ii), que  $\mathbb{H}$  pode conter seqüências aleatórias, Guo (1990) demonstra que os erros de estimação tendem para um valor limitado quando o número de estimativas tende para

um valor elevado. Embora o conceito de grandeza seja qualitativo, outros parâmetros de avaliação, como as normas das matrizes de covariância do erro de estimação e os resíduos normalizados, ajudam a estabelecer valores para problemas específicos.

O comportamento do filtro de Kalman sob tais condições, conforme demonstrado por Guo, auxilia na explicação de diversos resultados publicados na tese, notadamente quando o procedimento de estimação parcial do estado ( ou estimação em duas fases) é utilizado, conforme será discutido mais adiante.

Kaipio & Somersalo (2005), em *Statistical and Computational Inverse Problems*, afirmam que, na TIE, uma informação *a priori* normalmente utilizada é a de que dois ou mais grupos de variáveis não são correlacionadas. Nestas condições, a matriz de covariância do erro de estimação, admitindo-se que sejam 2 os grupos de variáveis, assume a forma

$$\begin{bmatrix} \Gamma_D & | & 0 \\ \text{---} & | & \text{---} \\ 0 & | & \Gamma_E \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

onde  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_E$  representam, respectivamente, matrizes de covariância dos erros de estimação no domínio e nos eletrodos. Esta formulação possui paralelo com o método de estimação parcial do estado, sugerido nesta tese.

Com relação ao modelo de evolução do estado, Kaipio & Somersalo (2005) argumentam que, em tomografia de processo, é necessário evitar o modelo de passeio aleatório, pois a distribuição da concentração que se deseja estimar depende do modelo da dinâmica do sistema. A equação de evolução deve satisfazer à equação de difusão-convecção

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = k_D \nabla \cdot \nabla C(x, t) + \vec{v} \cdot \nabla C(x, t), \quad (2.14)$$

em que  $C(x, t)$  é a concentração,  $k_D$  é o coeficiente de difusão e  $\vec{v}$  é o campo de velocidades. O campo de velocidades é considerado conhecido e resulta da solução da equação de Navier-Stokes estacionária para fluidos incompressíveis.

## **Parte II**

# **Formulação Teórica**

## Capítulo 3

# Modelos do domínio e dos eletrodos

### 3.1 Modelo do domínio

A região em estudo é a seção transversal de um objeto, considerado um domínio fechado  $\Gamma$  cujo meio contínuo possui distribuição estacionária de carga, e distribuição de condutividade  $\sigma(x, y)$  (ou resistividade  $\rho(x, y)$ ) e permitividade  $\epsilon(x, y)$ , conforme mostrado na Fig. 3.1.

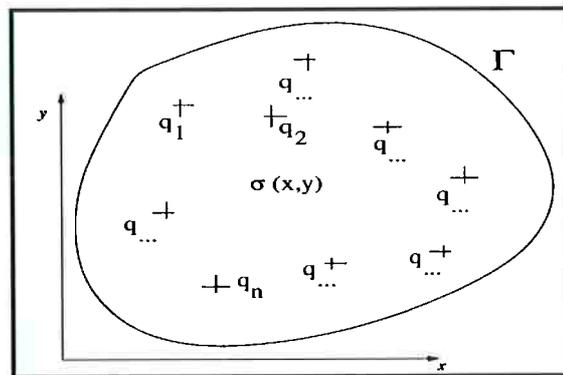


Figura 3.1: Representação de um domínio bidimensional genérico  $\Gamma$  com distribuição estacionária de carga  $q_1, \dots, q_n$  e condutividade  $\sigma(x, y)$  (Trigo 2001).

A terceira equação de Maxwell na forma diferencial (Lei de Faraday) estabelece que:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

Quando o meio é atravessado por correntes de frequências inferiores a 30 MHz, pode-se utilizar a aproximação  $\partial \mathcal{B} / \partial t = 0$ , resultando em  $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$  (Hua et al. 1993a), onde  $\mathcal{B}$  é a indutância magnética e  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico.

Por outro lado, verifica-se que, na forma integral, a eq. (3.1) com derivadas temporais nulas conduz a:

$$\int_{\ell} \mathbf{E} \cdot d\ell = 0, \quad (3.2)$$

onde  $\ell$  é uma curva fechada.

Assim, existe um potencial elétrico escalar  $\Psi$  tal que:

$$-\nabla\Psi(\sigma) = \mathbf{E} \quad (3.3)$$

Para obter a relação entre a densidade de corrente  $\mathbf{J}$  e o potencial elétrico  $\Psi$  utiliza-se a quarta equação de Maxwell na forma diferencial (Lei de Ampère) <sup>[i]</sup>

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{\epsilon c^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} \quad (3.4)$$

A aplicação do operador divergência a ambos os lados da eq. (3.4) e a utilização da primeira equação de Maxwell na forma diferencial,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = q/\epsilon$ , conduz a

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial q}{\partial t} \quad (3.5)$$

onde  $q$  denota a carga elétrica total no domínio  $\Gamma$ . A equação da continuidade garante que, no interior do domínio, o segundo termo da eq. (3.5) seja nulo. Assim:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (3.6)$$

A densidade de corrente no interior de um meio contínuo é dada por

$$\mathbf{J} = -[\sigma(x, y) + j\omega\epsilon]\mathbf{E} \quad (3.7)$$

onde  $j = \sqrt{-1}$  e  $\omega =$  freqüência angular da corrente injetada. Segundo Barber & Brown (1984), para correntes injetadas com freqüência entre 20 e 50 kHz, o meio possui características puramente resistivas; Stratton (1941) afirma que a densidade de corrente em uma solução líquida fracamente ionizada ou em um sólido pode ser considerada uma função apenas da condutividade,  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\sigma(x, y))$ . Dessa forma, substituindo-se a eq. (3.3) na eq. (3.7), desprezando-se o termo imaginário nesta última e utilizando-se a eq. (3.6) obtém-se a equação de Laplace

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Psi) = 0, \quad (3.8)$$

<sup>[i]</sup>  $\epsilon =$  permitividade elétrica;  $c =$  velocidade da luz

que descreve a distribuição do potencial elétrico  $\Psi$  no interior do domínio.

Sobre a fronteira deve haver equilíbrio entre as correntes que entram e saem do domínio, ou seja,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.9)$$

onde  $\mathbf{n}$  é um versor normal à superfície e orientado para fora. A condutividade de um meio pode ser determinada quando correntes são injetadas e tensões são medidas ou vice-versa. Na TIE, eletrodos acoplados a pontos determinados da fronteira do domínio são utilizados para injetar  $c \in \mathbb{R}^\ell$  padrões de correntes, estabelecendo assim as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\partial \Psi(\sigma)}{\partial n} &= J_\ell && \text{no } \ell\text{-ésimo eletrodo;} \\ 0 &&& \text{nos demais pontos da fronteira,} \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde  $J_\ell$  representa a densidade de corrente através do  $\ell$ -ésimo eletrodo. A função potencial  $\Psi(\sigma(x, y))$  é equivalente à distribuição de *tensões* no domínio, nomenclatura que será adotada daqui em diante.

Neste trabalho, os eletrodos pelos quais injetam-se correntes são também utilizados para a medição de tensões  $v \in \mathbb{R}^\ell$ , muito embora seja possível empregar eletrodos distintos, com a vantagem de minimizar a queda de tensão decorrente da impedância de contato na interface entre a superfície do meio e o metal do eletrodo (Hua, Woo, Webster & Tompkins 1993b).

## 3.2 Modelo do eletrodo

Existem, na interface entre cada eletrodo metálico e a superfície do domínio, três efeitos a serem considerados. O primeiro é a discretização da densidade de corrente, que atravessa efetivamente apenas uma fração  $\partial\Gamma$  da fronteira do domínio, conforme mostram as equações (3.10). Tais equações, em conjunto com a eq. (3.8), estabelecem o chamado *gap model* (Cheng et al. 1989). Na prática, esse modelo é inadequado pois a densidade de corrente  $J$  é desconhecida; por outro lado, aproximando-se a densidade de corrente por uma constante (a corrente injetada), o modelo ainda é insatisfatório (Cheng et al. 1989, Cheney et al. 1999).

O segundo efeito é a queda de tensão decorrente da impedância de contato entre o eletrodo e o meio. No caso da tomografia de processo, dependendo do material da fronteira do domínio, tal impedância pode ser considerada desprezível (West, Tapp, Spink, Bennett & Williams 2001). No caso geral e, particularmente, em aplicações na medicina, a impedância no contato entre o tecido orgânico e o eletrodo é elevada e, portanto, as dimensões do eletrodo influenciam as leituras de tensões e devem ser incorporadas ao modelo (Hua et al. 1993a) <sup>[ii]</sup>.

Finalmente, admite-se que não haja diferença de potencial ao longo de cada superfície do eletrodo, de forma que qualquer queda de tensão seja decorrente da mudança no meio de propagação da corrente. O modelo de eletrodo que contempla todos os efeitos acima é denominado *modelo completo* (Cheng et al. 1989), cujas equações são:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma \nabla \Psi) &= 0 \\ \int_{\partial\Gamma_i} \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds &= c_{e_i} \quad i = 1, 2, \dots, \ell \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\sigma \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 \quad (3.12)$$

$$\Psi + z_{e_i} \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial n} = v_{e_i} \quad i = 1, 2, \dots, \ell \quad (3.13)$$

A eq. (3.11) representa a corrente total  $c_{e_i}$  atravessando cada eletrodo  $e_i$  que ocupa uma fração  $\partial\Gamma_i$  da fronteira do domínio, enquanto a eq. (3.12) denota o fluxo nulo de cargas nos intervalos entre os eletrodos. A impedância efetiva de contato na interface é representada pelo termo  $z_{e_i} (\Omega m^2)$  na eq. (3.13). A queda de tensão devida à impedância efetiva somada à tensão (considerada constante na seção transversal do metal) fornece a tensão  $v_{e_i}$  em cada um dos  $\ell$  eletrodos. A tensão nos eletrodos pode ser experimentalmente medida ou teoricamente calculada. Salienta-se que a hipótese de permitividade elétrica desprezível foi novamente utilizada.

<sup>[ii]</sup>Hua et al. (1993a) argumentam que, como a impedância de contato e a área são inversamente proporcionais, eletrodos com maior área distribuem de maneira mais uniforme a corrente pela fronteira do domínio e apresentam maior sensibilidade às pequenas variações de tensões decorrentes de alterações nas propriedades dielétricas do meio.

### 3.3 Problemas direto e inverso

Na TIE, as tensões na fronteira do domínio são as grandezas mensuráveis e a distribuição de condutividade que proporcionou tais medidas deve ser determinada, caracterizando o *problema inverso*.

A solução de um problema inverso pode ser obtida resolvendo-se iterativamente o *problema direto* a ele associado. O problema da TIE é dito direto quando calcula-se a distribuição de tensão no domínio adotando-se uma distribuição interna de condutividade e aplicando-se padrões de correntes conhecidos. A seguir, as tensões calculadas são comparadas às medidas e o procedimento é repetido até que a discrepância entre valores calculados e medidos atinja a tolerância estabelecida.

Soluções analíticas para a equação de Laplace (3.8) com condições de contorno dadas pelas equações (3.11, 3.12 e 3.13) não são conhecidas para domínios com geometria irregular, mesmo sob a hipótese de meio isotrópico. Neste trabalho, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é utilizado para discretizar tanto o domínio quanto os eletrodos e resolver numericamente os problemas direto e inverso.

# Capítulo 4

## Método dos Elementos Finitos aplicado à TIE

### 4.1 Discretização do domínio

O procedimento completo para a discretização de um domínio contínuo em elementos finitos planos triangulares é descrito em Trigo (2001); assim, optou-se por apresentá-lo de forma resumida neste instante.

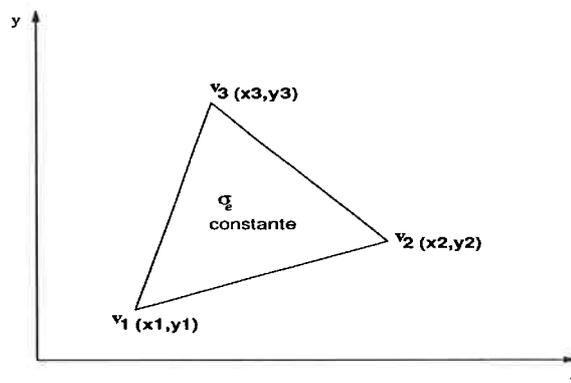


Figura 4.1: Elemento triangular genérico.

A seção transversal do objeto em estudo é dividida em  $m$  elementos finitos planos triangulares com condutividade  $\sigma_m$  constante. A distribuição de tensões  $v_e$  no interior de um elemento genérico, como o da Fig. 4.1, é determinada com base nas tensões nodais, utilizando-se uma função de interpolação linear (Murai & Kagawa 1985, Yorkey et al. 1987). Ao mesmo tempo, deve-se garantir a continuidade da tensão na transição entre os elementos. Sadiku (1992) demonstra que a função de interpolação que atende

a estes requisitos para todo o domínio é da forma:

$$V(x, y) \simeq \sum_{e=1}^m v_e(x, y), \quad (4.1)$$

onde

$$v_e(x, y) = a + bx_i + cy_i, \quad (4.2)$$

é a função de interpolação linear,  $a, b, c$  são constantes a determinar e  $x_i, y_i, i = 1, 2, 3$  são as coordenadas nodais do elemento  $e$ .

Resolvendo a eq. (4.2) para  $a, b, c$  e substituindo tal resultado novamente na eq. (4.2), obtém-se a tensão de um ponto genérico do elemento  $e$  em função de suas tensões nodais  $v_{ei}$ ,

$$v_e(x, y) = \sum_{i=1}^3 \alpha_{\mathbb{F}_i}(x, y) v_{ei} \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.3)$$

As funções  $\alpha_{\mathbb{F}_i}$  são denominadas *funções de forma* e dependem do polinômio interpolador e das características geométricas do elemento.

Deve-se agora associar o campo de tensões à condutividade  $\sigma_e$ , constante, do elemento. Uma maneira de fazê-lo é utilizando o princípio variacional associado à equação diferencial de Laplace, que é dado por (Logan 1986, Sadiku 1992)

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}} \sigma_e \|\nabla v_e\|^2 d\mathbb{V}, \quad (4.4)$$

onde  $\mathbb{V}$  representa o volume do elemento. O extremo da função acima é obtido, com  $\mathbf{v}_e$  denotando o vetor que contém as tensões nodais, fazendo

$$\frac{\partial \pi_e}{\partial v_{ei}} = Y_e(\sigma) \mathbf{v}_e = [0], \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.5)$$

A matriz  $Y_e(\sigma) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  é frequentemente denominada *matriz local de rigidez* ou *matriz de condutividade local* do elemento  $e$  <sup>[i]</sup>. Considerando  $\mathbb{A}$  a área do elemento e  $t$  sua espessura, os componentes  $Y_{e,ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) da matriz  $Y_e(\sigma)$  são dados por (Murai & Kagawa 1985):

$$Y_{e,ij} = \frac{t\sigma_e}{4\mathbb{A}} [\xi_i \xi_j + \tau_i \tau_j], \quad i \neq j \quad (4.6)$$

<sup>[i]</sup>O primeiro termo está associado a problemas estruturais (Logan 1986), enquanto o segundo é mais adequado a problemas que envolvem grandezas elétricas.

com

$$\begin{aligned} \xi_1 &= y_2 - y_3, & \xi_2 &= y_3 - y_1, & \xi_3 &= y_1 - y_2 \\ \tau_1 &= x_3 - x_2, & \tau_2 &= x_1 - x_3, & \tau_3 &= x_2 - x_1 \\ & & & & Y_{e_{ij}} &= Y_{e_{ji}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

e

$$\begin{aligned} Y_{e_{11}} &= -Y_{e_{12}} - Y_{e_{13}} \\ Y_{e_{22}} &= -Y_{e_{21}} - Y_{e_{23}} \\ Y_{e_{33}} &= -Y_{e_{31}} - Y_{e_{32}} \end{aligned}$$

A seguir, escreve-se a matriz local em termos das coordenadas globais da malha, obtendo-se a matriz  $\bar{Y}_e(\sigma)$  e o funcional  $\bar{\pi}_e$ . O princípio variacional válido para cada elemento estende-se também a todo o domínio e corresponde à somatória das parcelas individuais

$$\pi = \sum_{e=1}^m \bar{\pi}_e \quad (4.8)$$

A minimização do funcional dado pela eq. (4.8) irá fornecer a matriz global de condutividade  $Y(\sigma)$ . Dessa forma,

$$\frac{\partial \pi}{\partial v_j} = Y(\sigma) \mathbf{v} = \partial \left( \sum \bar{\pi}_e \right) = \left( \sum \bar{Y}_e(\sigma) \right) \mathbf{v} = [0], \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (4.9)$$

onde  $s$  representa o número total de nós da malha e  $\sigma \in \mathbb{R}^m$ . Da eq. (4.9), conclui-se que  $Y(\sigma) = \sum \bar{Y}_e(\sigma)$ .

## 4.2 Discretização dos eletrodos

O modelo completo de eletrodo desenvolvido por Cheng et al. (1989) e apresentado na seção 3.2 considera os efeitos da discretização da densidade de corrente e da queda de tensão devida à impedância de contato entre o metal do eletrodo e a superfície que delimita o domínio. A solução das equações (3.11), (3.12) e (3.13) com o auxílio do MEF foi apresentada por Hua et al. (1993a).

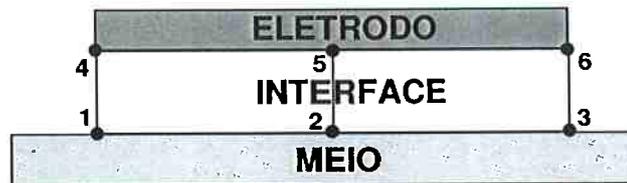


Figura 4.2: Discretização da interface meio-eletrodo (adaptado de Hua *et al.* (1993a)).

O domínio a ser discretizado é a interface entre o eletrodo e o meio, conforme mostrado na Fig. 4.2. A grande dificuldade consiste em determinar-se a espessura da camada intermediária, que é a responsável pela impedância de contato. No caso de aplicações na área médica, dois fatores acentuam tal dificuldade. O primeiro é a diferença nas propriedades dielétricas das principais camadas de tecidos que compõem a pele humana. Devido à presença de células mortas, a epiderme (camada mais externa) apresenta impedância de contato superior à dos tecidos vivos internos (Hua *et al.* 1993a). Além disso, sob certas certas circunstâncias como, por exemplo, a prática esportiva, a presença de eletrólitos em secreções como o suor confere um caráter dinâmico ao processo, inviabilizando qualquer tentativa de determinação experimental tanto da espessura quanto da efetiva impedância na interface.

No caso da tomografia de processo, as características dos materiais são conhecidas e podem ser controladas, facilitando a identificação das impedâncias de contato. No entanto, o efeito das dimensões do eletrodo ainda deve ser levado em conta.

Hua *et al.* (1993a) consideram a interface pele-eletrodo um domínio constituído por 2 elementos finitos quadrangulares, totalizando 6 nós, conforme mostrado na Fig. 4.2. O modelo, denominado *modelo completo simplificado*, admite as hipóteses:

1. as tensões nodais na superfície metálica livre (sem contato com o meio) possuem valores iguais;
2. não há fluxo de corrente ao longo da face do eletrodo em contato com o meio.

Com isso, para um eletrodo genérico  $\ell$ ,  $v_{\ell_4} = v_{\ell_5} = v_{\ell_6}$  e a impedância fica restrita às ligações entre os nós 1, 2, 3 e o ponto em comum formado pelos nós 4, 5 e 6.

Para a obtenção das tensões em qualquer ponto no interior da interface em função das tensões nodais, o procedimento é análogo ao utilizado para o domínio na seção 4.1. A distribuição de tensões é dada por

$$v_\ell(x, y) = \beta_{\mathbb{F}_i} \sum_{i=1}^4 v_{\ell_i}, \quad (4.10)$$

onde  $\beta_{\mathbb{F}_i}$  representam as funções de forma que incorporam as características geométricas do elemento.

O princípio variacional associado à eq. (3.8) é

$$\pi_\ell = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_\ell} \sigma_\ell \|\nabla v_\ell\|^2 d\mathbb{V}_\ell \quad (4.11)$$

A eq. (4.11) permite associar o campo de tensões à condutividade  $\sigma_\ell$  para um eletrodo de dimensão unitária na direção  $z$ . A minimização deste funcional com respeito às tensões nodais conduz à matriz de condutividade local do eletrodo,

$$E_\ell = \frac{\sigma_\ell}{t} \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 & 0 & -\frac{a}{2} \\ 0 & a & 0 & -a \\ 0 & 0 & \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} & -a & -\frac{a}{2} & 2a \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

onde  $t$  representa a espessura da camada na interface pele-eletrodo e  $a$  é metade da largura do eletrodo. A matriz local  $E_\ell$  dos elementos quadrangulares é, então, escrita em termos das coordenadas globais da malha que contém o domínio discretizado em elementos triangulares. A matriz resultante é  $\overline{E}_\ell$ . Utiliza-se o princípio da superposição de efeitos (Logan 1986) para que os elementos da matriz  $\overline{E}_\ell$  sejam incorporados à matriz global  $Y$ , eq. (4.9), possibilitando a determinação conjunta das condutâncias efetivas de contato,  $z_{e_i} = \frac{\sigma_\ell}{t} (\Omega m^2)^{-1}$ , e das condutividades dos elementos triangulares pela solução do problema inverso.

### 4.3 Solução do problema direto

A matriz global de condutividade  $Y \in \mathbb{R}^{s \times s}$ , que já incorpora as matrizes locais dos  $\ell$  eletrodos, é simétrica e singular. A indeterminação do sistema descrito pela eq. (4.9) é

eliminada com a introdução das condições de contorno nos eletrodos, conforme equações (3.11), (3.12), e (3.13).

O modelo completo do eletrodo atesta que cada eletrodo possui um nó único por onde ocorre a injeção de correntes  $c_{e_i}$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ . Cada grupo de correntes aplicadas ao conjunto de eletrodos, segundo determinadas condições, denomina-se *padrão de correntes*. Considerando-se  $p$  o número de padrões aplicados, a matriz  $C = [c_1 \dots c_j \dots c_p]$ , com  $c_j \in \mathbb{R}^s$ ,  $p \leq \ell$  e cada elemento do vetor  $c_j$  satisfaz à eq. (3.11). A conservação de carga exige que a integral do fluxo de corrente pelo domínio seja nula, o que é obtido com a utilização, no presente trabalho, de padrões bipolares e linearmente independentes de correntes de dois tipos: adjacentes e diametrais. A esses padrões correspondem respectivamente as matrizes:

$$C_a = \begin{bmatrix} -c & -c & \dots & -c \\ +c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & +c & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & +c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{s \times p}, \quad (4.13)$$

e

$$C_d = \begin{bmatrix} -c_{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -c_{(2)} & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & -c_{(k)} \\ +c_{(\frac{p}{2}+1)} & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & +c_{(\frac{p}{2}+2)} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & +c_{(\frac{p}{2}+k\pm 1)} \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{s \times p}, \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 1, \dots, p \\ c_{(\frac{p}{2}+k\pm 1)} = \begin{cases} c_{(\frac{p}{2}+k+1)}, & k \leq \frac{p}{2} \\ c_{(\frac{p}{2}+k-1)}, & k > \frac{p}{2} \end{cases} \end{array} \right. \quad (4.14)$$

onde  $c$  é a intensidade da corrente alternada.

A condição de contorno dada pela eq. (3.13) fornece as tensões nos  $\ell$  nós pertencentes aos eletrodos, os únicos nos quais medições de tensões são possíveis em situações práticas (problema inverso).

Define-se uma matriz

$$V(\sigma) = [v_1 \dots v_j \dots v_p], \quad v_j \in \mathbb{R}^s \quad (4.15)$$

que contém as tensões nodais correspondentes a cada padrão de corrente aplicado. Nessas circunstâncias, a eq. (4.9) pode ser escrita como

$$Y(\sigma)V = C, \quad C = C_a \text{ ou } C = C_d \quad (4.16)$$

A solução da eq. (4.16) para  $V$  admitindo-se uma distribuição genérica de condutividades  $\sigma \in \mathbb{R}^m$  é obtida impondo-se tensão nula em um dos eletrodos (terra), de acordo com o padrão de corrente aplicado. Uma descrição pormenorizada desse procedimento é dada por Yorkey et al. (1987). Os valores calculados representam a distribuição de tensão no domínio discretizado e podem ser utilizados como dados de entrada na solução numérica (simulada) do problema inverso.

# Capítulo 5

## Solução do problema inverso através do filtro de Kalman

### 5.1 Filtro estendido

A distribuição desconhecida de condutividade (ou de resistividade)  $\sigma \in \mathbb{R}^m$  em um domínio  $\Gamma$  discretizado em  $m$  elementos finitos triangulares (meio interno) e quadrangulares (eletrodos) de condutividade constante  $\sigma_m$  pode apresentar um comportamento *estático* ou *dinâmico*.

Existem casos em que a distribuição de condutividade no domínio não apresenta variações significativas durante longos períodos. A quantificação de um período “longo” ou “curto” depende do processo. Considera-se um período “longo” o tempo suficiente para a medição de tensões e solução do problema inverso sem que as características do meio tenham sofrido alterações consideráveis, como ocorre em certos processos físico-químicos (West et al. 2001) ou mesmo fisiológicos (Bonovas, Kyriacou & Sahalos 2001). A estimação dos parâmetros do meio em tais situações é conhecida como *estática* (Vauhkonen, Karjalainen & Kaipio 1998), conforme descrito a seguir (Trigo et al. 2004).

A partir da eq. (4.16),  $Y(\sigma)V = C$ , define-se, para cada  $v_j(\sigma) \in \mathbb{R}^s$ ,  $c_j \in \mathbb{R}^s$ ,  $j = 1, \dots, p$ , uma transformação não linear  $h_j : \sigma \mapsto v_j$  tal que

$$v_j(\sigma) = h_j(\sigma), \text{ com} \tag{5.1}$$

$$h_j(\sigma) = [Y(\sigma)]^{-1}c_j \tag{5.2}$$

Utilizando-se uma série de Taylor para expandir  $v_j(\sigma)$  em torno de uma distribuição  $\sigma_0$  genérica, obtém-se:

$$v_j(\sigma) \cong v_j(\sigma_0) + \left. \frac{\partial h_j}{\partial \sigma} \right|_{\sigma_0} (\sigma - \sigma_0) + \mathcal{O}^2 \quad (5.3)$$

Desprezando-se os termos de ordem superior e utilizando a eq. (5.2), a eq. (5.3) fica:

$$v_j(\sigma) = v_j(\sigma_0) + \left. \frac{\partial ([Y(\sigma)]^{-1} c_j)}{\partial \sigma} \right|_{\sigma_0} (\sigma - \sigma_0) \quad (5.4)$$

As derivadas de  $v_j(\sigma)$  com relação às  $m$  condutividades são obtidas diretamente do modelo de elementos finitos (Yorkey et al. 1987) e resultam na *matriz de sensibilidade*  $\mathbb{H}_j(\sigma_0) \in \mathbb{R}^{s \times m}$  dada por:

$$\mathbb{H}_j(\sigma_0) = \left. \frac{\partial h_j}{\partial \sigma} \right|_{\sigma_0} = -Y^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma} Y^{-1} c_j, \quad j = 1, \dots, p \quad (5.5)$$

Note-se que, na dedução da eq. (5.5), utilizou-se o seguinte resultado da álgebra matricial:

$$YY^{-1} = I \implies \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial(YY^{-1})}{\partial \sigma} = 0 \implies \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \sigma} Y^{-1} + Y \frac{\partial(Y^{-1})}{\partial \sigma} = 0 \implies \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial(Y^{-1})}{\partial \sigma} = -Y^{-1} \frac{\partial(Y^{-1})}{\partial \sigma} Y^{-1} \quad (5.9)$$

Com isso, a eq. (5.4) pode ser escrita como

$$v_j(\sigma) = v_j(\sigma_0) + \mathbb{H}_j(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0). \quad (5.10)$$

Definindo-se  $\mathbb{H}^\dagger \triangleq (\mathbb{H}^T \mathbb{H})^{-1} \mathbb{H}$  como a *pseudo-inversa* (Watkins 1991) da matriz de sensibilidade  $\mathbb{H}$ , a eq. (5.10) fica:

$$(\sigma - \sigma_0) = \mathbb{H}_j^\dagger(\sigma_0)[v_j(\sigma) - v_j(\sigma_0)], \quad (5.11)$$

que é a chamada *abordagem clássica* (Vauhkonen, Karjalainen & Kaipio 1998) para o problema inverso da TIE. A distribuição de condutividade  $\sigma$  é obtida da eq. (5.11) adotando-se uma distribuição de referência  $\sigma_0$ , calculando-se a respectiva distribuição

de tensão  $v_j(\sigma_0)$  através da eq. (5.1) e medindo-se as tensões  $v_j(\sigma)$ . Cabe ressaltar que, em cada vetor  $v_j \in \mathbb{R}^s$  de tensões nodais, somente as  $\ell$  tensões nos eletrodos podem ser medidas. Verifica-se, na eq. (5.11), que cada distribuição de condutividade é estimada somente após a aplicação de padrões de correntes em número suficiente para que as respectivas leituras de tensões proporcionem a redundância necessária à solução do sistema linear resultante <sup>[i]</sup>. Assim, o caráter "estático" da abordagem clássica fica explícito.

Nos processos em que as variações no campo de condutividade do meio ocorrem mais rapidamente, há necessidade de coletar e processar dados com velocidade suficiente para acompanhar tais alterações, como é o caso da respiração em mamíferos e, particularmente, em humanos. Vauhkonen, Karjalainen & Kaipio (1998) desenvolveram um modelo dito *dinâmico* para a TIE, baseado no filtro linearizado de Kalman, visando determinar e acompanhar variações no campo de condutividade em pulmões humanos em situações como, por exemplo, a atividade física, quando a frequência dos batimentos cardíacos atinge valores de 3 a 4 vezes superiores aos normais, ou em pacientes submetidos à respiração artificial <sup>[ii]</sup>.

O filtro linearizado de Kalman apresenta, em relação à abordagem clássica, a vantagem de proporcionar estimativas do campo de condutividade após o processamento de um lote de  $v_\ell$  tensões lidas para cada padrão  $p$  de correntes aplicado. Esta abordagem, no entanto, ainda é dependente de uma "estimativa inicial"  $\sigma_0$  arbitrária ou baseada em conhecimento *a priori* obtido, por exemplo, de exames de tomografia computadorizada ou tomografia por ressonância magnética. Além disto, a linearização descrita na eq. (5.4) é efetuada sempre em torno da mesma distribuição  $\sigma_0$ , o que limita a faixa de variação do vetor de condutividades a ser estimado, conforme exposto por Trigo (2001).

Uma maneira de estimar a distribuição de condutividade sem as limitações <sup>[iii]</sup> existentes no filtro linearizado é através do *filtro estendido* de Kalman, pois cada nova

---

<sup>[i]</sup>O número de padrões de correntes depende da dimensão do vetor  $\sigma$  a ser estimado e do método a ser utilizado para a solução do sistema linear.

<sup>[ii]</sup>Informação verbal do Dr. Marcelo B.P. Amato.

<sup>[iii]</sup>Como será visto mais adiante, para a convergência do filtro de Kalman nesta aplicação, é desejável que o vetor de condutividades estimado possua valores estritamente positivos.

estimativa  $\sigma_k$  <sup>[iv]</sup> é utilizada na linearização que origina a matriz de sensibilidade, eq. (5.5).

### 5.1.1 Modelo dinâmico para o filtro estendido de Kalman

A estimação através do filtro de Kalman exige a descrição da dinâmica do sistema na forma de espaço de estados, com modelos para as observações (vetor  $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^\ell$  de tensões medidas nos eletrodos após a aplicação do  $k$ -ésimo padrão de corrente) e para a evolução do estado (vetor de condutividades  $\sigma \in \mathbb{R}^m$ ). Por hipótese, considera-se ainda a existência de incertezas na modelagem, tanto das observações quanto do estado. Estas incertezas são representadas por vetores cujos elementos procedem de seqüências de ruído branco gaussiano de média nula, aos quais estão associadas matrizes de covariância.

O modelo de observação adotado é discreto no espaço. Quando o domínio contínuo é segmentado em elementos finitos, dá-se a discretização espacial.

No instante  $t_k = k\Delta t$ , a eq. (5.2) incorporando as incertezas inerentes às medidas fornece o *modelo não linear de observação*

$$\mathbf{v}_k(\sigma_k) = \mathbf{h}_k(\sigma_k) + \boldsymbol{\nu}_k, \quad (5.12)$$

onde  $\boldsymbol{\nu}_k \in \mathbb{R}^{\ell \times 1}$  é um vetor de ruído branco Gaussiano de média nula que afeta as medidas e possui matriz de covariância simétrica, positiva e definida

$$R_k = \mathbb{E}[\boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^T] \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}. \quad (5.13)$$

A linearização da eq. (5.12) em torno do último estado estimado,  $\sigma_{k-1} \in \mathbb{R}^m$ , desprezando os termos de ordem superior resulta em

$$\mathbf{v}_k(\sigma_k) = \mathbf{v}_k(\sigma_{k-1}) + \mathbb{H}_k(\sigma_{k-1})[\sigma_k - \sigma_{k-1}] + \boldsymbol{\nu}_k, \quad (5.14)$$

em que  $\mathbb{H}_k \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$  é a partição da matriz de sensibilidade  $\mathbb{H}$ , eq. (5.5), referente às  $\ell$  medidas de tensões. Definindo-se uma *medida nominal* (Jazwinski 1970) como

$$\mathbf{z}_k \triangleq \mathbf{v}_k(\sigma_k) - \mathbf{v}_k(\sigma_{k-1}) + \mathbb{H}_k(\sigma_{k-1})[\sigma_{k-1}] \quad (5.15)$$

<sup>[iv]</sup>estimativa no instante  $t_k = k\Delta t$ , onde  $\Delta t$  é o intervalo entre as aplicações de dois padrões de correntes consecutivos.

e utilizando-se a eq. (5.14), obtém-se o *modelo linearizado de observação*:

$$z_k = \mathbb{H}_k(\sigma_{k-1})\sigma_k + \nu_k \quad (5.16)$$

A eq. (5.16) descreve a discrepância nas medidas devido ao erro que se comete na linearização das observações em torno de uma trajetória admitida como de referência (Jazwinski 1970), no caso  $\sigma_{k-1}$ .

Admite-se que a evolução temporal da distribuição de condutividade  $\sigma_k$  no domínio obedeça à *equação de estado discreta*

$$\sigma_k = \Phi_{k-1}\sigma_{k-1} + \omega_k \quad (5.17)$$

onde  $\Phi_{k-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é a matriz de transição de estados no instante  $t = t_{k-1}$  e  $\omega_k \in \mathbb{R}^m$  é um vetor de ruído branco gaussiano de média nula que representa a incerteza associada ao modelo do sistema e que possui matriz de covariância simétrica, positiva e semi-definida

$$Q_k = \mathbb{E}[\omega_k \omega_k^T] \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (5.18)$$

A matriz de transição de estados representa a dinâmica do sistema. A complexidade dos processos físico-químicos ou biológicos aos quais a TIE é aplicada não permitiu ainda a construção de modelos fenomenológicos que descrevam satisfatoriamente a dinâmica de tais sistemas. Por exemplo, no caso específico do sistema cardio-respiratório, existem modelos matemáticos que procuram descrever a dinâmica de cada sub-sistema (mecânica pulmonar, difusão gasosa, perfusão pulmonar) separadamente ou, em alguns casos, agrupando os efeitos aos pares (Liu, Niranjani, Clark Jr., San, Zwischenberger & Bidani 1998). A formulação de Liu et al. (1998) procura englobar todos estes efeitos em um modelo monocompartimental aplicado a indivíduos saudáveis. Entretanto, este modelo apresenta limitações, citadas pelos próprios autores, quando aplicado a pessoas com deficiências respiratórias, por negligenciar as heterogeneidades associadas a determinadas afecções. A finalidade da TIE é identificar locais de ocorrência de tais heterogeneidades. Portanto, um modelo monocompartimental do sistema pulmonar não seria capaz de fornecer as informações necessárias neste caso.

Para superar esta dificuldade, uma das opções seria a divisão do sistema em compartimentos menores, modelados individualmente. Todavia, a validação de um modelo mais

complexo demandaria a medição de grandezas locais (ventilação e perfusão regionais, por exemplo), muitas delas impossíveis de serem efetuadas. Assim, a acuidade de tais modelos poderia ser comprometida.

Por outro lado, como é possível efetuar a medição das tensões nos eletrodos a taxas elevadas de amostragem, pode-se supor o sistema dinâmico *estacionário*, ou seja

$$\Phi_{k-1} = I_m, \quad (5.19)$$

onde  $I_m \in \mathbb{R}^m$  é a matriz identidade. Este modelo de evolução temporal para o estado denomina-se *passeio aleatório (random walk)* e foi adotado por Vauhkonen, Karjalainen & Kaipio (1998), Trigo (2001) e Trigo et al. (2004). Desta forma, todos os erros do modelo de evolução para o estado são tratados como variáveis aleatórias. Outra hipótese empregada é a de inexistência de correlação entre os ruídos na medida e no estado, <sup>[v]</sup>  $E[\nu_k \omega_k^T] = 0, \forall k$ .

As equações do filtro de Kalman para sistemas discretos podem ser deduzidas de diversas maneiras, como a baseada em uma abordagem que visa obter um estimador linear de mínima variância para o erro de estimação (Jazwinski 1970, Gelb 1979). O filtro estendido de Kalman para o sistema não-linear dado pelas equações (5.12) e (5.17) é composto (Gelb 1979) por um estágio de *propagação*,

$$\hat{\sigma}_k^{(-)} = \Phi_{k-1} \hat{\sigma}_{k-1}^{(+)} \quad (5.20)$$

$$P_k^{(-)} = \Phi_{k-1} P_{k-1}^{(+)} \Phi_{k-1}^T + Q_{k-1} \quad (5.21)$$

e por um estágio de *atualização*,

$$G_k = P_k^{(-)} \mathbb{H}_k^T(\hat{\sigma}_k^{(-)}) [\mathbb{H}_k(\hat{\sigma}_k^{(-)}) P_k^{(-)} \mathbb{H}_k^T(\hat{\sigma}_k^{(-)}) + R_k]^{-1} \quad (5.22)$$

$$\hat{\sigma}_k^{(+)} = \hat{\sigma}_k^{(-)} + G_k [\nu_k - \mathbf{h}_k(\hat{\sigma}_k^{(-)})] \quad (5.23)$$

$$P_k^{(+)} = [I - G_k \mathbb{H}_k(\hat{\sigma}_k^{(-)})] P_k^{(-)} \quad (5.24)$$

<sup>[v]</sup>Esta hipótese é apenas simplificador; a formulação de Kalman é genérica, permitindo a existência de correlação entre os ruídos no estado e na medida.

A partir de um estado inicial  $\sigma_0$ , arbitrário ou não, e da respectiva matriz de covariância do erro de estimação  $P_0$  em  $t_k = 0$ , na ausência de novos dados as equações (5.20) e (5.21) propagam o estado e a matriz de covariância até um instante imediatamente anterior ao da chegada de tais dados (" $\wedge(-)$ "). Imediatamente após o recebimento de novos dados, o ganho de Kalman, eq. (5.22), é calculado (" $\wedge(+)$ "), a estimativa do estado, eq. (5.23), e a covariância do erro, eq. (5.24), são atualizadas, dando seqüência ao procedimento recursivo de estimação.

Verifica-se na formulação acima que, embora o processo de estimação seja recursivo, os ciclos de propagação e atualização utilizam um lote de  $v_k \in \mathbb{R}^\ell$  medidas, com a conseqüente necessidade de inversão de uma matriz de dimensão idêntica à do vetor de tensões medidas cada vez que a matriz de covariância do erro de estimação é atualizada. Em problemas inversos como o da TIE, em que as matrizes de sensibilidade particionadas  $\mathbb{H}_k$  são geralmente mal condicionadas, o erro numérico gerado nesta operação pode ser significativo. Uma maneira de contornar o problema é observar que a formulação de Kalman permite efetuar uma estimativa a cada tensão medida, conforme será discutido na seção 5.2. Esta discussão visa abordar um paradigma não resolvido em implementação anterior do filtro estendido de Kalman na TIE (Trigo 2001), qual seja, a avaliação do impacto do processamento seqüencial de dados sobre o comportamento do filtro.

## 5.2 Filtro estendido seqüencial

Verifica-se que a substituição da eq. (5.22) na eq. (5.24) resulta em uma expressão que permite atualizar a matriz de covariância do erro

$$P_k^{(+)} = P_k^{(-)} - P_k^{(-)} \mathbb{H}_k^T(\hat{\sigma}_k^{(-)}) [\mathbb{H}_k(\hat{\sigma}_k^{(-)}) P_k^{(-)} \mathbb{H}_k^T(\hat{\sigma}_k^{(-)}) + R_k]^{-1} \mathbb{H}_k(\hat{\sigma}_k^{(-)}) P_k^{(-)} \quad (5.25)$$

sem que o ganho de Kalman seja calculado de forma explícita, porém requer a inversão de uma matriz de dimensão  $\ell \times \ell$ . O filtro de Kalman é construído de tal maneira que esta inversão possa ser substituída por uma seqüência de inversões de matrizes de ordem inferior, inclusive escalares, cujas dimensões somadas equivalem à dimensão das matrizes originais.

Para ilustrar o procedimento sem perda de generalidade, considera-se que o vetor linearizado de observação  $\mathbf{v}_k$  da eq. (5.12), a cada instante  $t_k$ , seja composto por  $v_j \in \mathbb{R}^1$ ,  $j = 1 \dots \ell$  medidas independentes ocorrendo em seqüência a intervalos desprezíveis (Gelb 1979). Na prática, isto significa que o estado não se altera durante tais intervalos, ou seja, a matriz de transição de estados é unitária (que é o modelo aqui adotado) e, portanto, somente  $P_k^{(+)}$  necessita ser atualizada entre as medidas consecutivas (Singer & Sea 1971). Nestas condições, a eq. (5.16) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} z_{k_1}(\sigma_k) \\ \dots \\ z_{k_2}(\sigma_k) \\ \vdots \\ \dots \\ z_{k_\ell}(\sigma_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{k_1}(\sigma_{k-1}) \\ \dots \\ \mathbb{H}_{k_2}(\sigma_{k-1}) \\ \vdots \\ \dots \\ \mathbb{H}_{k_\ell}(\sigma_{k-1}) \end{bmatrix} \sigma_k + \begin{bmatrix} \nu_{k_1} \\ \dots \\ \nu_{k_2} \\ \vdots \\ \dots \\ \nu_{k_\ell} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

onde  $\mathbb{H}_{k_j} \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ ,  $j = 1 \dots \ell$  representa a partição da matriz de sensibilidade  $\mathbb{H}$  referente à  $j$ -ésima medida de tensão no instante  $t = t_k$ .

Lembrando-se ainda que cada componente do vetor  $\nu_k$  procede de uma seqüência de ruído branco gaussiano de média nula, a covariância  $\mathbb{E}[\nu_j \nu_j^T]$ , quando processada seqüencialmente, reduz-se à variância  $\zeta_\nu^2$  de cada uma das  $\ell$  seqüências componentes do

vetor  $\nu$ . [vi]

Considerando-se cada linha da eq. (5.26) como um modelo linearizado de observação, as equações (5.17) (equação de estado) e (5.12) enquadram-se na formulação que permite obter uma nova estimativa  $\hat{\sigma}_k^{(+)}$  a partir do conjunto de equações (5.20)-(5.24) segundo o procedimento descrito abaixo (Mendel 1971):

1. a partir de estimativas obtidas em uma iteração genérica  $k - 1$ , calcula-se  $\hat{\sigma}_k^{(-)}$  por (5.20) e  $P_k^{(-)}$  por (5.21);
2. utilizando o primeiro dado de tensão da próxima iteração,  $\nu_{k_1}$ , determina-se, por (5.22), um ganho  $G_{k_1}$  "intermediário" e por (5.24) a covariância do erro  $P_{k_1}^{(+)}$  "intermediária". A seguir, a eq. (5.23) irá fornecer o estado "intermediário"  $\hat{\sigma}_{k_1}^{(+)}$ ;
3. com base em  $P_{k_1}^{(+)}$  e  $\hat{\sigma}_{k_1}^{(+)}$ , utiliza-se  $\nu_{k_2}$  e as equações de atualização [vii] do filtro, com  $q = 2$

$$G_{k_q} = P_{k_{q-1}}^{(-)} \mathbb{H}_{k_q}^T [\mathbb{H}_{k_q} P_{k_{q-1}}^{(-)} \mathbb{H}_{k_q}^T + R_{k_q}]^{-1} \quad (5.28)$$

$$\hat{\sigma}_{k_q}^{(+)} = \hat{\sigma}_{k_{q-1}}^{(-)} + G_{k_q} [\nu_{k_q} - \mathbb{H}_{k_q}] \quad (5.29)$$

$$P_{k_q}^{(+)} = [I - G_{k_q} \mathbb{H}_{k_q}^T] P_{k_{q-1}}^{(-)} \quad (5.30)$$

e assim sucessivamente até que  $q = \ell$ . Sorenson (1966) *apud* Mendel (1971) demonstra que, após o processamento sequencial de todas as medidas, o estado e a matriz de covariância do erro atualizados são equivalentes aos calculados empregando-se o lote completo de medidas, ou seja

$$\hat{\sigma}_{k_\ell}^{(+)} = \hat{\sigma}_k^{(+)} \quad \text{e} \quad P_{k_\ell}^{(+)} = P_k^{(+)}$$

[vi] Neste caso, fica implícito que  $R_k = \mathbb{E}[\nu_k \nu_k^T]$  é diagonal, o que não é imprescindível pois o vetor de medidas pode ser construído de forma que (Singer & Sea 1971)

$$R_k = \begin{bmatrix} [R_{k_1}] & & 0 \\ & [R_{k_2}] & \\ 0 & & [R_{k_\ell}] \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

onde  $R_{k_q}$ , quadrada,  $1 \leq q \leq \ell$  é uma matriz de covariância.

[vii] A dependência implícita de  $\sigma_k$  foi suprimida para simplificar a notação.

Um problema inerente à formulação do filtro estendido de Kalman, tanto no processamento em lotes quanto no seqüencial, é o truncamento dos termos de ordem superior na expansão em série de Taylor que leva aos modelos de evolução e de observação. Dependendo do erro na última estimativa do estado, a linearização pode conduzir a um afastamento do estado real de tal forma a comprometer a qualidade das estimativas subseqüentes. A inclusão de termos de ordem superior na referida expansão poderia, teoricamente, melhorar o desempenho do algoritmo de filtragem; em contrapartida, a complexidade das equações de propagação e atualização aumentaria os requisitos computacionais (Gelb 1979). Neste trabalho, o filtro estendido iterado de Kalman, discutido na próxima seção, é utilizado como alternativa aos filtros de ordem superior.

### 5.3 Filtro estendido iterado

Na TIE, o mau condicionamento da matriz de sensibilidade é um fator que tende a influenciar negativamente a acuidade das estimativas do estado devido ao truncamento na expansão em série de Taylor. O filtro estendido iterado de Kalman é um algoritmo baseado no processamento *local* (Jazwinski 1970) da última estimativa do estado, visando atenuar os desvios inerentes à linearização.

O processamento local consiste em obter o modelo linearizado de observação, eq. (5.16), linearizando a equação de observação (5.12) via série de Taylor, truncada mantendo termos até a 1ª ordem, repetidamente em torno de  $\hat{\sigma}_k^{(+)}$ . Com esta formulação,  $\hat{\sigma}_k^{(+)}$ ,  $P_k^{(+)}$  e  $G_k$  são recalculados com base no mesmo vetor de medidas  $\mathbf{v}_k$  até que não haja diferenças significativas entre dois estados consecutivos estimados. O algoritmo do filtro estendido iterado de Kalman aqui apresentado é baseado em Jazwinski (1970) e Gelb (1979).

Em primeiro lugar, define-se

$$\hat{\sigma}_{k,j}^{(+)} \triangleq \hat{\sigma}_k^{(+)}, \quad j = 1 \dots, \quad (5.31)$$

como a  $j$ -ésima estimativa do estado e

$$\hat{\sigma}_{k,0}^{(+)} \triangleq \hat{\sigma}_k^{(-)} \quad (5.32)$$

A linearização em torno do último estado implica em fazer, na eq. (5.23)

$$\mathbf{h}_k(\hat{\sigma}_k^{(-)}) = \mathbf{h}_k(\hat{\sigma}_{k,j}^{(+)}) + \mathbb{H}(\hat{\sigma}_{k,j}^{(+)}) \left[ \hat{\sigma}_k^{(-)} - \hat{\sigma}_{k,j}^{(+)} \right] + \mathcal{O}^2 \quad (5.33)$$

com

$$\mathbb{H}(\hat{\sigma}_{k,j}^{(+)}) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}_k(\hat{\sigma}_k^{(-)})}{\partial \hat{\sigma}_k^{(-)}} \right|_{\hat{\sigma}_k^{(-)} = \hat{\sigma}_{k,j}^{(+)}} \quad (5.34)$$

Demonstra-se (Gelb 1979) que efetuando o truncamento dos termos de ordem superior na eq. (5.33) e substituindo-a nas equações (5.23), (5.22) e (5.24) obtêm-se as equações de atualização do estado, ganho e covariância para o filtro estendido iterado,

$$\hat{\sigma}_{k,j+1}^{(+)} = \hat{\sigma}_k^{(-)} + G_{k,j} \left\{ \mathbf{v}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\sigma}_{k,j}^{(+)}) + \mathbb{H}(\hat{\sigma}_{k,j}^{(+)}) \left[ \hat{\sigma}_k^{(-)} - \hat{\sigma}_{k,j}^{(+)} \right] \right\} \quad (5.35)$$

$$G_{k,j} = P_k^{(-)} \mathbb{H}_k^T(\hat{\sigma}_{k,j}^{(+)}) \left[ \mathbb{H}_k(\hat{\sigma}_{k,j}^{(+)}) P_k^{(-)} \mathbb{H}_k^T(\hat{\sigma}_{k,j}^{(+)}) + R_k \right]^{-1} \quad (5.36)$$

$$P_{k,j+1}^{(+)} = \left[ I - G_{k,j} \mathbb{H}_k^T(\hat{\sigma}_{k,j}^{(+)}) \right] P_k^{(-)}, \quad (5.37)$$

que permitem recalcular o estado até que

$$\|\hat{\sigma}_{k,j}^{(+)} - \hat{\sigma}_{k,j-1}^{(+)}\|_p \leq \delta, \quad (5.38)$$

onde  $\|\cdot\|$  é uma norma de ordem  $p$  e  $\delta$  é empiricamente escolhido. Neste trabalho, utiliza-se a norma euclidiana como parâmetro de avaliação.

Uma das dificuldades na implementação de filtros de Kalman na TIE é o desconhecimento da matriz de covariância do ruído no estado,  $Q$ , escolhida com certa arbitrariedade no início do procedimento de estimação. A utilização de diferentes matrizes de covariância influencia as estimativas do estado e a convergência do procedimento. A próxima seção é dedicada à técnica de ruído adaptativo, que utiliza informações fornecidas pelo próprio filtro para alterar  $Q$  e corrigir sua eventual divergência.

## 5.4 Ruído adaptativo e filtro adaptativo

A necessidade de se utilizar alguma técnica capaz de alterar a matriz de covariância do ruído no estado durante a operação do filtro de Kalman, com base nas estimativas fornecidas pelo próprio filtro, está ligada à correção de eventual divergência do procedimento de estimação.

A divergência de filtros de Kalman é amplamente estudada na literatura, por exemplo nos trabalhos de Jazwinski (1970), Gelb (1979) e Nascimento Jr. (1988). Sua ocorrência está relacionada a fatores como erros de arredondamento (aritmética em ponto flutuante), de modelagem do sistema dinâmico ou ambos (Nascimento Jr. 1988). O “mecanismo” que leva à divergência pode ser resumidamente descrito da seguinte forma:

1. admite-se que, para determinado processo, a matriz de covariância do ruído no estado,  $Q$ , seja “pequena” <sup>[viii]</sup> (devido à pouca informação disponível sobre o sistema ou a erros de modelagem);
2. com isso, no próximo estágio de propagação,  $P_{k+1}^{(-)}$  sofrerá “pequena” correção (fato que é agravado no presente caso, pois a matriz de transição de estado é a identidade);
3. de acordo com a eq. (5.22), o ganho tende a ser “pequeno”;
4. assim, conforme a eq. (5.23), a ponderação conferida às medidas  $e$ , conseqüentemente, a correção imposta à trajetória, são “pequenas”;
5. por raciocínio análogo, a covariância do erro de estimação, matriz  $P_{k+1}^{(+)}$ , sofrerá pouca correção, afetando diretamente a matriz de covariância do ruído no estado na iteração  $k + 2$ .

Verifica-se que, de acordo com a eq. (5.21) e nas condições descritas acima, a principal contribuição para a propagação da covariância do erro é oriunda de  $Q$ ; além disso, a atualização da estimativa do estado é obtida praticamente com base no modelo

<sup>[viii]</sup>As aspas enfatizam o caráter qualitativo do termo e de seus similares, bem como a generalidade da avaliação. Em casos específicos, utilizam-se normas matriciais para quantificar os efeitos.

do sistema, que eventualmente possui incorreções. Desta forma, inicia-se um processo que pode culminar com a divergência do filtro.

Para a caracterização da divergência do filtro de Kalman, deve-se avaliar o comportamento da estatística do resíduo das observações. Define-se *resíduo previsto das observações* (ou *inovação*) como a diferença entre o valor efetivamente medido e o valor calculado pelo filtro com base na última estimativa disponível para o estado:

$$\mathbf{i}_k \triangleq \mathbf{v}_k(\boldsymbol{\sigma}_k) - \hat{\mathbf{v}}_k(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k) \implies \quad (5.39)$$

$$\mathbf{i}_k = \mathbf{v}_k(\boldsymbol{\sigma}_k) - \mathbf{h}_k(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k^{(-)}), \quad \mathbf{i}_k \in \mathbb{R}^\ell. \quad (5.40)$$

Jazwinski (1970) afirma que, quando há *consistência* entre as realizações e os dois primeiros momentos estatísticos esperados para elas,

$$\mathbf{i}_k = \mathbb{E}[\mathbf{i}_k] = 0 \quad \text{e} \quad (5.41)$$

$$\mathbb{C}_{\mathbf{i}_k} = \mathbb{E}[\mathbf{i}_k \mathbf{i}_k^T] = \mathbb{H}_k(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k^{(-)}) P_k^{(-)} \mathbb{H}_k^T(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k^{(-)}) + R_k, \quad (5.42)$$

( $\mathbb{C}_{\mathbf{i}_k} \triangleq$  matriz de covariância das inovações), o filtro de Kalman apresenta convergência. Na prática, a verificação da convergência é efetuada através do resíduo normalizado das observações que, para a  $k$ -ésima iteração, é dado por

$$r_\nu = \left\{ \frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} [\mathbf{v}_k(\boldsymbol{\sigma}_k) - \hat{\mathbf{v}}_k(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k)]_j \right\} / \zeta_\nu, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.43)$$

onde  $\ell$  representa o número de medidas e  $\zeta_\nu$  é o desvio-padrão dos ruídos nas medidas.

Se

$$\mathbb{E}[r_\nu] = 0 \quad (5.44)$$

e

$$-3\zeta_\nu \leq (E[r_\nu^2] - E^2[r_\nu])^{1/2} \leq 3\zeta_\nu, \quad (5.45)$$

durante o processo de estimação, a convergência é considerada satisfatória (Fleury 1985).

Nesta tese e em diversos trabalhos que adotam o modelo de passeio aleatório para a evolução temporal do estado (Vauhkonen 1997, Vauhkonen, Karjalainen & Kaipio 1998, Kim et al. 2001, Kim et al. 2002, Vilhunen et al. 2002, Heikkinen et al. 2002, Trigo et al. 2004), a matriz de covariância do ruído no estado,  $Q$ , é arbitrada

no início do procedimento de estimação e mantida constante durante todo o processo, podendo conduzir à divergência do filtro. Seria interessante, portanto, permitir que, em vez de mantida fixa,  $Q$  fosse corrigida com base nas estimativas fornecidas pelo próprio filtro, *adaptando-se* às necessidades do processo. Em outras palavras, caso o filtro forneça estimativas cuja estatística dos resíduos seja distinta da esperada,  $Q$  é ajustada de forma a ponderar a influência do modelo do sistema (diminuição de  $Q$ ) ou das observações (aumento de  $Q$ ).

Jazwinski (1970) apresenta uma técnica para a inclusão de ruído adaptativo que consiste, basicamente, em obter uma matriz diagonal  $Q_{d_{k-1}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , com diagonal  $q_k \geq 0 \in \mathbb{R}^m$ , que promova a consistência entre as estatísticas obtidas e as esperadas para as inovações. Nascimento Jr. (1988) explica que a matriz procurada é, de acordo com o Princípio da Máxima Verossimilhança, aquela capaz de maximizar a probabilidade de efetiva ocorrência da realização de  $i_k$ , e demonstra que o vetor  $q_k$  é tal que

$$C_{i_k} = \mathbb{E}[i_k i_k^T] = \mathbb{E}[i_k^r (i_k^r)^T], \quad (5.46)$$

com  $i_k^r \triangleq$  realização de  $i_k$ .

A técnica desenvolvida por Jazwinski é capaz de adaptar a matriz de covariância do ruído no estado de modo a maximizar a probabilidade de ocorrência das inovações. Entretanto, a realização de  $i_k$  incorpora uma parcela que corresponde à incerteza associada ao sensor, expressa pela matriz de covariância do ruído na medida,  $R$ .

Rios Neto & Kuga (1982) e Rios Neto & Kuga (1985) *apud* Nascimento Jr. (1988) propõem um método que visa excluir a influência do ruído na medida do problema de maximização supracitado. O método é descrito por Nascimento Jr. (1988); por esse motivo, no presente trabalho optou-se por apresentá-lo de maneira resumida.

Em primeiro lugar, define-se a variável aleatória *inovação verdadeira* como a inovação que seria obtida admitindo-se o sensor ideal:

$$i_k^v \triangleq i_k - \nu_k. \quad (5.47)$$

Levando-se em conta a eq. (5.12), obtém-se

$$i_k^v = h_k(\sigma_k) - h_k(\hat{\sigma}_k^{(-)}), \quad (5.48)$$

cuja estatística é

$$\mathbb{E}[\mathbf{i}_k^{\mathbf{V}}] = 0 \quad (5.49)$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{i}_k^{\mathbf{V}}(\mathbf{i}_k^{\mathbf{V}})^T] = \mathbf{C}_k^{\mathbf{V}} \quad (5.50)$$

O método de Rios Neto e Kuga procura tornar consistentes as estatísticas das inovações verdadeiras e de suas realizações, através da obtenção de matrizes diagonais  $Q_{d_{k-1}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , com diagonal  $\mathbf{q}_k \geq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ , que maximizem a probabilidade de ocorrência das inovações verdadeiras. A idéia central é formular o problema de obter  $Q_d$  em espaço de estados, com o vetor  $\mathbf{q}_k$  denotando o estado, e utilizar um filtro de Kalman auxiliar para estimá-lo. Novamente, são necessárias equações que representem a dinâmica do estado (elementos da diagonal de  $Q_d$ ) e as observações (inovações verdadeiras).

Demonstra-se (Nascimento Jr. 1988) que as realizações das inovações verdadeiras, embora não disponíveis na prática, relacionam-se às realizações das inovações através de

$$[(\mathbf{i}_k^{\mathbf{V}})_j^r]^2 = [(\mathbf{i}_k)_j^r]^2 - 2(\mathbf{i}_k)_j^r(\boldsymbol{\nu}_k)_j^r + [(\boldsymbol{\nu}_k)_j^r]^2, \quad (5.51)$$

onde  $r$  e  $j$  referem-se respectivamente às realizações e às  $j$ -ésimas componentes dos vetores  $\mathbf{i}_k$  e  $\boldsymbol{\nu}_k$ . Partindo-se da eq. 5.51, manipulações algébricas (mudanças de variáveis) e aplicação do operador expectativa possibilitam o cálculo de um vetor de *pseudo-medidas* (Nascimento Jr. 1988)  $\mathbf{v}_k^p \in \mathbb{R}^m$  conforme a equação

$$\mathbf{v}_k^p = (\mathbb{H}_k^p)\mathbf{q}_k + \boldsymbol{\eta}_k, \quad (5.52)$$

na qual o sobrescrito  $p$  é um acrônimo de "pseudo" e  $\boldsymbol{\eta}_k$  é um ruído de média nula e covariância

$$\mathbb{E}[(\boldsymbol{\eta}_k)_j^2] = 4[(\mathbf{i}_k)_j^r]^2(R_k)_{jj} + 2(R_k)_{jj}^2. \quad (5.53)$$

O subscrito  $jj$  representa cada elemento da diagonal da matriz de covariância do ruído na medida. A pseudo-matriz de sensibilidade  $\mathbb{H}_k^p$  e a matriz de sensibilidade do modelo linearizado original de observações obedecem à equação

$$(\mathbb{H}_k^p)_j \mathbf{q}_k = (\mathbb{H}_k)_j Q_{d_{k-1}} [(\mathbb{H}_k)_j]^T \quad (5.54)$$

Verifica-se que a eq. (5.52) relaciona observações, as pseudo-medidas, passíveis de determinação a partir dos dados disponíveis no sistema original, a um vetor de estado,

$\mathbf{q}_k$ , a ser estimado; desta forma, pode-se utilizá-la como modelo de observações para implementação no filtro de Kalman auxiliar.

Para a dinâmica do sistema, representada pela evolução temporal do *pseudo-estado* (Nascimento Jr. 1988), adota-se o modelo de passeio aleatório dado por:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \boldsymbol{\varsigma}_k. \quad (5.55)$$

A hipótese de passeio aleatório é aceitável desde que o estado verdadeiro não sofra alterações bruscas entre observações consecutivas. A TIE preenche este requisito, uma vez que as medidas de tensão ocorrem a elevadas taxas de amostragem. Finalmente, deve-se admitir a existência de incertezas na dinâmica do pseudo-sistema, o que é feito através da inclusão de um vetor de pseudo-ruído  $\boldsymbol{\varsigma}_k \in \mathbb{R}^m$  branco e gaussiano com média nula e covariância

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\varsigma}_i \boldsymbol{\varsigma}_j^T] = \begin{cases} Q_{d_i}^p & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (5.56)$$

caracterizando assim o modelo do pseudo-sistema a ser utilizado no filtro de Kalman auxiliar.

As estimativas do vetor  $\mathbf{q}_k$  de ruído adaptativo, de acordo com o modelo descrito pelas equações (5.52) e (5.55), são obtidas através de um filtro de Kalman convencional e utilizadas pelo filtro principal. O procedimento de estimação conjunta (filtro principal e filtro auxiliar) é denominado filtro JARK (de Jazwinski, Rios Neto e Kuga) (Nascimento Jr. 1988) e compõe-se das seguintes etapas:

- em uma iteração genérica  $k - 1$  são conhecidos o estado verdadeiro,  $\boldsymbol{\sigma}_{k-1}^{(+)}$ , e a covariância do erro de estimação,  $P_{k-1}^{(+)}$ ;
- propaga-se o estado verdadeiro por meio da eq. (5.20);
- inicia-se a operação do pseudo-filtro:
  - adotam-se  $\mathbf{q}_{k-1}^+$  com  $\mathbf{q}_{k-1j}^{(+)} \geq 0$ ,  $j = 1 \dots m$  e  $P_{k-1}^{p(+)}$ ;
  - propagam-se o pseudo-estado e a pseudo-covariância do erro por meio de equações análogas a (5.20) e (5.21), efetuando-se as substituições necessárias;

- calculam-se as realizações das inovações, eq. (5.40);
- determinam-se as realizações das pseudo-medidas através da equação

$$(\mathbf{v}_k^p)_j = (i_k)_j^2 + (R_k)_{jj}^2 - (\mathbb{H}_k(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{(+)})_j P_{k-1}^{(+)} (\mathbb{H}_k^T(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{(+)})), \quad (5.57)$$

e a covariância do ruído da pseudo-medida, eq. (5.53);

- procede-se ao cálculo da matriz do modelo de observações do pseudo-filtro, equação

$$H_k^p = \begin{bmatrix} (\mathbb{H}_k^{1,1})^2 & \dots & (\mathbb{H}_k^{1,m})^2 \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbb{H}_k^{\ell,1})^2 & \dots & (\mathbb{H}_k^{\ell,m})^2 \end{bmatrix}; \quad (5.58)$$

- atualizam-se o pseudo-estado e a matriz de covariância do erro no pseudo-estado utilizando-se, por exemplo, as equações apropriadas de um filtro de Kalman convencional. Os elementos do vetor pseudo-estado atualizado,  $\mathbf{q}_k^{(+)}$  são mantidos caso positivos ou nulos, e zerados caso negativos. Assim, a diagonal da matriz  $Q_{dk-1}$  fica determinada e encerra-se a etapa de operação do pseudo-filtro.
- a partir deste ponto, prossegue a estimação com base na variante do filtro de Kalman escolhida, com a atualização do estado verdadeiro e da matriz de covariância do erro de estimação. No presente trabalho, o filtro estendido iterado de Kalman (FEIK) é o filtro principal no esquema de operação do filtro JARK; a esta união, denominou-se filtro estendido iterado adaptativo de Kalman (FEIAK).

# Capítulo 6

## Procedimentos de regularização

A estimação de condutividades/resistividades na TIE, devido às características do problema mal posto que representa, sofre influência significativa de perturbações decorrentes dos erros de truncamento inerentes à aritmética em ponto flutuante nas operações efetuadas pelo computador. Por outro lado, a formulação empregada na aplicação do filtro de Kalman utiliza linearizações em torno do último estado estimado e gera estimativas que visam minimizar a covariância do erro de estimação, ou seja, busca-se o erro quadrático médio mínimo. Verifica-se também que, em um domínio discretizado e, particularmente no caso de monitoramento da função pulmonar, existem elevados gradientes entre as condutividades daqueles elementos adjacentes que pertencem a tecidos com propriedades dielétricas distintas. No caso de malhas pouco refinadas, a transição entre elementos com condutividades distintas irá criar uma “perturbação” local, pois a linearização em torno de uma trajetória de referência média tende a gerar estimativas de parâmetros que atendam ao critério de minimização quadrática do vetor de erro no estado como um todo, mas não necessariamente representem as condutividades locais *reais* destes elementos. A discrepância entre valores reais e estimados é agravada quando procura-se estimar grandezas diferentes como a condutividade do meio e a resistividade dos eletrodos, conforme será visto no capítulo 11.

Devido aos problemas expostos acima, surge a idéia de utilizar procedimentos de regularização. Os procedimentos de regularização visam, através de uma série de transformações (lineares ou não), converter um problema mal posto em um outro, mate-

maticamente equivalente, porém menos susceptível a perturbações. Neste trabalho, utilizam-se dois procedimentos de regularização: construção de *regiões de interesse (RDI)* e *regularização generalizada de Tikhonov (RGT)*, incorporando uma *filtragem das altas condutividades (filtro passa-alta)*, ao problema de estimação.

## 6.1 Construção de regiões de interesse

A construção de RDI foi inicialmente utilizada por Vauhkonen, Karjalainen & Kaipio (1998) e, posteriormente, por Trigo (2001). Consiste em agrupar elementos que teoricamente possuam propriedades dielétricas semelhantes. Este tipo de regularização possui duas vantagens. A primeira é permitir agrupamentos cujas fronteiras possuam alguma semelhança com estruturas realmente existentes. Neste caso, quanto mais refinadas forem as malhas que discretizam o domínio, mais fiel será a semelhança; em contrapartida o número de condição da matriz de sensibilidade irá aumentar. A segunda vantagem do agrupamento é justamente diminuir o número de parâmetros a serem estimados. Numericamente, o agrupamento de elementos é efetuado conforme descrito a seguir.

Em primeiro lugar elegem-se, dentre os  $m$  elementos da malha,  $f$  grupos de  $\eta_f$  elementos que irão formar as RDI. A condutividade média destes agrupamentos será

$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{\eta_f} \sum_{i=1}^{\eta_f} \sigma_i . \quad (6.1)$$

Repete-se o procedimento até que todas as RDI desejadas sejam formadas. Lembrando que a matriz de sensibilidade do modelo linearizado de observação é, da eq. (5.16)

$$\mathbb{H}_k = [\mathbb{H}_{k_1} \quad \mathbb{H}_{k_2} \quad \dots \quad \mathbb{H}_{k_m}], \quad (6.2)$$

a nova matriz de sensibilidade, com elementos agrupados escreve-se

$$\mathbb{H}_{k_f} = \left[ \sum_{i=1}^{\eta_1} \mathbb{H}_{k_{\eta_1}} \quad \sum_{i=1}^{\eta_2} \mathbb{H}_{k_{\eta_2}} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^{\eta_f} \mathbb{H}_{k_{\eta_f}} \right] \quad (6.3)$$

com  $\mathbb{H}_{k_f} \in \mathbb{R}^{\ell \times f}$  e onde cada somatória engloba as colunas da matriz de sensibilidade original  $\mathbb{H}_k$  correspondentes aos  $\eta_f$  elementos que formam a respectiva RDI. A incor-

poração das RDI ao filtro de Kalman é efetuada substituindo-se  $\sigma_k$  e  $\mathbb{H}_k$  nas equações (5.20)-(5.22), respectivamente, por  $\sigma_{k_f} \in \mathbb{R}^f$  e  $\mathbb{H}_{k_f}$ .

## 6.2 Filtragem das altas condutividades e regularização de Tikhonov

A filtragem das altas variações espaciais de condutividades permite atenuar eventuais diferenças locais entre as condutividades de elementos adjacentes, o que tende a diminuir o erro cometido na linearização das observações. O filtro passa-alta aqui utilizado é descrito por Gonzalez & Woods (1986) e consiste em definir um vetor de condutividades

$$\sigma_k^B = B\sigma_k, \quad (6.4)$$

onde  $k$  é a  $k$ -ésima iteração do algoritmo e  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma matriz passa-baixa. Tal matriz é construída de forma que cada elemento  $\sigma_j^B$  do vetor de estado seja resultante da transformação linear

$$\sigma_j^B = \frac{\beta\sigma_j + \sigma_a^j + \sigma_b^j + \sigma_c^j}{\beta + 3}, \quad (6.5)$$

em que  $\sigma_a^j$ ,  $\sigma_b^j$  e  $\sigma_c^j$  são as condutividades dos elementos adjacentes ao elemento  $j$  e  $\beta$  é um parâmetro de filtragem que deve ser empiricamente escolhido. A matriz passa-alta é obtida a partir da matriz passa-baixa fazendo  $A = I - B$  de forma que

$$\sigma_k^A = A\sigma \quad (6.6)$$

seja o vetor de estado em que as altas frequências possuam maior peso. A abordagem acima, denominada "vizinhança ponderada," é empregada no processamento de imagens como fotografias digitais, com o intuito de diminuir os efeitos causados por elementos de imagem ("pixels") ausentes ou com valores inconsistentes com a região que ocupam (Gonzalez & Woods 1986).

A matriz de filtragem  $\mathcal{M}$  a ser incluída no filtro de Kalman é dada pelo produto quadrático

$$\mathcal{M} = A^T A \quad (6.7)$$

## 6.2. FILTRAGEM DAS ALTAS CONDUTIVIDADES E REGULARIZAÇÃO DE TIKHONOV 68

A incorporação do filtro passa-alta e da matriz de filtragem ao filtro de Kalman pode ser efetuada utilizando-se a abordagem de mínimos quadrados para o problema de estimação. A abordagem tradicional consiste em minimizar-se um funcional do tipo

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(\sigma_k) = & \frac{1}{2} \left[ \sigma_k - \hat{\sigma}_k^{(-)} \right]^T (P_k^{(-)})^{-1} \left[ \sigma_k - \hat{\sigma}_k^{(-)} \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{v}_k - \mathbb{H}_k(\hat{\sigma}_k^{(-)})\sigma_k \right]^T R_k^{-1} \left[ \mathbf{v}_k - \mathbb{H}_k(\hat{\sigma}_k^{(-)})\sigma_k \right] \\ & + \frac{1}{2} \omega_k^T Q_k^{-1} \omega_k \end{aligned} \quad (6.8)$$

com relação a  $\sigma_k$ , sujeito à eq. (5.17) (Jazwinski 1970). Quando um termo de regularização na forma  $\frac{1}{2}\alpha^2 \|\mathcal{M}[\sigma_k - \sigma^*]\|_2^2$  é adicionado ao funcional da eq. (6.8), obtém-se um funcional "aumentado" (Kim et al. 2001),

$$\begin{aligned} \mathbb{J}^\circ(\sigma_k) = & \frac{1}{2} \left[ \sigma_k - \hat{\sigma}_k^{(-)} \right]^T (P_k^{(-)})^{-1} \left[ \sigma_k - \hat{\sigma}_k^{(-)} \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{v}_k - \mathbb{H}_k(\hat{\sigma}_k^{(-)})\sigma_k \right]^T R_k^{-1} \left[ \mathbf{v}_k - \mathbb{H}_k(\hat{\sigma}_k^{(-)})\sigma_k \right] \\ & + \frac{1}{2} \omega_k^T Q_k^{-1} \omega_k + \frac{1}{2} \alpha^2 \left[ \sigma_k - \sigma^* \right]^T \mathcal{M}^T \mathcal{M} \left[ \sigma_k - \sigma^* \right] \end{aligned} \quad (6.9)$$

onde  $\alpha > 0$  é um parâmetro de regularização e  $\sigma^*$  é uma estimativa inicial para  $\sigma_k$ . A estimativa inicial  $\sigma^*$  pode ser decorrente de conhecimento prévio acerca das características dielétricas e/ou localização de alguma região bem definida como, por exemplo, a posição da coluna vertebral.

Definindo-se matrizes "aumentadas" de observação <sup>[1]</sup> por:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k^\circ & \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{v}_k \\ \alpha \mathcal{M} \sigma^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\ell+m)} \quad \text{e} \\ \mathbb{H}_k^\circ & \triangleq \begin{pmatrix} \mathbb{H}_k \\ \alpha \mathcal{M} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\ell+m) \times (m)}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

o funcional da eq. (6.9) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{J}^\circ(\sigma_k) = & \frac{1}{2} \left[ \sigma_k - \hat{\sigma}_k^{(-)} \right]^T (P_k^{(-)})^{-1} \left[ \sigma_k - \hat{\sigma}_k^{(-)} \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{v}_k^\circ - \mathbb{H}_k^\circ \sigma_k \right]^T \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}^{-1} \left[ \mathbf{v}_k^\circ - \mathbb{H}_k^\circ \sigma_k \right] + \frac{1}{2} \omega_k^T Q_k^{-1} \omega_k \end{aligned} \quad (6.11)$$

<sup>[1]</sup>Por simplicidade de notação suprime-se a dependência implícita de  $\hat{\sigma}_k^{(-)}$  na matriz de sensibilidade  $\mathbb{H}$ .

## 6.2. FILTRAGEM DAS ALTAS CONDUTIVIDADES E REGULARIZAÇÃO DE TIKHONOV

69

Um funcional como o da eq. (6.11), quando minimizado com respeito a  $\sigma_k$ , irá fornecer uma solução dita *regularizada de Tikhonov* (Vauhkonen 1997). Quando se nota a semelhança entre as equações (6.8) e (6.11), verifica-se que o problema de estimação ótima recai no caso clássico mencionado por Jazwinski (1970), e a solução ótima irá minimizar o traço da matriz de covariância do erro de estimação. Por raciocínio análogo ao utilizado na dedução do filtro estendido, obtêm-se as equações de atualização para o filtro estendido de Kalman com regularização de Tikhonov,

$$\hat{\sigma}_k^{(+)} = \hat{\sigma}_k^{(-)} + G_k^\circ [v_k^\circ - \mathbb{H}_k^\circ \hat{\sigma}_k^{(-)}] \quad (6.12)$$

$$G_k^\circ = P_k^{(-)} \mathbb{H}_k^{\circ T} [\mathbb{H}_k^\circ P_k^{(-)} \mathbb{H}_k^{\circ T} + R_k^\circ]^{-1} \quad (6.13)$$

$$P_k^{(+)} = [I - G_k^\circ \mathbb{H}_k^{\circ T}] P_k^{(-)} \quad (6.14)$$

onde  $R_k^{\circ -1} = \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}^{-1} \in \mathbb{R}^{(\ell+m) \times (\ell+m)}$ .

As equações de propagação, (5.20) e (5.21), permanecem válidas.

# Capítulo 7

## Estimação parcial do estado

A idéia do procedimento de estimação parcial surgiu devido à demanda por estimativas tanto da distribuição de resistividade ou condutividade em um meio, quanto das impedâncias ou condutâncias no contato meio-eletrodos. No jargão da TIE, *impedância de contato* refere-se à oposição ao fluxo de corrente na interface entre o elemento responsável pela injeção de correntes e o meio que deve recebê-las.

Em aplicações da TIE na medicina, esta oposição ocorre entre o metal do eletrodo e a pele e, geralmente, não é possível determinar de maneira experimental direta as propriedades dielétricas nesta interface a fim de utilizá-las como informação *a priori* na solução do problema inverso. A discretização do domínio e dos eletrodos, quando da elaboração do modelo de elementos finitos, implica na necessidade de estimação de grandezas distintas como a condutividade do meio e a impedância no contato meio-eletrodos. Quando as malhas de elementos finitos são refinadas, a fim de melhorar a resolução espacial das imagens, a característica do problema mal condicionado tende a acentuar a propagação de ruído numérico, tornando a estimação do vetor de estado como um todo, englobando meio e eletrodos, mais susceptível a tais erros, conforme é discutido a seguir.

O modelo de elementos finitos empregado neste trabalho para a solução do problema inverso da TIE permite estimar as condutividades ou resistividades dos elementos da malha. A condutividade de diversos tecidos humanos, por exemplo, varia aproximadamente entre 0,03 e 0,60  $(\Omega m)^{-1}$  (Faes, van der Meij, Munck & de Heethaar 1999).

Eletrodos comuns para eletrocardiografia (ECG) podem ser utilizados para a injeção de correntes e leituras de tensões na TIE. Tais eletrodos possuem, como valores típicos, diâmetro de 60 *mm* e resistência de 49  $\Omega$  quando recobertos por gel contendo potássio a 6% (*ECG/EKG Electrodes* 2004). Considerando-se estes dados, a impedância do eletrodo na interface com a pele seria de 0,139  $\Omega m^2$ . Por outro lado, a impedância da pele que entra em contato com o metal do eletrodo é da ordem de 800  $\Omega m^2$  (Hua et al. 1993a). Desta forma, para a estimação do estado completo, isto é, impedâncias de elementos do meio interno e dos eletrodos, seria necessário assegurar que a razão entre as impedâncias dos elementos na região de transição tecido/metal, da ordem de  $6 \times 10^3$ , não afetasse a solução do problema inverso.

Trigo (2001) analisa situações em que a ordem de grandeza das condutividades a serem estimadas é a mesma e constata que, para um domínio discretizado por uma malha de apenas 32 elementos finitos e considerando eletrodos pontuais em cada nó da fronteira, o número de condição da matriz de sensibilidade  $\mathbb{H}$  já é superior a  $10^3$ . Portanto, não é possível afirmar que a natureza (tanto física quanto numérica) dos parâmetros de um modelo que faça a distinção entre o meio e os eletrodos não interfira nas estimativas do estado. Uma maneira de contornar esta dificuldade sem recorrer aos métodos descritos nas seções precedentes é a estimação parcial do estado, ou estimação em duas fases que se repetem (Trigo et al. 2004).

A primeira fase do procedimento consiste em estimar as impedâncias de contato em cada eletrodo mantendo constante a condutividade dos elementos do meio interno. Na segunda fase, os eletrodos previamente identificados são mantidos fixos e o filtro de Kalman é utilizado para estimar a distribuição de condutividade no meio interno. A justificativa para tal procedimento, descrita a seguir, é baseada no *Teorema da Transformação de Contração* (Contraction Mapping Theorem) ou *Teorema do Ponto Fixo* (Fixed Point Theorem).

Se as matrizes de covariância dos ruídos no estado e na medida, respectivamente  $Q_k$  e  $R_k$ , forem mantidas constantes, como ocorre neste trabalho exceto na seção 5.4, o filtro de Kalman pode ser interpretado como um procedimento determinístico recursivo de estimação por mínimos quadrados (Jazwinski 1970, Brogan 1991). Admite-se que,

em um espaço métrico  $\mathbb{S}$ , o FEK converge em uma vizinhança de  $\sigma_0 \in \mathbb{S}$  ( $\sigma_0 =$  estimativa inicial) de raio  $r$ ,  $\mathbb{S}_r(\sigma_0)$ , para um ponto  $\hat{\sigma}_k$ . Adicionalmente, admite-se que as variações nos parâmetros do modelo de elementos finitos são lentas comparadas ao tempo de convergência. Esta hipótese é utilizada apenas para simplificar a justificativa.

Em cada iteração do FEK, durante a atualização do estado, ocorre uma contração do traço da matriz de covariância do erro,  $P_k$ . Esta convergência pode ser interpretada à luz do teorema do ponto fixo, teorema II.3.1 em Holtzman (1970). Ao adotar o traço da matriz  $P_k$  como norma do espaço  $\mathbb{S}$  e considerar cada iteração, ou conjunto de iterações do FEK, como contrações segundo esta norma, o teorema do ponto fixo afirma que o FEK marcha para um ponto fixo interior a  $\mathbb{S}_r(\sigma_0)$ .

Ao separar o FEK em duas fases não se altera fundamentalmente este fato pois, ao partir de  $\sigma_0$  em  $\mathbb{S}_r$ , o FEK gera um novo estado  $\hat{\sigma}_k$  no interior de  $\mathbb{S}_r$ . O processo de estimar a distribuição de condutividade no domínio mantendo as impedâncias de contato dos eletrodos fixas pode ser visto como uma contração  $\mathcal{C}_1$  em um subespaço  $\mathbb{S}_1$  de  $\mathbb{S}$ . Por outro lado, o procedimento de estimar as impedâncias de contato mantendo a distribuição de condutividade fixa pode ser encarado como uma contração  $\mathcal{C}_2$  em um outro subespaço,  $\mathbb{S}_2$ , de  $\mathbb{S}$ . Deve-se observar que  $\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2$  e  $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \emptyset$ .

A aplicação em seqüência destes dois procedimentos,  $\mathcal{C}_2(\mathcal{C}_1(\cdot))$ , ou uma repetição desta seqüência, é uma transformação de contração no mesmo espaço  $\mathbb{S}$  e segundo a mesma norma. O teorema do ponto fixo afirma que a transformação converge para um ponto fixo em  $\mathbb{S}_r(\sigma_0)$ . Além disso, de acordo com Guo (1990), os erros de estimação no FEK são limitados quando os erros de processo  $\omega_k$  e de medida  $\nu_k$  são limitados, corroborando a discussão acima.

## **Parte III**

### **Materiais e Métodos**

# Capítulo 8

## Malhas de Elementos Finitos

A discretização do domínio e dos eletrodos em elementos finitos, conforme descrito nas seções 3.1 e 3.2, requer a construção de malhas contendo elementos triangulares, representando o meio interno, e quadrangulares, representando a interface meio-eletrodo. Foram utilizadas 3 malhas distintas, geradas automaticamente pelos programas de código aberto *FEIt* e *Corduroy* (Gobat & Atkinson 1994).

O número de elementos de cada malha deve ser escolhido de modo a proporcionar imagens com resolução espacial suficiente para identificar regiões cujas propriedades dielétricas sejam semelhantes, como as áreas ocupadas por estruturas orgânicas bem definidas (aplicações médicas) ou nas quais haja ocorrência de fenômenos como formação de bolhas, vórtices e mistura de substâncias (aplicações em tomografia de processo). A rigor, deve-se comparar malhas com diferentes graus de refinamento e adotar a que proporcione o menor número de elementos,  $m_i$ , capaz de fornecer uma solução para o problema direto próxima da solução imediatamente mais refinada,  $m_{i+1}$ , segundo alguma norma, de forma que

$$\|\mathbf{v}_{m_i} - \mathbf{v}_{m_{i+1}}\| < \varepsilon, \quad (8.1)$$

onde  $\varepsilon\kappa_Y \leq$  precisão desejada na imagem e  $\kappa_Y$  é o número de condição<sup>[i]</sup> da matriz de condutividade  $Y$ .

Foge ao escopo desta tese a busca de malhas otimizadas para descrever o domínio.

---

<sup>[i]</sup>O número de condição da matriz de condutividade será utilizado na análise de resultados no capítulo 10.

Algumas das técnicas de regularização que permitem o uso de malhas mais refinadas foram desenvolvidas ao longo deste e de outros trabalhos, por exemplo, Vauhkonen, Vadáz, Karjalainen, Somersalo & Kaipio (1998), Kim et al. (2002), Vilhunen et al. (2002) e Schmitt & Louis (2002).

## 8.1 Malha de 269 elementos

Dando continuidade ao trabalho desenvolvido por Trigo (2001), no qual avaliou-se a influência das matrizes de covariância  $P$  e  $Q$ , bem como do vetor inicial  $\sigma_0$  sobre o comportamento do filtro estendido de Kalman na TIE, foi construída uma malha com  $m = 269$  elementos triangulares e  $s = 157$  nós, dos quais  $\ell = 16$  nós representam eletrodos puntiformes. A malha, mostrada na Fig. 8.1, é utilizada em simulações numéricas. O objetivo das simulações numéricas é verificar os resultados do trabalho supracitado para um vetor de maior dimensão (269 contra 32).

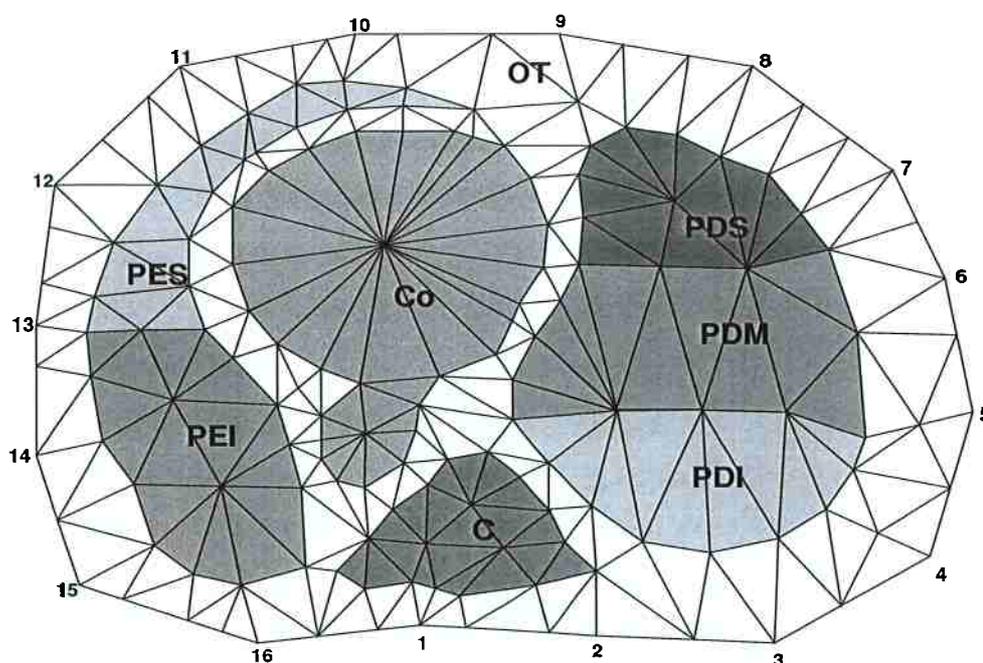


Figura 8.1: Malha contendo  $m = 269$  elementos e  $s = 157$  nós utilizada em simulações numéricas (Nota: esta representação é especular com relação aos padrões tomográficos). As 8 RDI são: *PES* - pulmão esquerdo superior; *PEI* - pulmão esquerdo inferior; *PDS* - pulmão direito superior; *PDM* - pulmão direito médio; *PDI* - pulmão direito inferior; *Co* - coração; *C* - coluna e *OT* - outros tecidos (Trigo et al. 2004).

O domínio discretizado representa uma seção transversal de um tórax humano, cuja imagem é obtida por tomografia de ressonância magnética (Woo, Hua, Webster & Tompkins 1992). Esta malha possibilita o agrupamento de elementos em RDI cujas fronteiras representam estruturas orgânicas existentes (Trigo et al. 2004). O agrupamento em RDI é feito com base nas equações (6.1)-(6.3).

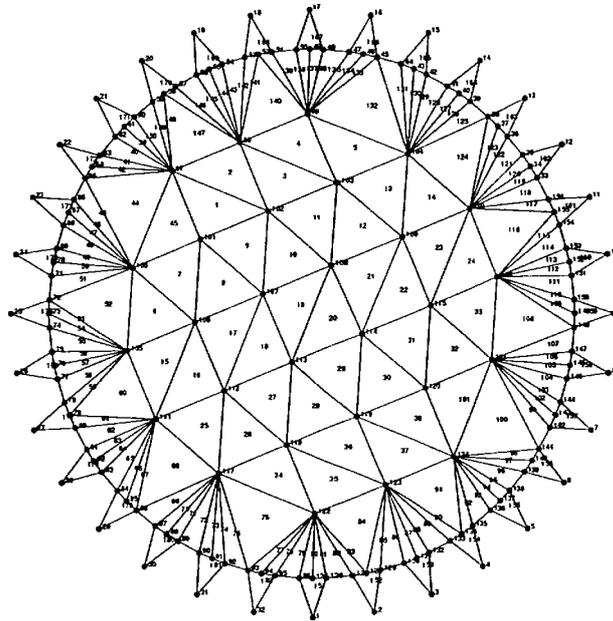
Eletrodos puntiformes (*gap model*), eq. (3.10), são posicionados nos nós indicados na Fig. 8.1. Este modelo, embora insatisfatório em situações reais (Cheng et al. 1989) permite, em simulações numéricas, avaliar o comportamento teórico do filtro de Kalman em acompanhar alterações na distribuição de condutividade no domínio.

## 8.2 Malhas de 182 e 272 elementos

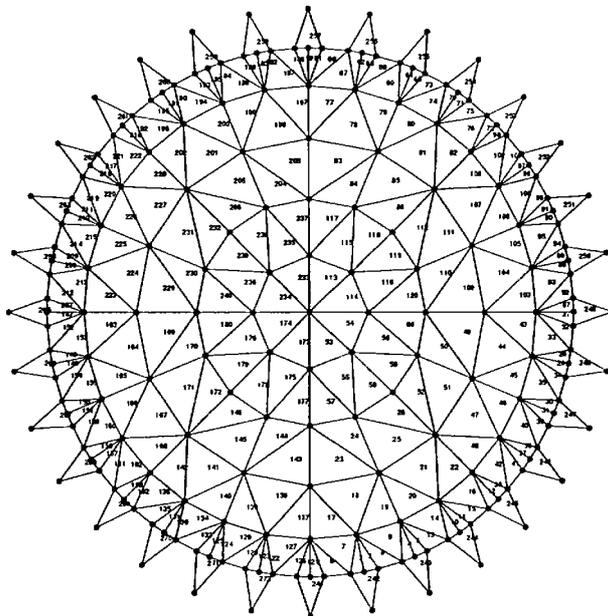
Para a validação experimental dos modelos de sistema, eletrodo e das técnicas de estimação e regularização descritas nos capítulos 5 e 6, foram utilizadas duas malhas de elementos finitos, cujas características são as seguintes:

1. malha de 182 elementos (vide Fig. 8.2 (a)):  $m = 150$  elementos triangulares;  $\ell = 32$  elementos com 4 nós;  $s = 156$  nós (Trigo et al. 2004);
2. malha de 272 elementos (vide Fig. 8.2 (b)):  $m = 240$  elementos triangulares;  $\ell = 32$  elementos com 4 nós;  $s = 201$  nós (Miranda 2003).

Os elementos triangulares discretizam o domínio interno e representam a distribuição de condutividade no meio; os quadrangulares discretizam a interface meio-eletrodo e procuram reproduzir o efeito causado pela impedância de contato, de acordo com o modelo completo, equações (3.11)-(3.13). Ambas as malhas possuem diâmetro de 235 mm, correspondentes à cuba utilizada nos experimentos. Os motivos para o emprego destas duas malhas serão discutidos nos capítulos 11 e 12.



(a) 182 elementos



(b) 272 elementos

Figura 8.2: Malhas de elementos finitos utilizadas com dados experimentais.

# Capítulo 9

## Metodologia

As simulações numéricas e avaliações experimentais foram efetuadas em computadores do tipo *PC* com sistema operacional *Linux RedHat 6.2*. Os algoritmos foram desenvolvidos em linguagem *C* e compilados com *Gnu C* versão 2.0.

### 9.1 Simulações numéricas

Após a discretização do domínio em uma malha de elementos finitos e seu agrupamento em 8 RDI, conforme mostra a Fig. 8.1, a metodologia das simulações é a seguinte (Trigo 2001, Trigo et al. 2004):

- i. adota-se uma distribuição de condutividade  $\sigma \in \mathbb{R}^m$  que representa condições pulmonares típicas, de acordo com dados de Barber & Brown (1984) e Faes et al. (1999);
- ii. aplicam-se  $p$  padrões linearmente independentes de correntes com amplitude  $2 mA_{pp}$  (o índice  $pp$  denota valor pico-a-pico), eq. (4.13), aos  $\ell$  nós que representam eletrodos e resolve-se o problema direto através da eq. (4.16); desta forma, obtêm-se tensões nodais na malha;
- iii. às tensões correspondentes aos eletrodos incorpora-se ruído branco Gaussiano de média nula com desvio-padrão de 5% da máxima tensão calculada em cada simulação, gerando assim um vetor de tensões "medidas". (Press et al. 1992). O

valor 5% para o desvio-padrão da máxima tensão foi escolhido por ser superior aos utilizados por outros pesquisadores (Vauhkonen, Karjalainen & Kaipio 1998, Kim et al. 2001, Heikkinen et al. 2002, Kim et al. 2002) e, assim, avaliar o método em condições mais críticas ;

- iv. admitindo-se uma distribuição inicial uniforme de condutividade  $\sigma_0$  pertencente a uma faixa de valores clinicamente aceitáveis, utilizam-se as tensões “medidas”, calculadas em iii para cada padrão de correntes, como dados observados para o algoritmo do filtro estendido de Kalman, equações (5.20)-(5.22), e estima-se a distribuição de condutividade  $\sigma$ .

Este procedimento caracteriza uma situação dinâmica à medida que se deseja acompanhar as variações na distribuição de condutividade do meio provocadas por uma função degrau.

Os parâmetros utilizados nas simulações numéricas estão na Tabela 10.1, pg. 89. A distribuição inicial uniforme adotada,  $\sigma_0 = 0,2(\Omega m)^{-1}$ , é próxima à condutividade média dos tecidos em um tórax humano. A este vetor também foi adicionado ruído branco Gaussiano de média nula com desvio-padrão de até 20% do valor de condutividade. As oito RDI representam tecidos da coluna, coração, pulmão superior esquerdo, pulmão inferior esquerdo, pulmão superior direito, pulmão médio direito, pulmão inferior direito e outros tecidos.

O vetor de condutividades esperadas foi selecionado de forma a reproduzir a condição pulmonar normal e dois níveis de uma anomalia denominada *atelectasia* <sup>[i]</sup>.

## 9.2 Validação experimental

Utilizou-se, para a validação experimental dos modelos empregados, uma bancada conforme mostrado na Fig. 9.1, composta por uma cuba de vidro cilíndrica de 235 mm de diâmetro na qual foram afixados 32 eletrodos retangulares de bronze com largura de 12 mm. A cuba foi preenchida até a altura de 26,5 mm com uma solução de

---

<sup>[i]</sup>Anomalia que consiste no colapamento dos alvéolos devido a fatores como obstrução das vias aéreas ou inexistência de surfactante no interior destas estruturas (Guyton 1992).

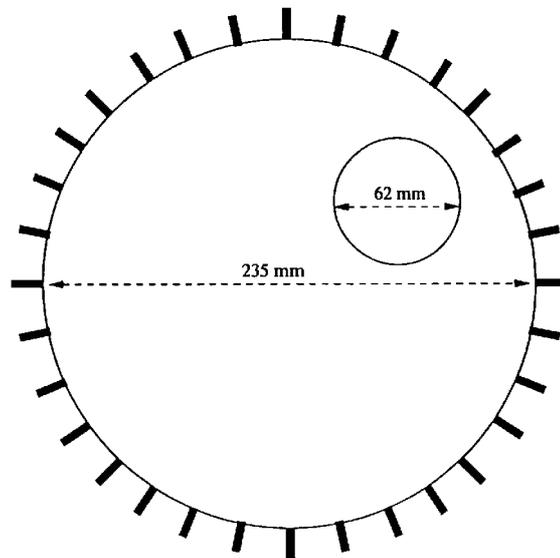


Figura 9.1: Representação da bancada experimental contendo 32 eletrodos de bronze e um copo de vidro com 62 mm de diâmetro.

*NaCl* de concentração 0,23 g/l. Um circuito gerador de correntes conforme descrito por Bertemes-Filho, Brown & Wilson (2000) foi usado para injetar padrões bipolares de correntes (adjacentes e diametrais) com frequência de 25 kHz e amplitude de 2 mA pp; a medição de tensões foi efetuada manualmente com um multímetro HP 34401A. O método de leitura das tensões não diminui a confiabilidade nos valores obtidos pois: (i) o equipamento fornece valores de tensão RMS obtidos a partir de leituras efetuadas à taxa de amostragem de 1 kHz, com erro de 0,06%, segundo informa o manual de operação (*HP34401A Multimeter User's Guide* 1996); (ii) a cada mudança no padrão de excitação, aguardou-se cerca de trinta segundos até que o mostrador, de seis dígitos, acusasse valores constantes pelo menos até o quinto dígito.

Os padrões de correntes aplicados e as tensões medidas são utilizados pelos diversos algoritmos para estimar as condutâncias de contato nos eletrodos, além da posição de um copo de vidro com 62 mm de diâmetro imerso no meio salino, vide Fig. 9.1.

Os ensaios efetuados com a bancada experimental podem ser divididos em dois grupos principais, de acordo com o número de elementos da malha, conforme mostra o esquema da Fig. 9.2. As ramificações dentro de cada grupo, identificadas por um número, correspondem às avaliações dos métodos/procedimentos propostos nos capítulos 4 a 7. As

siglas na parte inferior do esquema indicam a técnica de estimação empregada, filtro estendido de Kalman (*FEK*), filtro estendido de Kalman com processamento seqüencial (*FEKS*), filtro estendido iterado de Kalman (*FEIK*) e filtro estendido iterado adaptativo de Kalman (*FEIAK*), bem como os procedimentos auxiliares (utilização de RDI e regularização), quando for o caso. Os números no interior de circunferências correspondem ao nome/número do ensaio. As setas denotam a utilização de parâmetros já identificados como informação *a priori* em outros ensaios. Para a avaliação de alguns métodos, é necessário efetuar um conjunto de ensaios; quando isto ocorre, são dados os parâmetros iniciais, sendo os demais mencionados durante a apresentação dos resultados.

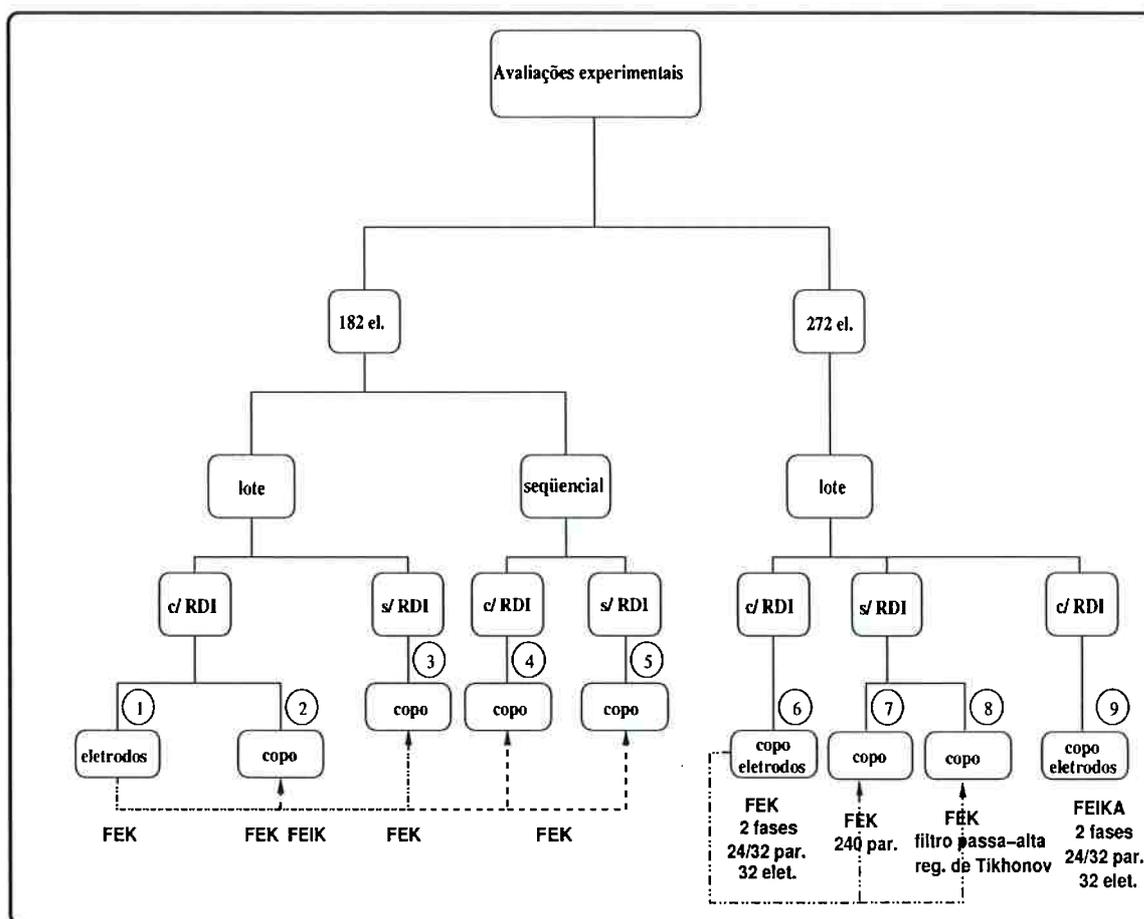


Figura 9.2: Quadro esquemático dos ensaios com dados de bancada.

### 9.2.1 Malha de 182 elementos

#### 9.2.1.1 Ensaio 1 (eletrodos)

Em primeiro lugar, através do filtro estendido de Kalman processando os dados em lotes, (seção 5.1.1), estima-se a distribuição de condutividade média da solução salina *sem o copo* e as condutâncias de contato dos eletrodos. <sup>[ii]</sup> Os 182 elementos da malha são associados em 34 RDI. A condutância de contato na interface metal-solução de cada um dos 32 eletrodos (elementos quadrangulares) é considerada um parâmetro a ser estimado. Os 150 elementos triangulares restantes são agrupados em 2 RDI com distribuição homogênea de condutividade, conforme mostra a Fig. 9.3(a). O procedimento experimental consiste em injetar padrões adjacentes de correntes (eq. (4.13), pg. 45), medir as respectivas tensões nos eletrodos e aplicar sucessivamente o algoritmo de filtragem para determinar as condutâncias/condutividades das 34 RDI. O processo é interrompido quando as seguintes condições forem simultaneamente verificadas:

- cada componente do vetor de estado apresentar discrepância inferior a 2,5%, quando comparado ao valor final obtido na seqüência de processamento imediatamente anterior;
- os resíduos possuem estatística consistente com a esperada, de acordo com as equações (5.44)-(5.45).

As matrizes iniciais de covariância  $P_0$ ,  $Q_k$  e  $R$  <sup>[iii]</sup> são empiricamente ajustadas para  $3,5 \times 10^{-1} I_{34}$ , <sup>[iv]</sup>  $3,4 \times 10^{-0} I_{34}$  e  $2,5 \times 10^{-2} I_{32}$ , respectivamente. Como estimativa inicial, utilizam-se  $\sigma_{0_j} = 0,09 (\Omega m)^{-1}$ ,  $j = 1 \dots 150$  e  $\sigma_{0_j} = 50,0 (\Omega m^{-2})^{-1}$ ,  $j = 151 \dots 182$ , também ajustados de maneira empírica, uma vez que não se dispunha de qualquer informação acerca das características dielétricas dos materiais envolvidos no ensaio.

<sup>[ii]</sup>Todas as descrições subseqüentes correspondem ao quadro da Fig. 9.2, pg. 81.

<sup>[iii]</sup>O índice  $k$  referente ao valor assumido pela matriz  $R$  em cada iteração foi suprimido, uma vez que tal matriz é mantida constante.

<sup>[iv]</sup> $I_N$  indica a matriz identidade de ordem  $N$ .

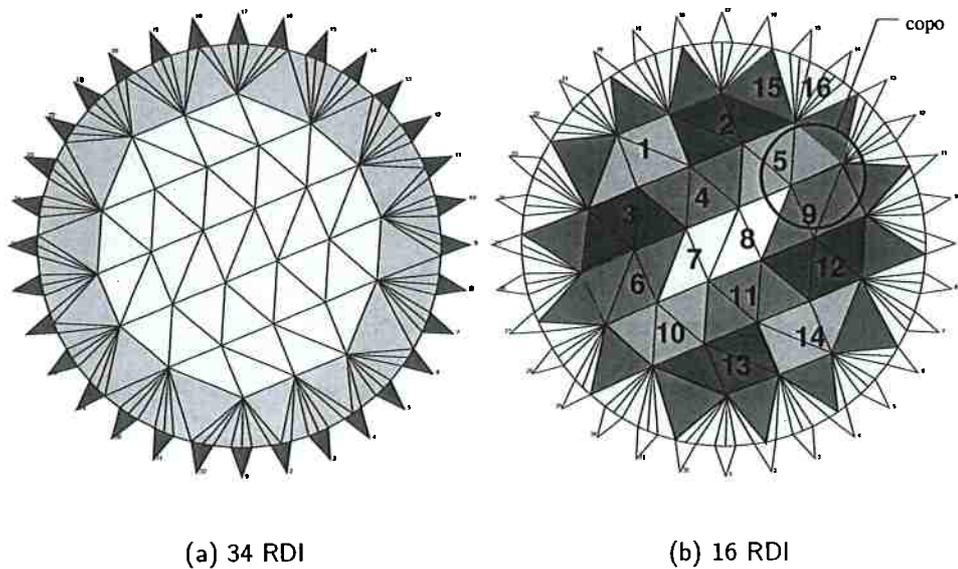


Figura 9.3: Malha com  $m = 182$  elementos (32 eletrodos) e  $s = 156$  nós utilizada com dados experimentais: (a) RDI para identificação de eletrodos; (b) RDI para identificação de um objeto imerso.

### 9.2.1.2 Ensaio 2 (meio, eletrodos conhecidos)

A seguir, mantendo-se constantes as impedâncias de contato estimadas

<sup>[v]</sup> para os eletrodos no ensaio 1, o filtro estendido de Kalman, processando os dados em lotes, é utilizado para estimar a distribuição de resistividade do meio. Um copo de vidro é introduzido na cuba, retirando-se líquido suficiente para que a altura da lâmina de solução não se altere. A introdução do copo representa uma perturbação na forma de uma função degrau em relação à distribuição de resistividade homogênea anterior no meio. Os 150 elementos internos da malha são agrupados em 16 RDI conforme mostrado na Fig 9.3(b). Salienta-se que as RDI foram construídas sem levar em conta a localização ou o formato do copo.

Através dos eletrodos, injetam-se padrões diametrais de correntes, eq. (4.14), pg. 45, e medem-se as tensões. As matrizes de covariância  $P_0$ ,  $Q$  e  $R$  são respectivamente  $3,5 \times 10^{-5} I_{16}$ ,  $7,8 \times 10^1 I_{16}$  e  $2,5 \times 10^{-3} I_{32}$ ; todas as componentes do vetor inicial de resistividade  $\rho_0$  recebem o valor  $1,0 \Omega m$  <sup>[vi]</sup>.

<sup>[v]</sup>Inversos dos valores mencionados na seção anterior.

<sup>[vi]</sup>Nota-se que a grandeza a ser estimada é a *resistividade*; o motivo para a mudança em relação ao ensaio 1 será discutido nos capítulos 10 e 11.

Uma maneira alternativa de se identificar a distribuição de resistividade do meio com o objeto de vidro é através do filtro estendido iterado de Kalman. Para isto, repete-se o procedimento experimental descrito acima. Utilizam-se os eletrodos identificados em 9.2.1.1, matrizes de covariância  $P_0 = 3,5 \times 10^{-5} I_{16}$ ,  $Q = 3,5 \times 10^{-3} I_{16}$  e  $R = 2,5 \times 10^{-3} I_{32}$  e vetor inicial  $\rho_0 = [1,0 \text{ (RDI 1 a 14)}; 0,04 \text{ (RDI 15 e 16)}]^T \Omega m$ . As RDI de 1 a 14 representam os agrupamentos contendo elementos internos, enquanto as RDI 15 e 16 englobam os elementos adjacentes aos eletrodos (coroa externa), conforme Fig. 9.3(b). A tolerância adotada entre iterações subseqüentes, eq. (5.38), é  $\delta = 3,0 \times 10^{-1}$ .

### 9.2.1.3 Ensaio 4 (lote x seqüencial, RDI)

O procedimento de estimação seqüencial descrito na seção 5.2 é avaliado comparativamente ao processamento em lote efetuado na seção 9.2.1.2 através do filtro estendido de Kalman, com o agrupamento em 16 RDI, de acordo com a Fig. 9.3(b). As tensões nos eletrodos são medidas após a injeção de padrões diametrais de correntes; com eletrodos identificados conforme 9.2.1.1, procura-se estimar a distribuição de resistividade do meio salino contendo um copo. Os parâmetros iniciais  $P_0$ ,  $Q$  e  $R$ , bem como o vetor inicial  $\rho_0$  são idênticos aos mencionados no parágrafo final da seção 9.2.1.2.

### 9.2.1.4 Ensaios 3 e 5 (lote x seqüencial, sem RDI)

Nestes ensaios, considerando-se os valores de impedância dos eletrodos determinados em 9.2.1.1 como informação *a priori*, procura-se identificar simultaneamente, através do filtro estendido de Kalman, a resistividade dos 150 componentes do vetor de estado, para a solução contendo o copo. A influência do tipo de processamento (lote ou seqüencial) é analisada. O procedimento experimental coincide com o empregado em 9.2.1.3. As matrizes  $P_0$ ,  $Q$  e  $R$  são diagonais com variâncias  $3,5 \times 10^{-5} I_{150}$ ,  $3,5 \times 10^{-3} I_{150}$  e  $2,5 \times 10^{-3} I_{32}$ , e o estado inicial é um vetor cujas componentes que representam os elementos internos da malha, Fig. 9.3(a), recebem o valor  $\rho = 1,0 \Omega m$ ; para as posições correspondentes à coroa externa, adota-se  $\rho = 0,04 \Omega m$ .

### 9.2.2 Malha de 272 elementos

Os procedimentos de identificação em duas fases e de regularização através do filtro estendido de Kalman foram avaliados em simulações com a malha de 272 elementos, Fig. 8.2(b). A principal característica desta geometria é a diminuição da área dos elementos internos adjacentes aos eletrodos, quando comparada à malha de 182 elementos. O motivo é procurar melhorar as estimativas na região de transição meio-eletrodo, onde a ordem de grandeza dos parâmetros a serem estimados afeta os resultados, conforme será visto no capítulo 12. Todos os ensaios com esta malha foram efetuados processando os dados em lotes de 32 medidas e utilizando padrões diametrais de correntes.

#### 9.2.2.1 Ensaio 6 (2 fases, RDI)

O procedimento de estimação em duas fases através do filtro estendido de Kalman é avaliado neste conjunto de ensaios. Identificam-se as condutâncias dos eletrodos e as resistividades da solução que contém um copo de vidro. Os elementos que compõem o meio são agrupados em 24 ou 32 RDI, vide Fig. 9.4. A identificação das resistividades nestas regiões constitui uma das fases; a outra fase é a estimação das 32 condutâncias na interface metálica do eletrodo com a solução salina.

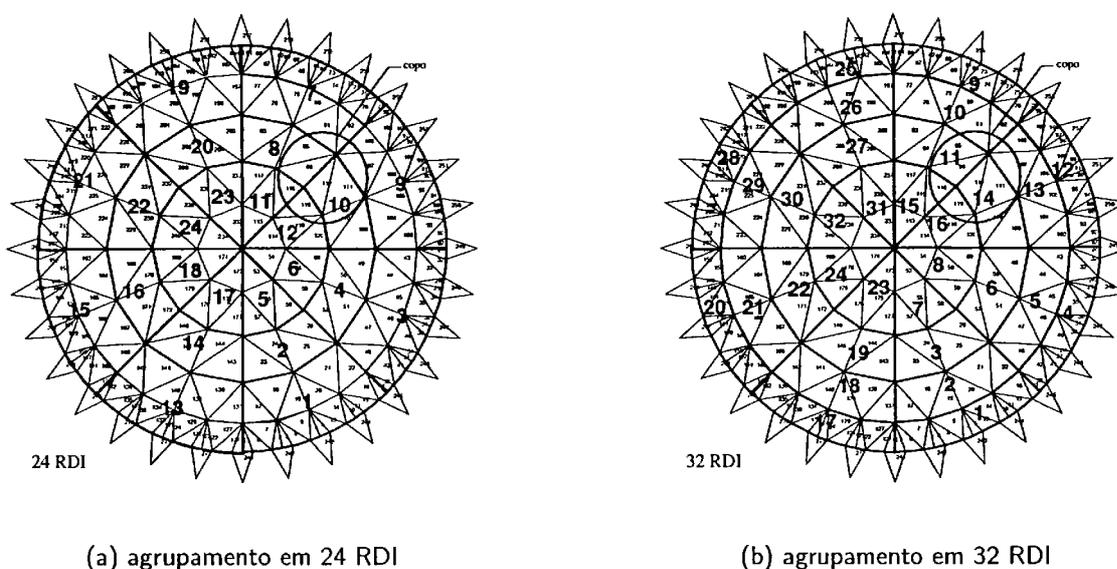


Figura 9.4: Regiões de interesse para a malha com 272 elementos.

Os parâmetros de processamento, vetor  $\sigma_0$  e as matrizes de covariância iniciais, podem variar de uma fase para outra; por este motivo, serão fornecidos na seção 12.1, que apresenta e discute os resultados obtidos.

### 9.2.2.2 Ensaios 7 e 8 (meio, regularização de Tikhonov)

Estes dois conjuntos de ensaios têm como objetivo avaliar a influência das técnicas de filtragem das altas frequências e de regularização de Tikhonov sobre as imagens estimadas. Sem recorrer à formação de RDI e tendo como informação *a priori* as condutâncias dos eletrodos determinadas no ensaio 6, identifica-se, no ensaio 7, a resistividade da solução salina contendo o copo. No ensaio 8, efetua-se uma análise de sensibilidade dos procedimentos de filtragem e regularização aos parâmetros  $\beta$  e  $\alpha$  introduzidos nas equações (6.5), pg. 67, e (6.9), pg. 68. A exemplo da seção precedente, os parâmetros iniciais serão descritos durante a apresentação e discussão dos resultados, nas seções 12.2 e 12.3.

### 9.2.2.3 Ensaio 9 (2 fases, adaptativo)

O objetivo do ensaio 9 é verificar o impacto causado pela aplicação do FEIAK (aplicação conjunta do FEIK e do filtro JARK) no procedimento de estimação em duas fases. Conforme descrito no ensaio 6, identificam-se as condutâncias nos contatos meio-eletrodos e a distribuição de resistividade na solução salina contendo o copo de vidro. Novamente, agrupam-se os elementos em 24 ou 32 RDI. Os parâmetros do ensaio podem variar entre as fases do procedimento de estimação e, por isto, são apresentados na ocasião da análise dos resultados, na seção 12.4.

Deve-se ressaltar que os ensaios 6 e 9, embora semelhantes, não são relacionados em seqüência pois optou-se por seguir a ordem cronológica dos testes.

## **Parte IV**

### **Resultados, discussão e conclusão**

# Capítulo 10

## Simulações numéricas

Os nós numerados de 1 a 16 na malha de 269 elementos, Fig. 8.1, representam eletrodos através dos quais injetam-se 30 conjuntos de  $p = \ell - 1 = (16 - 1)$  padrões linearmente independentes de correntes conforme eq. (4.13), dado que o eletrodo (nó) nº 1 é mantido como o terra. A solução do problema direto fornece as tensões nodais na malha. O filtro estendido de Kalman procura rastrear a mudança no campo de condutividade nas três situações propostas (condição normal, atelectasia leve e densa) a partir de uma distribuição inicial homogênea  $\sigma_0 = 0,2 (\Omega m)^{-1}$ . Os demais parâmetros utilizados nas simulações estão na Tab. 10.1. Ressalta-se que as matrizes de covariância  $P_0$ ,  $Q$  e  $R$  foram sintonizadas empiricamente.

As figuras 10.1, 10.5 e 10.6 apresentam a evolução temporal do vetor de estado cujas componentes são as condutividades das 8 RDI. A Tab. 10.2, pg. 95, resume os resultados obtidos. As condições normal, atelectasia leve e densa no pulmão direito inferior foram identificadas com discrepância máxima de 7,5% em relação ao vetor esperado,  $\hat{\sigma}_k$ , após 450 iterações.<sup>[i]</sup> Esta verificação é imediata, uma vez que o vetor de estado final desejado é conhecido em simulações numéricas; tal critério de convergência não pode, entretanto, ser utilizado em situações reais.

O filtro de Kalman minimiza o traço da matriz de covariância do erro,  $P_k$ , como resultado da minimização de um funcional quadrático como o da eq. (6.8). O fato de

---

<sup>[i]</sup>Utilizou-se o número de iterações e não o tempo como variável independente pois este último é função do tipo de equipamento utilizado nas simulações, que não foi o mesmo durante todo o trabalho.

Tabela 10.1: Parâmetros utilizados nas simulações numéricas

simulação	1	2	3	4
condição pulmonar	normal		atelectasia leve	atelectasia densa
condutividade esperada $\sigma_k$ $(\Omega m)^{-1}$	$\begin{pmatrix} OT = 0,28 \\ Co = 0,58 \\ C = 0,10 \\ PES = 0,080 \\ PEI = 0,087 \\ PDS = 0,077 \\ PDM = 0,083 \\ PDI = 0,091 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,28 \\ 0,58 \\ 8 \times 10^{-7} \\ 0,080 \\ 0,087 \\ 0,077 \\ 0,083 \\ 0,091 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,28 \\ 0,58 \\ 0,10 \\ 0,080 \\ 0,087 \\ 0,077 \\ 0,083 \\ 0,14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,28 \\ 0,58 \\ 0,10 \\ 0,080 \\ 0,087 \\ 0,077 \\ 0,083 \\ 0,50 \end{pmatrix}$
ruído na medida (%) †	5			
$P_0(\times I_8)$	0,2			
$Q(\times I_8)$	$3 \times 10^{-4}$		$8 \times 10^{-4}$	
$R(\times I_{16})$	$5 \times 10^{-2}$			
condutividade inicial $\sigma_0$ * $(\Omega m)^{-1}$	0,2			

† desvio-padrão do ruído branco gaussiano de média nula em % da máxima tensão calculada através do MEF

\* com adição de ruído

haver convergência para algum vetor não significa que este vetor represente uma situação fisicamente plausível, mas sim uma solução matematicamente possível. Conforme comentado no capítulo 5, pode-se avaliar a convergência verificando-se o comportamento do resíduo normalizado das observações, através das equações (5.43), (5.44) e (5.45).

Com os dados simulados, o fato de os resíduos normalizados atenderem às condições acima não garante a convergência satisfatória. Por exemplo, a condutividade dos tecidos que compõem a coluna cervical pode variar entre  $5,917 \times 10^{-7}$  e  $1,098 \times 10^{-6} (\Omega m)^{-1}$ , com valor médio  $8,065 \times 10^{-7} (\Omega m)^{-1}$  (Faes et al. 1999). Verifica-se, na Tab. 10.1, que o valor adotado para estes tecidos é de  $0,10 (\Omega m)^{-1}$ . O fato é explicado a seguir.

A inversa da matriz  $Y(\sigma)$ , quadrada, do sistema linear dado pela eq. (4.16), pg. 46, é utilizada tanto na geração das tensões "medidas", eq. (5.2), quanto na obtenção da matriz de sensibilidade, conforme eq. (5.5), pg. 48. Erros de truncamento nas operações em ponto flutuante efetuadas pelo computador podem criar perturbações  $\delta Y^{-1}$  durante

a inversão da matriz global de condutividade.

Os efeitos de perturbações em um sistema linear são quantificados em função do número de condição da matriz do sistema. Definindo-se o número de condição  $\kappa(A)$  de uma matriz genérica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  como a razão entre o maior e o menor de seus valores singulares (Press et al. 1992), demonstra-se (Watkins 1991) que as perturbações na solução de um sistema linear do tipo  $Ax = b$ ,  $x, b \in \mathbb{R}^n$  são limitadas desde que:

$$\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \frac{1}{\kappa(A)}, \quad (10.1)$$

onde  $\delta A$  são as perturbações na matriz do sistema e  $\|\cdot\|$  representa uma norma compatível (Trigo 2001). Nestas condições, as perturbações  $\|\delta x\|$  no vetor solução são dadas por

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1 - \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}. \quad (10.2)$$

Watkins (1991) demonstra também que as perturbações na inversa da matriz do sistema podem ser calculadas por

$$\frac{\|\delta A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|\delta I\|}{\|I\|}, \quad (10.3)$$

em que  $I = AA^{-1}$ .

A inversa da matriz  $Y(\sigma)$  do sistema linear dado pela eq. (4.16), pg. 46, é utilizada tanto na geração das tensões "medidas", eq. (5.2), quanto na obtenção da matriz de sensibilidade, conforme eq. (5.5), pg. 48. Através da inequação (10.3) obtêm-se, em todas as simulações nas quais a condutividade esperada para a coluna cervical é  $0,1 (\Omega m)^{-1}$ , perturbações da ordem de  $4,5 \times 10^{-14}$  para a inversa da matriz do sistema ( $Y^{-1}$ ), e seu número de condição é  $2,9 \times 10^4$ . Assim, verifica-se a desigualdade da inequação (10.1) e a perturbação no vetor solução é, de acordo com (10.2),

$$\frac{\|\delta \sigma\|}{\|\sigma\|} \leq \frac{\kappa(Y^{-1}) \frac{\|\delta Y^{-1}\|}{\|Y^{-1}\|}}{1 - \kappa(Y^{-1}) \frac{\|\delta Y^{-1}\|}{\|Y^{-1}\|}} = 1,3 \times 10^{-9}$$

Utilizando-se a condutividade média real da coluna cervical ( $8,065 \times 10^{-7} (\Omega m)^{-1}$ ), as perturbações na inversa da matriz do sistema passam a aproximadamente  $1,2 \times 10^{-11}$ ,

com  $\kappa(Y^{-1}) = 2,0 \times 10^7$ . Novamente, a eq. (10.1) é satisfeita e, pela eq. (10.2)

$$\frac{\|\delta\sigma\|}{\|\sigma\|} = 2,4 \times 10^{-4}$$

Portanto, a ordem de grandeza das perturbações no vetor que será utilizado como base para o cálculo das tensões “medidas” é cerca de  $10^5$  vezes superior quando a condutividade real da região da coluna é utilizada no lugar do valor adotado. O comportamento descrito atesta o mau condicionamento da matriz  $Y$ , característico de um problema mal condicionado, conforme tem-se afirmado ao longo do trabalho.

Além disso, o produto matricial  $-Y^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma} Y^{-1}$  da eq. (5.5) irá compor a matriz de sensibilidade em cada iteração do filtro de Kalman; utilizando-se a condutividade real, o número de condição de  $Y^{-1}$  é aproximadamente  $10^3$  vezes maior que o obtido com a condutividade adotada. As simulações 1 e 2, efetuadas com os mesmos parâmetros, mostram que a consequência desta alteração é maior propagação de ruído numérico, levando inclusive à obtenção de estimativas sem sentido físico (valores negativos de condutividade), vide fig. 10.2.

Os resíduos normalizados atendem aos critérios de convergência em ambos os casos (figuras 10.3 e 10.4) e, portanto, a capacidade do algoritmo em rastrear a função degrau de perturbação na distribuição de condutividade do meio é estatisticamente comprovada.

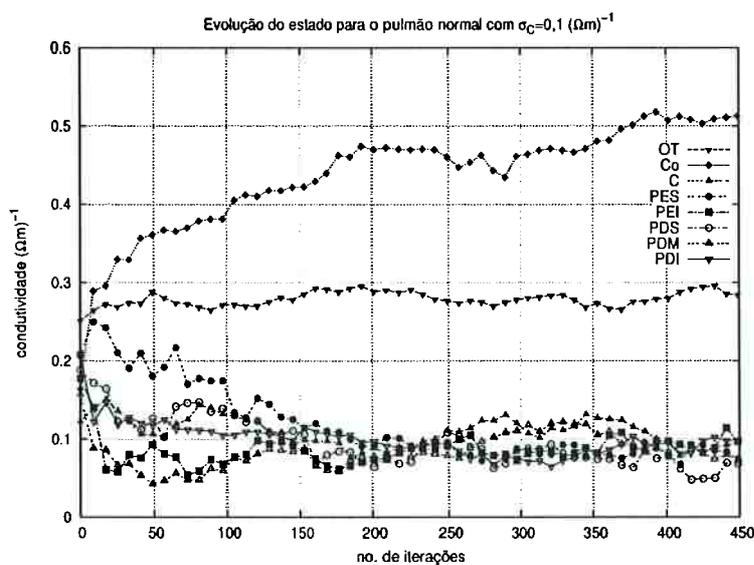


Figura 10.1: Sim. 1 (pulmão normal): evolução do estado com  $\sigma_C = 0,1 (\Omega m)^{-1}$ . O erro máximo é de -11,2% na RDI que representa o coração.

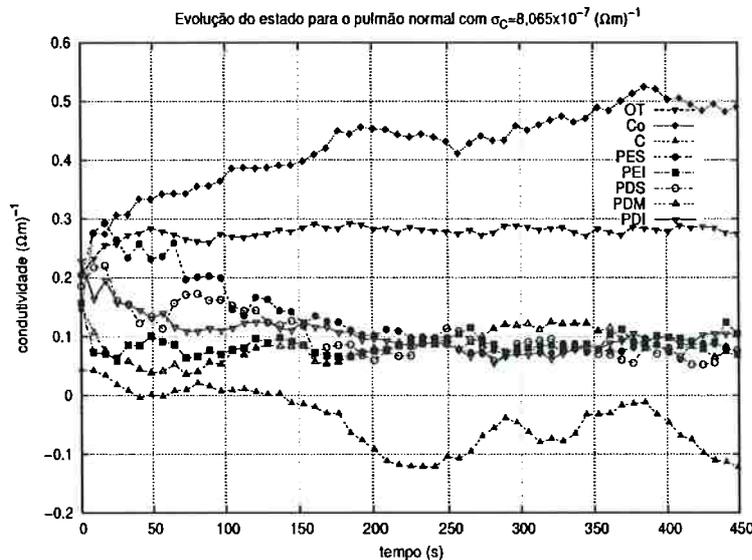


Figura 10.2: Sim. 2 (pulmão normal): evolução do estado com  $\sigma_C = 8,065 \times 10^{-7} (\Omega m)^{-1}$ .

No entanto, na Fig. 10.2, verifica-se que a evolução temporal da variável de estado “condutividade da coluna cervical” (curva identificada por “▲”) apresenta comportamento divergente, o que contraria a consistência exibida entre os resíduos e sua estatística. O aparente paradoxo pode ser explicado da seguinte maneira: os resíduos são calculados considerando-se todas as variáveis de estado; desta forma, as discrepâncias provocadas por estimativas errôneas de apenas uma variável de estado passam a ter influência menor sobre o valor global dos resíduos.

Conclui-se que, em situações cujas tensões “medidas” sejam resultantes de simulações numéricas, pode-se utilizar como critério de convergência a discrepância entre os valores absolutos estimados e esperados. Por este motivo não são apresentados gráficos de resíduos normalizados para as simulações 3 e 4. Deve-se ressaltar que, na prática, não se dispõe do estado final de antemão, devendo-se portanto aplicar o critério de convergência baseado nos resíduos normalizados.

As matrizes de covariância, em todas as simulações, foram empiricamente escolhidas de forma a proporcionar a convergência das estimativas para o vetor esperado. O número de iterações do algoritmo é o mínimo suficiente para que os gradientes das curvas de

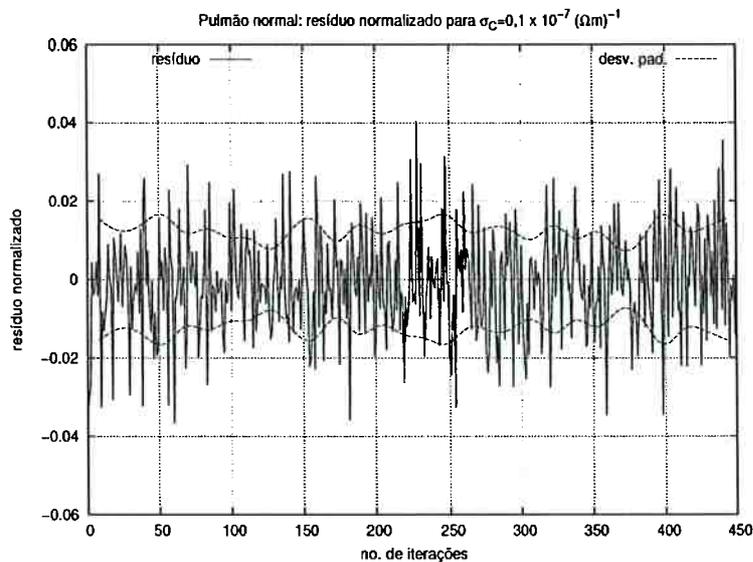


Figura 10.3: Sim. 1 (pulmão normal): resíduo normalizado.

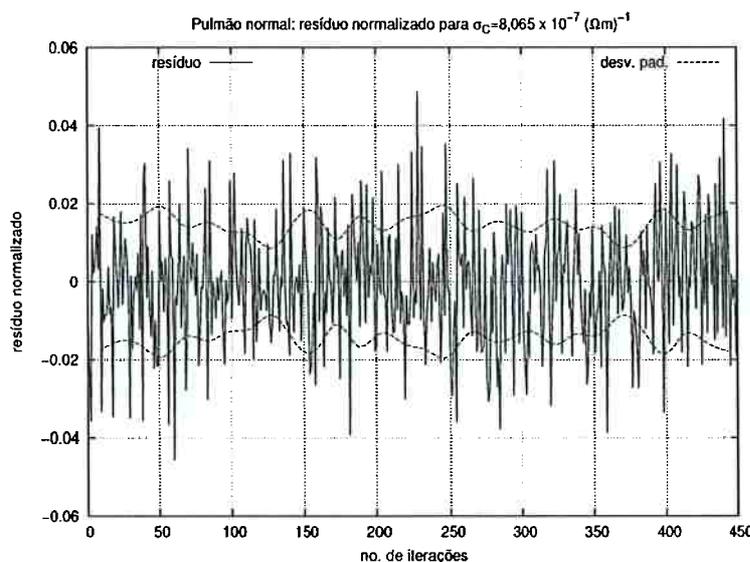


Figura 10.4: Sim. 2 (pulmão normal): resíduo normalizado.

evolução temporal do estado sejam, na média,<sup>[ii]</sup> nulos, significando que a cada nova iteração pouca correção é imposta ao vetor de estado. Este é o critério adotado para verificar a convergência de dados simulados.

A sensibilidade do filtro estendido à escolha das matrizes de covariância  $P_0$ ,  $Q$  e

<sup>[ii]</sup> Ao longo deste trabalho, salvo menção explícita em contrário, considerações a respeito de gradientes de curvas referem-se a avaliações qualitativas por verificação visual nos gráficos que contêm as curvas de interesse.

$R$  nesta aplicação foi investigada por Trigo (2001). Sabe-se, por exemplo, que quanto mais confiáveis forem as medidas (e, conseqüentemente menor a norma de  $R$ ), maior o decréscimo nas normas da covariância do erro,  $P_k$ , e maior o ganho de Kalman,  $G_k$ , a cada iteração, de acordo com as equações

$$[P_k^{(+)}]^{-1} = [P_k^{(-)}]^{-1} + \mathbb{H}_k^T R_k^{-1} \mathbb{H}_k \quad (10.4)$$

$$\text{e} \quad G_k = P_k^{(+)} \mathbb{H}_k^T R_k^{-1}, \quad (10.5)$$

obtidas por manipulação algébrica das equações (5.22) e (5.24). Em outras palavras, a correção à trajetória será mais acentuada. O mesmo efeito é observado quando a norma da matriz  $Q$  é aumentada. Nas simulações 3 (atelectasia leve) e 4 (atelectasia densa), houve necessidade de majorar as variâncias do ruído no estado (elementos da diagonal de  $Q$ ) para atingir a convergência desejada, conforme mostram as figuras 10.5 e 10.6.

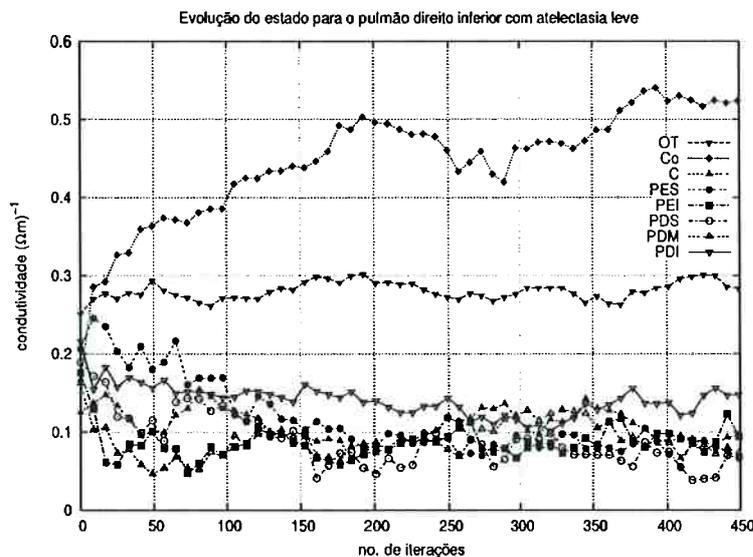


Figura 10.5: Sim. 3 (PDI com atelectasia leve): evolução do estado. O erro máximo é de -14,6% na RDI que representa o *PES*.

A figura 10.7 mostra a distribuição de condutividade em cada RDI na simulação 4 (atelectasia densa) após a iteração n<sup>o</sup> 450. Verifica-se que, mesmo com 12,3% de erro na estimativa do PDS, é possível visualizar a ocorrência da anomalia no PDI.

Nas simulações numéricas apresentadas, a condutividade do meio é estimada. Observa-se que o aumento nos ganhos de Kalman faz com que a oscilação na resposta seja maior;

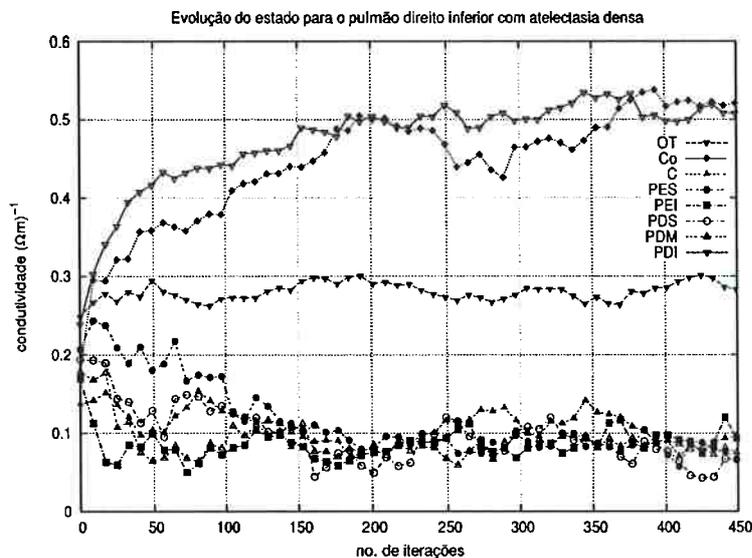


Figura 10.6: Sim. 4 (PDI com atelectasia densa): evolução do estado. O erro máximo é de 12,3% na RDI que representa o *PDS*.

Tabela 10.2: Resultados das simulações numéricas

simulação	1	2	3	4
condição pulmonar	normal		atelectasia leve	atelectasia densa
erro de estimação máximo (%)	-11,2 ( <i>PDM</i> )	---	-14,6 ( <i>PES</i> )	12,3 ( <i>PDS</i> )
erro de estimação mínimo (%)	0,94 ( <i>OT</i> )	---	0,4 ( <i>C</i> )	0,5 ( <i>OT</i> )
erro de estimação no PDI (%)	7,5	---	4,6	1,5

por exemplo, na simulação 1, figura 10.1 verifica-se que, a partir da iteração nº 150 até o final, as variáveis de estado com menor valor oscilam entre aproximadamente 0,075 e 0,125  $(\Omega m)^{-1}$ . Nas simulações 3 e 4, figuras 10.5 e 10.6, com o aumento na norma de  $Q$ , os valores das mesmas variáveis de estado oscilam entre cerca de 0,05 e 0,15  $(\Omega m)^{-1}$ , a partir da iteração nº 150. A sensibilidade à escolha das matrizes de covariância é uma característica intrínseca da formulação do filtro de Kalman que, neste caso, é agravada pelo fato de o problema da TIE ser mal condicionado.

A distribuição de condutividade do meio deve ser estritamente positiva. Quando o

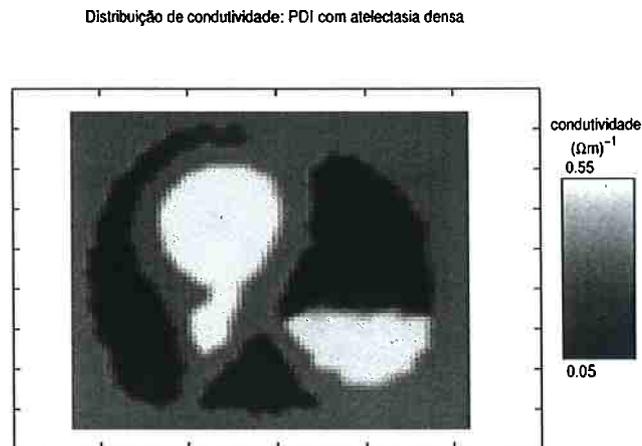


Figura 10.7: Sim. 4 (PDI com atelectasia densa): distribuição de condutividade nas 8 RDI após a iteração n<sup>o</sup> 450.

vetor de estado a ser estimado apresenta valores muito próximos de zero, a escolha dos parâmetros de simulação pode levar à ocorrência de estimativas intermediárias negativas. Se, nas iterações subsequentes, o filtro conseguir “aprender o estado certo” (Jazwinski 1970), fazendo com que somente valores positivos sejam obtidos, o processo segue até que o critério de parada adotado assim o determine. Em algumas situações, como na simulação 2 acima, isto não ocorre e as estimativas obtidas são incorretas. Pode-se contornar a dificuldade efetuando-se a estimativa do estado em termos de resistividade (inversa da condutividade), permitindo assim maiores oscilações sem que nenhuma das variáveis de estado atinja valores negativos. Este recurso será utilizado no processamento dos dados experimentais, a ser discutido no próximo capítulo.

Os resultados das simulações apresentam discrepância máxima inferior a 15% nas estimativas dos respectivos vetores de estado. Isto ocorre pois a malha de elementos finitos utilizada para gerar os dados de tensões que, após a adição de ruído, originam as tensões “medidas”, é idêntica à incorporada ao modelo de observações do filtro de Kalman. O emprego da mesma malha no problema direto e no inverso constitui um *crime de inversão* (Lionheart 2004) que, na prática, implica em estimativas otimistas para os valores esperados. Isto não ocorreria caso os dados de tensões fossem provenientes

---

de medidas reais ou simulados a partir de malhas distintas, embora a incorporação de ruído tenda a atenuar tal efeito. De qualquer maneira, o presente capítulo foi mantido pelos seguintes motivos: trazer à tona as discussões quanto ao número de condição das matrizes e aos problemas decorrentes de estimativas sem sentido físico, no caso condutividades negativas; testar o algoritmo quanto à existência de erros grosseiros.

# Capítulo 11

## Validação experimental: malha de 182 elementos

### 11.1 Ensaio 1 - FEK, identificação de eletrodos

No capítulo 7, que trata da estimação parcial do estado, menciona-se a possível dificuldade para a obtenção de estimativas de condutividade do meio e da condutância de contato nos eletrodos, dada a razão entre as sensibilidades destas grandezas. O problema irá ocorrer nesta seção pois procura-se identificar a condutividade do meio salino e, também, as condutâncias dos eletrodos parcialmente imersos neste meio. A estimativa inicial do estado  $\sigma_0 = 0,06 (\Omega m)^{-1}$  para o meio e  $\sigma_0 = 50,0 (\Omega m^2)^{-1}$  para os eletrodos foi arbitrária, uma vez que a bancada acabara de ser construída. No entanto, como mostrado no capítulo 10, para valores a serem estimados muito próximos de zero, pode haver problemas de convergência devido à obtenção intermediária de variáveis de estado com valores negativos. Assim, as estimativas iniciais foram adequadas a esta restrição. O mesmo comentário é válido em relação às matrizes de covariância  $P_0 = 3,5 \times 10^{-1} I_{34}$ ,  $Q_k = 3,4 \times 10^0 I_{34}$  e  $R = 2,5 \times 10^{-2} I_{32}$  utilizadas nas primeiras seqüências de identificação.

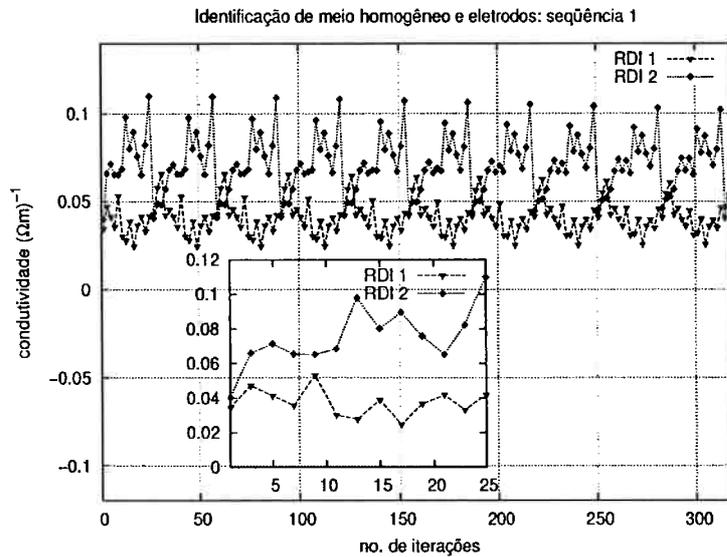
Uma seqüência de identificação compreende a aplicação de 10 grupos de 32 padrões adjacentes de correntes, o que dá um total de 320 iterações do algoritmo. Ao final de cada seqüência os valores de condutividade/condutância obtidos para as 34 RDI (2 referentes ao meio interno e 32 referentes ao eletrodos) são comparados aos finais para a seqüência anterior e verificado se estão dentro da faixa de tolerância máxima de 2,5%,

que foi o critério estabelecido na seção 9.2.1.1. Paralelamente, também os respectivos resíduos normalizados são avaliados, devendo satisfazer às condições prescritas pelas equações (5.44)-(5.45). A convergência é considerada satisfatória quando ambos os critérios tiverem sido atendidos.

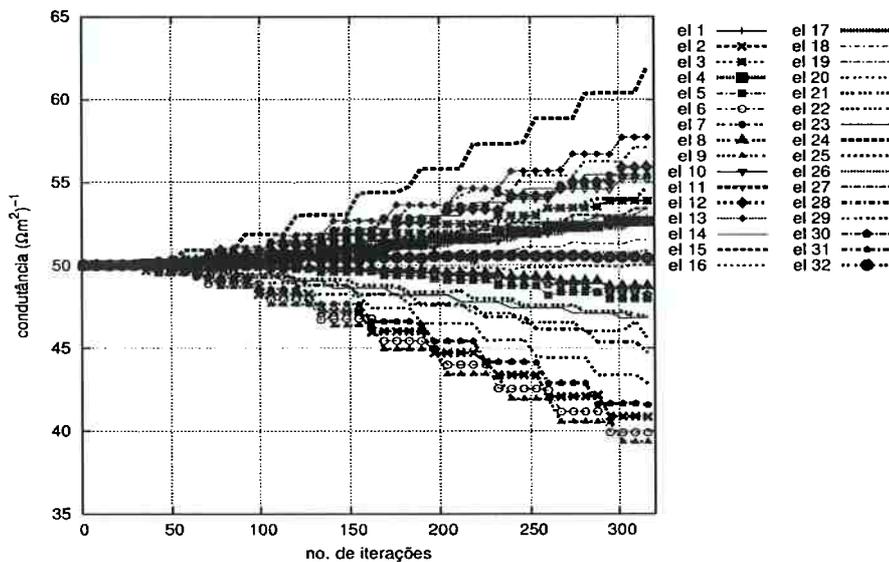
As Figuras 11.1 (a) e (b) apresentam a evolução temporal do vetor de estado para a primeira seqüência de identificação, separando as componentes do vetor de estado para o meio (a) e os eletrodos (b).

Nenhuma das componentes do vetor de estado representando as condutâncias dos eletrodos, Fig. 11.1 (b), apresentou variação inferior a 2,5% com relação ao início do processo. O comportamento dos resíduos para o processo acima é mostrado na figura 11.2. O critério estabelecido na seção 5.4 não é satisfeito no que concerne ao limite de 3 desvios-padrão a partir da média nula. A causa para tal fato pode ser ajuste de parâmetros, e não divergência propriamente dita. Explica-se: de acordo com a eq. (5.43), pg. 60, os resíduos dependem das variâncias do ruído na medida, valores dos elementos da diagonal principal de  $R$ , considerados idênticos entre si. Esta não é uma condição necessária, uma vez que cada eletrodo, ao qual corresponde uma variância, é um sensor independente dos demais. Assim, na ausência de informações sobre o real valor de  $R$ , seria possível tentar ajustar seus elementos de forma a promover a convergência de acordo com o critério adotado; no entanto, tal sintonia carece de significado físico e, desta forma, não foi implementada. Por outro lado, seria possível (e plausível) o ajuste dos parâmetros  $P_0$  e  $Q_k$ , também não efetuado neste momento pela razão a seguir.

A figura 11.1(a) mostra que a condutividade do meio homogêneo possui, nas estimativas efetuadas até o momento, dois patamares distintos referentes às RDI interna e da coroa externa, cujas condutividades médias são, respectivamente,  $0,04 \pm 0,01$  e  $0,07 \pm 0,02 (\Omega m)^{-1}$ . Observa-se também que as correções nas componentes do vetor de estado referentes ao meio são mais acentuadas nas primeiras 25 iterações e, depois, apresentam variações que se compensam em torno dos respectivos valores médios. O mesmo não ocorre para as estimativas das condutâncias dos eletrodos, Fig. 11.1(b). Na hipótese de haver divergência, seqüências posteriores de estimação deveriam exibir patamares mais distintos de condutividade média da solução e gradientes crescentes nas



(a) evolução temporal do estado (meio)



(b) evolução temporal do estado (eletrodos)

Figura 11.1: Seqüência 1: evolução temporal do estado (a) meio; (b) eletrodos.

curvas de evolução temporal para os eletrodos, além de resíduos com amplitude crescente. Para testar estas hipóteses qualitativas, optou-se por manter os parâmetros de processamento e efetuar novas seqüências de estimação. Antes de prosseguir, entretanto, cabem ainda dois comentários em relação aos resultados da seqüência 1.

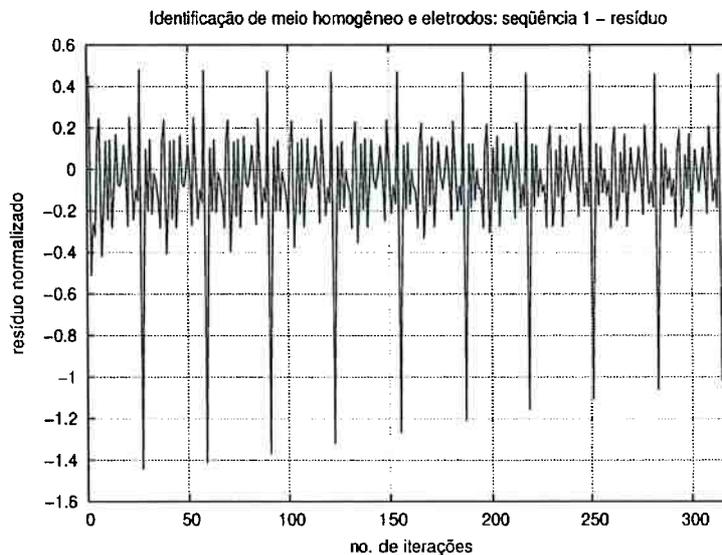
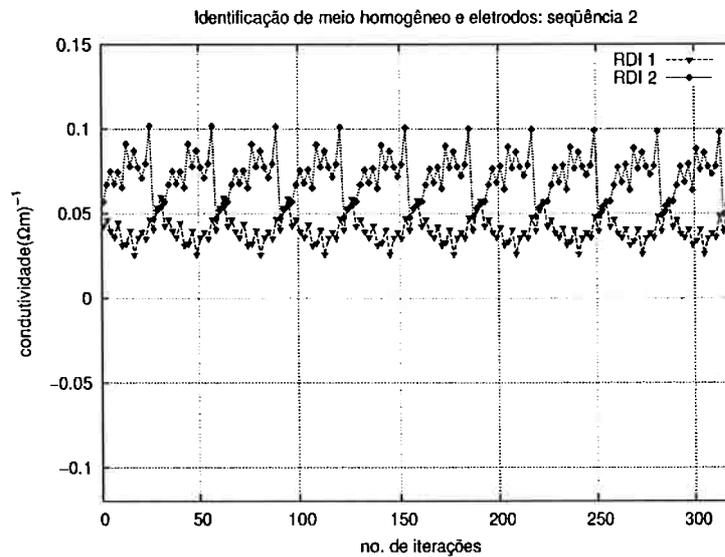


Figura 11.2: Seqüência 1: resíduo normalizado.

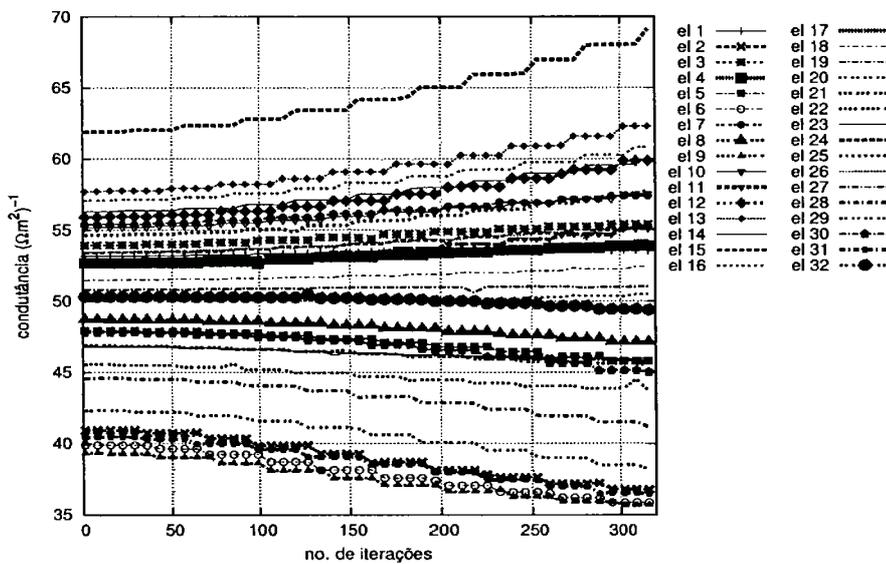
A aparente "oposição de fase" entre as curvas de evolução do estado para as RDI 1 e 2 (coroa externa e meio salino) deve-se à correção imposta pelo filtro a estimativas do estado distintas do real valor na iteração imediatamente anterior, da seguinte forma: quando a coroa externa é superestimada, a conservação de cargas (hipótese do modelo do sistema) faz com que a distribuição de condutividade da região central seja estimada para menos e vice-versa.

O segundo comentário refere-se à existência de picos mais acentuados na Fig. 11.2. No ensaio 1, utilizam-se padrões adjacentes de correntes, para os quais as maiores tensões são sempre registradas nas medidas efetuadas entre o eletrodo terra,  $\ell$  (no caso, eletrodo nº 1, fixo, potencial nulo), e seus adjacentes,  $\ell - 1$  e  $\ell + 1$ . Como o resíduo normalizado depende das diferenças entre as tensões medidas e as calculadas em função do estado estimado pelo filtro, é justo que os maiores resíduos ocorram simultaneamente às maiores tensões medidas, fato que se repete a cada 32 iterações, coerente com a formulação matemática adotada para os padrões adjacentes.

A evolução temporal do vetor de estado para a seqüência 2 é apresentada nas figuras 11.3 (a) e (b). As condutividades médias nas duas RDI (interna e coroa externa) que correspondem ao meio homogêneo são, respectivamente,  $0,040 \pm 0,008$  e  $0,07 \pm 0,02$  ( $\Omega m$ )<sup>-1</sup>. Os resíduos normalizados, Fig. 11.4, apresentam amplitudes



(a) evolução temporal do estado (meio)



(b) evolução temporal do estado (eletrodos)

Figura 11.3: Seqüência 2: evolução temporal do estado (a) meio; (b) eletrodos.

decrecentes, embora o limite de três desvios-padrão em torno da média tenha sido ultrapassado; a discrepância entre os valores de condutância após as duas seqüências é superior a 2,5% para todas as componentes do vetor de estado que representam condutâncias dos eletrodos. Há, portanto, necessidade de continuar o processo de iden-

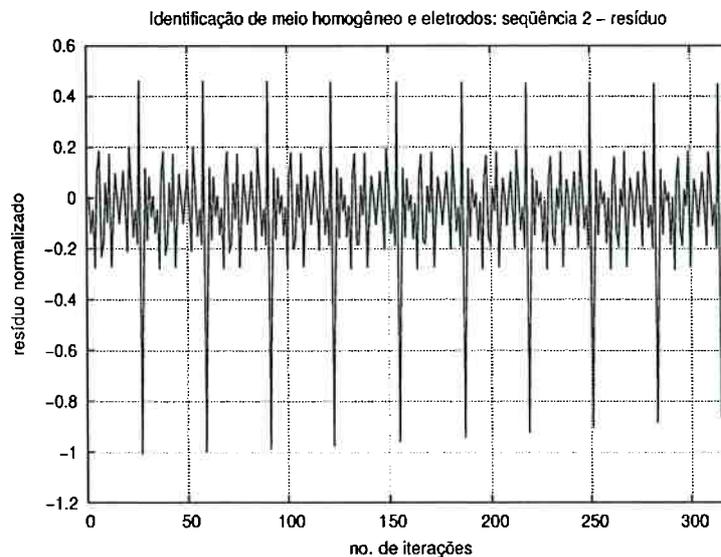


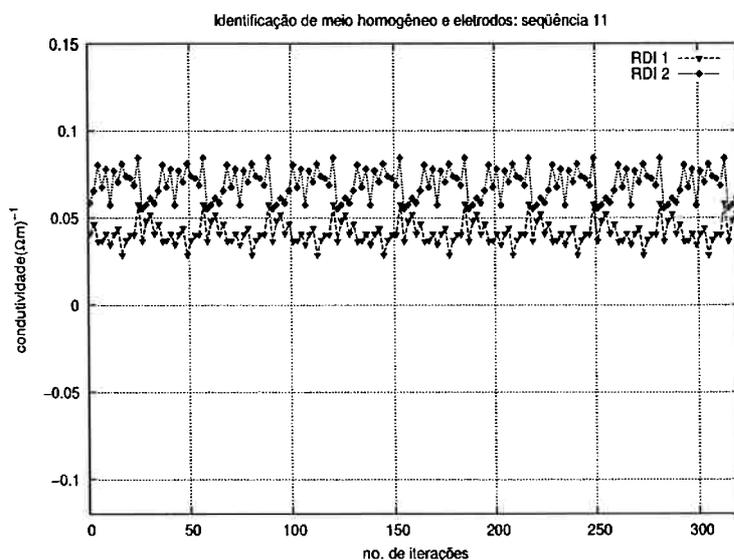
Figura 11.4: Seqüência 2: resíduo normalizado.

tificação.

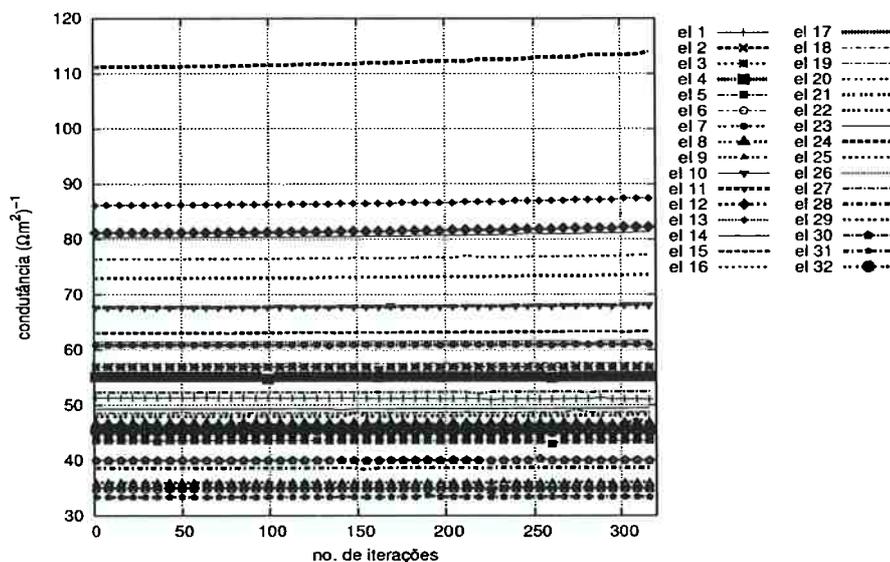
A partir da terceira seqüência, alterou-se a matriz de covariância do ruído no estado,  $Q_k$ , para o valor  $7,8 \times 10^0 I_{34}$ , a fim de proporcionar aumento nos ganhos do filtro e maiores correções ao estado para, possivelmente, acelerar a convergência.

Foram efetuadas mais 9 seqüências, sendo que o comportamento do vetor de estado e a evolução dos resíduos foram monitorados para verificação da convergência. As condutividades médias das duas regiões que correspondem ao meio homogêneo, Fig. 11.5 (a), e suas respectivas dispersões, mantiveram os valores apresentados ao final da seqüência 2. As variáveis de estado que representam as condutâncias dos eletrodos atenderam ao critério de discrepância inferior a 2,5% em relação à identificação anterior, Fig. 11.5(b); quanto aos resíduos, Fig. 11.6, foram obtidos os valores  $\mathbb{E}[r_\nu] = -0,036$  e  $(\mathbb{E}[r_\nu^2] - \mathbb{E}[r_\nu]^2)^{1/2} = 0,17$ , que satisfazem às condições prescritas pelas equações (5.44)-(5.45). Pode-se, portanto, concluir que houve convergência no procedimento de estimação.

Os parâmetros de contato meio/eletrodo são, na literatura da TIE, normalmente apresentados em termos da grandeza impedância. A conversão de condutância para impedância é feita calculando-se o inverso dos valores finais na figura 11.5(b). As impedâncias assim obtidas estão na Tabela 11.1. O valor médio é  $\bar{\rho} = 0,019 \Omega m^2$



(a) evolução temporal do estado (meio)



(b) evolução temporal do estado (eletrodos)

Figura 11.5: Seqüência 11: evolução temporal do estado (a) meio; (b) eletrodos.

e o desvio-padrão é  $0,006 \Omega m^2$ . Espera-se que, utilizando uma malha distinta, os valores da Tabela 11.1 sofram alterações. Caso desejado, é também possível calcular as *resistências* de contato; para isto, dividem-se os valores acima pela área efetiva de contato entre o meio salino e o eletrodo de bronze que, neste caso, é uma seção retangular de

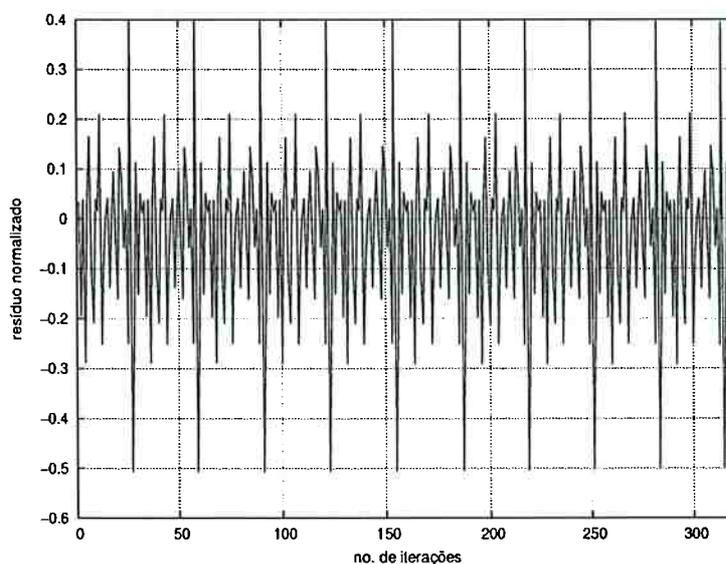


Figura 11.6: Seqüência 11: resíduo normalizado.

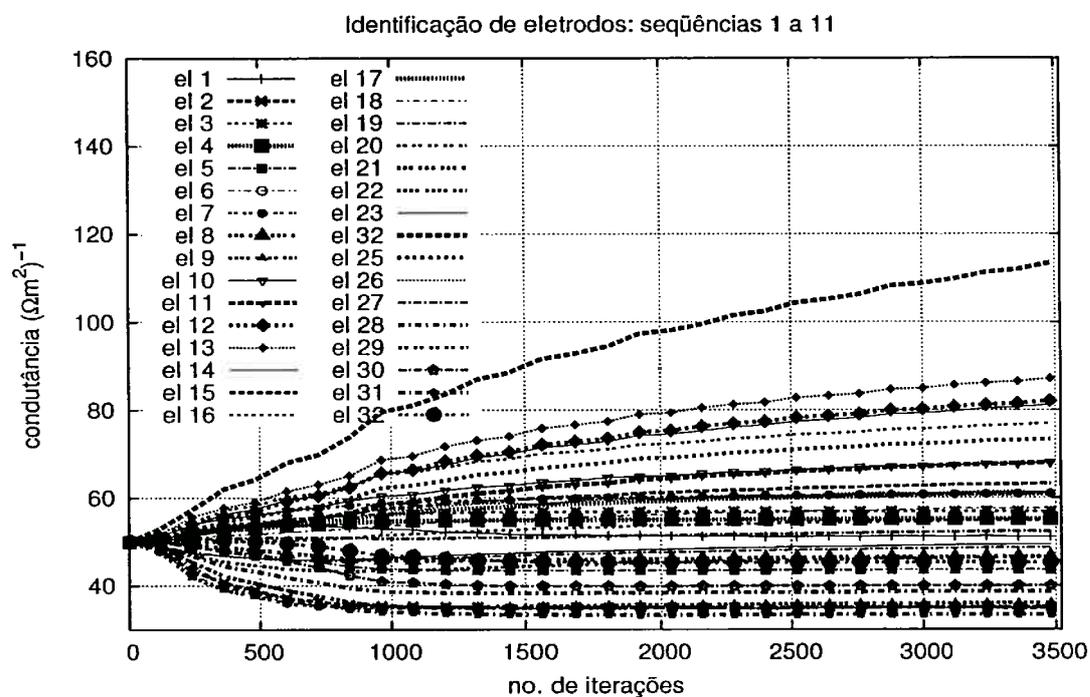
12,0 × 26,5 mm. Assim, o procedimento de identificação dos eletrodos está terminado.

Os resultados desta seção serão comparados aos da seção 12.1.

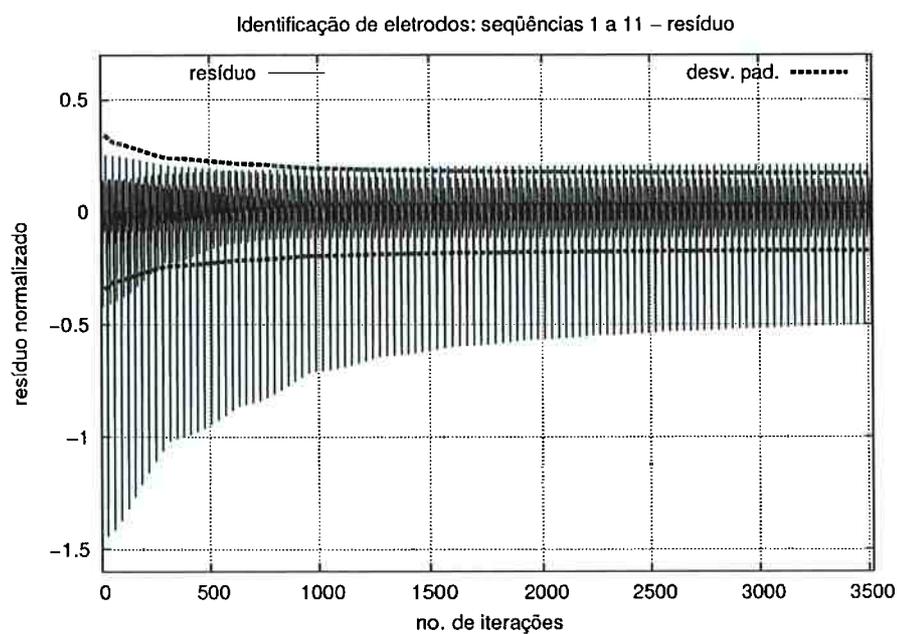
Tabela 11.1: Impedâncias de contato dos eletrodos ( $\Omega m^2$ )

ELETRODO	1	2	3	4	5	6	7	8
IMPEDÂNCIA	0,0195	0,0286	0,0176	0,0181	0,0229	0,0287	0,0164	0,0215
ELETRODO	9	10	11	12	13	14	15	16
IMPEDÂNCIA	0,0277	0,0147	0,0147	0,0122	0,0114	0,0202	0,0158	0,0182
ELETRODO	17	18	19	20	21	22	23	24
IMPEDÂNCIA	0,0164	0,0173	0,0205	0,0130	0,0208	0,0215	0,0123	0,0088
ELETRODO	25	26	27	28	29	30	31	32
IMPEDÂNCIA	0,0136	0,0162	0,0191	0,0259	0,0285	0,0250	0,0300	0,0221

Para melhor visualização, os gráficos da Fig. 11.7 apresentam a evolução do estado para os eletrodos e os resíduos normalizados para as onze seqüências de estimação reunidas, totalizando 3520 iterações.



(a) evolução temporal do estado (eletrodos)



(b) evolução resíduos normalizados

Figura 11.7: Seqüências 1 a 11: evolução temporal do estado para os eletrodos (a) e resíduos normalizados (b).

## 11.2 Ensaio 2 - FEK e FEIK, identificação do meio

Nesta seção, procura-se identificar a presença de um copo de vidro imerso no meio salino (vide figura 9.1, pg. 80) mantendo o nível do líquido constante e utilizando as impedâncias estimadas para os eletrodos na seção anterior como informação *a priori*. A exclusão das impedâncias de contato do procedimento de estimação é justificada com base no Teorema do Ponto Fixo e no trabalho de Guo (1990), e será discutida mais adiante. Os desempenhos do filtro estendido e do filtro estendido iterado são avaliados comparativamente.

A discussão acerca das grandezas utilizadas no procedimento de identificação deve ser retomada. Embora as grandezas dielétricas do meio e dos eletrodos sejam distintas, as estimativas são efetuadas simultaneamente. No ensaio 1, a relação entre elas foi da ordem de  $10^3 m^{-1}$ , pois a condutância média na interface meio-eletrodo é de  $\simeq 56,5 (\Omega m^2)^{-1}$ , ao passo que a condutividade média do meio salino é  $\simeq 0,055 (\Omega m)^{-1}$ . A introdução de um objeto que contém ar em seu interior (o copo de vidro) diminuiu mais a condutividade média da região interna; o efeito será mais acentuado no local onde o objeto repousa. A estimação com base na condutividade da solução poderá apresentar estimativas negativas (que, neste caso, não possuem significado físico) para algumas variáveis de estado e, talvez, o filtro não seja capaz de corrigi-las antes que ocorra divergência. Por outro lado, a resistividade da solução é elevada; isto teoricamente garante que, dependendo da escolha dos parâmetros de processamento, não haja estimativas negativas e o desempenho do filtro possa ser avaliado com base nos critérios adotados. Ressalta-se que, com os eletrodos, ocorre exatamente o contrário. Caso as estimativas fossem baseadas em impedâncias, os valores estariam ao redor de zero, aumentando a probabilidade de prejudicar o desempenho do filtro pela ocorrência de variáveis de estado negativas durante o processo.

Conclui-se que a grandeza a ser empregada no processamento para a obtenção de estimativas *depende do parâmetro a ser estimado*. Quando o objetivo é estimar parâmetros da interface meio-eletrodo, deve-se utilizar a condutância como grandeza de trabalho, como foi feito na seção 11.1; se o propósito é rastrear mudanças nas propriedades de

um meio salino, homogêneo ou não, a resistividade é a grandeza mais indicada. A argumentação acima baseia-se na experiência adquirida ao longo da elaboração deste trabalho e em resultados experimentais. Não há registro de discussão semelhante na literatura.

A utilidade destas conclusões em aplicações na medicina para a verificação da condição pulmonar é imediata: deve-se estimar *resistividades* dos tecidos internos e *condutâncias* de contato pele-eletrodo.

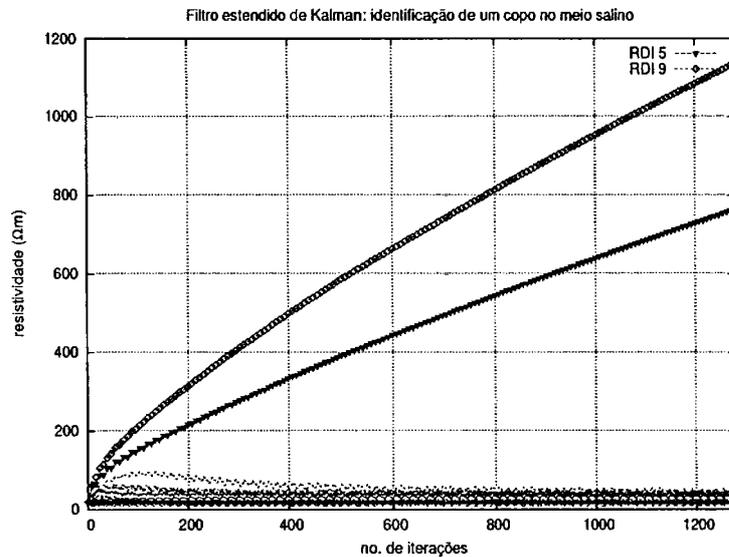
### 11.2.1 Identificação do meio com o auxílio do FEK

O comportamento dinâmico das resistividades das 16 RDI em que os elementos internos da malha foram agrupados (Fig. 9.3(b), pg. 83), quando uma função degrau perturba o meio homogêneo, pode ser visto na Fig. 11.8(a). O procedimento de estimação através do FEK utilizou matrizes de covariância diagonais e constantes  $P_0 = 3,5 \times 10^{-5} I_{16}$ ,  $Q = 7,8 \times 10^1 I_{16}$  e  $R = 2,5 \times 10^{-3} I_{32}$  durante todo o processo, que compreende a aplicação de 40 grupos de 32 padrões diametrais de correntes, totalizando 1280 iterações do algoritmo, e partiu de uma distribuição homogênea com  $\rho_0 = 1,0 \Omega m$ .

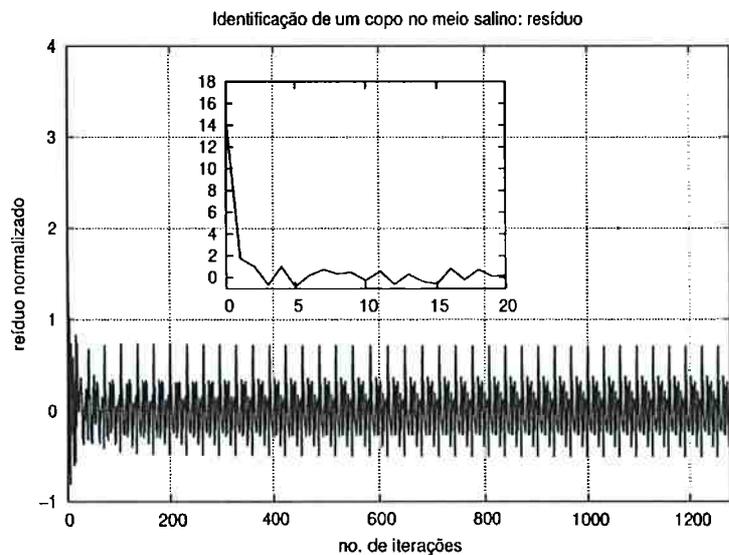
As curvas de evolução do estado mostram que, após aproximadamente 100 iterações, é possível perceber, nas duas regiões representadas por curvas com os maiores gradientes, valores de resistividade duas vezes superiores aos das demais RDI. As duas regiões em questão, RDI 5 e 9, correspondem à área ocupada pelo copo de vidro. A região 9 apresenta resistividade mais elevada que a região 5 pois a maior parte da área da seção transversal do copo pertence à região 9.

A Fig. 11.8(b) mostra os resíduos normalizados. Para melhor visualização, os valores referentes às primeiras 50 iterações e às últimas 96 iterações foram ampliados, conforme mostram a área em detalhe na Fig. 11.8(b) e a Fig. 11.9(a). Nota-se, na área destacada da Fig. 11.8(b), que a amplitude máxima na quarta iteração é cerca de 14 vezes menor que a inicial e mantém-se inferior a este valor até a iteração nº 50. A Fig. 11.9 mostra que a amplitude pico-a-pico máxima não ultrapassa 1,4 nas iterações finais.

Pelo critério de convergência adotado, equações (5.44)-(5.45), conclui-se que houve divergência, uma vez que a segunda condição não é satisfeita, pois  $\mathbb{E}[r_\nu] = 0,035$ , mas



(a) evolução temporal do estado



(b) resíduo normalizado

Figura 11.8: Identificação de um copo através do FEK: (a) evolução temporal do estado; (b) resíduo normalizado.

$(E[r_\nu^2] - E^2[r_\nu])^{1/2} = 0,26 > 3\zeta_\nu$ , após processamento dos dados referentes ao último lote de medidas. Na seção precedente, quando os gradientes das curvas de evolução temporal das variáveis de estado atingiram valores nulos, a convergência foi considerada satisfatória. No presente caso, verifica-se que as curvas referentes à dinâmica das resis-

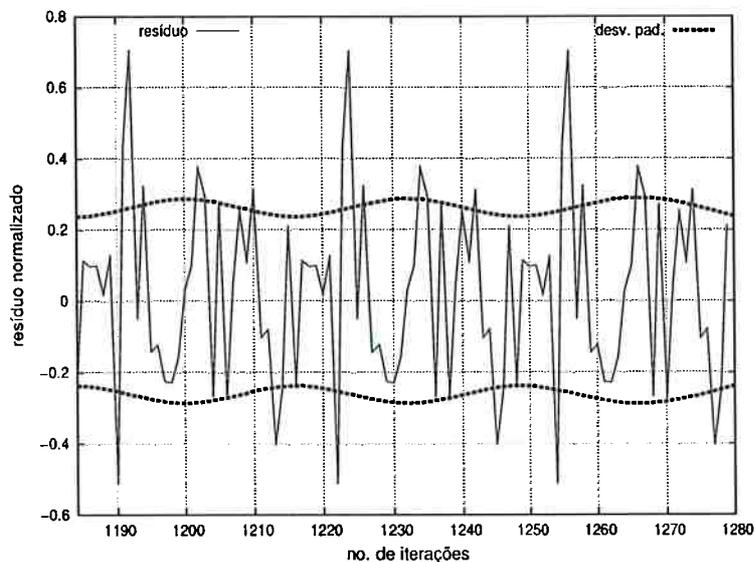


Figura 11.9: Resíduo normalizado: ampliação da evolução temporal para as iterações finais.

tividades das regiões 5 e 9 possuem gradientes positivos e decrescentes; a convergência em direção a gradientes nulos é lenta pois a perturbação imposta pela função degrau é elevada.<sup>[i]</sup> Por outro lado, os resíduos permanecem limitados e a posição identificada do copo corresponde à real, vide Fig. 11.10. Ressalta-se que, uma vez possível a visualização deste objeto, o procedimento de estimação foi interrompido. A divergência, portanto, embora estatisticamente comprovada após as 1280 iterações, não pode ser encarada como um resultado definitivo.

Pode-se tentar, através do ajuste da matriz de covariância  $Q$ , modificar o ganho de Kalman e, conseqüentemente, a evolução temporal das estimativas, tornando a “convergência” mais rápida. As Figuras 11.11(a) e (b) apresentam a tentativa de estimação fazendo  $Q = 1,1 \times 10^2 I_{16}$  e mantendo os demais parâmetros inalterados; com isto, os ganhos de Kalman tornam-se maiores e a correção imposta à trajetória é mais acentuada. As resistividades das RDI 5 e 9 aumentam, respectivamente, 6,5% e 15% em relação aos valores obtidos no processamento anterior; por sua vez, os resíduos apresentam estatística  $\mathbb{E}[r_\nu] = 0,082$  e  $(E[r_\nu^2] - E^2[r_\nu])^{1/2} = 0,25$ , situação que ainda não atende ao critério estabelecido pela eq. (5.45). O decréscimo na dispersão dos resíduos

<sup>[i]</sup>Embora a resistividade do vidro seja da ordem de  $10^{10} \Omega m$ , a resistividade do copo de vidro contendo ar em seu interior não foi determinada separadamente; por isto, a real amplitude da função degrau é desconhecida.

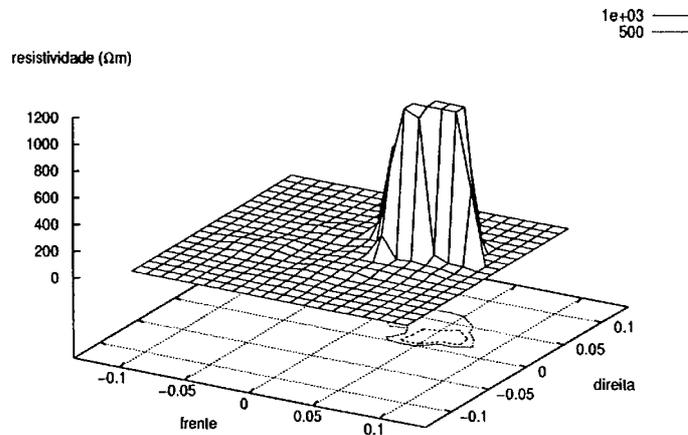


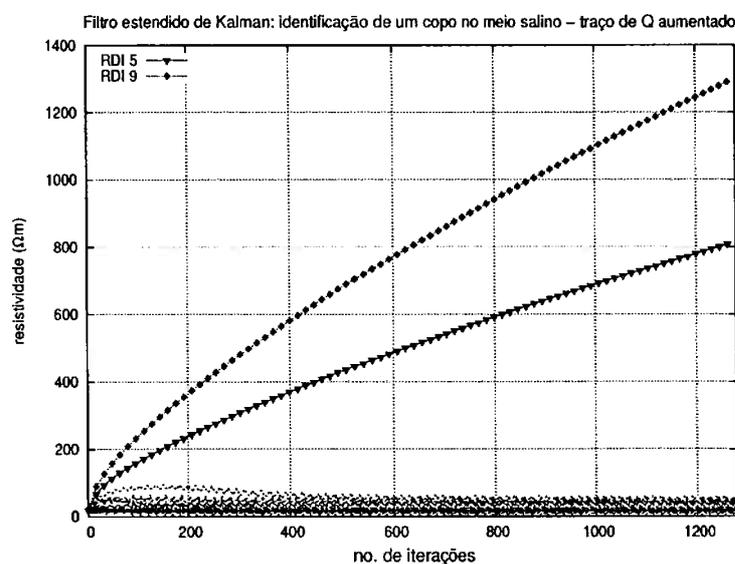
Figura 11.10: Posição do copo identificada através do filtro estendido de Kalman.

normalizados indica, todavia, que é possível buscar a convergência (de acordo com um critério baseado na estatística, e não apenas de forma heurística) do processo por meio da sintonia da matriz  $Q$ . No capítulo 12, seção 12.4, são expostos os resultados de um procedimento de estimação que utiliza a técnica de ruído adaptativo, cujo objetivo é estimar matrizes de covariância  $Q_k$  durante o o procedimento de estimação, de modo a promover a consistência entre as estatísticas observadas e esperadas para o resíduo normalizado.

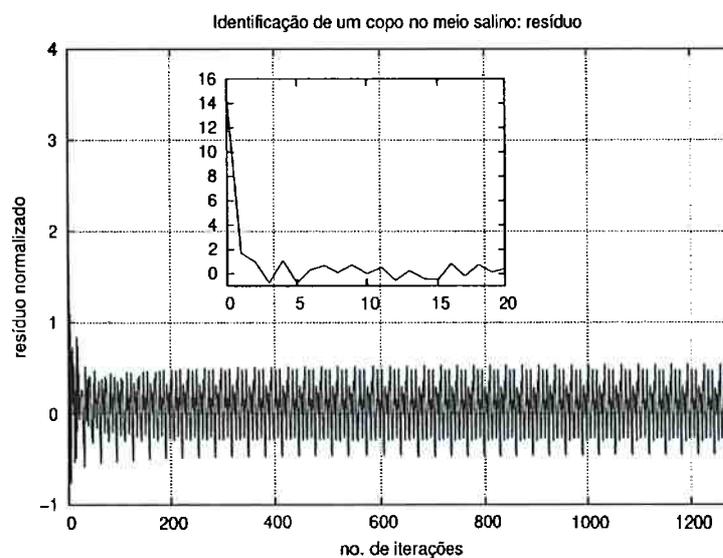
Assim, nas seções remanescentes deste capítulo, as avaliações dos desempenhos de outras versões do filtro de Kalman serão efetuadas comparativamente aos resultados expostos na presente seção.

Resta, ainda, justificar a identificação dos parâmetros do meio sem que as impedâncias de contato dos eletrodos sejam estimadas. No procedimento experimental utilizado, o método de estimação  $\mathcal{E}$  com 34 RDI para os eletrodos foi inicialmente aplicado. A solução salina sem o copo possui distribuição homogênea e pode ser representada por duas RDI.

A partir do conhecimento das impedâncias de contato dos eletrodos, o método de estimação  $\mathcal{E}_1$  com 16 RDI é utilizado para identificar o copo. Segundo o procedimento de estimação em duas fases, seria necessário obter as impedâncias de contato através



(a) evolução temporal do estado



(b) resíduo normalizado

Figura 11.11: Identificação de um copo através do FEK aumentando-se o traço da matriz  $Q$ : (a) evolução temporal do estado; (b) resíduo normalizado.

do procedimento  $\mathcal{C}_2$  e assim sucessivamente. Porém, quando o copo de vidro é imerso mantendo-se o nível do líquido, admite-se que as impedâncias de contato apresentem variação desprezível; sob tais circunstâncias, o procedimento  $\mathcal{C}_2$  é prescindível e os resultados desta seção mostram que a hipótese é válida.

Cabe ressaltar que a perturbação na forma de uma função degrau de resistividade representada pelo copo é limitada, embora seu valor seja indeterminado (vide observação [i] à página 110); dessa forma, de acordo com Guo (1990), o erro na estimação do estado é limitado. Assim, a estimação somente através de  $\mathcal{C}_1$  deve conduzir a desvios limitados, com o Teorema do Ponto Fixo garantindo que a convergência dar-se-á para um vetor que minimize localmente a covariância do erro de estimação.

### 11.2.2 Identificação do objeto com o auxílio do FEIK

O filtro estendido iterado de Kalman aplicado à TIE não possui paralelo até o momento. O algoritmo baseia-se na relinearização do modelo de observação em torno da última estimativa do estado, segundo a formulação apresentada na seção 5.3, pg. 57.

A avaliação comparativa entre o FEIK e o FEK já apresentado demanda a utilização de mesmas condições iniciais e mesmos parâmetros de processamento. Assim, para a tentativa de identificação da distribuição de resistividade do meio salino contendo o copo foram empregados, em ambos os procedimentos, os parâmetros relacionados no parágrafo final da seção 9.2.1.2, pg. 83, a saber:

$$P_0 = 3,5 \times 10^{-5} I_{16}$$

$$Q = 3,5 \times 10^{-3} I_{16}$$

$$R = 2,5 \times 10^{-3} I_{32}$$

$$\rho_0 = [1,0 \text{ (RDI 1 a 14)}; 0,04 \text{ (RDI 15 e 16)}]^T \Omega m$$

O critério para a relinearização é dado pela eq. (5.38) que, com  $p = 2$  e  $\delta = 0,3$  resulta em

$$\|\hat{\sigma}_{k,j}^{(+)} - \hat{\sigma}_{k,j-1}^{(+)}\|_2 = \sqrt{\sum_i^m (\hat{\sigma}_{i,k,j}^{(+)} - \hat{\sigma}_{i,k,j-1}^{(+)})^2} \leq 0,3 \quad (11.1)$$

onde  $m$  é a dimensão do vetor,  $k$  é a  $k$ -ésima iteração do filtro e  $j$  é a  $j$ -ésima estimativa do estado.

Foram utilizados dados medidos referentes a 15 grupos de 32 padrões diametrais de correntes, totalizando 480 iterações do algoritmo. A justificativa para a avaliação com base em menor número de iterações está ligada ao tempo de processamento, como será discutido mais adiante. Por este motivo os resultados aqui expostos não devem ser comparados aos da seção 11.2.

A Fig. 11.12 mostra as curvas de evolução temporal do estado para o FEIK e o FEK e as respectivas distribuições de resistividade após a iteração n<sup>o</sup> 480. No filtro iterado, as variáveis de estado correspondentes às regiões 5 e 9, onde ocorre a perturbação, apresentam valores estimados 67,3% e 74,1% respectivamente superiores às estimativas com o filtro estendido, após 480 iterações e a partir das mesmas condições iniciais.

Decorridas cerca de 200 iterações, estas regiões destacam-se das demais. No FEK, as estimativas de resistividade para as variáveis de estado RDI 5, 9 e 12 podem ser consideradas distintas após a iteração 350.

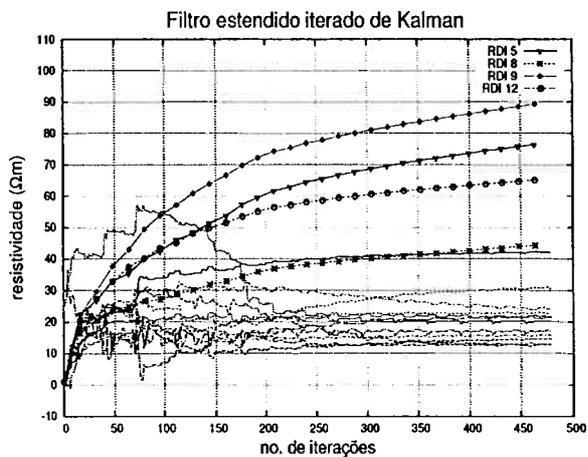
Em ambos os procedimentos a RDI 12, que não é afetada pela perturbação, apresenta valores de resistividade superiores aos da RDI 8. A explicação para tal fato está relacionada ao modelo do domínio, que impõe a conservação de carga, eq. (3.6), pg. 36, e à proximidade da região 12 com o local ocupado pelo copo.

Levando-se em conta os resultados apresentados na seção 11.2.1 conclui-se que, nas condições aqui avaliadas, o procedimento de estimação está no início. Assim, quando a estimativa de resistividade de uma região for, por exemplo, superior ao valor correto, as estimativas para as resistividades das regiões mais próximas à primeira tendem a possuir valores inferiores aos corretos, e vice-versa. No caso em questão, as resistividades das regiões 5 e 9, cuja área é preponderantemente ocupada pela seção transversal do objeto, e a região 8, que abriga parcialmente o copo e parcialmente o meio salino possuem, no início do procedimento de estimação, valores de resistividade inferiores aos reais. Valores mais elevados para as estimativas de resistividade de uma região adjacente, como a 12, são coerentes com a hipótese de conservação de carga.

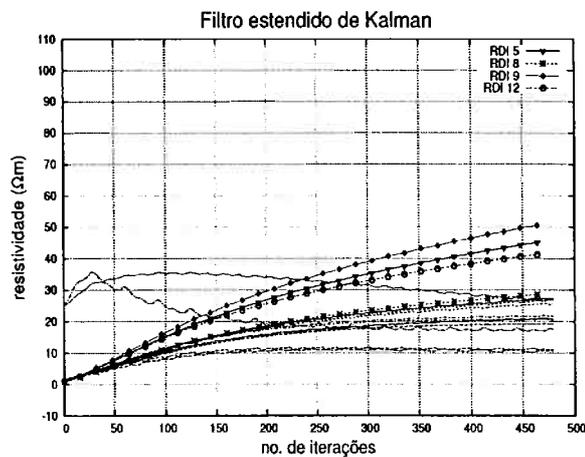
O comportamento acima é passível de correção ajustando-se as matrizes de covariância  $P_0$  e/ou  $Q$ , ou incorporando métodos de regularização como os descritos no capítulo 6. Entretanto, como o objetivo aqui é avaliar comparativamente a aplicação dos dois filtros sob as mesmas condições, a regularização é postergada.

As curvas de evolução temporal dos resíduos normalizados para as duas situações são mostradas na Fig. 11.13. Inicialmente, o FEIK apresenta maiores oscilações que o FEK; à medida que as estimativas decorrentes da relinearização da equação de observações em torno do mais recente estado estimado se sucedem, as amplitudes dos resíduos com o FEIK tornam-se inferiores às do FEK. A ampliação das últimas 96 iterações atesta tal fato. Para estes dados, o FEIK possui resíduos com valor médio 0,0014 e amplitude pico-a-pico máxima 0,8732, ao passo que o FEK apresenta resíduos com valor médio -0,033 e amplitude pico-a-pico máxima 1,816.

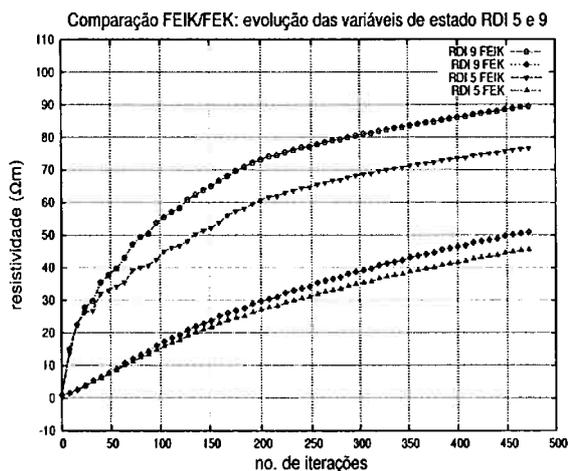
O critério de convergência estabelecido pela eq. (5.45) não é atendido, embora a



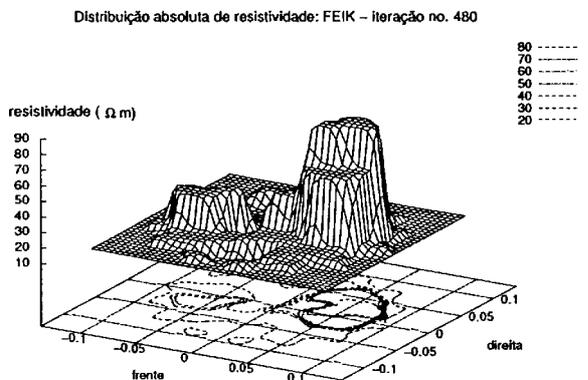
(a) FEIK



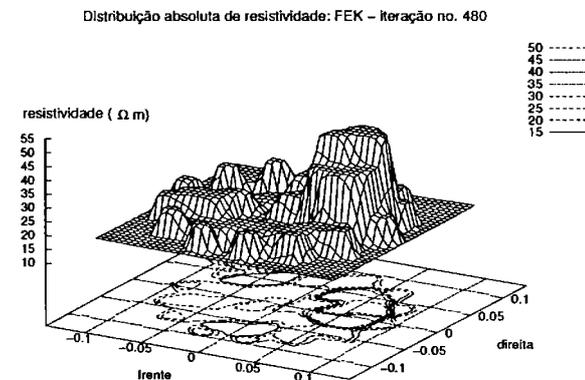
(b) FEK



(c) variáveis de estado RDI 5 e 9

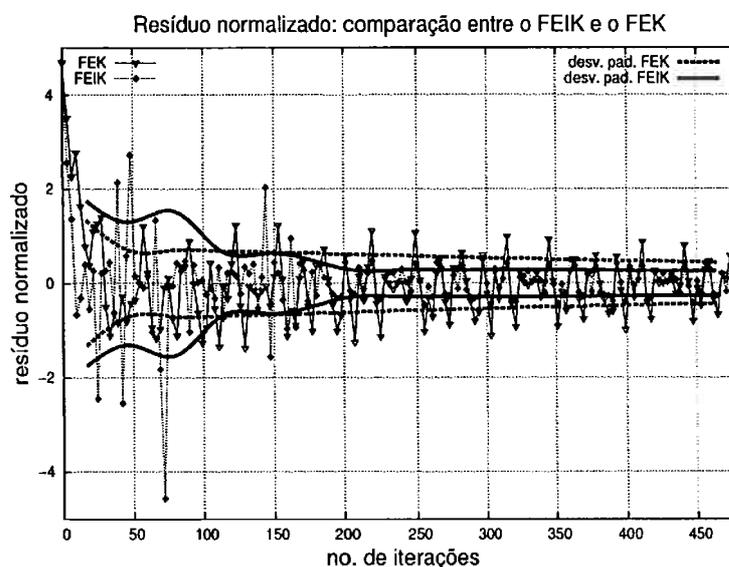


(d) FEIK

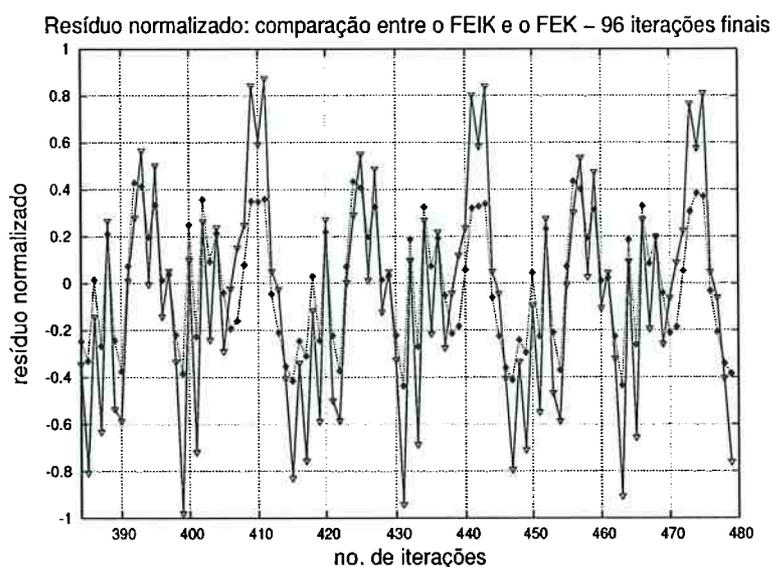


(e) FEK

Figura 11.12: FEIK e FEK: desempenho comparativo.



(a) 480 iterações



(b) 96 iterações finais

Figura 11.13: FEIK e FEK: comportamento dos resíduos normalizados.

amplitude dos resíduos seja decrescente em ambos os procedimentos. O comportamento da norma espectral <sup>[iii]</sup> da matriz de ganho de Kalman para os dois procedimentos de

<sup>[iii]</sup> Define-se *norma espectral* como o maior valor entre os resultantes da decomposição de uma matriz em valores singulares (Press et al. 1992) ou, sendo  $A$  uma matriz genérica e  $\zeta$  um autovalor genérico,  $\|A\|_2 = \max \sqrt{\zeta(A \cdot A^T)}$ .

estimação, mostrada na Fig. 11.14, é tal que, a partir da iteração n<sup>o</sup> 300, aproximadamente, a *amplitude de variação* pico-a-pico da norma do ganho é constante, com os valores máximos do FEIK duas vezes superiores aos do FEK.

O fato de as normas espectrais possuírem variações cujas amplitudes são constantes significa que a convergência efetivamente não ocorreu pois, à medida que as estimativas sejam melhores, os ganhos tendem a diminuir. Ganhos constantes significam também que as correções impostas pelo filtro não alteram significativamente o estado estimado, o que se confirma quando os resultados exibidos na Fig. 11.8 são comparados aos da Fig. 11.12, na qual o comportamento das respostas poderia ser alterado selecionando-se empiricamente outras matrizes de covariância; novamente, dado o escopo desta seção, tal tarefa é deixada para um trabalho futuro, que vise a otimização das condições de utilização do FEIK nesta aplicação.

Por exemplo, utilizando um computador com arquitetura IBM-PC, processador Intel Celeron 800 e 356Mb de memória de acesso aleatório, o FEIK necessitou de aproximadamente 18 minutos para efetuar as 480 iterações, ao passo que o FEK levou cerca de 7 minutos. A viabilidade de utilização do FEIK na TIE depende, portanto, do peso relativo exatidão/rapidez necessários à obtenção de cada estimativa.

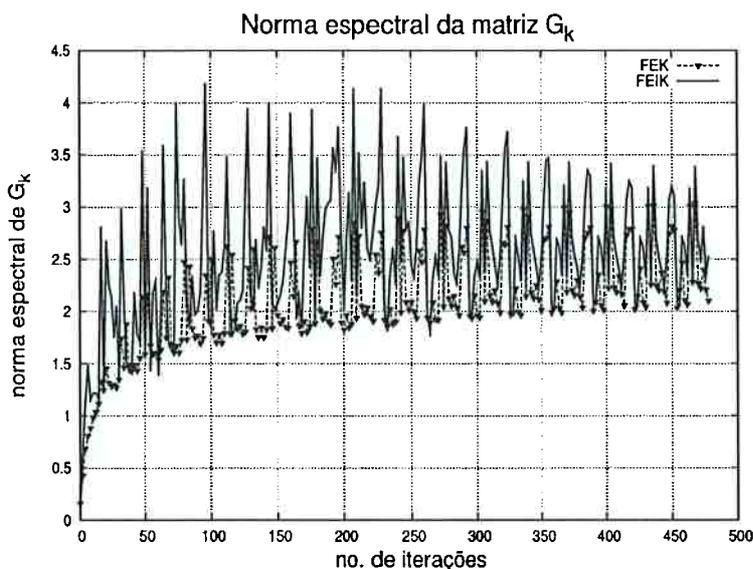


Figura 11.14: Norma espectral da matriz de ganho de Kalman: avaliação comparativa entre o FEIK e o FEK.

### 11.3 Matrizes de covariância e estimativas

A influência das matrizes de covariância sobre o comportamento das estimativas do estado pode ser avaliada tendo como base os resultados do FEK nas seções 11.2.1 e 11.2.2, cuja única diferença é a matriz de covariância do ruído no estado,  $Q$ , respectivamente  $7,8 \times 10^1 I_{16}$  e  $3,5 \times 10^{-3} I_{16}$ .

A diminuição na norma de  $Q$  conduz a menores ganhos do filtro e menores correções impostas às estimativas do estado. Desta forma, após 1280 iterações<sup>[iii]</sup> com a matriz de covariância  $Q = 3,5 \times 10^{-3} I_{16}$ , as resistividades das regiões que contêm a perturbação são inferiores às reais e, em contrapartida, as resistividades de regiões adjacentes são superiores às corretas, conforme mostra a Fig. 11.15. Novamente, a hipótese inicial de conservação de carga pode explicar o fato. A somatória de cargas sobre todo o domínio deve ser constante e, assim, se alguns elementos do domínio discretizado apresentarem valores de resistividade muito discrepantes dos reais, aqueles que estão ao redor apresentam resistividades que tendem a compensar a falta ou excesso de cargas nos primeiros. Na Fig. 11.15, verifica-se que as regiões em torno da qual o copo está imerso possuem resistividades superiores às obtidas no ensaio em 11.2.1, onde as estimativas são mais condizentes com a condição real do sistema, conforme atesta a Fig. 11.10, pg. 111.

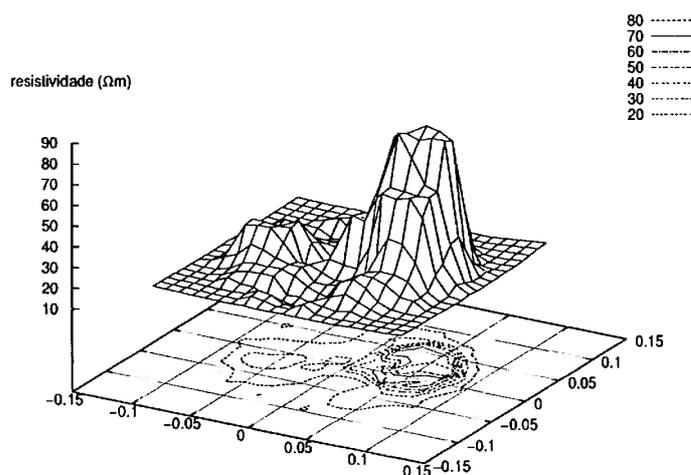


Figura 11.15: Filtro estendido, processamento em lotes: estado após 1280 iterações.

<sup>[iii]</sup> Este é o número de iterações efetuado com  $Q = 7,8 \times 10^1 I_{16}$  na seção 11.2.1.

Outro parâmetro que pode ser avaliado é a norma da matriz de covariância do erro,  $P_k$ . A formulação de Kalman leva à minimização desta covariância. A norma espectral de  $P_k^{(+)}$  para o processamento em lotes, mostrada na Fig. 11.16(a), é monotônica crescente, <sup>[iv]</sup> aparentemente contrariando os pressupostos teóricos. Este resultado deve, entretanto, ser analisado em um contexto mais amplo, que envolve as estimativas para o vetor de estado, a matriz de ganho de Kalman e o resíduo normalizado.

A norma espectral de  $P_k^{(+)}$ , após a iteração final, vale 4,35; tal montante é 2,9% inferior ao que seria obtido multiplicando-se o número de iterações (1280) pelo valor da norma espectral da matriz  $Q$ , mantida constante em  $3,5 \times 10^{-3} I_{16}$ . A eq. (5.21), de propagação da covariância do erro de estimação, mostra que a matriz  $Q$  é incorporada a cada iteração; como a matriz de transição de estados é a identidade, pode-se inferir que o efeito predominante sobre a propagação da covariância é decorrente da matriz  $Q$ , ou seja, a correção imposta ao estado, eq. (5.22), deve-se à incerteza admitida para o modelo do sistema, informação *a priori* presente em  $Q$ . A norma crescente e ilimitada de  $P_k^{(+)}$  reflete o comportamento do maior entre os valores obtidos na decomposição em valores singulares, mas ignora os efeitos decorrentes dos demais.

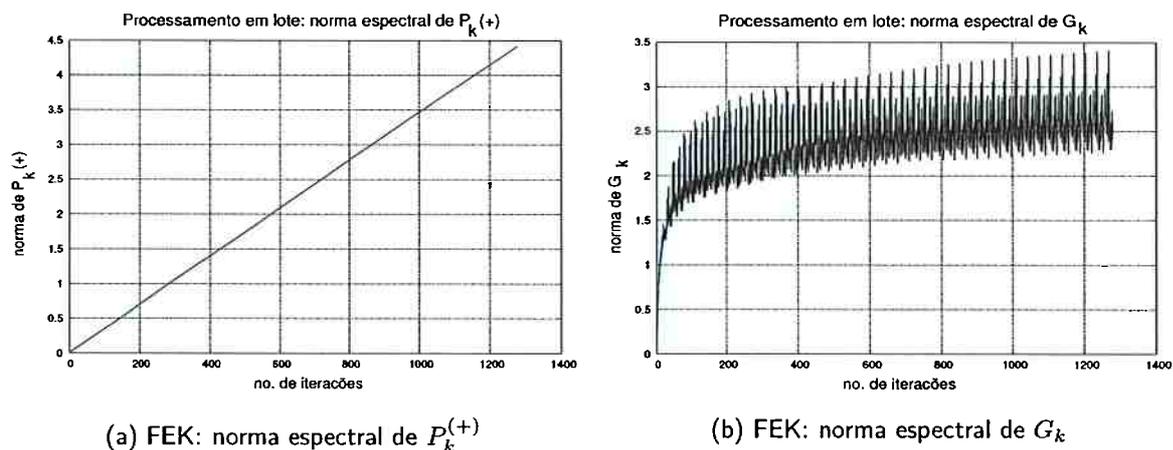


Figura 11.16: Filtro estendido de Kalman: normas espectrais da covariância do erro e do ganho de Kalman no processamento em lote.

A formulação do filtro de Kalman permite, entretanto, determinar a influência exer-

<sup>[iv]</sup>O mesmo comportamento é observado nas seções, 11.2.1, 11.2.2 e no processamento seqüencial; por este motivo, os respectivos gráficos não são apresentados.

<sup>[v]</sup>Devido à escala do gráfico, o valor inicial da norma, da ordem de  $10^{-3}$ , é exibido como zero.

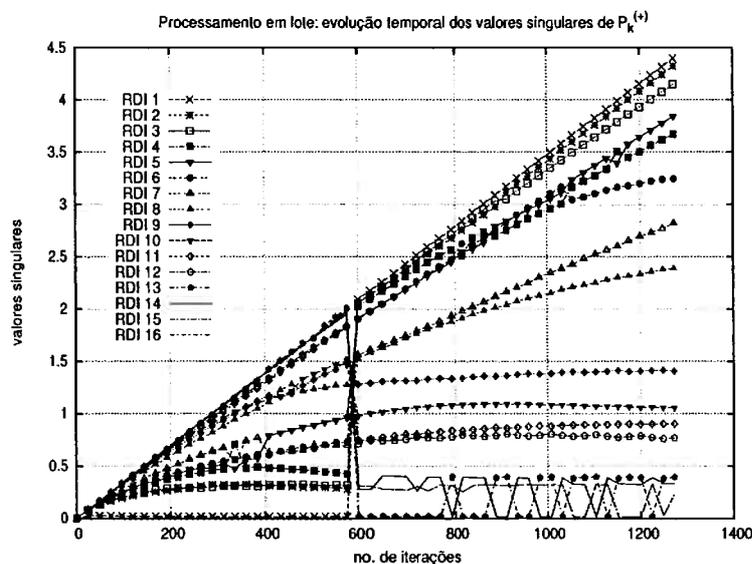


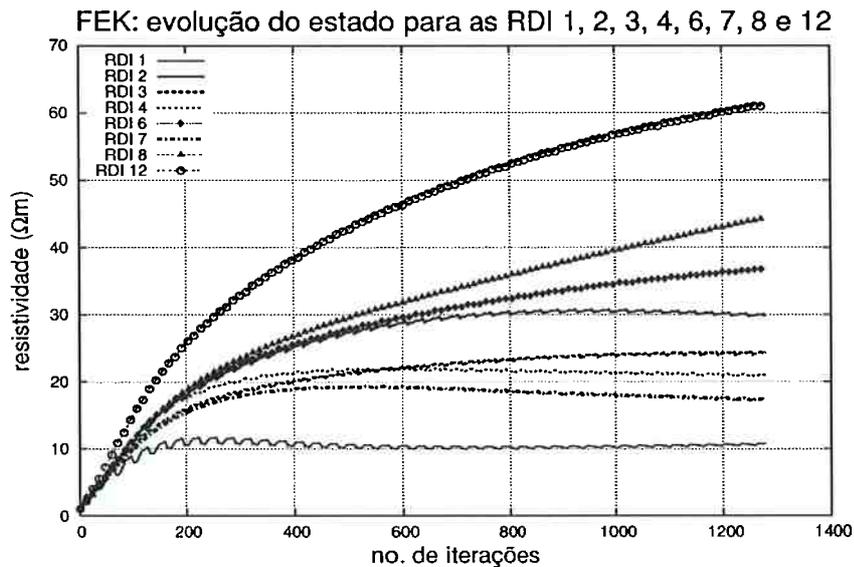
Figura 11.17: FEK: valores singulares de  $P_k^{(+)}$  no processamento em lote.

cida por elementos ou regiões das matrizes de covariância sobre o comportamento das variáveis de estado separadamente, o que é aqui denominado *efeito local*. A matriz de covariância do ruído no estado é constante e diagonal; sendo assim, os efeitos locais desta matriz sobre cada componente do vetor de estado decorrem das variâncias correspondentes. O mesmo ocorre com a matriz  $P_k^{(-)}$  que, embora não diagonal, incorpora os elementos de  $Q$  a cada iteração e participa do cálculo do ganho. Assim, pode-se analisar os efeitos locais que  $P_k^{(+)}$  exerce sobre as variáveis de estado observando o comportamento de seus valores singulares individualmente.

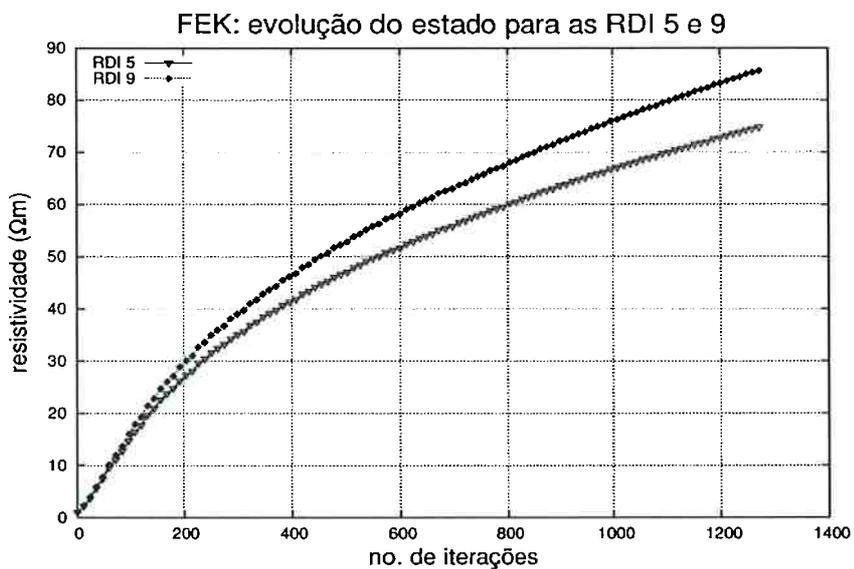
A Fig. 11.17 apresenta a evolução dos valores singulares da matriz de covariância do erro correspondentes a cada variável de estado, no caso as RDI. A curva que representa a RDI 1 é a responsável pela norma espectral de  $P_k^{(+)}$ . Tanto esta curva como as correspondentes às RDI 2, 3, 4, 5 e 7 são praticamente monotônicas crescentes, ao passo que, para as demais regiões, o comportamento é crescente porém assintótico (gradientes positivos e decrescentes), como para as regiões 6, 8 e 9, ou de média constante, como ocorre nas regiões 11 a 16. As curvas de evolução do estado, Fig. 11.18, ajudam a explicar tais resultados.

As estimativas para as variáveis de estado que correspondem às RDI 1, 2, 3, 4 e 7 apresentam pequenos gradientes (positivos ou negativos) após aproximadamente 1000

iterações. A Fig. 11.18(a), onde apenas estas variáveis são mostradas, atesta que as correções impostas através do ganho de Kalman fazem com que as estimativas oscilem em torno de seus valores médios, o que não ocorre com a RDI 5, vide Fig. 11.18(b).



(a) RDI 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 e 12



(b) RDI 5 e 9

Figura 11.18: FEK: evolução de algumas variáveis de estado no processamento em lote.

As variáveis RDI 1, 2, 3, 4, 5 e 7 são aquelas cujos respectivos valores singulares

na matriz  $P_k^{(+)}$  evoluem de maneira monotônica e crescente. O ganho de Kalman sofre influência da matriz de covariância do erro de estimação; esta, por sua vez, depende da matriz de covariância do erro no estado, como já mencionado anteriormente. No presente caso, a cada iteração, uma matriz  $Q$  diagonal e constante é adicionada à matriz  $P_k^{(-)}$  durante o estágio de propagação. Os valores singulares referentes às variáveis de estado RDI 1, 2, 3, 4 e 7 são praticamente a somatória, estendida a todas as iterações, dos elementos nas respectivas posições da diagonal de  $Q$ . As curvas de evolução destas variáveis revelam que, a partir da iteração 600, as correções impostas pelo filtro não são elevadas, pois há indícios (pequenos gradientes) de que tais variáveis de estado já tenham atingido um ponto na vizinhança de convergência; porém, a sistemática incorporação de informações que negam o fato, através da matriz  $Q$ , mantém a elevação dos valores singulares correspondentes a estas variáveis de estado. No caso da RDI 5, o efeito local da respectiva variância em  $Q$  reflete-se no comportamento monotônico crescente do correspondente valor singular em  $P_k^{(+)}$ , pois a região é parcialmente afetada pela perturbação.

O mesmo comentário aplica-se à RDI 9 com uma ressalva. Devido à perturbação ocupar grande parte desta região, as correções impostas pelo filtro são inicialmente mais acentuadas. Na Fig 11.17, observa-se que, durante as primeiras 400 iterações, os valores singulares referentes à RDI 9 acompanham os da RDI 5. A partir daí, quando o filtro "percebe" que as correções estão sendo feitas no sentido apropriado e que um ponto na vizinhança de convergência está mais próximo de ser atingido, o ganho é ajustado de forma que os elementos de  $P_k^{(+)}$  relativos a esta região sofram uma diminuição, o que se reflete no comportamento dos valores singulares.

A RDI 8, que abriga uma fração menor do objeto, exhibe correções maiores nas primeiras iterações, afetando os gradientes das curvas nos gráficos de valores singulares e de evolução do estado. A justificativa para a resistividade da região 12 é sua proximidade com o local ocupado pelo copo.

Tomando-se como base resultados anteriores (por exemplo, da seção 11.2.1), nota-se que o valor estimado para a resistividade na RDI 6 é elevado, uma vez que não inclui a perturbação; os valores singulares exibidos implicam em maior ganho com efeito local,

o que tende a corrigir o estado se o processo de estimação tiver seqüência.

A presente argumentação justifica o comportamento do ganho de Kalman, oscilante em torno de uma curva "média", conforme mostra a Fig. 11.16(b). As oscilações são conseqüência das correções impostas a variáveis de estado cujos valores estejam mais próximos da vizinhança de convergência; quando isto é feito, os resíduos normalizados aumentam. O filtro identifica a necessidade de nova correção; dependendo da relação entre as variâncias de  $Q$  e da diagonal de  $P_k^{(-)}$ , a correção pode ser muito acentuada, o que é percebido pela resposta oscilatória dos resíduos normalizados, vide Fig. 11.19, e assim sucessivamente, até que algum critério interrompa o processo.

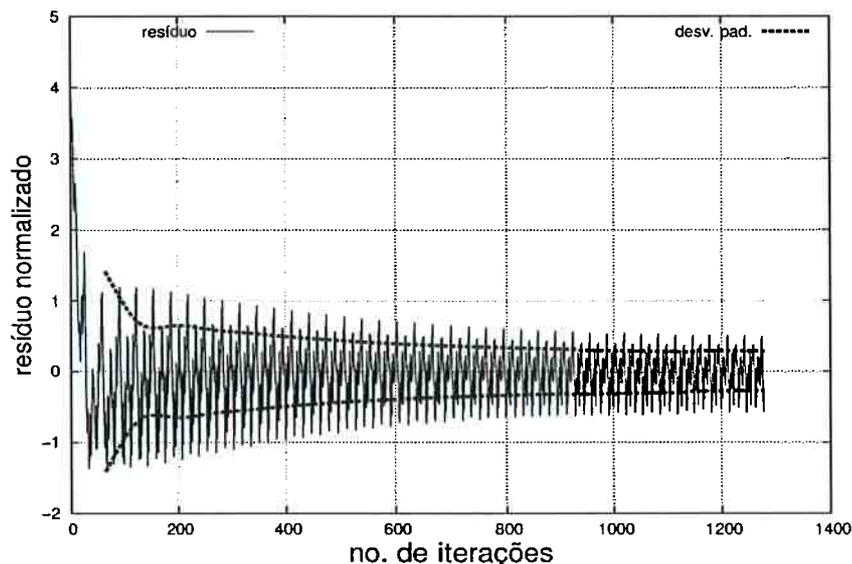


Figura 11.19: Filtro estendido de Kalman: resíduo normalizado - 1280 iterações.

Levando-se em conta que as matrizes  $Q$  e  $P_0$  são arbitrariamente escolhidas, o procedimento de avaliar parâmetros da matriz de covariância do erro após a realização de algumas iterações pode ajudar a alterar as componentes das matrizes  $Q$  e  $P_0$  de modo a fazer com a convergência para as regiões desejadas seja mais rápida, com ganhos maiores ou menores afetando as regiões/elementos escolhidos. Uma maneira *ad hoc* seria escolher matrizes  $Q$  e  $P_0$  diagonais com elementos distintos; outra maneira seria utilizar matrizes de covariância não diagonais, obtidas com base em iterações prévias do filtro, para o ruído no estado. Poder-se-ia, também, gerar  $Q$  de forma adaptativa, conforme descrito na seção 5.4. O segundo procedimento é empregado em algumas seqüências de

identificação em duas fases para a malha de 272 elementos, a partir do Ensaio 6, seção 12.1; a técnica de ruído adaptativo é avaliada no Ensaio 9, seção 12.4.

## 11.4 Ensaio 4 - FEKS, identificação do meio

O ensaio 4 objetiva avaliar a influência do processamento seqüencial de dados durante a atualização da covariância do erro de estimação sobre o comportamento das estimativas do estado efetuadas através do filtro estendido de Kalman. O agrupamento em 16 RDI foi mantido e os parâmetros do filtro,  $P_0$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $\sigma_0$  são idênticos aos do ensaio 2, seção 11.2.2, <sup>[vi]</sup> sendo estes resultados utilizados como base para comparação, de acordo com o quadro esquemático da Fig. 9.2.

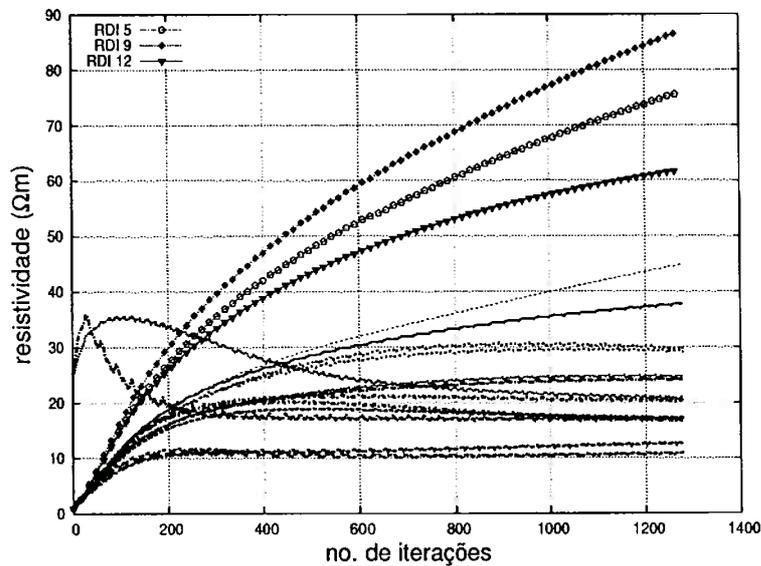
A Fig. 11.20 mostra a evolução temporal do estado estimado, bem como os resíduos normalizados para os procedimentos seqüencial e em lotes de 32 medidas. A discrepância máxima entre as estimativas para o estado após 1280 iterações foi de 4,35%, na RDI 11. Quanto aos resíduos, durante as 280 iterações finais (região em que apresentam-se limitados), a amplitude pico-a-pico máxima de variação foi de 1,16 para ambos os procedimentos, com valores médios de  $-0,0188$  (seqüencial) e  $-0,0178$  (lote). As condições de convergência impostas pelas equações (5.43)-(5.45) não foram atendidas; este fato, entretanto, não invalida o ensaio, uma vez que trata-se de uma *comparação* entre os dois procedimentos.

A inversão de escalares em vez de matrizes quadradas de dimensão idêntica à do vetor de medidas deve, teoricamente diminuir erros de arredondamento na aritmética em ponto flutuante e reduzir o tempo de processamento.

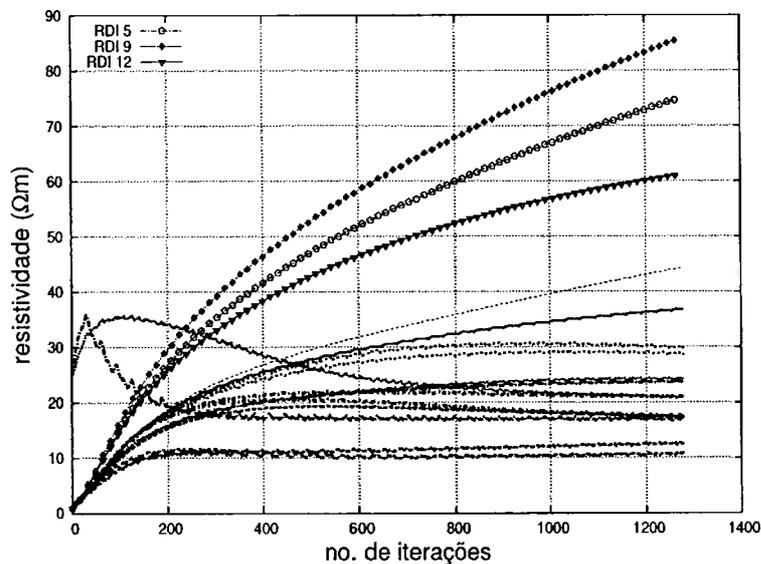
Os resultados acima mostram que as estimativas podem ser consideradas equivalentes. O agrupamento em RDI reduz a dimensão do problema de estimação e, com isso, o número de condição da matriz de sensibilidade; como consequência, a matriz a ser invertida para a atualização da covariância do erro,  $[\mathbb{H}_k P_k^{(-)} \mathbb{H}_k^T + R_k]$ , eq. (5.22), também tende a ficar melhor condicionada. Nos ensaios efetuados, constatou-se que o número de condição desta última, no processamento em lote, é inferior a 1,25, explicando assim

<sup>[vi]</sup> Refere-se ao processamento em lotes utilizando o filtro estendido de Kalman durante 480 iterações. Na presente seção, estima-se o vetor de estado por 1280 iterações.

a equivalência entre os resultados.



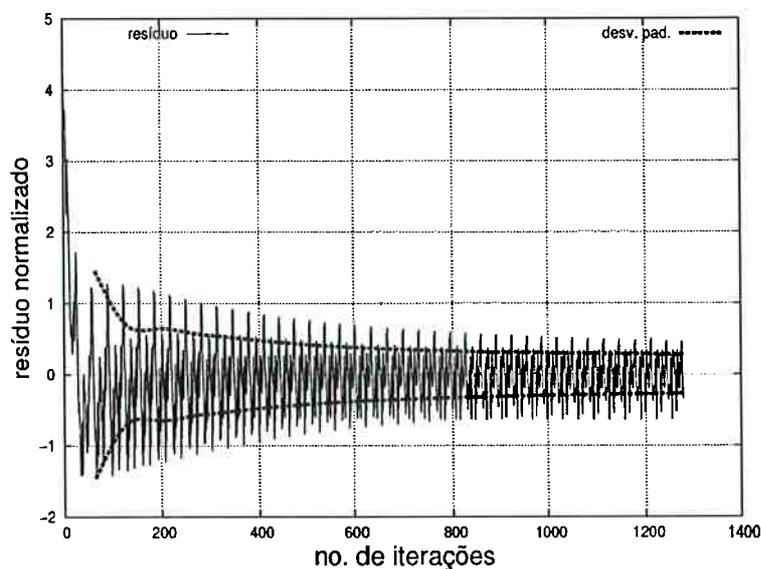
(a) Ensaio 4, sequencial: estado



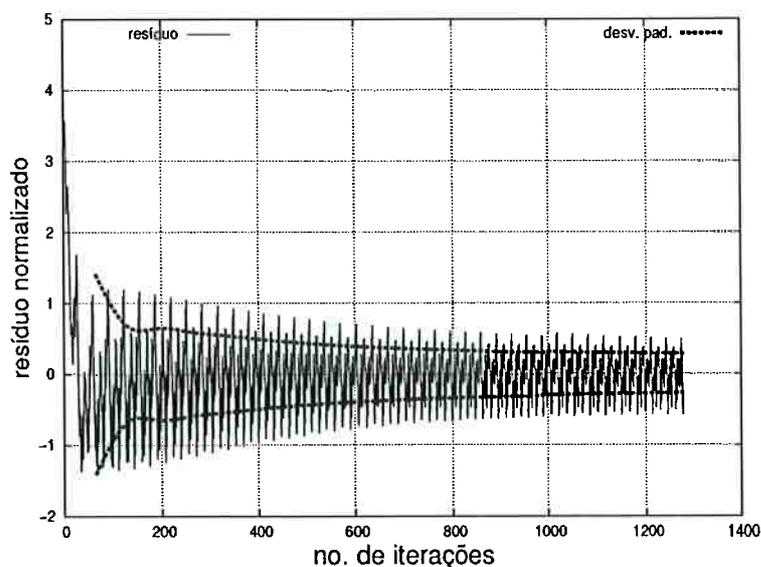
(b) Ensaio 2, lote: estado

Figura 11.20: Filtro estendido de Kalman: comparação entre os processamentos sequencial e em lote com elementos agrupados em RDI – estado.

Outro parâmetro, o tempo de processamento, foi avaliado sob as mesmas condições (equipamento e carga computacional). Constatou-se que, para o processamento de igual número de dados (medidas de tensão referentes à aplicação de 32 padrões de correntes),



(a) Ensaio 4, sequencial: resíduo



(b) Ensaio 2, lote: resíduo

Figura 11.21: Filtro estendido de Kalman: comparação entre os processamentos sequencial e em lote com elementos agrupados em RDI – resíduo.

foram necessários 28,74s para o algoritmo sequencial e 29,13s para o algoritmo em lote. A diferença de  $-1,34\%$  a favor do processamento sequencial é explicada com base na fração de tempo que cada subrotina do algoritmo necessita. As subrotinas responsáveis pelo cálculo do ganho de Kalman e atualização da covariância respondem

por 0,88% do tempo no processo em lote e por 0,25% no seqüencial; a maioria do tempo, aproximadamente 80% em ambos os procedimentos, é ocupada pelas subrotinas que calculam a matriz de sensibilidade.

## 11.5 Ensaios 3 e 5 - comparação FEK/FEKS

Nos ensaios precedentes, o agrupamento em RDI foi empregado como forma de reduzir a dimensão do problema de estimação. Teoricamente, a utilização de RDI tende a tornar o comportamento da resposta mais estável devido à diminuição na propagação de erros numéricos. Na presente seção, procura-se avaliar o desempenho do filtro estendido de Kalman no problema da TIE na ausência de tal restrição, ou seja, estima-se o vetor de estado completo (150 variáveis de estado).

Inicialmente, os resultados dos ensaios 3 (FEK sem RDI) e 5 (FEKS sem RDI), que diferem pelo procedimento de cálculo da covariância do erro de estimação, são comparativamente apresentados. Adota-se para o processamento dos dados um vetor inicial de estado  $\rho_0 = 1,0 \Omega m$  (elementos internos da malha) e  $\rho = 0,04 \Omega m$  (elementos da coroa externa), vide Fig. 9.3(a), pg. 83, e matrizes de covariância  $P_0 = 3,5 \times 10^{-5} I_{150}$ ,  $Q = 3,5 \times 10^{-3} I_{150}$  e  $R = 2,5 \times 10^{-3} I_{32}$ , constantes.

O objetivo da utilização de parâmetros idênticos aos dos ensaios 2 (FEK com RDI) e 4 (FEKS com RDI) é a possibilidade de traçar também um paralelo entre os ensaios 2-3 e 4-5, para determinar as conseqüências do agrupamento ou não de elementos em RDI sobre o desempenho do filtro estendido de Kalman nesta aplicação, o que é feito em uma segunda etapa.

### 11.5.1 Comparação entre os ensaios 3 (lote) e 5 (seqüencial)

A evolução temporal do vetor de estado para os procedimentos em lote e seqüencial é mostrada na Fig. 11.22. Devido ao elevado número de variáveis de estado, a apresentação dos resultados é feita em duas partes. As figuras de índices (a) e (b) exibem as curvas referentes às resistividades dos elementos internos da malha da Fig. 9.3(a); nas figuras de índices (c) e (d) as curvas correspondem às resistividades dos elementos

da coroa externa da Fig. 9.3(a). A numeração dos elementos é conforme a Fig. 8.2, pg. 77.

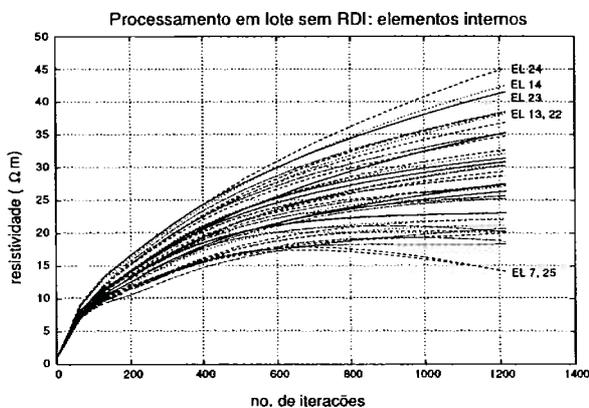
Os vetores finais de estado após 1280 iterações apresentaram discrepância máxima de 2,21% para a resistividade do elemento 116, que pertence à coroa externa. Nas figuras 11.22(a) e (b) observa-se que os elementos pertencentes à região onde a perturbação foi provocada possuem as curvas com os maiores gradientes, conforme identificado nos gráficos. Por outro lado, para os elementos que ocupam posições onde a resistividade é homogênea (meio salino), a evolução do estado faz-se segundo curvas assintóticas ou de inclinação nula.

O comportamento das variáveis de estado relativas aos elementos 7 e 25, cujas curvas exibem gradientes negativos é passível de explicação. Os elementos mencionados ficam em posição que é diametralmente oposta à da perturbação. Sabe-se que um dos fatores que influenciam na *distinguibilidade* (Isaacson 1986) é a diferença de potencial entre os eletrodos. Como os padrões de corrente injetados são diametrais, pode-se inferir que as diferenças de potencial medidas entre eletrodos cuja linha diametral atravessa a perturbação sejam maiores. O peso das tensões nos ganhos do filtro é definido pela confiança depositada no modelo de observação, cuja matriz de covariância  $R$  é mantida constante. Assim, tensões maiores fazem com que, no estágio de atualização, eq. (5.23), as correções impostas às resistividades dos elementos (variáveis de estado) que ocupem posições sobre tais diâmetros sejam maiores. Todavia, como o modelo do sistema baseia-se na conservação de cargas, ocorrem efeitos locais (resistividade maior ou menor que a real) de forma a satisfazer à restrição.

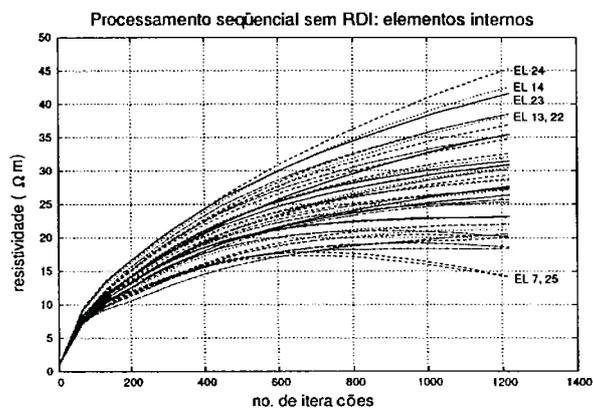
A argumentação acima também aplica-se ao comportamento da variável de estado 124 nas figuras 11.22(c) e (d), pois este elemento é adjacente aos elementos 13, 14 e 24, alguns dos mais afetados pela perturbação.

Os resíduos normalizados, vide Fig. 11.22 (e) e (f) são limitados e, nas 280 iterações finais, seus valores médios são  $-0,0244$  para o ensaio 3 e  $-0,231$  para o ensaio 5, com amplitudes pico-a-pico máximas de 0,565 e 0,546 respectivamente. A restrição imposta pela eq. (5.45) quanto à convergência não foi satisfeita.

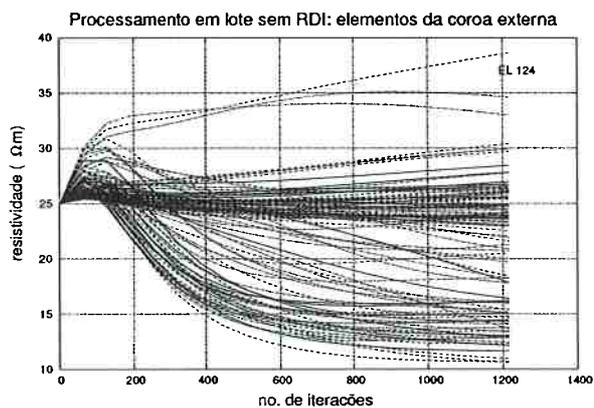
A Fig. 11.23 apresenta a distribuição de resistividade para a última iteração. Constata-



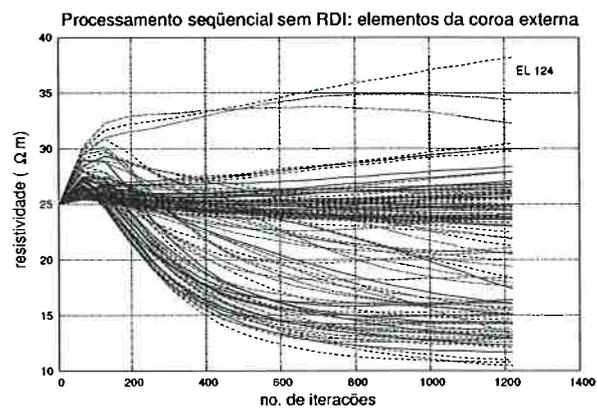
(a) Ensaio 3, lote: estado (el. int.)



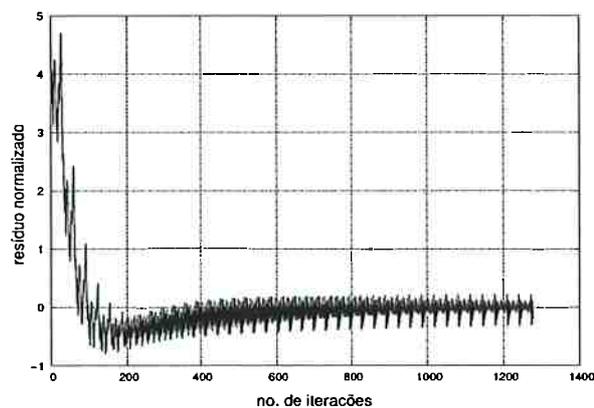
(b) Ensaio 5, seqüencial: estado (el. int.)



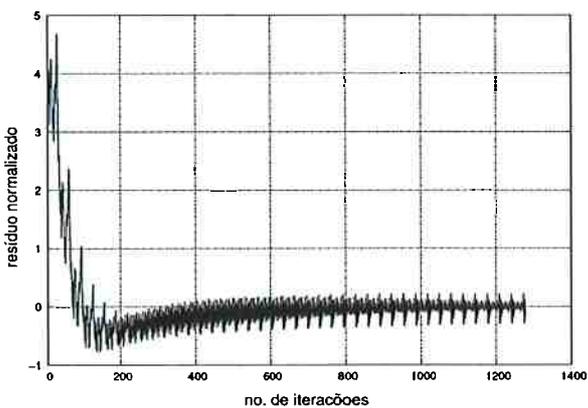
(c) Ensaio 3, lote: estado (el. ext.)



(d) Ensaio 5, seqüencial: estado (el. ext.)



(e) Ensaio 3, lote: resíduo



(f) Ensaio 5, seqüencial: resíduo

Figura 11.22: Filtro estendido de Kalman: comparação entre os processamentos seqüencial e em lote sem utilizar RDI.

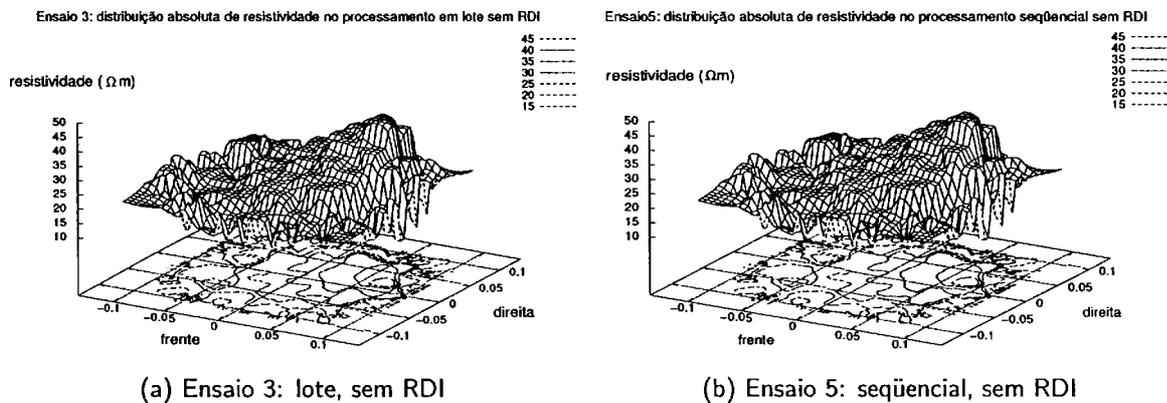


Figura 11.23: Filtro estendido de Kalman: distribuição de resistividade após 1280 iterações.

se que há necessidade de efetuar mais iterações para que o copo seja visualmente identificável e para que o resíduo normalizado atinja os limites estabelecidos. A definição do local onde ocorre a perturbação também pode ser melhorada mantendo-se o número de iterações desde que os ganhos do filtro sejam mais acentuados, o que pode ser conseguido através de ajustes nos parâmetros de processamento. Os ajustes, entretanto, não foram efetuados, pois o objetivo deste ensaio é apenas avaliar o desempenho do FEKS em relação ao FEK, para o qual é suficiente manter as mesmas condições de teste.

### 11.5.2 Comparação entre os ensaios 2-4 e 3-5

As seções anteriores evidenciaram a equivalência entre os processamentos em lote e seqüencial, o que justifica, nesta seção, análises quantitativas baseadas apenas em resultados oriundos do processamento em lote.

Um exame das Fig. 11.21(b) e (a), pg. 127, dos ensaios 2 e 4, cujo processamento dos dados é feito com o auxílio de RDI, revela que as amplitudes de oscilação dos resíduos normalizados lá apresentadas são superiores às dos ensaios 3 e 5, Fig. 11.22(e) e (f), onde estima-se o vetor de estado completo. A discrepância nos valores das resistividades dos elementos da malha estimadas pelos dois pares de ensaios explica o fato.

Nos ensaios 2 e 4, a diferença entre as resistividades dos elementos que ocupam, total ou parcialmente, a região onde a função degrau foi aplicada e os demais é superior à obtida nos ensaios 3 e 5. Os parâmetros de processamento, matrizes de covariância e

vetor de estado inicial, são os mesmos para os dois pares de ensaios, mas a aproximação das estimativas para o estado "real" é mais rápida quando os elementos são agrupados em RDI, o que leva à conclusão de que os ganhos do filtro são mais acentuados nos ensaios 2 e 4.

A oscilação nos resíduos ocorre pois regiões de interesse em que os estados real e estimado estejam mais próximos continuam a sofrer correções elevadas, impostas pelo filtro devido à ação das matrizes de covariância do ruído no estado e na medida, que são mantidas constantes, conforme argumentado na seção 11.4. Nos ensaios em que o estado completo é estimado, a aproximação entre os estados estimado e "real" é mais lenta e, assim, o vetor de estado sofre correções menores. Em outras palavras, discrepâncias menores entre estimativas subseqüentes do estado conduzem a correções menores e resíduos menores.

A questão remanescente é o porquê das discrepâncias nas estimativas que se obtêm com e sem a construção de RDI; a resposta está relacionada aos conceitos de *observabilidade* e *informação*. Os conceitos aqui expostos são baseados em Jazwinski (1970).

Para um modelo dinâmico discreto como o das equações (5.16) e (5.17), pg. 51, define-se *matriz de informação* como

$$\mathbb{P}_{k,0} \triangleq \sum_{n=0}^k \Phi_{n,k}^T \mathbb{H}_n^T R_n^{-1} \mathbb{H}_n \Phi_{n,k} \quad (11.2)$$

O estado  $\sigma_k$  é dito *completamente observável* com relação às observações  $v_j$ ,  $j = n, \dots, k$  se, e somente se (Jazwinski 1970),

$$\mathbb{P}_{k,j} > 0, \text{ para } k > j \quad (11.3)$$

A matriz de covariância do erro de estimação relaciona-se com a matriz de informação através de

$$[P_k^{(-)}]^{-1} = \Phi_{k-1}^T [P_{k-1}^{(+)}]^{-1} \Phi_{k-1} + \mathbb{P}_{k,0} \quad (11.4)$$

e obedece à equação

$$\mathbb{P}_{k,0}^{(+)} = \Phi_{k-1}^T \mathbb{P}_{k,0}^{(-)} \Phi_{k-1} + \mathbb{H}_k^T R_k^{-1} \mathbb{H}_k \quad (11.5)$$

As equações acima permitem calcular a matriz de informação recursivamente durante todo o procedimento de estimação e verificar a observabilidade do sistema.

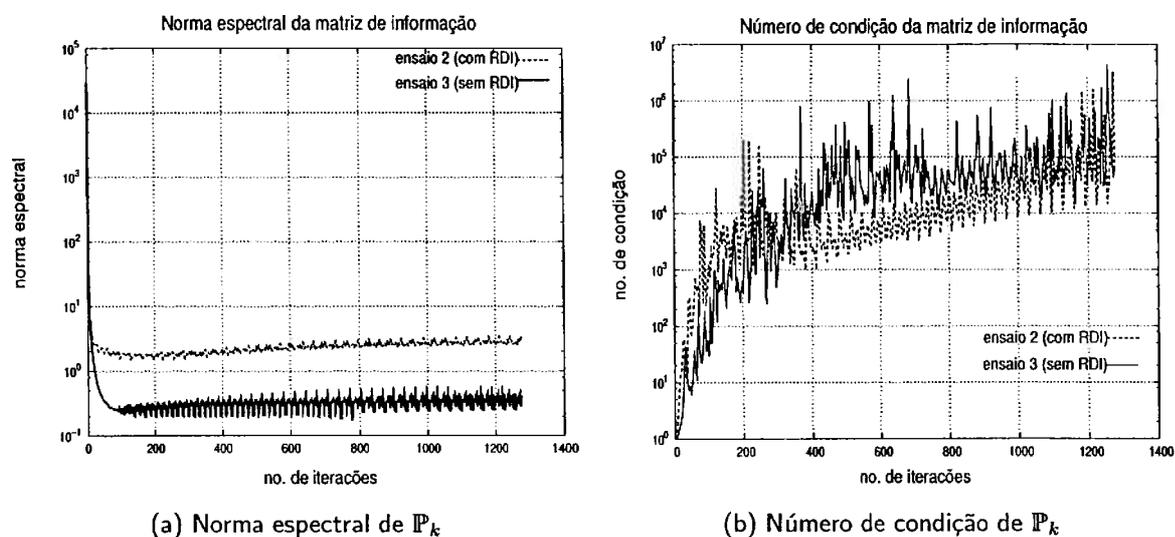
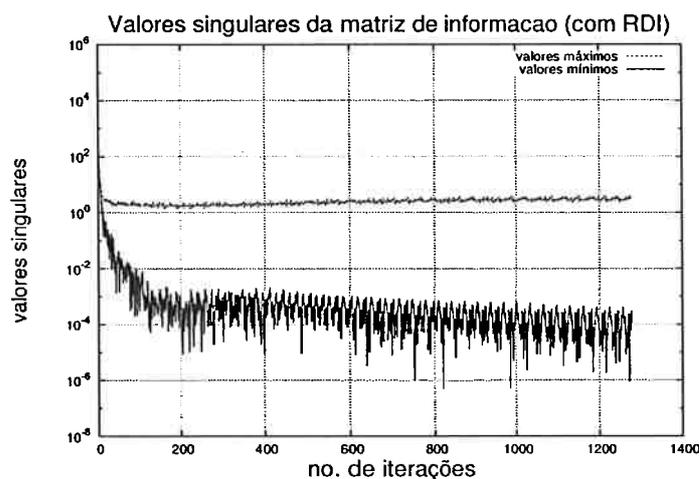


Figura 11.24: Norma espectral e número de condição de  $\mathbb{P}_k$ : comparação entre os processamentos com e sem agrupamento em RDI.

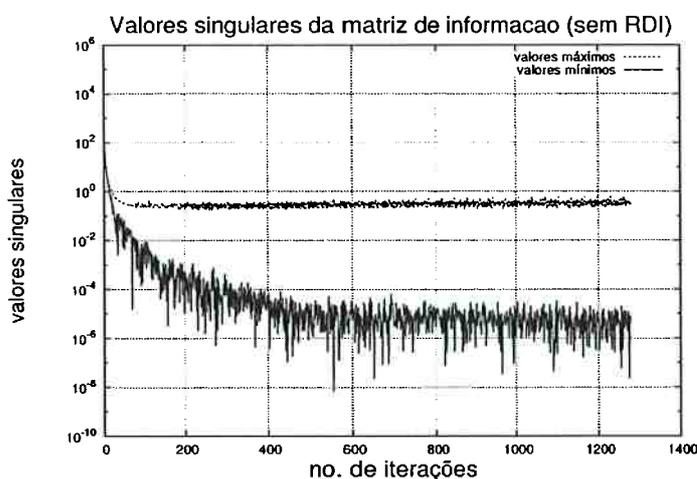
A Fig. 11.24(a) mostra a norma espectral da matriz de informação para os ensaios 2 e 3, que diferem pela utilização ou não de RDI. A eq. (11.4) atesta que, mantida constante a covariância do ruído no sistema, menores covariâncias do erro de estimação implicam em maiores matrizes de informação. Como a matriz de covariância do ruído na medida também é constante, maiores valores em  $P_k$  implicam em maiores ganhos do filtro e maiores correções impostas ao estado. As curvas da Fig. 11.24(a) mostram que a norma espectral da matriz de informação para o ensaio 2 (com RDI) é sempre superior à da respectiva matriz para o ensaio 3. Este fato confirma que, para o mesmo conjunto de informações (tensões medidas nos eletrodos), o sistema com o menor número de variáveis de estado a serem estimadas é afetado de maneira mais relevante, o que também se reflete nas curvas de evolução temporal do vetor de estado.

Observa-se que a restrição estabelecida pela eq. (11.3) é satisfeita durante todo o processo de estimação, pois os números de condição da matriz de informação, entre  $10^3$  e  $10^6$  em média para ambos os ensaios a partir da iteração nº 200 (vide Fig. 11.24(b)), não são suficientes para caracterizá-la como singular; portanto, o sistema descrito pelas equações (5.17) e (5.16) é completamente observável, independentemente do número de parâmetros a serem estimados.

Cabe ainda notar que a natureza de atuação do filtro e do problema mal condicionado refletem-se no crescimento do número de condição da matriz  $\mathbb{P}_k$  nas 200 iterações iniciais, como mostram as figuras 11.25(a) e 11.25(b), onde a segregação entre os valores singulares máximos e mínimos é representada.



(a) com RDI



(b) sem RDI

Figura 11.25: Valores singulares máximos e mínimos de  $\mathbb{P}_k$ : comparação entre os processamentos com e sem agrupamento em RDI.

O fato é explicado da seguinte forma: o estado inicial arbitrado é composto por dois grupos de valores de resistividades que são, possivelmente, distintos do estado "real". À medida que o filtro "percebe" a discrepância, o estado é acentuadamente

corrigido. A partir do ponto em que a discrepância diminui, as correções entre estados consecutivos são menores, pois a correção inicial leva as estimativas até uma trajetória que é mais próxima da real. A trajetória mais próxima da real implica em valores distintos entre as resistividades dos elementos que ocupam a região da perturbação e os demais (meio homogêneo). A evolução das estimativas faz com que a distinção entre os valores das variáveis de estado aumente, dada a amplitude da perturbação, e implica no crescimento do número de condição da matriz de informação. O resultado acima pode, quando analisado em conjunto com o resíduo normalizado e a norma do ganho de Kalman, ser utilizado para verificar o comportamento do filtro e reajustar parâmetros de processamento.

# Capítulo 12

## Validação experimental: malha de 272 elementos

No capítulo anterior, são apresentadas situações em que tanto a ordem de grandeza dos parâmetros a serem identificados quanto a geometria da malha de elementos finitos que discretiza o domínio afetam a qualidade das estimativas do estado. A identificação das condutâncias de contato dos eletrodos em um meio homogêneo exemplifica a primeira situação e a localização de uma perturbação em forma de degrau, no mesmo meio homogêneo, a segunda.

A malha de 272 elementos (Fig. 8.2, pg. 77) utilizada neste conjunto de ensaios procura: **(i)** melhorar as estimativas para as resistividades da região de transição entre os eletrodos e o meio interno, através da diminuição da área dos elementos nesta região e **(ii)** permitir que menos elementos possuam área parcialmente ocupada pela perturbação, por meio do aumento no número de elementos internos.

### 12.1 Ensaio 6 - FEK, estimação em 2 fases

No presente ensaio, estima-se a distribuição de resistividade para os elementos internos da malha e as condutâncias na interface meio-eletrodo, de acordo com os argumentos apresentados na seção 11.2 (justificativa para a estimação de impedâncias ou condutâncias). A identificação é feita empregando-se o procedimento de estimação parcial do estado (2 fases) com alternância de fases, conforme descrito no capítulo 7.

Foram efetuadas 14 seqüências de identificação. As fases ímpares correspondem à identificação dos eletrodos; entre as fases subseqüentes, o vetor de estado obtido

ao final da última iteração da seqüência anterior é utilizado como estimativa inicial na próxima seqüência, com exceção da primeira, na qual as variáveis de estado adotadas são  $\rho_{0,j} = 0,067 \Omega m$ ,  $j = 1 \dots 240$  (elementos internos da malha) e  $\sigma_{0,j} = 0,50 (\Omega m^2)^{-1}$ ,  $j = 241 \dots 272$  (eletrodos).

Para o meio salino, a distribuição homogênea inicial de resistividade admite um valor que é próximo à média entre os identificados para a mesma região no ensaio 1, no qual não existia a perturbação. O filtro de Kalman deve estimar a resposta do sistema quando este é submetido a uma entrada em degrau de amplitude desconhecida (que corresponde à imersão de um objeto no meio) a partir do estado inicial, vetor que possui todas as componentes iguais. Utiliza-se um valor idêntico como estimativa inicial para as condutâncias dos eletrodos. Os demais parâmetros de ensaio para todas as seqüências estão na Tabela 12.1.

Tabela 12.1: Ensaio 6: parâmetros iniciais para as fases 1 e 2

nº	seqüência			$P_0$	$Q, \hat{Q}$	$R$
	fase	nº de RDI	iterações			
1	1 (eletrodo)	32	320	$3,5 \times 10^{-4} I_{32}$	$7,8 \times 10^{-5} I_{32}$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
2	2 (meio)	32	96	$3,5 \times 10^{-1} I_{32}$	$7,8 \times 10^{-4} I_{32}$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
3	1 (eletrodo)	32	320	$3,5 \times 10^{-4} I_{32}$	$7,8 \times 10^{-5} I_{32}$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
4	2 (meio)	32	320	$3,5 \times 10^{-1} I_{32}$	$7,8 \times 10^{-2} I_{32}$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
5	1 (eletrodo)	32	96	$3,5 \times 10^{-1} I_{32}$	$0,2 P_2^a$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
6	2 (meio)	32	480	$3,5 \times 10^{-1} I_{32}$	$7,8 \times 10^{-1} I_{32}$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
7	1 (eletrodo)	32	320	$3,5 \times 10^{-1} I_{32}$	$7,8 \times 10^{-4} I_{32}$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
8	2 (meio)	24	96	$3,5 \times 10^{-5} I_{24}$	$7,8 \times 10^{-6} I_{24}$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
9	1 (eletrodo)	32	160	$3,5 \times 10^{-4} I_{32}$	$7,8 \times 10^{-4} I_{32}$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
10	2 (meio)	32	320	$3,5 \times 10^{-1} I_{32}$	$7,8 \times 10^{-2} I_{32}$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
11	1 (eletrodo)	32	320	$3,5 \times 10^{-1} I_{32}$	$7,8 \times 10^{-2} I_{32}$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
12	2 (meio)	24	1280	$3,5 \times 10^0 I_{24}$	$0,08 P_{32}^b$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
13	1 (eletrodo)	32	320	$3,5 \times 10^{-1} I_{32}$	$7,8 \times 10^{-1} I_{32}$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
14	2 (meio)	24	320	$3,5 \times 10^0 I_{32}$	$0,6 P_{32}^c$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
14a	2 (meio)	32	96	$3,5 \times 10^0 I_{24}$	$0,9 P_2^d$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$

<sup>a</sup> $\hat{Q}$  calculada com  $Q = 7,8 \times 10^{-3} I_{32}$ ; <sup>b</sup>com  $Q = 7,8 \times 10^{-1} I_{24}$ ; <sup>c</sup>com  $Q = 7,8 \times 10^0 I_{24}$ ; <sup>d</sup>com  $Q = 7,8 \times 10^1 I_{32}$

Serão apresentadas e discutidas nesta seção somente as seqüências de identificação que elucidem aspectos importantes na aplicação do método. O conjunto completo de seqüências é mostrado no Apêndice A, através de gráficos contendo a evolução temporal

do estado.

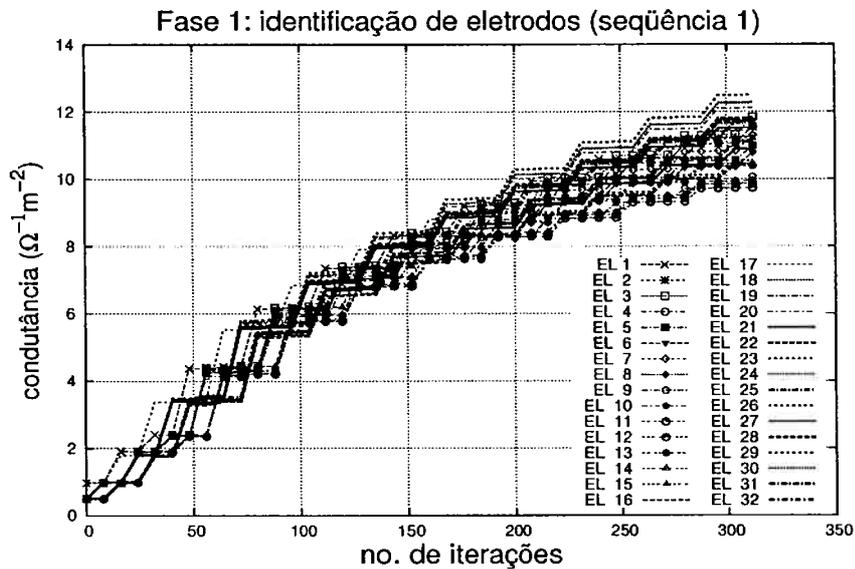
O procedimento de estimação em duas fases inicia-se com a identificação dos eletrodos, fase 1. A Fig. 12.1 apresenta a evolução temporal das estimativas para as condutâncias dos 32 eletrodos, o resíduo normalizado e a norma espectral do ganho de Kalman obtidos para a primeira seqüência de identificação.

A Fig. 12.1(a) mostra que as componentes do vetor de estado (condutâncias dos eletrodos) possuem, na média, gradientes positivos e decrescentes. Quanto aos resíduos normalizados, Fig. 12.1(b), os valores apresentados após as primeiras 50 iterações são aproximadamente 5 vezes menores que os iniciais, atestando a discrepância existente entre o estado inicial arbitrado e o estado real. As correções efetuadas pelo filtro não são suficientes para promover a consistência entre os resíduos esperados e os obtidos; ao mesmo tempo, como mostrado na Fig. 12.1(c), os ganhos de Kalman tornam-se praticamente estáveis. Ganhos estáveis e resíduos cuja estatística é distinta da esperada indicam divergência do filtro. Conclui-se, portanto, que a continuação do procedimento com os mesmos parâmetros iniciais não poderia alterar tal comportamento.

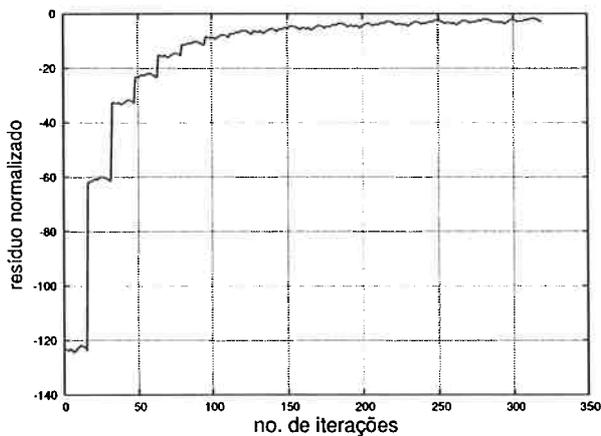
A situação descrita acima seria suficiente para justificar a mudança nos parâmetros de simulação, de modo a elevar os ganhos de Kalman; entretanto, como a estimativa inicial para a distribuição de resistividade do meio interno é, possivelmente, incorreta (não engloba informações sobre a presença, a amplitude ou a localização do degrau de perturbação), optou-se por iniciar a fase 2 neste instante, levando em conta que, desde que haja convergência, o Teorema do Ponto Fixo garante que ela ocorra em uma vizinhança do estado que minimiza a covariância do erro.

Os gráficos referentes à seqüência 2 de identificação (solução salina, fase 2) estão na Fig. 12.2. Os três gráficos mostram que as maiores correções ocorrem durante o processamento do primeiro lote de 32 medidas, devido à diferença entre o estado inicial adotado e o verdadeiro.

No gráfico da Fig. 12.2(a), algumas das curvas com gradientes positivos e constantes correspondem às RDI 10, 11, 13, 14, 15 e 16, onde ocorre a perturbação, conforme Fig. 9.4, pg. 85; porém, não é possível distinguir o objeto imerso pois regiões internas adjacentes também exibem curvas com comportamento semelhante. As curvas inferiores



(a) evolução do estado



(b) resíduo normalizado

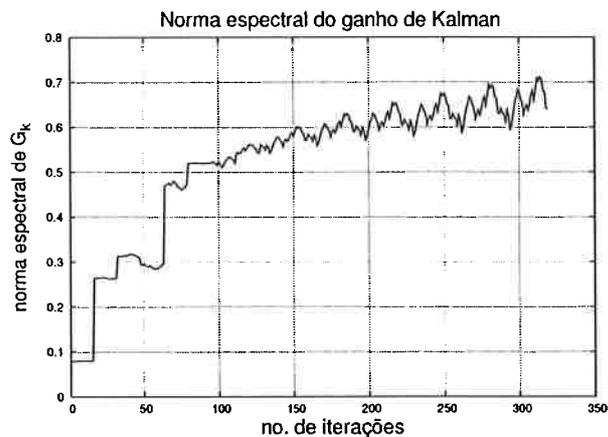
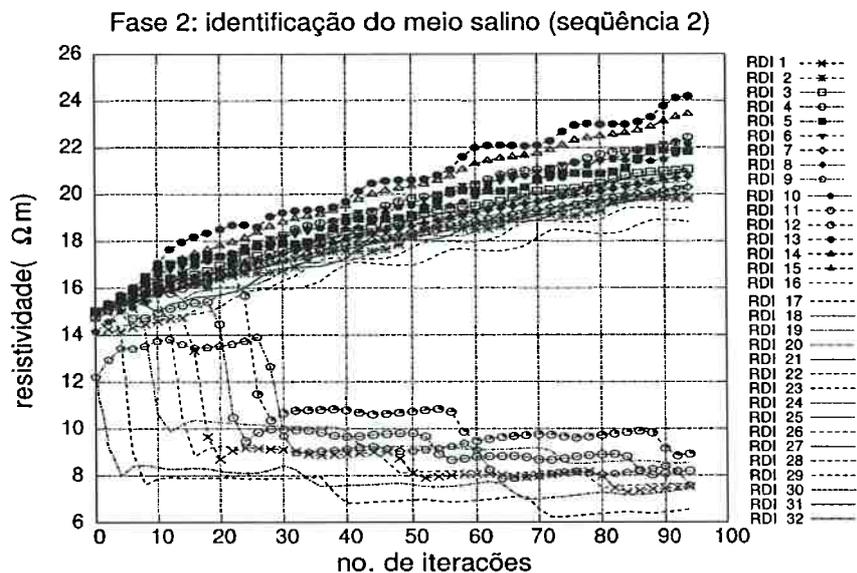
(c) norma espectral de  $G_k$ 

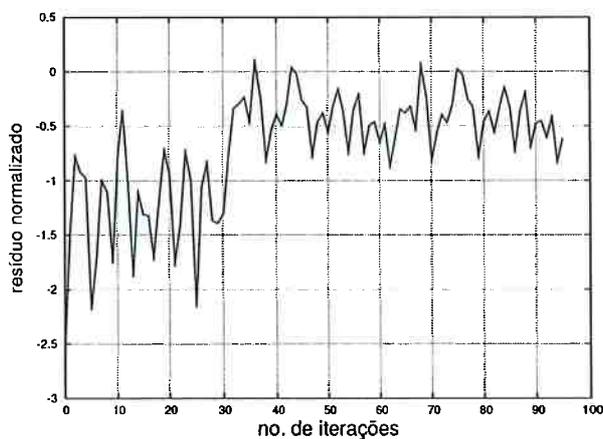
Figura 12.1: Fase 1, seqüência 1: identificação de eletrodos.

correspondem às regiões compostas por elementos pertencentes à coroa externa (RDI 1, 4, 9, 12, 17, 20, 25 e 28). Os resíduos normalizados não atendem aos critérios de convergência e os ganhos do filtro são estáveis. Assim, pelo mesmo motivo exposto ao final da seqüência 1, volta-se a executar a identificação de eletrodos (fase 1), tendo os resultados da seqüência 2 como valores iniciais.

Os resultados da seqüência 3 (fase 1), vide Fig. 12.3(a), mostram que, a partir da iteração nº 200, pouca correção é obtida com o processamento de novas medidas. Em



(a) evolução do estado



(b) resíduo normalizado

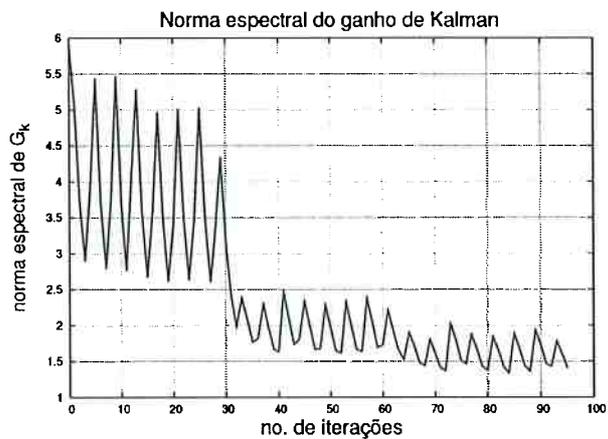
(c) norma espectral de  $G_k$ 

Figura 12.2: Fase 2, seqüência 2: identificação do meio salino contendo a perturbação.

termos relativos, enquanto na seqüência 1 a razão entre os valores finais e iniciais das condutâncias dos eletrodos era de aproximadamente 12, na seqüência 3 não ultrapassa 1,5. Ao mesmo tempo, a norma espectral do ganho de Kalman passa a oscilar com amplitude constante em torno de um valor fixo ( $\simeq 2,5$ ) e a norma espectral da covariância do erro, (Fig. 12.3(d)), estabiliza-se em torno de 0,1. Nota-se que a estabilização das normas do ganho e da covariância do erro ocorre, aproximadamente, a partir da iteração  $n^{\circ} 100$ , coerente o comportamento dos resíduos normalizados, Fig. 12.3(b);

estes, todavia, denotam a divergência do processo.

A divergência tem, como uma de suas características, matrizes de covariância do erro "pequenas" que, aliadas a um modelo dinâmico de sistema distinto do verdadeiro e ao qual se associam ruídos "pequenos," faz com que o filtro praticamente ignore novas medidas. Os ganhos tornam-se "pequenos" <sup>[i]</sup> e a trajetória sofre pouca correção (Jazwinski 1970, Brogan 1991), justificando a diferença na correção relativa do estado entre as seqüências 1 e 3. Há necessidade, portanto, de tornar o filtro novamente sensível às observações.

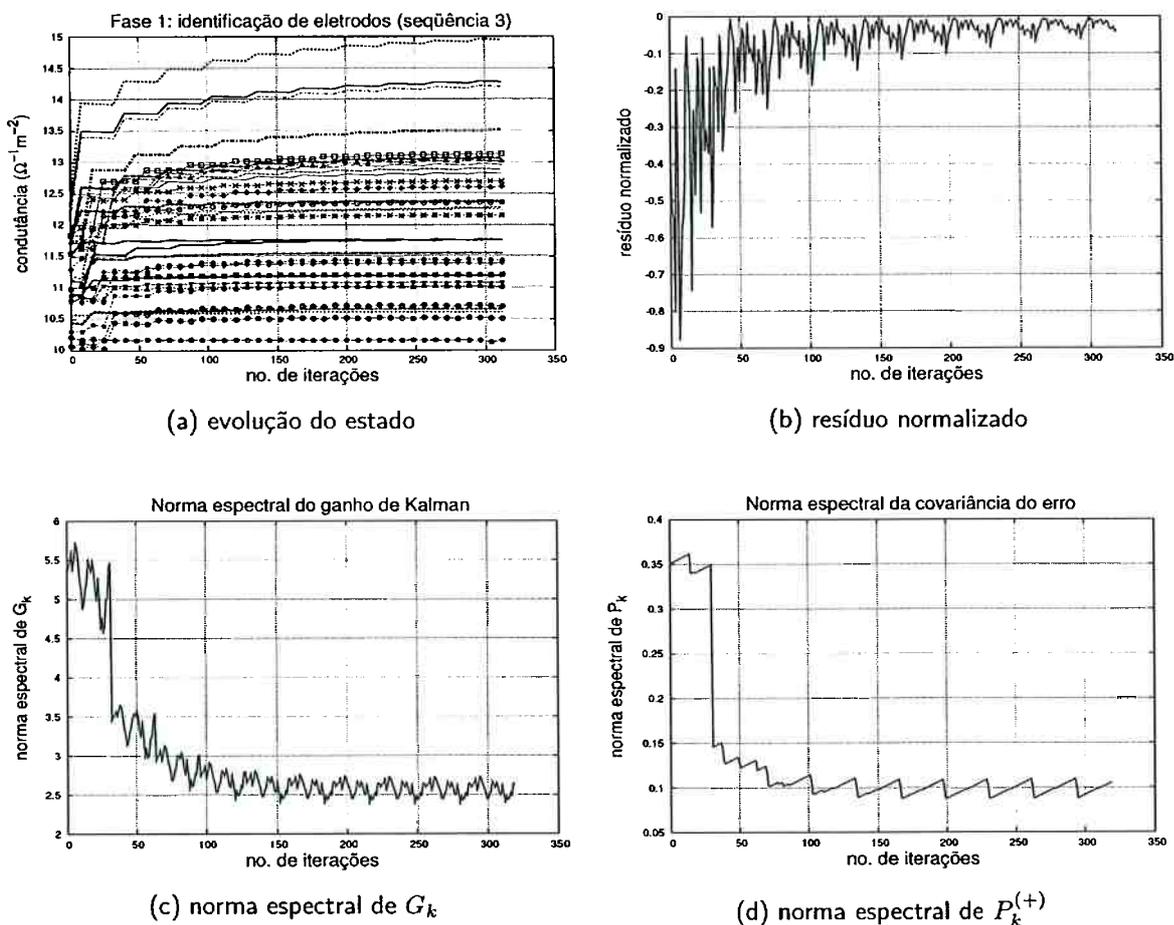


Figura 12.3: Fase 1, seqüência 3: identificação de eletrodos.

Na seção 11.3 mencionou-se a possibilidade de utilizar matrizes de covariância do ruído no estado não diagonais como forma de elevar os ganhos do filtro. Brogan (1991)

<sup>[i]</sup>As aspas, acrescentadas neste trabalho, denotam o aspecto qualitativo de tais classificações.

sugere matrizes

$$\mathbb{Q} | \mathbb{Q} = \lambda \cdot P_k, \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \lambda > 0. \quad (12.1)$$

Este procedimento baseia-se no fato de que a repetida adição, na eq. (5.21), de uma matriz diagonal cujos elementos sejam pequenos com relação à covariância do erro  $P_k$ , irá influir pouco na composição do ganho, eq. (5.22). Brogan lembra que o escalar  $\lambda$  relaciona-se com o *fator de esquecimento* ( $\varkappa$ ) do método dos mínimos quadrados recursivo através da equação

$$\lambda = \frac{1}{\varkappa} - 1, \quad (12.2)$$

e argumenta que a matriz de covariância  $\mathbb{Q}$  obtida conforme a eq. (12.1) possui valores que, ao menos, expressam a ordem de grandeza da matriz de covariância  $Q$ , desconhecida *a priori*. Por outro lado, Jazwinski (1970) afirma que uma maneira de manter o filtro sensível às novas medidas é obter uma matriz de covariância  $\mathcal{P}$  após a filtragem de dados até um instante anterior ao atual e utilizá-la no lugar de  $P_{k-1}$ , adaptando para isso as equações de atualização do filtro. Em face da eq. (5.21), o esquema proposto por Brogan é semelhante ao de Jazwinski.

Verifica-se, na Tab. 12.1, que o artifício acima é utilizado em algumas seqüências de identificação nas quais a evolução do estado na respectiva seqüência imediatamente anterior apresentava comportamento semelhante ao observado na Fig. 12.3(a), com os gradientes destas curvas próximos de zero. Na seqüência 5, adota-se  $\lambda = 0,2$  e  $k = 2$  na eq. (12.1).

Os efeitos da modificação na matriz de covariância do ruído no estado sobre o comportamento do filtro na identificação dos eletrodos podem ser vistos na Fig. 12.4. Nota-se que as normas das matrizes de ganho e de covariância do erro apresentam valores superiores aos verificados na seqüência 3, conforme teoricamente previsto. Os resíduos normalizados permanecem limitados, porém não satisfazem aos requisitos de convergência.

Os resultados experimentais obtidos ao longo do trabalho têm apresentado como característica comum resíduos, ganhos e covariâncias de erro de estimação limitados. A matriz de sensibilidade  $\mathbb{H}_k$  possui informações determinísticas (a geometria do problema, dada pela malha de elementos finitos) e estocásticas (a cada iteração, a variável

aleatória  $\hat{\sigma}_k$  (ou  $\hat{\rho}_k$ ) é utilizada na linearização da equação de observações). Sob estas condições, Guo (1990) demonstra que, desde que os parâmetros a serem estimados possuam variação limitada, a covariância do erro de estimação também é limitada e garante a convergência das estimativas geradas pelo filtro.

No caso em estudo, como a amplitude da perturbação é limitada, espera-se que a convergência do algoritmo ocorra, pois a norma da covariância do erro tem se mantido limitada, mesmo que em etapas intermediárias do procedimento de estimação os resíduos normalizados não atendam às condições de convergência.

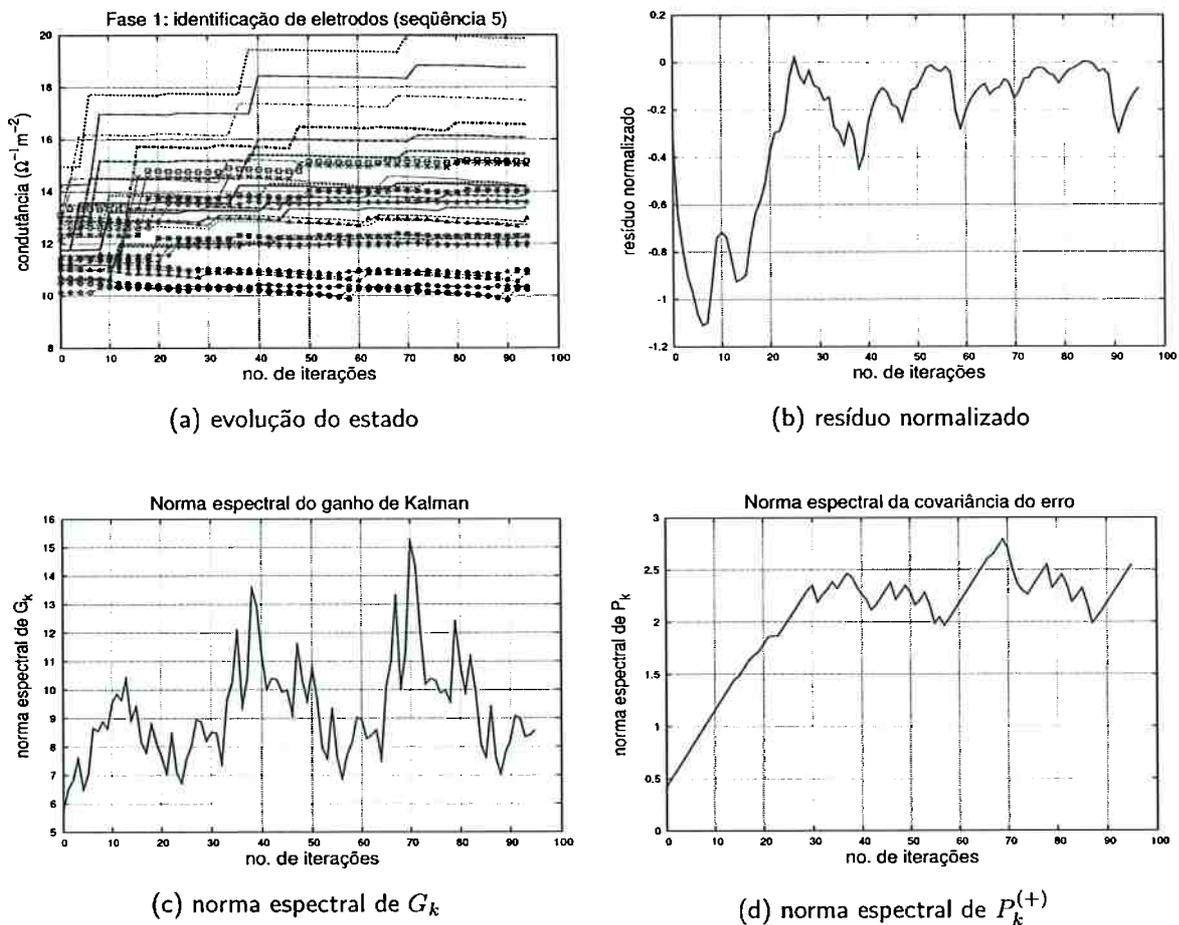
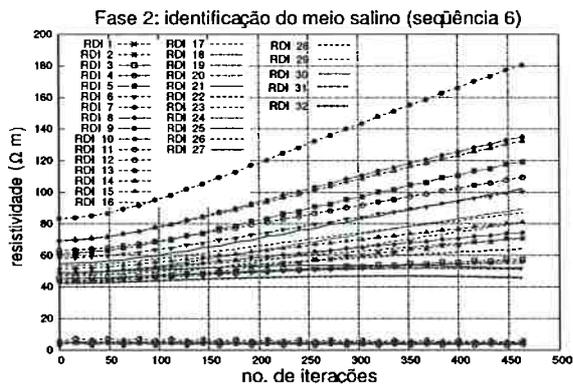


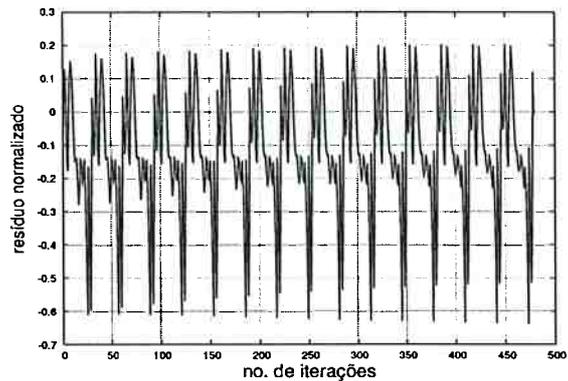
Figura 12.4: Fase 1, seqüência 5: identificação de eletrodos.

A partir da seqüência 8 (fase 2) passou-se a utilizar 24 RDI (Fig. 9.4, pg. 85). Para entender o motivo, deve-se olhar os resultados obtidos nas duas seqüências imediatamente anteriores. As curvas de evolução do estado para a seqüência 6, mostradas na

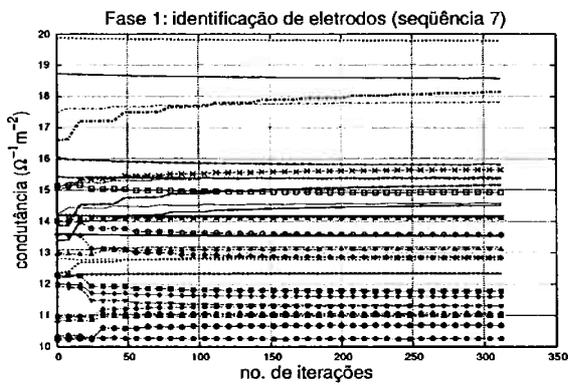
Fig. 12.5(a), apresentam gradientes positivos e constantes para as variáveis de estado correspondentes à região da perturbação. Ao mesmo tempo, os resíduos normalizados (Fig. 12.5(b)) revelam que a convergência não foi atingida. Na seqüência 7, os gradientes das curvas de evolução do estado são praticamente nulos, Fig. 12.5(c), e os resíduos normalizados, Fig. 12.5(d), atendem aos critérios de convergência .



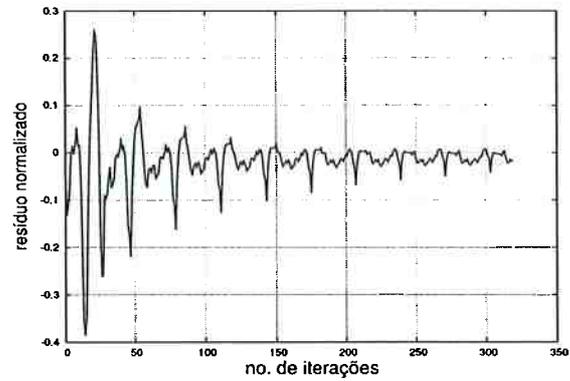
(a) seq. 6 (fase 2): evolução do estado



(b) seq. 6: resíduo normalizado



(c) seq. 7 (fase 1): evolução do estado



(d) seq. 7: resíduo normalizado

Figura 12.5: Seqüências 6 e 7: identificação do meio salino e de eletrodos.

Tais condições não são suficientes para garantir que as condutâncias nas interfaces meio-eletrodos estejam identificadas e que, para melhorar as estimativas da distribuição de resistividade do meio, seria necessário efetuar mais iterações na fase 2, como havia ocorrido para a malha de 182 elementos do capítulo anterior. A justificativa para tal afirmação é dada a seguir.

A convergência é garantida desde que a norma da matriz de covariância do erro seja

limitada (Guo 1990). A Fig. 12.6 revela que isto não ocorre na seqüência 6.

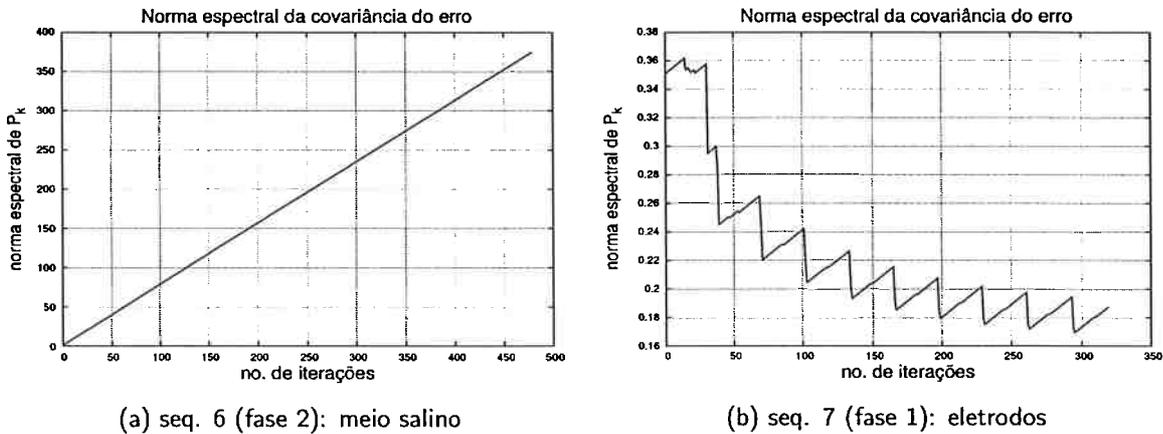


Figura 12.6: Seqüências 6 e 7: norma espectral da matriz  $P_k^{(+)}$ .

A Fig. 9.4(b), pg. 85, mostra que a perturbação ocupa parte das regiões 10, 11, 13, 14, 15 e 16, com predominância nas RDI 11 e 14. A Fig. 12.7(a) apresenta a distribuição de resistividade na última iteração da seqüência 6. As RDI 5, 6 e 21, que estão fora do local da perturbação, possuem resistividades da mesma ordem de grandeza que a das RDI ocupadas pelo objeto imerso.

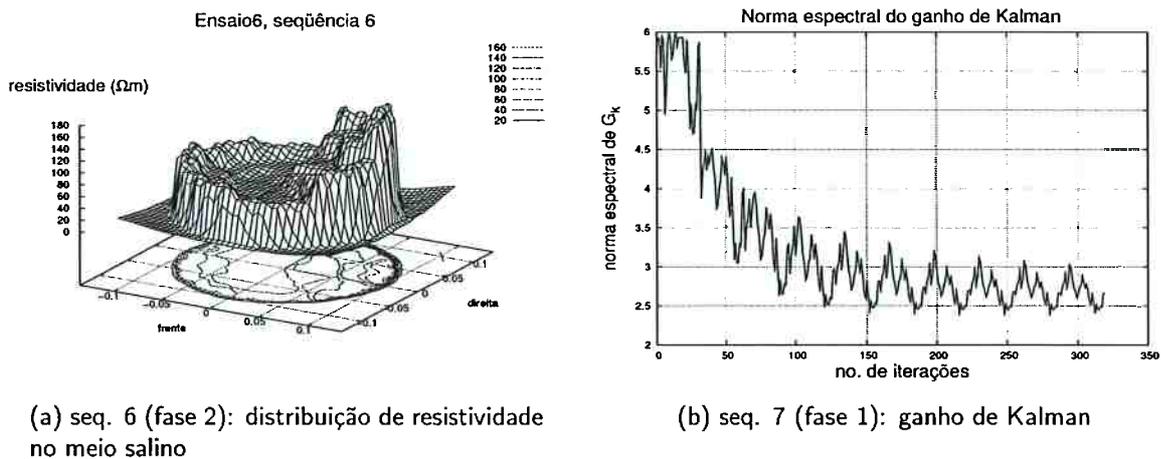


Figura 12.7: Seqüências 6 e 7: resistividades no meio salino e norma espectral de  $G_k$ .

O último estado estimado na seqüência 6 (que serve de estimativa inicial para a seqüência 7) é distinto do real, porém atesta que a coroa externa do domínio, formada

pelos RDI 1, 4, 9, 12, 17, 20, 25 e 28 possui resistividade compatível com o meio salino, pois não é ocupada pela perturbação. Com a diminuição da área dos elementos da coroa e seu agrupamento em RDI, cria-se uma "zona de separação"

As resistividades dos RDI 5, 6 e 21 sugerem que as condutâncias na interface meio-eletrodos ainda não estejam corretamente identificadas na fase 1 anterior (seqüência 5), apresentando valores menores que os verdadeiros. Assim, na seqüência 6, o filtro estima as resistividades das regiões adjacentes aos eletrodos com valores inferiores aos reais e, em contrapartida, superestima regiões internas ocupadas apenas pela solução. A norma limitada da matriz de covariância do erro na seqüência 7 garante somente que as condutâncias identificadas sejam as melhores para as condições que o meio salino possui, especificamente, a distribuição de resistividade obtida na seqüência 6.

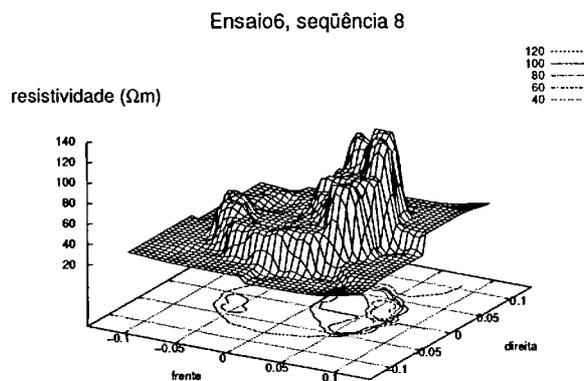
A situação que se apresenta na seqüência 7 caracteriza a predominância do modelo do sistema sobre o modelo de observação. Com isto, o peso das informações contidas no vetor de medidas é menor e o ganho decresce (vide Fig. 12.7(b)), até tornar-se insuficiente para corrigir o estado. Verifica-se, portanto, que o processo de estimação, como um todo, diverge.

Assim, é necessário que o filtro volte a ser sensível às medidas. Uma maneira possível de atingir este objetivo é reagrupando os elementos em um número menor de RDI, de modo a diminuir o número de parâmetros a serem estimados. A justificativa teórica para tal procedimento é a melhoria na observabilidade do sistema, uma vez que a dimensão do vetor de medidas permanece constante, conforme argumentado na seção 11.5.2, pg. 132.

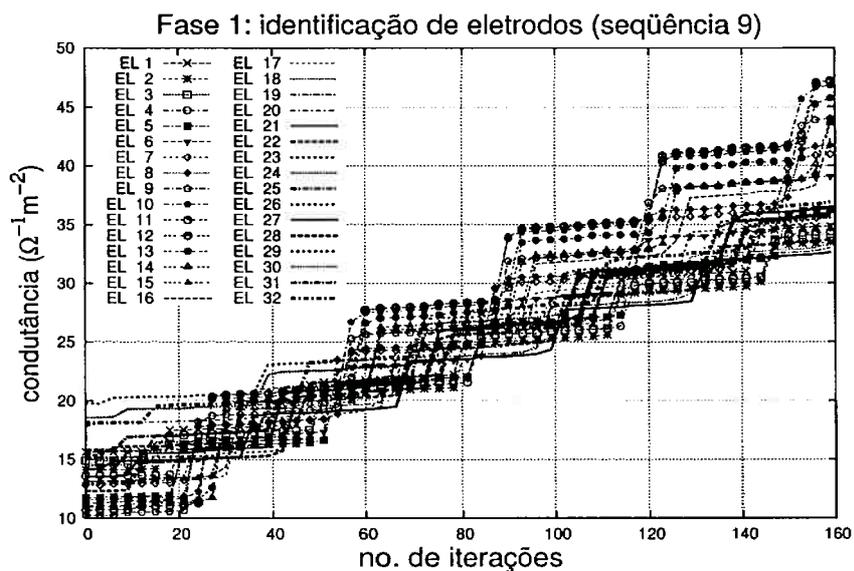
Dada a geometria da malha, optou-se por 24 RDI, conforme mostra a Fig. 9.4(a). Observa-se que as novas RDI resultam da união, na configuração com 32 RDI, entre cada arco da coroa circular externa com o interno que lhe é adjacente. A zona de separação passa, em alguns locais, a englobar também parte do meio salino ocupado pela perturbação, tornando a influência das condutâncias dos eletrodos menos significativa.

Os resultados da modificação podem ser vistos na Fig. 12.8(a). Na seqüência 8, nota-se que as resistividades dos RDI na coroa externa são inferiores às da região que contém

o copo. Por exemplo, com 32 RDI a região 21 apresentava  $\rho \simeq 103 \Omega m$ , ao passo que a RDI 15, formada pelas RDI 20 e 21 anteriores, possui  $\rho \simeq 29 \Omega m$ . As resistividades de toda a coroa externa com 24 RDI são aproximadamente a metade daquilo que eram as correspondentes com 32 RDI. A análise anterior continua válida: resistividades maiores na coroa externa implicam em condutâncias maiores na interface com os eletrodos (devido à conservação de carga), fato confirmado pela evolução temporal do estado na seqüência



(a) seq. 8 (fase 2): distribuição de resistividade no meio salino



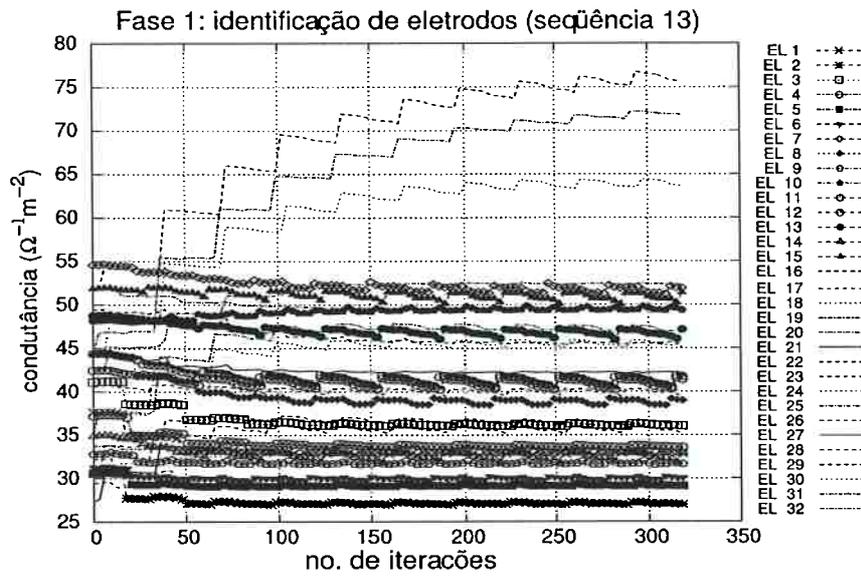
(b) seq. 9 (fase 1): evolução do estado

Figura 12.8: Seqüências 8 e 9: resistividades no meio salino e identificação de eletrodos.

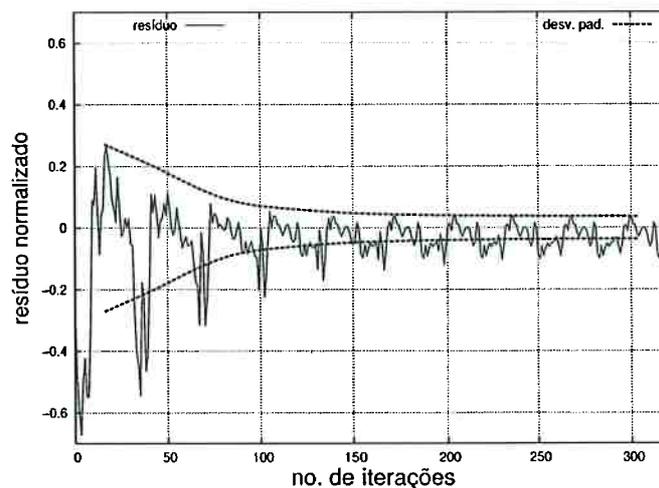
9, vide Fig. 12.8(b).

A continuação do procedimento de identificação com alternância de fases culmina com a seqüência 13 (eletrodos) e com o conjunto de seqüências 14 (meio salino).

O comportamento do filtro estendido na última seqüência de identificação de eletrodos é exibido nos gráficos das Figuras. 12.9 e 12.10. As curvas de evolução do estado,



(a) evolução do estado



(b) resíduo normalizado

Figura 12.9: Fase 1, seqüência 13: identificação de eletrodos - estado e resíduo

após cerca de 250 iterações, possuem gradientes nulos; ao mesmo tempo, os resíduos

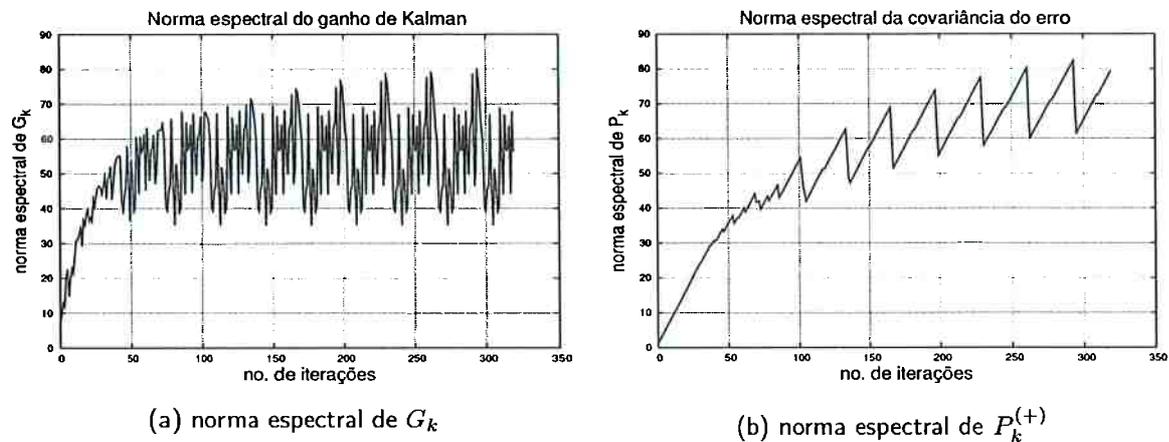
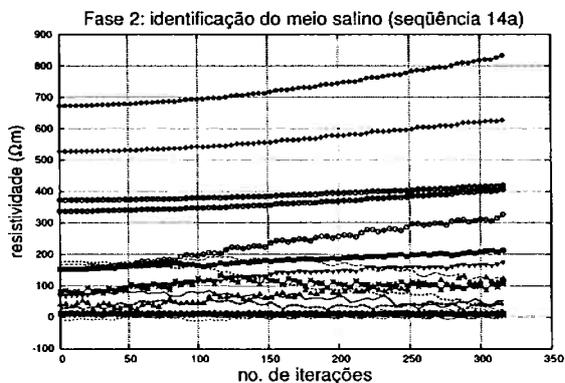


Figura 12.10: Fase 1, seqüência 13: identificação de eletrodos - normas espectrais.

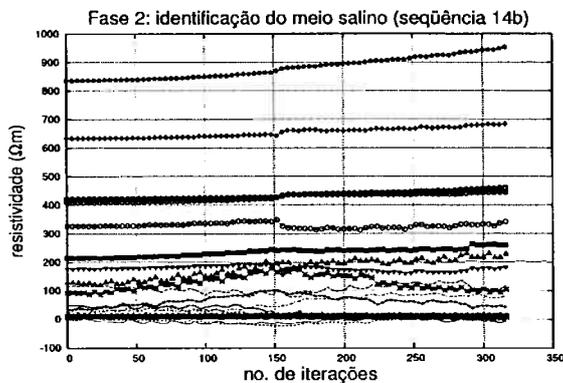
normalizados oscilam em torno de  $-0,034$  e satisfazem às condições de convergência impostas pela eq. (5.45). A norma espectral da covariância do erro é limitada.

As Figuras 12.11(a)-(e) mostram a evolução das estimativas para o vetor de estado no conjunto de seqüências de 14a até 14e, enquanto a Fig. 12.12 apresenta a distribuição de resistividade ao final do processo de estimação e os respectivos resíduos normalizados. O objeto de vidro é perceptível nas regiões 11, 14, 15 e 16, que apresentam os maiores valores de resistividade, respectivamente  $746$ ,  $1106$ ,  $463$  e  $520 \Omega m$  (valores aproximados); tais regiões coincidem com a posição real ocupada pelo objeto, conforme se vê na Fig. 9.4(b), pg. 85. Os resíduos normalizados, Fig. 12.12(b), atendem aos critérios de convergência impostos pelas equações (5.43)-(5.45), e os ganhos de Kalman são estáveis a partir da iteração  $n^{\circ} 120$  (Fig. 12.13(a)); pode-se, portanto, considerar o procedimento em duas fases concluído após as seqüências 13 e 14e. No entanto, nota-se que há regiões cujas resistividades são negativas, a saber RDI 23 ( $-10 \Omega m$ ) e 32 ( $-19 \Omega m$ ), resultado que não possui significado físico. Além disso, as RDI 6 e 7, que não englobam o objeto, possuem resistividades que representam respectivamente cerca de 30% e 25% do valor máximo.

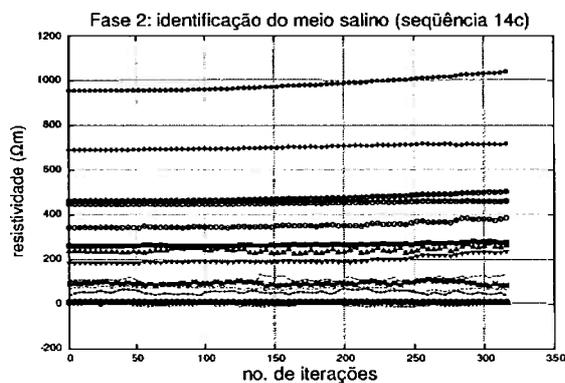
Para que os resultados acima possam ser explicados, recorre-se à matriz de covariância do erro. Verifica-se, na Fig. 12.13(b), que a norma espectral de  $P_k^{(+)}$  é monotônica crescente, devido aos efeitos locais. As regiões cujas estimativas de resisti-



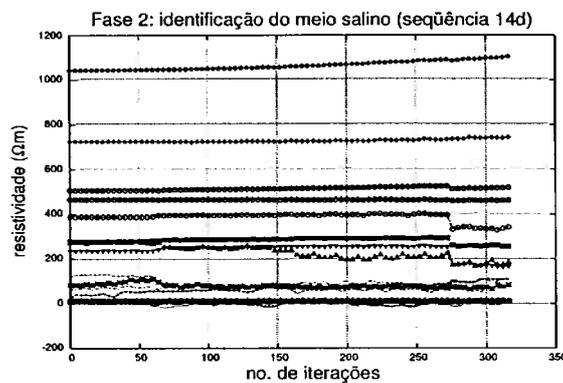
(a) seq. 14a (fase 2): evolução do estado



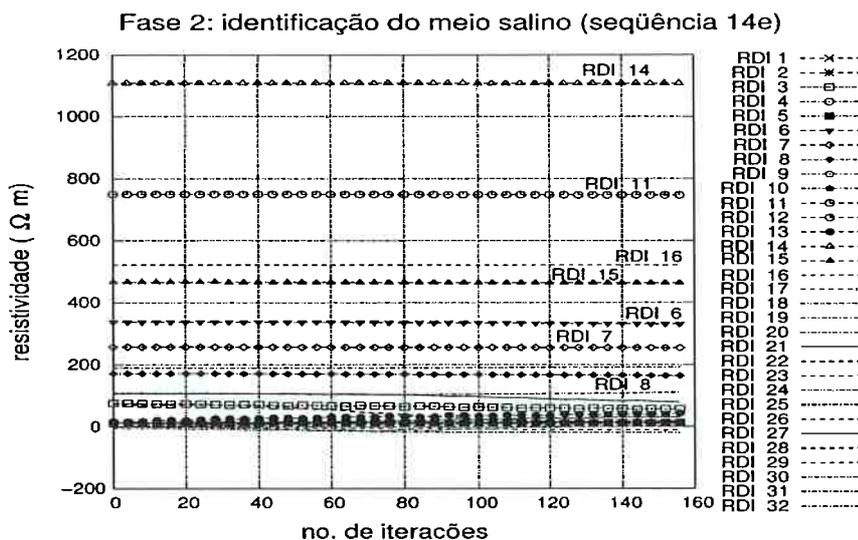
(b) seq. 14b (fase 2): evolução do estado



(c) seq. 14c (fase 2): evolução do estado



(d) seq. 14d (fase 2): evolução do estado



(e) seq. 14e (fase 2): evolução do estado

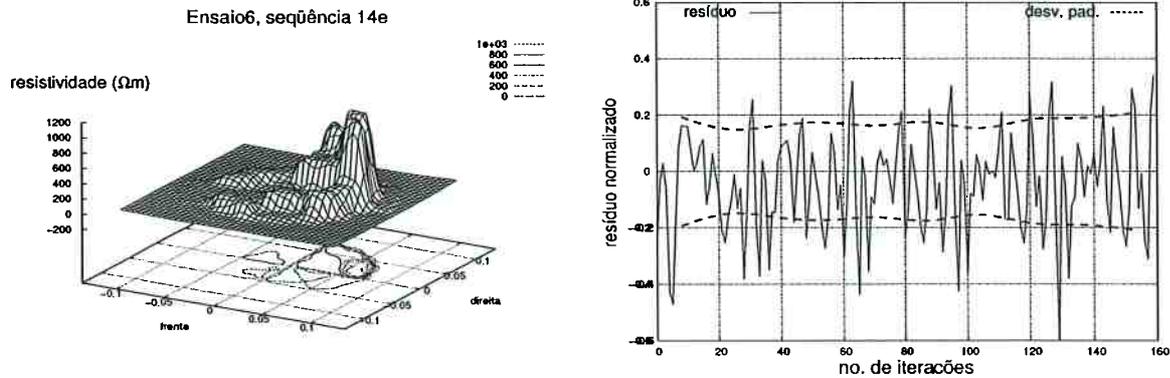
Figura 12.11: Seqüências 14a até 14e: identificação do meio salino com o objeto.

vidade são negativas situam-se próximas àquelas onde ocorreu a perturbação, entre as quais as RDI 15 e 16. Conforme a Fig. 9.4(b), as RDI 15 e 16 abrigam parcialmente o objeto. Como a discretização da região central do domínio pelas RDI é grosseira, os valores de resistividade estimados ao final da seqüência 14e são superiores aos reais, cabendo a compensação a algumas regiões próximas, como 23/32 (resistividades negativas) e 6/7 (resistividades elevadas para regiões sem a perturbação). A norma espectral crescente reflete tais discrepâncias, e a "distância" que existe entre o estado ao final da iteração nº 160 e o estado real.

Por outro lado, de acordo com Guo (1990), a convergência para o vetor estimado  $\hat{\sigma}$  deveria proporcionar normas limitadas para o ganho e para a covariância do erro, uma vez que a entrada (função degrau) possui amplitude limitada. O Teorema do Ponto Fixo garante que a alternância entre as fases de estimação conduza as estimativas a um estado que minimiza a covariância do erro. O quadro acima, com resíduos consistentes com suas estatísticas esperadas, ganho estável e covariância do erro crescente, configura a convergência para um mínimo local. Este mínimo, embora atenda aos critérios de convergência, ainda não pode ser considerado o "melhor", se a imagem obtida for um parâmetro de avaliação.

Os gradientes nulos das curvas de evolução do estado nesta seqüência, aliados à convergência satisfatória de acordo com critérios ortodoxos, mostram que é imprescindível a utilização de técnicas que impeçam a ocorrência de estimativas sem sentido físico de maneira não esporádica e, além disso, mantenham o filtro sensível às novas medidas. A primeira dificuldade pode ser contornada através da incorporação de procedimentos de regularização, como a regularização generalizada de Tikhonov, que será discutida na seção 12.3. A segunda dificuldade exige a implementação de um ajuste adaptativo, cujos resultados são apresentados e analisados na seção 12.4.

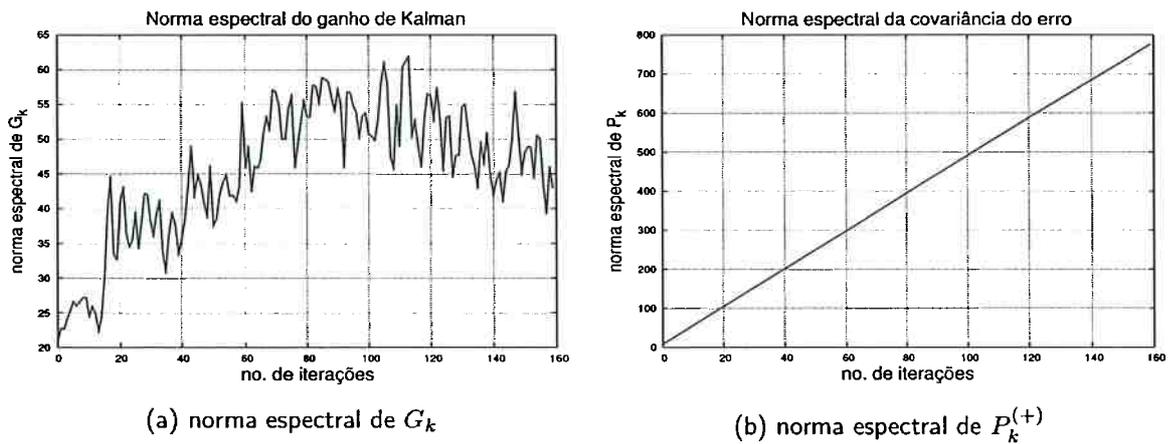
Por ora, levando-se em conta a convergência do procedimento de estimação no ensaio 6, consideram-se as condutâncias na interface meio-eletrodo identificadas através do procedimento em duas fases. Os valores são convertidos em impedâncias e relacionados na Tabela 12.2. O valor médio é  $\bar{\rho} = 0,026 \Omega m^2$ , com desvio-padrão  $0,006 \Omega m^2$ . A discrepância média entre os valores da Tabela 11.1 e os aqui apresentados é de -23,3%,



(a) seq. 14e: distribuição de resistividade no meio salino

(b) seq. 14e: resíduo normalizado

Figura 12.12: Seqüência 14e: estado final e resíduos normalizados.



(a) norma espectral de  $G_k$

(b) norma espectral de  $P_k^{(+)}$

Figura 12.13: Seqüência 14e: normas espectrais.

a máxima é -47,9%, no eletrodo 12, e a mínima é 0,5%, no eletrodo 31.

As discrepâncias entre os valores identificados nos ensaios 1 e 6 podem ser parcialmente explicadas em função da diferença entre as malhas de elementos finitos utilizadas em cada um destes ensaios. Quando a malha é incapaz de descrever a distribuição de potencial no domínio, incorre-se em erros nas estimativas das impedâncias de contato. Além disso, no ensaio 6, a presença de uma perturbação elevada no meio salino tende a acentuar o mau condicionamento do problema (Vilhunen et al. 2002), uma vez que os gradientes de resistividade entre elementos ou regiões adjacentes são maiores, prejudicando a observabilidade do sistema devido ao aumento no número de condição da

Tabela 12.2: Impedâncias de contato dos eletrodos ( $\Omega m^2$ )

ELETRODO	1	2	3	4	5	6	7	8
IMPEDÂNCIA	0,0305	0,0370	0,0277	0,0298	0,0345	0,0332	0,0193	0,0258
ELETRODO	9	10	11	12	13	14	15	16
IMPEDÂNCIA	0,0316	0,0203	0,0242	0,0240	0,0212	0,0304	0,0195	0,0249
ELETRODO	17	18	19	20	21	22	23	24
IMPEDÂNCIA	0,0284	0,0222	0,0214	0,0139	0,0302	0,0277	0,0132	0,0157
ELETRODO	25	26	27	28	29	30	31	32
IMPEDÂNCIA	0,0191	0,0220	0,0238	0,0338	0,0344	0,0306	0,0299	0,0202

matriz de informação.

Resta determinar se, e como, as diferenças nas impedâncias dos eletrodos verificadas nos dois procedimentos de estimação modificam as estimativas do estado e o desempenho do filtro na detecção da presença da descontinuidade no meio salino. Para isto, utilizam-se as impedâncias da Tab. 12.2 em conjunto com a malha de 182 elementos, agrupados em 16 RDI, na tentativa de estimar a localização do objeto imerso. Efetua-se a comparação com o ensaio 2, seção 11.2.1. Por este motivo, os parâmetros de processamento são os da página 108, a saber:

$$P_0 = 3,5 \times 10^{-5} I_{16}$$

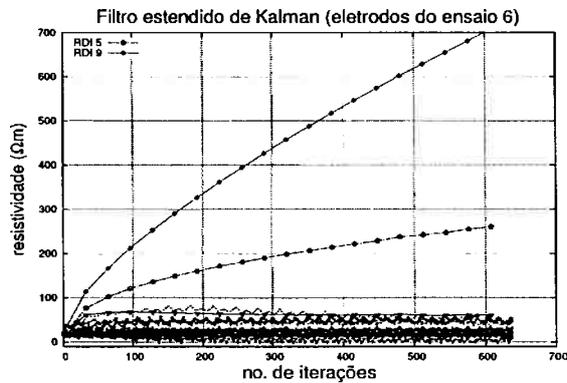
$$Q = 7,8 \times 10^1 I_{16}$$

$$R = 2,5 \times 10^{-3} I_{32}$$

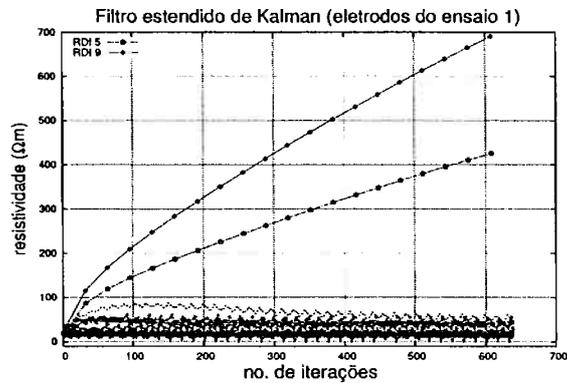
$$\rho_0 = 1,0 \Omega m$$

A Fig. 12.14 apresenta a evolução do estado, os resíduos normalizados e a distribuição de resistividade ao final de 640 iterações com o FEK nas duas situações descritas acima. Em ambos os casos, as variáveis de estado nas regiões ocupadas pelo objeto de vidro, RDI 5 e 9, possuem os maiores gradientes. As resistividades estimadas para a RDI 9, onde se situa a maior parte do objeto, apresentam erro relativo de 2,2% após a iteração nº 640. A máxima discrepância ocorre na região 5, cujo erro relativo é de -67,9%. Os erros apresentados resultam da comparação entre as estimativas efetuadas com os eletrodos resultantes do ensaio 1, conforme valores da Tab. 11.1, em relação àquelas que utilizam eletrodos provenientes do ensaio 6, cujos valores estão na Tab. 12.2.

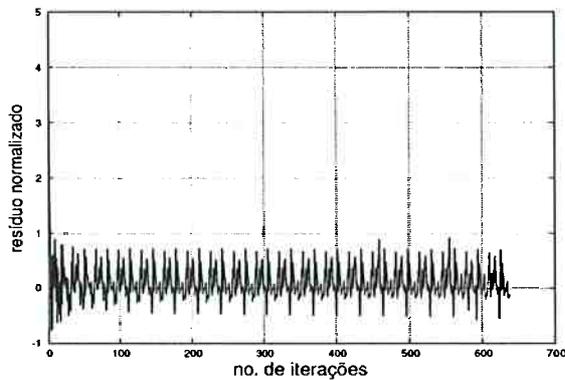
O erro relativo entre as estimativas para a região 5, que contém parte do objeto, não



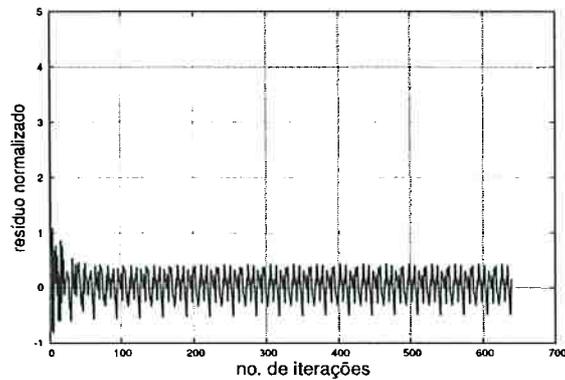
(a) identificação do meio salino na malha com 182 elementos e eletrodos obtidos no ensaio 6



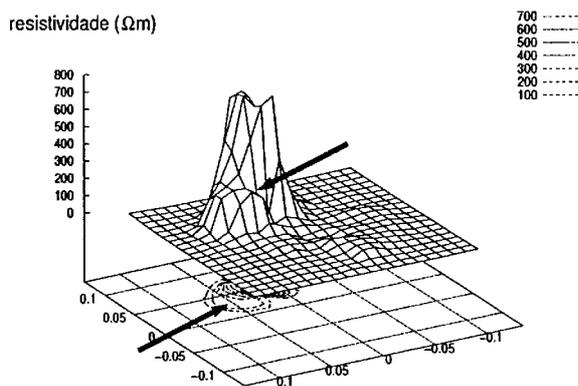
(b) identificação do meio salino na malha com 182 elementos e eletrodos obtidos no ensaio 1



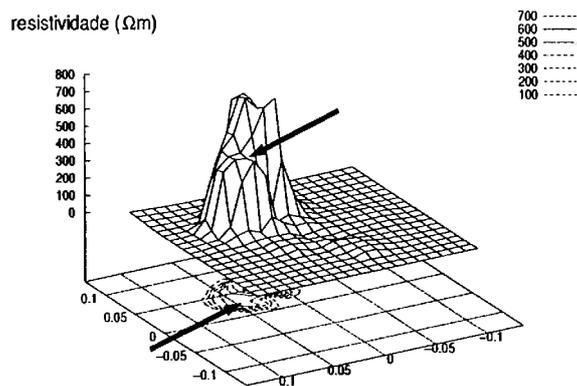
(c) resíduo normalizado para a situação (a)



(d) resíduo normalizado para a situação (b)



(e) distribuição de resistividade (eletrodos do ensaio 6)



(f) distribuição de resistividade (eletrodos do ensaio 1)

Figura 12.14: Avaliação comparativa de desempenho do FEK com eletrodos identificados nos ensaios 1 e 6, malha de 182 elementos, processamento em lote, 16 RDI.

prejudica o desempenho do filtro, como mostram as curvas de evolução dos resíduos nor-

malizados. Através das distribuições de resistividades expostas nas Figuras <sup>[ii]</sup> 12.14(a) e (b), percebe-se o efeito causado por maiores estimativas na região 5: o local efetivamente ocupado pelo objeto aparenta maior “deformidade”, conforme indicam as setas nas figuras acima. Assim, uma avaliação qualitativa permite que se considerem as estimativas geradas a partir de eletrodos no procedimento em duas fases mais condizentes com a situação experimental em questão. Esta constatação confirma que, em situações nas quais as descontinuidades sejam finitas, o método é capaz de acompanhar as alterações nas propriedades dielétricas do meio.

## 12.2 Ensaio 7 - FEK, sem RDI

No ensaio 6, durante o processamento dos dados para a identificação das condutâncias na interface meio-eletrodos e da distribuição de resistividade na solução salina, constatou-se a presença de regiões cujas estimativas eram negativas, justificadas em razão da hipótese inicial de conservação de cargas. Estas regiões são adjacentes àquelas que englobam a perturbação. Os gradientes de resistividade em suas fronteiras são elevados e provavelmente mal representados pela malha de elementos finitos, levando o filtro de Kalman a provocar tais distorções.

A introdução conjunta de um filtro passa-alta e da regularização de Tikhonov, conforme descrito na seção 6.2, pode contornar o problema acima pois: **(i)** a acentuação das diferenças locais de resistividade entre regiões adjacentes obtida com o filtro passa-alta diminui o erro cometido na relinearização do modelo de observações a cada iteração; **(ii)** o termo de regularização na eq. (6.9), ponderado pela forma quadrática da matriz de transformação que leva ao filtro passa-alta, quando minimizado, tende a atenuar os gradientes locais.

Como a utilização de RDI já é uma forma de regularização, nos ensaios 7 e 8 optou-se por estimar as 240 variáveis de estado que representam as resistividades dos elementos triangulares da malha. O ensaio 7, cujos resultados são descritos abaixo, não recorre ao filtro passa-alta e nem à regularização de Tikhonov, avaliados no ensaio 8.

<sup>[ii]</sup>Para melhor visualização das discrepâncias entre as estimativas para a RDI 5, os gráficos foram rotacionados 180° em torno do eixo vertical, com relação ao padrão apresentado até aqui.

Inicialmente, escolhem-se os parâmetros de processamento. O vetor inicial de resistividade possui valores  $\rho_0 = 1,0 \Omega m$  para os elementos internos da malha e  $\rho_0 = 0,04 \Omega m$  para os elementos da coroa externa (região de transição com os eletrodos) <sup>[iii]</sup>. As matrizes iniciais de covariância do erro de estimação e de ruídos na medida são respectivamente  $P_0 = 3,5I_{240}$  e  $R = 2,5 \times 10^{-3}I_{32}$ . A matriz de covariância do ruído no estado é  $Q = 0,06P_2$ , obtida após a segunda iteração com  $Q_0 = 8,0 \times 10^{-2}I_{240}$ . Às impedâncias de contato dos eletrodos, elementos 241 a 272, são atribuídos os valores da Tab. 12.2.

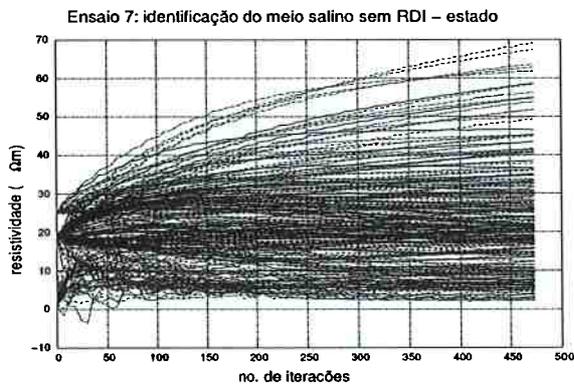
Foram efetuadas 480 iterações do algoritmo com o filtro estendido de Kalman, correspondentes à aplicação de 15 padrões diametrais de correntes. A Fig. 12.15(a) mostra que algumas variáveis de estado possuem gradientes positivos; estas curvas correspondem aos elementos 85, 86, 111, 112, 118 e 119, localizados na região onde o copo foi imerso, conforme se vê na Fig. 12.15(b). As variáveis de estado referentes aos elementos 28, 66 e 68 assumem valores negativos durante o procedimento de estimação. No presente caso, isto não causa problemas pois o filtro é capaz de corrigi-las sem comprometer as demais estimativas. Todavia, caso seja necessário tornar as correções maiores modificando os parâmetros de processamento a fim de aumentar os ganhos, pode ser impossível impedir que algumas variáveis de estado permaneçam negativas.

Os resíduos normalizados, Fig. 12.15(c), possuem valor médio -0,045 e desvio-padrão 0,065 durante as 32 últimas iterações, deixando portanto de atender aos critérios de convergência estipulados pela equação (5.45).

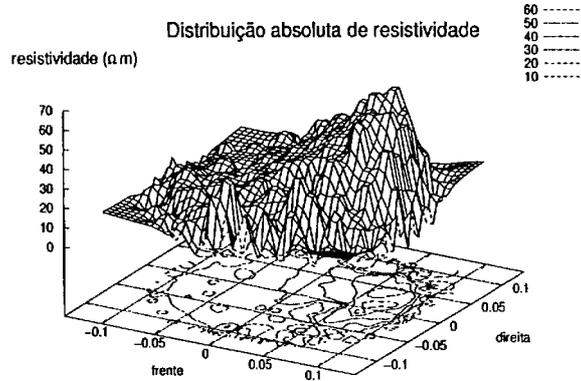
A matriz de covariância do erro de estimação não possui norma limitada, conforme mostra a Fig. 12.15(c), indicando que a convergência para o vetor que minimiza seu traço ainda não ocorreu de fato, dada a elevada amplitude da perturbação, o que é coerente com a argumentação de Guo (1990) e com o comportamento dos resíduos descrito acima.

O sistema é observável, pois o número de condição  $\kappa(\mathbb{P}_k)$  da matriz de informação, Fig. 12.15(d), fica estável em torno de  $10^7$ , permitindo classificá-la como positiva durante todo o processo de estimação. Novamente, a elevação de  $\kappa(\mathbb{P}_k)$  nas primeiras

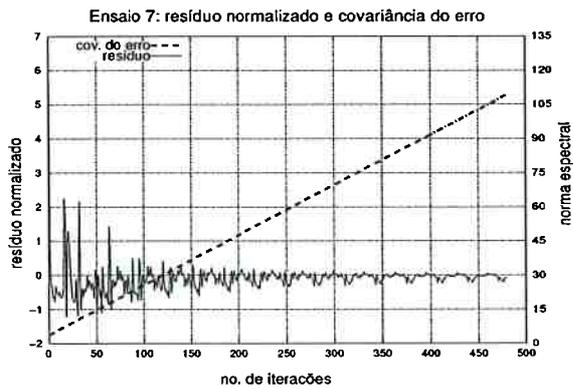
<sup>[iii]</sup>Na Fig. 9.4, pg. 85, os elementos da coroa externa correspondem às RDI 1, 4, 9, 12, 17, 20, 25 e 28.



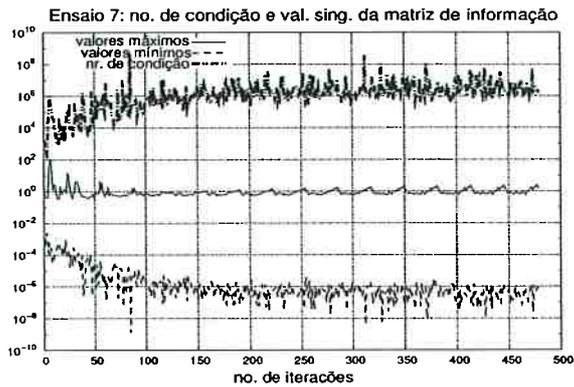
(a) evolução do estado na malha com 272 elementos, eletrodos obtidos no procedimento em duas fases (ensaio 6) e sem utilizar RDI



(b) distribuição de resistividade após a iteração nº 480



(c) resíduo normalizado e norma de  $P_k$



(d) número de condição/valores singulares máximos e mínimos de  $P_k$

Figura 12.15: Ensaio 7: desempenho do FEK com eletrodos identificados no procedimento em duas fases.

iterações significa que as estimativas do estado contemplam a existência de uma perturbação e acentuam a característica do problema mal condicionado, à medida que os gradientes entre elementos adjacentes tornam-se maiores.

## 12.3 Ensaio 8 - FEK e regularização de Tikhonov

No presente ensaio, aplica-se o filtro passa-alta, através de uma regularização generalizada de Tikhonov, na identificação das 240 resistividades da malha de 272 elementos e comparam-se os resultados com os do ensaio anterior. As impedâncias na interface meio-metal dos eletrodos, valores da Tab. 12.2, são informações *a priori*. O vetor inicial de resistividade  $\rho_0$ , assim como as matrizes de covariância  $P_0$  e  $Q$  possuem valores idênticos aos adotados no ensaio 7. A exceção é a matriz de covariância do ruído na medida que, devido à regularização, assume a forma

$$R_k^\infty = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{240} \end{bmatrix},$$

com  $R = 2,5 \times 10^{-3} I_{32}$ . A escolha dos parâmetros de regularização e filtragem, respectivamente  $\alpha$  e  $\beta$  nas equações (6.10) e (6.5), é normalmente empírica, <sup>[iv]</sup> cabendo portanto uma análise de sensibilidade em relação aos valores adotados. Para tanto, foram realizados 16 ensaios variando-se tais parâmetros de acordo com a Tabela 12.3.

Tabela 12.3: Parâmetros de regularização e filtragem

ENSAIO	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8
$\alpha$	0,001	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$\beta$	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
ENSAIO	8.9	8.10	8.11	8.12	8.13	8.14	8.15	8.16
$\alpha$	2,0	10,0	100,0	1000,0	0,4	0,4	0,4	0,4
$\beta$	0,6	0,6	0,6	0,6	0,01	1,0	10,0	100,0

Salienta-se que a eq. (6.10) permite a inclusão de informações *a priori* (valores conhecidos ou esperados de resistividade) sobre quaisquer elementos ou regiões, através do vetor  $\rho^*$ , o que tende a tornar a convergência do procedimento de estimação mais rápida. Neste trabalho optou-se por adotar um vetor  $\rho^*$  nulo, de forma a verificar o desempenho do método em situações genéricas.

As Figuras 12.16, pg. 160, e 12.17, pg. 161, mostram a distribuição de resistividade estimada para a iteração n<sup>o</sup> 480 em função das alterações em  $\alpha$  e  $\beta$ ; as Figuras 12.18,

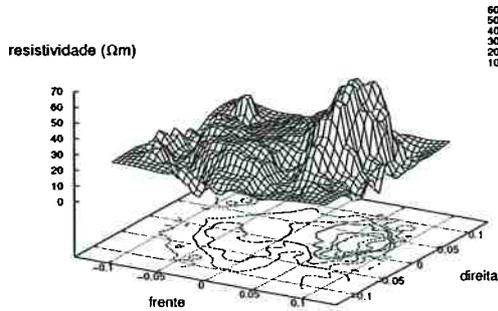
<sup>[iv]</sup>Será discutido mais adiante de um procedimento para a seleção do parâmetro  $\alpha$ .

pg. 162, exibem a evolução das estimativas para o vetor de estado nos ensaios 8.1, 8.4, 8.7 e 8.10.

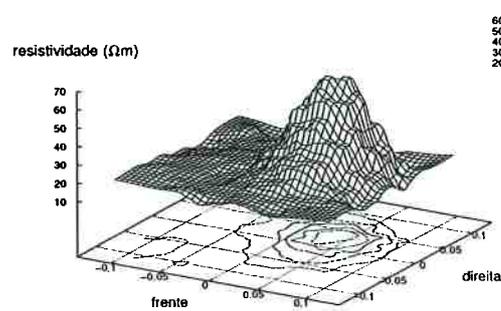
Nos ensaios 8.1 a 8.12, em que apenas o parâmetro de regularização  $\alpha$  foi alterado, nota-se que, com o aumento de  $\alpha$ , existe tendência à uniformização entre as estimativas de resistividades correspondentes aos elementos mais afastados da perturbação. Este efeito decorre da penalização imposta aos gradientes mais elevados entre as resistividades de elementos adjacentes quando se incorporam, à matriz de sensibilidade "aumentada" na eq. (6.10), informações obtidas em iterações anteriores do filtro, através da matriz de filtragem  $\mathcal{M}$ . Como consequência, a matriz de covariância do erro de estimação tende a diminuir, conforme mostra a Fig. 12.19(a), pg. 163, fazendo com que os ganhos e as correções impostas ao estado sejam menores. Além disso, em função da suavização provocada pelo parâmetro de regularização  $\alpha$  e da presença do vetor de regularização adotado  $\rho^* = 0$ , o estado estimado a cada iteração está mais "distante" do real na região ocupada pela perturbação, provocando a elevação nos resíduos normalizados, vide Fig. 12.19(b).

A comparação entre os ensaios 8.1 a 8.12 e o ensaio 7 mostra que a maior semelhança entre as curvas de evolução do estado e a distribuição de resistividade após a iteração nº 480 iteração ocorre no ensaio 8.1, consistente com a utilização do menor parâmetro  $\alpha$ . Entretanto, a presença da matriz de filtragem  $\mathcal{M}$  é capaz de eliminar as estimativas negativas para o estado apresentadas no ensaio 7, o que se explica pela ponderação efetuada na eq. (6.5). A norma espectral da matriz de covariância do erro de estimação e os resíduos normalizados para estas duas situações possuem valores  $P_{480} = 101,56$  e  $\mathbb{E}[\mathbf{r}_\nu] = -5,5 \times 10^{-4} \pm 5,8 \times 10^{-2}$  (ensaio 8.1), e  $P_{480} = 108,91$  e  $\mathbb{E}[\mathbf{r}_\nu] = -5,5 \times 10^{-2} \pm 7,2 \times 10^{-2}$  (ensaio 7). Portanto, a regularização no ensaio 8.1 reduziu o valor médio dos resíduos em 100 vezes, quando comparado aos anteriormente obtidos no ensaio 7. Este fato pode ser explicado pela ausência de valores estimados negativos.

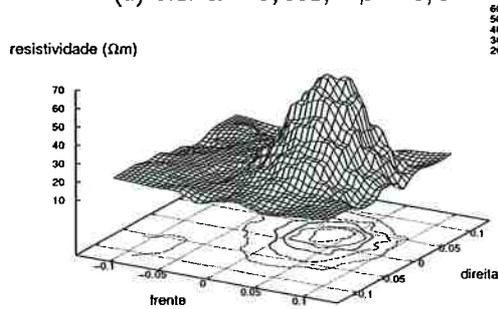
Como mencionado acima, os diversos parâmetros  $\alpha$  utilizados foram empiricamente adotados e, de acordo com a análise de sensibilidade, deve-se escolher o que produz resultados mais satisfatórios dependendo de cada caso. Por resultados satisfatórios



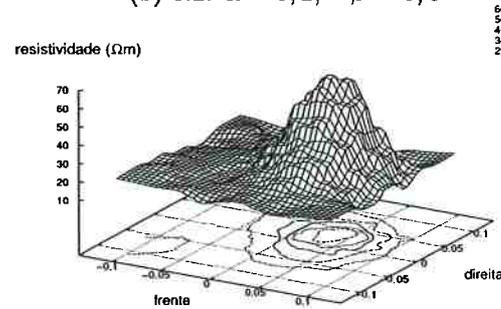
(a) 8.1:  $\alpha = 0,001$ ;  $\beta = 0,6$



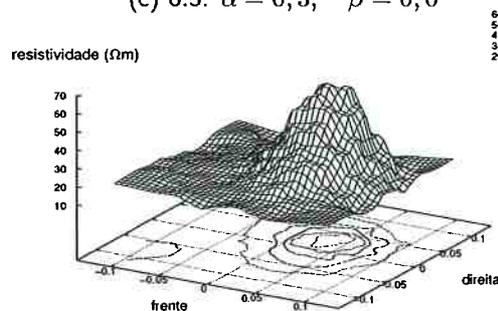
(b) 8.2:  $\alpha = 0,2$ ;  $\beta = 0,6$



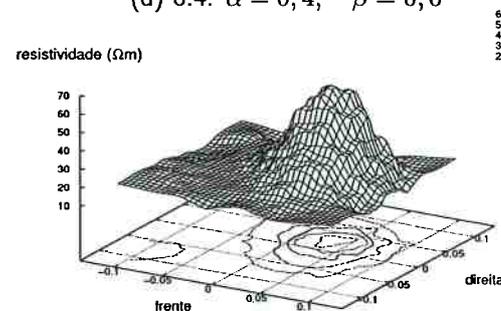
(c) 8.3:  $\alpha = 0,3$ ;  $\beta = 0,6$



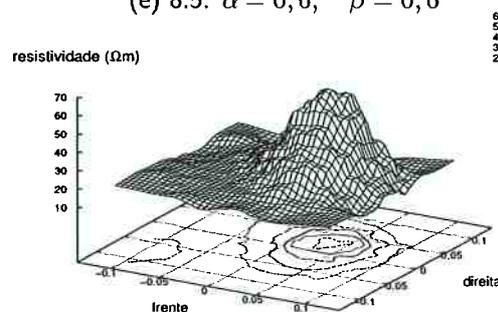
(d) 8.4:  $\alpha = 0,4$ ;  $\beta = 0,6$



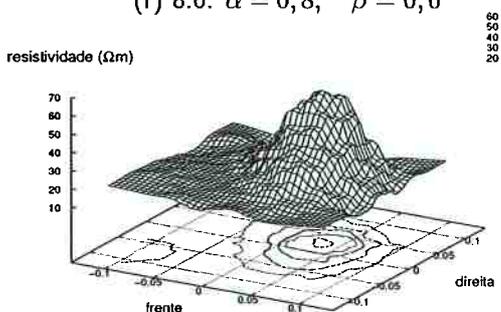
(e) 8.5:  $\alpha = 0,6$ ;  $\beta = 0,6$



(f) 8.6:  $\alpha = 0,8$ ;  $\beta = 0,6$

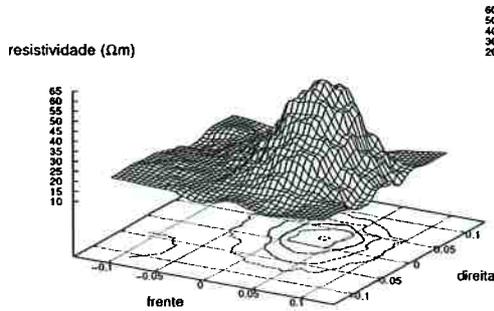


(g) 8.7:  $\alpha = 1,0$ ;  $\beta = 0,6$

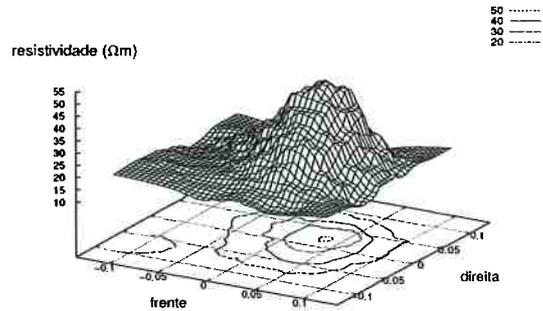


(h) 8.8:  $\alpha = 1,2$ ;  $\beta = 0,6$

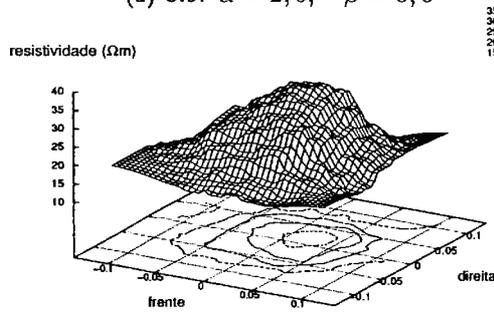
Figura 12.16: Ensaio 8: distribuição de resistividade após a iteração nº 480: sensibilidade às variações em  $\alpha$  e  $\beta$ .



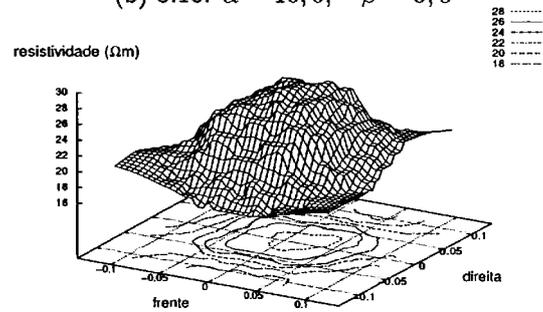
(a) 8.9:  $\alpha = 2,0$ ;  $\beta = 0,6$



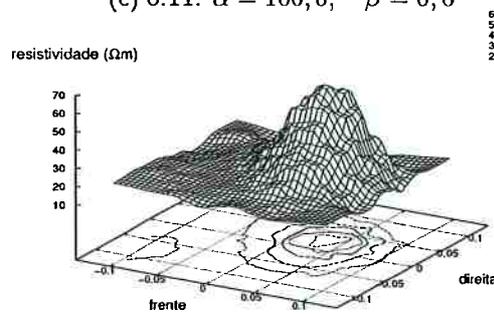
(b) 8.10:  $\alpha = 10,0$ ;  $\beta = 0,6$



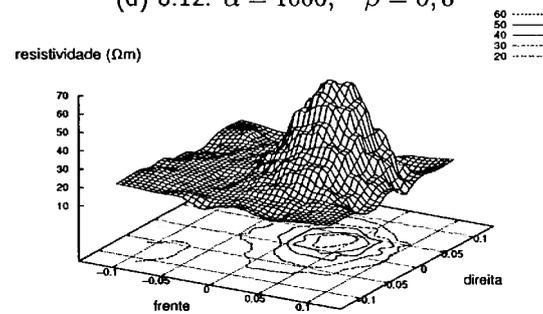
(c) 8.11:  $\alpha = 100,0$ ;  $\beta = 0,6$



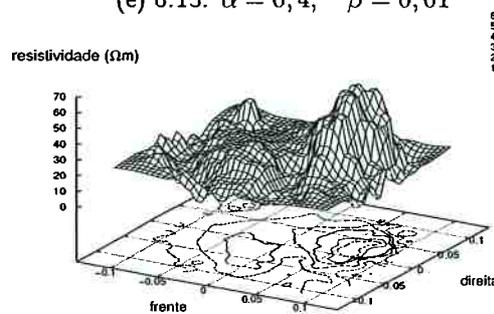
(d) 8.12:  $\alpha = 1000,0$ ;  $\beta = 0,6$



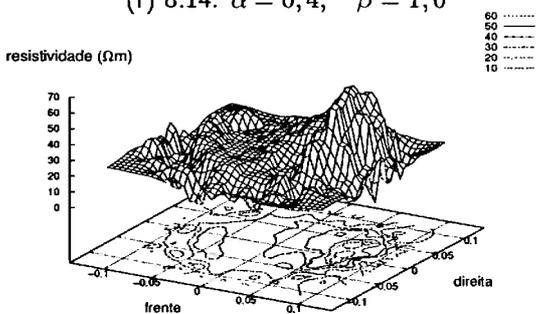
(e) 8.13:  $\alpha = 0,4$ ;  $\beta = 0,01$



(f) 8.14:  $\alpha = 0,4$ ;  $\beta = 1,0$



(g) 8.15:  $\alpha = 0,4$ ;  $\beta = 10,0$



(h) 8.16:  $\alpha = 0,4$ ;  $\beta = 100,0$

Figura 12.17: Ensaio 8: distribuição de resistividade após a iteração nº 480: continuação da Fig. 12.16.

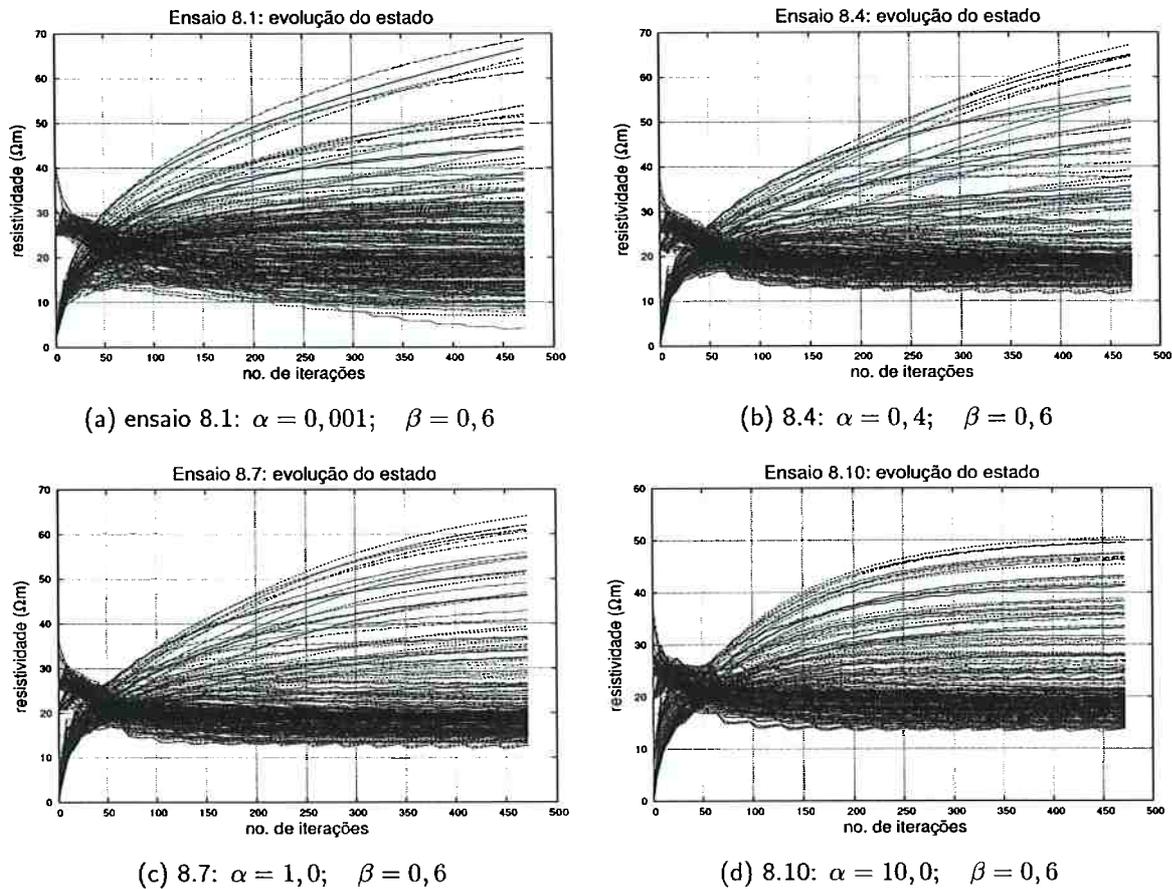


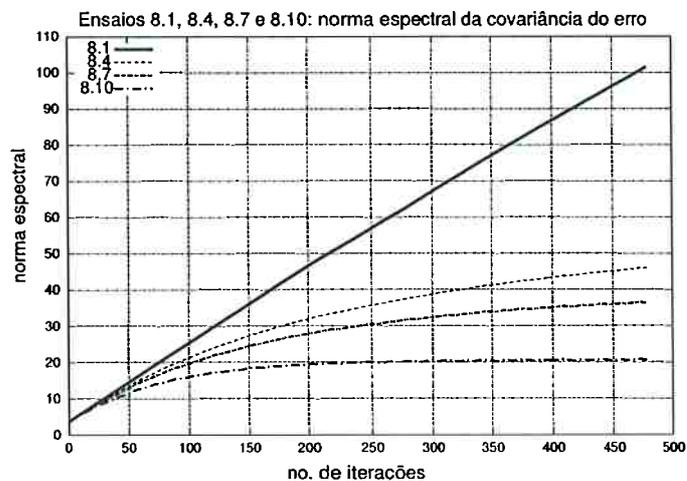
Figura 12.18: Evolução do estado estimado nos ensaios 8.1, 8.4, 8.7 e 8.10.

entendem-se aqueles para os quais o peso do fator de regularização não afete as estimativas a ponto de torná-las muito discrepantes dos valores reais. Como a estimação através do filtro de Kalman é uma forma de minimização quadrática, devem-se procurar soluções de norma mínima que pertençam ao espaço-solução desejado.

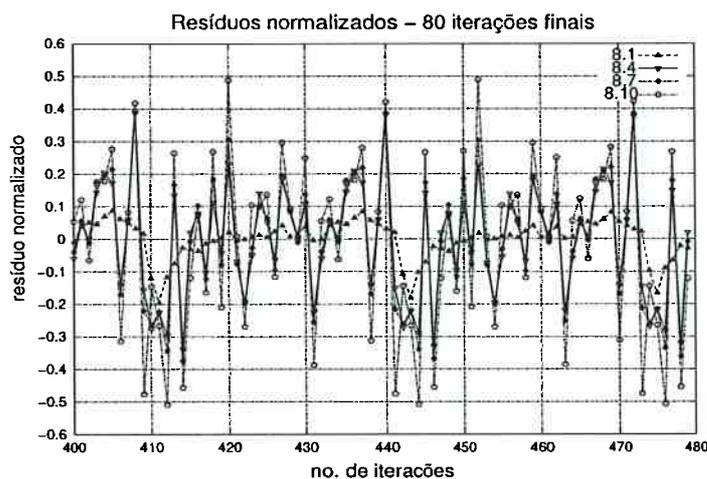
Uma maneira de fazê-lo é através do *critério da curva L*, proposto por Hansen (1992), e descrito resumidamente a seguir. Seja o problema de minimização quadrática de um sistema linear mal condicionado discreto do tipo

$$\min_{\mathbf{x}} \{ \| A\mathbf{x} - \mathbf{b} \|_2^2 + \alpha^2 \| L\mathbf{x} \|_2^2 \},$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\alpha$  é um parâmetro de regularização. Hansen (1992) mostra que, quando a norma Euclidiana do estado estimado,  $\| L\hat{\mathbf{x}} \|_2$ , é expressa como função da norma Euclidiana do resíduo de estimação,  $\| A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \|_2$ , em



(a) normas espectrais



(b) resíduos normalizados

Figura 12.19: Normas espectrais de  $P_k$  e resíduos normalizados para os ensaios 8.1, 8.4, 8.7 e 8.10.

um gráfico, a curva resultante lembra a forma de um "L". Além disso, os parâmetros  $\alpha$  que representam o melhor compromisso entre as ponderações atribuídas à solução através do modelo do sistema e à solução regularizada situam-se próximos ao vértice da referida curva (Hansen 1992).

A natureza do problema de minimização que leva às equações do filtro de Kalman sugere empregar-se aqui o mesmo critério na avaliação quantitativa dos efeitos causados pelo parâmetro de regularização  $\alpha$ . A analogia entre as matrizes  $A$  e  $L$  acima com as

matrizes "aumentada" de sensibilidade  $\mathbb{H}_k^\circ$  e de filtragem  $\mathcal{M}$  (eq. 6.7), e dos vetores  $x$  e  $b$  com os vetores do estado estimado  $\hat{\rho}$  e "aumentado" de observação  $z^\circ$  da eq. (6.10), leva à elaboração de um gráfico como o da Fig. 12.20, que contém a norma Euclidiana da estimativa  $\|\mathcal{M}\hat{\rho}_k\|_2$ , em função da norma Euclidiana do resíduo,  $\|z^\circ - \mathbb{H}_k^\circ(\hat{\rho}_k)\hat{\rho}_k\|_2$ , curva obtida com o parâmetro de filtragem  $\beta = 0,6$ .

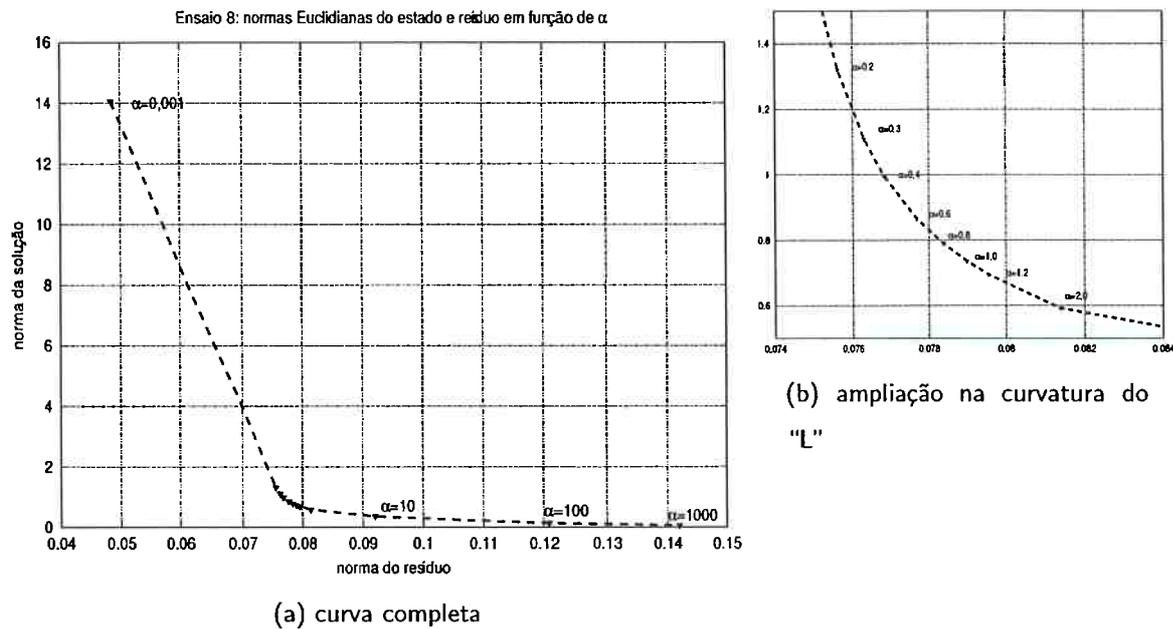


Figura 12.20: Normas Euclidianas de  $\mathcal{M}\hat{\rho}_k$  e  $z^\circ - \mathbb{H}_k^\circ(\hat{\rho}_k)\hat{\rho}_k$  em função de  $\alpha$ .

No referido gráfico pode-se observar que, para  $\alpha < 0,2$ , o modelo do sistema-observação prevalece, resultando em estimativas (imagens) que denotam a existência de gradientes elevados de resistividade entre elementos adjacentes; quando  $\alpha > 0,8$  ocorre o inverso: o efeito de suavização introduzido pelo parâmetro de regularização torna os gradientes entre as estimativas do estado menores, porém introduz erros que se refletem no aumento da norma do resíduo. Finalmente, no intervalo  $0,2 \leq \alpha \leq 0,8$  há uma região de transição que, segundo o critério da curva L, em problemas teóricos denota as soluções nas quais o compromisso entre os erros introduzidos pela regularização e os erros decorrentes de ruído nos dados produz os melhores resultados, o que é confirmado pelas figuras 12.16(b), (c) e (d) e 12.18(b).

A sensibilidade do problema à variação no parâmetro de filtragem  $\beta$  também pode

ser quantificada levando-se em conta os resultados do critério da curva L, permitindo-se a seleção de um parâmetro  $\alpha$  ótimo para efetuarem-se os ensaios. O parâmetro escolhido é  $\alpha = 0,4$ . Teoricamente, é possível prever-se o comportamento das estimativas calculando-se, na eq. (6.5)

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \rho_j^B = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\beta \rho_j + \rho_a^j + \rho_b^j + \rho_c^j}{\beta + 3} = \frac{\rho_a^j + \rho_b^j + \rho_c^j}{3}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \rho_j^B = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\beta \rho_j + \rho_a^j + \rho_b^j + \rho_c^j}{\beta + 3} = \rho_j,$$

o que atesta que valores elevados de  $\beta$  irão produzir resultados em que a atenuação é pequena. As figuras 12.17(e), (f), (g) e (h) corroboram esta afirmação. Cabe notar ainda que, no ensaio 8.16, com  $\beta = 100$ , embora o efeito do filtro passa-alta seja insuficiente para evitar gradientes de resistividade elevados entre elementos adjacentes que ocupam regiões alheias à perturbação, a ponderação efetuada na eq. (6.5), em conjunto com a regularização de Tikhonov, impedem que a resistividade de qualquer elemento assumam valores negativos durante o procedimento de estimação, conforme mostra a Fig. 12.21(a), de evolução do estado para o ensaio 8.16.

Os resíduos normalizados correspondentes às 80 iterações finais obtidos nos ensaios 8.13 a 8.16 estão na Fig. 12.21(b) e possuem, respectivamente, os seguintes valores médios:

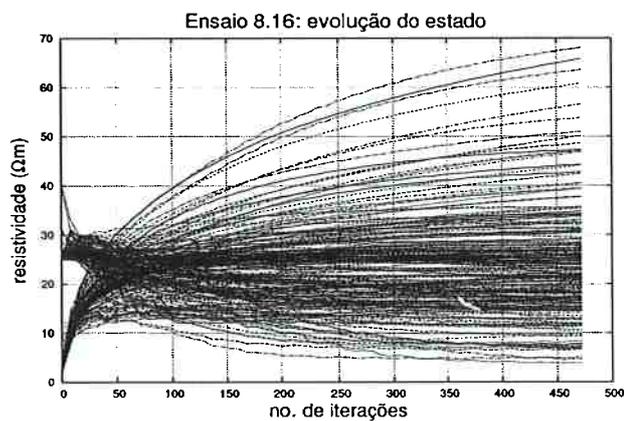
$$-8,7 \times 10^{-3} \pm 1,9 \times 10^{-1}, \quad -4,9 \times 10^{-3} \pm 1,7 \times 10^{-1},$$

$$-1,8 \times 10^{-4} \pm 6,2 \times 10^{-2} \text{ e } 5,9 \times 10^{-3} \pm 4,2 \times 10^{-2}.$$

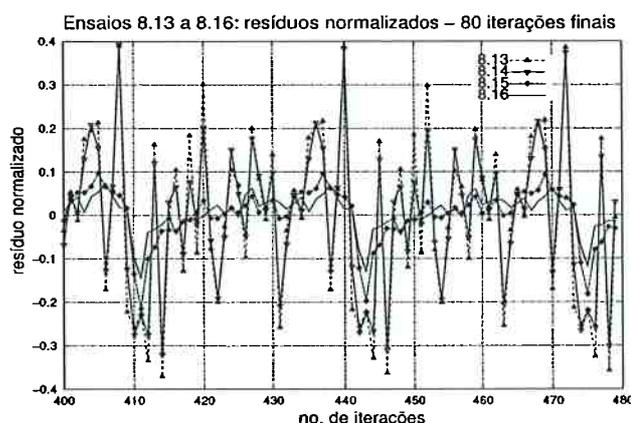
Em nenhum dos casos o requisito de convergência dado pela eq. (5.45) foi satisfeito, o que é justificado pela presença do vetor  $\rho^* = \mathbf{0}$  no termo de regularização e pela diferença entre o estado estimado ao final da iteração  $n^{\circ} 480$  e o real. Deve-se salientar que, conforme teoricamente esperado, as menores amplitudes de variação do resíduo ocorrem no ensaio 8.16, em que a influência do parâmetro de filtragem  $\beta$  é menor.

Os resultados acima indicam que a utilização dos procedimentos de filtragem e regularização podem, de acordo com o grau de informação *a priori* de que se disponha acerca da distribuição real de resistividade (ou condutividade) no domínio, diminuir os gradientes entre estimativas para elementos adjacentes. No caso em análise (localização

de uma perturbação de amplitude desconhecida), verificou-se que a escolha de um vetor nulo como termo forçante na composição do vetor aumentado de observações provoca excessiva atenuação quando o parâmetro de regularização é superior a 2. Portanto, deve-se ressaltar que o critério da curva L não necessariamente garante a convergência das estimativas para um espaço-solução plausível, pois é possível que a informação *a priori* contida no vetor de regularização  $\sigma^*$  esteja incorreta. De qualquer forma, observa-se que um benefício devido ao emprego da filtragem/regularização é a possibilidade de corrigir distorções como a ocorrência, mesmo que esporádica, de valores estimados negativos para grandezas estritamente positivas.



(a) evolução do estado



(b) resíduos normalizados

Figura 12.21: Evolução do estado para o ensaio 8.16 e resíduos normalizados para os ensaios 8.13 a 8.16.

## 12.4 Ensaio 9 - FEIAK

A convergência nos ensaios previamente descritos, sob o ponto de vista dos critérios de consistência estatística foi, de maneira geral, lenta, quando satisfatória, ou mesmo insatisfatória. Ao mesmo tempo, verificou-se a necessidade constante de modificação dos parâmetros de processamento, de forma a tentar atender aos requisitos de convergência, nas diversas variantes de filtro utilizadas. Dentre os motivos que levaram à divergência foram mencionados: a dificuldade em se obter as impedâncias no contato meio-eletrodos, devido à discretização da área ao seu redor através de uma malha grosseira de elementos finitos; a ocorrência de estimativas sem significado físico (valores negativos) de maneira não esporádica; a presença de um degrau de perturbação de amplitude elevada.

As particularidades do problema da TIE mencionadas acima levaram à ocorrência de resultados aparentemente paradoxais. Por exemplo, comparando-se as imagens obtidas nos ensaios 2 (Fig. 11.10, pg. 111) e 6 (Fig. 12.12(a), pg. 152), é inegável a superioridade da primeira, embora a análise quantitativa tenha revelado que o respectivo procedimento de estimação é estatisticamente divergente enquanto, para a segunda, há convergência.

A presente seção mostra os resultados da aplicação do filtro estendido iterado de Kalman com incorporação de covariância de ruído adaptativa (filtro FEIAK), conforme descrito na seção 5.4, na solução do problema da TIE. O objetivo é obter imagens segundo um critério estatístico,  $\min[\text{tr}(P)]$  e, ao mesmo tempo, assegurar a convergência. Utiliza-se o procedimento de estimação em duas fases e a malha de 272 elementos, agrupados em 32 RDI. O vetor inicial de estado é idêntico ao do ensaio 6,  $\rho_{0j} = 0,067 \Omega m$ ,  $j = 1 \dots 240$  (elementos internos da malha) e  $\sigma_{0j} = 0,50 (\Omega m^2)^{-1}$ ,  $j = 241 \dots 272$  (eletrodos); após a primeira seqüência, o vetor inicial de estado corresponde à última estimativa da seqüência anterior. Os demais parâmetros são relacionados na Tabela 12.4.

Realizaram-se 8 seqüências de identificação, cujos resultados são apresentados e discutidos a seguir. <sup>[v]</sup>

---

<sup>[v]</sup>O Apêndice B apresenta, em conjunto, os gráficos referentes a todas as seqüências de identificação.

Tabela 12.4: Ensaio 9: parâmetros iniciais para as fases 1 e 2

n <sup>o</sup>	seqüência				$P_0$	$Q_k, \mathbb{Q}_k$	$R$
	fase	método	$\delta$	iterações			
1	1 (eletrodo)	FEIK	0,30	96	$3,5 \times 10^{-4} I_{32}$	$7,8 \times 10^{-4} I_{32}$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
2	2 (meio)	FEIK	0,30	96	$3,5 \times 10^{-1} I_{32}$	$7,8 \times 10^{-3} I_{32}$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
3	1 (eletrodo)	FEIAK	0,30	96	$3,5 \times 10^{-4} I_{32}$	$P_{32}^a$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
4	2 (meio)	FEIAK	0,30	320	$3,5 \times 10^{-1} I_{32}$	$0,4 \times P_{32}^b$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
4a	2 (meio)	FEIAK	0,30	320	$3,5 \times 10^{-1} I_{32}$	$0,4 \times P_{32}^c$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
5	1 (eletrodo)	FEIK	0,80	96	$3,5 \times 10^{-4} I_{32}$	$0,4 \times P_{32}^d$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
6	2 (meio)	FEIAK	0,20	96	$3,5 \times 10^{-1} I_{32}$	$0,4 \times P_{32}^e$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$
6a	2 (meio)	FEIAK	0,36	96	$3,5 \times 10^{-1} I_{32}$	$0,4 \times P_{32}^f$	$2,5 \times 10^{-3} I_{32}$

<sup>a</sup> $\mathbb{Q}$  calculada com  $Q_k = 3,2 \times 10^{-2} I_{32}$ ; <sup>b</sup>com  $Q = 7,8 \times 10^{-3} I_{32}$ ; <sup>c</sup>com  $Q = 7,8 \times 10^{-3} I_{32}$ ; <sup>d</sup>com  $Q = 3,2 \times 10^{-2} I_{32}$ ; <sup>e</sup>com  $Q = 7,8 \times 10^{-1}$ ; <sup>f</sup>com  $Q = 7,8 \times 10^{-1}$

A Fig. 12.22 mostra o desempenho do filtro estendido iterado na primeira seqüência de identificação de eletrodos. Observa-se que os resíduos normalizados não atendem aos critérios de convergência, fato este corroborado pelas normas do ganho de Kalman e da covariância do erro, Figuras 12.22(a) e (b), cujos valores médios (por inspeção visual) tendem à estabilização. Justifica-se, portanto, a alternância para a fase 2 do procedimento, com a identificação do meio salino contendo o objeto de vidro.

Assim que a seqüência 2 se inicia (vide Fig. 12.23) percebe-se, durante as primeiras 30 iterações, a segregação entre dois conjuntos de regiões. As menores estimativas correspondem às regiões da coroa externa, ao passo que as curvas cujos gradientes são positivos representam as regiões internas. A segregação entre os dois grupos de RDI nos primeiros ciclos condiz com o comportamento dos ganhos de Kalman, que apresentam maior variação nas iterações iniciais para, posteriormente, tornarem-se limitados. Fato semelhante ocorre com a norma espectral de  $P_k$ , cujo gradiente positivo, porém decrescente, indica o "fechamento" do filtro às novas observações. Em conseqüência disso, os resíduos denotam a divergência do processo.

As duas seqüências iniciais de estimação possuem, em comum, as características de

um processo que, se levado adiante sem que quaisquer parâmetros sejam modificados, ou *adaptados*, caminha para a divergência. Nas três próximas seqüências recorre-se ao filtro iterado com ruído adaptativo para tentar reverter esta tendência. Além disso, baseando-se na argumentação à pg. 142 (seção 12.1) e nos correspondentes resultados do ensaio 6 empregam-se, para o processo, matrizes iniciais de covariância não-diagonais, de acordo com a eq. 12.1, pg. 142.

Os resultados da modificação para a fase 1 podem ser observados na seqüência 3, Fig. 12.24. Até aproximadamente a iteração nº 40, o procedimento apresentava comportamento divergente, com as estimativas do estado praticamente constantes e ganhos limitados. A descontinuidade ocorrida neste instante demonstra a ação corretiva do filtro adaptativo que, embora cause a presença de algumas estimativas negativas, permite ao

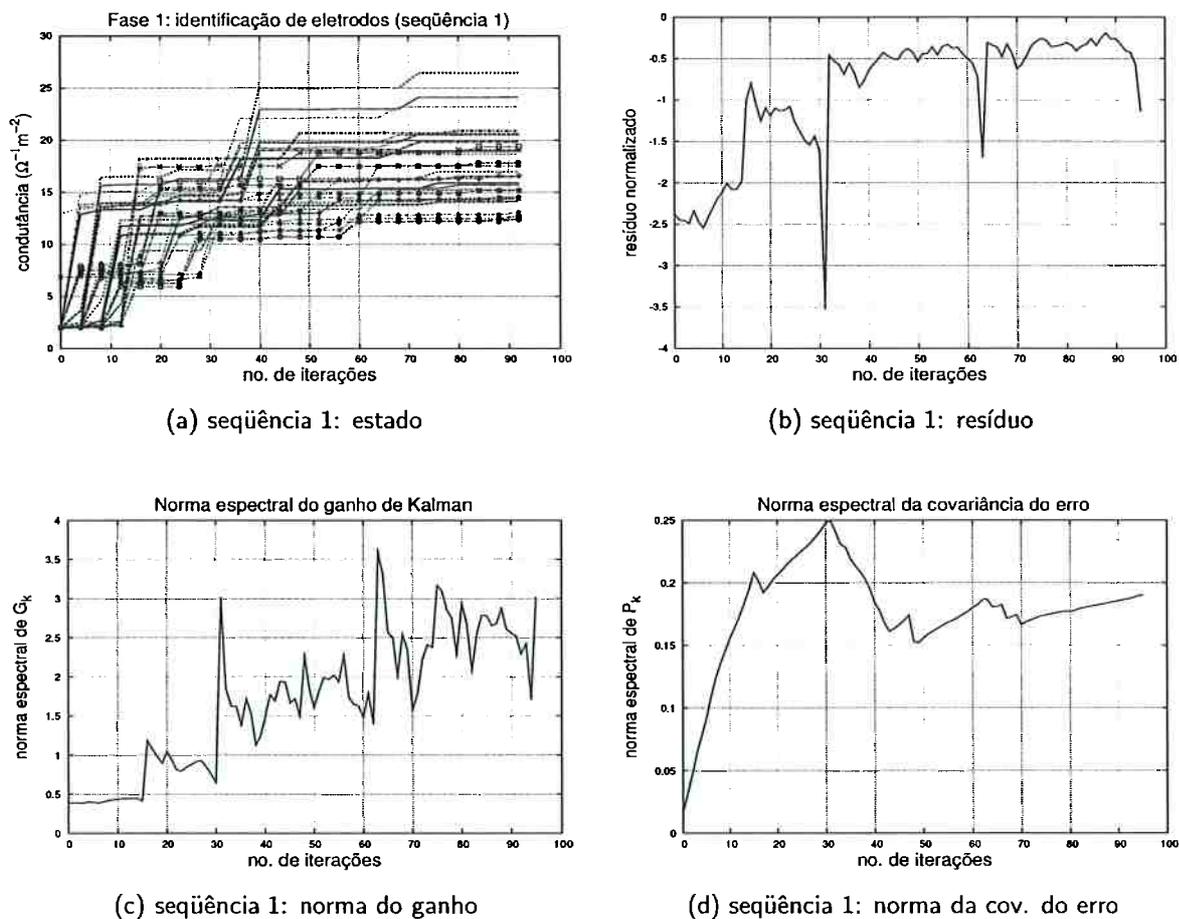


Figura 12.22: Ensaio 9, seqüência 1: evolução do estado, resíduo e normas de  $G_k$  e  $P_k$ .

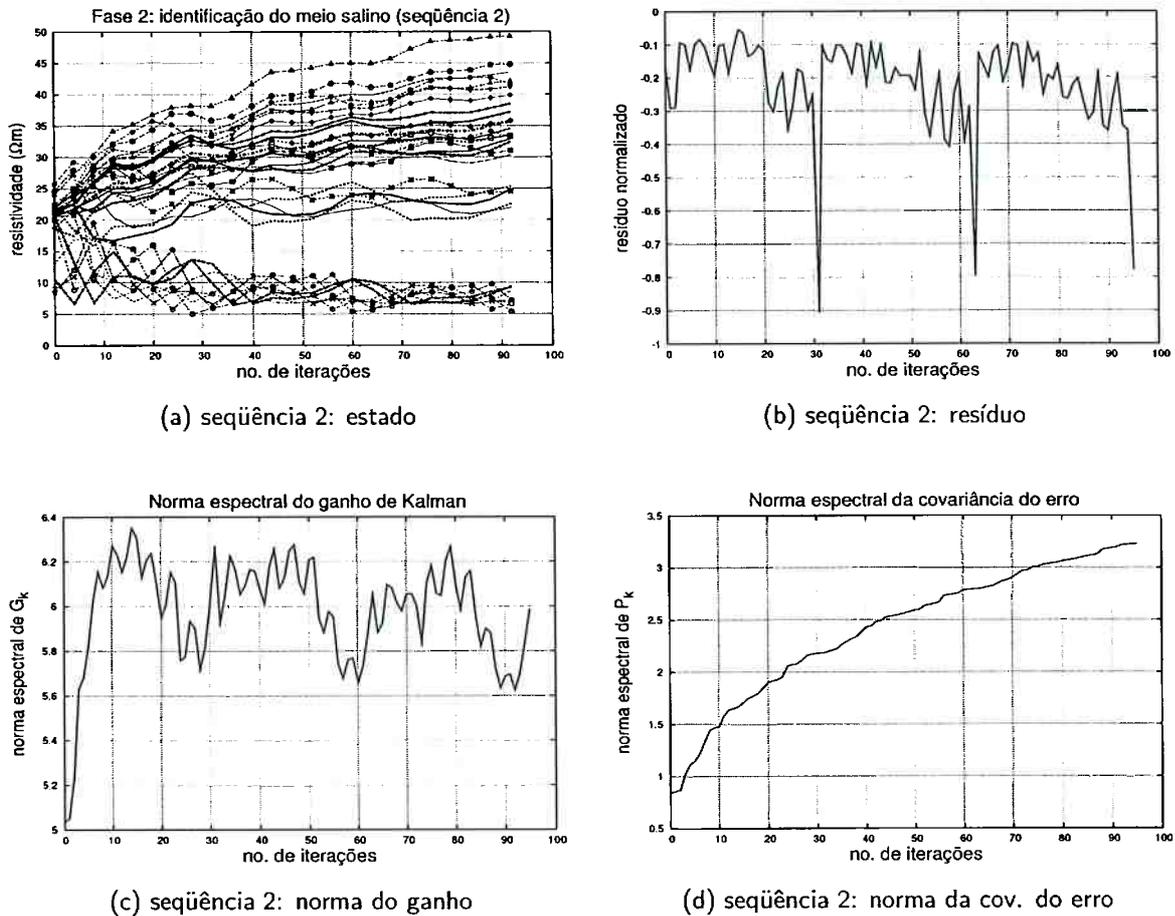


Figura 12.23: Ensaio 9, seqüência 2: evolução do estado, resíduo e normas de  $G_k$  e  $P_k$ .

filtro tornar-se novamente sensível às observações. Como resultado, a covariância do erro se eleva, o que afeta as novas estimativas e o resíduo normalizado. Salienta-se que não há consistência entre os resíduos e sua estatística, fato esperado pois a distribuição de resistividade da solução identificada na seqüência anterior é muito distinta da real, na região ocupada pelo objeto.<sup>[vi]</sup>

A implementação do ruído adaptativo à fase 2, nas seqüências 4 e 4a, multiplica os valores máximos das normas do ganho de Kalman e da matriz de covariância do erro atingidas na seqüência 2 respectivamente em 6 e 20 vezes (valores aproximados). Os

<sup>[vi]</sup>Esta afirmação fundamenta-se nos resultados obtidos nos ensaios 1, 2 e 6. Pretende-se que seja comprovada nesta série de ensaios.

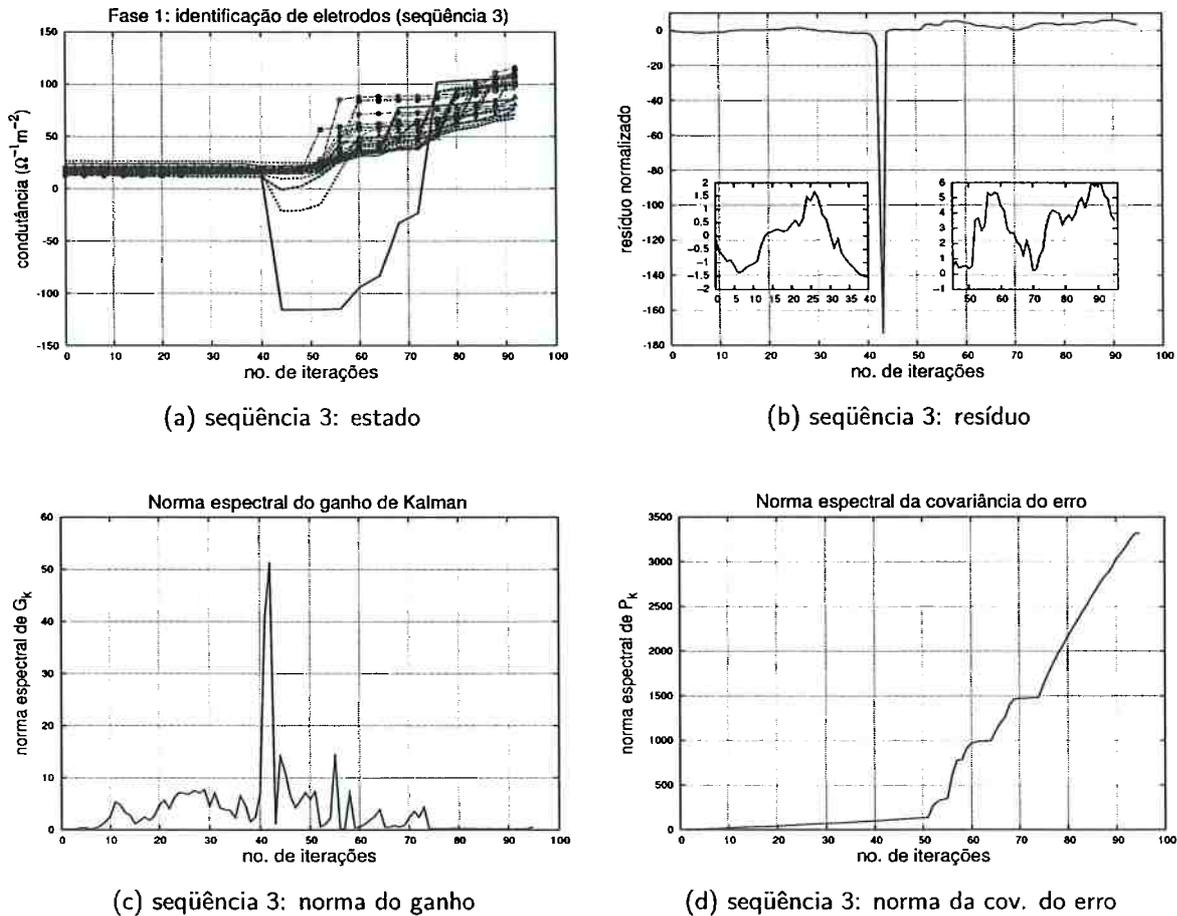


Figura 12.24: Ensaio 9, seqüência 3: evolução do estado, resíduo e normas de  $G_k$  e  $P_k$ .

resíduos apresentam a seguinte estatística:

$$\mathbb{E}[r_\nu] = 0,0091; \quad (E[r_\nu^2] - E^2[r_\nu])^{1/2} = 0,091 \text{ ensaio 4}$$

$$\mathbb{E}[r_\nu] = 0,0046; \quad (E[r_\nu^2] - E^2[r_\nu])^{1/2} = 0,078 \text{ ensaio 4a,}$$

Verifica-se, portanto, que atendem aos critérios de convergência. As matrizes de covariância do erro estabilizam-se em torno de valores médios após cerca de 100 iterações, coerentes com a argumentação de Guo (1990). Entretanto, a convergência do processo em duas fases como um todo ainda não foi atingida, devido aos resultados da seqüência 3. Assim, retorna-se à estimação das condutâncias dos eletrodos.

Na seqüência 5 emprega-se o filtro iterado, sem incorporação de ruído adaptativo. A Fig. 12.27(b) mostra que os resíduos normalizados tornam-se consistentes com sua

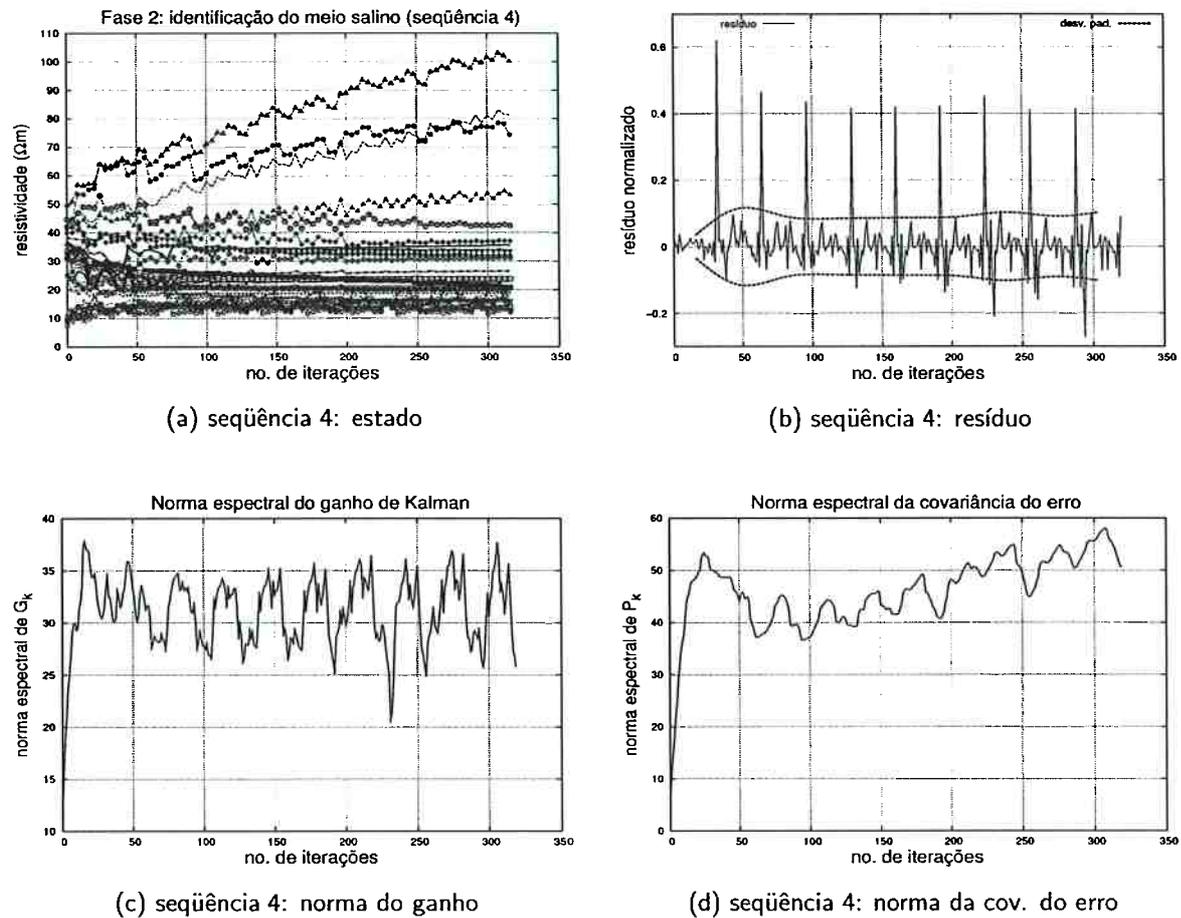


Figura 12.25: Ensaio 9, seqüência 4: evolução do estado, resíduo e normas de  $G_k$  e  $P_k$ .

estatística (valor médio=0,0091; desvio-padrão=0,074) após a iteração nº 32, instante que coincide com o início da ocorrência de maiores ganhos do filtro.

Os resultados obtidos na seqüência 5 devem-se às melhores estimativas efetuadas nas seqüência 4 e 4a, estatisticamente convergentes. Como ambas as fases do procedimento mostram-se convergentes, pode-se considerar o procedimento encerrado, com as condutâncias nas interfaces entre os eletrodos e o meio identificadas na seqüência 5, e a melhor "imagem" do copo a distribuição de resistividade no meio salino ao final da seqüência 4a. As condutâncias dos eletrodos são convertidas em impedâncias e relacionadas na Tabela 12.5. O valor médio é  $\bar{\rho} = 0,014 \Omega m$  e o desvio-padrão é  $0,006 \Omega m$ .

A Fig. 12.30(a) revela que, embora a RDI 14 (uma das que abrigam a maior parte

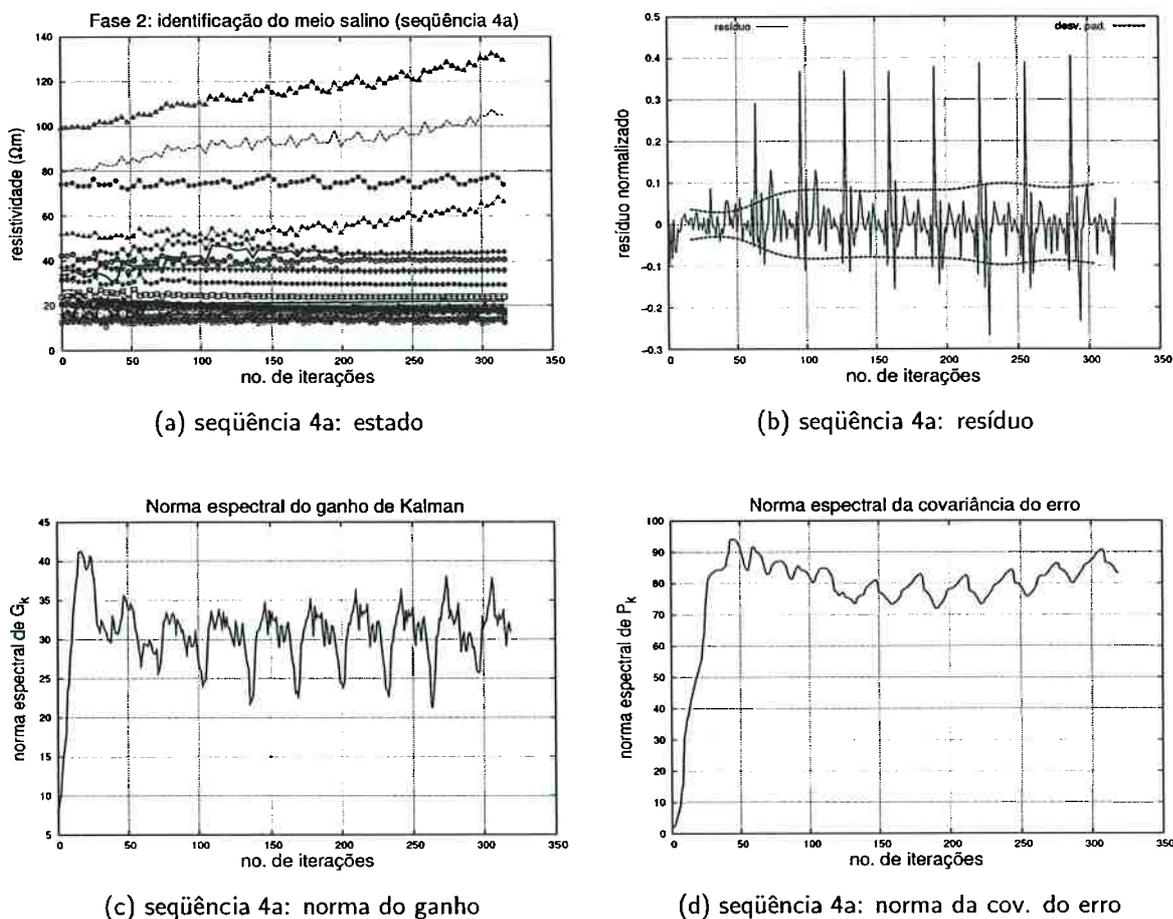


Figura 12.26: Ensaio 9, seqüência 4a: evolução do estado, resíduo e normas de  $G_k$  e  $P_k$ .

do objeto) possua resistividade  $\simeq 127 \Omega m$ , que a destaca das demais, as regiões 6, 8 e 21 também apresentam valores elevados (respectivamente  $\simeq 35$ ,  $\simeq 43$  e  $\simeq 43 \Omega m$ ), dificultando assim o discernimento entre presença e ausência da perturbação. Dessa forma, sob o ponto de vista da TIE e no caso em questão, a convergência estatística, por si só, não foi capaz de garantir uma imagem que defina o objeto. Por este motivo, optou-se por continuar o procedimento de estimação repetindo somente a fase 2.

As Figuras 12.28 e 12.29 exibem a evolução do estado, resíduos e normas do ganho e covariância do erro para as seqüências 6 e 6a. Na seq. 6, as curvas com gradientes positivos representam as regiões 14 (valor final  $\simeq 200 \Omega m$ ), 16 ( $\simeq 150 \Omega m$ ), 15 ( $\simeq 100 \Omega m$ ) e 13 ( $\simeq 90 \Omega m$ ). Nota-se a ação do filtro adaptativo pelo aumento na dispersão dos resíduos em relação à seq. 4a (0,081 contra 0,078), porém mantendo a

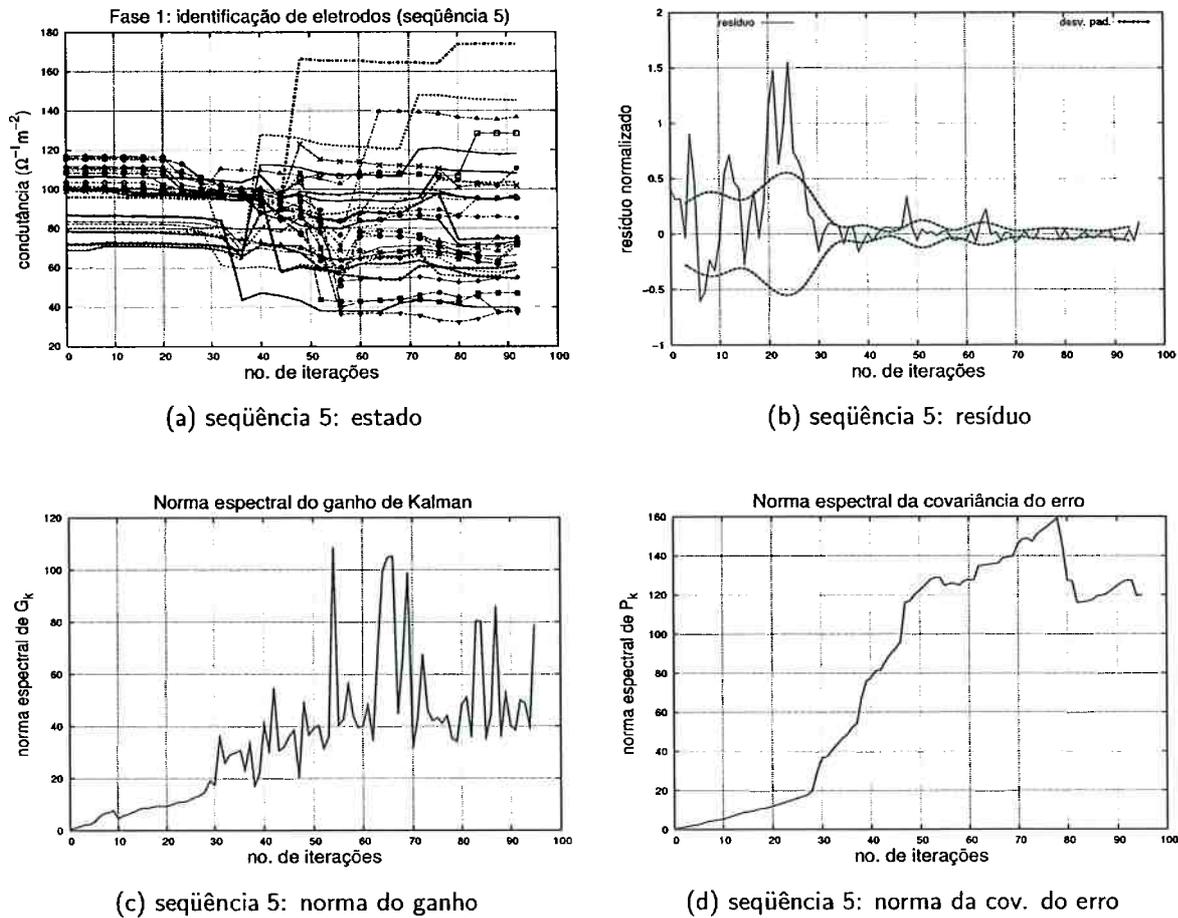


Figura 12.27: Ensaio 9, seqüência 5: evolução do estado, resíduo e normas de  $G_k$  e  $P_k$ .

consistência.

Tabela 12.5: Impedâncias de contato dos eletrodos ( $\Omega m^2$ )

ELETRODO	1	2	3	4	5	6	7	8
IMPEDÂNCIA	0,0099	0,0141	0,0078	0,0105	0,0212	0,0270	0,0133	0,0181
ELETRODO	9	10	11	12	13	14	15	16
IMPEDÂNCIA	0,0259	0,0117	0,0139	0,0136	0,0090	0,0141	0,0067	0,0098
ELETRODO	17	18	19	20	21	22	23	24
IMPEDÂNCIA	0,0158	0,0145	0,0157	0,0105	0,0253	0,0187	0,0070	0,0085
ELETRODO	25	26	27	28	29	30	31	32
IMPEDÂNCIA	0,0104	0,0098	0,0093	0,0164	0,0168	0,0133	0,0130	0,0058

Na seqüência 6a, o efeito do filtro adaptativo faz com que as regiões onde o objeto de vidro efetivamente está presente, entre as iterações 70 e 80, gradientes positivos e

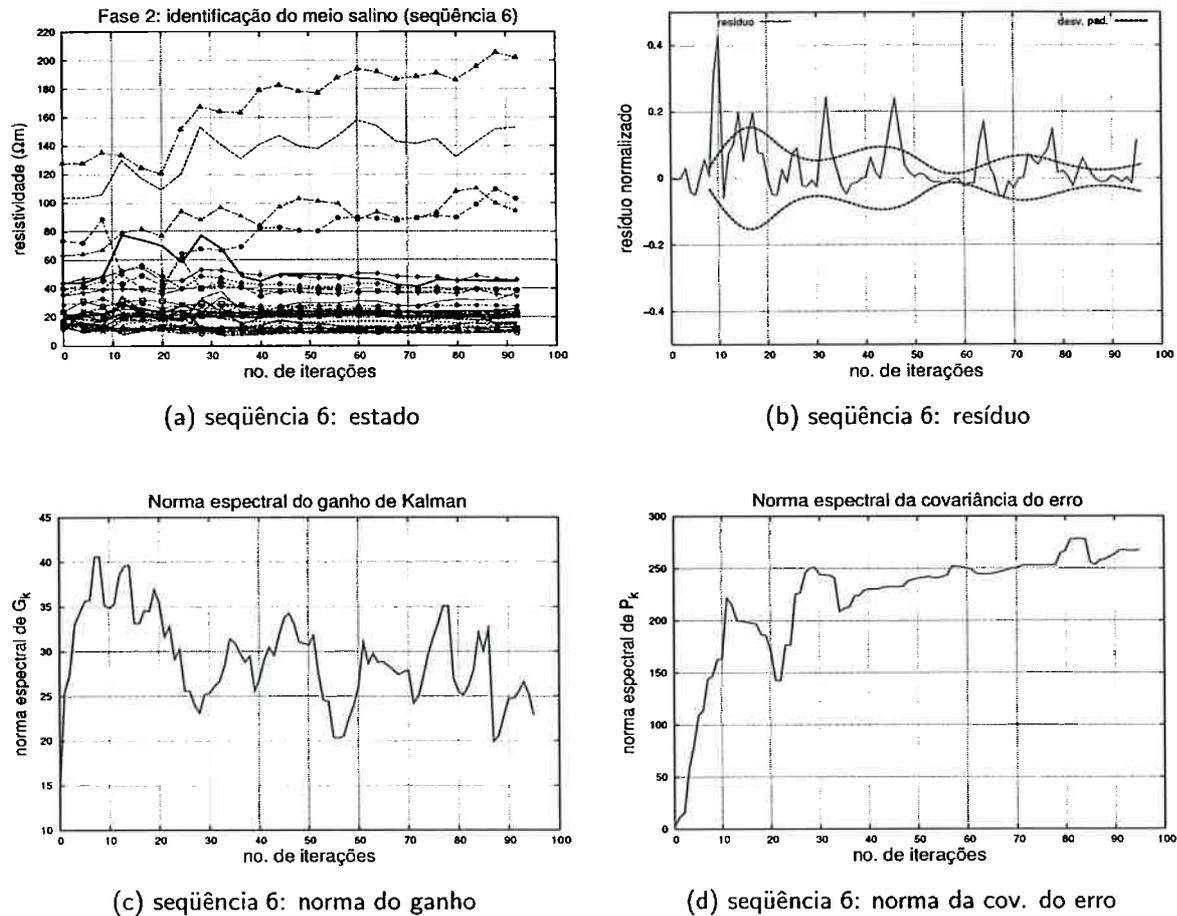


Figura 12.28: Ensaio 9, seqüência 6: evolução do estado, resíduo e normas de  $G_k$  e  $P_k$ .

crescentes, fato corroborado pelo aumento na norma da matriz de covariância do erro, que mantém o filtro sensível às novas medidas. Os resíduos normalizados mantêm-se coerentes com sua estatística,  $E[r_\nu] = 0,042$ ;  $(E[r_\nu^2] - E^2[r_\nu])^{1/2} = 0,11$ , confirmando que o filtro fornece estimativas convergentes para uma vizinhança do estado verdadeiro. O estado ao final da seqüência 6a possibilita a visualização do objeto, como mostra a Fig. 12.30(b).

Cabe observar que, nas iterações 88, 89 e 90, as estimativas para a variável de estado RDI 31 foram negativas, com valores  $-0,05$ ,  $-1,34$  e  $-0,5 \Omega m$ , que não chegaram a prejudicar o desempenho do processo. A regularização descrita na seção 6.2 pode impedir que isso ocorra, conforme mostram os resultados do ensaio 8. No entanto, uma questão permanece: que vetor forçante  $\rho^*$  deve ser incorporado ao problema de

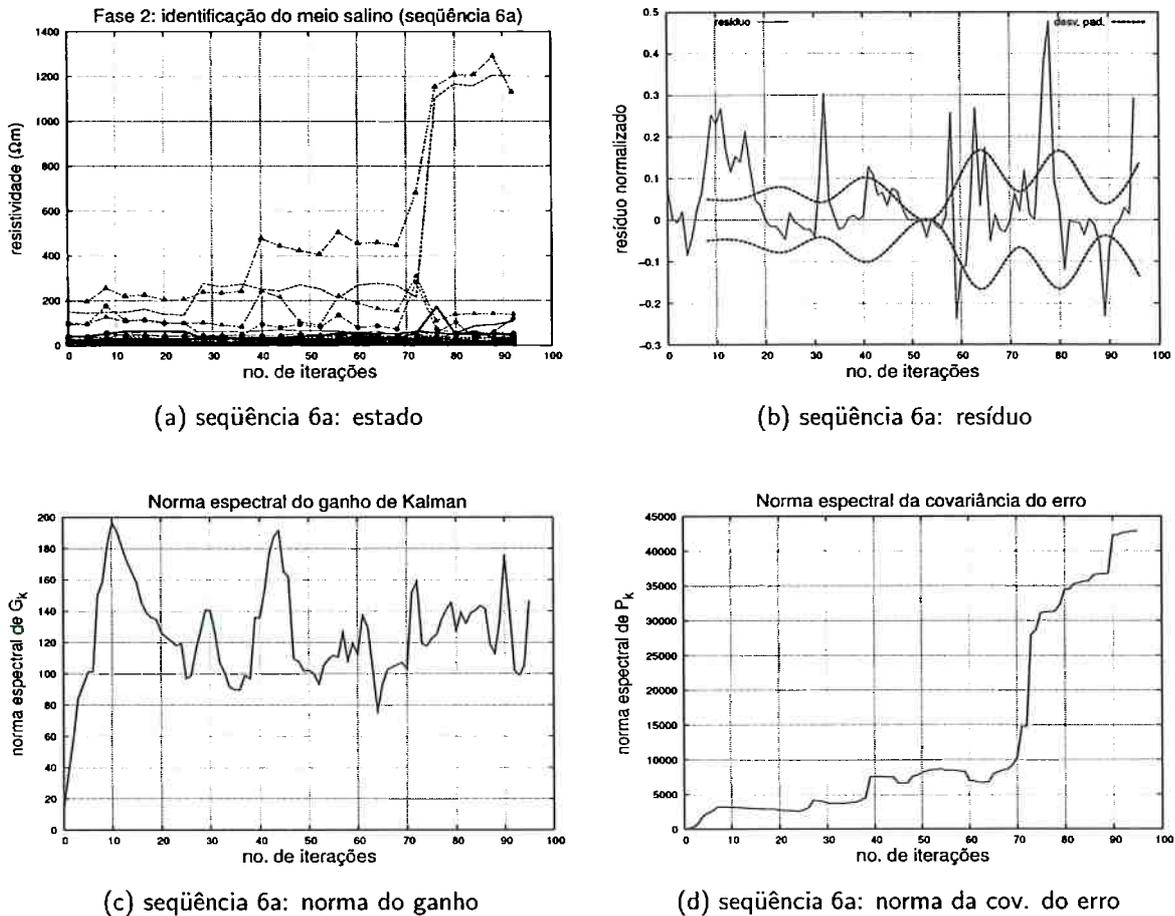


Figura 12.29: Ensaio 9, seqüência 6a: evolução do estado, resíduo e normas de  $G_k$  e  $P_k$ .

minimização quadrática de modo a fazer com que os estados estimados pelo filtro sejam convergentes para a vizinhança do estado real?

No ensaio 8, mostrou-se a sensibilidade do estimador à regularização obtida com os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Uma idéia que surge quanto ao vetor forçante é torná-lo *adaptativo*. O método apresentado a seguir é uma opção a ser estudada posteriormente, à qual sugere-se denominar FEIARK (Filtro Estendido Iterado Adaptativo Regularizado de Kalman):

1. Em primeiro lugar, emprega-se o FEIAK durante algumas iterações para que se determine quão "distante" o estado inicial arbitrado está do real. Verificam-se as evoluções temporais do estado, resíduo, ganho e covariância do erro;
2. dependendo dos valores encontrados, efetuam-se correções e reinicia-se o processo;

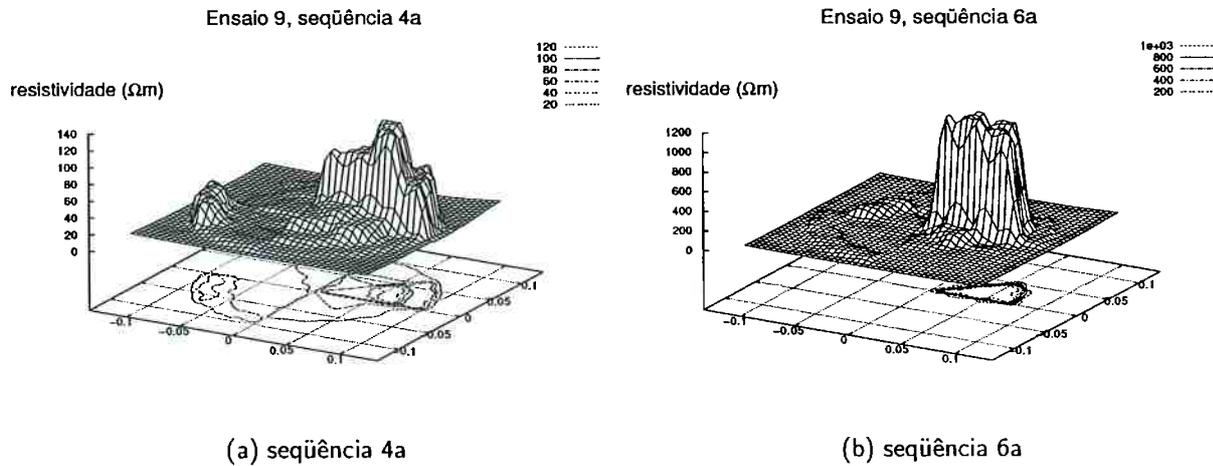


Figura 12.30: Ensaio 9: distribuição de resistividade após as seqüências 4a e 6a.

3. quando os resíduos se tornarem consistentes com sua estatística, inicia-se a incorporação do vetor forçante, através do FEIARK. Sugere-se que a distribuição forçante inicial represente uma fração do último estado estimado até a seqüência do item anterior;
4. à medida que novas estimativas se sucedam e desde que os resíduos continuem consistentes, corrige-se o vetor forçante introduzido via regularização. Teoricamente, isto fará com que a convergência seja mais rápida.

Para que a convergência seja garantida, a cada etapa é necessário verificar o comportamento das normas do ganho, covariância do erro e as estatísticas do resíduo normalizado, efetuando a sintonia quando necessário. A automatização do processo é uma sugestão de desenvolvimento.

# Capítulo 13

## Conclusões e Sugestões de Desenvolvimento

Neste trabalho, foram implementadas três versões do filtro de Kalman como estimador de estado aplicado à solução do problema inverso da tomografia por impedância elétrica. Utilizando o filtro estendido (FEK), propôs-se um novo método para a estimação conjunta das condutividades/resistividades do meio e das impedâncias de contato meio-eletrodos, genericamente denominado estimação parcial do estado, ou estimação em duas fases. As outras duas versões, o filtro estendido iterado (FEIK) e o filtro estendido iterado com a inclusão de ruído adaptativo (FEIAK), aplicados conjuntamente ao procedimento de estimação parcial do estado, representam outras contribuições da tese. Além disso, quantificou-se o efeito do processamento seqüencial de dados (FEKS) sobre as estimativas fornecidas pelo FEK e, por fim, buscou-se garantir a convergência dos métodos de estimação através da consistência entre os resíduos e sua estatística esperada.

Os procedimentos descritos foram avaliados efetuando-se simulações numéricas e o processamento de dados provenientes de uma bancada experimental. Apresentam-se, a seguir, conclusões específicas sobre cada método.

Empregando-se o filtro estendido de Kalman como estimador de estados verificou-se, em simulações numéricas com uma malha de elementos finitos semelhante a um corte transversal de um tórax humano, que o aumento no número de parâmetros (condutividades de cada elemento da malha) visando a melhoria na resolução espacial das imagens, provoca maior propagação de ruído numérico. Constatou-se ainda que, quando os gradientes de condutividade entre regiões adjacentes aumentam, o efeito acima é agravado.

Obtiveram-se, nestes ensaios, algumas estimativas de condutividades com valores negativos, resultados sem significado físico. O fato, decorrente de correções efetuadas pelo filtro a variáveis de estado cujos valores de condutividade sejam positivos, porém muito próximos de zero, mostra que, dependendo da ordem de grandeza das condutividades a serem estimadas, é mais conveniente, do ponto de vista numérico, formular o problema em termos da propriedade recíproca, a resistividade.

A validação dos procedimentos foi efetuada em bancada experimental. Com o filtro estendido processando lotes de medidas (formulação padrão) determinaram-se, em primeiro lugar, as condutâncias no contato meio-eletrodo para uma solução salina com distribuição de condutividade/resistividade homogênea. Provocou-se uma perturbação no meio imergindo um objeto (copo de vidro) na solução e identificaram-se tanto as condutâncias na interface meio-eletrodo quanto a distribuição de resistividade na solução através do procedimento de estimação parcial ou estimação em duas fases, inédito na TIE, e justificado com base no Teorema do Ponto Fixo.

As condutâncias de contato estimadas com o procedimento em duas fases, com a malha de 272 elementos, e aquelas obtidas para um meio homogêneo, com a malha de 182 elementos, possuem discrepância média de aproximadamente 34%. Verifica-se, através do FEK processando dados em lotes, o impacto causado na identificação somente da perturbação no meio homogêneo, matematicamente uma função degrau, quando se utilizam estes dois conjuntos de condutâncias como informação *a priori*. Observa-se que a discrepância máxima entre os dois vetores finais de estado é de 1,5%. Portanto, o procedimento de estimação em duas fases é capaz de identificar a contento os parâmetros da interface; além disso, as estimativas do estado geradas da última maneira, com a malha de 272 elementos, apresentaram-se estatisticamente convergentes, algo que não havia ocorrido na identificação com a malha menos refinada.

As estimativas para a perturbação (copo de vidro) no meio homogêneo obtidas com o filtro estendido iterado, com a malha de 182 elementos no ensaio 2 apresentaram, em média, valores de resistividade 70% superiores àqueles resultantes da aplicação do filtro estendido. A única desvantagem do FEIK em relação ao FEK relaciona-se ao tempo de processamento, cerca de 2,5 vezes maior sob as mesmas condições, devido à re-

linearização da matriz  $Y$ , inerente ao FEIK; sua utilização está, portanto, condicionada à relação rapidez/exatidão das estimativas, devendo ser analisada em cada caso. Em aplicações de monitoramento da função pulmonar, por exemplo, poderia ser utilizado como um "método de refinamento", a partir de estimativas menos corretas, porém mais rápidas, resultantes de outros procedimentos.

A consequência lógica dos resultados apresentados pelo FEIK no ensaio 2 deveria ser a verificação de seu desempenho quando associado à técnica de inclusão de ruído adaptativo e ao procedimento de estimação em duas fases; assim, avaliou-se o FEIAK com a malha de 272 elementos, no ensaio 9. Os estados estimados neste ensaio, para as variáveis que representam os eletrodos e o meio salino, possuem resíduos estatisticamente consistentes; ao mesmo tempo, a imagem gerada permite visualizar o objeto de vidro na posição correta. Até o presente, não se tem conhecimento da divulgação de resultados cujas estimativas atendam a critérios quantitativos de convergência, neste tipo de aplicação.

O paradigma do processamento seqüencial de dados foi abordado. Os resultados com o FEK seqüencial e em lote podem ser considerados equivalentes (discrepância máxima de 2,2%) na identificação do degrau de perturbação no meio homogêneo. Este fato é contrário ao que seria teoricamente esperado, ou seja, uma melhoria substancial nas estimativas em relação ao processamento em lote, devido à menor propagação de ruído numérico com a inversão de escalares em vez de matrizes da dimensão do vetor de medidas. Demonstrou-se que o ocorrido deve-se à não-singularidade da matriz de informação.

A incorporação da filtragem de altas frequências através de uma regularização generalizada de Tikhonov, implementada em conjunto com o FEK, exibiu resultados que, além de corroborar trabalhos similares (Vauhkonen, Karjalainen & Kaipio 1998, Kim et al. 2001), solucionou o problema, aqui levantado, da obtenção de estimativas de condutividade/resistividade negativas. Utilizou-se o *critério da curva L* para a seleção de parâmetros de regularização. O objeto imerso foi identificado.

Devido à maneira (derivação parcial simbólica) como a matriz de sensibilidade é calculada nos algoritmos utilizados, os métodos que demandam maior carga computaci-

onal (filtro estendido iterado, filtro estendido iterado adaptativo e filtro estendido com regularização) não foram capazes de fornecer imagens em tempo real, principalmente quando o número de parâmetros a serem estimados é elevado, visando melhorar a resolução espacial. O papel investigativo da tese, no entanto, foi cumprido, pois atesta a viabilidade técnica dos procedimentos descritos na solução de problemas inversos, particularmente na TIE, e representa parte do esforço empregado na procura de algoritmos mais eficientes. A otimização das soluções numéricas aqui empregadas cabe a futuros desenvolvimentos.

Uma das possibilidades de trabalho consiste em integrar todas as técnicas cujos benefícios já tenham sido isoladamente demonstrados, como a filtragem de altas frequências em conjunto com a regularização de Tikhonov, o aproveitamento das características de matrizes esparsas e a estimação de parâmetros em duas fases através do filtro de Kalman, ao domínio discretizado em elementos finitos tridimensionais. Em teoria, malhas tridimensionais resultam em sistemas lineares melhor condicionados, possibilitando o aumento no número de parâmetros a serem estimados com menor propagação de ruído numérico.

A melhoria na qualidade e na convergência das estimativas passa, necessariamente, pela efetiva obtenção de um modelo dinâmico do sistema mais condizente com a realidade, em substituição ao *passeio aleatório*, atualmente empregado na chamada estimação dinâmica na TIE, e sua incorporação às variantes do filtro de Kalman já desenvolvidas. Por exemplo, pode-se investigar o uso, na equação de evolução do estado, de matrizes que respeitem o fenômeno de condução elétrica ou identificadas diretamente a partir de uma série de vetores estado, à semelhança do método de Ibrahim no domínio do tempo (Ewins 1984). O filtro de Schmidt-Kalman, em que informações sobre variações locais de alguns parâmetros sejam conhecidas, também poderia ser uma alternativa a modelos mais complexos de sistemas fisiológicos ou de escoamento, para ficar no âmbito apenas das aplicações abordadas ao longo deste trabalho.

Finalmente, em campos como a Geologia e a Meteorologia, há situações que demandam a solução de problemas inversos descritos por modelos dinâmicos não-lineares da litosfera, hidrosfera e atmosfera. Nestes casos, embora haja enorme quantidade de

dados medidos disponíveis, a capacidade de processamento ainda é um empecilho à obtenção de estimativas corretas em tempo real. Além disso, quando tais modelos são linearizados visando sua simplificação, muitas vezes incorre-se em erros que não podem ser desprezados. Para tais situações, tem-se pesquisado a utilização de variantes do filtro de Kalman em que evita-se a linearização dos modelos para a obtenção das equações de atualização do filtro, casos do Ensemble Kalman Filter (Burgers, van Leeuwen & Evensen 1998, Eknes & Evensen 2002, Natvik & Evensen 2003) e do Unscented Kalman Filter (Julier, Uhlmann & Durrant-Whyte 2000). A viabilidade de implementação de tais métodos na TIE, cujas características são semelhantes às acima descritas, pode ser investigada.

## Referências Bibliográficas

- Amato, M., Barbas, C., Medeiros, D., Magaldi, R., Schettino, G., Lorenzi-Filho, G., Kairalla, R., Deheinzelin, D., Munoz, C., Oliveira, R., Takagaki, T. & Carvalho, C. (1998). Effect of a protective-ventilation strategy on mortality in the acute respiratory distress syndrome, *New England Journal of Medicine* **338**(6): 347–54.
- Barber, D. C. & Brown, B. H. (1984). Applied potential tomography, *J. Phys. E: Sci. Instrum.* **17**: 723–733.
- Baumann, M. H. & Strange, C. (1997). Treatment of spontaneous pneumothorax, *Chest* **35**(112): 789–804.
- Bertemes-Filho, P., Brown, B. H. & Wilson, A. (2000). A comparison of modified howland circuits as current generators with current mirror type circuits, *Physiol. Meas.* **21**: 1–6.
- Bonovas, P. M., Kyriacou, G. A. & Sahalos, J. N. (2001). A realistic three dimensional FEM model of the human head, *Physiological Measurement* **22**(1): 65–76.
- Brogan, W. L. (1991). *Modern Control Theory*, 3rd. edn, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River.
- Brown, B. H. (2001). Medical impedance tomography and process impedance tomography: a brief review, *Measurement Science and Technology* **12**: 991–996.
- Brown, B. H. & Segar, A. D. (1987). The Sheffield data collection system, *Clin. Phys. Physiol. Measurement* **8**(Suppl. A): 91–97.
- Burgers, G., van Leeuwen, P. & Evensen, G. (1998). Analysis Scheme in the ensemble Kalman Filter, *Monthly Weather Rev.* **126**: 1719–1724.
- Cheney, M. & Isaacson, D. (1992). Distinguishability in Impedance Imaging, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **39**(8): 852–860.
- Cheney, M., Isaacson, D. & Newell, J. C. (1999). Electrical Impedance Tomography, *SIAM J. Appl. Math. Review* **41**(1): 85–101.
- Cheng, K. S., Isaacson, D., Newell, J. C. & Gisser, D. G. (1989). Electrode Models for Electric Current Computed Tomography, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **36**(9): 918–924.

- Clay, M. T. & Ferree, T. C. (2002). Weighted regularization in electrical impedance tomography with applications to acute cerebral stroke, *IEEE Transactions on Medical Imaging* **21**(6): 629–637.
- ECG/EKG Electrodes (2004). EUA. Disponível em: [www.leadlok.com](http://www.leadlok.com). Acesso em: 3/3/2004.
- Eknes, M. & Evensen, G. (2002). An Ensemble Kalman Filter with a 1-D Marine Ecosystem Model, *J. Marine Sys.* **36**: 75–100.
- Ewins, D. J. (1984). *Modal testing: theory and practice*, Research Studies Press: Wiley, New York.
- Eyüboğlu, B. M., Köksal, A. & Demirbilek, M. (2000). Distinguishability analysis of an induced EIT system using discrete coils, *Phys. Med. Biol.* **45**: 1997–2009.
- Eyüboğlu, B. M. & Pilkington, T. (1993). Comments on Distinguishability in Electrical Impedance Imaging, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **40**(12): 1328–1330.
- Faes, T., van der Meij, H., Munck, J. & de Heethaar, R. (1999). The electric resistivity of human tissues (100 *hz* – 10 *mhz*): A meta-analysis of review studies, *Physiol. Meas.* **20**: R1–R10.
- Fleury, A. T. (1985). *Estimadores de Estado de Sistemas Dinâmicos Baseados no Conceito de Dualidade*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, Departamento de Engenharia Mecânica.
- Gelb, A. (ed.) (1979). *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, Cambridge, MA.
- Gibson, A., Bayford, R. H. & Holder, D. S. (2000). Two-dimensional finite element modelling of the neonatal head, *Physiological Measurement* **21**(1): 45–52.
- Gisser, D. G., Isaacson, D. & Newell, J. C. (1987). Current topics in impedance imaging, *Clin. Phys. Physiol. Measurement* **36**(Suppl. A): 39–46.
- Gobat, J. I. & Atkinson, D. C. (1994). *The FEIt System: User's Guide and Reference Manual*, University of California Computer Science Technical Report CS94-376, San Diego.
- Gonzalez Lima, R. G. & Trigo, F. C. (2003). Tomography Algorithm Using the Extended Kalman Filter, *4th. Conference on Biomedical Applications of Electrical Impedance Tomography*, UMIST-UK, April 23-25th.
- Gonzalez Lima, R. G., Trigo, F. C. & Amato, M. B. P. (2002). Extended kalman filter for electrical impedance tomography, *Technology Meets Surgery International 2002*, Proceedings of Technology Meets Surgery 2002, Dundee, Scotland.
- Gonzalez, R. C. & Woods, R. E. (1986). *Digital Image Processing*, Addison-Wesley, Reading.

- Guo, L. (1990). Estimating time-varying parameters by the kalman filter based algorithm: Stability and convergence, *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(2): 141–147.
- Guyton, A. C. (1992). *Tratado de Fisiologia Médica*, Guanabara Koogan, Rio de Janeiro.
- Hanavan, E. P. (1964). A mathematical model of the human body, *Technical Report AMRL-TR-64-102, AD-608-463*, Aerospace Medical Research Laboratories, Wright-Patterson Air Force Base.
- Hansen, P. C. (1992). Analysis of Discrete Ill-Posed Problems by Means of the L-Curve, *SIAM J. Appl. Math. Review* **34**(4): 561–580.
- Heikkinen, L. M., Vilhunen, T., West, R. M. & Vauhkonen, M. (2002). Simultaneous reconstruction of electrode contact impedances and internal electrical properties: II. Laboratory experiments, *Meas. Sci. Technol.* **13**: 1855–1861.
- Holtzman, J. M. (1970). *Nonlinear System Theory - A Functional Analysis Approach*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.
- HP34401A Multimeter User's Guide* (1996).
- Hua, P., Webster, J. G. & Tompkins, W. (1987). Effect of the measurement method on noise handling and image quality of EIT imaging, *Proc. Ninth Int. Conf. IEEE Eng. In Med. And Biol. Society*, Vol. 2, IEEE, pp. 1429–1430.
- Hua, P., Woo, E. J., Webster, J. G. & Tompkins, W. J. (1993a). Finite Element Modeling of Electrode-Skin Contact Impedance in Electrical Impedance Tomography, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **40**(4): 335–343.
- Hua, P., Woo, E. J., Webster, J. G. & Tompkins, W. J. (1993b). Using Compound Electrodes in Electrical Impedance Tomography, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **40**(1): 29–34.
- Isaacson, D. (1986). Distinguishability of Conductivities by Electric Current Computed Tomography, *IEEE Trans. Med. Imag.* **MI-5**: 91–95.
- Jain, H., Isaacson, D., Edic, P. M. & Newell, J. C. (1993). Electrical Impedance Tomography of Complex conductivity distributions with noncircular boundary, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **44**(11): 1051–1060.
- Jazwinski, A. H. (1970). *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York.
- Julier, S., Uhlmann, J. & Durrant-Whyte, H. F. (2000). A New Method for the Non-linear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators, *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**(3): 477–482.

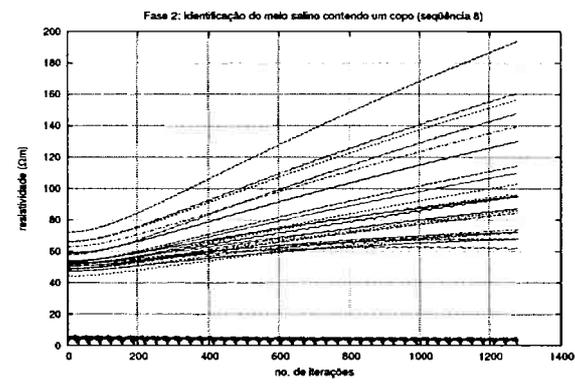
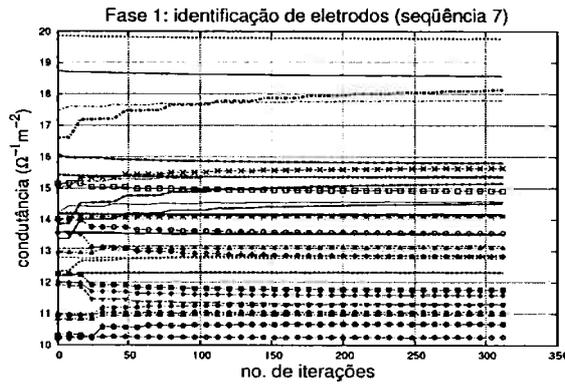
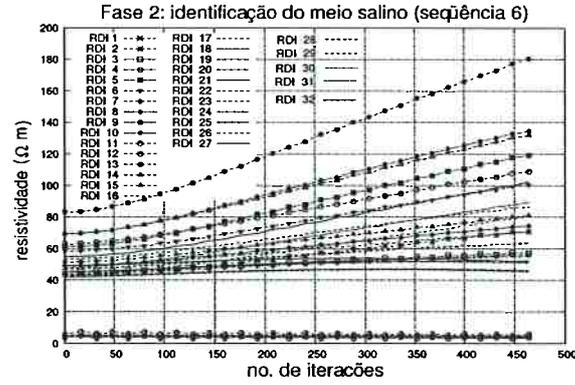
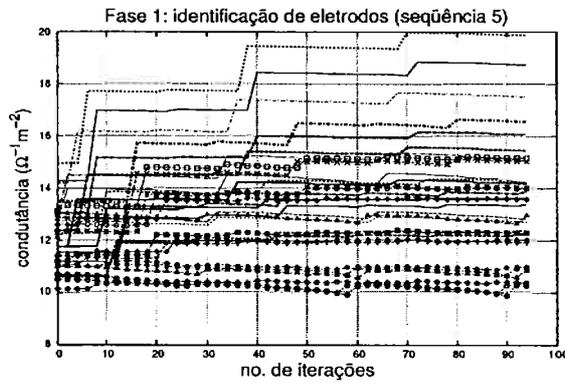
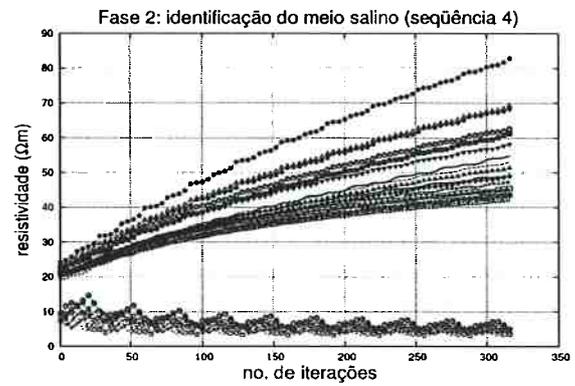
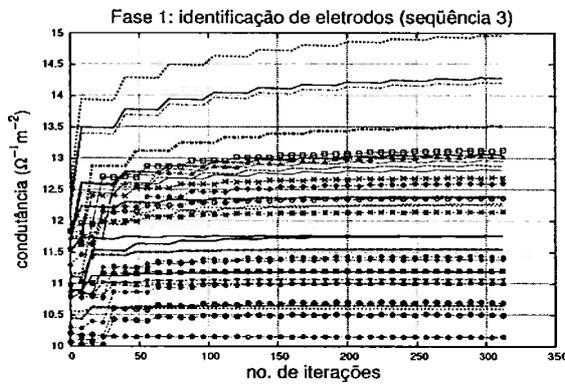
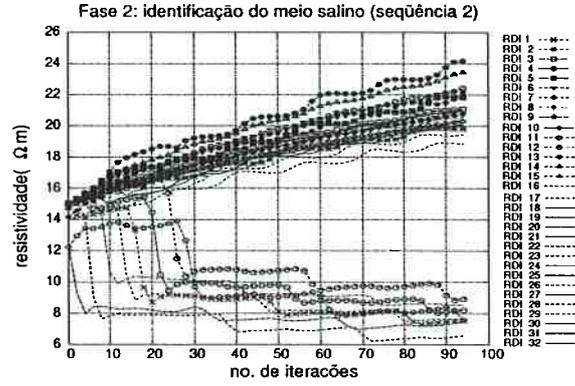
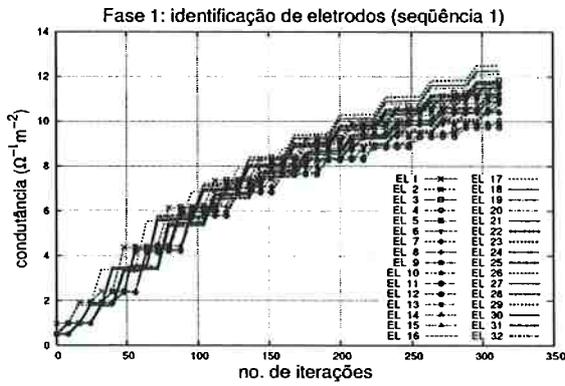
- Kaipio, J. P., Karjalainen, P. A., Somersalo, E. & Vauhkonen, M. (1999). State Estimation in Time-varying Electrical Impedance Tomography, *Annals New York Acad. Sci.* **873**: 430–439.
- Kaipio, J. & Somersalo, E. (2005). *Statistical and Computational Inverse Problems*, Series: Applied Mathematical Sciences, Vol. 160, Springer-Verlag, Berlin.
- Kalman, R. E. (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Trans. ASME, J. Basic Engineering* **82**(D): 35–45.
- Kalman, R. E. & Bucy, R. S. (1961). New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, *Trans. ASME, J. Basic Engineering* **83**(D): 95–108.
- Kim, K. Y., Kang, S. I., Kim, M. C., Lee, Y. J. & Vauhkonen, M. (2002). Dynamic Image Reconstruction in Electrical Impedance Tomography With Known Internal Structures, *IEEE Transactions on Magnetics* **38**(2): 1301–1304.
- Kim, K. Y., Kim, B. S., Kim, M. C., Lee, Y. J. & Vauhkonen, M. (2001). Image reconstruction in time-varying electrical impedance tomography based on the extended Kalman filter, *Measurement Science and Technology* **12**: 1032–1039.
- Kwon, Y. H. (1998). BSP Estimation Methods. Disponível em: <http://kwon3d.com/theory/bspeq/mthd.html>. Acesso em: 2/6/2005.
- Lionheart, W. (2004). EIT reconstruction algorithms: pitfalls, challenges and recent developments, *Physiol. Meas.* **25**: 125–142.
- Liu, C. H., Niranjani, S. C., Clark Jr., J. W., San, K. Y., Zwischenberger, J. B. & Bidani, A. (1998). Airway mechanics, gas exchange, and blood flow in a nonlinear model of the normal human lung, *Journal of Applied Physiology* **84**(4): 1447–1469.
- Logan, D. L. (1986). *A First Course in the Finite Element Method*, PWS-KENT Publishing Company, Boston.
- Malmivuo, J. & Plonsey, R. (1995). *Bioelectromagnetism - Principles and Applications of Bioelectric and Biomagnetic Fields*, Oxford University Press, Oxford.
- Mendel, J. M. (1971). Computational Requirements for a Discrete Kalman Filter, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-16**(6): 748–758.
- Miranda, D. A. R. (2003). *Algoritmo de Impedância Elétrica Baseado em Newton-Raphson*, Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- Murai, T. & Kagawa, Y. (1985). Electrical Impedance Computed Tomography Based on a Finite Element Model, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **32**(3): 177–184.

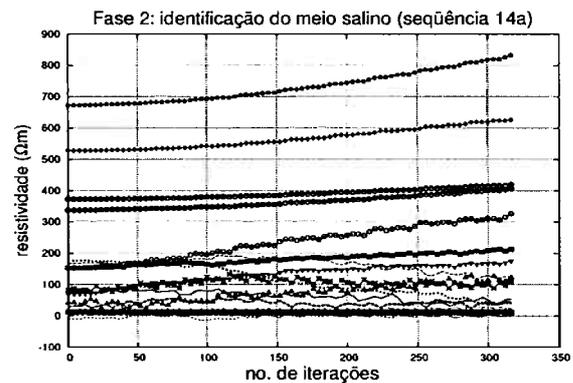
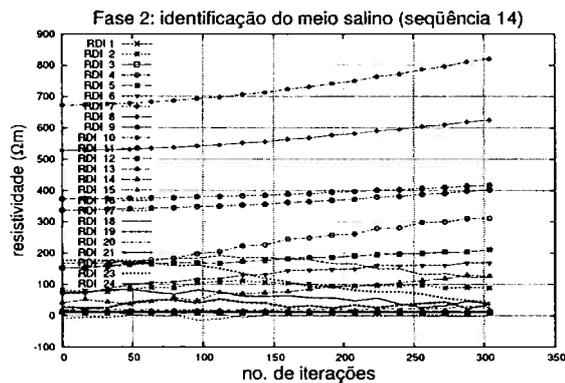
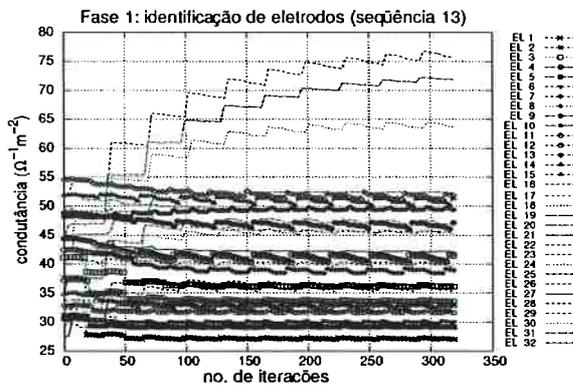
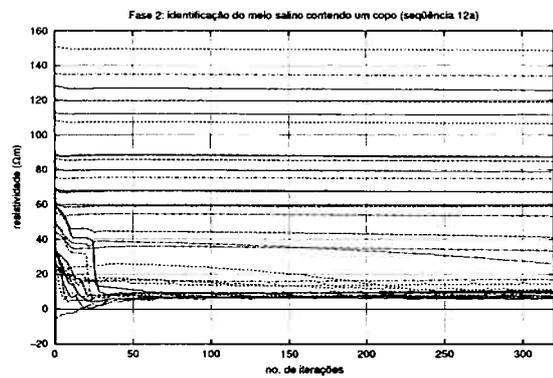
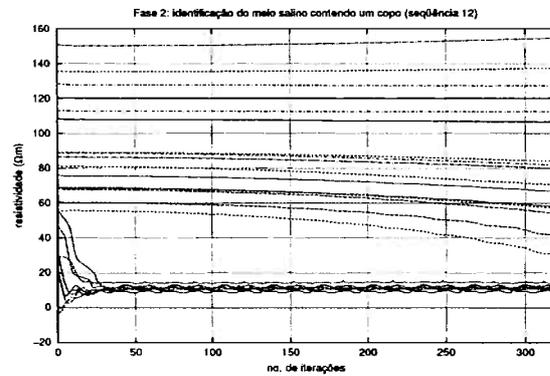
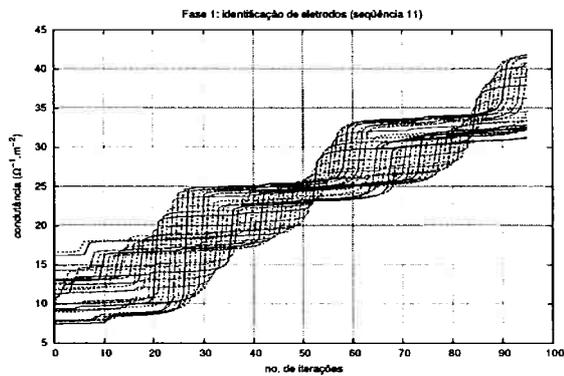
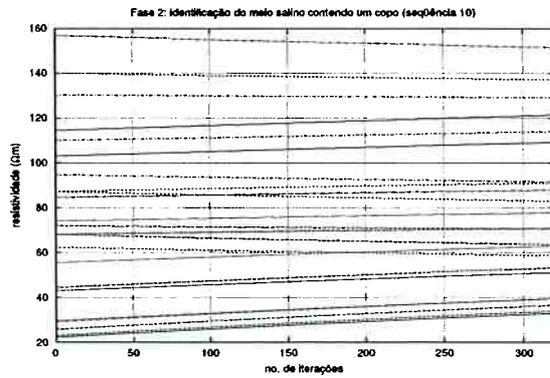
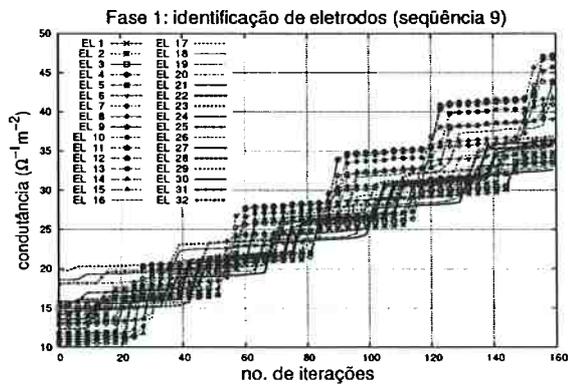
- Nascimento Jr., C. L. (1988). *Estudo Comparativo de Métodos de Combate à Divergência de Filtros de Kalman*, Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brasil.
- Natvik, L. & Evensen, G. (2003). Assimilation of ocean colour data into a biochemical model of the North Atlantic. Part1. Data assimilation experiments, *J. Marine Sys.* **40-41**: 127–153.
- Press, W., Vetterling, W. T., Teukolsky, S. A. & Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge [Cambridgeshire].
- Rios Neto, A. & Kuga, H. K. (1982). Estimativa adaptativa do ruído no estado para estimadores sequenciais, *Technical Report INPE-2385-RPI/069*, INPE, São José dos Campos.
- Rios Neto, A. & Kuga, H. K. (1985). Kalman filtering state noise adaptive estimation, *Anais do ELECOM'85*, Rio de Janeiro, Brasil.
- Rosell, J., Colominas, P. R., Pallas-Areny, R. & Webster, J. G. (1988). Skin impedance from 1 Hz to 1 MHz, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **35**(1): 649–651.
- Sadiku, M. N. O. (1992). *Numerical Tehcniques in Elecromagnetis*, CRC Press Inc., Boca Raton.
- Saka, B. & Yilmaz, A. (2004). Elliptic Cilinder Geometry for Distinguishability Analysis in Impedance Tomography, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **51**(1): 126–132.
- Schmitt, U. & Louis, A. K. (2002). Efficient algorithms for the regularization of dynamic inverse problems: I. Theory, *Inverse Problems* **18**: 645–658.
- Singer, R. A. & Sea, R. G. (1971). Increasing the computational efficiency of discrete Kalman filters, *IEEE Transactions on Automatic Control* **June**: 254–257.
- Sorenson, H. W. (1966). Kalman filtering techniques, in C. T. Leondes (ed.), *Advances in Control Systems*, Vol. 3, Academic Press, New York.
- Sorenson, H. W. (ed.) (1992). *Kalman Filtering: Theory and Application*, IEEE Press, New York.
- Stratton, J. A. (1941). *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York.
- Trigo, F. C. (2001). *Filtro Estendido de Kalman Aplicado à Tomografia por Impedância Elétrica*, Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- Trigo, F. C. & Gonzalez Lima, R. G. (2005). Iterated Extended Kalman Filter with Adaptive State Noise Estimation for Electrical Impedance Tomography, *Technology Meets Surgery International 2005*, Proceedings of Technology Meets Surgery 2005, São Paulo, Brazil.

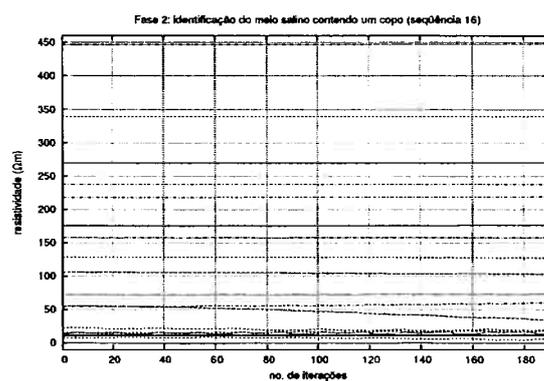
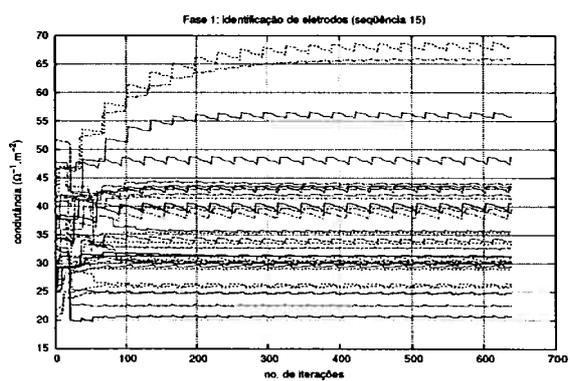
- Trigo, F. C., Gonzalez Lima, R. G. & Amato, M. B. P. (2004). Electrical impedance tomography using the extended Kalman Filter, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **51**(1): 72–81.
- Vauhkonen, M. (1997). *Electrical impedance tomography and prior information*, Tese de Doutorado, University of Kuopio, Kuopio Finland.
- Vauhkonen, M., Karjalainen, P. A. & Kaipio, J. P. (1998). A Kalman Filter Approach to Track Fast Impedance Changes in Electrical Impedance Tomography, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **45**(4): 486–493.
- Vauhkonen, M., Vadáz, D., Karjalainen, P. A., Somersalo, E. & Kaipio, J. P. (1998). Tikhonov Regularization and Prior Information in Electrical Impedance Tomography, *IEEE Transactions on Medical Imaging* **17**(2): 285–293.
- Vilhunen, T., Kaipio, J. P., Vauhkonen, P. J., Savolainen, T. & Vauhkonen, M. (2002). Simultaneous reconstruction of electrode contact impedances and internal electrical properties: I. Theory, *Meas. Sci. Technol.* **13**: 1848–1854.
- Watkins, D. S. (1991). *Fundamentals of Matrix Computations*, John Wiley and Sons, New York.
- West, R., Tapp, H. S., Spink, D. M., Bennett, M. A. & Williams, R. (2001). Application-specific Optimization of Regularization for Electrical Impedance Tomography, *Measurement Science and Technology* **12**: 1050–1054.
- What is Process Tomography* (2005). UK. Disponível em: [www.pace.leeds.ac.uk/pace/what.htm](http://www.pace.leeds.ac.uk/pace/what.htm). Acesso em: 2/6/2005.
- Woo, E. J., Hua, P., Webster, J. G. & Tompkins, W. J. (1992). Measuring Lung Resistivity Using Electrical Impedance Tomography, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **39**: 758–760.
- Yorkey, T. J., Webster, J. G. & Tompkins, W. J. (1987). Comparing Reconstruction Algorithms for Electrical Impedance Tomography, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **34**(11): 843–852.

## **Apêndice A**

### **Ensaio 6 - evolução do estado**







## **Apêndice B**

### **Ensaio 9 - FEIAK - estado e resíduos**

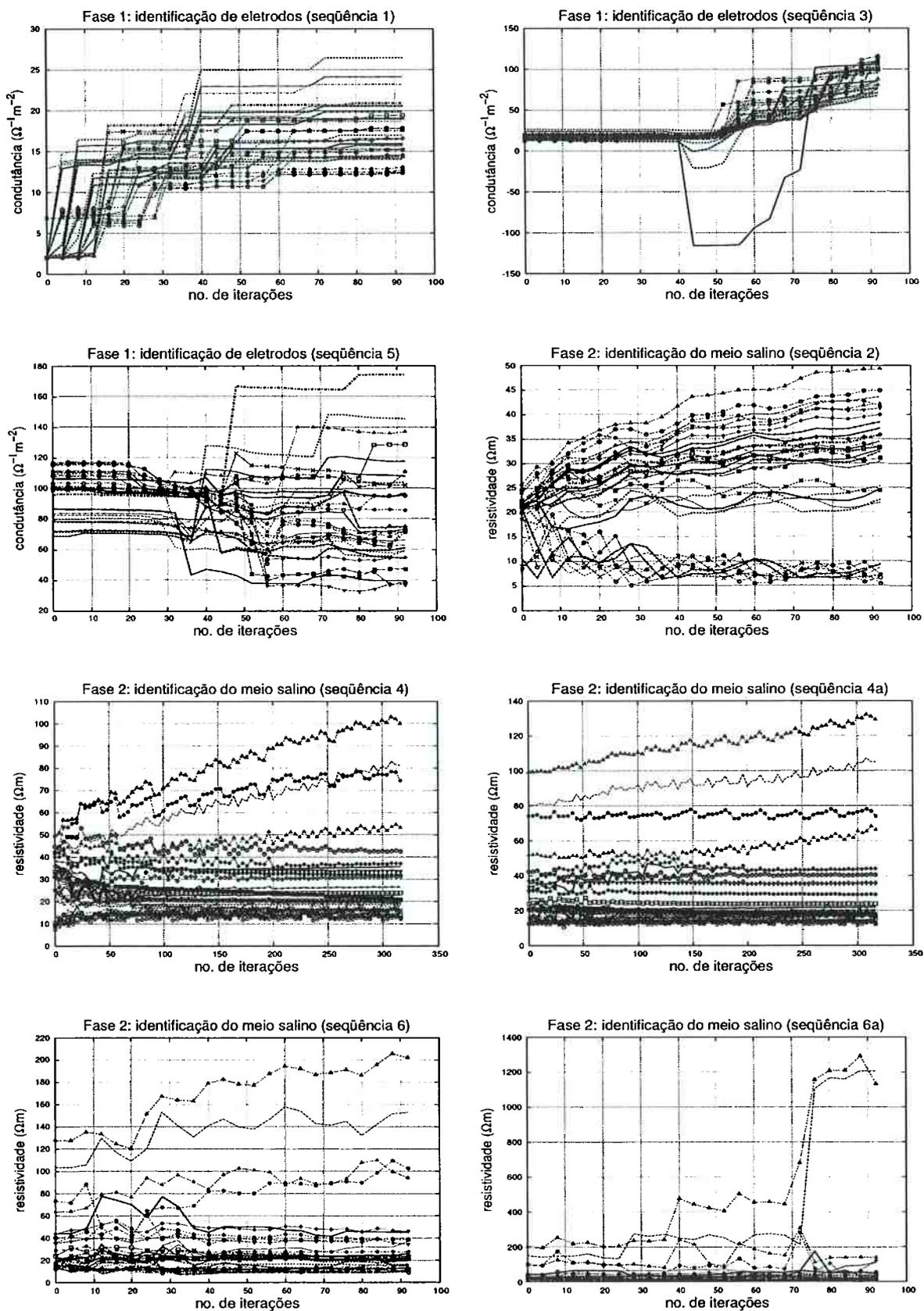


Figura B.1: Ensaio 9: evolução do estado – seqüências 1, 3, 5, 2, 4, 4a, 6 e 6a.

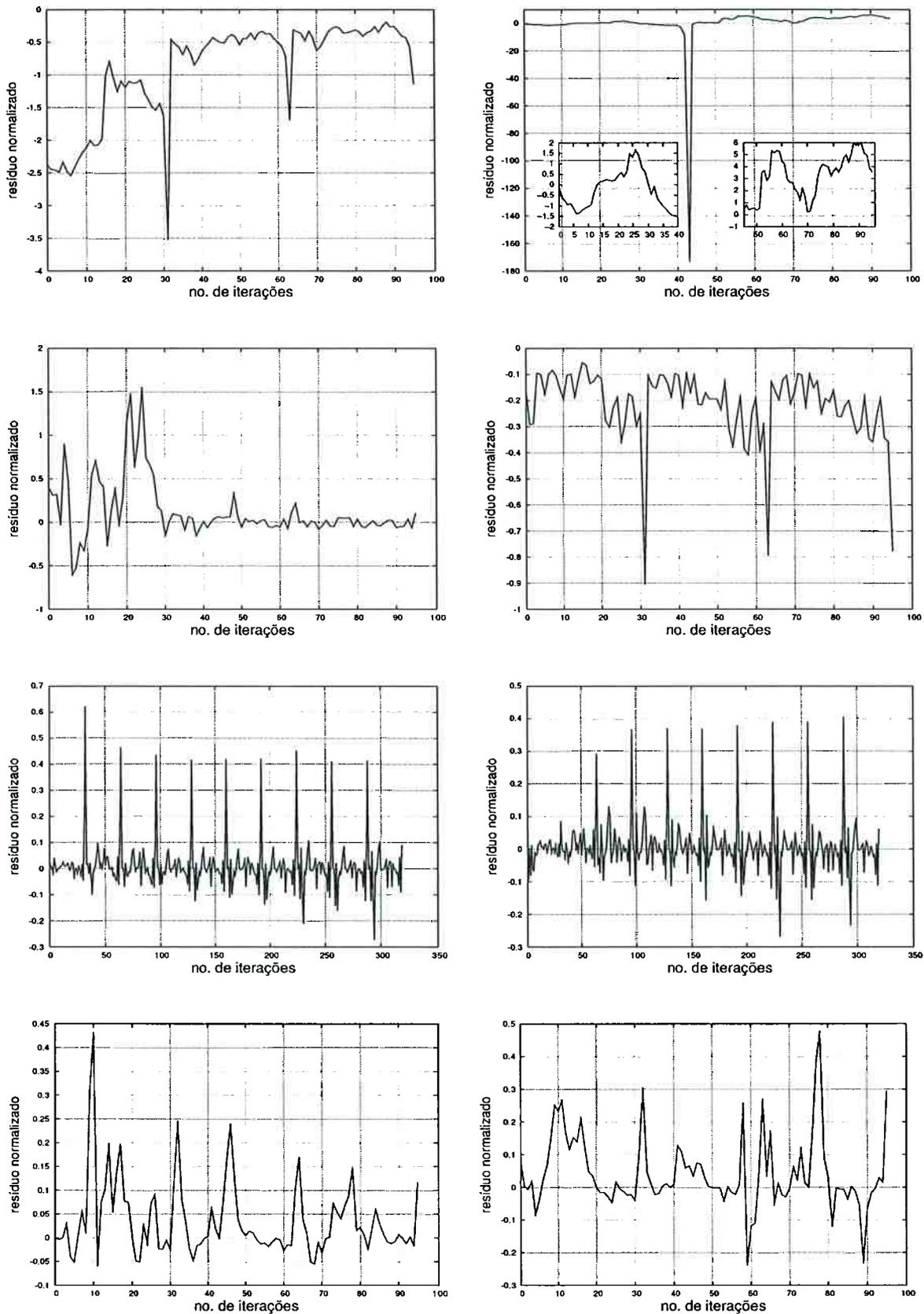


Figura B.2: Ensaio 9: resíduos – seqüências 1, 3, 5, 2, 4, 4a, 6 e 6a.

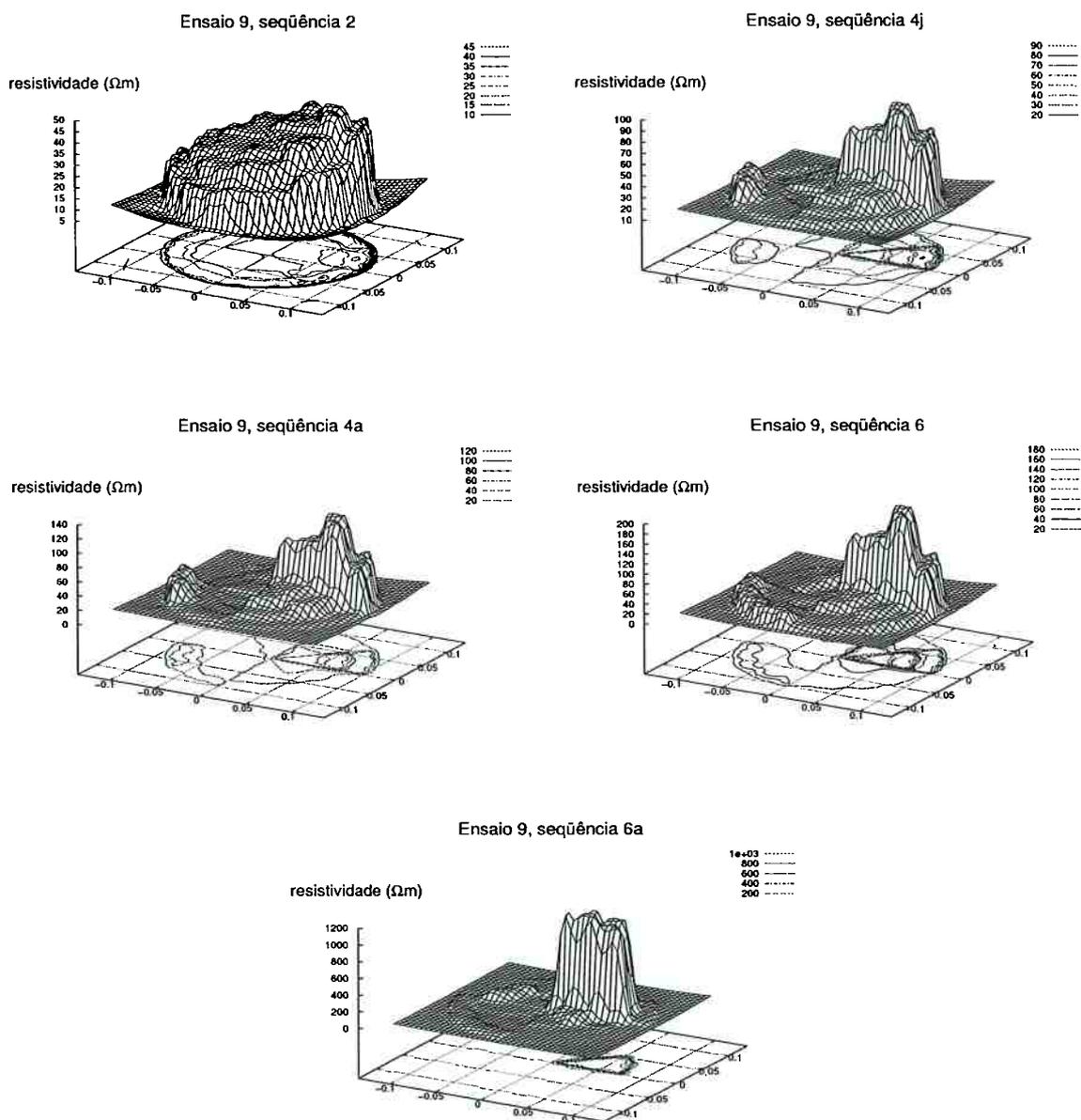


Figura B.3: Ensaio 9: distribuições finais de resistividades.